令和７年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

2025 Entrance Examination (Mathematics Course/Mathematical Sciences Course)
Master's Program, Division of Mathematics and Mathematical Sciences, Kyoto University

専門科目 Advanced Mathematics

◎　問題は 13 題ある．数学系志望者は $\boxed{1}$〜$\boxed{11}$ のうちの２題を選択して解答せよ．ただし，数学系志望者は $\boxed{9}$と$\boxed{10}$の２題を同時に選択してはならない．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{13}$のうちの２題を選択して解答せよ．(数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は２題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって２〜４題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること．
There are 13 problems. Applicants to the Mathematics Course (数学系) should select and answer 2 problems out of the 11 problems $\boxed{1}$–$\boxed{11}$, but are not allowed to select $\boxed{9}$ and $\boxed{10}$ at the same time. Applicants to the Mathematical Sciences Course (数理解析系) should select and answer 2 problems out of the 13 problems $\boxed{1}$–$\boxed{13}$. (Applicants to either the Mathematics Course or the Mathematical Sciences Course should only answer 2 problems, and applicants to both courses should answer 2-4 problems in total, depending on their choices.) Write the problem numbers you choose on the selection sheet.

◎　解答時間は 2 時間 30 分 である．
The duration of the examination is 2 hours and 30 minutes.

◎　問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと．
The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．
It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculators, cell phones, information devices or personal watches/clocks during the examination. Such materials and devices must be kept in the designated area.

［注意］ Instructions

1. 指示のあるまで問題文を見ないこと.
   Do not look at the problems until it is permitted by the proctor.

2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ.
   Write your name and applicant number on each answer sheet and each draft/calculation sheet.

3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ.
   Use a separate answer sheet for each problem and, on each sheet, write the number of the problem being attempted within the box.

4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
   If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to an additional answer sheet (or more). If you do so, indicate clearly at the bottom of the page that there is a continuation.

5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること.
   When handing in your exam to the proctor, stack your selection sheet and answer sheets (ordered by problem number), followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half, with the filled-in side facing outward.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい.
   You may keep this problem sheet.

［記号］ Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す. In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

The English translation follows.

$\boxed{1}$ 次の (条件 1) と (条件 2) を両方とも満たす群 G をすべて求めよ．

(条件 1) G は有限アーベル群である．

(条件 2) G は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群と同型である．

ただし，整数を成分とする行列式が 1 の 2 次正方行列全体のなす群を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とおく．

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbb{R}[X,Y]$ の極大イデアルは，次のいずれかの形で表されることを示せ．

- $(X+a,\ Y+b) \quad (a,b \in \mathbb{R})$
- $(X^2+aX+b,\ Y+cX+d) \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$
- $(X+aY+b,\ Y^2+cY+d) \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$

$\boxed{3}$ 正整数 n に対し整数を係数とする多項式 $f_n(X)$ を次のように定める．

$$\begin{cases} f_1(X) = X^2 - 2 \\ f_n(X) = f_{n-1}(X^2-2) \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

K_n を $f_n(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とする．このとき，ガロア群 $\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})$ を求めよ．

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ の部分集合 M を次のように定める．

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\} \mid x^2+y^2-z^2+z^3+z^4=0\right\}$$

(1) M は $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

(2) 写像 $f : M \to S^2$ を次のように定める．

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$$

ただし，$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ である．
f の臨界値の集合を求めよ．

$\boxed{5}$ $S^6 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) \in \mathbb{R}^7 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_7^2=1\}$ とする．S^6 の部分集合 A, B を

$$A = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) \in S^6 \mid x_5=x_6=x_7=0\right\}$$

$$B = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) \in S^6 \mid x_1=x_2=x_3=0\right\}$$

と定める．

(1) $S^6 \setminus A$ の整数係数ホモロジー群を計算せよ．

(2) $S^6 \setminus (A \cup B)$ の整数係数ホモロジー群を計算せよ．

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}$ 上の実数値ルベーグ可測関数 f が

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx < \infty, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} n^2 \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(n+x)|^2 \, dx < \infty$$

を満たすとする. ただし, $\mathbb{N}$ は非負整数全体からなる集合とする. このとき, ほとんど全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n \in \mathbb{N}, n \to \infty} f(n+x) = 0$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{7}$ $L^2(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値 2 乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間とし, $f \in L^2(\mathbb{R})$ のノルムを

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2} f(y) dy$$

と定めると, T は $L^2(\mathbb{R})$ 上の有界作用素であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ 上の有界な C^1 級関数 φ の導関数 φ' が $\varphi' \in L^2(\mathbb{R})$ を満たすとし, $L^2(\mathbb{R})$ 上の有界作用素 S を

$$(Sf)(x) = \varphi(x) f(x)$$

と定める. このとき, $ST - TS$ はコンパクト作用素であることを示せ.

$\boxed{8}$ $L^2(\mathbb{R}^3)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の実数値 2 乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間とする.

(1) $\mathbb{R}^3$ 上の実数値急減少関数の組 f, g に対して

$$B[f,g] = -\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\, x\cdot\nabla\, g(x)dx$$

と定める. ただし, $x\cdot\nabla = \sum_{j=1}^3 x_j\partial_{x_j}$ である. このとき, $B[f,f] \geq 0$ を示せ.

(2) $\mathbb{R}^3$ 上の実数値急減少関数からなる 2 つの列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ と $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ が以下の (a) と (b) を満たすとする.

(a) ある $h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ が存在して, $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ は h に $L^2(\mathbb{R}^3)$ において弱収束する.

(b) $\mathbb{R}^3$ 上の任意の実数値急減少関数 φ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_n(x)\left(|x|^2\varphi(x) - \Delta\varphi(x)\right)dx = \int_{\mathbb{R}^3} h_n(x)\varphi(x)dx$$

が成り立つ. ただし, $\Delta = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j}^2$ とする.

このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) 以下の (a') と (b') を満たす $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ が存在することを示せ.

(a') f は $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ のある部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k=1}^\infty$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ における弱収束極限となる.

(b') $\mathbb{R}^3$ 上の任意の実数値急減少関数 φ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\left(|x|^2\varphi(x) - \Delta\varphi(x)\right)dx = \int_{\mathbb{R}^3} h(x)\varphi(x)dx$$

が成り立つ.

(ii) 問 (i) の f について $|x|^2 f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ を示せ.

$\boxed{9}$ $a > \frac{1}{2}$ とし, $t \in \mathbb{R}$ の関数 $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ に対する常微分方程式系

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - x^2 - y^2) - y(1 + x + y) \\ \dot{y} = x(1 + x + y) + y(a - x^2 - y^2) \end{cases} \tag{$*$}$$

を考える. ここで, ドット "$\cdot$" は t に関する微分を表す. $E_1, E_2 \in \mathbb{R}^2$ を

$$E_1 = \left(\frac{-1 - \sqrt{2a - 1}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2a - 1}}{2} \right),$$
$$E_2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{2a - 1}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{2a - 1}}{2} \right)$$

とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 原点を中心とする半径 $\sqrt{a}$ の円周は $(*)$ の不変集合であることを示せ.

(2) 平衡点 E_2 から平衡点 E_1 へのヘテロクリニック解が存在することを示せ.

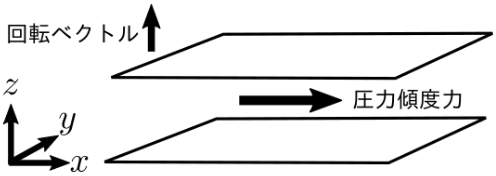
(3) 平衡点 $(0, 0)$ から平衡点 E_1 へのヘテロクリニック解および平衡点 $(0, 0)$ から平衡点 E_2 へのヘテロクリニック解が存在することを示せ.

ここで $(*)$ の相異なる平衡点 $p, q \in \mathbb{R}^2$ に対して, $(*)$ の解 $(x(t), y(t))$ が

$$\lim_{t \to -\infty} (x(t), y(t)) = p, \quad \lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = q$$

を満たすとき, $(x(t), y(t))$ は p から q へのヘテロクリニック解であるという.

$\boxed{10}$ 回転系における平行な2枚の平面間を，非圧縮粘性流体が平面に平行な一様一定圧力傾度力により駆動されている．平面は系の回転軸と垂直であり，回転軸の方向に z 軸, 圧力傾度力の向きに x 軸，それらと直交する向きに y 軸を選ぶ (下図).



平面に平行な 2 次元流れを支配する方程式は

$$-2\Omega v_* = \nu\frac{d^2u_*}{dz_*^2} + F, \quad 2\Omega u_* = \nu\frac{d^2v_*}{dz_*^2}, \quad u_*\left(\pm\frac{D}{2}\right) = v_*\left(\pm\frac{D}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

である．ここで $u_*(z_*)$ と $v_*(z_*)$ は $z = z_*$ における流れの x 成分と y 成分である．ν，F，D，Ω はそれぞれ流体の粘性率，一定圧力傾度力，平面間の幅，および系の回転角速度であり，すべて正の定数である．

1. $z_* = Dz$，$u_* = \dfrac{F}{2\Omega}u$, $v_* = \dfrac{F}{2\Omega}v$ と変換することにより, (1) が $u(z)$, $v(z)$ に関する方程式

$$-v = E\frac{d^2u}{dz^2} + 1, \quad u = E\frac{d^2v}{dz^2}, \quad u\left(\pm\frac{1}{2}\right) = v\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad (2)$$

の形で表されることを示し，定数 E を定めよ．

2. $\lambda = \dfrac{1+i}{\sqrt{2E}}$ とする．複素速度 $w(z) = u(z) + iv(z)$ を用いて (2) を書き直し，$w(z)$ を λ を用いて表せ．ただし i は虚数単位である．

3. $\displaystyle\lim_{E\to\infty} Ew(z)$ を求めよ．

4. $\displaystyle\lim_{E\to 0}\lim_{z\to -\frac{1}{2}+0} \frac{\sqrt{E}\,w(z)}{z+\frac{1}{2}}$ を求めよ．

$\boxed{11}$ (1) 非負整数全体の集合を $\mathbb{N}$ と書く．集合 A 上の 2 項関係 $\preceq$ が反射性, 推移性および以下の性質 (*) を満たすとき, $(A, \preceq)$ を整列擬順序という．

(*) A の要素からなるどんな無限列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ についても, $a_i \preceq a_j$, $i < j$ を満たす $i, j \in \mathbb{N}$ が存在する．

整列擬順序 $(A, \preceq_A)$, $(B, \preceq_B)$ が与えられたとき, $A \times B$ 上の 2 項関係 $\preceq$ を

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 \preceq_A a_2 \text{ かつ } b_1 \preceq_B b_2$$

により定める．このとき $(A \times B, \preceq)$ は整列擬順序であることを示せ．

(2) $(S, \to)$ を状態遷移系とする．つまり S は（有限とは限らない）集合であり, $\to$ は S 上の 2 項関係である．1 個以上の関数 $\rho_1, \ldots, \rho_n : S \to \mathbb{N}$ が与えられ, 条件「$s, t \in S$ が $s \to^+ t$ を満たすならば, ある $1 \le i \le n$ について $\rho_i(s) > \rho_i(t)$」が成り立つとする．ここで $\to^+$ は $\to$ の推移的閉包である．このとき, S は無限長の遷移列 $s_0 \to s_1 \to s_2 \to \cdots$ を含まないことを示せ．

$\boxed{12}$ $G = (V, E)$ を頂点集合 V，辺集合 E をもつ無向有限グラフとする．頂点 $v \in V$ に接続する G の辺全体の集合を $\delta_G(v)$ と表す．辺部分集合 $M \subseteq E$ が G のマッチングであるとは，M のどの相異なる 2 辺も端点を共有しないことをいう．頂点部分集合 $C \subseteq V$ が G の頂点被覆であるとは,

$$\bigcup_{v \in C} \delta_G(v) = E$$

をみたすことをいう.

G によって定まる次の線形計画問題 $\mathrm{LP}(G)$ を考える.

最大化 $\displaystyle\sum_{e \in E} x_e$

制約

- $\displaystyle\sum_{e \in \delta_G(v)} x_e \le 1 \quad (v \in V)$
- $x_e \ge 0 \quad (e \in E)$

1. $\mathrm{LP}(G)$ が整数最適解をもたない G が存在することを示せ.
2. $\mathrm{LP}(G)$ が整数最適解をもつが，G の最大マッチングのサイズと G の最小頂点被覆のサイズが異なる G が存在することを示せ.
3. G の最大マッチングのサイズと G の最小頂点被覆のサイズが等しいならば, $\mathrm{LP}(G)$ が整数最適解をもつことを示せ.

$\boxed{13}$ 単位角振動数をもつ調和振動子の量子力学を考える．生成演算子 $a^\dagger$ と消滅演算子 a は交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ を満たす．数演算子 $N = a^\dagger a$ を使うとハミルトニアンは

$$H = N + \frac{1}{2}$$

と表せる．ただし、$\hbar = 1$ としている．今，正の整数 n および n 以下の正の整数 k に対して整数 $S(n,k)$ を

$$N^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(a^\dagger)^k a^k$$

により定める．さらに，多項式

$$B(n,x) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) x^k$$

を導入する．

(i) 表示 $a^\dagger = x, a = \dfrac{d}{dx}$ を利用して，$B(n,x)$ に対する指数型母関数

$$G(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} B(n,x) \frac{\lambda^n}{n!}$$

の具体形を求めよ．ただし，$B(0,x) = 1$ とする．

(ii) 複素数 z に対して規格化されたコヒーレント状態 $|z\rangle$ は

$$\langle z \,|\, z\rangle = 1, \quad a|z\rangle = z|z\rangle, \quad \langle z|a^\dagger = \bar{z}\langle z|$$

なる性質を持つ．ここで，$\bar{z}$ は z の複素共役を表す．逆温度 $\beta > 0$ の密度演算子を

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}$$

とするとき，伏見関数

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi} \langle z|\rho|z\rangle$$

を計算せよ．

The English translation starts here.

$\boxed{1}$ Determine all possible groups G satisfying both of the following conditions.

(Condition 1) G is a finite abelian group.

(Condition 2) G is isomorphic to a subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Here $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ is the group of 2×2 matrices whose entries are integers and whose determinant is 1.

$\boxed{2}$ Prove that every maximal ideal of the polynomial ring $\mathbb{R}[X, Y]$ of two variables over $\mathbb{R}$ has one of the following forms.

- $(X + a,\ Y + b) \quad (a, b \in \mathbb{R})$
- $(X^2 + aX + b,\ Y + cX + d) \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$
- $(X + aY + b,\ Y^2 + cY + d) \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$

$\boxed{3}$ For a positive integer n, define a polynomial $f_n(X)$ with integer coefficients as follows.

$$\begin{cases} f_1(X) = X^2 - 2 \\ f_n(X) = f_{n-1}(X^2 - 2) \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

Let K_n be the smallest splitting field of $f_n(X)$ over $\mathbb{Q}$. Calculate the Galois group $\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})$.

$\boxed{4}$ We define a subset M of $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ by

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\} \mid x^2 + y^2 - z^2 + z^3 + z^4 = 0 \right\}.$$

(1) Prove that M is a C^∞-submanifold of $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$.

(2) We define a map $f : M \to S^2$ by

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x,y,z),$$

where $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
Find the set of critical values of f.

$\boxed{5}$ We set $S^6 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in \mathbb{R}^7 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_7^2 = 1\}$. We define subsets A, B of S^6 by

$$A = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in S^6 \mid x_5 = x_6 = x_7 = 0 \right\}$$

$$B = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in S^6 \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0 \right\}.$$

(1) Compute the homology groups of $S^6 \setminus A$ with integer coefficients.

(2) Compute the homology groups of $S^6 \setminus (A \cup B)$ with integer coefficients.

$\boxed{6}$ Let f be a real-valued Lebesgue measurable function on $\mathbb{R}$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} n^2 \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(n+x)|^2 \, dx < \infty,$$

where $\mathbb{N}$ is the set of all nonnegative integers. Prove that

$$\lim_{n \in \mathbb{N}, n \to \infty} f(n+x) = 0$$

for almost every $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{7}$ Let $L^2(\mathbb{R})$ be the Hilbert space of all square-integrable real-valued functions on $\mathbb{R}$, and define the norm of $f \in L^2(\mathbb{R})$ by

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Answer the following questions.

(1) For $f \in L^2(\mathbb{R})$, set

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2} f(y) dy.$$

Prove that T is a bounded operator on $L^2(\mathbb{R})$.

(2) Let φ be a bounded C^1-function on $\mathbb{R}$ such that the derivative φ' of φ satisfies $\varphi' \in L^2(\mathbb{R})$, and define a bounded operator S on $L^2(\mathbb{R})$ by

$$(Sf)(x) = \varphi(x) f(x).$$

Prove that $ST - TS$ is a compact operator.

$\boxed{8}$ Let $L^2(\mathbb{R}^3)$ be the Hilbert space of all square-integrable real-valued functions on $\mathbb{R}^3$.

(1) For a pair f, g of rapidly decreasing real-valued functions on $\mathbb{R}^3$, set

$$B[f,g] = -\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\, x\cdot\nabla\, g(x)dx,$$

where $x\cdot\nabla = \sum_{j=1}^{3} x_j \partial_{x_j}$. Prove that $B[f,f] \geq 0$.

(2) Assume that two sequences $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ of rapidly decreasing real-valued functions on $\mathbb{R}^3$ satisfy the following (a) and (b).

(a) There exists $h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ such that $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to h weakly in $L^2(\mathbb{R}^3)$.

(b) For all rapidly decreasing real-valued function φ on $\mathbb{R}^3$, it holds that

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_n(x)\left(|x|^2\varphi(x) - \Delta\varphi(x)\right)dx = \int_{\mathbb{R}^3} h_n(x)\varphi(x)dx,$$

where $\Delta = \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}^2$.

Answer the following questions.

(i) Prove that there exists $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ satisfying the following (a') and (b').

(a') f is a weak limit in $L^2(\mathbb{R}^3)$ of some subsequence $\{f_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ of $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(b') For all rapidly decreasing real-valued function φ on $\mathbb{R}^3$, it holds that

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\left(|x|^2\varphi(x) - \Delta\varphi(x)\right)dx = \int_{\mathbb{R}^3} h(x)\varphi(x)dx.$$

(ii) Let f be the function in (i). Prove that $|x|^2 f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

$\boxed{9}$ Let $a > \frac{1}{2}$ and consider a system of ordinary differential equations for a function $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ of $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - x^2 - y^2) - y(1 + x + y) \\ \dot{y} = x(1 + x + y) + y(a - x^2 - y^2), \end{cases} \tag{$*$}$$

where the dot "$\cdot$" means the differentiation with respect to t. Define $E_1, E_2 \in \mathbb{R}^2$ by

$$E_1 = \left(\frac{-1 - \sqrt{2a-1}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2a-1}}{2} \right),$$
$$E_2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{2a-1}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{2a-1}}{2} \right).$$

Answer the following questions.

(1) Prove that the circle centered at the origin with radius $\sqrt{a}$ is an invariant set of $(*)$.

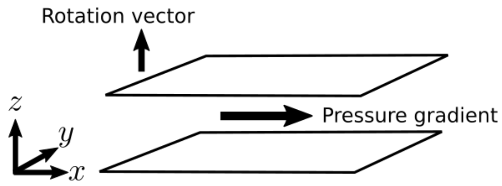
(2) Prove the existence of a heteroclinic solution from the equilibrium point E_2 to the equilibrium point E_1.

(3) Prove the existence of a heteroclinic solution from the equilibrium point $(0, 0)$ to the equilibrium point E_1, and a heteroclinic solution from the equilibrium point $(0, 0)$ to the equilibrium point E_2.

Here, for two different equilibrium points $p, q \in \mathbb{R}^2$ of $(*)$, we call a solution $(x(t), y(t))$ of $(*)$ a heteroclinic solution from p to q if $(x(t), y(t))$ satisfies

$$\lim_{t \to -\infty} (x(t), y(t)) = p, \quad \lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = q.$$

$\boxed{10}$ We consider an incompressible viscous fluid between two parallel planes in a rotating frame of reference. The motion of fluid is driven by spatially-homogeneous constant pressure gradient force which is parallel to the planes. As depicted in the figure below, the planes are perpendicular to the axis of rotation of the system and we set this axis as our z axis. The x axis is taken in the direction of the pressure gradient force and the y axis is taken to be perpendicular to these two axes.



The two-dimensional fluid motion in the two parallel planes is governed by

$$-2\Omega v_* = \nu \frac{d^2 u_*}{dz_*^2} + F, \quad 2\Omega u_* = \nu \frac{d^2 v_*}{dz_*^2}, \quad u_*\left(\pm\frac{D}{2}\right) = v_*\left(\pm\frac{D}{2}\right) = 0, \tag{1}$$

where $u_*(z_*)$ and $v_*(z_*)$ denote the x and y components of the fluid velocity at $z = z_*$, and positive constants, ν, F, D, Ω, the fluid viscosity, pressure gradient force, width of the two planes, and angular velocity of the rotating system, respectively.

1. By changes of variables such that $z_* = Dz$, $u_* = \dfrac{F}{2\Omega}u$, and $v_* = \dfrac{F}{2\Omega}v$, show that (1) can be rewritten as the following equations for $u(z)$ and $v(z)$,

$$-v = E\frac{d^2 u}{dz^2} + 1, \quad u = E\frac{d^2 v}{dz^2}, \quad u\left(\pm\frac{1}{2}\right) = v\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{2}$$

   and determine the constant E.
2. Set $\lambda = \dfrac{1+i}{\sqrt{2E}}$. Rewrite (2) by using complex velocity, $w(z) = u(z) + iv(z)$, and express $w(z)$ by using λ, where i is the imaginary unit.
3. Calculate $\displaystyle\lim_{E\to\infty} Ew(z)$.
4. Calculate $\displaystyle\lim_{E\to 0}\lim_{z\to -\frac{1}{2}+0} \frac{\sqrt{E}\,w(z)}{z+\frac{1}{2}}$.

$\boxed{11}$ (1) We write $\mathbb{N}$ for the set of nonnegative integers. Let A be a set and $\preceq$ a reflexive, transitive binary relation on A. $(A, \preceq)$ is said to be a well quasi-order if it satisfies the following condition (*).

(*) For any infinite sequence $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in A, there exist $i, j \in \mathbb{N}$ such that $a_i \preceq a_j$ and $i < j$.

Given two well quasi-orders $(A, \preceq_A)$ and $(B, \preceq_B)$, define a binary relation $\preceq$ on $A \times B$ by

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff a_1 \preceq_A a_2 \text{ and } b_1 \preceq_B b_2.$$

Prove that $(A \times B, \preceq)$ is a well quasi-order.

(2) Let $(S, \to)$ be a state transition system. That is, S is a (possibly infinite) set and $\to$ is a binary relation on S. Suppose that one or more functions $\rho_1, \ldots, \rho_n : S \to \mathbb{N}$ are given and satisfy the condition: whenever $s \to^+ t$ holds for $s, t \in S$, there is $1 \le i \le n$ such that $\rho_i(s) > \rho_i(t)$. Here, $\to^+$ denotes the transitive closure of $\to$. Prove that S does not contain any infinite transition sequence $s_0 \to s_1 \to s_2 \to \cdots$.

$\boxed{12}$ Let $G = (V, E)$ be an undirected finite graph with vertex set V and edge set E. The set of edges incident to vertex $v \in V$ is denoted by $\delta_G(v)$. A set $M \subseteq E$ is called a matching of G if no two edges of M share an end point. A set $C \subseteq V$ is said to be a vertex cover of G if

$$\bigcup_{v \in C} \delta_G(v) = E.$$

Consider the following linear programming problem LP(G) defined by G:

Maximize $\displaystyle\sum_{e \in E} x_e$

subject to

- $\displaystyle\sum_{e \in \delta_G(v)} x_e \le 1 \quad (v \in V)$
- $x_e \ge 0 \quad (e \in E)$

1. Show that there exists a graph G such that LP(G) has no integer optimal solution.
2. Show that there exists a graph G such that LP(G) has an integer optimal solution but the size of a largest matching in G is different from the size of a smallest vertex cover of G.
3. Show that if the size of a largest matching in G equals the size of a smallest vertex cover of G, then LP(G) has an integer optimal solution.

$\boxed{13}$ Consider the quantum mechanics of a harmonic oscillator with a unit angular frequency. The creation operator $a^\dagger$ and the annihilation operator a satisfy the commutation relation $[a, a^\dagger] = 1$. Using the number operator $N = a^\dagger a$, the Hamiltonian can be expressed as

$$H = N + 1/2.$$

Here, we are assuming $\hbar = 1$. Now, for a positive integer n and a positive integer k less than or equal to n, the integer $S(n, k)$ is defined by

$$N^n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)(a^\dagger)^k a^k.$$

Furthermore, we introduce the polynomial

$$B(n, x) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)x^k.$$

(i) Using the representation $a^\dagger = x, a = \dfrac{d}{dx}$, find the explicit form of the exponential generating function for $B(n, x)$:

$$G(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} B(n, x)\frac{\lambda^n}{n!}$$

where $B(0, x) = 1$.

(ii) For a complex number z, the normalized coherent state $|z\rangle$ has the following properties:

$$\langle z \,|\, z\rangle = 1, \quad a|z\rangle = z|z\rangle, \quad \langle z|a^\dagger = \bar{z}\langle z|$$

where $\bar{z}$ denotes the complex conjugate of z. Given the density operator at inverse temperature $\beta > 0$ as

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}},$$

compute the Husimi function

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi}\langle z|\rho|z\rangle.$$