2024 年度 10 月期・2025 年度 4 月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学コース

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

2024 年 7 月 13 日 10:00 – 11:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は 1 時間 30 分である。退室は認めない。

(4) 問題は 2 題の必須問題と 3 題の選択問題の計 5 題から構成されている。受験者は必須問題の 1 番、2 番のほか、3 番から 5 番の選択問題の中から 1 題を選択して、合計で 3 題を解答すること。選択問題で 2 題以上選択した場合は、問題番号の若い 1 題のみを採点対象とする。

(5) 各受験者に対し、解答用紙 3 枚と下書用紙（計算用紙）が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に解答する問題番号を記入し、解答用紙 1 枚につき 1 題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 試験終了後は解答用紙 3 枚全てを提出すること。 2 題以下しか解答していない場合でも、解答予定の問題番号を記入し、必ず 3 枚の解答用紙を提出すること。

(8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 (必須問題)

次の広義積分の値を求めよ．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx.$

2 (必須問題)

$\mathbb{R}$ を実数の全体、a, b を実数とし、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ b & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

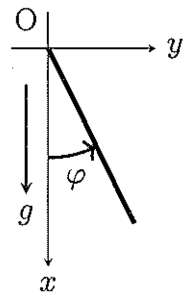
(1) $a = 0, b = 1$ のとき $\operatorname{rank} A = 2$ であることを示せ。ただし、$\operatorname{rank} A$ は行列 A の rank（階数）である。

(2) $\operatorname{rank} A = 2$ となるための a, b に関する必要十分条件は $(a, b) = (0, 1)$ であることを示せ。

(3) A を $x \in \mathbb{R}^4$ に対して $Ax \in \mathbb{R}^3$ を対応させる $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ の線形写像と見なすとき、$\dim \mathrm{Ker} A = 1$ となるための a, b に関する必要十分条件を求めよ。ただし $\mathrm{Ker} A$ は A の Kernel(核) である。

3 (選択問題)

図のように，O を原点とし，O から鉛直下方を向く x 軸，これと直交する y 軸をとる．O には質量 M，長さ 2ℓ の一様な細い棒の一端が固定され，棒は O を支点として xy 平面内で滑らかに回転できる．O を通り xy 平面に垂直な回転軸のまわりの棒の慣性モーメントを I とし，棒が鉛直下方となす角を φ とする．時刻 $t=0$ で棒を $\varphi=\varphi_0\,(>0)$ の位置から静かにはなした後の運動を考える．重力加速度の大きさを g，時間微分をドット $(\cdot)$ で表すとして，以下の各問に答えよ．



(1) 慣性モーメント I を M と ℓ を用いて表せ．

(2) 棒の重心の加速度ベクトルの x 成分を a_x，y 成分を a_y とし，棒に平行な成分を a_r，垂直な成分を a_φ とするとき $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \end{pmatrix}$ の関係が成り立つ．a_r と a_φ をそれぞれ ℓ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ のうち必要なものを用いて表せ．

(3) 角加速度 $\ddot{\varphi}$ を φ, ℓ, g を用いて表せ．

(4) 角速度の 2 乗 $(\dot{\varphi})^2$ を φ, ℓ, g, φ_0 を用いて表せ．

(5) $\varphi_0=\pi/2$ とするとき，O に働く抗力（束縛力）の大きさを M, g, φ を用いて表せ．

4 (選択問題)

次の各問に答えよ．

(1) $f(t)$ は $t \geq 0$ で連続かつ $t > 0$ で 1 回連続的微分可能な実数値関数であって，$t > 0$ で

$$f(t) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad f'(t) + f(t) \leq 0$$

を満たすとする．このとき $\lim_{t \to \infty} f(t)$ は存在するか，理由とともに述べよ．

(2) $g(t)$ は $t \geq 0$ で連続かつ $t > 0$ で 2 回連続的微分可能な実数値関数であって，$t > 0$ で

$$g(t) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad g''(t) + 4g'(t) + 3g(t) \leq 0$$

を満たすとする．このとき $\lim_{t \to \infty} g(t)$ は存在するか，理由とともに述べよ．

5 (選択問題)

V を $V \neq \{0\}$ である有限次元実ベクトル空間、$(\cdot,\cdot)$ を V の内積とする。このとき計量ベクトル空間 $(V, (\cdot,\cdot))$ に関して以下の問いに答えよ。

(1) n は自然数で $(e_1, \ldots, e_n)$ は V の正規直交系とする。$u \in V$ に対して

$$v = u - \sum_{i=1}^{n} (u, e_i) e_i$$

とおくと、任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $(e_i, v) = 0$ であることを示せ。

(2) $(V, (\cdot,\cdot))$ は正規直交基底を持つことを示せ。

(3) 線形写像 $f : V \to V$ に対して、次の 2 つの条件 (A), (B) は同値であることを示せ。

(A) 任意の $u, v \in V$ に対して $(u, v) = (f(u), f(v))$.

(B) $\{u | u \in V, u \neq 0, (u, u) = (f(u), f(u))\} \neq \emptyset$ かつ $u, v \in V$ に対して $(u, v) = 0$ ならば $(f(u), f(v)) = 0$.

2024年度10月期・2025年度4月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学コース

入学者選抜試験問題

【専門科目】

2024年7月13日 13:00 - 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 専門科目は全部で5題の問題から構成されており、全て選択問題である。この中から1題を選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い1題のみを採点対象とする。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙（計算用紙）が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答に際して裏面を用いる場合は解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1

(X,d) をコンパクトな距離空間とする。さらに、$\mathcal{B}$ を (X,d) のボレル集合族とし、μ を可測空間 $(X,\mathcal{B})$ 上の σ-加法的（完全加法的）測度とする。また、実数の全体 $\mathbb{R}$ には、ユークリッドの距離からの位相が入っているとする。$(X,\mathcal{B},\mu)$ が次の条件をみたすとき、以下の問いに答えよ。

任意の $x \in X$ に対してある $r_x \in (0,\infty)$ があって $\mu(B(x,r_x)) \in [0,\infty)$,
ただし $r>0$, $x \in X$ に対して、$B(x,r)=\{z|z \in X, d(x,z)<r\}$ とおく。

(1) $f: X \to \mathbb{R}$ に対して次の 2 つの条件 (A), (B) は同値であることを示せ。

(A) 任意の $\epsilon>0$ と任意の $x \in X$ に対してある $\delta>0$ が存在して、
$d(x,x')<\delta$ ならば $|f(x)-f(x')|<\epsilon$.

(B) 任意の $\mathbb{R}$ の開集合 O に対して $f^{-1}(O)$ は X の開集合.

(2) $\mu(X) \in [0,\infty)$ であることを示せ。

(3) $x \in X$ に対して $\mu(\{x\})=0$ が成り立つとする。このとき、

$$\lim_{r \downarrow 0} \mu(B(x,r))=0$$

であることを示せ。

(4) (X,d) は可分であるとし、任意の $x \in X$ に対して $\mu(\{x\})=0$ が成り立つとする。さらに、$\mu(X)>0$ とする。このとき、X の稠密な開部分集合 U で $\mu(U)<\mu(X)$ をみたすものは存在するか。

(5) 任意の自然数 n に対して $f_n: X \to \mathbb{R}$ はボレル可測であるとする。すなわち任意の $\mathbb{R}$ のボレル集合 A に対して $(f_n)^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ であるとする。このとき

$$\left\{x \middle| x \in X, \{f_n(x)\}_{n \geq 1} \text{ は } n \to \infty \text{ である } \alpha \in \mathbb{R} \text{ に収束する。}\right\} \in \mathcal{B}$$

を示せ。

2　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x + e^y} \quad (x > 0), \qquad y(0) = 0$$

の解を求めよ．

問 2　xy 平面上の滑らかな単純閉曲線 C が囲む領域に原点が含まれるとする．C が反時計回りに向き付けられているとき，次の線積分の値を求めよ．

$$\int_C \left(\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right).$$

問 3　u は区間 $[0,1]$ 上で連続かつ $(0,1)$ 上で C^1 級の実数値関数であって，$\operatorname{supp} u \subset (0,1)$ とする．このとき

$$\|u\|_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \|u'\|_2$$

が成立することを示せ．ただし $\operatorname{supp} u$ は $\{x \in [0,1] \mid u(x) \neq 0\}$ の閉包であり，$\|u\|_2 = \left(\int_0^1 u(x)^2 \, dx \right)^{1/2}$, $u'(x) = \dfrac{d}{dx} u(x)$ である．

3　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　xyz 空間において $S=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z=1,\ 0<z\le 1\}$ とし，$n=(n_x,n_y,n_z)$ は S の単位法線ベクトルで $n_z>0$ を満たすものとする．

$$f(x,y,z)=(x^2+y^2)(z+1)+x^2-y^2-\frac{2}{3}z^3$$

に対して面積分 $\displaystyle\int_S \nabla f\cdot n\,ds$ の値を求めよ．ただし ds は S の面素である．

問 2　(1) a を正数とし，f を $0\le x\le 1$ 上の実数値連続関数とする．常微分方程式の 2 点境界値問題

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x)-au(x)=f(x),\qquad 0<x<1,$$
$$u(0)=u(1)=0,$$

に対し，中心差分で離散化して得られる差分方程式を答えよ．ただし x 方向の分割数を N, 刻み幅を $h=\dfrac{1}{N}$ とし，$x=jh,\ 0\le j\le N$ における $u(jh)$ 相当値を u_j と記すものとする．

(2) (1) の差分方程式の解がただひとつ存在することを示せ．

(3) (1) の差分方程式の近似解を，ヤコビ法を用いて求めるときのアルゴリズムを記せ．

問 3　弦の振動を表す数理モデル

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\qquad x\in(0,1),\ t>0,$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0,\qquad t>0,$$
$$u(x,0)=\sin(\pi x),\qquad x\in(0,1),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=3\sin(3\pi x),\qquad x\in(0,1)$$

を考える．ただし $u(x,t)$ は時刻 t での位置 x における弦の変位を表すものとする．変数分離の方法を利用してこの初期値境界値問題の解 $u(x,t)$ を求めよ．

4

格子点上に配置された N 個のスピンからなる系を考える．各スピンの状態 S_i $(i=1,2,\ldots,N)$ は $-1,\ 0,\ 1$ のいずれかの値をとる．各スピンはその最近接格子点上のスピンとのみ相互作用するとし，この系のハミルトニアンを

$$H=\frac{NJq}{2}m^2-Jqm\sum_{i=1}^{N}S_i+D\sum_{i=1}^{N}S_i^2$$

とする．ここで J および D は正の定数，q は各格子点の隣接格子点数，m はスピンの平均的な値を表す平均場である．系は絶対温度 T の熱平衡状態にあるとする．ボルツマン定数を k，$\beta=\dfrac{1}{kT}$ として，以下の問に答えよ．

(1) この系の分配関数を $\beta,\ N,\ J,\ q,\ m,\ D$ を用いて表せ．

(2) この系のスピン１つあたりの自由エネルギー f を $\beta,\ J,\ q,\ m,\ D$ を用いて表せ．

(3) 熱平衡状態を実現する m はこの自由エネルギー f を最小にすることを用いて，熱平衡状態において m が満たす方程式を求めよ．

(4) この自由エネルギー f を微小な $|m|$ に対して m のべき級数に展開したとき，m^4 の係数が正になるために $\beta,\ D$ が満たす条件を求めよ．ただし必要に応じて，$\log(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\ \ (|x|<1)$ および $\cosh(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ を用いてもよい．

(5) 問 (4) の条件が満たされているとき，β を変化させると $\beta=\beta_c$ で相転移が起き，自発磁化が発生した．β_c が満たす方程式を求めよ．

(6) この系では，問 (4) の条件が満たされないときでも，β を変化させると相転移が起き，自発磁化が発生する．この相転移が起きる前後での自由エネルギー f のグラフの概形を m の関数として図示せよ．ただし，この自由エネルギー f を微小な $|m|$ に対して m のべき級数に展開したときの m^2 の係数と m^6 の係数は正であると仮定し，m の７次以上の項は無視できるとする．

5

次の各問のそれぞれに答えよ．ただし，μ は流体の粘性係数を表す．

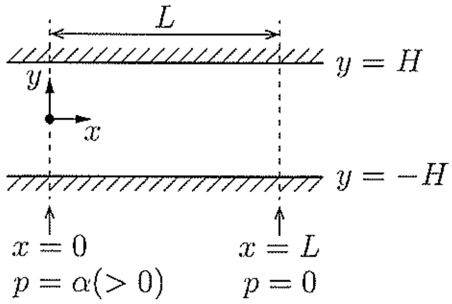
問 1

平面 xy において $y=0$ を境界とする半無限領域 $y>0$ を占める非圧縮性粘性流体を考える．この流体の流速場が，正定数 a を用いて $(u, v)=(-2a^2y-3x^2y, 3xy^2)$ と表されているとき，以下の各諸量を a，μ のうち必要なものを用いて表せ．

(1) 点 (a, a) における渦度

(2) 点 $(a, 0)$ において境界 $y=0$ に働く接線応力の大きさ

問 2



平面 xy において 2 つの境界 $y=\pm H$ に挟まれた領域を占める粘性流体の定常流を考える（右図）．流れは x 軸に平行であるとする．流速ベクトルの x 方向成分を u，流体の圧力を p，流体の密度を ρ と表す．流速 u は境界 $y=\pm H$ において粘着条件を満足するとする．圧力 p は，正定数 α を用いて，$x=0$ において $p=\alpha$，$x=L$ において $p=0$ を満たすとする．ただし，p は x のみの関数であるとする．密度 ρ は圧力に応じて変化し，ρ と p の関係は，定数 $\rho_0>0$ およびパラメータ $\varepsilon \geq 0$ を用いて $\rho=\rho_0+\varepsilon p$ で与えられるとする．流速 $u=u(x, y)$，圧力 $p=p(x)$，密度 $\rho=\rho(x)$ が方程式

$$(*) \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

を満足するとき，以下の各問に答えよ．

(1) $\varepsilon=0$ のとき，流速 u と圧力 p を x，y，α，μ，H，L，ρ_0 のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

設問 (1) で求めた流速および圧力を，それぞれ U および P とおく．また，以下ではパラメータ ε が十分小さい場合を考え，式 $(*)$ の解で ε の 2 次以上の項を無視したものが，ある関数 $f(x, y)$ と $g(x)$ を用いて

$$u=U+\varepsilon f(x, y), \quad p=P+\varepsilon g(x), \quad \rho=\rho_0+\varepsilon P$$

と表されるとする．ただし，$f=f(x, y)$ および $g=g(x)$ は ε には依存しないものとする．

(2) f と g を x，y，α，μ，H，L，ρ_0 のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

(3) この流体の質量流量を M_ε と表すとき，極限 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{M_\varepsilon-M}{\varepsilon}$ の正負を答えよ．ただし，M を $\varepsilon=0$ の場合の質量流量とする．