専門科目 (午前)　　2025　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 00 分 – 午後 12 時 30 分

注意事項

1. 問 A, 問 B, 問 C より 2 問を選択し解答せよ.
2. 問 1〜問 9 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. 各解答用紙の受験番号欄に受験番号，試験科目名欄に問題番号を必ず記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答は 日本語または英語で記入せよ.
7. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.
8. 英文による出題は行わない.

問 A

4×4 実行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問に答えよ．ただし，行列 A によって定まる写像 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ の核を $\ker(A)$ とし，$\mathbb{R}^4$ の通常の内積によって定まる $\ker(A)$ の直交補空間を $\ker(A)^\perp$ とする．

(1) $\ker(A)$ の正規直交基底を求めよ．

(2) $\ker(A)^\perp$ の正規直交基底を求めよ．

(3) $\ker(A) = \ker(A^2)$ を示せ．

(4) A^2 の 4 つの固有値（重複する場合も含む）とそれぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは $\mathbb{R}^4$ の基底をなすように選ぶこと．

問 B

関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ に対して，$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) = 0\}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ のヘッセ行列 $\begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) S は直線 $y = x$ について対称な図形である．その理由を簡潔に述べよ．

(3) S と直線 $y = tx$ $(t \geq 0)$ との交点を求めよ．

(4) 関数 $f(x, y)$ の $\mathbb{R}^2$ における極値と，極値を与える点をすべて求めよ．

(5) $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

上における関数 $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ．

問 C

ここでは命題変数（$p, q, r, \ldots$）と論理結合子 $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ から成る論理式を扱う．結合子 $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ の働きは次の真理値表で与えられる（真を 1 で，偽を 0 で表す）．

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

p	$\neg p$
1	0
0	1

$\neg$ は一番結合が強いものとして括弧を省略する（たとえば $\neg p \wedge q$ は $(\neg p) \wedge q$ と同じ）．命題変数に 0 個または 1 個の $\neg$ を付けた論理式をリテラルと呼ぶ．各 ℓ^i_j がリテラルで，$m, k_1, k_2, \ldots, k_m$ が 1 以上の整数のとき，次の形の論理式を論理和標準形と呼ぶ．

$$(\ell^1_1 \wedge \ell^1_2 \wedge \cdots \wedge \ell^1_{k_1}) \vee (\ell^2_1 \wedge \ell^2_2 \wedge \cdots \wedge \ell^2_{k_2}) \vee \cdots \vee (\ell^m_1 \wedge \ell^m_2 \wedge \cdots \wedge \ell^m_{k_m})$$

以下では命題変数を正のリテラルと呼び，命題変数に $\neg$ を付けたものを負のリテラルと呼ぶ．論理和標準形 A がシングル型である，ダブル型である，ということをそれぞれ次で定義する．

A はシングル型 $\iff$ A 中の各命題変数はそれぞれ正と負のどちらか一方のみのリテラルが A に現れる．

A はダブル型 $\iff$ A 中のすべての命題変数は正と負の両方のリテラルが A に現れる．

（例）

$(\neg p \wedge q) \vee q \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee q$ はシングル型論理和標準形である．
$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg q \vee (\neg p \wedge r) \vee q$ はダブル型論理和標準形である．
$(p \wedge r) \vee \neg q \vee (p \wedge \neg p \wedge q)$ は論理和標準形であるが，シングル型でもダブル型でもない．

論理式 A と B が同値であるとは，命題変数にどのように真理値を割り当てても A と B の真理値が同じになることである．以下の問に答えよ．

(1) 次の論理式と同値な論理和標準形をひとつ書け．

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow r)$$

(2) 次の真理値表で表される論理式 A と同値な論理和標準形をひとつ書け．

p	q	r	A
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

（次ページへ続く）

(3) 次の主張が成り立つか否かを述べて，証明または反証をせよ．

どんな論理式にもそれと同値なシングル型論理和標準形が存在する．

(4) 次の主張が成り立つか否かを述べて，証明または反証をせよ．

どんな論理式にもそれと同値なダブル型論理和標準形が存在する．

(注意)
どんな論理式にもそれと同値な論理和標準形が存在する，という事実を解答中で使用してもよい．なお A が B と同値な論理和標準形であっても A 中の命題変数全体の集合と B 中の命題変数全体の集合は必ずしも一致するとは限らない．

問 1

$M(2,\mathbb{R})$ を実数を成分に持つ 2×2 行列のなす環とし，

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2,\mathbb{R})$$

とおく．また，X を不定元とし係数を $\mathbb{R}$ にとる多項式環を $\mathbb{R}[X]$ とおき，それを X^2+1 が生成するイデアル $I := \{(X^2+1)\,p;\ p \in \mathbb{R}[X]\}$ で割った環を $L := \mathbb{R}[X]/I$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) N は $M(2,\mathbb{R})$ の可換な部分環になることを示せ．

(2) N と L は環として同型であることを示せ．

(3) L は体になることを示せ．

問 2

コンパクトな距離空間 (X, d) 上の正の値をとる連続関数の列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ があり，各 $x \in X$ に対して数列 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は単調減少，すなわち $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$ が $k = 1, 2, \ldots$ で成立するとする．以下の問いに答えよ．

(1) 各 $x \in X$ に対して，$g(x) := \lim_{k \to \infty} f_k(x)$ が存在する理由を簡潔に述べよ．

(2) 正数 ε を 1 つ固定し，$O_k := \{x \in X;\ |f_k(x) - g(x)| < \varepsilon\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ とおく．もしも g が X 上の連続関数ならば，O_k は X の開集合となる．その理由を簡潔に述べよ．

(3) もしも g が X 上の連続関数ならば，任意の正数 ε に対して，ある正の整数 k が存在し，すべての $x \in X$ について $|f_k(x) - g(x)| < \varepsilon$ が成り立つことを示せ．

(4) 逆に，任意の正数 ε に対して，ある正の整数 k が存在し，すべての $x \in X$ について $|f_k(x) - g(x)| < \varepsilon$ が成り立つならば，関数 g は X 上で連続であることを示せ．

問 3

C^2 級の関数 $u(t,x)$ が

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \end{cases}$$

を $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,1]$ 上でみたすとし,

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(|u_t(t,x)|^2 + |u_x(t,x)|^2 \Big) dx$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) 全ての $t \geq 0$ に対し $E(t) \leq E(0)$ が成立することを示せ.

(2) ある $T > 0$ で $E(T) = E(0)$ が成立するための必要十分条件は，u が恒等的に 0 であることを示せ.

問 4

以下の線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(P)} & \text{maximize} & 4x_1 & + & 8x_2 & + & 3x_3 & & \\
& \text{subject to} & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 6 \\
& & 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & \leq & 12 \\
& & -x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 10 \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
& & & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

(1) この問題の双対問題 (D) を，変数 y_1, y_2, y_3, y_4 を用いて記述せよ．

(2) 問題 (P) の最適解をひとつ挙げよ．ここで，$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 1, 0, 2)$ が問題 (D) の最適解であることは認めて使っても良い．

(3) 問題 (P) の最適解の集合 X^* は，ある $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ を用いて

$$X^* = \{\, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \mid t \in [0, 1] \,\}$$

と記述できる．このときの $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を求めよ．

問 5

以下，$\mathbb{P}$ は確率を表すものとする．

(1) $p \in (0,1)$ を定数として，確率変数 N が幾何分布

$$\mathbb{P}(N=k) = (1-p)^{k-1}\,p, \quad k=1,2,\ldots,$$

に従うものとする．N の確率母関数を求めよ．

(2) $\mu > 0$ を定数として，確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ は互いに独立に指数分布

$$\mathbb{P}(X_i \leq x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0,\ i=1,2,\ldots,$$

に従うものとする．n を正の整数とするとき，$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ のモーメント母関数を求めよ．

(3) (1) の N と (2) の $\{X_1, X_2, \ldots\}$ が互いに独立であるとき，$\sum_{i=1}^{N} X_i$ の分布関数を求めよ．

問 6

1 次元確率変数 $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立に同一の分布に従い，その確率密度関数が

$$p(x \mid \mu_0, \sigma_0^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\dfrac{(\log x - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right), & x > 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられるとする．ここで，$\sigma_0 > 0$ であり，$\log$ は自然対数を表す．
このとき，以下の問いに答えよ．ただし，次の公式を証明なしに用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

(1) X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ を求めよ．

(2) σ_0 が既知で $X_1, \ldots, X_n$ が与えられたとき，統計モデル $p(x \mid \mu, \sigma_0^2)$ $(\mu \in \mathbb{R})$ における パラメータ μ の最尤推定量 $\hat{\mu}$ を求めよ．

(3) 確率変数 $Y_1, \ldots, Y_n$ は独立であり，Y_i の確率密度関数がそれぞれ $p(y_i \mid \mu, \sigma_i^2)$ で与えられるとする $(i = 1, \ldots, n)$．

パラメータ $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ が既知で非零であり，$Y_1, \ldots, Y_n$ が与えられたとき，パラメータ μ の推定量 $T(Y_1, \ldots, Y_n)$ が $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ を係数として，

$$T(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log Y_i$$

で与えられるとする．このとき，$T(Y_1, \ldots, Y_n)$ が μ の不偏推定量であるための $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ の必要十分条件を求めよ．

(4) (3) の設定のもとで，推定量 $T(Y_1, \ldots, Y_n)$ が μ の不偏推定量であるとき，分散 $\mathbb{E}[(T(Y_1, \ldots, Y_n) - \mu)^2]$ を最小にする係数 $\{\beta_i^*\}_{i=1}^n$ を $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ を用いて表せ．

問 7

以下の問に答えよ．

アルファベット

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

上の言語を考える．Σ 上の文字列は 0 と 1 からなる上と下の二つの行を与える．

(1) Σ 上の言語の要素である文字列の各行を 2 進数とみなす．ただし，左端が最上位ビット (MSB) とする．言語

$$A = \{w \mid w \text{ の下の行は上の行の補数}\}$$

とする．なお，補数とは 2 進数の各ビットを反転させた数に 1 を加えたものである．ただし，0^k の補数は 0^k である．また，空列 ϵ も A に含まれるとする．たとえば，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in A$ である．$A^{\mathcal{R}}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を与えよ．ただし，

$$A^{\mathcal{R}} = \{w^{\mathcal{R}} \mid w \in A,\ \text{ただし，} w^{\mathcal{R}} \text{ は } w \text{ を逆から読んだ文字列}\}$$

とする．

(2) 言語

$$B = \{w \mid w \text{ の上の行は「01」と「10」を同数含む}\}$$

とする．たとえば，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in B$ である．なぜなら上の行は「01」と「10」を二つずつ含むからである．B を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図を与えよ．

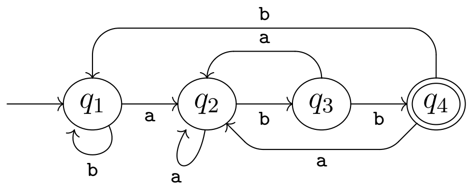
(3) 言語

$$C = \{w \mid w \text{ の上の行に含まれる 0 と，下の行に含まれる 1 は同数}\}$$

とする．C が正規でないことをポンピング補題 (注 2) を用いて示せ．

(次ページへ続く)

注 1: 決定性有限オートマトンの状態遷移図 以下はアルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ であるような言語 $\{w \mid w$ は abb で終わる $\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態は q_4 である．



注 2: ポンピング補題 言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように三つの部分 $s = xyz$ に分割できる:
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
> 2. $|y| > 0$
> 3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 回連結したものを表わす．y^0 は空列 ϵ である．

問 8

以下の漸化式で定義される数列 F_n に対し，値 F_n を計算するアルゴリズムを考える．

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

正の整数 m は $\lceil \log_2(m+1) \rceil$ ビット，0 は 1 ビットで表現され，k_1 ビットならびに k_2 ビット（ただし $k_1 \leq k_2$）で表現される非負整数の足し算の実行時間は $\Theta(k_2)$，値 F_k は $\Theta(k)$ ビットで表現されるものとする．ここで，関数 f, g に対し $f(x) = \Theta(g(x))$ であるとは，正の実数 c_1, c_2 と正の整数 x_0 が存在し，x_0 以上のすべての整数 x に対し，$c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$ を満たすことである．以下の問に答えよ．

(1) 以下のアルゴリズム `Algo1` によって F_n を計算するとき，`Algo1(n)` の実行時間は $O(2^n)$ であることを示せ．

```
Algo1( n ) {
    if ( n == 0 ) return 0;          // n が 0 の場合 0 を返す
    if ( n == 1 ) return 1;          // n が 1 の場合 1 を返す
    return Algo1(n-1) + Algo1(n-2);
}
```

(2) 配列 `B` を用いる以下のアルゴリズム `Algo2` によって F_n を計算するとき，`Algo2(n)` の実行時間として適切なものを選択肢 (a), (b), (c), (d) の中から一つ選べ．理由は述べなくてよい．

```
Algo2( n ) {
    B[0] = 0; B[1] = 1;              // B[0] に 0，B[1] に 1 を格納する
    for ( i = 2; i < n+1; i++ ) {
        B[i] = B[i-1] + B[i-2];
    }
    return B[n];
}
```

選択肢： (a) $\Theta(n)$　(b) $\Theta(n \log_2 n)$　(c) $\Theta(n^2)$　(d) $\Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

(3) 数列 F_n について，$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という関係が成り立つ．k_1 ビットならびに k_2 ビット（ただし $k_1 \leq k_2$）で表現される非負整数の掛け算の実行時間は，1 以上 2 以下のある定数 c に対し，$O(k_2^c)$ だとする．このとき，値 F_n の計算は実行時間 $O(n^c \log_2 n)$ でできることを示せ．

問 9

(1) OS に関する設問 (a), (b), (c) について，それぞれ下記キーワード欄 (英語で解答する場合 Keywords 欄) から 3 つ以上のキーワードを用いて 2 行程度で解答せよ．同一キーワードを異なる設問の解答に用いてよい．

(a) ハードウェア割込みとソフトウェア割込みの違いを説明せよ．

(b) デッドロックについて説明せよ．

(c) ラウンドロビンスケジューリングについて説明せよ．

キーワード

タイマ割込み，待ち行列，共有資源，システムコール，ユーザープログラム，入出力装置，周期的，プロセス，アドレス空間，無期限に待機，並行処理

Keywords

timer interrupt, queue, shared resource, system call, user program, I/O device, periodic, process, address space, wait(ing) indefinitely, concurrent execution

(2) 優先度スケジューリングに関する設問に解答せよ．次に示す 3 つのプログラムが 1 つの CPU と 2 つの独立した入出力装置 (I/O1, I/O2) を有する計算機上で実行される状況を考える．各プログラムは，下記の順序で CPU, 入出力装置を利用する．

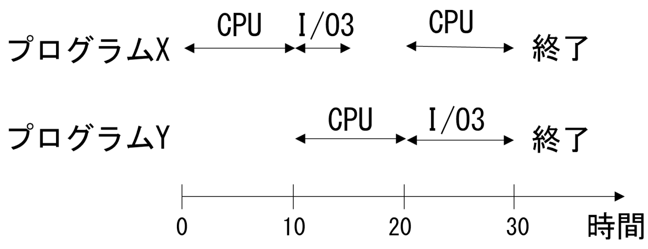
- プログラム A
  [CPU 20ms][I/O1 30ms][CPU 10ms][I/O2 20ms][CPU 20ms]
- プログラム B
  [CPU 20ms][I/O2 20ms][CPU 20ms][I/O1 30ms][CPU 30ms]
- プログラム C
  [CPU 30ms][I/O1 20ms][CPU 10ms][I/O2 30ms][CPU 20ms]

これら 3 つのプログラムの CPU 及び入出力装置に対する優先度は高い順に A，B，C の順とする．また，本計算機は次の条件を満たす．

- 2 つの入出力装置は独立しており，同時に利用可能である．
- 割込みやスケジューリングのオーバーヘッドは無視できる．
- スケジューリング開始時点において 3 つのプログラムは実行可能状態である．
- CPU 処理や入出力処理はプリエンプション (横取り) されない．

本環境で優先度スケジューリングを用いた様子を次ページの図を参考に示せ．

（次ページへ続く）



参考：スケジューリング例