令和８年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

2026 Entrance Examination (Mathematics Course/Mathematical Sciences Course)
Master's Program, Division of Mathematics and Mathematical Sciences, Kyoto University

基礎科目 Basic Mathematics

◎　問題は７問ある．数学系志望者は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{6}$ の６題を解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の５題を解答し，さらに，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ のうちの１題を選択して解答せよ．(数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は６題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって６題または７題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること．
There are 7 problems. Applicants to the Mathematics Course (数学系) should answer the 6 problems $\boxed{1}$ ～ $\boxed{6}$. Applicants to the Mathematical Sciences Course (数理解析系) should answer the 5 problems $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$, and also one problem from $\boxed{6}$, $\boxed{7}$. (Applicants to either the Mathematics Course or the Mathematical Sciences Course should only answer 6 problems in total, and applicants to both courses should answer 6 or 7 problems in total, depending on their choices.) Write the problem numbers you choose on the selection sheet.

◎　解答時間は <u>３時間 30 分</u> である．
The duration of the examination is <u>3 hours and 30 minutes</u>.

⊗　問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと．
The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・<u>時計</u>等の持ち込みは <u>禁止</u> する．指定された荷物置場に置くこと．
It is <u>not allowed</u> to refer to any textbooks, notebooks, calculators, cell phones, information devices or <u>personal watches/clocks</u> during the examination. Such materials and devices must be kept in the designated area.

［注意］ Instructions

1. 指示のあるまで問題文を見ないこと.
   Do not look at the problems until it is permitted by the proctor.

2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
   Write your name and the applicant number on each answer sheet and each draft/calculation sheet.

3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ.
   Use a separate answer sheet for each problem and, on each sheet, write the number of the problem being attempted within the box.

4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
   If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to an additional answer sheet (or more). If you do so, indicate clearly at the bottom of the page that there is a continuation.

5. 提出の際は, 上から選択票, 答案用紙 (問題番号順), 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること.
   When handing in your exam to the proctor, stack your selection sheet and answer sheets (ordered by problem number), followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half, with the filled-in side facing outward.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい.
   You may keep this problem sheet.

［記号］ Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 整数の全体の集合, 有理数の全体の集合, 実数の全体の集合, 複素数の全体の集合を表す.
In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

The English translation follows.

$\boxed{1}$ 集合 D を

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 0,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$$

と定める．このとき，次の広義積分

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^3 + y^3)^\alpha}$$

が収束するような実数 α の範囲を求めよ．

$\boxed{2}$ a, b を実数とする．行列

$$\begin{pmatrix} a & a & b & b \\ a & a & -b & b \\ b & b & a & a \\ -b & b & -a & a \end{pmatrix}$$

の階数を求めよ.

$\boxed{3}$ n を正の整数とし, 複素 n 次正方行列全体のなす複素ベクトル空間を $M_n(\mathbb{C})$ とする．$X \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, $M_n(\mathbb{C})$ の部分ベクトル空間 V_X を

$$V_X = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$$

で定める．このとき, $\{\dim V_X \mid X \in M_n(\mathbb{C})\}$ の最小値が n になることを示せ．ここで $\dim V_X$ は V_X の複素ベクトル空間としての次元を表す.

$\boxed{4}$ 以下で，次の条件

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 3, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0,$$
$$\limsup_{n\to\infty} b_n = 7, \quad \liminf_{n\to\infty} b_n = 1$$

をみたす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ と $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ について考える．

(1) $\limsup_{n\to\infty} |a_n - b_n|$ のとり得る値の最大値と最小値を求めよ．さらに，これらの最大値と最小値を与える $(\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty)$ の例をそれぞれ 1 つ挙げよ．

(2) $\liminf_{n\to\infty} |a_n - b_n|$ のとり得る値の最大値と最小値を求めよ．さらに，これらの最大値と最小値を与える $(\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty)$ の例をそれぞれ 1 つ挙げよ．

$\boxed{5}$ $u(x,y)$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の実数値 C^2 級関数であり，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

が $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で成り立つとする．さらに正の定数 C が存在して，不等式

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right| \leq C\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right)$$

がすべての $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して成り立つとする．

(1) $f(x+iy) := \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数となることを示せ．ただし i は虚数単位とする．

(2) 実数 a, b, c, d が存在して

$$u(x,y) = a\log(x^2+y^2) + bx + cy + d$$

がすべての $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して成り立つことを示せ．

$\boxed{6}$ n を正の整数, a を実数とし, $\mathbb{R}^3$ の部分集合 X を

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + az^n = 1\}$$

で定める.

(1) X は $\mathbb{R}^3$ の微分可能部分多様体であることを示せ.

(2) 関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) = z$ で定める. f がちょうど 2 個の臨界点を持つような n, a をすべて求めよ.

$\boxed{7}$ 整数 $n \geq 2$ に対して, $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく. E_n の濃度 2 の部分集合全体を $\binom{E_n}{2}$ と表し, また $\binom{E_n}{2}$ の濃度 $n-1$ の部分集合 S のうち, 以下の条件 (*) をみたすもの全体を E_n^* と表す.

(*) 任意の $T, T' \in S$ について $T \cap T' \neq \emptyset$.

さらに写像 $F_n\colon E_n \to E_n^*$ を

$$F_n(i) = \left\{T \in \tbinom{E_n}{2} \,\middle|\, i \in T\right\}.$$

で定める. このとき, F_n が全単射となるような整数 $n \geq 2$ をすべて求めよ.

The English translation starts here.

$\boxed{1}$ Let

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0,\ 0 \leq y \leq x^2 \right\}.$$

Find the set of real numbers α for which the following improper integral converges:

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^3 + y^3)^\alpha}.$$

$\boxed{2}$ Let a, b be real numbers. Find the rank of the matrix

$$\begin{pmatrix} a & a & b & b \\ a & a & -b & b \\ b & b & a & a \\ -b & b & -a & a \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Let n be a positive integer, and let $M_n(\mathbb{C})$ be the complex vector space consisting of all complex $n \times n$ matrices. Given $X \in M_n(\mathbb{C})$, define the subspace V_X of $M_n(\mathbb{C})$ by

$$V_X = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}.$$

Prove that the minimum value in $\{\dim V_X \mid X \in M_n(\mathbb{C})\}$ is n, where $\dim V_X$ denotes the dimension of V_X as a complex vector space.

$\boxed{4}$ In the following, consider sequences $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ and $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ of real numbers which satisfy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 3, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0,$$
$$\limsup_{n\to\infty} b_n = 7, \quad \liminf_{n\to\infty} b_n = 1.$$

(1) Find the maximum and minimum possible values of $\limsup_{n\to\infty} |a_n - b_n|$. Furthermore, give one example each of sequences $(\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty)$ for which these maximum and minimum values are attained.

(2) Find the maximum and minimum possible values of $\liminf_{n\to\infty} |a_n - b_n|$. Furthermore, give one example each of sequences $(\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty)$ for which these maximum and minimum values are attained.

$\boxed{5}$ Let $u(x, y)$ be a real-valued C^2-function on $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ that satisfies the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

on $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Furthermore, assume that there exists a positive constant C satisfying

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right| \leq C \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1\right)$$

for all $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Here i denotes the imaginary unit.

(1) Prove that $f(x + iy) := \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ is a holomorphic function on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(2) Prove that there exist real numbers a, b, c, d satisfying

$$u(x, y) = a \log(x^2 + y^2) + bx + cy + d$$

for all $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\boxed{6}$ Let n be a positive integer and a a real number. Define the subset X of $\mathbb{R}^3$ by

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + az^n = 1\}.$$

(1) Prove that X is a differentiable submanifold of $\mathbb{R}^3$.

(2) Define the function $f \colon X \to \mathbb{R}$ by $f(x, y, z) = z$. Find all n, a such that f has exactly two critical points.

$\boxed{7}$ Given an integer $n \geq 2$, let $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, and let $\binom{E_n}{2}$ be the set of all subsets of E_n of cardinality 2. Furthermore, let E_n^* be the set of all subsets S of $\binom{E_n}{2}$ of cardinality $n - 1$ which satisfy the following condition (*):

(*) for every $T, T' \in S$, $T \cap T' \neq \emptyset$.

Define the function $F_n \colon E_n \to E_n^*$ by

$$F_n(i) = \left\{T \in \tbinom{E_n}{2} \;\middle|\; i \in T\right\}.$$

Find all integers $n \geq 2$ such that F_n is a bijection.