数理情報学専攻 修士課程入学試験問題

Department of Mathematical Informatics

Graduate School Entrance Examination Problem Booklet

専門科目 数理情報学

Specialized Subject: Mathematical Informatics

2024年8月19日（月）　10:00 – 13:00

August 19, 2024 (Monday)　10:00 – 13:00

５問出題，３問解答 / Answer 3 out of the 5 problems

注　意　事　項 / Instructions

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
Do not open this booklet until the starting signal is given.

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
Notify the proctor if there are missing or incorrect pages in your booklet.

(3) 本冊子には第1問から第5問まであり，日本文は4頁から13頁，英文は14頁から23頁である．5問のうち3問を日本語ないし英語で解答すること．
Five problems appear on pages 4–13 in Japanese and pages 14–23 in English in this booklet. Answer 3 problems in Japanese or English.

(4) 答案用紙3枚が渡される．1問ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．
Three answer sheets will be given. Use one sheet per problem. If necessary, you may use the back of the sheet.

(5) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．
Fill in the examinee number and the problem number in the designated place of each answer sheet. Do not put your name.

(6) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
Do not separate a draft sheet from the booklet.

(7) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
Any answer sheet with marks or symbols unrelated to the answer will be invalid.

(8) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
Leave the answer sheets and this booklet in the examination room.

受験番号 Examinee number	No.

上欄に受験番号を記入すること．

Fill in your examinee number.

選択した問題番号 Problem numbers			

上欄に選択した3つの問題番号を記入すること．

Fill in the three selected problem numbers.

第 1 問

d を 2 以上の整数とする．d 次実対称行列 X, Y に対して，$X - Y$ が半正定値のとき $X \succeq Y$ と書き，$X - Y$ が正定値のとき $X \succ Y$ と書く．X の対角成分の和を $\mathrm{tr}(X)$ と表記する．また，d 次正方零行列を O と表記する．

d 次実対称行列 A, B に対する以下の (1) から (5) の各項目について，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ．

(1) $A \succeq O$ かつ $B \succeq O$ ならば，$\mathrm{tr}(AB) \geq 0$ である．

(2) $A \succeq O$ かつ $B \succeq O$ かつ $\mathrm{tr}(AB) = 0$ ならば，$A = O$ または $B = O$ である．

(3) 全ての d 次実半正定値行列 C に対し $\mathrm{tr}(AC) \geq 0$ ならば，$A \succeq O$ である．

(4) $A \succeq B \succeq O$ ならば，$A^2 \succeq B^2$ である．

(5) $A \succeq B \succ O$ ならば，$B^{-1} \succeq A^{-1}$ である．

第 2 問

実数値関数 $u(t,x)$ に関する次の偏微分方程式の初期値・境界値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u - u^3 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < L,\ t > 0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0 & (t > 0), \\ u(0,x) = f(x) & (0 \le x \le L). \end{cases} \tag{A}$$

ただし，L は正の実数とし，$f(x)$ は $\displaystyle\sup_{0\le x\le L} |f(x)| < 1$ を満たす連続関数とする．以下の設問に答えよ．

(1) $H(u) = \displaystyle\int_0^L \left\{ \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right\} \mathrm{d}x$ とおく．これが $t > 0$ で単調非増加であることを示せ．

(2) 方程式 (A) を簡略化した次の初期値・境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < L,\ t > 0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0 & (t > 0), \\ u(0,x) = f(x) & (0 \le x \le L) \end{cases} \tag{B}$$

の解が

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \exp(c_k t) \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

の形で書ける場合を考える．ただし，b_k, c_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ は x, t に依らない定数とする．係数 b_k, c_k を定めよ．また，この解の $t \to \infty$ での極限を求めよ．

(3) t のみに依存する実数値関数 $v(t)$ に関する常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v - v^3 & (t > 0), \\ v(0) = a \end{cases} \tag{C}$$

を考える．初期値 a が $|a| < 1$ を満たすときの方程式 (C) の解を求めよ．また，この解の $t \to \infty$ での極限を求めよ．

(4) 方程式 (A) は，二種の物質が混ざり合う系での相分離（それぞれの物質の領域に分かれること）を表すために用いられる数理モデルである．このとき，$u(t,x)$ は時刻 t，位置 x における二種の物質の混合の割合を表す．方程式 (A) がどのよう

に相分離をモデル化していると考えられるか，以下の二点について答えよ．

(i) 方程式 (B) と方程式 (C) の漸近挙動，および $H(u)$ の単調非増加性などが，相分離のモデル化に与える影響の要点を列挙せよ．

(ii) 十分小さい初期値から始めたとき，すなわち $|f(x)| \ll 1$ のとき，解の時間発展の概略図を示せ．

第 3 問

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とする．$a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ に対し，開区間 (a, b) 上で定義された実数値連続関数 f で以下の条件を満たすもの全体を $\mathcal{F}_{a,b}$ とする：

- $\inf_{x\in(a,b)} f(x) > 0,$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1.$

$f \in \mathcal{F}_{a,b}$ に対して $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$ を f の平均と定義し，$\int_a^z f(x)\mathrm{d}x = \int_z^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ を満たす $z \in (a, b)$ を f の中央値と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) 関数 $g \in \mathcal{F}_{0,\frac{5}{3}}$ を以下で定義する：

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & \left(x \in \left(0, \frac{1}{3}\right]\right), \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} & \left(x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right), \\ \frac{1}{2} & \left(x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)\right). \end{cases}$$

このとき，g の平均と中央値を求めよ．

以下では，a, b を $a < b$ を満たす実数とし，$f \in \mathcal{F}_{a,b}$ とする．

(2) 関数 $u = F(x) = \int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi$ $(a < x < b)$ の逆関数を $x = Q(u)$ $(0 < u < 1)$ とおく．このとき f の平均は $\int_0^1 Q(u)\mathrm{d}u$ と表されることを示せ．

(3) f が区間 (a, b) 上で狭義単調減少ならば，f の平均は f の中央値より真に大きいことを示せ．ここで，f が狭義単調減少とは，$a < x < y < b$ の場合，$f(x) > f(y)$ を満たすときをいう．

(4) $c, d \in \mathbb{R}$ $(a < c < d < b)$ に対して，$f_{cd} \in \mathcal{F}_{c,d}$ を

$$f_{cd}(x) = \frac{f(x)}{\int_c^d f(\xi)\mathrm{d}\xi}$$

で定める．f が区間 (a, b) 上で微分可能かつ f の導関数 f' が (a, b) 上で連続とする．このとき，任意の $c, d \in \mathbb{R}$ $(a < c < d < b)$ に対して f_{cd} の平均が f_{cd} の中央値より真に大きいならば，f は (a, b) 上で狭義単調減少であることを示せ．

第 4 問

n を正の整数とし，$0 < p < 1$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 正の実数 λ に対して，確率変数 X が平均 λ のポアソン分布に従うとは，任意の非負整数 k に対して，

$$\Pr(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

を満たすことである．正の実数 λ_1, λ_2 に対して，独立な確率変数 X_1, X_2 がそれぞれ平均 λ_1, λ_2 のポアソン分布に従うものとする．このとき，$X_1 + X_2$ は平均 $\lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン分布に従うことを示せ．

(2) 任意の実数 K と任意の（独立とは限らない）確率変数 $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ に対して，

$$\left| \Pr\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \leq K \right) - \Pr\left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j \leq K \right) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \Pr(\xi_j \neq \eta_j)$$

となることを示せ．ただし，任意の事象 $A_1, \ldots, A_n$ に対して，

$$\Pr\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \Pr(A_j)$$

となることを用いてよい．

(3) 確率変数 U が一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従うとする．すなわち，$0 \leq a < b \leq 1$ に対して

$$\Pr(U \in (a, b)) = b - a$$

である．各 $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，

$$q_\ell = \mathrm{e}^{-p} \sum_{i=0}^{\ell} \frac{p^i}{i!}$$

と定め，確率変数 ξ, η を，

$$\xi = \begin{cases} 0 & (U \leq 1 - p \text{ のとき}), \\ 1 & (U > 1 - p \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$\eta = \min\{\ell \mid \ell \text{は非負整数},\ U \leq q_\ell\}$$

と定める．ただし，$\{\ell \mid \ell \text{は非負整数},\ U \leq q_\ell\}$ が空集合のとき，$\eta = 0$ と定める．このとき，$\Pr(\xi \neq \eta) \leq p^2$ となることを示せ．ただし，任意の実数 x に対して，$1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x$ となることを用いてよい．

(4) $\mu = np$ と定める．確率変数 Y が二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ に従うとする．すなわち，$k = 0,1,\ldots,n$ に対して，

$$\Pr(Y = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

である．このとき，任意の $K = 0,1,\ldots,n$ に対して，

$$\left|\Pr(Y \leq K) - \mathrm{e}^{-\mu}\sum_{i=0}^{K}\frac{\mu^i}{i!}\right| \leq \frac{\mu^2}{n}$$

となることを示せ．

第 5 問

整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ とする．行列 X に対し，その第 (i,j) 成分を $X[i,j]$ と記す．

n を正の整数，z_{ij} $(i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n)$ を整数とする．不定元 x に対し，n 次正方行列 A を

$$A[i,j]=x^{z_{ij}} \qquad (i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n)$$

と定め，$k=0,1,2,\ldots$ に対し $S_k=\sum_{\ell=0}^{k} A^\ell$ と定義する．ただし，A^0 は n 次単位行列を表す．$S_k[i,j]$ の x に関する非零項の次数の最大値を $d_k(i,j)$ と表し，n 次正方行列 D_k を $D_k[i,j]=d_k(i,j)$ と定める．以下の設問に答えよ．

(1) 入力 $z_{ij}\leq 0$ $(i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n)$ に対する D_n の計算問題に対し，最短経路問題への多項式時間帰着を与えよ．ここで，最短経路問題とは，辺重み付き有向グラフにおいて与えられた二頂点間の辺重みの和が最小となる経路を求める問題である．

(2) 入力 $z_{ij}\in\mathbb{Z}$ $(i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n)$ に対して，以下の同値性を示せ．

- $k\to\infty$ のとき D_k の各成分が有限値に収束する．
- 全ての $i=1,\ldots,n$ において $D_n[i,i]\leq 0$ である．

(3) 入力 $z_{ij}\in\mathbb{Z}$ $(i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n)$ に対して，$k\to\infty$ のとき D_k の各成分が有限値に収束するかを判定する多項式時間アルゴリズムを与えよ．

(4) 入力 $s_{ij},t_{ij}\in\mathbb{Z}$ $(i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n)$ が与えられたとき，各 z_{ij} が $\lambda\in\mathbb{Z}$ の関数

$$z_{ij}=s_{ij}+t_{ij}\lambda$$

と表されている場合を考える．このとき，

$$\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{Z}\mid k\to\infty \text{ のとき } D_k \text{ の各成分が有限値に収束}\}$$

が空集合であるかを判定する多項式時間アルゴリズムを与えよ．