２０２４年度１０月期入学 / ２０２５年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

情報学専攻システム科学コース

入学者選抜　試験問題

【数学】

試験日時：２０２４年８月６日（火）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　４頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ⅰ】の問題１、問題２、問題番号【Ⅱ】の問題１、問題２のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ⅰ】の問題１，問題２、問題番号【Ⅱ】の問題１、問題２を忘れずに記入すること。解答用紙の問題番号欄に記入したものと異なる問題の解答が書かれていても採点の対象としない。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる灰色部分を空白にしておくこと。(この部分は切り離すので、灰色部分より上側を使用すること。)

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

$\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とする．

問題 1　以下の設問に答えよ．

(1)　つぎの行列 A を考える．ただし，x は実数である．A^5 が零行列となる x をひとつ求めよ．そのような x が存在しない場合は「存在しない」と答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -7 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 19 & 0 & 2 & 3 \\ 13 & -14 & 10 & 0 & 5 \\ 8 & 9 & -15 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)　設問 (1) の行列 A を考える．$x = 113$ としたときの行列 A を B と表す．5 次元実ベクトル空間において，行列 B から定まる線形写像 $T(y) = By$ の零空間（核）の次元を求めよ．ただし，y は 5 次元実ベクトル空間の元である．

(3)　実数 c に対して集合 $W(c)$ を

$$W(c) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10} \middle| \, x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = c \right\}$$

と定義する．$W(c)$ が 10 次元実ベクトル空間の部分空間（線形部分空間）になるような実数 c をすべて列挙せよ．そのような c が存在しない場合は「存在しない」と答えよ．また，実ベクトル空間における部分空間の定義に従って，求めた答えが正しいことを証明せよ．

（数学の問題は次ページに続く）

問題 2 以下の設問に答えよ．

(1) 以下の実正方行列 C の行列式は，すべての実数 a, b, c, d, e, f に対して非負となることを示せ．

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{pmatrix}$$

(2) n 次の実正方行列 D の (i, j) 成分 a_{ij} が，すべての i, j について，$a_{ij} + a_{ji} = 0$ を満たしているとする．n が奇数のとき，D の行列式を求めよ．導出過程を示せ．

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】(続き)

【II】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

e をネイピア数(自然対数の底)，$\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とする．また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を $\boldsymbol{x}^\top$ で表す．

問題1　以下の設問に答えよ．

(1) 実数 $x > 0$ に対して $f(x) = x \log x$ とする．

(i) $y = f(x)$ のグラフの概形を，極値をとる点を含めて xy 平面上に描け．また，$f(x) = y$ となる $x > 0$ が一意に定まるような実数 y の範囲を求めよ．

(ii) $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(iii) 設問 (i) で求めた範囲の y について，$f(x) = y$ となる x を $f^{-1}(y)$ で表す．$\displaystyle\int f^{-1}(y)dy$ を y および関数 f^{-1} を用いて表せ．

(2) n を正の整数とする．実数 c に対して数列 $a_1, a_2, \ldots$ が以下を満たすものとする．

$$\begin{aligned} a_1 &= c \\ a_{n+1} &= a_n + 1 - e^{a_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

(i) $a_2 < a_1$ となるための c の必要十分条件を求めよ．

(ii) $c = 1/2$ とする．極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．極限が存在しない場合，そのことを示せ．ただし $\sqrt{e} = 1.648\cdots$ を用いてもよい．

(数学の問題は次ページに続く)

【数学】(続き)

問題2　以下の設問に答えよ．

(i) a, b を $b > a > 0$ を満たす定数とし，2次元ユークリッド空間内の楕円 $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ を考える．点 P がこの楕円上を動くとき，点 P と点 $(a, 0)$ の距離の最大値を求めよ．

(ii) $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^\top \neq \mathbf{0}$ を n 次元ユークリッド空間の定数ベクトル，d を定数とし，n 次元ユークリッド空間内の超平面 $\left\{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \mathbf{c}^\top \boldsymbol{x} = d\right\}$ を考える．原点からこの超平面までの距離を求めよ．ただし，$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ とする．

(iii) 実数 p, q に対して，

$$V = \iint_D \left(2 - e^p x^2 - e^q y^2\right) dxdy$$

を求めよ．ただし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, e^p x^2 + e^q y^2 \leq 2\}$ とする．

(数学の問題はここまで)

２０２４年度１０月期入学 / ２０２５年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

情報学専攻システム科学コース

入学者選抜 試験問題

【専門科目】

試験日時：２０２４年８月６日（火） 午後１時００分より同３時００分

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）： ９頁

選択科目：下記の科目のうち、２科目を選択し解答すること。

【複素関数論】（２） 【確率統計】（２）

【制御工学】（２） 【信号処理】（２）

なお（ ）内数字は解答用紙の最大使用枚数を示す。

注意：

（１）上記科目から２科目を超えて選択してはいけない。３科目以上選択した場合は、本専門科目の答案を無効にすることがある。<u>別紙の選択表への記入を忘れないこと</u>。

（２）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（３）解答は上記最大使用枚数に注意すること。対応する解答用紙に解答中の科目名および問題番号を明記すること。問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること。解答用紙の問題番号欄に記入したものと異なる問題の解答が書かれていても採点の対象としない。なお各問題に注意書きがあればそれに従うこと。

（４）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる灰色部分を空白にしておくこと。（この部分は切り離すので、灰色部分より上側を使用すること。）

（５）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【複素関数論】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

以下の設問において i は虚数単位，e はネイピア数 (自然対数の底)，π は円周率，$\ln$ は実数に対する自然対数，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表す．また，複素数 z に対して $|z|$ は z の絶対値を表す.

問題 1 複素変数 $z(\neq 0)$ に対し，偏角の主値 $\operatorname{Arg} z$ を $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$ となるように定義し，対数関数の主値 $\operatorname{Log} z$ を $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$，対数関数 $\log z$ を集合を値に持つ関数として $\log z = \{\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ とそれぞれ定める．以下の設問に答えよ.

(1) $\operatorname{Log} z$ は $|z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ の領域で正則であることを示せ.

(2) $\log i^2, 2\log i$ をそれぞれ求め，これらの間の，集合としての包含関係を明らかにせよ.

(3) 関数 $\cosh z$ を $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ で定義する．方程式 $\cosh z = \frac{1}{2}$ の解を全て求めよ.

(4) 複素数 $z(\neq e, 0), c$ に対して，関数 z^c を $z^c = e^{c \log z}$ で定義する．$|i^c|$ が一価となるための c に関する必要十分条件を答えよ.

（複素関数論の問題は次ページに続く）

【複素関数論】（続き）

問題 2 以下の設問に答えよ．

(1) $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき，

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

を示せ．

(2) 複素数 z に対し，$\mathcal{R}e\, z, \mathcal{I}m\, z$ はそれぞれ z の実部，虚部を表す．図の積分路 C_R に沿った

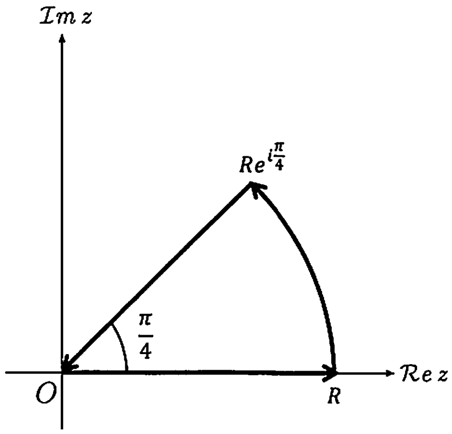


図: 積分路 C_R

複素積分 $\int_{C_R} e^{-z^2} dz$ $(R \to \infty)$ を利用することで，$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ であることを示せ．ただし，以下を用いて良い．

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) 任意の正の整数 n に対して，

$$\int_0^\infty \cos(x^{2n}) dx = \cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) \int_0^\infty e^{-x^{2n}} dx$$

が成り立つことを示せ．

(複素関数論の問題はここまで)

【確率統計】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．解答に際して，導出過程も示すこと．

以下の問題において，$E(X)$ は確率変数 X の期待値，$V(X)$ は分散を表す．$N(\mu,\sigma^2)$ は期待値 μ，分散 σ^2 の正規分布を表す．$\log x$ は自然対数を表す．

問題 1　既知の定数 $x_1,\ldots,x_n$ は区間 $I=[\frac{1}{2},2]$ に含まれるとし，既知の $g(x)>0$ は I 上の連続関数とする．確率変数 $Y_1,\ldots,Y_n$ は独立に正規分布にしたがい，$Y_i\sim N(\theta x_i, g(x_i)), i=1,\ldots,n$ である．ただし，実数 θ は未知パラメータである．定数 $w_1,\ldots,w_n$ を用いて，θ の推定量 $\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{n} w_i Y_i$ を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 推定量 $\hat{\theta}$ の期待値 $E(\hat{\theta})$ と分散 $V(\hat{\theta})$ を求めよ．

(2) $\hat{\theta}$ が不偏推定量となるための $w_1,\ldots,w_n$ についての必要十分条件を示せ．

(3) $\hat{\theta}$ が不偏推定量となる条件のもとで，$\hat{\theta}$ の分散を最小にする $w_1,\ldots,w_n$ を求めよ．

(4) θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ を求めよ．

(5) $g(x)=1+x^4$ とする．設問 (3) で求めた $w_1,\ldots,w_n$ を用いるとき，$\hat{\theta}$ の推定精度を最大とするように，$x_1,\ldots,x_n$ の値を設定せよ．

（確率統計の問題は次ページに続く）

【確率統計】　（続き）

問題 2　X を実数値確率変数とする．$f(x)$ を X の確率分布の確率密度関数とし，$f(x)$ は実数 b および α を用いて次のように与えられるとする．

$$f(x) = \begin{cases} \alpha b^{\alpha} x^{-(1+\alpha)}, & x \geq b \\ 0, & x < b \end{cases}$$

ただし，b, α はそれぞれ $b > 0$，$\alpha > 1$ を満たす．以下の設問に答えよ．

(1) 確率変数 X の期待値を求めよ．

(2) $Y = \log \frac{X}{b}$ とする．Y がしたがう確率分布の確率密度関数を求めよ．

(3) $f(x)$ に対し，次のような関係を満たす確率密度関数 $g(x)$ を考える．

$$f(x) = \frac{g(x)^{\alpha}}{\int_b^{\infty} g(s)^{\alpha}\, ds}$$

ただし，$x < b$ のとき $g(x) = 0$ とする．$x \geq b$ における $g(x)$ を求めよ．

(4) $f(x)$ と設問 (3) で与えた $g(x)$ に対して $\mathcal{D}[f \,||\, g]$ を次のように定義する．

$$\mathcal{D}[f \,||\, g] = \int_b^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$$

このとき $\mathcal{D}[f \,||\, g]$ を次に定義される H と R，および α を用いて表せ．

$$H = -\int_b^{\infty} f(x) \log f(x)\, dx$$

$$R = \frac{1}{1-\alpha} \log \int_b^{\infty} g(x)^{\alpha}\, dx$$

(確率統計の問題はここまで)

【制御工学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題１　図１のフィードバック制御系に関する以下の設問に答えよ．ただし，

$$P(s)=\frac{1}{s^2+2s-8},\quad F(s)=\frac{a}{s+1}$$

とし，a,K は定数パラメータとする．

(1) $P(s)$ のステップ応答を求めよ．

(2) r から y への伝達関数 $G_{yr}(s)$ と d から y への伝達関数 $G_{yd}(s)$ をそれぞれ求めよ．

(3) $G_{yr}(s), G_{yd}(s)$ がともに安定なとき，c を定数パラメータとして，ステップ入力 $d(t)=c$ と単位ステップ入力 $r(t)=1$ を同時に加えると，出力 $y(t)$ の定常値 $\lim_{t\to\infty} y(t)$ が 2 であった．このとき，c の値を a,K を用いて表せ．

(4) a,K を実数の範囲で自由に選べるとして，$G_{yr}(s)$ のすべての極の実部が正になる a,K が存在するか否か，理由とともに述べよ．

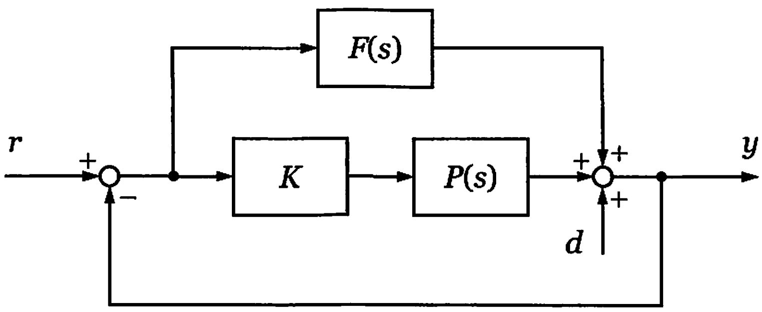


図１

（制御工学の問題は次ページに続く）

問題2　図2に示す内部安定なフィードバック制御系について，以下の設問に答えよ．なお，制御対象 $P(s)$ は最小位相で，その定常ゲイン $P(0)$ は正の定数とする．また，$C(s)$ は次式で与えられる PID 制御器であり，比例ゲイン K_P，積分時間 T_I，微分時間 T_D はすべて正の定数とする．

$$C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

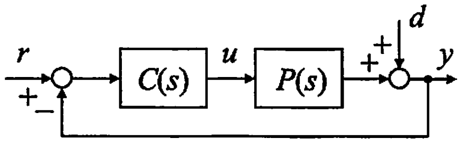


図2

(1) PID 制御器 $C(s)$ を設計したところ，一巡伝達関数のボード線図が図3のようになった．ゲイン余裕および位相余裕を図から読みとって答えよ．

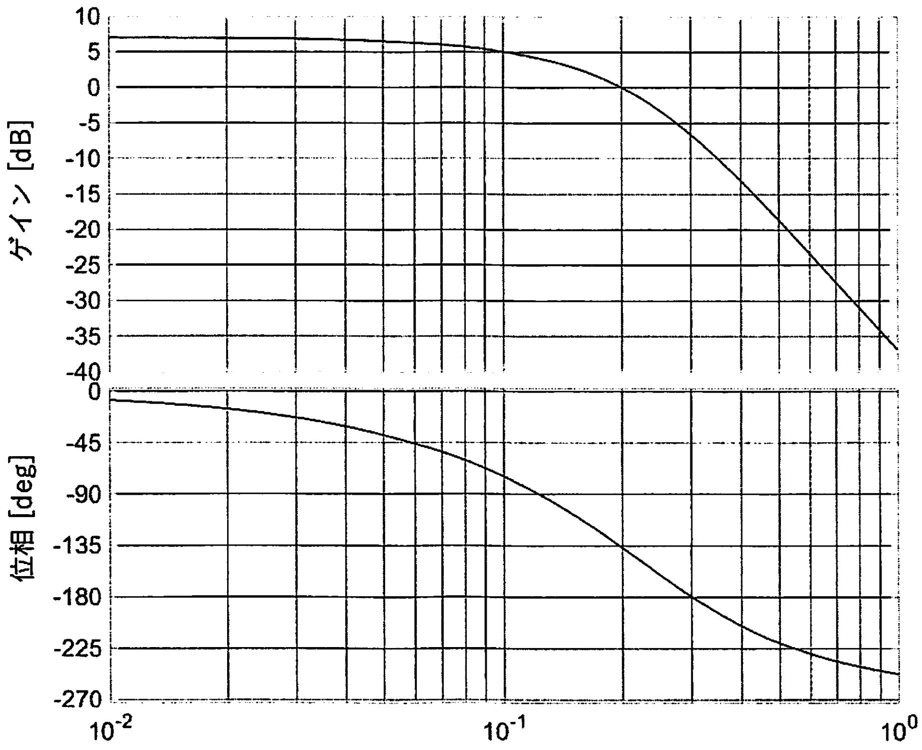


図3

（制御工学の問題は次ページに続く）

(2) 設問 (1) の PID 制御器の比例ゲイン K_P のみを調整して，ゲイン余裕を 10 dB だけ大きくしたい．K_P を何倍にすればよいか答えよ．

(3) 設問 (1) の PID 制御器を用いたところ，設定値 r をステップ状に変更した直後に操作量 u が急激に変動することが判明した．この変動を抑制するために，図 4 に示す I-PD 制御系を採用することにした．ただし，K_P，T_I，T_D の値は設問 (1) の PID 制御器と同じ値とする．PID 制御と比較して，操作量の急激な変動を抑制するために I-PD 制御が有効であると期待できる理由を簡潔に説明せよ．

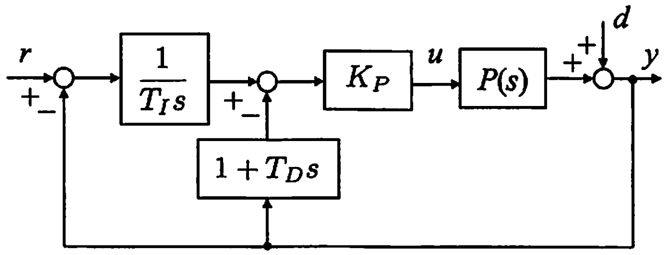


図 4

(4) 図 4 の I-PD 制御系について，外乱 d から制御量 y への閉ループ伝達関数を求めよ．さらに，PID 制御と I-PD 制御で同じ制御パラメータ K_P，T_I，T_D を用いる場合について，求めた閉ループ伝達関数が，図 2 の PID 制御系の外乱 d から制御量 y への閉ループ伝達関数と同じになるかどうかを理由とともに答えよ．

（制御工学の問題はここまで）

【信号処理】

注意: 問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

以下の問題において i は虚数単位, e はネイピア数 (自然対数の底), π は円周率を表す.

問題 1 t, ω をそれぞれ時間, 角周波数をあらわす変数とし, $\Omega > 0$ を定数とする. 矩形関数 $\mathrm{rect}(x)$, およびシンク関数 $\mathrm{sinc}(x)$ を, それぞれ以下で定義する.

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2, \\ 1/2, & |x| = 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2, \end{cases} \qquad \mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

必要に応じてこれらを使い, 以下の設問に答えよ.

(1) 角周波数領域における関数 $\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\Omega}\right)$ の逆フーリエ変換

$$R(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\Omega}\right)\right](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\Omega}\right) e^{i\omega t}\, d\omega$$

を求めよ.

(2) 時間領域における関数 $\mathrm{sinc}(\Omega t)$ のフーリエ変換

$$\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(\Omega t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\Omega t) e^{-i\omega t}\, dt$$

を求めよ.

(3) $\tau = \pi/\Omega$ および整数 n に対して, 時間領域における関数 $\phi_n(t)$ を次式で定義する.

$$\phi_n(t) = \mathrm{sinc}(\Omega(t - n\tau))$$

$\phi_n(t)$ のフーリエ変換 $\Phi_n(\omega) = \mathcal{F}[\phi_n(t)](\omega)$ を求めよ.

(4) 設問 (3) で定義した関数 $\phi_n(t)$ を使って定義される関数 $\phi_n^*(t) = \phi_n(-t)$ のフーリエ変換 $\Phi_n^*(\omega) = \mathcal{F}[\phi_n^*(t)](\omega)$ を求め, それを $\Phi_n(\omega)$ を使ってあらわせ.

(信号処理の問題は次ページに続く)

【信号処理】（続き）

(5) m, n を整数として，設問 (3), (4) で定義される $\phi_m(t)$ と $\phi_n^*(t)$ との畳み込み積分 $h_{mn}(t)$ を次式で定義する．

$$h_{mn}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(s)\phi_n^*(t-s)\,ds$$

$h_{mn}(0)$ は，$\{\phi_n(t) : n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ を基底とするベクトル空間における $\phi_m(t)$ と $\phi_n(t)$ の内積を定義する．

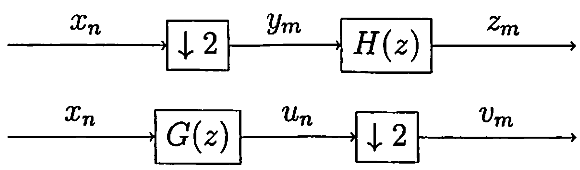
(i) $h_{mn}(t)$ のフーリエ変換 $H_{mn}(\omega) = \mathcal{F}[h_{mn}(t)](\omega)$ を求めよ．

(ii) $m \neq n$ に対して $\phi_m(t)$ と $\phi_n(t)$ とが直交することを示せ．

問題 2　離散時間信号 $\{x_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ に対して，z 変換を $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ により定義する．以下の設問に答えよ．

(1) $y_m = x_{2m}$ により離散時間信号 $\{y_m : m = 0, 1, 2, \ldots\}$ を定義する．$\{y_m\}$ の z 変換 $Y(z)$ と，$\{x_n\}$ の z 変換 $X(z)$ との間には，関係式 $Y(z^2) = \frac{1}{2}[X(z) + X(-z)]$ が成り立つことを示せ．

(2) 離散時間信号 $\{x_n\}$ から設問 (1) のようにして得られる離散時間信号 $\{y_m\}$ を伝達関数 $H(z)$ をもつフィルタに入力し，出力として得られる離散時間信号を $\{z_m\}$ とする．一方で，離散時間信号 $\{x_n\}$ を伝達関数 $G(z)$ をもつフィルタに入力し，出力として得られる離散時間信号を $\{u_n\}$ とし，$v_m = u_{2m}$ により離散時間信号 $\{v_m\}$ を定義する (図を参照)．任意の $\{x_n\}$ に対して $\{z_m\}$ と $\{v_m\}$ とが等しくなるために，$H(z)$ と $G(z)$ とのあいだに成り立つべき関係式を求めよ．



図

(信号処理の問題はここまで)