微積分

1

以下の問いに答えよ.

(i) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ は無理数}) \\ \dfrac{1}{q} & \left(x = \dfrac{p}{q} \text{は有理数}, x \neq 0\right) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定める．ただし，$\dfrac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0, q > 0)$ は既約分数とする．関数 $f(x)$ は有理数 x で連続か．また，関数 $f(x)$ は無理数 x で連続か.

(ii) 関数

$$\frac{1}{x^4 - 1}$$

の原始関数を求めよ.

(iii) $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 + 3x + y + 2$ とする．$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(x, y, z) = (1, 2, 12)$ における接平面の方程式を求めよ.

(iv) 関数

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2xy$$

の極値をすべて求めよ.

(v) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq y \leqq x\}$ とする．広義積分

$$\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dxdy$$

の値を求めよ.

An English Translation:

Calculus

1

Answer the following questions.

(i) Define a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ is an irrational number}) \\ \dfrac{1}{q} & \left(x = \dfrac{p}{q} \text{ is a rational number}, x \neq 0\right) \\ 1 & (x = 0), \end{cases}$$

where $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0, q > 0)$ is irreducible. Is the function $f(x)$ continuous at any rational number x? Also, is the function $f(x)$ continuous at any irrational number x?

(ii) Find the primitive function of

$$\frac{1}{x^4 - 1}.$$

(iii) Let $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 + 3x + y + 2$. Find the equation of the tangent plane of the surface $z = f(x, y)$ at the point $(x, y, z) = (1, 2, 12)$ in $\mathbb{R}^3$.

(iv) Find all the extrema of the function

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2xy.$$

(v) Let $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq y \leqq x\}$. Compute the value of the improper integral

$$\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dxdy.$$

線形代数

$\boxed{2}$

以下の問いに答えよ．

(i) n 次正方行列 A は n 個の線形独立な固有ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を持つとする．このとき，行列 A は対角化可能であることを示せ．

(ii) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が対角化可能かどうか判定せよ．対角化可能な場合，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(iii) 次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

(iv) 実数 a を成分に含む行列 A を $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ によって定める．行列 A の階数が 2 となるような a の値を全て求めよ．

(v) 次の x, y, z, w を変数とする連立一次方程式を解け．

$$\begin{cases} 2x + 6y - z - 2w = -1 \\ 3x + 9y + 2z - 3w = -5 \\ x + 3y - 4z - w = 3 \\ x + 3y - 2z - w = 1 \end{cases}$$

An English Translation:

Linear Algebra

$\boxed{2}$

Answer the following questions.

(i) Show that an $n \times n$ square matrix A with a set of n linearly independent eigenvectors $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ is diagonalizable.

(ii) Determine whether the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ is diagonalizable or not. If it is, find an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

(iii) Compute the following determinant:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

(iv) Let A be a matrix defined by $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, where a is a real number. When the rank of matrix A is 2, find all the values of a.

(v) Solve the following system of linear equations in the variables x, y, z, and w:

$$\begin{cases} 2x + 6y - z - 2w = -1, \\ 3x + 9y + 2z - 3w = -5, \\ x + 3y - 4z - w = 3, \\ x + 3y - 2z - w = 1. \end{cases}$$

複素関数/フーリエ解析

$\boxed{1}$

$a, T > 0$ を定数として，次式で定義される周期 T の周期関数 $f(t)$ を考える．

$$f(t) = t(t - aT), \quad t \in [0, T)$$

i を虚数単位，$\omega = 2\pi/T$，$N \in \mathbb{N}$ として，$f(t)$ の複素フーリエ部分和を

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t}$$

とし，

$$\tilde{S}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} (ik\omega c_k + (1-a)T) e^{ik\omega t}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(i) $f(t)$ の複素フーリエ係数 c_k $(k \in \mathbb{Z})$ を求めよ．

(ii) 極限 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N(0)$ を求めよ．

(iii) 極限 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \tilde{S}_N(0)$ を求めよ．

(iv) $N \to \infty$ のとき $S_N(t)$ が $f(t)$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束するための定数 a についての必要十分条件を求めよ．

An English Translation:

Complex Functions/Fourier Analysis

$\boxed{1}$

Let $a, T > 0$ be constants, and consider a periodic function $f(t)$ of period T defined by

$$f(t) = t(t - aT), \quad t \in [0, T).$$

Let i be the imaginary unit, and let $\omega = 2\pi/T$ and $N \in \mathbb{N}$. Let

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t}$$

denote the complex Fourier sum of $f(t)$, and let

$$\tilde{S}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} (ik\omega c_k + (1-a)T)e^{ik\omega t}.$$

Answer the following questions.

(i) Compute the Fourier coefficients c_k ($k \in \mathbb{Z}$) for $f(t)$.

(ii) Find the limit $\lim_{N\to\infty} S_N(0)$.

(iii) Find the limit $\lim_{N\to\infty} \tilde{S}_N(0)$.

(iv) Obtain a necessary and sufficient condition on the constant a for $S_N(t)$ to converge to $f(t)$ uniformly on $\mathbb{R}$ as $N \to \infty$.

グラフ理論

$\boxed{2}$

有限集合 A に属する要素の個数を $|A|$ と書く．節点集合 V および枝集合 E からなる単純連結無向グラフ $G=(V,E)$ が与えられたものとする．ただし $|V| \geqq 3$ とする．始点 $s \in V$ を一つ選ぶ．任意の節点 $v \in V$ に対し，s から v への最短路における枝の本数を $\mathrm{dist}(v)$ と書き，s から v への最短路の総数を $\sigma(v)$ と書く．また，$d_{\max} \triangleq \max_{v \in V} \mathrm{dist}(v)$ とし，整数 $i = 0, 1, \ldots, d_{\max}$ に対して $V_i \triangleq \{v \in V \mid \mathrm{dist}(v) = i\}$ とする．以下の問いに答えよ．

(i) $d_{\max}$ および $V_i,\ i = 0, 1, \ldots, d_{\max}$ を，$O(|E|)$ 時間で計算する方法を示せ．

(ii) すべての $v \in V$ に対して $\sigma(v)$ を $O(|E|)$ 時間で計算する方法を示せ．

(iii) ある節点 $t \in V \setminus \{s\}$ と節点の部分集合 $U \subseteqq V \setminus \{s, t\}$ に対して，s から t への最短路のうち，U に属する節点を少なくとも 1 個通過するものの個数を $O(|E|)$ 時間で計算する方法を示せ．

(iv) ある節点 $t \in V \setminus \{s\}$，節点の部分集合 $U \subseteqq V \setminus \{s, t\}$，整数 $1 \leqq k \leqq |U|$ に対して，s から t への最短路のうち，U に属する節点を少なくとも k 個通過するものが存在するかどうかを，$O(|E|)$ 時間で判定する方法を示せ．

An English Translation:

Graph Theory

2

For a finite set A, we denote by $|A|$ the number of elements in A. Assume that we are given a simple connected undirected graph $G = (V, E)$ with a vertex set V and an edge set E, where $|V| \geqq 3$ holds. Choose one vertex $s \in V$ as the starting point. For any vertex $v \in V$, we denote by $\mathrm{dist}(v)$ the number of edges in a shortest path from s to v and by $\sigma(v)$ the number of all shortest paths from s to v. Moreover, we define $d_{\max} \triangleq \max_{v \in V} \mathrm{dist}(v)$ and, for each integer $i = 0, 1, \ldots, d_{\max}$, we define $V_i \triangleq \{v \in V \mid \mathrm{dist}(v) = i\}$. Answer the following questions.

(i) Show how to compute in $O(|E|)$ time $d_{\max}$ and V_i for $i = 0, 1, \ldots, d_{\max}$.

(ii) Show how to compute $\sigma(v)$ for all $v \in V$ in $O(|E|)$ time.

(iii) For a vertex $t \in V \setminus \{s\}$ and a vertex subset $U \subseteqq V \setminus \{s, t\}$, show how to compute in $O(|E|)$ time the number of shortest paths from s to t that visit at least one vertex in U.

(iv) For a vertex $t \in V \setminus \{s\}$, a vertex subset $U \subseteqq V \setminus \{s, t\}$ and an integer $1 \leqq k \leqq |U|$, show how to determine in $O(|E|)$ time whether there exists a shortest path from s to t that visits at least k vertices in U.

凸最適化

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{A}$ を $n \times n$ の正定値対称行列とする．関数 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

ただし，$^\top$ は転置記号を表す．

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ をパラメータにもつ次の最適化問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{y}): & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq 1 \end{array}$$

ただし，問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ の決定変数は $\boldsymbol{x}$ である．問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ は唯一の最適解 $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$ をもつとする．

以下の問いに答えよ．

(i) 関数 f が凸関数であることを示せ．

(ii) 関数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$g(\boldsymbol{y}) = f(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})$$

関数 g が凸関数であることを示せ．

(iii) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を書け．

(iv) $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$ を求めよ．

An English Translation:

Convex Optimization

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{A}$ be an $n \times n$ symmetric positive definite matrix, and let a function $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$

where the superscript $^\top$ denotes transposition.

Consider the following optimization problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ with a parameter $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{y}): & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq 1, \end{array}$$

where the decision variable of $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ is $\boldsymbol{x}$. Suppose that $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ has the unique optimal solution $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$.

Answer the following questions.

(i) Show that f is a convex function.

(ii) Let a function $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by

$$g(\boldsymbol{y}) = f(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}).$$

Show that g is a convex function.

(iii) Write out Karush-Kuhn-Tucker conditions of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$.

(iv) Obtain $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$.

制御理論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力である．以下の問いに答えよ．

(i) システムの可観測性の定義を述べよ．また，システムが可観測であるとき，任意の複素数 s に対して

$$\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

がフルランクであることを証明せよ．ただし，I は単位行列をあらわす.

以下では,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とする.

(ii) このシステムの最小実現を求めよ.

(iii) このシステムの伝達関数 $P(s)$ を求めよ.

(iv) $x(0) = 0 \in \mathbb{R}^4$ および $u(t) = 1$ に対する $y(t)$ を求めよ.

(v) (iii) で求めた $P(s)$ と $P(s)K(s)$ のゲイン線図が一致する 2 次の伝達関数 $K(s)$ を一つ求めよ.

An English Translation:

Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \; y(t) = Cx(t),$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, and $y(t) \in \mathbb{R}$ is an observation output. Answer the following questions.

(i) Describe the definition of observability. Prove that

$$\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

is full rank for arbitrary complex number s if the system is observable, where I denotes the identity matrix.

In what follows, let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Find a minimum realization of this system.

(iii) Find the transfer function $P(s)$ of this system.

(iv) Find $y(t)$ for $x(0) = 0 \in \mathbb{R}^4$ and $u(t) = 1$.

(v) Find a second order transfer function $K(s)$ such that $P(s)$ obtained in (iii) has the same gain diagram as $P(s)K(s)$.

統計力学

5

n, m, N は正の整数，v_i $(i = 1, 2, ..., N)$ と w_i $(i = 1, 2, ..., N)$ は実確率変数で $\langle v_i \rangle = 0$, $\langle w_i \rangle = 1/3$, $\langle v_i v_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle (w_i - \langle w_i \rangle)(w_j - \langle w_j \rangle) \rangle = 2\delta_{ij}$, $\langle v_i w_j \rangle = -\delta_{ij}/2$ を満たすものとする．ここで $\langle A \rangle$ は確率変数 A の期待値，δ_{ij} は $i = j$ のときに 1，$i \neq j$ のときに 0 をとるクロネッカーのデルタである．次式で定義される，確率変数 x_n $(n = 1, 2, ..., N)$ と y_m $(m = 1, 2, ..., N)$ を考える．

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

$$y_m = \sum_{j=1}^{m} w_j$$

以下の問いに答えよ．

(i) $\langle w_i w_j \rangle$ を求めよ．

(ii) $\langle x_n^2 \rangle, \langle y_m^2 \rangle$ を n, m を用いて表せ．

(iii) $\langle x_n x_m \rangle, \langle y_n y_m \rangle, \langle x_n y_m \rangle$ を n, m を用いて表せ．

(iv) 次の期待値を N を用いて表せ．

$$\left\langle \left(\frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^{N} x_n - \frac{1}{N+1} \sum_{m=1}^{N} y_m \right)^2 \right\rangle$$

An English Translation:

Statistical Mechanics

5

Let n, m, and N be positive integers and let v_i for $i = 1, 2, ..., N$ and w_j for $j = 1, 2, ..., N$ be real random variables such that $\langle v_i \rangle = 0$, $\langle w_i \rangle = 1/3$, $\langle v_i v_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle (w_i - \langle w_i \rangle)(w_j - \langle w_j \rangle) \rangle = 2\delta_{ij}$, and $\langle v_i w_j \rangle = -\delta_{ij}/2$. Here $\langle A \rangle$ is the expected value of a random variable A. Moreover, δ_{ij} is Kronecker's delta that is 1 if $i = j$ or 0 if $i \neq j$. Consider the random variables x_n for $n = 1, 2, ..., N$ and y_m for $m = 1, 2, ..., N$ defined by

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} v_i,$$

$$y_m = \sum_{j=1}^{m} w_j.$$

Answer the following questions.

(i) Find $\langle w_i w_j \rangle$.

(ii) Express $\langle x_n^2 \rangle$ and $\langle y_m^2 \rangle$ in terms of n and m.

(iii) Express $\langle x_n x_m \rangle$, $\langle y_n y_m \rangle$ and $\langle x_n y_m \rangle$ in terms of n and m.

(iv) Express the following expected value in terms of N:

$$\left\langle \left(\frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^{N} x_n - \frac{1}{N+1} \sum_{m=1}^{N} y_m \right)^2 \right\rangle .$$

常微分方程式

$\boxed{6}$

$r(t)$ を t のある関数として次の微分方程式を考える．

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r(t)x \tag{1}$$

$\omega(t)$ を t のある関数として，

$$\phi(t) = \exp\left(\int \omega(t)dt\right)$$

としたとき，$x = \phi(t)$ は $r(t)$ の定義域上で式 (1) の解になるものとする．以下の問いに答えよ．ただし，関数 $r(t), \omega(t), \phi(t)$ は $\mathbb{C}$ から高々有限個の点を除いた集合を定義域とし，定義域上で少なくとも連続であるとする．

(i) $\omega(t)$ が満たす 1 階微分方程式を求めよ．

(ii) $\phi(t)$ が t の有理関数となるとき，$\omega(t)$ と $r(t)$ も t の有理関数であることを示せ．

以下では，$\phi(t)$ は t の有理関数であり，$r(t)$ は恒等的には零ではないものと仮定する．

(iii) $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$ であることを示せ．

(iv) r_1 と r_2 を，それぞれ，$r(t)$ の分子と分母の次数とする．$r_2 > r_1 + 1$ であることを示せ．

An English Translation:

Ordinary Differential Equations

$\boxed{6}$

Let $r(t)$ be a function of t, and consider the following ordinary differential equation:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r(t)x. \tag{1}$$

Let $\omega(t)$ be a function of t, and let

$$\phi(t) = \exp\left(\int \omega(t)dt\right).$$

Assume that $x = \phi(t)$ is a solution to Eq. (1) on the domain of $r(t)$. Answer the following questions. Here the functions $r(t), \omega(t), \phi(t)$ are defined on $\mathbb{C}$ except for finitely many points at most and continuous on their domains of definition at least.

(i) Derive a first-order differential equation that $\omega(t)$ satisfies.

(ii) Show that $\omega(t)$ and $r(t)$ are rational functions of t if $\phi(t)$ is a rational function of t.

In the following, assume that $\phi(t)$ is a rational function of t and $r(t)$ is not equivalently zero.

(iii) Show that $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$.

(iv) Let r_1 and r_2, respectively, denote the degrees of the numerator and denominator of $r(t)$. Show that $r_2 > r_1 + 1$.