

エンド

@hyutw*

2022 年 2 月 21 日

目次

1	対角自然変換	1
2	エンド	5

1 対角自然変換

定義. C, D を圏, $F, G: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手とする. 対角自然変換 $\sigma: F \rightrightarrows G$ とは, 圏 D の射の族 $\{\sigma_a: F(a, a) \rightarrow G(a, a)\}_{a \in C}$ であって, C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して次の図式が可換となるものである.

$$\begin{array}{ccccc} & & F(a, a) & \xrightarrow{\sigma_a} & G(a, a) \\ & \nearrow F(f, \text{id}_a) & & & \searrow G(\text{id}_a, f) \\ & F(b, a) & & & G(a, b) \\ & \searrow F(\text{id}_b, f) & & & \nearrow G(f, \text{id}_b) \\ & & F(b, b) & \xrightarrow{\sigma_b} & G(b, b) \end{array}$$

F から G への対角自然変換全体の集合を $\text{Dinat}(F, G)$ と書く.

$F, G: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手, $\theta: F \rightrightarrows G$ を自然変換とする. C の射 $f: a \rightarrow b$ につい

* <https://yuu7269.github.io/notes>.

て次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 & F(a, a) & \xrightarrow{\theta_{a,a}} & G(a, a) & \\
 F(f, \text{id}_a) \nearrow & & G(f, \text{id}_a) \nearrow & & G(\text{id}_a, f) \searrow \\
 F(b, a) & \xrightarrow{\theta_{b,a}} & G(b, a) & & G(a, b) \\
 F(\text{id}_b, f) \searrow & & G(\text{id}_b, f) \searrow & & G(f, \text{id}_b) \nearrow \\
 & F(b, b) & \xrightarrow{\theta_{b,b}} & G(b, b) &
 \end{array}$$

左上と左下の四角形は θ の自然性から可換であり, また右の四角形も可換である. したがって $a \in C$ に対して $\sigma_a = \theta_{a,a}$ とおくと, これは対角自然変換 $\sigma: F \rightrightarrows G$ を定める.

$F: C \rightarrow D$ を函手, $P: C^{\text{op}} \times C \rightarrow C$ を射影とする. このとき函手 F は合成 $F \circ P: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ として扱うことができる.

$F, G: C \rightarrow D$ を函手とし, これらを $C^{\text{op}} \times C$ から D への函手とみなしたものをそれぞれ F_0, G_0 とおく. 対角自然変換 $\sigma: F_0 \rightrightarrows G_0$ について考える. 圏 C の射 $f: a \rightarrow b$ に対して図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & F_0(a, a) & \xrightarrow{\sigma_a} & G_0(a, a) & \\
 F_0(f, \text{id}_a) \nearrow & & & & G_0(\text{id}_a, f) \searrow \\
 & F_0(b, a) & & & G_0(a, b) \\
 F_0(\text{id}_b, f) \searrow & & & & G_0(f, \text{id}_b) \nearrow \\
 & F_0(b, b) & \xrightarrow{\sigma_b} & G_0(b, b) &
 \end{array}$$

は可換である. よって F_0, G_0 の定義より図式

$$\begin{array}{ccc}
 F(a) & \xrightarrow{\sigma_a} & G(a) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(b) & \xrightarrow{\sigma_b} & G(b)
 \end{array}$$

は可換であり, これは σ が自然変換 $F \Rightarrow G$ であることを表している.

$F: C \rightarrow D$ を共変函手, $G: C \rightarrow D$ を反変函手 (つまり共変函手 $G: C^{\text{op}} \rightarrow D$) とし, これらを $C^{\text{op}} \times C$ から D への函手とみなしたものをそれぞれ F_0, G_0 とおく. σ :

$F_0 \rightrightarrows G_0$ を対角自然変換とする．このとき C の射 $f: a \rightarrow b$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\sigma_a} & G(a) \\ F(f) \downarrow & & \uparrow G(f) \\ F(b) & \xrightarrow{\sigma_b} & G(b) \end{array}$$

は可換である．このような対角自然変換は共変関手 F から反変関手 G への自然変換と考えることができる．同様に，反変関手から共変関手への自然変換も考えられる．

例 1. $\mathbf{Vect}_{\mathbf{R}}$ を実数体 \mathbf{R} 上の線型空間の圏， $\mathbf{MVect}_{\mathbf{R}}$ を \mathbf{R} 上の内積空間の圏， $U: \mathbf{MVect}_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbf{R}}$ を忘却関手， $F: (\mathbf{MVect}_{\mathbf{R}})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbf{R}}$ を「双対空間をとる」関手とする．このとき，内積空間 $\langle V, \langle -, - \rangle \rangle$ に対して写像 $\kappa_{\langle V, \langle -, - \rangle \rangle}: V \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Vect}_{\mathbf{R}}}(V, \mathbf{R})$ を $x \mapsto \langle x, - \rangle$ により定めると，これは対角自然変換 $U \rightrightarrows F$ を定める． \square

定義. $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手， $x \in D$ とする．対角関手 Δx から T への対角自然変換を x から T への wedge という．すなわち， D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a: x \rightarrow T(a, a)\}_{a \in C}$ であって， C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{array}{ccccc} & & T(a, a) & & \\ & \nearrow \sigma_a & & \searrow T(\text{id}_a, f) & \\ x & & & & T(a, b) \\ & \searrow \sigma_b & & \nearrow T(f, \text{id}_b) & \\ & & T(b, b) & & \end{array}$$

x から T への wedge を $x \rightrightarrows T$ で表す． x から T への wedge 全体の集合を $\text{Wedge}(x, T)$ と書く．

定義. $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手， $x \in D$ とする． T から対角関手 Δx への対角自然変換を T から x への cowedge という．すなわち， D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a: T(a, a) \rightarrow x\}_{a \in C}$ であって， C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{array}{ccccc} & & T(a, a) & & \\ & \nearrow T(f, \text{id}_a) & & \searrow \sigma_a & \\ T(b, a) & & & & x \\ & \searrow T(\text{id}_b, f) & & \nearrow \sigma_b & \\ & & T(b, b) & & \end{array}$$

T から x への cowedge を $T \rightrightarrows x$ で表す． T から x への cowedge 全体の集合を $\text{Wedge}(T, x)$ と書く．

例 2. C を圏とする. 函手 $\text{Hom}_C(-, -): C^{\text{op}} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$ を次のように定める.

- 対象 $\langle a, b \rangle \in C^{\text{op}} \times C$ に対して $\text{Hom}_C(a, b)$.
- $C^{\text{op}} \times C$ の射 $\langle f, g \rangle: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a', b' \rangle$ に対して

$$\text{Hom}_C(f, g) = g \circ - \circ f: \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_C(a', b'), \quad h \mapsto g \circ h \circ f.$$

$a \in C$ に対して, 一点集合 $1 = \{*\}$ から $\text{Hom}_C(a, a)$ への写像 $\lambda_a: 1 \rightarrow \text{Hom}_C(a, a)$ を $\lambda_a(*) = \text{id}_a$ により定めると, これは wedge $\lambda: 1 \rightarrow \text{Hom}_C(-, -)$ を定める. \square

例 3. C を圏とする. $a, b, c \in C$ に対して写像 $\lambda(a, b, c)$ を

$$\lambda(a, b, c): \text{Hom}_C(b, c) \times \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_C(a, c), \quad \langle g, f \rangle \mapsto g \circ f$$

と定める. $\lambda(a, b, c)$ は a, c について自然であり, b について対角自然である. \square

例 4. $F, G: C \rightarrow D$ を函手とする. 自然変換 $\sigma: F \Rightarrow G$ とは D の射の族 $\{\sigma_a: F(a) \rightarrow G(a)\}_{a \in C}$ であって, C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して次の図式が可換となるもののことであつた.

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\sigma_a} & G(a) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(b) & \xrightarrow{\sigma_b} & G(b) \end{array}$$

$1 = \{*\}$ を一点集合とする. 一般に, 集合 A の要素を与えることと写像 $1 \rightarrow A$ を与えることは同じであるから, これによって自然変換の定義を書き換えると次のようになる. 自然変換 $\sigma: F \Rightarrow G$ とは D の射の族 $\{\sigma_a: 1 \rightarrow \text{Hom}_D(F(a), G(a))\}_{a \in C}$ であって, C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して次の図式が可換となるものである.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Hom}_D(F(a), G(a)) & & \\ & \nearrow \sigma_a & & \searrow G(f) \circ - & \\ 1 & & & & \text{Hom}_D(F(a), G(b)) \\ & \searrow \sigma_b & & \nearrow - \circ F(f) & \\ & & \text{Hom}_D(F(b), G(b)) & & \end{array}$$

これは σ が 1 から $\text{Hom}_D(F(-), G(-)): C^{\text{op}} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$ への wedge であることを表している. \square

2 つの対角自然変換の合成は対角自然変換とは限らないが, 対角自然変換と自然変換の合成は対角自然変換である.

命題 5. $F, F', G, G': C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手, $\sigma: F' \Rightarrow F$, $\tau: G \Rightarrow G'$ を自然変換, $\rho: F \Rightarrow G$ を対角自然変換とする. このとき, $a \in C$ に対して合成 $\tau_{a,a} \circ \rho_a \circ \sigma_{a,a}$ は対角自然変換 $F' \Rightarrow G'$ を定める.

証明. $f: a \rightarrow b$ を圏 C の射とする. 図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & F'(a, a) & \xrightarrow{\sigma_{a,a}} & F(a, a) & \xrightarrow{\rho_a} & G(a, a) & \xrightarrow{\tau_{a,a}} & G'(a, a) \\
 F'(f, \text{id}_a) \nearrow & & & \nearrow F(f, \text{id}_a) & & \searrow G(\text{id}_a, f) & & \searrow G'(\text{id}_a, f) \\
 F'(b, a) & \xrightarrow{\sigma_{b,a}} & F(b, a) & & & G(a, b) & \xrightarrow{\tau_{b,a}} & G'(a, b) \\
 F'(\text{id}_b, f) \searrow & & \searrow F(\text{id}_b, f) & & & \nearrow G(f, \text{id}_b) & & \nearrow G'(f, \text{id}_b) \\
 & F'(b, b) & \xrightarrow{\sigma_{b,b}} & F(b, b) & \xrightarrow{\rho_b} & G(b, b) & \xrightarrow{\tau_{b,b}} & G'(b, b)
 \end{array}$$

が可換であることから従う. □

命題 6. $F, G: C \rightarrow D$, $H: C \times C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手とする. $a, b \in C$ に対して,

$$\sigma_{a,b}: F(a) \rightarrow H(b, b, a), \quad \tau_{b,a}: H(a, b, b) \rightarrow G(a)$$

は a について自然, b について対角自然であるとする. このとき $c \in C$ に対して合成 $\tau_{c,c} \circ \sigma_{c,c}$ は自然変換 $F \Rightarrow G$ を定める.

証明. $f: a \rightarrow b$ を圏 C の射とする. 図式

$$\begin{array}{ccccc}
 F(a) & \xrightarrow{\sigma_{a,a}} & H(a, a, a) & \xrightarrow{\tau_{a,a}} & G(a) \\
 \downarrow F(f) & \searrow \sigma_{a,b} & \downarrow H(f, \text{id}_a, \text{id}_a) & & \downarrow G(f) \\
 & H(b, b, a) & \xrightarrow{H(\text{id}_b, f, \text{id}_a)} & H(b, a, a) & \\
 & \downarrow H(\text{id}_b, \text{id}_b, f) & & \searrow \tau_{a,b} & \\
 F(b) & \xrightarrow{\sigma_{b,b}} & H(b, b, b) & \xrightarrow{\tau_{b,b}} & G(b)
 \end{array}$$

が可換であることから従う. □

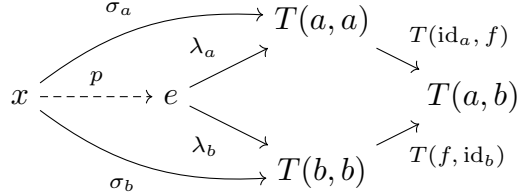
2 エンド

定義. 関手 $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ のエンドとは, 次をみたす組 $\langle e, \lambda \rangle$ である.

- (1) $e \in D$ は対象である.

(2) $\lambda: e \rightrightarrows T$ は wedge である.

(3) $\sigma: x \rightrightarrows T$ を wedge とするとき, 任意の $a \in C$ に対して $\sigma_a = \lambda_a \circ p$ をみたす射 $p: x \rightarrow e$ が一意的存在する.

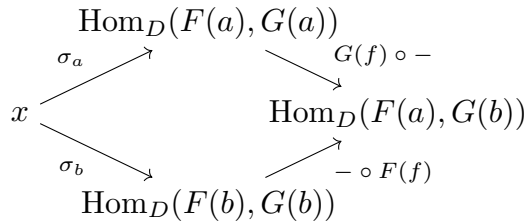


このとき e を $\int_{a \in C} T(a, a)$ で表す. 双対的にコエンド $\int^{a \in C} T(a, a)$ も定義される.

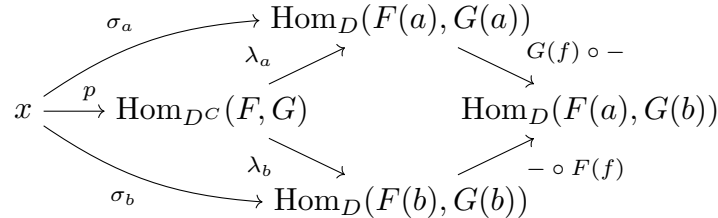
例 7. $F, G: C \rightarrow D$ を関手とする. このとき

$$\int_{a \in C} \text{Hom}_D(F(a), G(a)) \cong \text{Hom}_{D^C}(F, G).$$

証明. $a \in C$ に対して $\lambda_a: \text{Hom}_{D^C}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_D(F(a), G(a))$ を $\lambda_a(\alpha) = \alpha_a$ により定めると, これは wedge $\lambda: \text{Hom}_{D^C}(F, G) \rightrightarrows \text{Hom}_D(F(-), G(-))$ を定める. wedge $\sigma: x \rightrightarrows \text{Hom}_D(F(-), G(-))$ を任意にとる. C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して図式



は可換であるから, $u \in x$ に対して $\sigma_a(u): F(a) \rightarrow G(a)$ は a について自然である. これにより自然変換 $\sigma_-(u): F \Rightarrow G$ を得る. 写像 $p: x \rightarrow \text{Hom}_{D^C}(F, G)$ を $p(u) = \sigma_-(u)$ により定めると, これは任意の $a \in C$ に対して $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ をみたす.



任意の $a \in C$ に対して $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ をみたす射 $p: x \rightarrow \text{Hom}_{D^C}(F, G)$ が与えられたとする. $u \in x$ とする. 任意の $a \in C$ に対して $p(u)_a = \lambda_a(p(u)) = \sigma_a(u)$ であるから $p(u) =$

$\sigma_-(u)$ が従う。故に $\langle \text{Hom}_{D^C}(F, G), \lambda \rangle$ はエンドであり, $\int_{a \in C} \text{Hom}_D(F(a), G(a)) \cong \text{Hom}_{D^C}(F, G)$ が従う。 \square

$F, G: C \rightarrow D$ を関手とする。自然変換 $F \Rightarrow G$ とは $\text{wedge } 1 \xrightarrow{\cdot} \text{Hom}_D(F(-), G(-))$ のことであった。このことから, 先の例は次のように一般化される。

例 8. $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$ を関手とする。このとき

$$\int_{a \in C} T(a, a) \cong \text{Wedge}(1, T). \quad \square$$

例 9. $S, T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手とする。関手 $\text{Hom}_D(S(-, -), T(-, -)): C^{\text{op}} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$ を次のように定める。

- 対象 $\langle a, b \rangle \in C^{\text{op}} \times C$ に対して $\text{Hom}_D(S(b, a), T(a, b))$.
- $C^{\text{op}} \times C$ の射 $\langle f, g \rangle: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a', b' \rangle$ に対して

$$T(f, g) \circ - \circ S(g, f): \text{Hom}_D(S(b, a), T(a, b)) \rightarrow \text{Hom}_D(S(b', a'), T(a', b')).$$

※ 関手 $\text{Hom}_D(S(-, -), T(-, -)): C^{\text{op}} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$ は次のような合成で表すことができる。

$$\begin{aligned} C^{\text{op}} \times C &\xrightarrow{\Delta} (C^{\text{op}} \times C) \times (C^{\text{op}} \times C) \\ &\xrightarrow{\cong} (C^{\text{op}} \times C)^{\text{op}} \times (C^{\text{op}} \times C) \xrightarrow{S^{\text{op}} \times T} D^{\text{op}} \times D \xrightarrow{\text{Hom}_D(-, -)} \mathbf{Set} \end{aligned}$$

ここで, Δ は対角関手である。

このとき,

$$\int_{a \in C} \text{Hom}_D(S(a, a), T(a, a)) \cong \text{Dinat}(S, T). \quad \square$$

例 10. R を可換とは限らない単位的環とし, これを一点前加法圏 R_* とみなす。

※ 圏 R_* を次のように定めると, これは前加法圏である。

- $\text{Ob}(R_*) = \{ * \}$.
- $\text{Hom}_{R_*}(*, *) = R$.
- $f, g \in \text{Hom}_{R_*}(*, *)$ に対して合成 $g \circ f$ は積 $g \cdot f$.
- 対象 $*$ の恒等射 id_* は環 R の単位元 1.

逆に, 対象 $*$ をもつ一点前加法圏 C が与えられたとき, $\text{Hom}_C(*, *)$ はアーベル群であり, $f, g \in \text{Hom}_C(*, *)$ に対して積 $g \cdot f$ を射の合成 $g \circ f$ により定めることで $\text{Hom}_C(*, *)$ は環になる.

左 R 加群 M とは, アーベル群 M と次をみたす写像 $R \times M \rightarrow M; \langle a, x \rangle \mapsto ax$ の組のことであつた: 任意の $a, b \in R$, 任意の $x, y \in M$ に対して

- $a(x + y) = ax + ay$,
- $(a + b)x = ax + bx$,
- $(ab)x = a(bx)$,
- $1x = x$.

このような写像 $R \times M \rightarrow M$ を与えることと, 環準同型 $R \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, M)$ を与えることは同じである. ここで, $\text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, M)$ は M から M への群準同型全体の集合を表し, $f, g \in \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, M)$ に対して和 $f + g$ と積 fg は, $x \in M$ に対して

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (fg)(x) &= f(g(x))\end{aligned}$$

により定まっている群準同型 $M \rightarrow M$ である. したがって, 左 R 加群 M は一点前加法圏 R_* からアーベル群の圏 \mathbf{Ab} への加法函手 M_* であつて, R_* の対象 $*$ に対してアーベル群 M が対応しているものとみなせる. 同様に, 右 R 加群 M は加法函手 $M_*: R_*^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ とみなせる. M を右 R 加群, N を左 R 加群とする. 函手 $M_*(-) \otimes N_*(-): R_*^{\text{op}} \times R_* \rightarrow \mathbf{Ab}$ を次のように定める.

- 対象 $\langle *, * \rangle$ に対して $M_*(*) \otimes N_*(*) = M \otimes_{\mathbf{Z}} N$.
- 射 $\langle a, b \rangle: \langle *, * \rangle \rightarrow \langle *, * \rangle$ に対して $M_*(a) \otimes N_*(b): M \otimes_{\mathbf{Z}} N \rightarrow M \otimes_{\mathbf{Z}} N$.

このとき, 函手 $M_*(-) \otimes N_*(-)$ のコエンドは環 R 上のテンソル積 $M \otimes_R N$ である.

$$\int^{* \in R_*} M_*(*) \otimes N_*(*) \cong M \otimes_R N$$

証明. R 双線型写像は \mathbf{Z} 双線型写像であるから, テンソル積 $M \otimes_{\mathbf{Z}} N$ の普遍性より次の図式を可換にする群準同型 $\lambda_*: M \otimes_{\mathbf{Z}} N \rightarrow M \otimes_R N$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes_R} & M \otimes_R N \\ \otimes_{\mathbf{Z}} \downarrow & \nearrow \lambda_* & \\ M \otimes_{\mathbf{Z}} N & & \end{array}$$

写像 $\otimes_R: M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ は R 双線型であるから, 群準同型 λ_* は任意の $x \in M$, $y \in N$, $a \in R$ に対して

$$\lambda_*(xa \otimes y) = \lambda_*(x \otimes ay)$$

をみたす. つまり, 任意の $a \in R$ に対して次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccc} & & M \otimes_{\mathbf{Z}} N & & \\ M_*(a) \otimes N_*(1) & \nearrow & & \searrow \lambda_* & \\ & M \otimes_{\mathbf{Z}} N & & & M \otimes_R N \\ & \searrow & & \nearrow \lambda_* & \\ & M \otimes_{\mathbf{Z}} N & & & \end{array}$$

故に λ_* は wedge $\lambda: M_*(-) \otimes N_*(-) \twoheadrightarrow M \otimes_R N$ を定める. このとき $\langle M \otimes_R N, \lambda \rangle$ がコエンドとなることを示す. $\sigma: M_*(-) \otimes N_*(-) \twoheadrightarrow A$ を wedge とする. 合成 $\sigma_* \circ \otimes_{\mathbf{Z}}: M \times N \rightarrow A$ は \mathbf{Z} 双線型であり, 任意の $a \in R$ に対して図式

$$\begin{array}{ccccc} & & M \otimes_{\mathbf{Z}} N & & \\ M_*(a) \otimes N_*(1) & \nearrow & & \searrow \sigma_* & \\ & M \otimes_{\mathbf{Z}} N & & & A \\ & \searrow & & \nearrow \sigma_* & \\ & M \otimes_{\mathbf{Z}} N & & & \end{array}$$

は可換であるから, $\sigma_* \circ \otimes_{\mathbf{Z}}$ は R 双線型である. 故に, テンソル積 $M \otimes_R N$ の普遍性より次の図式を可換にする群準同型 $h: M \otimes_R N \rightarrow A$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes_R} & M \otimes_R N \\ \otimes_{\mathbf{Z}} \downarrow & \nearrow \lambda_* & \downarrow h \\ M \otimes_{\mathbf{Z}} N & \xrightarrow{\sigma_*} & A \end{array}$$

テンソル積 $M \otimes_{\mathbf{Z}} N$ の普遍性より次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} & & M \otimes_R N \\ & \nearrow \lambda_* & \downarrow h \\ M \otimes_{\mathbf{Z}} N & \xrightarrow{\sigma_*} & A \end{array}$$

テンソル積 $M \otimes_{\mathbf{Z}} N$ の普遍性より, $h \circ \lambda_* = \sigma_*$ をみたす群準同型 $h: M \otimes_R N \rightarrow A$ は一意である. 故に $\langle M \otimes_R N, \lambda \rangle$ はコエンドであり, $\int^{* \in R^*} M(*) \otimes N(*) \cong M \otimes_R N$ が従う. \square

$T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手, $f: d \rightarrow d'$ を圏 D の射, $\sigma: T \rightrightarrows d$ を cowedge とする. このとき $\{f \circ \sigma_a\}_{a \in C}$ は cowedge $T \rightrightarrows d'$ である. 次のようにして関手 $\text{Wedge}(T, -): D \rightarrow \mathbf{Set}$ を定める.

- 対象 $d \in D$ に対して $\text{Wedge}(T, d)$.
- D の射 $f: d \rightarrow d'$ に対して

$$\text{Wedge}(T, f): \text{Wedge}(T, d) \rightarrow \text{Wedge}(T, d'), \quad \sigma \mapsto \{f \circ \sigma_a\}_{a \in C}.$$

同様にして関手 $\text{Wedge}(-, T): D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が定まる.

関手 $T: C \rightarrow D$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Cone}(T, -) &= \text{Hom}_{D^C}(T, \Delta(-)): D \rightarrow \mathbf{Set}, \\ \text{Cone}(-, T) &= \text{Hom}_{D^C}(\Delta(-), T): D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set} \end{aligned}$$

とおく.

関手 $T: C \rightarrow D$ の極限 $\lim T$ の存在と, 関手 $\text{Cone}(-, T): D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が表現可能であることが同値であるように, エンドに対して次が成り立つ.

命題 11. $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手とする. このとき以下は同値である.

- (1) 関手 T のエンド $\int_a T(a, a)$ が存在する.
- (2) 関手 $\text{Wedge}(-, T): D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ は表現可能である. □

3 変数の関手 $T: C^{\text{op}} \times C \times X \rightarrow D$ について考える. $x \in X$ を固定することで 2 変数の関手 $T(-, -, x): C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ が得られるから, エンド $\int_a T(a, a, x)$ を考えることができる. 任意の $x \in X$ に対してエンド $\int_a T(a, a, x)$ が存在するとき, 対応 $X \ni x \mapsto \int_a T(a, a, x) \in D$ を考えることができる.

命題 12. $T: C^{\text{op}} \times C \times X \rightarrow D$ を関手とし, 任意の $x \in X$ に対してエンド $\langle \int_a T(a, a, x), \lambda^x \rangle$ が存在すると仮定する. 圏 C の射 $f: a \rightarrow b$ と $x \in X$ に対して $\alpha_x^f = T(\text{id}_a, f, \text{id}_x) \circ \lambda_a^x$ とおく.

$$\begin{array}{ccccc} & \lambda_a^x & T(a, a, x) & T(\text{id}_a, f, \text{id}_x) & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \int_a T(a, a, x) & \xrightarrow{\alpha_x^f} & T(a, b, x) & & \\ & \searrow & \nearrow & T(f, \text{id}_b, \text{id}_x) & \\ & \lambda_b^x & T(b, b, x) & & \end{array}$$

このとき以下をみたす関手 $F: X \rightarrow D$ が一意的に存在する.

- (1) $x \in X$ に対して $F(x) = \int_a T(a, a, x)$.
(2) C の射 $f: a \rightarrow b$ に対して $\alpha_x^f: F(x) \rightarrow T(a, b, x)$ が自然変換 $\alpha^f: F \Rightarrow T(a, b, -)$ を定める.

この F を $\int_a T(a, a, -)$ で表す.

証明. $k: x \rightarrow y$ を圏 X の射, $f: a \rightarrow b$ を圏 C の射とし, 次の図式の実線部を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \int_a T(a, a, y) & \xrightarrow{\lambda_a^y} & T(a, a, y) \\
& \nearrow F(k) & \downarrow & \nearrow T(\text{id}_a, \text{id}_a, k) & \downarrow T(\text{id}_a, f, \text{id}_y) \\
\int_a T(a, a, x) & \xrightarrow{\lambda_a^x} & T(a, a, x) & & \\
\downarrow \lambda_b^x & & \downarrow \lambda_b^y & & \downarrow T(\text{id}_a, f, \text{id}_y) \\
& & T(b, b, y) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_b, \text{id}_y)} & T(a, b, y) \\
& \nearrow T(\text{id}_b, \text{id}_b, k) & \downarrow & \nearrow T(\text{id}_a, \text{id}_b, k) & \\
T(b, b, x) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_b, \text{id}_x)} & T(a, b, x) & &
\end{array}$$

実線部の各四角形はすべて可換であるから, エンド $\int_a T(a, a, y)$ の普遍性より点線の射 $F(k): \int_a T(a, a, x) \rightarrow \int_a T(a, a, y)$ を得る. このとき明らかに F は関手 $X \rightarrow D$ である. また明らかに $\alpha_x^f: F(x) \rightarrow T(a, b, x)$ は x について自然である. エンドの普遍性より, このような関手 F は一意である. \square

4 変数の関手 $T: C^{\text{op}} \times C \times X^{\text{op}} \times X \rightarrow D$ について考える. 圏 C についてエンドをとることで関手 $\int_{a \in C} T(a, a, -, -): X^{\text{op}} \times X \rightarrow D$ を得ることができ, さらにこのエンド

$$\int_{x \in X} \int_{a \in C} T(a, a, x, x)$$

を考えることができる. 一方で, 同型 $C^{\text{op}} \times C \times X^{\text{op}} \times X \cong (C \times X)^{\text{op}} \times (C \times X)$ により $T: (C \times X)^{\text{op}} \times (C \times X) \rightarrow D$ とみなすことで, エンド

$$\int_{\langle a, x \rangle \in C \times X} T(a, a, x, x)$$

も考えることができる.

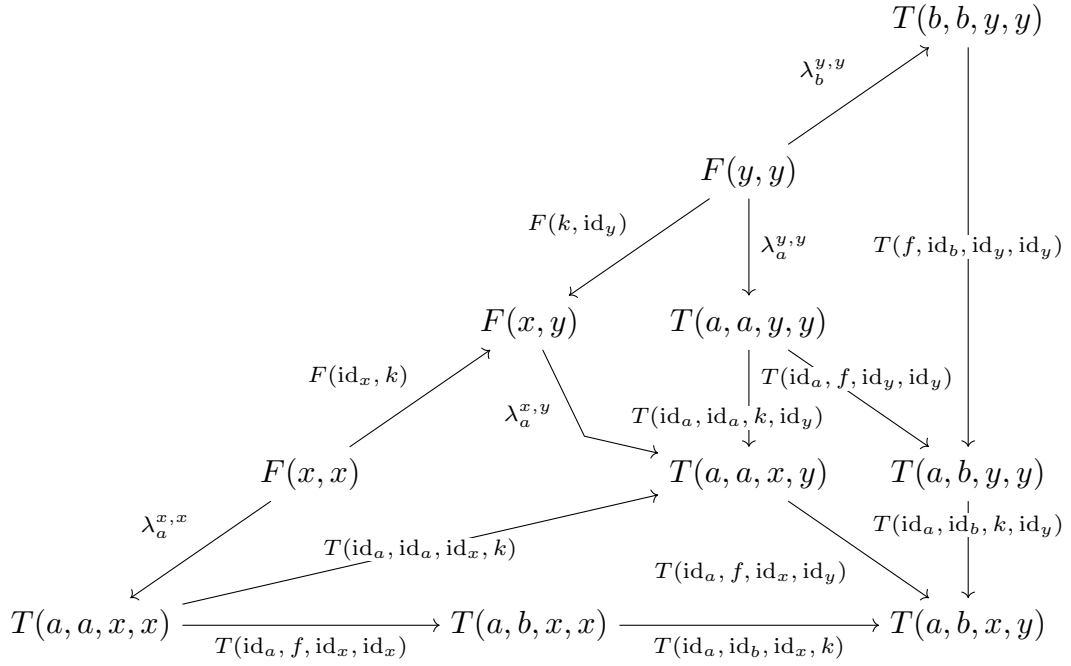
定理 13. $T: C^{\text{op}} \times C \times X^{\text{op}} \times X \rightarrow D$ を関手とし, 任意の $x, y \in X$ に対してエンド $\langle \int_{a \in C} T(a, a, x, y), \lambda^{x, y} \rangle$ が存在すると仮定する. 関手 $\int_a T(a, a, -, -): X^{\text{op}} \times X \rightarrow D$

を F とおく．このとき $d \in D$ について自然な同型

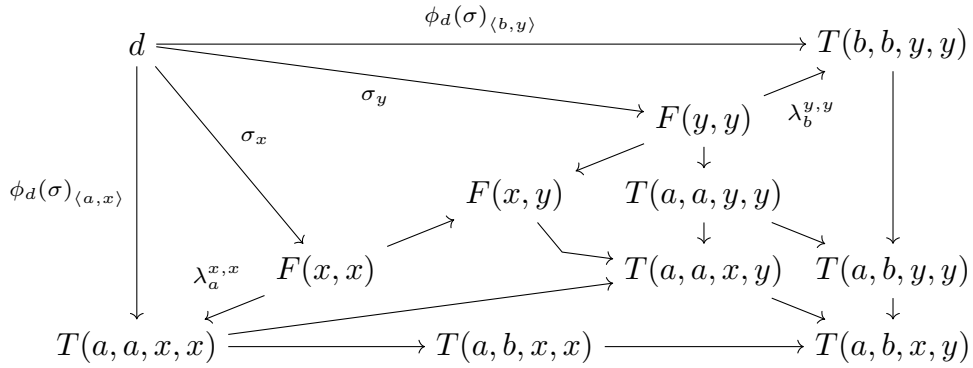
$$\text{Wedge}(d, T) \cong \text{Wedge}(d, F)$$

が存在する．

証明． $f: a \rightarrow b$ を圏 C の射, $k: x \rightarrow y$ を圏 X の射とする．関手 $F: X^{\text{op}} \times X \rightarrow D$ の定義や wedge の定義より, 次の可換図式を得る．



$\sigma: d \rightrightarrows F$ を wedge とする． $\langle a, x \rangle \in C \times X$ に対して $\phi_d(\sigma)_{\langle a, x \rangle} = \lambda_a^{x, x} \circ \sigma_x$ と定める． $C \times X$ の任意の射 $\langle f, k \rangle: \langle a, x \rangle \rightarrow \langle b, y \rangle$ に対して次の図式が可換であるから $\phi_d(\sigma)_{\langle a, x \rangle}$ は wedge $\phi_d(\sigma): d \rightrightarrows T$ を定める．



$\tau: d \twoheadrightarrow T$ を wedge とする. $x \in X$ を固定することで $\text{wedge } \tau_{\langle -, x \rangle}: d \rightarrow T(-, -, x, x)$ を得る. したがって, エンド $F(x, x) = \int_a T(a, a, x, x)$ の普遍性から任意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にする射 $\psi_d(\tau)_x: d \rightarrow F(x, x)$ が存在する.

は可換であるから, エンド $F(x, x) = \int_a T(a, a, x, x)$ の普遍性より $\psi_d(\phi_d(\sigma))_x = \sigma_x$ が従う. 故に $\psi_d(\phi_d(\sigma)) = \sigma$ であり, $\psi_d \circ \phi_d = \text{id}$ が従う. $\text{wedge } \tau: d \rightrightarrows T$ と $\langle a, x \rangle \in C \times X$ に対して

$$\phi_d(\psi_d(\tau))_{\langle a, x \rangle} = \lambda_a^{x, x} \circ \psi_d(\tau)_x = \tau_{\langle a, x \rangle}$$

であるから $\phi_d \circ \psi_d = \text{id}$ が従う. 故に ϕ_d, ψ_d は互いに逆写像である. \square

故に, 函手 $\text{Wedge}(-, T), \text{Wedge}(-, F): D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ の一方が表現可能ならばもう一方も表現可能であり,

$$\int_{\langle a, x \rangle \in C \times X} T(a, a, x, x) \cong \int_{x \in X} F(x, x) = \int_{x \in X} \left(\int_{a \in C} T(a, a, x, x) \right)$$

が従う.

系 14 (Fubini の定理). $T: C^{\text{op}} \times C \times X^{\text{op}} \times X \rightarrow D$ を函手とする. 任意の $x, y \in X$ に対してエンド $\int_{a \in C} T(a, a, x, y)$ が存在し, 任意の $a, b \in C$ に対してエンド $\int_{x \in X} T(a, b, x, x)$ が存在すると仮定する. このとき

$$\int_{x \in X} \left(\int_{a \in C} T(a, a, x, x) \right) \cong \int_{a \in C} \left(\int_{x \in X} T(a, a, x, x) \right). \quad \square$$

エンドは以下のように極限で表すことができる.

C を圏とする. 圏 $C_{\#}$ を次のように定める.

- 対象は C の射である.
- $f: a \rightarrow b$ から $f': a' \rightarrow b'$ への射は C の射の組 $\langle h, k \rangle$ で次の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ h \uparrow & & \downarrow k \\ a' & \xrightarrow{f'} & b' \end{array}$$

- 射 $\langle h, k \rangle: f \rightarrow f', \langle h', k' \rangle: f' \rightarrow f''$ に対して合成は

$$\langle h', k' \rangle \circ \langle h, k \rangle := \langle h \circ h', k' \circ k \rangle: f \rightarrow f''$$

である.

- $f: a \rightarrow b$ の恒等射は $\langle \text{id}_a, \text{id}_b \rangle: f \rightarrow f$ である.

圏 $C_{\#}$ の任意の射 $\langle h, k \rangle: f \rightarrow f'$ は次のように分解する.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f \circ h & & \langle \text{id}, k \rangle \\
 \langle h, \text{id} \rangle & \nearrow & & \searrow & \\
 f & & \langle h, k \rangle & & f' \\
 \langle \text{id}, k \rangle & \searrow & & \nearrow & \\
 & & k \circ f & & \langle h, \text{id} \rangle
 \end{array}$$

関手 $U: C_{\#} \rightarrow C^{\text{op}} \times C$ を次のように定める.

- 対象 $f \in C_{\#}$ に対して $U(f) = \langle \text{dom}(f), \text{cod}(f) \rangle$.
- $C_{\#}$ の射 $\langle h, k \rangle: f \rightarrow f'$ に対して $U(h, k) = \langle h, k \rangle$.

命題 15. $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手とする. このとき, $d \in D$ について自然な同型

$$\text{Wedge}(d, T) \cong \text{Cone}(d, T \circ U)$$

が存在する.

証明. $\sigma: d \rightrightarrows T$ を wedge とする. $f \in C_{\#}$ に対して $\phi(\sigma)_f = T(\text{id}_{\text{dom}(f)}, f) \circ \sigma_{\text{dom}(f)}$ と定める. $C_{\#}$ の任意の射 $\langle h, k \rangle: (f: a \rightarrow b) \rightarrow (f': a' \rightarrow b')$ に対して図式

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & \phi(\sigma)_f & & \\
 & & \downarrow & & \\
 d & \begin{array}{l} \nearrow \sigma_a \\ \xrightarrow{\sigma_b} \\ \searrow \sigma_{a'} \end{array} & \begin{array}{l} T(a, a) \\ T(b, b) \\ T(a', a') \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{T(\text{id}_a, f)} \\ \xrightarrow{T(h \circ f, \text{id}_b)} \\ \xrightarrow{T(\text{id}_{a'}, f \circ h)} \end{array} & \begin{array}{l} T(U(f)) \\ T(U(f \circ h)) \\ T(U(f')) \end{array} \\
 & & & & \downarrow \begin{array}{l} T(U(h, \text{id}_b)) \\ T(U(\text{id}_{a'}, k)) \end{array} \\
 & & & & T(U(h, k)) \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & \phi(\sigma)_{f'}
 \end{array}
 \end{array}$$

は可換であるから $\phi(\sigma)_f$ は自然変換 $\phi(\sigma): \Delta d \Rightarrow T \circ U$ を定める. 明らかに写像 $\phi: \text{Wedge}(d, T) \rightarrow \text{Cone}(d, T \circ U)$ は $d \in D$ について自然である. $\theta: \Delta d \Rightarrow T \circ U$ を自然変

換とする. $a \in C$ に対して $\psi(\theta)_a = \theta_{\text{id}_a}$ と定める. C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して図式

$$\begin{array}{ccccc} & & T(a, a) & & T(\text{id}_a, f) \\ & \nearrow^{\psi(\theta)_a = \theta_{\text{id}_a}} & \searrow^{\theta_f} & & \searrow \\ d & \xrightarrow{\quad} & T(a, b) & & \\ & \searrow_{\psi(\theta)_b = \theta_{\text{id}_b}} & \nearrow_{T(f, \text{id}_b)} & & \\ & & T(b, b) & & \end{array}$$

は可換であるから $\psi(\theta)_a$ は wedge $\psi(\theta): d \rightrightarrows T$ を定める.

任意の wedge $\sigma: d \rightrightarrows T$ と $a \in C$ に対して

$$\psi(\phi(\sigma))_a = \phi(\sigma)_{\text{id}_a} = T(\text{id}_a, \text{id}_a) \circ \sigma_a = \sigma_a$$

であるから $\psi \circ \phi = \text{id}$ が従う. 任意の自然変換 $\theta: \Delta d \Rightarrow T \circ U$ と $C_\#$ の対象 $f: a \rightarrow b$ に対して

$$\phi(\psi(\theta))_f = T(\text{id}_a, f) \circ \psi(\theta)_a = T(\text{id}_a, f) \circ \theta_{\text{id}_a} = \theta_f$$

であるから $\phi \circ \psi = \text{id}$ が従う. したがって, ϕ, ψ は互いに逆写像である. \square

故に, 函手 $\text{Wedge}(-, T), \text{Cone}(-, T \circ U): D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ の一方が表現可能ならばもう一方も表現可能であり,

$$\int_a T(a, a) \cong \lim(T \circ U)$$

が従う.

積の存在を仮定すると, エンドを次のように equalizer で表すことができる.

命題 16. $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を函手とし, 圏 D において, 積

$$\left\langle \prod_{a \in \text{Ob}(C)} T(a, a), p \right\rangle, \quad \left\langle \prod_{f \in \text{Mor}(C)} T(\text{dom}(f), \text{cod}(f)), p' \right\rangle$$

が存在すると仮定する. 積 $\prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ の普遍性より, 圏 C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して次の図式を可換にする射 $s, t: \prod_a T(a, a) \rightarrow \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} T(a, a) & \xleftarrow{p_a} & \prod_a T(a, a) \\ \downarrow T(\text{id}_a, f) & & \downarrow s \\ T(a, b) & \xleftarrow[p'_f]{} & \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T(b, b) & \xleftarrow{p_b} & \prod_a T(a, a) \\ \downarrow T(f, \text{id}_b) & & \downarrow t \\ T(a, b) & \xleftarrow[p'_f]{} & \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f)) \end{array}$$

このとき以下は同値である.

(1) 函手 $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ のエンドが存在する.

(2) 射 $s, t: \prod_a T(a, a) \rightarrow \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ の equalizer が存在する.

証明. (1 \implies 2) $\langle \int_a T(a, a), \lambda \rangle$ を $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ のエンドとする. 積 $\prod_a T(a, a)$ の普遍性より, 任意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にする射 $r: \int_a T(a, a) \rightarrow \prod_a T(a, a)$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} & & T(a, a) \\ & \nearrow \lambda_a & \uparrow p_a \\ \int_a T(a, a) & \dashrightarrow_r & \prod_a T(a, a) \end{array}$$

$\langle \int_a T(a, a), r \rangle$ が射 $s, t: \prod_a T(a, a) \rightarrow \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ の equalizer であることを示す. $\lambda: \int_a T(a, a) \rightrightarrows T$ が wedge であることと射 r, s, t のとり方から, C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccccc} & & T(a, a) & \xrightarrow{T(\text{id}_a, f)} & & & \\ & \nearrow \lambda_a & \uparrow p_a & & & & \\ \int_a T(a, a) & \xrightarrow{r} & \prod_a T(a, a) & \xrightarrow[s]{t} & \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f)) & \xrightarrow{p'_f} & T(a, b) \\ & \searrow \lambda_b & \downarrow p_b & & & & \uparrow \\ & & T(b, b) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_b)} & & & \end{array}$$

故に, 積 $\prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ の普遍性より $s \circ r = t \circ r$ が従う. $q: x \rightarrow \prod_a T(a, a)$ を $s \circ q = t \circ q$ をみたす射とする. このとき C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & T(a, a) & \xrightarrow{T(\text{id}_a, f)} & & & \\ & \nearrow p_a \circ q & \uparrow p_a & & & & \\ x & \xrightarrow{q} & \prod_a T(a, a) & \xrightarrow[s]{t} & \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f)) & \xrightarrow{p'_f} & T(a, b) \\ & \searrow p_b \circ q & \downarrow p_b & & & & \uparrow \\ & & T(b, b) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_b)} & & & \end{array}$$

は可換であるから $p_a \circ q$ は wedge $x \rightrightarrows T$ を定める. エンド $\int_a T(a, a)$ の普遍性より, 任

意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にする射 $h: x \rightarrow \int_a T(a, a)$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{q} & \prod_a T(a, a) \\ \downarrow h & \nearrow r & \downarrow p_a \\ \int_a T(a, a) & \xrightarrow{\lambda_a} & T(a, a) \end{array}$$

積 $\prod_a T(a, a)$ の普遍性より次の図式が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{q} & \prod_a T(a, a) \\ \downarrow h & \nearrow r & \\ \int_a T(a, a) & & \end{array}$$

エンド $\int_a T(a, a)$ の普遍性より, $r \circ h = q$ をみたす射 $h: x \rightarrow \int_a T(a, a)$ は一意である. 故に $\langle \int_a T(a, a), r \rangle$ は射 $s, t: \prod_a T(a, a) \rightarrow \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ の equalizer である.

(2 \implies 1) 対象 $e \in D$ と C の射 $l: e \rightarrow \prod_a T(a, a)$ の組 $\langle e, l \rangle$ を, 射 $s, t: \prod_a T(a, a) \rightarrow \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ の equalizer とする. $a \in C$ に対して $\lambda_a = p_a \circ l$ とおく. C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & T(a, a) & \xrightarrow{T(\text{id}_a, f)} & & & \\ & \nearrow \lambda_a & \uparrow p_a & & & & \\ e & \xrightarrow{l} & \prod_a T(a, a) & \xrightarrow[s]{t} & \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f)) & \xrightarrow{p'_f} & T(a, b) \\ & \searrow \lambda_b & \downarrow p_b & & & & \uparrow \\ & & T(b, b) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_b)} & & & \end{array}$$

は可換であるから λ_a は wedge $\lambda: e \rightrightarrows T$ を定める. $\langle e, \lambda \rangle$ が函手 T のエンドとなることを示す. $\sigma: x \rightrightarrows T$ を wedge とする. 積 $\prod_a T(a, a)$ の普遍性より, 任意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にする射 $q: x \rightarrow \prod_a T(a, a)$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} & T(a, a) & \\ \nearrow \sigma_a & \uparrow p_a & \\ x & \xrightarrow{q} & \prod_a T(a, a) \end{array}$$

C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & T(a, a) & \xrightarrow{T(\text{id}_a, f)} & & & \\
 & \nearrow \sigma_a & \uparrow p_a & & & & \\
 x & \xrightarrow{q} & \prod_a T(a, a) & \xrightarrow[s]{t} \xrightarrow{f} & \prod T(\text{dom}(f), \text{cod}(f)) & \xrightarrow{p'_f} & T(a, b) \\
 & \searrow \sigma_b & \downarrow p_b & & & & \\
 & & T(b, b) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_b)} & & &
 \end{array}$$

は可換であるから、積 $\prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ の普遍性より $s \circ q = t \circ q$ が従う。故に、equalizer e の普遍性より次の図式を可換にする射 $h: x \rightarrow e$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{q} & \prod_a T(a, a) \\
 \downarrow h & & \uparrow l \\
 e & \xrightarrow{l} &
 \end{array}$$

したがって、任意の $a \in C$ に対して次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \sigma_a & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 x & \xrightarrow{q} & \prod_a T(a, a) & \xrightarrow{p_a} & T(a, a) \\
 \downarrow h & & \uparrow l & & \\
 e & \xrightarrow{l} & & &
 \end{array}$$

このような射 h の一意性について示そう。射 $h, h': x \rightarrow e$ が任意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にするとする。

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\sigma_a} & T(a, a) \\
 \downarrow h, h' & \nearrow \lambda_a & \uparrow p_a \\
 e & \xrightarrow{l} & \prod_a T(a, a)
 \end{array}$$

積 $\prod_a T(a, a)$ の普遍性より $l \circ h = l \circ h'$ が従い、equalizer e の普遍性より $h = h'$ が従う。故に $\langle e, \lambda \rangle$ は函手 T のエンドである。 \square

故に以下が成り立つ。

定理 17. C を小圏, D を完備な圏とする. このとき, 関手 $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ のエンド $\int_a T(a, a) \in D$ が存在する. \square

定理 18. 連続な関手はエンドを保つ. すなわち, $F: D \rightarrow X$ を連続関手とし, 関手 $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ のエンド $\int_a T(a, a)$ が存在するとき,

$$F\left(\int_a T(a, a)\right) \cong \int_a F(T(a, a)). \quad \square$$

系 19. 関手 $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ のエンド $\int_a T(a, a)$ が存在するとき,

$$\text{Hom}_D\left(d, \int_c T(c, c)\right) \cong \int_c \text{Hom}_D(d, T(c, c)). \quad \square$$

D^{op} で考えれば

$$\text{Hom}_D\left(\int^c T(a, a), d\right) \cong \int^c \text{Hom}_D(T(c, c), d)$$

もわかる.

エンドは極限で表すことができた. 逆に, 極限はエンドで表すことができる.

命題 20. $T: C \rightarrow D$ を関手とし, T を関手 $C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ とみなしたものを T_0 とおく. このとき以下は同値である.

- (1) 関手 $T: C \rightarrow D$ の極限が存在する.
- (2) 関手 $T_0: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ のエンドが存在する. \square

定義. C を圏, $a \in C, x \in \mathbf{Set}$ とする.

- (1) 関手 $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \text{Hom}_C(a, -)): C \rightarrow \mathbf{Set}$ が表現可能なとき, これを表現する対象を copower object といい, $x \odot a$ で表す.

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \text{Hom}_C(a, -)) \cong \text{Hom}_C(x \odot a, -)$$

- (2) 関手 $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \text{Hom}_C(-, a)): C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が表現可能なとき, これを表現する対象を power object といい, $x \pitchfork a$ で表す.

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \text{Hom}_C(-, a)) \cong \text{Hom}_C(-, x \pitchfork a)$$

C を圏, $a \in C, x \in \mathbf{Set}$ とする. $\coprod_{i \in x} a, \prod_{i \in x} a$ が存在するとき, $b \in C$ について自然に

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(a, b)) &\cong \prod_{i \in x} \mathrm{Hom}_C(a, b) \cong \mathrm{Hom}_C\left(\coprod_{i \in x} a, b\right) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(b, a)) &\cong \prod_{i \in x} \mathrm{Hom}_C(b, a) \cong \mathrm{Hom}_C\left(b, \prod_{i \in x} a\right)\end{aligned}$$

であるから

$$x \odot a \cong \coprod_{i \in x} a, \quad x \pitchfork a \cong \prod_{i \in x} a$$

が従う.

C を圏, $a \in C$ とする. 任意の $x \in \mathbf{Set}$ に対して $x \odot a, x \pitchfork a$ が存在するとき, 随伴

$$\begin{aligned}- \odot a \dashv \mathrm{Hom}_C(a, -) : \mathbf{Set} &\rightarrow C \\ - \pitchfork a \dashv \mathrm{Hom}_C(-, a) : \mathbf{Set} &\rightarrow C^{\mathrm{op}}\end{aligned}$$

が成り立つ.

C を圏とする. 各対象 $x \in \mathbf{Set}, a \in C$ に対して $x \odot a$ が存在すると仮定する. \mathbf{Set} の射 $k: x \rightarrow y, C$ の射 $f: a \rightarrow b$ に対して, 合成

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_C(y \odot b, y \odot b) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(y, \mathrm{Hom}_C(b, y \odot b)) \\ &\xrightarrow{\mathrm{Hom}_C(f, y \odot b) \circ - \circ k} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(a, y \odot b)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_C(x \odot a, y \odot b)\end{aligned}$$

において $\mathrm{id}_{y \odot b}$ に対応している射を $k \odot f: x \odot a \rightarrow y \odot b$ とする. このようにして関手 $\odot: \mathbf{Set} \times C \rightarrow C$ が定まる. 同様にして, 各対象 $x \in \mathbf{Set}, a \in C$ に対して $x \pitchfork a$ が存在するとき, これは関手 $\pitchfork: \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times C \rightarrow C$ を定める.

定理 21. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ を関手とし, 任意の $c, c' \in C, d \in D$ に対して copower object $\mathrm{Hom}_D(F(c), d) \odot E(c')$ が存在すると仮定する. さらに, 任意の $d \in D$ に対してコエンド $\int^{c \in C} \mathrm{Hom}_D(F(c), d) \odot E(c)$ が存在すると仮定する. このとき, F に沿った E の左 Kan 拡張 $F^{\dagger}E$ が存在する.

証明. $L = \int^{c \in C} \text{Hom}_D(F(c), -) \odot E(c)$ とおく. 函手 $S: D \rightarrow U$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{U^D}(L, S) &\cong \int_{d \in D} \text{Hom}_U(L(d), S(d)) \\
&= \int_{d \in D} \text{Hom}_U \left(\int^{c \in C} \text{Hom}_D(F(c), d) \odot E(c), S(d) \right) \\
&\cong \int_{d \in D} \left(\int_{c \in C} \text{Hom}_U(\text{Hom}_D(F(c), d) \odot E(c), S(d)) \right) \\
&\cong \int_{d \in D} \left(\int_{c \in C} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_D(F(c), d), \text{Hom}_U(E(c), S(d))) \right) \\
&\cong \int_{c \in C} \left(\int_{d \in D} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_D(F(c), d), \text{Hom}_U(E(c), S(d))) \right) \\
&\cong \int_{c \in C} \text{Hom}_{\mathbf{Set}^D}(\text{Hom}_D(F(c), -), \text{Hom}_U(E(c), S(-))) \\
&\cong \int_{c \in C} \text{Hom}_U(E(c), S(F(c))) \\
&\cong \text{Hom}_{U^C}(E, S \circ F)
\end{aligned}$$

であるから $L \cong F^\dagger E$ が従う. □

双対的に次が成り立つ.

定理 22. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ を函手とし, 任意の $c, c' \in C, d \in D$ に対して power object $\text{Hom}_D(d, F(c)) \pitchfork E(c')$ が存在すると仮定する. さらに, 任意の $d \in D$ に対してエンド $\int_{c \in C} \text{Hom}_D(d, F(c)) \pitchfork E(c)$ が存在すると仮定する. このとき, F に沿った E の右 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し, $F^\dagger E \cong \int_{c \in C} \text{Hom}_D(-, F(c)) \pitchfork E(c)$ が成り立つ.

参考文献

- [1] S. Mac Lane 著, 三好博之, 高木理 訳, 『圏論の基礎』, 丸善出版, 2012.
- [2] E. Dubuc, R. Street, *Dinatural transformations*, In: *Reports of the Midwest Category Seminar IV, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 137, pp. 126–137, Springer, Berlin, 1970.
- [3] alg-d, 壱大整域, URL:<http://alg-d.com/math/>.