Wallman コンパクト化 [*]

ゆう [†]

2022 年 12 月 7 日

目次

1 ultrafilter

X を集合とする．冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ について，$\mathcal{S}$ の有限個の元の共通部分が空でないとき，$\mathcal{S}$ は有限交差性をもつという．$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を有限個の元の共通部分について閉じている部分集合とする．（0 個の共通部分として $X \in \mathcal{E}$ である．）$\mathcal{E}$ の部分集合 $\mathcal{F}$ で次をみたすものを（X 上の）$\mathcal{E}$-filter という：

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$.

(2) $F, F' \in \mathcal{F}$ ならば $F \cap F' \in \mathcal{F}$.

(3) $F \in \mathcal{F}$, $F' \in \mathcal{E}$, $F \subseteq F'$ ならば $F \in \mathcal{F}$.

---

[*] 本稿は Math Advent Calendar 2022 (https://adventar.org/calendars/7662) の 7 日目の記事です．

[†] https://yuu7269.github.io/notes.

$\mathcal{E}$-filter 全体の集合は包含関係により順序集合となり，この集合の極大元を $\mathcal{E}$-ultrafilter という．$\mathcal{E}$-filter や $\mathcal{E}$-ultrafilter を単に filter, ultrafilter ということもある．定義から filter は有限交差性をもつ．有限交差性をもつ空でない部分集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ に対して，$\mathcal{S}$ の有限個の元の共通部分全体の集合を $\mathcal{H}$ とし，

$$\mathcal{F} = \{\, F \in \mathcal{E} \mid \exists H \in \mathcal{H} \,(H \subseteq F) \,\}$$

とすると，$\mathcal{F}$ は filter である．このことから次が成り立つ．

命題 1. 有限交差性をもつ部分集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ が ultrafilter $\mathcal{F}$ を含むとき，$\mathcal{S} = \mathcal{F}$ である． □

命題 2. $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ を $\mathcal{E}$-ultrafilter とする．このとき次が成り立つ．

(1) $A \in \mathcal{E}$ について，任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $A \cap F \neq \emptyset$ ならば $A \in \mathcal{F}$ である．
(2) $A, A' \in \mathcal{E}$, $A \cup A' \in \mathcal{F}$ ならば，$A \in \mathcal{F}$ または $A' \in \mathcal{F}$ である．
(3) $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$ ならば，$F \cap F' = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{F}$, $F' \in \mathcal{F}'$ が存在する．

証明. (1) $\mathcal{F} \cup \{\, A \,\}$ は $\mathcal{F}$ を含み有限交差性をもつから $\mathcal{F} \cup \{\, A \,\} = \mathcal{F}$ となり，$A \in \mathcal{F}$ が従う．

(2) $A, A' \in \mathcal{E}$, $A \cup A' \in \mathcal{F}$, $A \notin \mathcal{F}$ とし，

$$\mathcal{G} = \{\, F \in \mathcal{E} \mid A \cup F \in \mathcal{F} \,\}$$

とおく．$\mathcal{F} \cup \{\, A' \,\} \subseteq \mathcal{G}$ である．$\mathcal{G}$ が有限交差性をもつことを示そう．$F_0, \ldots, F_{n-1} \in \mathcal{G}$ とすると，

$$A \cup \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} F_i \right) = \bigcap_{i=0}^{n-1} (A \cup F_i) \in \mathcal{F}$$

である．もし $\bigcap_{i=0}^{n-1} F_i = \emptyset$ ならば $A \in \mathcal{F}$ となり，$A \notin \mathcal{F}$ であることに反する．故に $\bigcap_{i=0}^{n-1} F_i \neq \emptyset$ が従う．したがって $\mathcal{G}$ は有限交差性をもち，$\mathcal{F} = \mathcal{G}$ となり，$A' \in \mathcal{F}$ が従う．

(3) 対偶を示す．任意の $F \in \mathcal{F}$, $F' \in \mathcal{F}'$ に対して $F \cap F' \neq \emptyset$ とする．$\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ を含み有限交差性をもつから $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}' = \mathcal{F}'$ が従う． □

$x \in X$ に対して $\mathcal{F}(x) = \{\, A \in \mathcal{E} \mid x \in A \,\}$ とおく．これは filter である．

命題 3. $x \in X$ に対して以下は同値である．

(1) $\mathcal{F}(x)$ は $\mathcal{E}$-ultrafilter である．

(2) x を含まない任意の $A \in \mathcal{E}$ に対して，$x \in F$, $F \cap A = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{E}$ が存在する．

証明. (1 $\Rightarrow$ 2) x を含まない $A \in \mathcal{E}$ に対して，$A \notin \mathcal{F}(x)$ であるから $A \cap F = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{F}(x)$ が存在する．$\mathcal{F}(x)$ の定義から $x \in F$ である．

(2 $\Rightarrow$ 1) $\mathcal{F}(x) \subsetneq \mathcal{F}$ をみたす $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ について考える．$A \notin \mathcal{F}(x)$ をみたす $A \in \mathcal{F}$ が存在する．$x \in X \setminus A$ である．条件 2 により $x \in F$, $A \cap F = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{E}$ が存在する．$F \in \mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}$ であり，$A \cap F = \emptyset$ であるから $\mathcal{F}$ は有限交差性をもたない． □

例 4. X を T_1 空間，$\mathcal{E}$ として X の閉集合系 $\mathcal{A}(X)$ を考える．このとき任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{F}(x)$ は ultrafilter である． □

命題 5. X 上の $\mathcal{E}$-ultrafilter $\mathcal{F}$ に対して以下は同値である．

(1) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ をみたす $x \in X$ が存在する．

(2) $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

証明. (1 $\Rightarrow$ 2) 明らか．

(2 $\Rightarrow$ 1) $x \in \bigcap \mathcal{F}$ とする．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(x)$ であるから $\mathcal{F}$ の極大性により $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ が従う． □

集合 X 上の $\mathcal{E}$-ultrafilter 全体の集合を $\mathcal{W}(X, \mathcal{E})$ と書く．任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{W}(X, \mathcal{E})$ であるとき，写像 $w_{\mathcal{E}} \colon X \to \mathcal{W}(X, \mathcal{E})$ を $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ によって定める．これを単に w と書くこともある．

命題 6. 任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{W}(X, \mathcal{E})$ であるとする．このとき，以下は同値である．

(1) 任意の $x \in X$ に対して $\bigcap \mathcal{F}(x) = \{ x \}$ である．

(2) $w \colon X \to \mathcal{W}(X, \mathcal{E})$ は単射である．

証明. (1 $\Rightarrow$ 2) $x, x' \in X$, $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x')$ とすると，

$$\{ x \} = \bigcap \mathcal{F}(x) = \bigcap \mathcal{F}(x') = \{ x' \}$$

であるから $x = x'$ が従う．

(2 $\Rightarrow$ 1) $x \in X$ とする．$x \neq x'$ となる点 $x' \in X$ に対して，w が単射であるから

$\mathcal{F}(x) \neq \mathcal{F}(x')$ となる．故に $F \cap F' = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{F}(x)$, $F' \in \mathcal{F}(x')$ が存在する．よって $\bigcap \mathcal{F}(x) = \{ x \}$ となる． $\square$

2 Wallman コンパクト化

2.1 定義と性質

定義. X を位相空間，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(X)$ とする．任意の $A \in \mathcal{A}(X)$ に対して $A = \bigcap \mathcal{B}'$ をみたす $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ が存在するとき，$\mathcal{B}$ を閉基という． $\square$

$\mathcal{B}$ が閉基であることの必要十分条件は $\{ A^c \mid A \in \mathcal{B} \}$ が開基となることである．

定義. X を T_1 空間，$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}(X)$ とする．$\mathcal{C}$ が以下をみたすとき，$\mathcal{C}$ を T_1 基底という．

(1) $\mathcal{C}$ は閉基である．
(2) $\mathcal{C}$ は有限個の元の和および共通部分について閉じている．
(3) 任意の $x \in X$ と，x を含まない任意の $A \in \mathcal{C}$ に対して，$x \in F$, $F \cap A = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{C}$ が存在する． $\square$

T_1 空間 X の T_1 基底を $\mathcal{C}$ とする．$\mathcal{C}$-ultrafilter 全体の集合を $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ と書き，特に $\mathcal{C} = \mathcal{A}(X)$ のとき $\mathcal{W}(X)$ と書く．$A \in \mathcal{C}$, $U = X \setminus A$ に対して

$$\begin{aligned} A_* &= \{ \mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C}) \mid A \in \mathcal{F} \} \\ U^* &= \{ \mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C}) \mid \exists F \in \mathcal{F} \, (F \subseteq U) \} \end{aligned}$$

とおく．

命題 7. $A \in \mathcal{C}$, $U = X \setminus A$ とする．$\mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ に対して以下は同値である．

(1) $F \subseteq U$ をみたす $F \in \mathcal{F}$ が存在する．
(2) $A \notin \mathcal{F}$.

証明.

$$\begin{aligned} F \subseteq U \text{ をみたす } F \in \mathcal{F} \text{ が存在する} &\iff F \cap A = \emptyset \text{ をみたす } F \in \mathcal{F} \text{ が存在する} \\ &\iff A \notin \mathcal{F}. \end{aligned}$$ $\square$

系 8. $\mathcal{C}$ を T_1 空間 X の T_1 基底，$A \in \mathcal{C}$, $U = X \setminus A$ とする．このとき次が成り立つ．

(1) $A_* = \mathcal{W}(X, \mathcal{C}) \setminus U^*$.

(2) $U^* = \mathcal{W}(X, \mathcal{C}) \setminus A_*$. □

命題 9. $\mathcal{C}$ を T_1 空間 X の T_1 基底，$A \in \mathcal{C}$ とする．このとき次が成り立つ．

(1) $A = \emptyset \iff A_* = \emptyset$.

(2) $A = X \iff A_* = \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$.

証明. (1) $A \neq \emptyset$ とすると，$x \in A$ をみたす x が存在する．故に $\mathcal{F}(x) \in A_*$ となり，$A_* \neq \emptyset$ が従う．逆は明らかである．

(2) $A \neq X$ とすると，$x \notin A$ をみたす $x \in X$ が存在する．故に $\mathcal{F}(x) \notin A_*$ となり，$A_* \neq \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ が従う．逆は明らかである． □

系 10. $\mathcal{C}$ を T_1 空間 X の T_1 基底，$X \setminus U \in \mathcal{C}$ とする．このとき次が成り立つ．

(1) $U = \emptyset \iff U^* = \emptyset$.

(2) $U = X \iff U^* = \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$. □

命題 11. $\mathcal{C}$ を T_1 空間 X の T_1 基底，$A_i \in \mathcal{C}$ $(i = 0, 1)$ とする．このとき次が成り立つ．

(1) $(A_0 \cup A_1)_* = (A_0)_* \cup (A_1)_*$.

(2) $(A_0 \cap A_1)_* = (A_0)_* \cap (A_1)_*$.

証明. (1)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} \in (A_0 \cup A_1)_* &\iff A_0 \cup A_1 \in \mathcal{F} \\
&\iff (A_0 \in \mathcal{F}) \vee (A_1 \in \mathcal{F}) \\
&\iff (\mathcal{F} \in (A_0)_*) \vee (\mathcal{F} \in (A_1)_*) \\
&\iff \mathcal{F} \in (A_0)_* \cup (A_1)_*.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} \in (A_0 \cap A_1)_* &\iff A_0 \cap A_1 \in \mathcal{F} \\
&\iff (A_0 \in \mathcal{F}) \wedge (A_1 \in \mathcal{F}) \\
&\iff (\mathcal{F} \in (A_0)_*) \wedge (\mathcal{F} \in (A_1)_*) \\
&\iff \mathcal{F} \in (A_0)_* \cap (A_1)_*.
\end{aligned}
$$

□

系 12. $\mathcal{C}$ を T_1 空間 X の T_1 基底，$X \setminus U_i \in \mathcal{C}$ $(i = 0, 1)$ とする．このとき次が成り立つ．

(1) $(U_0 \cup U_1)^* = (U_0)^* \cup (U_1)^*$.

(2) $(U_0 \cap U_1)^* = (U_0)^* \cap (U_1)^*$. □

X を T_1 空間，$\mathcal{C}$ を X の T_1 基底とする．$\mathcal{B} = \{ A_* \mid A \in \mathcal{C} \}$ とおくと，$\emptyset_* = \emptyset$, $(A_0 \cup A_1)_* = (A_0)_* \cup (A_1)_*$ であるから $\mathcal{B}$ が生成する位相 $T_{\mathcal{W}(X,\mathcal{C})}$ は $\mathcal{B}$ を閉基としてもつ．位相空間 $\left\langle \mathcal{W}(X,\mathcal{C}), T_{\mathcal{W}(X,\mathcal{C})} \right\rangle$ を単に $\mathcal{W}(X,\mathcal{C})$ と書く．

定義. X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．f によって X と $f(X)$ が同相になるとき，f を埋め込みという．埋め込み f が $\mathrm{Cl}_Y(f(X)) = Y$ をみたすとき，組 $\langle Y, f \rangle$ を X の拡張空間という．特に Y がコンパクトであるとき，$\langle Y, f \rangle$ を X のコンパクト化という．$\langle Y, f \rangle$ を単に Y と書くこともある． □

定理 13. 任意の T_1 空間 X, その任意の T_1 基底 $\mathcal{C}$ に対して $\langle \mathcal{W}(X,\mathcal{C}), w \rangle$ は X のコンパクト化である．

証明. X を T_1 空間，$\mathcal{C}$ を X の T_1 基底とする．まず，$\mathcal{W}(X,\mathcal{C})$ が T_1 空間であることを示す．任意の $\mathcal{F} \in \mathcal{W}(X,\mathcal{C})$ に対して $\{ \mathcal{F} \} = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{F}} A_*$ であることを示せばよい．$\mathcal{F} \in \bigcap\limits_{A \in \mathcal{F}} A_*$ であることは明らか．$\mathcal{F}' \in \bigcap\limits_{A \in \mathcal{F}} A_*$ とすると $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ が従い，$\mathcal{F}$ の極大性により $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ となる．故に $\{ \mathcal{F} \} = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{F}} A_*$ が従う．

次に，$w\colon X \to \mathcal{W}(X,\mathcal{C})$ が埋め込みであることを示す．$A \in \mathcal{C}$ に対して $w(A) = w(X) \cap A_*$ である．

∵) $(\subseteq)$ $x \in A$, $\mathcal{F}(x) \in w(A)$ とする．$A \in \mathcal{F}(x)$ であるから $\mathcal{F}(x) \in A_*$ が従う．
$(\supseteq)$ $\mathcal{F} \in w(X) \cap A_*$ とする．$\mathcal{F} \in w(X)$ から $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ をみたす $x \in X$ が存在し，$\mathcal{F} \in A_*$ から $A \in \mathcal{F}$ が従う．故に $x \in A$ となり，$\mathcal{F} \in w(A)$ が従う．

$G \subseteq X$ を閉集合とする．$\mathcal{C}$ は X の閉基であるから，ある部分集合 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ が存在し $G = \bigcap \mathcal{C}'$ となる．$w(\bigcap \mathcal{C}') = w(X) \cap \bigcap \{ A_* \mid A \in \mathcal{C}' \}$ である．

∵) $(\subseteq)$

$$
\begin{aligned}
w\left(\bigcap \mathcal{C}'\right) &\subseteq \bigcap \{ w(A) \mid A \in \mathcal{C}' \} \\
&= \bigcap \{ w(X) \cap A_* \mid A \in \mathcal{C}' \} \\
&= w(X) \cap \bigcap \{ A_* \mid A \in \mathcal{C}' \}.
\end{aligned}
$$

$(\supseteq)$ $\mathcal{F} \in w(X) \cap \bigcap \{ A_* \mid A \in \mathcal{C}' \}$ とする．$\mathcal{F} \in w(X)$ 故，$\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ をみたす $x \in X$ が存在する．$\mathcal{F} \in \bigcap \{ A_* \mid A \in \mathcal{C}' \}$ 故，任意の $A \in \mathcal{C}'$ に対して $A \in \mathcal{F}$ である．したがって $x \in \bigcap \mathcal{C}'$ となり，$\mathcal{F} = \mathcal{F}(x) \in w(\bigcap \mathcal{C}')$ が従う．

$\bigcap \{ A_* \mid A \in \mathcal{C}' \}$ は $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ の閉集合であるから $w(X) \cap \bigcap \{ A_* \mid A \in \mathcal{C}' \}$ は部分空間 $w(X)$ の閉集合である．故に w が閉写像であることが従う．また，$A \in \mathcal{C}$ に対して

$$\begin{aligned} x \in w^{-1}(A_*) &\iff \mathcal{F}(x) \in A_* \\ &\iff A \in \mathcal{F}(x) \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

であるから $w^{-1}(A_*) = A$ が従い，w が連続であることがわかる．$\mathcal{C}$ は T_1 空間 X の閉基であるから $\{ x \} = \mathrm{Cl}(\{ x \}) = \bigcap \mathcal{F}(x)$ となり，命題 6 によって w は単射となる．よって w は埋め込みである．

次に，$\mathrm{Cl}(w(X)) = \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ であることを示す．F を $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ の閉集合で $F \neq \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ をみたすものとする．このとき $\mathcal{F} \notin F$ をみたす $\mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ が存在する．$\{ A_* \mid A \in \mathcal{C} \}$ は $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ の閉基であるから $\mathcal{F} \notin A_*$, $F \subseteq A_*$ をみたす $A \in \mathcal{C}$ が存在する．$A \notin \mathcal{F}$ であるから $A \neq X$ が従い，$x \notin A$ をみたす $x \in X$ が存在する．$A \notin \mathcal{F}(x)$ であるから $\mathcal{F}(x) \notin A_*$ となる．故に $w(X) \nsubseteq F$ が従い，$\mathrm{Cl}(w(X)) = \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ となることがわかる．

最後に，$\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ がコンパクトであることを示す．$\{ F_s \mid s \in S \}$ を $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ の空でない閉集合族で有限交差性をもつものとする．$\{ A_* \mid A \in \mathcal{C} \}$ は $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ の閉基であるから $A_t \in \mathcal{C}$ によって $F_s = \bigcap_{t \in T_s} (A_t)_*$ と書ける．$T = \bigcup_{s \in S} T_s$ とおくと $\{ A_t \mid t \in T \}$ は X の空でない閉集合族で有限交差性をもつから，これを含む $\mathcal{F} \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ が存在する．

$$\mathcal{F} \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A_* \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t)_* = \bigcap_{s \in S} F_s$$

故 $\bigcap_{s \in S} F_s \neq \emptyset$ が従う．よって $\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ はコンパクトである． □

埋め込み $w \colon X \to \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ によって X と $w(X)$ を同一視する．定理 13 と選択公理は ZF 上同値である ([KT13, Theorem 4.1])．$\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ を T_1 空間 X の T_1 基底 $\mathcal{C}$ に関する Wallman コンパクト化という．特に $\mathcal{C} = \mathcal{A}(X)$ のとき，$\mathcal{W}(X)$ を X の Wallman コンパクト化という．$\langle \mathcal{W}(X, \mathcal{C}), w \rangle$ は定理 15 のような普遍性をもつ．

補題 14. A を位相空間 X の稠密部分集合，$\iota \colon A \to X$ を包含写像，f を A からコンパクト Hausdorff 空間 Y への連続写像とする．このとき，以下は同値である．

(1) 図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, dashed, "h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

を可換にする連続写像 $h\colon X \to Y$ が存在する．

(2) Y の交わりをもたない任意の閉集合 B_0, B_1 に対して

$$\mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(B_0)\bigr) \cap \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(B_1)\bigr) = \emptyset.$$

証明． (1 $\Rightarrow$ 2) B_0, B_1 を Y の交わりをもたない閉集合とすると，$h^{-1}(B_0)$, $h^{-1}(B_1)$ は X の交わりをもたない閉集合であるから

$$\mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(B_0)\bigr) \cap \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(B_1)\bigr) \subseteq h^{-1}(B_0) \cap h^{-1}(B_0) = \emptyset.$$

が従う．

(2 $\Rightarrow$ 1) $x \in X$ とする．x の開近傍全体の集合を $\mathcal{N}(x)$ と書く．Y の閉集合族

$$\{\, \mathrm{Cl}(f(A \cap U)) \mid U \in \mathcal{N}(x) \,\}$$

は有限交差性をもつ．

∵) A の稠密性により，任意の $U \in \mathcal{N}(x)$ に対して $\mathrm{Cl}(f(A \cap U))$ は空でない．$U_0, \ldots, U_{n-1} \in \mathcal{N}(x)$ に対して $\bigcap_{i=0}^{n-1} U_i \in \mathcal{N}(x)$ であり，

$$\mathrm{Cl}\left(f\left(A \cap \bigcap_{i=0}^{n-1} U_i \right)\right) \subseteq \mathrm{Cl}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f(A \cap U_i) \right) \subseteq \bigcap_{i=0}^{n-1} \mathrm{Cl}(f(A \cap U_i))$$

である．

Y がコンパクト故 $\bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \mathrm{Cl}(f(A \cap U)) \neq \emptyset$ である．$\bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \mathrm{Cl}(f(A \cap U))$ は一点集合である．

∵) $y_0, y_1 \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \mathrm{Cl}(f(A \cap U))$, $y_0 \neq y_1$ と仮定する．Y はコンパクト Hausdorff 空間であるから正規空間である．故に $\mathrm{Cl}(V_0) \cap \mathrm{Cl}(V_1) = \emptyset$ をみたす $V_0 \in \mathcal{N}(y_0)$,

$V_1 \in \mathcal{N}(y_1)$ が存在する．f の連続性によって

$$\mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_i)\bigr) \subseteq \mathrm{Cl}_X\Bigl(\mathrm{Cl}_A\bigl(f^{-1}(V_i)\bigr)\Bigr) \subseteq \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(\mathrm{Cl}(V_i))\bigr) \quad (i = 0, 1)$$

となり，条件 2 によって

$$\mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_0)\bigr) \cap \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_1)\bigr) = \emptyset$$

となる．故に

$$x \notin \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_0)\bigr) \vee x \notin \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_1)\bigr)$$

が従う．一般性を損なわないため $x \notin \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_0)\bigr)$ とする．$X \setminus \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_0)\bigr) \in \mathcal{N}(x)$ であるから

$$y_0 \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \mathrm{Cl}(f(A \cap U)) \subseteq \mathrm{Cl}\Bigl(f\Bigl(A \setminus \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_0)\bigr)\Bigr)\Bigr)$$

となる．一方，$f\Bigl(A \setminus \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_0)\bigr)\Bigr) \subseteq Y \setminus V_0$ である．

$\because)$ $y \in f\Bigl(A \setminus \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_0)\bigr)\Bigr)$ とする．$f(x) = y$ をみたす $x \in A \setminus \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_0)\bigr)$ が存在する．$x \in A \setminus f^{-1}(V_0)$ 故 $y = f(x) \in Y \setminus V_0$ となる．

故に $y_0 \notin \mathrm{Cl}\Bigl(f\Bigl(A \setminus \mathrm{Cl}_X\bigl(f^{-1}(V_0)\bigr)\Bigr)\Bigr)$ となり矛盾する．よって $y_0 = y_1$ が従う．

$\bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \mathrm{Cl}(f(A \cap U)) = \{\, h(x) \,\}$ とする．特に $x \in A$ ならば $f(x) = h(x)$ であるから図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

は可換である．h が連続であることを示す．$x \in X$, $V \in \mathcal{N}(h(x))$ とする．

$$\{\, h(x) \,\} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \mathrm{Cl}(f(A \cap U)) \subseteq V$$

である．Y がコンパクトであるから閉集合 $Y \setminus V$ はコンパクトであり，有限集合 $\{\, U_0, \ldots, U_{k-1} \,\} \subseteq \mathcal{N}(x)$ で $\bigcap_{j=0}^{k-1} \mathrm{Cl}(f(A \cap U_j)) \subseteq V$ をみたすものが存在する．$U' = \bigcap_{j=0}^{k-1} U_j$ とおくと $U' \in \mathcal{N}(x)$ である．U' は開集合であるから任意の $x' \in U'$ に対して

$U' \in \mathcal{N}(x')$ であり，

$$
\begin{aligned}
h(x') \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x')} \mathrm{Cl}(f(A \cap U)) &\subseteq \mathrm{Cl}(f(A \cap U')) \\
&\subseteq \mathrm{Cl}\left(\bigcap_{j=0}^{k-1} f(A \cap U_j)\right) \subseteq \bigcap_{j=0}^{k-1} \mathrm{Cl}(f(A \cap U_j)) \subseteq V
\end{aligned}
$$

となる．故に $h(U') \subseteq V$ が従う． □

定理 15. X からコンパクト Hausdorff 空間 Y への任意の連続写像 f に対して，図式

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{W}(X) \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & Y
\end{tikzcd}
$$

を可換にする連続写像 $h\colon \mathcal{W}(X) \to Y$ が一意的に存在する．

証明. 一意性は Y が Hausdorff 空間であることから従う．B_0, B_1 を Y の閉集合で交わりをもたないものとする．$f^{-1}(B_0)$, $f^{-1}(B_1)$ は X の閉集合で交わりをもたない．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_{\mathcal{W}(X)}\bigl(f^{-1}(B_0)\bigr) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{W}(X)}\bigl(f^{-1}(B_1)\bigr) &\subseteq \bigl(f^{-1}(B_0)\bigr)_* \cap \bigl(f^{-1}(B_1)\bigr)_* \\
&= \bigl(f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)\bigr)_* = \emptyset
\end{aligned}
$$

であるから，補題 14 により図式

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{W}(X) \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & Y
\end{tikzcd}
$$

を可換にする連続写像 $h\colon \mathcal{W}(X) \to Y$ が存在する． □

2.2 Hausdorff 性

定義. $\mathcal{C}$ を T_1 空間 X の T_1 基底とする．$\mathcal{C}$ が「A, A' を $A \cap A' = \emptyset$ となる $\mathcal{C}$ の元とすると，$A \cap F = \emptyset$, $A' \cap F' = \emptyset$, $F \cup F' = X$ をみたす F, $F' \in \mathcal{C}$ が存在する」をみたすとき，$\mathcal{C}$ を正規基底という． □

例 16. 正規空間 X の閉集合系 $\mathcal{A}(X)$ は X の正規基底である． □

命題 17. T_1 空間 X が正規基底 $\mathcal{C}$ をもつとき，X は Hausdorff 空間である．

証明. $x, x' \in X$, $x \neq x'$ とする．X が T_1 空間だから一点集合は閉集合であり，$x' \notin \{\, x \,\}$ である．$\mathcal{C}$ は X の正規基底であるから $x' \notin F$, $\{\, x \,\} \subseteq F$ をみたす $F \in \mathcal{C}$ が存在し，この F と x' に対して $x' \in F'$, $F' \cap F = \emptyset$ をみたす $F' \in \mathcal{C}$ が存在する．再び $\mathcal{C}$ が X の正規基底であることを用いると

$$F \cap G = \emptyset, \quad F' \cap G' = \emptyset, \quad G \cup G' = X$$

をみたす $G, G' \in \mathcal{C}$ が存在する．$X \setminus G$, $X \setminus G' \subseteq X$ は

$$F \subseteq (X \setminus G), \quad F' \subseteq (X \setminus G'), \quad (X \setminus G) \cap (X \setminus G') = \emptyset$$

をみたす開集合である． □

命題 18. $\mathcal{C}$ を T_1 空間 X の正規基底とすると，$\mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ は Hausdorff 空間である．

証明. $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$ とする．このとき $F \cap F' = \emptyset$ をみたす $F \in \mathcal{F}$, $F' \in \mathcal{F}'$ が存在する．$\mathcal{C}$ は X の正規基底であるから

$$F \cap G = \emptyset, \quad F' \cap G' = \emptyset, \quad G \cup G' = X$$

をみたす $G, G' \in \mathcal{C}$ が存在する. $U = X \setminus G$, $V = X \setminus G'$ とおくと, $U^*, V^* \subseteq \mathcal{W}(X, \mathcal{C})$ は

$$\mathcal{F} \in U^*, \quad \mathcal{F}' \in V^*, \quad U^* \cap V^* = (U \cap V)^* = \emptyset$$

をみたす開集合である． □

特に $\mathcal{C} = \mathcal{A}(X)$ の場合，逆が成り立つ．

命題 19. X を T_1 空間とし，$\mathcal{W}(X)$ が Hausdorff 空間であるとする．このとき，X は正規空間である．

証明. $A, B \subseteq X$ を交わりをもたない閉集合とする．このとき $A_*, B_* \subseteq \mathcal{W}(X)$ は交わりをもたない閉集合である．$\mathcal{W}(X)$ はコンパクト Hausdorff 空間であるから正規空間であり,

$$A_* \subseteq U, \quad B_* \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset$$

をみたす開集合 $U, V \subseteq \mathcal{W}(X)$ が存在する．$X \cap U$, $X \cap V$ は X の開集合であり,

$$A \subseteq (X \cap U), \quad B \subseteq (X \cap V), \quad (X \cap U) \cap (X \cap V) = \emptyset$$

をみたす． □

2.3 Stone-Čech コンパクト化との関係

定義. X を T_1 空間とする．任意の $x \in X$ と，x を含まない任意の閉集合 F に対して，X 上の連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ で

$$f(x) = 0, \quad \forall y \in F\,(f(y) = 1)$$

をみたすものが存在するとき，X を完全正則空間という． □

正規空間は完全正則空間であり，完全正則空間は正則空間である．

定理 20 (Stone-Čech コンパクト化)**.** 任意の位相空間 X に対して，コンパクト Hausdorff 空間 $\beta(X)$ と連続写像 $\eta_X\colon X \to \beta(X)$ の組 $\langle \beta(X), \eta_X \rangle$ で次の普遍性をみたすものが存在する：任意のコンパクト Hausdorff 空間 Y と任意の連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$f = \widetilde{f} \circ \eta_X$ をみたす連続写像 $\widetilde{f}\colon \beta(X) \to Y$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta(X) \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \beta(X) \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\ Y \end{tikzcd}$$

□

X が完全正則空間のとき，$\langle \beta(X), \eta_X \rangle$ は X の T_2 コンパクト化となる．

定理 21. X を正規空間としたとき，X の Wallman コンパクト化 $\langle \mathcal{W}(X), w \rangle$ と X の Stone-Čech コンパクト化 $\langle \beta(X), \eta_X \rangle$ について，図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & \mathcal{W}(X) \arrow[d, dashed, "\cong"] \\ & \beta(X) \end{tikzcd}$$

を可換にする同相写像 $\mathcal{W}(X) \to \beta(X)$ が存在する． □

参考文献

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*, Vol. 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann, Berlin, 1989.

[KT13] Kyriakos Keremedis and Eleftherios Tachtsis. Wallman compactifications and Tychonoff's compactness theorem in ZF. *Topology Proceedings*, Vol. 42, pp. 275–297, January 2013.

[児玉 74] 児玉之宏, 永見啓応. 位相空間論. 岩波書店, 1974.