開基と sheaf

ゆう*

2024年4月18日

概要

sieve を用いて sheaf を定義し、Kan 拡張を用いて開基上の sheaf を位相空間上の sheaf に拡張する. 最後に、開基上の sheaf の圏と位相空間上の sheaf の圏が圏同値 であることを確認する.

目次

1	開基と sheaf	1
1.1	位相空間上の sheaf	1
1.2	開基上の sheaf の拡張	7
1.3	開基上の sheaf と位相空間上の sheaf	12
1	基と sheaf	
1.1 f	立相空間上の sheaf	
定義. X 合 S で	X を位相空間, $\mathcal{O}(X)$ を X の開集合系, U を X の開集合とする. $\mathcal{O}(X)$ の部分	集
()	\leq 意の $V\in S$ に対して $V\subseteq U$ 全意の $V\in S$ と $W\in \mathcal{O}(X)$ に対して, $W\subseteq V$ ならば $W\in S$	
をみたす	すものを $\mathcal{O}(X)$ における U 上の sieve という. U 上の sieve S で $U = \bigcup S$ をみ	た

すものをU上の covering sieve という.

^{*} http://yuu7269.github.io/notes.

U を位相空間 X の開集合とする. $\mathcal{O}(X)$ の部分集合 U で「任意の $V \in \mathcal{U}$ に対して $V \subset \mathcal{U}$ 」をみたすものに対して

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \{ V \in \mathcal{O}(X) \mid \exists V' \in \mathcal{U} (V \subseteq V') \}$$

と定めると、これは U 上の sieve である.特に U が U の開被覆のとき、 $\langle U \rangle$ は U 上の covering sieve である.

定義. $F: \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を位相空間 X 上の presheaf とする. 任意の $U \in \mathcal{O}(X)$ と, $\mathcal{O}(X)$ における U 上の任意の covering sieve S に対して図式

$$F(U) \xrightarrow{e} \prod_{V \in S} F(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

が equalizer となるとき, F を sheaf という. ここで, e は $V \in S$ に対して図式

$$F(U) \xrightarrow{e} \prod_{V \in S} F(V)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$F(V)$$

を可換にする射であり、 r_0, r_1 は $W \subseteq V$ をみたす $W, V \in S$ の組 $\langle W, V \rangle$ に対して図式

を可換にする射である.

位相空間 X 上の sheaf を対象とし、自然変換を射とすると圏をなし、これを $\mathbf{Sh}(X)$ と書く.

命題 1. 位相空間 X 上の presheaf $F: \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対して,以下は同値である.

- (1) F is sheaf σ of σ .
- (2) 任意の $U \in \mathcal{O}(X)$ と,U の任意の開被覆 $U = \{U_i \mid i \in I\}$ に対して図式

$$F(U) \xrightarrow{e'} \prod_{i} F(U_i) \xrightarrow{r'_0} \prod_{\langle i,j \rangle} F(U_i \cap U_j)$$

は equalizer である. ここで, e' は i に対して図式

$$F(U) \xrightarrow{e'} \prod_{i} F(U_i)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$F(U_i)$$

を可換にする射であり、 r_0', r_1' は $i, j \in I$ の組 $\langle i, j \rangle$ に対して図式

$$\prod_{i} F(U_{i}) \xrightarrow{r'_{0}} \prod_{\langle i,j \rangle} F(U_{i} \cap U_{j}) \qquad \prod_{i} F(U_{i}) \xrightarrow{r'_{1}} \prod_{\langle i,j \rangle} F(U_{i} \cap U_{j})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$F(U_{i}) \longrightarrow F(U_{i} \cap U_{j}) \qquad F(U_{j}) \longrightarrow F(U_{i} \cap U_{j})$$

を可換にする射である.

証明. (1) \Rightarrow (2): U を X の開集合, $U = \{U_i \mid i \in I\}$ を U の開被覆とし、図式

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i} F(U_{i}) \xrightarrow{r'_{0}} \prod_{\langle i,j \rangle} F(U_{i} \cap U_{j})$$

が equalizer となることを示す. 図式

$$A \longrightarrow \prod_{i} F(U_{i}) \xrightarrow{r'_{0}} \prod_{\langle i,j \rangle} F(U_{i} \cap U_{j})$$

が可換であるとする.

V を $\langle \mathcal{U} \rangle$ の要素, i,j を I の要素で $V \subseteq U_i,U_j$ をみたすものとしたとき,図式

$$A \longrightarrow \prod_{i} F(U_{i}) \xrightarrow{F(U_{i} \cap U_{j})} F(V)$$

$$F(U_{i}) \xrightarrow{F(U_{i} \cap U_{j})} F(V)$$

は可換であるから, 合成

$$A \to \prod_i F(U_i) \to F(U_i) \to F(V)$$

は $V \subseteq U_i$ をみたすi のとり方に依らない.

V を $\langle \mathcal{U} \rangle$ の要素とし,i を I の要素で $V \subseteq U_i$ をみたすものとする.積 $\prod_{V \in \langle \mathcal{U} \rangle} F(V)$ の普遍性から,図式

$$\begin{array}{cccc}
A & & & & & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & & \downarrow \\
\downarrow & & & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\prod_{i} F(U_{i}) & & & & & & & & F(V)
\end{array}$$
(2)

を可換にする射 $A \to \prod_{V \in \langle \mathcal{U} \rangle} F(V)$ が存在する.特に $U_i \in \langle \mathcal{U} \rangle$ であるから図式

$$\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & \prod_{V \in \langle \mathcal{U} \rangle} F(V) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod_{i} F(U_{i}) & \longrightarrow & F(U_{i})
\end{array} \tag{3}$$

は可換である.

W,V を $\langle \mathcal{U} \rangle$ の要素で $W \subseteq V$ をみたすものとし,i,j を I の要素で $V \subseteq U_i,W \subseteq U_j$ をみたすものとする.組 $\langle W,V \rangle$ に対して図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in \langle \mathcal{U} \rangle} F(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\prod_{i} F(U_i) \longrightarrow F(U_j) \longrightarrow F(W)$$

$$A \longrightarrow \prod_{V \in \langle \mathcal{U} \rangle} F(V) \xrightarrow{r_1} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

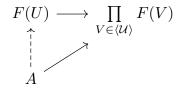
$$F(V) \qquad \qquad \downarrow$$

$$\prod_{i} F(U_i) \longrightarrow F(U_i) \longrightarrow F(W)$$

は共に可換であるから,積 $\prod\limits_{\langle W,V \rangle} F(W)$ の普遍性により図式

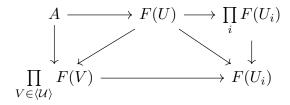
$$A \longrightarrow \prod_{V \in \langle \mathcal{U} \rangle} F(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

は可換である. よって、equalizer F(U) の普遍性により図式



を可換にする射 $A \to F(U)$ が存在する.

I の要素 i に対して図式



と図式 3 は共に可換であるから, 積 $\prod\limits_i F(U_i)$ の普遍性により図式

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i} F(U_{i})$$

$$\uparrow \qquad \qquad (4)$$

は可換である.

図式 4 を可換にする射 $A \to F(U)$ が与えられたとする. V を $\langle \mathcal{U} \rangle$ の要素とし,i を I の要素で $V \subseteq U_i$ をみたすものとする.このとき,図式

$$A \xrightarrow{\hspace{1cm}} F(U) \xrightarrow{\hspace{1cm}} \prod_{V \in \langle \mathcal{U} \rangle} F(V)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\prod_{i} F(U_{i}) \xrightarrow{\hspace{1cm}} F(U_{i}) \xrightarrow{\hspace{1cm}} F(V)$$

と図式 2 が共に可換であるから,積 $\prod_{V \in \langle \mathcal{U} \rangle} F(V)$ の普遍性により図式

$$F(U) \longrightarrow \prod_{V \in \langle \mathcal{U} \rangle} F(V)$$

は可換である. 故に equalizer F(U) の普遍性から、図式 4 を可換にする射 $A \to F(U)$ の一意性が従う.

 $(2) \Rightarrow (1)$: UをXの開集合, SをU上の covering sieve とし、図式

$$F(U) \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

が equalizer となることを示す.ここで $\langle W,V \rangle$ は $W \subseteq V$ をみたす $W,V \in S$ の組である.図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

が可換であるとする. このとき, $\langle W, V \rangle$ に対して図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \longrightarrow F(V)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$F(W)$$

は可換である.

 $W, V \in S$ の組 $\langle W, V \rangle$ に対して, r'_0 について図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \xrightarrow{r'_0} \prod_{\langle W, V \rangle \in S \times S} F(W \cap V)$$

$$F(W) \longrightarrow F(W \cap V)$$

は可換であり、 r_1' についても同様に可換である.よって,積 $\prod_{\langle W,V\rangle\in S\times S}F(W\cap V)$ の普 遍性により図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \xrightarrow{r'_0} \prod_{\langle W, V \rangle \in S \times S} F(W \cap V)$$

は可換であり、equalizer F(U) の普遍性により図式

を可換にする射 $A \to F(U)$ が存在する.

equalizer F(U) の普遍性から、図式 5 を可換にする射 $A \to F(U)$ の一意性が従う.

1.2 **開基上の** sheaf **の**拡張

定義. \mathcal{B} を位相空間 X の開基とし, $B \in \mathcal{B}$ とする. \mathcal{B} の部分集合 S で

- (1) 任意の $V \in S$ に対して $V \subset B$
- (2) 任意の $V \in S$ と $W \in \mathcal{B}$ に対して, $W \subset V$ ならば $W \in S$

をみたすものを \mathcal{B} における \mathcal{B} 上の sieve という. \mathcal{B} 上の sieve \mathcal{S} で $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{S}$ をみたすものを \mathcal{B} 上の covering sieve という.

B を位相空間 X の開基 $\mathcal B$ の要素とする. $\mathcal B$ の部分集合 $\mathcal U$ で「任意の $V\in\mathcal U$ に対して $V\subseteq\mathcal B$ 」をみたすものに対して

$$\langle \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{B}} = \{ V \in \mathcal{B} \mid \exists V' \in \mathcal{U} (V \subseteq V') \}$$

と定めると、これは B 上の sieve である.特に U が B の開被覆のとき、 $\langle U \rangle_{\mathcal{B}}$ は B 上の covering sieve である.

定義. $G: \mathcal{B}^{\text{op}} \to \mathbf{Set}$ を位相空間 X の開基 \mathcal{B} 上の presheaf とする. 任意の $B \in \mathcal{B}$ と, \mathcal{B} における B 上の任意の covering sieve S に対して図式

$$G(B) \xrightarrow{e} \prod_{V \in S} G(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} G(W)$$

が equalizer となるとき,G を sheaf という.ここで,e, r_0 , r_1 は位相空間上の sheaf の 定義に現れたものと同様の射である.

※ 位相空間 X の開基 \mathcal{B} が「任意の $B, B' \in \mathcal{B}$ に対して $B \cap B' \in \mathcal{B}$ 」をみたすとき、命題 1 と同様の命題が \mathcal{B} 上の presheaf に対して成り立つ.

位相空間 X の開基 \mathcal{B} 上の sheaf を対象とし、自然変換を射とすると圏をなし、これを $\mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ と書く.

 $i: \mathcal{B} \to \mathcal{O}(X)$ を包含函手とし、 $G: \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を \mathcal{B} 上の sheaf とする. **Set** は完備であり、 \mathcal{B} は小圏であるから、 i^{op} に沿った G の右 Kan 拡張 $\langle (i^{\mathrm{op}})^{\ddagger}G, \epsilon_G \rangle$ が存在し、各

 $U \in \mathcal{O}(X)$ に対して

$$((i^{\mathrm{op}})^{\ddagger}G)(U) \cong \lim(U \downarrow (i^{\mathrm{op}}) \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{G} \mathbf{Set})$$
$$= \lim_{B \subseteq U} G(B)$$

である.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1} & \xrightarrow{U} & \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \\
\uparrow & \searrow & i^{\mathrm{op}} & \downarrow \downarrow \epsilon_{G} & \downarrow i^{\mathrm{op}} \\
U \downarrow (i^{\mathrm{op}}) & \longrightarrow & \mathcal{B}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{G} & \mathbf{Set}
\end{array}$$

命題 6. \mathcal{B} 上の sheaf $G: \mathcal{B}^{op} \to \mathbf{Set}$ に対して、 i^{op} に沿った G の右 Kan 拡張 $(i^{op})^{\dagger}G$ は X 上の sheaf である.

$$\begin{array}{c}
\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \\
\downarrow^{i^{\mathrm{op}}} \downarrow \downarrow^{\epsilon_{G}} \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{G} \mathbf{Set}
\end{array}$$

証明. $(i^{op})^{\ddagger}G=\widetilde{G}$ とおく. U を X の開集合, S を $\mathcal{O}(X)$ における U 上の covering sieve とし、図式

$$\widetilde{G}(U) \longrightarrow \prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \Longrightarrow \prod_{\langle W, V \rangle} \widetilde{G}(W)$$

が equalizer となることを示す.ここで $\langle W,V \rangle$ は $W \subseteq V$ をみたす $W,V \in S$ の組である.図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \Longrightarrow \prod_{\langle W, V \rangle} \widetilde{G}(W)$$

が可換であるとする. このとき、 $\langle W, V \rangle$ に対して図式

は可換である.

 $B \in \mathcal{B}$ の要素で $B \subset U$ をみたすものとし,

$$S_B = \{ V \in S \mid V \subseteq B \} \cap \mathcal{B}$$

とおく. これは $\mathcal B$ における B 上の covering sieve である. 積 $\prod_{V\in S_B}G(V)$ の普遍性から, $V\in S_B$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc}
A & & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & \downarrow \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
&$$

を可換にする射 $A \to \prod_{V \in S_B} G(V)$ が存在する.

 $W \subseteq V$ をみたす $W, V \in S_B$ の組 $\langle W, V \rangle$ に対して、図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S_B} G(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} G(W)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\prod_{V \in S} \widetilde{G}(V) \to \widetilde{G}(W) \longrightarrow G(W)$$

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S_B} G(V) \xrightarrow{r_1} \prod_{\langle W, V \rangle} G(W)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\widetilde{G}(V) \longrightarrow \widetilde{G}(V) \longrightarrow G(V)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\widetilde{G}(V) \longrightarrow \widetilde{G}(W) \longrightarrow G(W)$$

は共に可換であるから,積 $\prod_{\langle W,V \rangle} G(W)$ の普遍性により図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S_B} G(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} G(W)$$

は可換である. equalizer G(B) の普遍性により図式

$$G(B) \longrightarrow \prod_{V \in S_B} G(V)$$

$$\downarrow \qquad \qquad (8)$$

を可換にする射 $A \to G(B)$ が存在する.

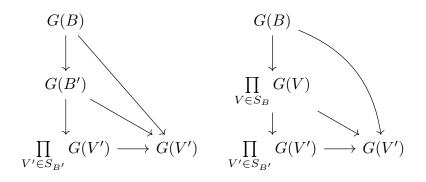
 $B,\,B'$ を \mathcal{B} の要素で $B'\subseteq B\subseteq U$ をみたすものとする.このとき $S_{B'}\subseteq S_B$ であり, 積 $\prod_{V'\in S_{B'}}G(V')$ の普遍性から, $V'\in S_{B'}$ に対して図式

$$\prod_{V \in S_B} G(V) \xrightarrow{\cdots} \prod_{V' \in S_{B'}} G(V')$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$G(V')$$

を可換にする射 $\prod_{V \in S_B} G(V) \to \prod_{V' \in S_{B'}} G(V')$ が存在する. $V' \in S_{B'}$ に対して図式



は共に可換であるから,積 $\prod_{V' \in S_{B'}} G(V')$ の普遍性により図式

$$G(B) \xrightarrow{\qquad} G(B')$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\prod_{V \in S_B} G(V) \xrightarrow{\qquad} \prod_{V' \in S_{B'}} G(V')$$

は可換である. $V' \in S_{B'}$ に対して図式

$$A \longrightarrow G(B) \longrightarrow G(B')$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad$$

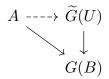
は共に可換であるから,積 $\prod_{V' \in S_{B'}} G(V')$ の普遍性と equalizer G(B') の普遍性により図式

$$A \longrightarrow G(B)$$

$$\downarrow$$

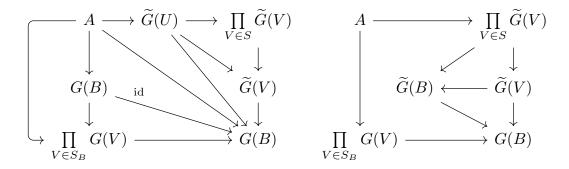
$$G(B')$$

は可換である. 故に射 $A \to G(B)$ は B について自然であり、極限 $\widetilde{G}(U)$ の普遍性から、 $B \subset U$ をみたす $B \in \mathcal{B}$ に対して図式



を可換にする射 $A \to \widetilde{G}(U)$ が存在する.

V を S の要素, B を B の要素で $B\subseteq V$ をみたすものとする. このとき $B\in S$ である から $B\in S_B$ となる. 図式

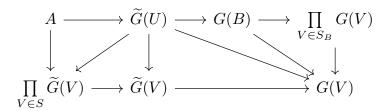


は共に可換であるから,極限 $\widetilde{G}(V)$ の普遍性と積 $\prod_{V \in S} \widetilde{G}(V)$ の普遍性により図式

は可換である.

図式 9 を可換にする射 $A \to \widetilde{G}(U)$ が与えられたとする. B を \mathcal{B} の要素で $B \subseteq U$ をみ

たすものとし、V を S_B の要素とする。図式

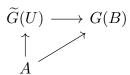


と図式 7 は共に可換であるから,積 $\prod_{V \in S_B} G(V)$ の普遍性により図式

$$\widetilde{G}(U) \longrightarrow G(B) \longrightarrow \prod_{V \in S_B} G(V)$$

$$(10)$$

は可換である. したがって、図式 8、図式 10 は共に可換であるから、equalizer G(B) の普遍性により図式



は可換である. よって,極限 $\widetilde{G}(U)$ の普遍性から,図式 9 を可換にする射 $A \to \widetilde{G}(U)$ の一意性が従う.

1.3 開基上の sheaf と位相空間上の sheaf

 $F: \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を X 上の sheaf とする. F に $i^{\mathrm{op}}: \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}$ を合成することで, \mathcal{B} 上の presheaf $F \circ i^{\mathrm{op}}: \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を得る.

命題 11. X 上の sheaf $F: \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対して、合成 $F \circ i^{\mathrm{op}}$ は \mathcal{B} 上の sheaf である.

証明. $B & \mathcal{B}$ の要素, $S & \mathcal{B}$ における $B \perp$ の covering sieve とし, 図式

$$F(B) \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \Longrightarrow \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

が equalizer となることを示す.ここで $\langle W,V \rangle$ は $W \subseteq V$ をみたす $W,V \in S$ の組である.図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \Longrightarrow \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

が可換であるとする. このとき, $\langle W, V \rangle$ に対して図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \longrightarrow F(V)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$F(W)$$

は可換である.

 $V \in \langle S \rangle$ に対して

$$S_V = \{ W \in S \mid W \subseteq V \}$$

とおく. これはVの開被覆である.

V を $\langle S \rangle$ の要素,V',V'' を S の要素で $V \subseteq V'$,V'' をみたすものとし,W を $\langle S_V \rangle$ の要素,W' を S_V の要素で $W \subseteq W'$ をみたすものとする.このとき,V' について図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \longrightarrow F(V') \longrightarrow F(V) \longrightarrow \prod_{W \in \langle S_V \rangle} F(W)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$F(W') \longrightarrow F(W)$$

は可換であり,V'' についても同様に可換である.よって,積 $\prod_{W \in \langle S_V \rangle} F(W)$ の普遍性と equalizer F(V) の普遍性により図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \xrightarrow{F(V')} F(V)$$

は可換である. つまり, $V \in \langle S \rangle$ に対して合成

$$A \to \prod_{V \in S} F(V) \to F(V') \to F(V)$$

は $V \subseteq V'$ をみたす $V' \in S$ のとり方に依らない.

V を $\langle S \rangle$ の要素とし,V' を S の要素で $V \subseteq V'$ をみたすものとする.積 $\prod_{V \in \langle S \rangle} F(V)$ の普遍性から,図式

を可換にする射 $A \to \prod_{V \in \langle S \rangle} F(V)$ が存在する.特に $V \in S$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & \prod_{V \in \langle S \rangle} F(V) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod_{V \in S} F(V) & \longrightarrow & F(V)
\end{array} \tag{13}$$

は可換である.

W,V を $\langle S \rangle$ の要素で $W\subseteq V$ をみたすものとし,V',W' を S の要素で $V\subseteq V',$ $W\subseteq W'$ をみたすものとする.組 $\langle W,V \rangle$ に対して図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in \langle S \rangle} F(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\prod_{V \in S} F(V) \longrightarrow F(W') \longrightarrow F(W)$$

$$A \longrightarrow \prod_{V \in \langle S \rangle} F(V) \xrightarrow{r_1} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$F(V) \qquad \qquad \downarrow$$

$$\prod_{V \in S} F(V) \longrightarrow F(V') \longrightarrow F(W)$$

は共に可換であるから,積 $\prod\limits_{\langle W,V \rangle} F(W)$ の普遍性により図式

$$A \longrightarrow \prod_{V \in \langle S \rangle} F(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

は可換である. よって, equalizer F(B) の普遍性により図式

$$F(B) \longrightarrow \prod_{V \in \langle S \rangle} F(V)$$

を可換にする射 $A \to F(B)$ が存在する.

 $V \in S$ に対して図式

$$A \xrightarrow{\qquad} F(B) \xrightarrow{\qquad} \prod_{V \in S} F(V)$$

$$\prod_{V \in \langle S \rangle} F(V) \xrightarrow{\qquad} F(V)$$

と図式 13 は共に可換であるから,積 $\prod\limits_{V \in S} F(V)$ の普遍性により図式

$$F(B) \longrightarrow \prod_{V \in S} F(V) \tag{14}$$

は可換である.

図式 14 を可換にする射 $A \to F(B)$ が与えられたとする. V を $\langle S \rangle$ の要素とし,V' を S の要素で $V \subseteq V'$ をみたすものとする.このとき,図式

$$A \xrightarrow{\qquad} F(B) \xrightarrow{\qquad} \prod_{V \in \langle S \rangle} F(V)$$

$$\prod_{V \in S} F(V) \xrightarrow{\qquad} F(V') \xrightarrow{\qquad} F(V)$$

と図式 12 が共に可換であるから,積 $\prod_{V \in \langle S \rangle} F(V)$ の普遍性により図式

$$F(B) \longrightarrow \prod_{V \in \langle S \rangle} F(V)$$

は可換である。故に equalizer F(B) の普遍性から、図式 14 を可換にする射 $A \to F(B)$ の一意性が従う.

命題 15. 位相空間 X 上の sheaf F に対して、 $\langle F, \mathrm{id} \rangle$ は i^op に沿った $F \circ i^\mathrm{op}$ の右 Kan 拡張である.

$$\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}$$
 $i^{\mathrm{op}} \uparrow \quad \text{\downarrowid} \qquad F$
 $\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \xrightarrow[i^{\mathrm{op}}]{} \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}$

証明. $P: \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を X 上の presheaf とし, $\theta: P \circ i^{\mathrm{op}} \Rightarrow F \circ i^{\mathrm{op}}$ を自然変換とする.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} & & P \\
\downarrow^{i^{\mathrm{op}}} & & & \downarrow^{\theta} \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{i^{\mathrm{op}}} & \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}
\end{array}$$

X の開集合 U に対して

$$\mathcal{B}_U = \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U \}$$

とおく. これはUの開被覆である.

U を X の開集合,V を $\langle \mathcal{B}_U \rangle$ の要素とし,B, B' を \mathcal{B}_U の要素で $V \subseteq B$, B' をみたすものとする. $V' \in \langle \mathcal{B}_V \rangle$ とし,B'' を \mathcal{B}_V の要素で $V' \subseteq B''$ をみたすものとする.このとき,B について図式

$$P(U) \longrightarrow P(B) \xrightarrow{\theta_B} F(B) \longrightarrow F(V) \longrightarrow \prod_{V' \in \langle \mathcal{B}_V \rangle} F(V')$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$P(B'') \xrightarrow{\theta_{B''}} F(B'') \longrightarrow F(V')$$

は可換であり,B' についても同様に可換である.よって,積 $\prod_{V' \in \langle \mathcal{B}_V \rangle} F(V')$ の普遍性と equalizer F(V) の普遍性により図式

$$P(B) \xrightarrow{\theta_B} F(B) \xrightarrow{F(V)} F(V)$$

$$P(B') \xrightarrow{\theta_{B'}} F(B')$$

は可換である. つまり、合成

$$P(U) \to P(B) \xrightarrow{\theta_B} F(B) \to F(V)$$

は $V \subset B \subset U$ をみたす $B \in \mathcal{B}$ のとり方に依らない.

V を $\langle \mathcal{B}_U \rangle$ の要素とし, B を \mathcal{B}_U の要素で $V \subseteq B$ をみたすものとする. 積 $\prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V)$ の普遍性から, 図式

$$P(U) \xrightarrow{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$P(B) \xrightarrow{\theta_B} F(B) \xrightarrow{} F(V)$$

$$(16)$$

を可換にする射 $P(U) \to \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V)$ が存在する.

W,V を $\langle \mathcal{B}_U \rangle$ の要素で $W \subseteq V$ をみたすものとし, B_W,B_V を \mathcal{B}_U の要素で $W \subseteq B_W,V \subseteq B_V$ をみたすものとする.組 $\langle W,V \rangle$ に対して図式

$$P(U) \longrightarrow \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_{U} \rangle} F(V) \xrightarrow{r_{0}} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$P(B_{W}) \xrightarrow{\theta_{B_{W}}} F(B_{W}) \longrightarrow F(W)$$

$$P(U) \longrightarrow \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_{U} \rangle} F(V) \xrightarrow{r_{1}} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$F(V) \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$P(B_{V}) \xrightarrow{\theta_{B_{V}}} F(B_{V}) \longrightarrow F(W)$$

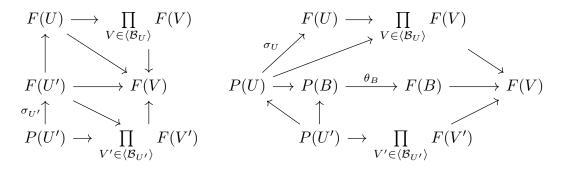
は共に可換であるから,積 $\prod_{\langle W,V \rangle} F(W)$ の普遍性により図式

$$P(U) \longrightarrow \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V) \xrightarrow{r_0} \prod_{\langle W, V \rangle} F(W)$$

は可換である. 故に equalizer F(U) の普遍性により図式

を可換にする射 $\sigma_U \colon P(U) \to F(U)$ が存在する.

U, U' を X の開集合で $U \subseteq U'$ をみたすものとし,V を $\langle \mathcal{B}_U \rangle$ の要素,B を \mathcal{B}_U の要素で $V \subseteq B$ をみたすものとする.図式



は共に可換であるから,積 $\prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V)$ の普遍性と equalizer F(U) の普遍性により図式

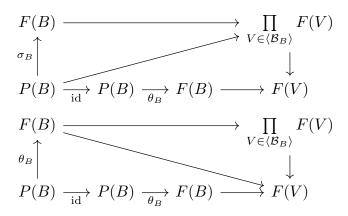
$$P(U') \xrightarrow{\sigma_{U'}} F(U')$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$P(U) \xrightarrow{\sigma_{U}} F(U)$$

は可換である. 故に $\sigma = \langle \sigma_U \rangle_U$ は自然変換 $P \Rightarrow F$ である.

B を \mathcal{B} の要素とし、V を $\langle \mathcal{B}_B \rangle$ の要素とする. 図式



は共に可換であるから、equalizer F(B) の普遍性により $\sigma_B = \theta_B$ が従う. 故に

となる.

等式 17 をみたす自然変換 $\sigma: P \Rightarrow F$ が与えられたとする. U を X の開集合, V を $\langle \mathcal{B}_U \rangle$ の要素,B を \mathcal{B}_U の要素で $V \subseteq B$ をみたすものとする. 図式

$$F(U) \xrightarrow{\sigma_{U}} F(V)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$P(U) \to P(B) \xrightarrow{\theta_{B} = \sigma_{B}} F(B) \xrightarrow{F(V)} F(V)$$

と図式 16 は共に可換であるから,積 $\prod_{V \in \langle \mathcal{B}_B \rangle} F(V)$ の普遍性により図式

$$F(U) \longrightarrow \prod_{V \in \langle \mathcal{B}_U \rangle} F(V)$$

$$P(U)$$

は可換である. 故に equalizer F(U) の普遍性から,この図式を可換にする σ_U は一意である. よって,等式 17 をみたす自然変換 σ は一意である.

※ 包含函手 $i: \mathcal{B} \to \mathcal{O}(X)$ に対して、組 $\langle \mathrm{id}_{\mathcal{O}(X)}, \mathrm{id}_i \rangle$ は i に沿った i の各点左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{c}
\mathcal{O}(X) \\
\downarrow i \\
\downarrow i \\
\mathcal{B} \xrightarrow{i} \mathcal{O}(X)
\end{array}$$

故に命題 15 から, X 上の sheaf F が右 Kan 拡張 $\langle \mathrm{id}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{O}(X)}, \mathrm{id}^{\mathrm{op}}_i \rangle$ を保つことがわかる.

函手 $\mathbf{s} \colon \mathbf{Sh}(\mathcal{B}) \to \mathbf{Sh}(X)$ を $G \mapsto (i^{\mathrm{op}})^{\ddagger} G$ で定め,函手 $\mathbf{r} \colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ を $F \mapsto F \circ i^{\mathrm{op}}$ で定める.

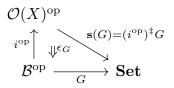
命題 18. s は r の右随伴函手である.

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{\mathbf{Sh}}(X)}(F, \mathbf{s}(G)) \cong \operatorname{Hom}_{\operatorname{\mathbf{Sh}}(\mathcal{B})}(\mathbf{r}(F), G)$$

証明. 右 Kan 拡張の普遍性から従う.

定理 19. X 上の sheaf の圏 $\mathbf{Sh}(X)$ と X の開基 \mathcal{B} 上の sheaf の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ は圏同値である.

証明. 命題 15 から $\mathbf{s} \circ \mathbf{r} \cong \operatorname{id}$ が従う. $G: \mathcal{B}^{\operatorname{op}} \to \operatorname{\mathbf{Set}}$ を \mathcal{B} 上の sheaf とし、 $\langle \mathbf{s}(G), \epsilon_G \rangle$ を i^{op} に沿った G の右 Kan 拡張とする. $\mathbf{s}(G)$ が各点右 Kan 拡張であり、i が忠実充満であるから、 $\epsilon_G: (\mathbf{r} \circ \mathbf{s})(G) \Rightarrow G$ は同型である.



故に $\mathbf{r} \circ \mathbf{s} \cong \mathrm{id}$ が従う.

参考文献

- [Emi] Emily (https://math.stackexchange.com/users/603207/emily). Alternative Construction of Sheaf from Sheaf on a Base. Mathematics Stack Exchange. URL: https://math.stackexchange.com/q/2990806 (version: 2020-09-01).
- [MLM92] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [Rie16] Emily Riehl. Category Theory in Context. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2016.