エンド

@hyutw*

2022年2月24日

目次

1 対角自然変換 1

2 エンド 5

1 対角自然変換

定義. C,D を圏, $F,G:C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ を函手とする. 対角自然変換 $\sigma:F\overset{\sim}{\to}G$ とは、圏 D の射の族 $\{\sigma_a\colon F(a,a)\to G(a,a)\}_{a\in C}$ であって、C の任意の射 $f:a\to b$ に対して次の図式が可換となるものである.

$$F(a,a) \xrightarrow{\sigma_a} G(a,a)$$

$$F(b,a) \qquad G(a,b)$$

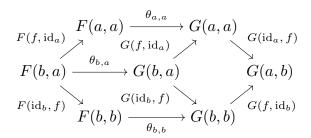
$$F(\mathrm{id}_b,f) \xrightarrow{F(b,b)} F(b,b) \xrightarrow{\sigma_b} G(b,b)$$

F から G への対角自然変換全体の集合を $\mathrm{Dinat}(F,G)$ と書く.

 $F,G: C^{op} \times C \to D$ を函手、 $\theta: F \Rightarrow G$ を自然変換とする. C の射 $f: a \to b$ につい

^{*} https://yuu7269.github.io/notes.

て次の図式を考える.



左上と左下の四角形は θ の自然性から可換であり、また右の四角形も可換である.したがって $a \in C$ に対して $\sigma_a = \theta_{a,a}$ とおくと、これは対角自然変換 $\sigma: F \stackrel{...}{\to} G$ を定める.

 $F\colon C\to D$ を函手, $P\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to C$ を射影とする.このとき函手 F は合成 $F\circ P\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ として扱うことができる.

 $F,G\colon C\to D$ を函手とし、これらを $C^{\mathrm{op}}\times C$ から D への函手とみなしたものをそれ ぞれ F_0,G_0 とおく.対角自然変換 $\sigma\colon F_0\stackrel{..}{\to} G_0$ について考える.圏 C の射 $f\colon a\to b$ に 対して図式

$$F_0(f, \mathrm{id}_a) \xrightarrow{F_0(a, a)} G_0(a, a) \xrightarrow{G_0(\mathrm{id}_a, f)} G_0(\mathrm{id}_a, f)$$

$$F_0(b, a) \xrightarrow{G_0(a, b)} G_0(a, b)$$

$$F_0(\mathrm{id}_b, f) \xrightarrow{F_0(b, b)} G_0(b, b)$$

は可換である. よって F_0 , G_0 の定義より図式

$$F(a) \xrightarrow{\sigma_a} G(a)$$

$$F(f) \downarrow \qquad \qquad \downarrow G(f)$$

$$F(b) \xrightarrow{\sigma_b} G(b)$$

は可換であり、これは σ が自然変換 $F \Rightarrow G$ であることを表している.

 $F: C \to D$ を共変函手, $G: C \to D$ を反変函手(つまり共変函手 $G: C^{op} \to D$)とし,これらを $C^{op} \times C$ から D への函手とみなしたものをそれぞれ F_0, G_0 とおく. σ :

 $F_0 \stackrel{\dots}{\to} G_0$ を対角自然変換とする. このとき C の射 $f: a \to b$ に対して図式

$$F(a) \xrightarrow{\sigma_a} G(a)$$

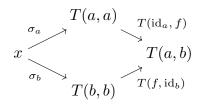
$$F(f) \downarrow \qquad \qquad \uparrow_{G(f)}$$

$$F(b) \xrightarrow{\sigma_b} G(b)$$

は可換である。このような対角自然変換は共変函手 F から反変函手 G への自然変換と考えることができる。同様に、反変函手から共変函手への自然変換も考えられる。

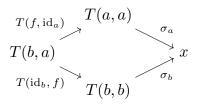
例 1. $\mathbf{Vect}_{\mathbf{R}}$ を実数体 \mathbf{R} 上の線型空間の圏, $\mathbf{MVect}_{\mathbf{R}}$ を \mathbf{R} 上の内積空間の圏,U: $\mathbf{MVect}_{\mathbf{R}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbf{R}}$ を忘却関手, $F: (\mathbf{MVect}_{\mathbf{R}})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbf{R}}$ を「双対空間をとる」函手とする.このとき,内積空間 $\langle V, \langle -, - \rangle \rangle$ に対して写像 $\kappa_{\langle V, \langle -, - \rangle \rangle} \colon V \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_{\mathbf{R}}}(V, \mathbf{R})$ を $x \mapsto \langle x, - \rangle$ により定めると,これは対角自然変換 $U \stackrel{\sim}{\to} F$ を定める.

定義. $T: C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手, $x \in D$ とする.対角函手 Δx から T への対角自然変換を x から T への wedge という.すなわち,D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a \colon x \to T(a,a)\}_{a \in C}$ であって,C の任意の射 $f \colon a \to b$ に対して次の図式が可換となるものである.



x から T への wedge を $x \stackrel{...}{\to} T$ で表す. x から T への wedge 全体の集合を Wedge(x,T) と書く.

定義. $T: C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手, $x \in D$ とする.T から対角函手 Δx への対角自然変換を T から x への cowedge という.すなわち,D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a \colon T(a,a) \to x\}_{a \in C}$ であって,C の任意の射 $f: a \to b$ に対して次の図式が可換となるものである.



T から x への cowedge を T $\stackrel{...}{\to}$ x で表す. T から x への cowedge 全体の集合を $\operatorname{Wedge}(T,x)$ と書く.

例 2. C を圏とする. 函手 $\operatorname{Hom}_C(-,-)$: $C^{\operatorname{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ を次のように定める.

- 対象 $\langle a, b \rangle \in C^{\mathrm{op}} \times C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, b)$.
- $C^{\text{op}} \times C$ の射 $\langle f, g \rangle : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a', b' \rangle$ に対して

$$\operatorname{Hom}_C(f,g) = g \circ - \circ f \colon \operatorname{Hom}_C(a,b) \to \operatorname{Hom}_C(a',b'), \quad h \mapsto g \circ h \circ f.$$

 $a \in C$ に対して、一点集合 $1 = \{*\}$ から $\operatorname{Hom}_C(a,a)$ への写像 $\lambda_a \colon 1 \to \operatorname{Hom}_C(a,a)$ を $\lambda_a(*) = \operatorname{id}_a$ により定めると、これは wedge $\lambda \colon 1 \to \operatorname{Hom}_C(-,-)$ を定める.

例 3. C を圏とする. $a,b,c \in C$ に対して写像 $\lambda(a,b,c)$ を

$$\lambda(a,b,c) \colon \operatorname{Hom}_C(b,c) \times \operatorname{Hom}_C(a,b) \to \operatorname{Hom}_C(a,c), \quad \langle g,f \rangle \mapsto g \circ f$$

と定める. $\lambda(a,b,c)$ は a,c について自然であり、b について対角自然である.

例 4. $F,G:C\to D$ を函手とする. 自然変換 $\sigma:F\Rightarrow G$ とは D の射の族 $\{\sigma_a\colon F(a)\to G(a)\}_{a\in C}$ であって,C の任意の射 $f:a\to b$ に対して次の図式が可換となるもののことであった.

$$F(a) \xrightarrow{\sigma_a} G(a)$$

$$F(f) \downarrow \qquad \qquad \downarrow G(f)$$

$$F(b) \xrightarrow{\sigma_b} G(b)$$

 $1=\{*\}$ を一点集合とする.一般に,集合 A の要素を与えることと写像 $1\to A$ を与えることは同じであるから,これによって自然変換の定義を書き換えると次のようになる.自然変換 $\sigma\colon F\Rightarrow G$ とは D の射の族 $\{\sigma_a\colon 1\to \operatorname{Hom}_D(F(a),G(a))\}_{a\in C}$ であって,C の任意の射 $f\colon a\to b$ に対して次の図式が可換となるものである.

$$1 \underbrace{\longrightarrow_{\sigma_a} Hom_D(F(a),G(a))}_{G(f)\circ -} G(f)\circ -$$

$$1 \underbrace{\longrightarrow_{\sigma_b} Hom_D(F(a),G(b))}_{-\circ F(f)}$$

$$Hom_D(F(b),G(b))$$

これは σ が 1 から $\operatorname{Hom}_D(F(-),G(-))$: $C^{\operatorname{op}}\times C\to \mathbf{Set}$ への wedge であることを表している.

2 つの対角自然変換の合成は対角自然変換とは限らないが、対角自然変換と自然変換の 合成は対角自然変換である. 命題 5. $F, F', G, G': C^{\text{op}} \times C \to D$ を函手, $\sigma: F' \Rightarrow F, \tau: G \Rightarrow G'$ を自然変換, $\rho: F \stackrel{\sim}{\to} G$ を対角自然変換とする.このとき, $a \in C$ に対して合成 $\tau_{a,a} \circ \rho_a \circ \sigma_{a,a}$ は対角自然変換 $F' \stackrel{\sim}{\to} G'$ を定める.

証明. $f: a \rightarrow b$ を圏 C の射とする. 図式

$$F'(a,a) \xrightarrow{\sigma_{a,a}} F(a,a) \xrightarrow{\rho_{a}} G(a,a) \xrightarrow{\tau_{a,a}} G'(a,a)$$

$$F'(f, id_{a}) \xrightarrow{\sigma_{b,a}} F(f, id_{a}) \qquad G(id_{a}, f)$$

$$F'(b,a) \xrightarrow{\sigma_{b,a}} F(b,a) \qquad G(f, id_{b}) \xrightarrow{\tau_{b,a}} G'(a,b)$$

$$F'(id_{b}, f) \xrightarrow{\sigma_{b,b}} F(b,b) \xrightarrow{\rho_{b}} G(b,b) \xrightarrow{\tau_{b,b}} G'(b,b)$$

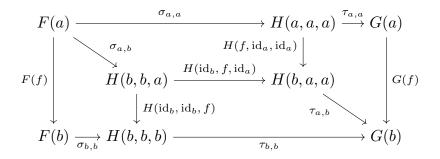
が可換であることから従う.

命題 6. $F,G: C \to D, H: C \times C^{op} \times C \to D$ を函手とする. $a,b \in C$ に対して,

$$\sigma_{a,b} \colon F(a) \to H(b,b,a), \qquad \tau_{b,a} \colon H(a,b,b) \to G(a)$$

は a について自然,b について対角自然であるとする. このとき $c \in C$ に対して合成 $au_{c,c} \circ \sigma_{c,c}$ は自然変換 $F \Rightarrow G$ を定める.

証明. $f: a \rightarrow b$ を圏 C の射とする. 図式



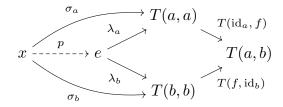
が可換であることから従う.

2 **エンド**

定義. 函手 $T: C^{op} \times C \to D$ のエンドとは、次をみたす組 $\langle e, \lambda \rangle$ である.

(1) $e \in D$ は対象である.

- (2) $\lambda : e \stackrel{..}{\rightarrow} T$ it wedge $\sigma \delta$.
- (3) $\sigma: x \xrightarrow{\cdot\cdot} T$ を wedge とするとき,任意の $a \in C$ に対して $\sigma_a = \lambda_a \circ p$ をみたす射 $p: x \to e$ が一意的に存在する.

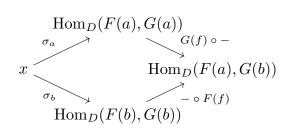


このとき e を $\int_{a \in C} T(a,a)$ で表す. 双対的にコエンド $\int^{a \in C} T(a,a)$ も定義される.

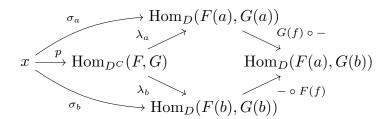
例 7. $F,G:C \rightarrow D$ を函手とする. このとき

$$\int_{a \in C} \operatorname{Hom}_{D}(F(a), G(a)) \cong \operatorname{Hom}_{D^{C}}(F, G).$$

証明. $a \in C$ に対して λ_a : $\operatorname{Hom}_{D^C}(F,G) \to \operatorname{Hom}_D(F(a),G(a))$ を $\lambda_a(\alpha) = \alpha_a$ により定めると、これは wedge λ : $\operatorname{Hom}_{D^C}(F,G) \overset{..}{\to} \operatorname{Hom}_D(F(-),G(-))$ を定める。wedge σ : $x \overset{..}{\to} \operatorname{Hom}_D(F(-),G(-))$ を任意にとる。C の任意の射 $f:a \to b$ に対して図式



は可換であるから、 $u \in x$ に対して $\sigma_a(u) \colon F(a) \to G(a)$ は a について自然である.これにより自然変換 $\sigma_-(u) \colon F \Rightarrow G$ を得る.写像 $p \colon x \to \operatorname{Hom}_{D^C}(F,G)$ を $p(u) = \sigma_-(u)$ により定めると、これは任意の $a \in C$ に対して $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ をみたす.



任意の $a\in C$ に対して $\lambda_a\circ p=\sigma_a$ をみたす射 $p\colon x\to \operatorname{Hom}_{D^C}(F,G)$ が与えられたとする. $u\in x$ とする. 任意の $a\in C$ に対して $p(u)_a=\lambda_a(p(u))=\sigma_a(u)$ であるから $p(u)=\sigma_a(u)$

 $\sigma_-(u)$ が従う.故に $\langle \mathrm{Hom}_{D^C}(F,G), \lambda \rangle$ はエンドであり、 $\int_{a \in C} \mathrm{Hom}_D(F(a), G(a)) \cong$ $\operatorname{Hom}_{D^C}(F,G)$ が従う.

 $F,G: C \to D$ を函手とする. 自然変換 $F \Rightarrow G$ とは wedge $1 \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_D(F(-),G(-))$ のことであった.このことから、先の例は次のように一般化される.

例 8. $T: C^{op} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$ を函手とする. このとき

$$\int_{a \in C} T(a, a) \cong \text{Wedge}(1, T).$$

例 9. $S,T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ を函手とする。函手 $\mathrm{Hom}_D(S(-,-),T(-,-))\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ Set を次のように定める.

- 対象 $\langle a,b\rangle \in C^{\mathrm{op}} \times C$ に対して $\mathrm{Hom}_D(S(b,a),T(a,b))$.
- $C^{\text{op}} \times C$ の射 $\langle f, g \rangle : \langle a, b \rangle \to \langle a', b' \rangle$ に対して

 $T(f,g) \circ - \circ S(g,f) \colon \operatorname{Hom}_D(S(b,a),T(a,b)) \to \operatorname{Hom}_D(S(b',a'),T(a',b')).$

※ 函手 $\operatorname{Hom}_D(S(-,-),T(-,-)): C^{\operatorname{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ は次のような合成で表すことが

$$C^{\mathrm{op}} \times C \xrightarrow{\Delta} (C^{\mathrm{op}} \times C) \times (C^{\mathrm{op}} \times C)$$

$$\xrightarrow{\cong} (C^{\mathrm{op}} \times C)^{\mathrm{op}} \times (C^{\mathrm{op}} \times C) \xrightarrow{S^{\mathrm{op}} \times T} D^{\mathrm{op}} \times D \xrightarrow{\mathrm{Hom}_D(-,-)} \mathbf{Set}$$

ここで、 Δ は対角函手である.

このとき,

$$\int_{a \in C} \operatorname{Hom}_{D}(S(a, a), T(a, a)) \cong \operatorname{Dinat}(S, T). \qquad \Box$$

例 10. R を可換とは限らない単位的環とし、これを一点前加法圏 R_* とみなす。

** 圏 R_* を次のように定めると、これは前加法圏である.

- $Ob(R_*) = \{ * \}.$
- ・ $\mathrm{Hom}_{R_*}(*,*) = R.$ ・ $f,g \in \mathrm{Hom}_{R_*}(*,*)$ に対して合成 $g \circ f$ は積 $g \cdot f.$
- 対象*の恒等射id*は環Rの単位元1.

逆に、対象 * をもつ一点前加法圏 C が与えられたとき、 $\operatorname{Hom}_C(*,*)$ はアーベル群 であり、 $f,g \in \operatorname{Hom}_C(*,*)$ に対して積 $g \cdot f$ を射の合成 $g \circ f$ により定めることで $\operatorname{Hom}_C(*,*)$ は環になる.

左 R 加群 M とは,アーベル群 M と次をみたす写像 $R \times M \to M$; $\langle a, x \rangle \mapsto ax$ の組のことであった:任意の $a, b \in R$,任意の $x, y \in M$ に対して

- a(x+y) = ax + ay,
- (a+b)x = ax + bx,
- (ab)x = a(bx),
- 1x = x.

このような写像 $R \times M \to M$ を与えることと,環準同型 $R \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M,M)$ を与えることは同じである.ここで, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M,M)$ は M から M への群準同型全体の集合を表し, $f,g \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M,M)$ に対して和 f+g と積 fg は, $x \in M$ に対して

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(fg)(x) = f(g(x))$$

により定まっている群準同型 $M \to M$ である.したがって,左 R 加群 M は一点前加法圏 R_* からアーベル群の圏 \mathbf{Ab} への加法函手 M_* であって, R_* の対象 * に対してアーベル群 M が対応しているものとみなせる.同様に,右 R 加群 M は加法函手 M_* : $R_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ と みなせる.M を右 R 加群,N を左 R 加群とする.函手 $M_*(-)\otimes N_*(-)$: $R_*^{\mathrm{op}} \times R_* \to \mathbf{Ab}$ を次のように定める.

- 対象 $\langle *, * \rangle$ に対して $M_*(*) \otimes N_*(*) = M \otimes_{\mathbf{Z}} N$.
- 射 $\langle a,b \rangle$: $\langle *,* \rangle \rightarrow \langle *,* \rangle$ に対して $M_*(a) \otimes N_*(b)$: $M \otimes_{\mathbf{Z}} N \rightarrow M \otimes_{\mathbf{Z}} N$.

このとき, 函手 $M_*(-)\otimes N_*(-)$ のコエンドは環 R 上のテンソル積 $M\otimes_R N$ である.

$$\int^{* \in R_*} M_*(*) \otimes N_*(*) \cong M \otimes_R N$$

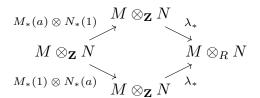
証明. R 双線型写像は ${\bf Z}$ 双線型写像であるから,テンソル積 $M\otimes_{\bf Z} N$ の普遍性より次の図式を可換にする群準同型 $\lambda_*\colon M\otimes_{\bf Z} N\to M\otimes_R N$ が存在する.

$$\begin{array}{c} M\times N \xrightarrow{\otimes_R} M \otimes_R N \\ \otimes_{\mathbf{Z}} \downarrow \\ M\otimes_{\mathbf{Z}} N \end{array}$$

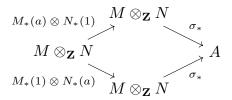
写像 \otimes_R : $M \times N \to M \otimes_R N$ は R 双線型であるから,群準同型 λ_* は任意の $x \in M$, $y \in N$, $a \in R$ に対して

$$\lambda_*(xa \otimes y) = \lambda_*(x \otimes ay)$$

をみたす. つまり、任意の $a \in R$ に対して次の図式は可換である.



故に λ_* は wedge λ : $M_*(-)\otimes N_*(-)\stackrel{..}{\to} M\otimes_R N$ を定める.このとき $\langle M\otimes_R N,\lambda\rangle$ が コエンドとなることを示す. σ : $M_*(-)\otimes N_*(-)\stackrel{..}{\to} A$ を wedge とする.合成 $\sigma_*\circ\otimes_{\mathbf{Z}}$: $M\times N\to A$ は \mathbf{Z} 双線型であり,任意の $a\in R$ に対して図式



は可換であるから, $\sigma_*\circ\otimes_{\bf Z}$ は R 双線型である.故に,テンソル積 $M\otimes_R N$ の普遍性より次の図式を可換にする群準同型 $h\colon M\otimes_R N\to A$ が存在する.

$$\begin{array}{c}
M \times N \xrightarrow{\otimes_R} M \otimes_R N \\
\otimes_{\mathbf{Z}} \downarrow & \downarrow h \\
M \otimes_{\mathbf{Z}} N \xrightarrow{\sigma_*} A
\end{array}$$

テンソル積 $M \otimes_{\mathbf{Z}} N$ の普遍性より次の図式は可換である.

$$\begin{array}{c}
M \otimes_R N \\
\downarrow h \\
M \otimes_{\mathbf{Z}} N \xrightarrow{\sigma_*} A
\end{array}$$

テンソル積 $M \otimes_{\mathbf{Z}} N$ の普遍性より, $h \circ \lambda_* = \sigma_*$ をみたす群準同型 $h \colon M \otimes_R N \to A$ は一意的である.故に $\langle M \otimes_R N, \lambda \rangle$ はコエンドであり, $\int^{* \in R_*} M(*) \otimes N(*) \cong M \otimes_R N$ が従う.

 $T: C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を函手, $f: d \to d'$ を圏 D の射, $\sigma: T \stackrel{..}{\to} d$ を cowedge とする. このとき $\{f \circ \sigma_a\}_{a \in C}$ は cowedge $T \stackrel{..}{\to} d'$ である.次のようにして函手 Wedge $(T, -): D \to \mathbf{Set}$ を定める.

- 対象 $d \in D$ に対して Wedge(T, d).
- D の射 $f: d \rightarrow d'$ に対して

Wedge
$$(T, f)$$
: Wedge $(T, d) \to \text{Wedge}(T, d'), \quad \sigma \mapsto \{f \circ \sigma_a\}_{a \in C}$.

同様にして函手 Wedge(-,T): $D^{op} \to \mathbf{Set}$ が定まる.

函手 $T: C \to D$ に対して

$$\operatorname{Cone}(T, -) = \operatorname{Hom}_{D^C}(T, \Delta(-)) \colon D \to \operatorname{\mathbf{Set}},$$

 $\operatorname{Cone}(-, T) = \operatorname{Hom}_{D^C}(\Delta(-), T) \colon D^{\operatorname{op}} \to \operatorname{\mathbf{Set}}$

とおく.

函手 $T: C \to D$ の極限 $\lim T$ の存在と、函手 $\operatorname{Cone}(-,T): D^{\operatorname{op}} \to \mathbf{Set}$ が表現可能であることが同値であるように、エンドに対して次が成り立つ.

命題 11. $T: C^{op} \times C \to D$ を函手とする. このとき以下は同値である.

- (1) 函手 T のエンド $\int_a T(a,a)$ が存在する.
- (2) 函手 $Wedge(-,T): D^{op} \to \mathbf{Set}$ は表現可能である.

3 変数の函手 $T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\times X\to D$ について考える. $x\in X$ を固定することで 2 変数の函手 $T(-,-,x)\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ が得られるから,エンド $\int_a T(a,a,x)$ を考えることができる.任意の $x\in X$ に対してエンド $\int_a T(a,a,x)$ が存在するとき,対応 $X\ni x\mapsto \int_a T(a,a,x)\in D$ を考えることができる.

命題 12. $T: C^{\text{op}} \times C \times X \to D$ を函手とし、任意の $x \in X$ に対してエンド $\left\langle \int_a T(a,a,x), \lambda^x \right\rangle$ が存在すると仮定する.圏 C の射 $f: a \to b$ と $x \in X$ に対して $\alpha_x^f = T(\mathrm{id}_a,f,\mathrm{id}_x) \circ \lambda_a^x$ とおく.

$$\int_{a} T(a,a,x) \xrightarrow{T(\mathrm{id}_{a},f,\mathrm{id}_{x})} T(a,a,x) \xrightarrow{\alpha_{x}^{f}} T(a,b,x)$$

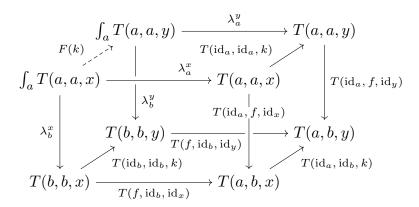
$$\downarrow^{\lambda_{a}^{x}} T(b,b,x) \xrightarrow{T(f,\mathrm{id}_{b},\mathrm{id}_{x})} T(b,b,x)$$

このとき以下をみたす函手 $F: X \to D$ が一意的に存在する.

- (1) $x \in X$ に対して $F(x) = \int_a T(a, a, x)$.
- (2) C の射 $f: a \to b$ に対して $\alpha_x^f: F(x) \to T(a,b,x)$ が自然変換 $\alpha^f: F \Rightarrow T(a,b,-)$ を定める.

この F を $\int_a T(a,a,-)$ で表す.

証明. $k: x \to y$ を圏 X の射、 $f: a \to b$ を圏 C の射とし、次の図式の実線部を考える.



実線部の各四角形はすべて可換であるから,エンド $\int_a T(a,a,y)$ の普遍性より点線の射 F(k): $\int_a T(a,a,x) \to \int_a T(a,a,y)$ を得る.このとき明らかに F は函手 $X \to D$ である. また明らかに α_x^f : $F(x) \to T(a,b,x)$ は x について自然である.エンドの普遍性より,このような函手 F は一意的である.

4 変数の函手 $T: C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ について考える。圏 C についてエンドをとることで函手 $\int_{a \in C} T(a,a,-,-): X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ を得ることができ,さらにこれのエンド

$$\int_{x \in X} \int_{a \in C} T(a, a, x, x)$$

を考えることができる.一方で,同型 $C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \cong (C \times X)^{\mathrm{op}} \times (C \times X)$ により $T \colon (C \times X)^{\mathrm{op}} \times (C \times X) \to D$ とみなすことで,エンド

$$\int_{\langle a,x\rangle \in C\times X} T(a,a,x,x)$$

も考えることができる.

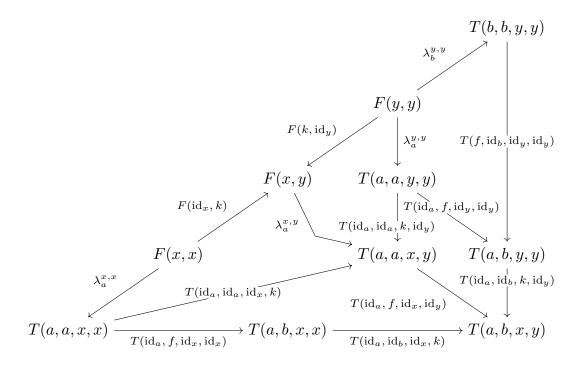
定理 13. $T: C^{\text{op}} \times C \times X^{\text{op}} \times X \to D$ を函手とし、任意の $x, y \in X$ に対してエンド $\left\langle \int_{a \in C} T(a, a, x, y), \lambda^{x, y} \right\rangle$ が存在すると仮定する。函手 $\int_a T(a, a, -, -): X^{\text{op}} \times X \to D$

を F とおく. このとき $d \in D$ について自然な同型

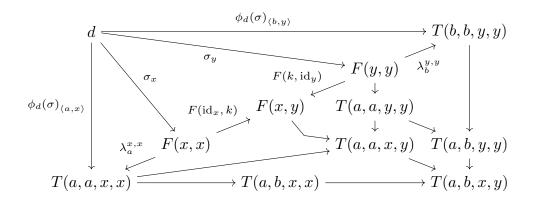
$$Wedge(d, T) \cong Wedge(d, F)$$

が存在する.

証明. $f: a \to b$ を圏 C の射, $k: x \to y$ を圏 X の射とする. 函手 $F: X^{op} \times X \to D$ の定義や wedge の定義より,次の可換図式を得る.



 $\sigma \colon d \stackrel{...}{\to} F$ を wedge とする. $\langle a,x \rangle \in C \times X$ に対して $\phi_d(\sigma)_{\langle a,x \rangle} = \lambda_a^{x,x} \circ \sigma_x$ と定める. $C \times X$ の任意の射 $\langle f,k \rangle \colon \langle a,x \rangle \to \langle b,y \rangle$ に対して次の図式が可換であるから $\phi_d(\sigma)_{\langle a,x \rangle}$ は wedge $\phi_d(\sigma) \colon d \stackrel{...}{\to} T$ を定める.



明らかに、写像 ϕ_d : Wedge $(d, F) \to \text{Wedge}(d, T)$ は $d \in D$ について自然である.

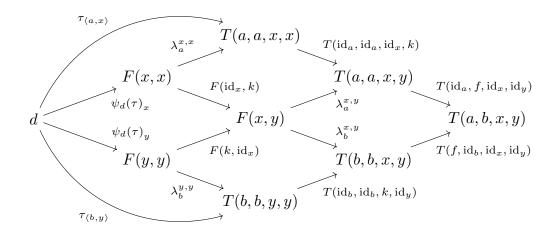
au: $d\stackrel{..}{\to} T$ を wedge とする. $x\in X$ を固定することで wedge $au_{\langle -,x\rangle}\colon d\to T(-,-,x,x)$ を得る. したがって,エンド $F(x,x)=\int_a T(a,a,x,x)$ の普遍性から任意の $a\in C$ に対して次の図式を可換にする射 $\psi_d(\tau)_x\colon d\to F(x,x)$ が存在する.

$$d \xrightarrow{\psi_d(\tau)_x} F(x,x)$$

$$\downarrow^{\lambda_a^{x,x}}$$

$$T(a,a,x,x)$$

 $k: x \to y$ を圏 X の射とする. 圏 C の任意の射 $f: a \to b$ に対して図式



は可換であるから、エンド $F(x,y)=\int_a T(a,a,x,y)$ の普遍性より次の図式が可換となる.

故に $\psi_d(\tau)_x$ は wedge $\psi_d(\tau)$: $d \stackrel{\dots}{\to} F$ を定める.

 $\sigma: d \xrightarrow{\sim} F$ を wedge, $x \in X$ とする. 任意の $a \in C$ に対して図式

$$d \xrightarrow{\psi_d(\phi_d(\sigma))_x} F(x,x)$$

$$\sigma_x \downarrow \phi_d(\sigma)_{\langle a,x\rangle} \downarrow \lambda_a^{x,x}$$

$$F(x,x) \xrightarrow{\lambda_a^{x,x}} T(a,a,x,x)$$

は可換であるから、エンド $F(x,x)=\int_a T(a,a,x,x)$ の普遍性より $\psi_d(\phi_d(\sigma))_x=\sigma_x$ が従う. 故に $\psi_d(\phi_d(\sigma))=\sigma$ であり、 $\psi_d\circ\phi_d=\mathrm{id}$ が従う. wedge $\tau\colon d\stackrel{..}{\to} T$ と $\langle a,x\rangle\in C\times X$ に対して

$$\phi_d(\psi_d(\tau))_{\langle a,x\rangle} = \lambda_a^{x,x} \circ \psi_d(\tau)_x = \tau_{\langle a,x\rangle}$$

であるから $\phi_d \circ \psi_d = \mathrm{id}$ が従う. 故に ϕ_d, ψ_d は互いに逆写像である.

故に、函手 Wedge(-,T), Wedge(-,F): $D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ の一方が表現可能ならばもう一方も表現可能であり、

$$\int_{\langle a,x\rangle\in C\times X} T(a,a,x,x)\cong \int_{x\in X} F(x,x)=\int_{x\in X} \left(\int_{a\in C} T(a,a,x,x)\right)$$

が従う.

系 14 (Fubini の定理). $T: C^{\text{op}} \times C \times X^{\text{op}} \times X \to D$ を函手とする. 任意の $x,y \in X$ に対してエンド $\int_{a \in C} T(a,a,x,y)$ が存在し、任意の $a,b \in C$ に対してエンド $\int_{x \in X} T(a,b,x,x)$ が存在すると仮定する. このとき

$$\int_{x \in X} \left(\int_{a \in C} T(a, a, x, x) \right) \cong \int_{a \in C} \left(\int_{x \in X} T(a, a, x, x) \right). \quad \Box$$

エンドは以下のように極限で表すことができる.

C を圏とする. 圏 $C_{\#}$ を次のように定める *1 .

- 対象は C の射である.
- $f: a \to b$ から $f': a' \to b'$ への射は C の射の組 $\langle h, k \rangle$ で次の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc}
a & \xrightarrow{f} & b \\
h \uparrow & & \downarrow k \\
a' & \xrightarrow{f'} & b'
\end{array}$$

• 射 $\langle h, k \rangle$: $f \to f', \langle h', k' \rangle$: $f' \to f''$ に対して合成は

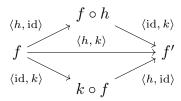
$$\langle h', k' \rangle \circ \langle h, k \rangle := \langle h \circ h', k' \circ k \rangle \colon f \to f''$$

である.

^{*1} 圏 $C_\#$ を twisted arrow category と呼ぶ. これは函手 $\operatorname{Hom}_C(-,-)\colon C^{\operatorname{op}}\times C\to \mathbf{Set}$ の category of elements である.

• $f: a \to b$ の恒等射は $\langle id_a, id_b \rangle : f \to f$ である.

圏 $C_\#$ の任意の射 $\langle h, k \rangle$: $f \to f'$ は次のように分解する.



函手 $U \colon C_\# \to C^{\mathrm{op}} \times C$ を次のように定める.

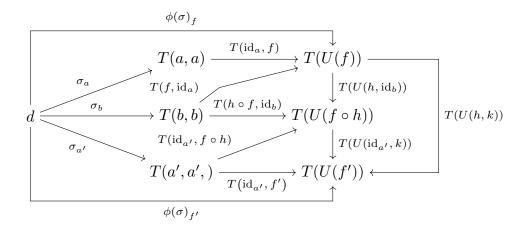
- 対象 $f \in C_\#$ に対して $U(f) = \langle \operatorname{dom}(f), \operatorname{cod}(f) \rangle$.
- $C_\#$ の射 $\langle h, k \rangle$: $f \to f'$ に対して $U(h, k) = \langle h, k \rangle$.

命題 15. $T: C^{op} \times C \to D$ を函手とする. このとき, $d \in D$ について自然な同型

$$Wedge(d,T) \cong Cone(d,T \circ U)$$

が存在する.

証明. $\sigma: d \stackrel{..}{\to} T$ を wedge とする. $f \in C_\#$ に対して $\phi(\sigma)_f = T(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}, f) \circ \sigma_{\mathrm{dom}(f)}$ と定める. $C_\#$ の任意の射 $\langle h, k \rangle$: $(f: a \to b) \to (f': a' \to b')$ に対して図式



は可換であるから $\phi(\sigma)_f$ は自然変換 $\phi(\sigma)$: $\Delta d \Rightarrow T \circ U$ を定める.明らかに写像 ϕ : Wedge $(d,T) \to \operatorname{Cone}(d,T \circ U)$ は $d \in D$ について自然である. θ : $\Delta d \Rightarrow T \circ U$ を自然変

換とする. $a \in C$ に対して $\psi(\theta)_a = \theta_{\mathrm{id}_a}$ と定める. C の任意の射 $f \colon a \to b$ に対して図式

$$\psi(\theta)_{a} = \theta_{\mathrm{id}_{a}} \xrightarrow{T(a,a)} T(\mathrm{id}_{a},f)$$

$$d \xrightarrow{\theta_{f}} T(a,b)$$

$$\psi(\theta)_{b} = \theta_{\mathrm{id}_{b}} \xrightarrow{T(f,\mathrm{id}_{b})} T(f,\mathrm{id}_{b})$$

は可換であるから $\psi(\theta)_a$ は wedge $\psi(\theta)$: $d\stackrel{..}{\to} T$ を定める.

任意の wedge $\sigma: d \xrightarrow{\cdot\cdot} T$ と $a \in C$ に対して

$$\psi(\phi(\sigma))_a = \phi(\sigma)_{\mathrm{id}_a} = T(\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a) \circ \sigma_a = \sigma_a$$

であるから $\psi\circ\phi=\mathrm{id}$ が従う. 任意の自然変換 $\theta\colon\Delta d\Rightarrow T\circ U$ と $C_\#$ の対象 $f\colon a\to b$ に対して

$$\phi(\psi(\theta))_f = T(\mathrm{id}_a, f) \circ \psi(\theta)_a = T(\mathrm{id}_a, f) \circ \theta_{\mathrm{id}_a} = \theta_f$$

であるから $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ が従う. したがって, ϕ, ψ は互いに逆写像である.

故に、函手 $\operatorname{Wedge}(-,T),\operatorname{Cone}(-,T\circ U)\colon D^{\operatorname{op}}\to \mathbf{Set}$ の一方が表現可能ならばもう一方も表現可能であり、

$$\int_{a} T(a,a) \cong \lim(T \circ U)$$

が従う.

積の存在を仮定すると、エンドは次のように equalizer で表すことができる.

命題 16. $T: C^{op} \times C \rightarrow D$ を函手とし、圏 D において、積

$$\left\langle \prod_{a \in \mathrm{Ob}(C)} T(a, a), p \right\rangle, \quad \left\langle \prod_{f \in \mathrm{Mor}(C)} T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)), p' \right\rangle$$

が存在すると仮定する. 積 $\prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ の普遍性より,圏 C の任意の射 f: $a \to b$ に対して次の図式を可換にする射 s,t: $\prod_a T(a,a) \to \prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ が存在する.

$$T(a,a) \xleftarrow{p_a} \prod_a T(a,a) \qquad T(b,b) \xleftarrow{p_b} \prod_a T(a,a)$$

$$T(\operatorname{id}_a,f) \downarrow \qquad \downarrow s \qquad T(f,\operatorname{id}_b) \downarrow \qquad \downarrow t \qquad$$

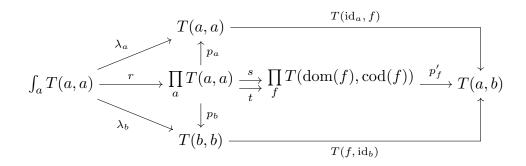
このとき以下は同値である.

- (1) 函手 $T: C^{op} \times C \to D$ のエンドが存在する.
- (2) 射 s,t: $\prod_a T(a,a) \to \prod_f T(\text{dom}(f),\text{cod}(f))$ の equalizer が存在する.

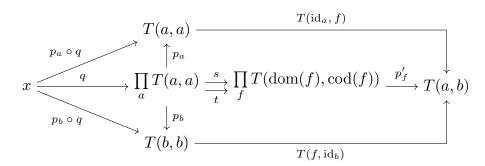
証明. $(1\implies 2)$ $\left\langle \int_a T(a,a),\lambda \right\rangle$ を $T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ のエンドとする. 積 $\prod_a T(a,a)$ の 普遍性より,任意の $a\in C$ に対して次の図式を可換にする射 $r\colon \int_a T(a,a)\to \prod_a T(a,a)$ が存在する.

$$\begin{array}{c}
T(a,a) \\
\uparrow^{p_a} \\
\int_a T(a,a) \xrightarrow{r} \prod_a T(a,a)
\end{array}$$

 $\left\langle \int_a T(a,a),r \right\rangle$ が射 $s,t\colon \prod_a T(a,a) \to \prod_f T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$ の equalizer であることを示す。 $\lambda\colon \int_a T(a,a) \stackrel{..}{\to} T$ が wedge であることと射 r,s,t のとり方から,C の任意の射 $f\colon a\to b$ に対して次の図式は可換である.



故に,積 $\prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ の普遍性より $s\circ r=t\circ r$ が従う. $q\colon x\to\prod_a T(a,a)$ を $s\circ q=t\circ q$ をみたす射とする.このとき C の任意の射 $f\colon a\to b$ に対して図式

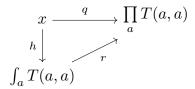


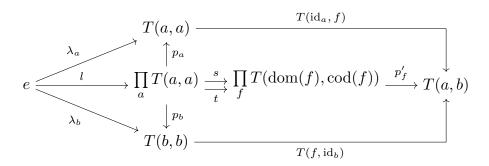
は可換であるから $p_a\circ q$ は wedge $x\stackrel{..}{ o} T$ を定める. エンド $\int_a T(a,a)$ の普遍性より、任

意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にする射 $h \colon x \to \int_a T(a,a)$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow{q} & \prod_{a} T(a, a) \\
\downarrow^{h} & \downarrow^{p_{a}} & \downarrow^{p_{a}} \\
\int_{a} T(a, a) & \xrightarrow{\lambda_{a}} T(a, a)
\end{array}$$

積 $\prod T(a,a)$ の普遍性より次の図式が可換となる.





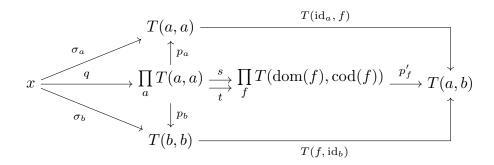
は可換であるから λ_a は wedge λ : $e \stackrel{..}{\to} T$ を定める. $\langle e, \lambda \rangle$ が函手 T のエンドとなることを示す. σ : $x \stackrel{..}{\to} T$ を wedge とする. 積 $\prod_a T(a,a)$ の普遍性より,任意の $a \in C$ に対して次の図式を可換にする射 q: $x \to \prod_a T(a,a)$ が存在する.

$$T(a, a)$$

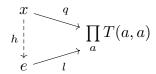
$$\uparrow p_a$$

$$\downarrow x \xrightarrow{q} \prod_a T(a, a)$$

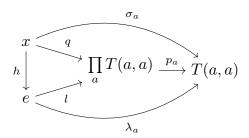
C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して図式



は可換であるから,積 $\prod_f T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$ の普遍性より $s\circ q=t\circ q$ が従う.故に,equalizer e の普遍性より次の図式を可換にする射 $h\colon x\to e$ が存在する.



したがって、任意の $a \in C$ に対して次の図式は可換である.



このような射 h の一意性について示そう.射 $h,h':x\to e$ が任意の $a\in C$ に対して次の 図式を可換にするとする.

$$\begin{array}{c|c}
x & \xrightarrow{\sigma_a} T(a, a) \\
h, h' & \uparrow p_a \\
e & \xrightarrow{I} T(a, a)
\end{array}$$

積 $\prod_a T(a,a)$ の普遍性より $l\circ h=l\circ h'$ が従い,equalizer e の普遍性より h=h' が従う.故に $\langle e,\lambda\rangle$ は函手 T のエンドである.

故に以下が成り立つ.

定理 17. C を小圏,D を完備な圏とする.このとき,函手 T: $C^{op} \times C \to D$ のエンド $\int_a T(a,a) \in D$ が存在する.

定理 18. 連続な函手はエンドを保つ. すなわち, $F: D \to X$ を連続函手とし, 函手 $T: C^{op} \times C \to D$ のエンド $\int_a T(a,a)$ が存在するとき,

$$F\left(\int_{a} T(a,a)\right) \cong \int_{a} F(T(a,a)).$$

系 19. 函手 $T \colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ のエンド $\int_a T(a,a)$ が存在するとき,

$$\operatorname{Hom}_D\left(d, \int_c T(c, c)\right) \cong \int_c \operatorname{Hom}_D(d, T(c, c)).$$

Dop で考えれば

$$\operatorname{Hom}_D\left(\int^c T(a,a),d\right) \cong \int_c \operatorname{Hom}_D(T(c,c),d)$$

もわかる.

エンドは極限で表すことができた. 逆に、極限はエンドで表すことができる.

命題 20. $T: C \to D$ を函手とし,T を函手 $C^{op} \times C \to D$ とみなしたものを T_0 とおく. このとき以下は同値である.

- (1) 函手 $T: C \to D$ の極限が存在する.
- (2) 函手 $T_0: C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ のエンドが存在する.

定義. C を圏、 $a \in C$, $x \in \mathbf{Set}$ とする.

(1) 函手 $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(x,\operatorname{Hom}_C(a,-))\colon C\to \mathbf{Set}$ が表現可能なとき,これを表現する対象 を copower object といい, $x\odot a$ で表す.

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \operatorname{Hom}_C(a, -)) \cong \operatorname{Hom}_C(x \odot a, -)$$

(2) 函手 $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \operatorname{Hom}_C(-, a)) \colon C^{\operatorname{op}} \to \mathbf{Set}$ が表現可能なとき,これを表現する対象を power object といい, $x \cap a$ で表す.

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \operatorname{Hom}_C(-, a)) \cong \operatorname{Hom}_C(-, x \pitchfork a)$$

C を圏, $a \in C$, $x \in \mathbf{Set}$ とする. $\coprod_{i \in x} a$, $\prod_{i \in x} a$ が存在するとき, $b \in C$ について自然に

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(x,\operatorname{Hom}_C(a,b)) \cong \prod_{i \in x} \operatorname{Hom}_C(a,b) \cong \operatorname{Hom}_C\left(\coprod_{i \in x} a,b\right)$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(x,\operatorname{Hom}_C(b,a)) \cong \prod_{i \in x} \operatorname{Hom}_C(b,a) \cong \operatorname{Hom}_C\left(b,\prod_{i \in x} a\right)$$

であるから

$$x \odot a \cong \coprod_{i \in x} a, \quad x \pitchfork a \cong \prod_{i \in x} a$$

が従う.

C を圏、 $a \in C$ とする. 任意の $x \in \mathbf{Set}$ に対して $x \odot a$, $x \cap a$ が存在するとき、随伴

$$- \odot a \dashv \operatorname{Hom}_{C}(a, -) \colon \mathbf{Set} \to C$$

 $- \pitchfork a \dashv \operatorname{Hom}_{C}(-, a) \colon \mathbf{Set} \to C^{\mathrm{op}}$

が成り立つ.

C を圏とする. 各対象 $x \in \mathbf{Set}$, $a \in C$ に対して $x \odot a$ が存在すると仮定する. **Set** の射 $k \colon x \to y$, C の射 $f \colon a \to b$ に対して,合成

$$\operatorname{Hom}_{C}(y \odot b, y \odot b) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(y, \operatorname{Hom}_{C}(b, y \odot b))$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Hom}_{C}(f, y \odot b) \circ - \circ k} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \operatorname{Hom}_{C}(a, y \odot b)) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{C}(x \odot a, y \odot b)$$

において $\mathrm{id}_{y\odot b}$ に対応している射を $k\odot f\colon x\odot a\to y\odot b$ とする.このようにして函手 $\odot\colon \mathbf{Set}\times C\to C$ が定まる.同様にして,各対象 $x\in \mathbf{Set}, a\in C$ に対して $x\pitchfork a$ が存在 するとき,これは函手 $\pitchfork\colon \mathbf{Set}^\mathrm{op}\times C\to C$ を定める.

定理 21. C, D, U を圏, $F: C \to D, E: C \to U$ を函手とし、任意の $c, c' \in C, d \in D$ に対して copower object $\operatorname{Hom}_D(F(c), d) \odot E(c')$ が存在すると仮定する.さらに、任意の $d \in D$ に対してコエンド $\int^{c \in C} \operatorname{Hom}_D(F(c), d) \odot E(c)$ が存在すると仮定する.このとき、F に沿った E の左 Kan 拡張 $F^{\dagger}E$ が存在する.

証明. $L=\int^{c\in C}\operatorname{Hom}_D(F(c),-)\odot E(c)$ とおく. 函手 $S\colon D\to U$ に対して自然に

$$\begin{split} \operatorname{Hom}_{U^D}(L,S) &\cong \int_{d \in D} \operatorname{Hom}_U(L(d),S(d)) \\ &= \int_{d \in D} \operatorname{Hom}_U \left(\int^{c \in C} \operatorname{Hom}_D(F(c),d) \odot E(c),S(d) \right) \\ &\cong \int_{d \in D} \left(\int_{c \in C} \operatorname{Hom}_U(\operatorname{Hom}_D(F(c),d) \odot E(c),S(d)) \right) \\ &\cong \int_{d \in D} \left(\int_{c \in C} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\operatorname{Hom}_D(F(c),d),\operatorname{Hom}_U(E(c),S(d))) \right) \\ &\cong \int_{c \in C} \left(\int_{d \in D} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\operatorname{Hom}_D(F(c),d),\operatorname{Hom}_U(E(c),S(d))) \right) \\ &\cong \int_{c \in C} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}^D}(\operatorname{Hom}_D(F(c),-),\operatorname{Hom}_U(E(c),S(-))) \\ &\cong \int_{c \in C} \operatorname{Hom}_U(E(c),S(F(c))) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{U^C}(E,S \circ F) \end{split}$$

であるから $L \cong F^{\dagger}E$ が従う.

双対的に次が成り立つ.

定理 22. C, D, U を圏, $F: C \to D$, $E: C \to U$ を函手とし,任意の $c, c' \in C$, $d \in D$ に対して power object $\operatorname{Hom}_D(d, F(c)) \pitchfork E(c')$ が存在すると仮定する. さらに,任意の $d \in D$ に対してエンド $\int_{c \in C} \operatorname{Hom}_D(d, F(c)) \pitchfork E(c)$ が存在すると仮定する. このとき,F に沿った E の右 Kan 拡張 $F^{\dagger}E$ が存在し, $F^{\dagger}E \cong \int_{c \in C} \operatorname{Hom}_D(-, F(c)) \pitchfork E(c)$ が成り立つ.

参考文献

- [1] S. Mac Lane 著, 三好博之, 高木理 訳, 『圏論の基礎』, 丸善出版, 2012.
- [2] E. Dubuc, R. Street, Dinatural transformations, In: Reports of the Midwest Category Seminar IV, Lecture Notes in Mathematics, vol. 137, pp. 126–137, Springer, Berlin, 1970.
- [3] alg-d, 壱大整域, URL:http://alg-d.com/math/.