

有限集合の定義と選択公理*

@hyutw[†]

2021 年 12 月 11 日

以下、ことわりがない限り選択公理を仮定せず、公理系 ZF で考えているものとする。
自然数 n とは、 n 未満の自然数全体の集合のことであるとする：

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \dots \quad n+1 = n \cup \{n\}, \dots$$

自然数全体の集合を \mathbf{N} と書く。集合 X から集合 Y への写像全体を Y^X と書く。ここでは自然数 $n \in \mathbf{N}$ と集合 X に対して、 X^n は n から X への写像全体を表している。 $|X|$ で集合 X の濃度を表す。集合の濃度を基数という。

定義. X, Y を集合とする。

- (1) $|X| \leq |Y| : \iff$ 単射 $X \rightarrow Y$ が存在する。
- (2) $|X| = |Y| : \iff$ 全単射 $X \rightarrow Y$ が存在する。
- (3) $|X| < |Y| : \iff |X| \leq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ 。
- (4) $|X| \leq^* |Y| : \iff X = \emptyset$ または全射 $Y \rightarrow X$ が存在する。
- (5) $|X| <^* |Y| : \iff |X| \leq^* |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ 。

定義. κ, λ を基数とし、 $\kappa = |X|, \lambda = |Y|, X \cap Y = \emptyset$ をみたす集合 X, Y を取る。

- (1) $\kappa + \lambda := |X \cup Y|$ 。
- (2) $\kappa \cdot \lambda := |X \times Y|$ 。
- (3) $\kappa^\lambda := |X^Y|$ 。

命題 1. 2 元集合 $\{0, 1\}$ の濃度を 2 と表す。任意の基数 κ に対して $2 \cdot \kappa = \kappa + \kappa$, $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa$ である。 □

* 本稿は Math Advent Calendar 2021 (<https://adventar.org/calendars/6146>) の 11 日目の記事です。

[†] Twitter: <https://twitter.com/hyutw>.

定義. 集合 X が整列可能であるとき, $|X|$ を整列可能基数という. 自然数全体の集合 \mathbf{N} は整列可能であり, この集合の濃度を \aleph_0 で表す.

以下の基数に関するいくつかの命題の証明は [1, 6] を参照のこと.

命題 2. 整列可能無限基数 \aleph に対して $\aleph^2 = \aleph$. □

命題 3. \aleph, \aleph' が 0 でない整列可能基数で, 少なくとも一方が無限基数であるとき,

$$\aleph + \aleph' = \aleph \cdot \aleph' = \max \{ \aleph, \aleph' \}. \quad \square$$

命題 4. 基数 κ, λ, μ と整列可能基数 \aleph が $\kappa \cdot \aleph \leq \lambda + \mu$ をみたすとき, $\kappa \leq \lambda$ または $\aleph \leq \mu$ となる. □

命題 5. 以下は同値である.

- (1) 選択公理.
- (2) 無限基数 κ, λ に対して $\kappa + \lambda = \kappa$ または $\kappa + \lambda = \lambda$. □

命題 6. 任意の集合 X に対して, $|\alpha| \not\leq |X|$ をみたす順序数 α が存在する. □

集合 X に対して, $|\alpha| \not\leq |X|$ をみたす最小の順序数を $\Gamma(X)$ とおく. この Γ を Hartogs 関数という. 明らかに $|\Gamma(X)| \not\leq |X|$ である. $\kappa = |X|$ のとき, $\kappa^* = |\Gamma(X)|$ と書く. κ^* は整列可能基数である.

定義. X を集合とする.

- (1) X が有限集合 $:\iff$ ある自然数 $n \in \mathbf{N}$ と全単射 $X \rightarrow n$ が存在する.
- (2) X が無限集合 $:\iff X$ が有限集合でない.

定義. X を集合とする.

- (1) X が Dedekind 無限 $:\iff |Y| = |X|$ となる真部分集合 $Y \subsetneq X$ が存在する.
- (2) X が Dedekind 有限 $:\iff X$ が Dedekind 無限でない.

定義. X を集合とする.

- (1) X が I-finite $:\iff$ 任意の空でない部分集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が極大元をもつ.
- (2) X が II-finite $:\iff$ 任意の空でない全順序部分集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が最大元をもつ.
- (3) X が III-finite $:\iff \mathcal{P}(X)$ が Dedekind 有限.
- (4) X が IV-finite $:\iff X$ が Dedekind 有限.

- (5) X が V-finite $:\iff |X| = 0$ または $2 \cdot |X| > |X|$.
(6) X が VI-finite $:\iff |X| = 0$ または $|X| = 1$ または $|X|^2 > |X|$.
(7) X が VII-finite $:\iff X$ は整列可能でないまたは $\aleph_0 \not\leq |X|$.

命題 7. 集合 X に対し, 以下は同値である.

- (1) X は Dedekind 無限である (X は IV-finite でない).
(2) 全射でない単射 $X \rightarrow X$ が存在する.
(3) $\aleph_0 \leq |X|$.
(4) 単射 $\mathbf{N} \rightarrow X$ が存在する.
(5) X は可算部分集合をもつ.
(6) $|X| = |X| + \aleph_0$.
(7) $|X| = |X| + 1$.
(8) 集合 Y に対して $|Y| \leq \aleph_0$ ならば $|X| + |Y| = |X|$.

証明. $1 \iff 2, 3 \iff 4, 4 \iff 5$ は明らか.

(2 \implies 4) $f: X \rightarrow X$ を全射でない単射とする. 全射でないから $x \in X \setminus f(X)$ が取れる. $g: \mathbf{N} \rightarrow X$ を

$$g(n) = \begin{cases} x & n = 0 \\ f(g(n-1)) & n \neq 0 \end{cases}$$

により定めると, これは単射である.

\therefore g が単射でないとする. このとき集合

$$A = \{ n \in \mathbf{N} \mid \exists m \in \mathbf{N} (g(n) = g(m) \wedge n \neq m) \}$$

は空でない. $n_0 = \min A$ とおく. g の定義より $n_0 \neq 0$ である. ある $m \in \mathbf{N}$ が存在して

$$g(n_0) = g(m), \quad n_0 \neq m$$

をみtas. g の定義と f が単射であることから

$$g(n_0 - 1) = g(m - 1)$$

が従うが, これは n_0 の最小性に反する.

(5 \implies 6) $Y \subseteq X$ を可算部分集合とする. $|Y| = |Y| + \aleph_0$ であるから

$$|X| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y| = |X \setminus Y| + |Y| + \aleph_0 = |X| + \aleph_0$$

が従う.

(6 \implies 7) $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ であるから

$$|X| = |X| + \aleph_0 = |X| + \aleph_0 + 1 = |X| + 1$$

が従う.

(7 \implies 1) X に属さない要素 p を一つ取る. 仮定より全単射 $f: X \cup \{p\} \rightarrow X$ が存在する. このとき $f(X) \subsetneq X$ かつ $|f(X)| = |X|$ である.

(6 \implies 8) Y を $|Y| \leq \aleph_0$ なる集合とする. 仮定より

$$|X| \leq |X| + |Y| \leq |X| + \aleph_0 = |X|$$

となり, $|X| + |Y| = |X|$ が従う.

(8 \implies 6) 明らか. □

命題 8. X を集合とする. 以下は同値である.

(1) $\aleph_0 \leq^* |X|$.

(2) $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 無限である (X は III-finite でない).

証明. (1 \implies 2) $f: X \rightarrow \mathbf{N}$ を全射とする. 写像 $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を $g(n) = f^{-1}(\{n\})$ によって定めると, これは単射である.

(2 \implies 1) $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を単射とする. X の分割であるような可算集合を構成し, X からその集合への全射が存在することを示す. そのための準備として, $\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合からなる列 $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ と, X の部分集合列 $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ を構成する. $\mathcal{A}_0 = f(\mathbf{N})$, $S_0 = \emptyset$ とおく. 明らかに \mathcal{A}_0 は可算集合である.

※ この証明の中で, $\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合 \mathcal{A} を全単射 $\mathbf{N} \rightarrow \mathcal{A}$ から誘導される順序により整列集合とみなす. この順序は $\mathcal{P}(X)$ の包含関係による順序と一致するとは限らないことに注意する.

\mathcal{A}_n を $\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合とする. \mathcal{B}_n を \mathcal{A}_n の要素の有限個の共通部分全体の集合とする. これは可算集合である.

※ 全単射 $\mathbf{N} \rightarrow \mathcal{B}_n$ は, \mathbf{N} の整列性と全単射 $\mathbf{N} \rightarrow \mathcal{A}_n$ から選択公理を使わずに構成できる.

\mathcal{B}_n において $\forall i \in \mathbf{N} (B_i \supsetneq B_{i+1})$ なる集合列 $(B_i)_{i \in \mathbf{N}}$ が存在するとき, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$, $S_{n+1} = S_n$ とおく. 次に, \mathcal{B}_n においてそのような集合列が存在しないときについて考える. このとき,

$$B \neq \emptyset, \quad \forall A \in \mathcal{A}_n (B \subseteq A \vee B \cap A = \emptyset)$$

なる $B \in \mathcal{B}_n$ が存在する.

\therefore)

$$\forall B \in \mathcal{B}_n (B \neq \emptyset \implies \exists A \in \mathcal{A}_n (B \not\subseteq A \wedge B \cap A \neq \emptyset))$$

と仮定する. 集合 $\{B \in \mathcal{B}_n \mid B \neq \emptyset\}$ は \mathcal{B}_n の空でない部分集合であり, この集合の最小元を B_0 とおく. 明らかに $\emptyset \neq B_0 \in \mathcal{B}_n$ である. $\emptyset \neq B_i \in \mathcal{B}_n$ が定義されているとき, B_{i+1} を次のように定義する. 仮定より, \mathcal{A}_n の部分集合

$$\{A \in \mathcal{A}_n \mid B_i \not\subseteq A \wedge B_i \cap A \neq \emptyset\}$$

は空でなく, この集合の最小元を A_i とする. $B_{i+1} = B_i \cap A_i$ とおくと, $\emptyset \neq B_{i+1} \in \mathcal{B}_n$ である. $B_i \not\subseteq A_i$ であるから $B_i \supsetneq B_{i+1}$ となる. $(B_i)_{i \in \mathbf{N}}$ は \mathcal{B}_n の集合列で $\forall i \in \mathbf{N} (B_i \supsetneq B_{i+1})$ をみたす. これは \mathcal{B}_n においてこのような集合列が存在しないことに反する.

集合

$$\{B \in \mathcal{B}_n \mid B \neq \emptyset \wedge \forall A \in \mathcal{A} (B \subseteq A \vee B \cap A = \emptyset)\}$$

は \mathcal{B}_n の空でない部分集合であり, この集合の最小元を S_{n+1} とおき,

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{A \setminus S_{n+1} \mid A \in \mathcal{A}_n\}$$

とおく. S_{n+1} は \mathcal{A}_n の要素の有限個の共通部分で空でなく, 任意の $A' \in \mathcal{A}_{n+1}$ に対して $S_{n+1} \cap A' = \emptyset$ であるから $\mathcal{A}_n \neq \mathcal{A}_{n+1}$ をみたす. \mathcal{A}_{n+1} は可算集合である.

\therefore) 写像 $g_n: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}$ を $A \mapsto A \setminus S_{n+1}$ により定める. \mathcal{A}_{n+1} の定義から g_n は全射であり, S_{n+1} の取り方から, 任意の $A' \in \mathcal{A}_{n+1}$ に対して

$$g_n^{-1}(\{A'\}) = \mathcal{A}_n \cap \{A', A' \cup S_{n+1}\}$$

である．もし \mathcal{A}_{n+1} が有限集合なら， $\mathcal{A}_n = \bigcup_{A' \in \mathcal{A}_{n+1}} g_n^{-1}(\{A'\})$ が有限集合となり矛盾する．したがって \mathcal{A}_{n+1} は無限集合である．写像

$$h_n: \mathcal{A}_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_n, \quad A' \mapsto \begin{cases} A' & A' \in \mathcal{A}_n \\ A' \cup S_{n+1} & A' \notin \mathcal{A}_n \end{cases}$$

が単射であるから \mathcal{A}_{n+1} は可算集合である．

以上により， $\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合からなる列 $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ と， X の部分集合列 $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ を構成できた．

$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1}$ をみたす $n \in \mathbf{N}$ が存在する場合を考える．このとき， \mathcal{A}_n の要素の有限個の共通部分全体の集合 B_n において $\forall i \in \mathbf{N} (B_i \supsetneq B_{i+1})$ なる集合列 $(B_i)_{i \in \mathbf{N}}$ が存在する． X の部分集合列 $(C_i)_{i \in \mathbf{N}}$ を

$$C_0 = X \setminus B_1, \quad C_{i+1} = B_{i+1} \setminus B_{i+2}$$

により定める．集合 $\mathcal{C} = \{C_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ は $\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合であり， X の分割である． $x \in X$ に対し， $x \in C$ なる $C \in \mathcal{C}$ を $[x]$ と書く．写像 $X \rightarrow \mathcal{C}$ を $x \mapsto [x]$ により定めると，これは全射である．次に，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $\mathcal{A}_n \neq \mathcal{A}_{n+1}$ となる場合について考える．このとき，集合

$$\mathcal{S} = \{S_{i+2} \mid i \in \mathbf{N}\} \cup \left\{ X \setminus \bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_{i+2} \right\}$$

は $\mathcal{P}(X)$ の可算部分集合であり， X の分割である． $x \in X$ に対し， $x \in S$ なる $S \in \mathcal{S}$ を $[x]$ と書く．写像 $X \rightarrow \mathcal{S}$ を $x \mapsto [x]$ により定めると，これは全射である． \square

命題 9. X を集合とする．以下は同値である．

- (1) 任意の空でない全順序部分集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ は最小元をもつ．
- (2) 任意の空でない全順序部分集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ は最大元をもつ (X は II-finite である)．
- (3) $\mathcal{P}(X)$ は全順序無限部分集合をもたない．

証明. (1 \iff 2) $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して $\mathcal{C}^c = \{C \in \mathcal{P}(X) \mid X \setminus C \in \mathcal{C}\}$ とおく．

$$C \text{ が } \mathcal{C} \text{ の最大元} \iff X \setminus C \text{ が } \mathcal{C}^c \text{ の最小元}$$

であることから従う．

(2 \implies 3) X が II-finite であるとし, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を全順序無限部分集合とする. X の部分集合列 $(C_n)_{n \in \mathbf{N}}$ を

$$C_0 = \max \mathcal{C}, \quad C_{n+1} = \max(\mathcal{C} \setminus \{C_i \mid i \leq n\})$$

により定めたとき, 集合 $\{X \setminus C_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ は $\mathcal{P}(X)$ の全順序部分集合だが最大元をもたない. これは X が II-finite であることに反している.

(3 \implies 1) 全順序有限集合は最小元をもつことからわかる. □

命題 10. X を集合とする. 以下は同値である.

- (1) X は有限集合である.
- (2) 任意の空でない部分集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ は極小元をもつ.
- (3) 任意の空でない部分集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ は極大元をもつ (X は I-finite である).
- (4) 部分集合族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が 2 条件
 - (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
 - (ii) $A \in \mathcal{F} \wedge x \in X \implies A \cup \{x\} \in \mathcal{F}$
をみたすとき, $X \in \mathcal{F}$ である.

証明. (1 \implies 2) $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ とする. X は有限集合故, その任意の部分集合は有限集合である. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ であるから集合

$$M := \{n \in \mathbf{N} \mid \exists A \in \mathcal{F} (|A| = n)\}$$

は空でない. $n_0 = \min M$ とおき, $|A| = n_0$ となる $A \in \mathcal{F}$ を取る. A は \mathcal{F} の極小元である.

(2 \iff 3) 明らか.

(3 \implies 4) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を

$$\emptyset \in \mathcal{F}, \quad A \in \mathcal{F} \wedge x \in X \implies A \cup \{x\} \in \mathcal{F}$$

をみたす部分集合族とする. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ 故, 仮定より \mathcal{F} は極大元 $A_0 \in \mathcal{F}$ をもつ. $x \in X$ とすると, \mathcal{F} の性質より $A_0 \cup \{x\} \in \mathcal{F}$ であり, A_0 の極大性より $A_0 \cup \{x\} = A_0$ が従い, $x \in A_0$ となる. 故に $A_0 = X$ となる.

(4 \implies 1) X の有限部分集合全体の集合 $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ について考える. これは

$$\emptyset \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(X), \quad A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) \wedge x \in X \implies A \cup \{x\} \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$$

をみたす部分集合族であるから $X \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ となる. □

命題 11. Dedekind 無限集合を部分集合としてもつ集合は Dedekind 無限である. (言い換えると, Dedekind 有限集合の部分集合は Dedekind 有限である.)

証明. X を集合, Y を X の Dedekind 無限部分集合とする. Y は Dedekind 無限であるから, Y の真部分集合 W であって $|Y| = |W|$ となるものが存在する. $W \subsetneq Y$ であるから $x_0 \in Y \setminus W$ が取れる. $x_0 \notin (X \setminus Y) \cup W$ であるから $(X \setminus Y) \cup W$ は X の真部分集合である. f を全単射 $W \rightarrow Y$ とする. 写像 $g: (X \setminus Y) \cup W \rightarrow X$ を

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in X \setminus Y \\ f(x) & x \in W \end{cases}$$

により定めるとこれは全単射である. したがって X は Dedekind 無限である. □

命題 12. Dedekind 無限集合は無限集合である.

証明. X を Dedekind 無限集合とすると, 単射 $f: \mathbf{N} \rightarrow X$ が存在する. このとき, 集合

$$\mathcal{A} = \{ \{ f(m) \mid m \geq n \} \mid n \in \mathbf{N} \}$$

は $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ をみたすが, 極小元をもたない. 故に X は無限集合である. □

命題 13. 整列可能な無限集合は Dedekind 無限である.

証明. X を整列可能な無限集合とする. 写像 $f: \mathbf{N} \rightarrow X$ を

$$f(0) = \min X, \quad f(n+1) = \min(X \setminus \{ f(i) \mid i \leq n \})$$

により定めると, これは単射である. □

系 14. 選択公理 \implies 「無限集合は Dedekind 無限である」.□

以下のようにすれば可算選択公理でよいことがわかる.

命題 15. 可算選択公理 \implies 「無限集合は Dedekind 無限である」.

証明. X を無限集合とする. $n \in \mathbf{N}$ に対して $X_n = \{ f \in X^{n+1} \mid f \text{ は単射} \}$ とおく. X は無限集合だから $X_n \neq \emptyset$ である. 可算選択公理により選択関数 $\phi: \mathbf{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$ を得る. $n \in \mathbf{N}, k \in n+1$ に対して $x_{n,k} = (\phi(n))(k)$ とおく. 集合

$$Y = \{ x_{n,k} \mid n \in \mathbf{N}, k \in n+1 \}$$

は無限集合である.

\therefore) Y が有限集合であると仮定すると, ある $n \in \mathbf{N}$ と全単射 $f: Y \rightarrow n$ が存在する. Y の定義より, 写像 $\phi(n): n+1 \rightarrow X$ の終域を Y に制限することができる. 合成 $f \circ \phi(n): n+1 \rightarrow n$ は単射であるが, これは単射 $n+1 \rightarrow n$ が存在しないことに反する.

写像 $s, t: Y \rightarrow \mathbf{N}$ を次のように定める: $x \in Y$ に対して

$$s(x) = \min \{ n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in n+1 (x = x_{n,k}) \}, \quad x = x_{s(x), t(x)}.$$

このとき写像

$$h: Y \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}, \quad x \mapsto \langle s(x), t(x) \rangle$$

は単射であるから Y は可算集合である. □

命題 16. X を集合とする. 以下は同値である.

- (1) X は有限集合である.
- (2) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ は Dedekind 有限である.

証明. (1 \implies 2) X を有限集合とすると, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ は有限集合である. 命題 12 より $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ は Dedekind 有限である.

(2 \implies 1) X を無限集合とする. 写像 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ を

$$f(n) = \{ A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| = |n| \}$$

により定めると, これは単射である. □

定義. 命題「任意の集合 X に対して, X が J -finite ならば X は K -finite」を $P(J, K)$ と書く.

命題 17. $J \leq K$ ならば $P(J, K)$ である.

証明. (I-finite \implies II-finite) 明らか.

(II-finite \implies III-finite) X が III-finite でないとする. 命題 8 より全射 $f: X \rightarrow \mathbf{N}$ が存在する. 自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対して X の部分集合 A_n を $A_n = \bigcup_{i \in n+1} f^{-1}(\{i\})$ と定めると, 集合 $\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ は $\mathcal{P}(X)$ の全順序部分集合で最大元をもたない. したがって X は II-finite でない.

(III-finite \implies IV-finite) X が IV-finite でないとする, 単射 $f: \mathbf{N} \rightarrow X$ が存在す

る. 写像 $g: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を $x \mapsto \{x\}$ により定めるとこれは単射である. したがって単射 $g \circ f: \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ が存在する. 故に X は III-finite でない.

(IV-finite \implies V-finite) X が V-finite でないとする. $|X| \neq 0$ かつ $2 \cdot |X| = |X|$ 故 X は Dedekind 無限である. すなわち, X は IV-finite でない.

(V-finite \implies VI-finite) X を V-finite とし, $|X| \neq 0$, $|X| \neq 1$ とする. このとき $|X| < 2 \cdot |X| \leq |X|^2$ であるから X は VI-finite である.

(VI-finite \implies VII-finite) X を VII-finite でない集合とすると, X は整列可能かつ $\aleph_0 \leq |X|$ である. 明らかに $|X| \neq 0$ かつ $|X| \neq 1$ である. X は整列可能な無限集合であるから命題 2 より $|X|^2 = |X|$ となる. 故に X は VI-finite でない. \square

系 18. $J_1 \leq J_0$ かつ $K_0 \leq K_1$ ならば「 $P(J_0, K_0) \implies P(J_1, K_1)$ 」である. \square

定理 19. 選択公理 $\implies P(\text{VII}, \text{I})$. \square

したがって, 選択公理を仮定したとき I-finite から VII-finite までの定義は同値である.

定理 20. 以下は同値である.

- (1) 選択公理.
- (2) $P(\text{VII}, \text{VI})$: $|X|^2 = |X|$ ならば X は整列可能である.

証明. (1 \implies 2) 明らか.

(2 \implies 1) X を無限集合とする. $|X^{\mathbf{N}}| > 1$ かつ $|X^{\mathbf{N}}|^2 = |X^{\mathbf{N}}|$ である.

$\therefore |X^{\mathbf{N}}| > 1$ であることは明らか. 写像 $f: \mathbf{N} \rightarrow X$ に対して写像 f_0, f_1 を

$$\begin{aligned} f_0: \mathbf{N} &\rightarrow X, & n &\mapsto f(2n), \\ f_1: \mathbf{N} &\rightarrow X, & n &\mapsto f(2n+1) \end{aligned}$$

により定めると, 写像

$$g: X^{\mathbf{N}} \rightarrow X^{\mathbf{N}} \times X^{\mathbf{N}}, \quad f \mapsto \langle f_0, f_1 \rangle$$

は全単射である.

故に $X^{\mathbf{N}}$ は VI-finite でない. 仮定より $X^{\mathbf{N}}$ は VII-finite でないから $X^{\mathbf{N}}$ は整列可能かつ $\aleph_0 \leq |X^{\mathbf{N}}|$ である. 写像 g を

$$g: X \rightarrow X^{\mathbf{N}}, \quad x \mapsto (\mathbf{N} \rightarrow X; n \mapsto x)$$

により定めるとこれは単射であるから X は整列可能である。 \square

系 21. 次の命題は (ZF 上) 同値である。

- (1) 選択公理
- (2) $P(\text{VII}, \text{I})$: 無限集合は整列可能である。
- (3) $P(\text{VII}, \text{II})$: 集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ が最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつならば X は整列可能である。
- (4) $P(\text{VII}, \text{III})$: $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限ならば X は整列可能である。
- (5) $P(\text{VII}, \text{IV})$: Dedekind 無限集合は整列可能である。
- (6) $P(\text{VII}, \text{V})$: $2 \cdot |X| = |X|$ ならば X は整列可能である。 \square

定理 22. 以下は同値である。

- (1) 選択公理。
- (2) $P(\text{VI}, \text{V})$: 無限集合 X に対して, $2 \cdot |X| = |X|$ ならば $|X|^2 = |X|$ 。

証明. (1 \implies 2) 明らか。

(2 \implies 1) κ を無限基数, $\lambda = \kappa \cdot \aleph_0 + (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ とおく。 \aleph_0 と $(\kappa \cdot \aleph_0)^*$ は整列可能無限基数であるから

$$2 \cdot (\kappa \cdot \aleph_0) = \kappa \cdot \aleph_0, \quad 2 \cdot (\kappa \cdot \aleph_0)^* = (\kappa \cdot \aleph_0)^*$$

であり, $2 \cdot \lambda = \lambda$ となる。故に仮定より $\lambda^2 = \lambda$ となる。したがって,

$$\begin{aligned} \kappa \cdot \aleph_0 + (\kappa \cdot \aleph_0)^* &= (\kappa \cdot \aleph_0 + (\kappa \cdot \aleph_0)^*)^2 \\ &= (\kappa \cdot \aleph_0)^2 + 2 \cdot (\kappa \cdot \aleph_0) \cdot (\kappa \cdot \aleph_0)^* + ((\kappa \cdot \aleph_0)^*)^2 \\ &\geq (\kappa \cdot \aleph_0) \cdot (\kappa \cdot \aleph_0)^*. \end{aligned}$$

故に命題 4 より $\kappa \cdot \aleph_0 \leq (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ または $(\kappa \cdot \aleph_0)^* \leq \kappa \cdot \aleph_0$ となる。 $(\kappa \cdot \aleph_0)^* \not\leq \kappa \cdot \aleph_0$ 故 $\kappa \cdot \aleph_0 \leq (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ が従い, $\kappa \leq \kappa \cdot \aleph_0$ 故 $\kappa \leq (\kappa \cdot \aleph_0)^*$ が従う。故に κ は整列可能基数である。 \square

系 23. 以下は同値である。

- (1) 選択公理。
- (2) $P(\text{VI}, \text{I})$: 無限集合 X に対して $|X|^2 = |X|$ 。
- (3) $P(\text{VI}, \text{II})$: 集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ が最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつならば $|X|^2 = |X|$ 。

(4) $P(\text{VI}, \text{III})$: $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限ならば $|X|^2 = |X|$.

(5) $P(\text{VI}, \text{IV})$: X が Dedekind 無限ならば $|X|^2 = |X|$. □

定義. X を集合とする.

(1) X が Ia-finite $:\iff X$ は 2 つの無限集合の非交和でない.

(2) X が D-finite $:\iff |X| \leq 1$ または, ある A, B が存在して $|A| < |X|$ かつ $|B| < |X|$ かつ $X = A \cup B$.

命題 24. $P(\text{I}, \text{Ia})$: 2 つの無限集合の非交和は無限集合である.

証明. 明らか. □

命題 25. $P(\text{Ia}, \text{II})$: 集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ が最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつならば, X は 2 つの無限集合の非交和である.

証明. X を II-finite でない集合とすると, $\mathcal{P}(X)$ は最大元をもたない空でない全順序部分集合 \mathcal{C} をもつ. まず, 無限集合 $Y \in \mathcal{C}$ が存在する場合について考える. このとき, 集合 $A = (\bigcup \mathcal{C}) \setminus Y$ は無限集合である.

\therefore) A が有限集合であると仮定する. $A = \emptyset$ の場合, Y が \mathcal{C} の最大元となり, \mathcal{C} が最大元をもたないことに反する. $A \neq \emptyset$ の場合について考える. $x \in A$ に対して, 集合 $\mathcal{A}_x = \{C \in \mathcal{C} \mid x \in C\}$ は空でないから選択関数 $f: A \rightarrow \bigcup_{x \in A} \mathcal{A}_x$ が存在する. 集合 $B = \{f(x) \mid x \in A\}$ は $\mathcal{P}(X)$ の空でない全順序有限部分集合であるから, これは最大元 B をもつ. ある $x_0 \in A$ が存在して $x_0 \in f(x_0) = B$ であり, A の定義から $x_0 \notin Y$ となる. 故に $B \not\subseteq Y$ であり, \mathcal{C} が全順序であることから $Y \subseteq B$ が従う. また, B の最大性から $A \subseteq B$ である.

$$B \subseteq \bigcup \mathcal{C} = Y \cup A \subseteq B$$

故 $B = \bigcup \mathcal{C}$ が従い, B が \mathcal{C} の最大元となるが, これは \mathcal{C} が最大元をもたないことに反する.

$A \subseteq X \setminus Y$ であるから $X \setminus Y$ は無限集合である. $X = (X \setminus Y) \cup Y$ だから X は Ia-finite でない. 次に, 任意の $Y \in \mathcal{C}$ が有限集合の場合について考える. $n \in \mathbb{N}$ に対して集合 $\mathcal{A}_n = \{C \in \mathcal{C} \mid |n| = |C|\}$ は空集合または一点集合である.

$\therefore \mathcal{A}_n \neq \emptyset$ とする. $A, B \in \mathcal{A}_n$ を取る. これらは有限集合であるから Dedekind 有限である. \mathcal{C} は全順序であるから $A \subseteq B$ または $B \subseteq A$ である. $A \subseteq B$ の場合について考える. $A \subsetneq B$ と仮定すると, A は B の真部分集合で $|A| = |B|$ をみたす. 故に B は Dedekind 無限集合となるが, これは B が Dedekind 有限であることに反する. したがって $A = B$ となる. 同様にして $B \subseteq A$ ならば $A = B$ が従う.

写像 $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{N}$ を $C \mapsto |C|$ により定めると, これは単射である. 今, 任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して

$$A \subseteq B \iff |A| \leq |B|$$

であるから \mathcal{C} は包含関係による順序で整列集合となる. X の部分集合列 $(C_i)_{i \in \mathbf{N}}$ を

$$C_0 = \min \mathcal{C}, \quad C_{i+1} = \min(\mathcal{C} \setminus \{C_j \mid j \leq i\})$$

により定めると, これは $\forall i \in \mathbf{N} (C_i \subsetneq C_{i+1})$ をみたす. X の部分集合列 $(D_i)_{i \in \mathbf{N}}$ を

$$D_0 = C_0, \quad D_{i+1} = C_{i+1} \setminus C_i$$

により定め, 集合 E, F を

$$E = \left(X \setminus \bigcup_{i \in \mathbf{N}} D_i \right) \cup \bigcup_{i \in \mathbf{N}} D_{2i}, \quad F = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} D_{2i+1}$$

により定めると, E, F は $E \cap F = \emptyset$ なる無限集合であり, $X = E \cup F$ である. 故に X は Ia-finite でない. \square

系 26. 以下は同値である.

- (1) 選択公理.
- (2) $P(\text{VII}, \text{Ia})$: 2 つの無限集合の非交和は整列可能である.
- (3) $P(\text{VI}, \text{Ia})$: X が 2 つの無限集合の非交和ならば $|X|^2 = |X|$. \square

命題 27. $P(\text{IV}, \text{D})$: $|X| > 1$ なる Dedekind 有限集合 X に対して,

$$X = A \cup B, \quad |A| < |X|, \quad |B| < |X|$$

をみたす集合 A, B が存在する.

証明. X を $|X| > 1$ なる Dedekind 有限集合とする. $x \in X$ を一つ取る. X は Dedekind 有限であるから $|X \setminus \{x\}| < |X|$ である. 故に

$$X = (X \setminus \{x\}) \cup \{x\}, \quad |X \setminus \{x\}| < |X|, \quad |\{x\}| = 1 < |X|$$

と書けるから、 X は D-finite である。 \square

命題 28. $P(D, VII)$: $\aleph_0 \leq |X|$ をみたす整列可能な集合 X に対して、 $X = A \cup B$ ならば $|A| = |X|$ または $|B| = |X|$.

証明. X を VII-finite でない集合とすると、 X は整列可能かつ $\aleph_0 \leq |X|$ である。明らかに $|X| \not\leq 1$ である。 A, B を集合とし、 $X = A \cup B$ をみたしているとする。 X が整列可能であるから A, B も整列可能である。 A, B の少なくとも一方が空集合なら、 $|A| = |X|$ または $|B| = |X|$ である。 A, B がともに空でないとする。 A, B がともに有限集合なら $X = A \cup B$ も有限集合であり $\aleph_0 \leq |X|$ に反するから、 A, B の少なくとも一方は無限集合である。 $|A| \leq |B|$ とする。 命題 3 より

$$|X| = |A \cup B| \leq |A| + |B| = \max\{|A|, |B|\} = |B| \leq |X|$$

であるから $|B| = |X|$ が従う。 同様にして $|B| \leq |A|$ ならば $|A| = |X|$ が従う。 故に X は D-finite でない。 \square

定理 29. 以下は同値である。

- (1) 選択公理.
- (2) $P(D, I)$: 無限集合 X に対して、 $X = A \cup B$ ならば $|X| = |A|$ または $|X| = |B|$.

証明. (1 \implies 2) 系 21, 命題 28.

(2 \implies 1) 無限基数 κ, λ に対して $\kappa + \lambda = \kappa$ または $\kappa + \lambda = \lambda$ が成り立つことを示す (命題 5). $\kappa = |X|, \lambda = |Y|, X \cap Y = \emptyset$ をみたす無限集合 X, Y に対し $X \cup Y$ は無限集合であるから仮定より $|X \cup Y| = |X|$ または $|X \cup Y| = |Y|$ が従う。 \square

命題 30. $P(V, IV) \implies P(IV, I)$

証明. X を無限集合とする。 $|X| + \aleph_0 \geq \aleph_0$ であるから仮定より

$$|X| + \aleph_0 = 2 \cdot (|X| + \aleph_0) = (|X| + \aleph_0) + (|X| + \aleph_0) = 2 \cdot |X| + \aleph_0$$

となる。 f を全単射

$$(X \times 1) \cup (\mathbf{N} \times \{1\}) \rightarrow (X \times 2) \cup (\mathbf{N} \times \{2\})$$

とし、

$$\begin{aligned} A_0 &= f(X \times 1) \cap (X \times \{0\}), & A_1 &= f(X \times 1) \cap (X \times \{1\}), \\ B_0 &= f(\mathbf{N} \times \{1\}) \cap (X \times \{0\}), & B_1 &= f(\mathbf{N} \times \{1\}) \cap (X \times \{1\}) \end{aligned}$$

とおく. B_0 が無限集合なら, これは可算集合 $f(\mathbf{N} \times \{1\})$ の無限部分集合であるから $|B_0| = \aleph_0$ となり, $|X| \geq \aleph_0$ が従う. B_1 が無限集合の場合も同様にして $|X| \geq \aleph_0$ が従う. B_0 と B_1 が共に有限集合であるとする. $|A_0| + |B_0| = |X|$ であるから A_0 は無限集合であり, 同様にして A_1 が無限集合であることがわかる.

$$|X| + 1 = (|A_0| + |B_0|) + 1 \leq |A_0| + |A_1| \leq |X| \leq |X| + 1$$

であるから $|X| + 1 = |X|$ が従う. □

命題 31. 以下は同値である.

- (1) $P(V, I)$: 無限集合 X に対して $2 \cdot |X| = |X|$.
- (2) $P(V, Ia)$: X が 2 つの無限集合の非交和ならば $2 \cdot |X| = |X|$.
- (3) $P(V, II)$: 集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ が最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつならば $2 \cdot |X| = |X|$.
- (4) $P(V, III)$: $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限ならば $2 \cdot |X| = |X|$.
- (5) $P(V, IV)$: X が Dedekind 無限ならば $2 \cdot |X| = |X|$.
- (6) 無限集合 X に対して $\aleph_0 \cdot |X| = |X|$.
- (7) 無限集合 X に対してある集合 Y が存在して $\aleph_0 \cdot |Y| = |X|$.
- (8) 無限集合 X と集合 Y に対して $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| + |Y| = |X|$.

証明. $1 \implies 2, 2 \implies 3, 3 \implies 4, 4 \implies 5$ は明らか.

$(5 \implies 1)$ 命題 30.

$(1 \implies 6)$ X を無限集合とする. 仮定より $2 \cdot |X| = |X|$ であるから単射 $f, g: X \rightarrow X$ で

$$f(X) \cup g(X) = X, \quad f(X) \cap g(X) = \emptyset$$

をみたすものが存在する. $n \in \mathbf{N}$ に対して写像 $f^{(n)}: X \rightarrow X$ を

$$f^{(0)} = \text{id}_X, \quad f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}$$

により定め, 写像 $h: \mathbf{N} \times X \rightarrow X$ を $\langle n, x \rangle \mapsto f^{(n)}(g(x))$ により定めると, h は単射である.

$\therefore f^{(n)}(g(x)) = f^{(n')}(g(x'))$ とする. $n < n'$ ならば, f が単射であることから $g(x) = f^{(n'-n)}(g(x'))$ が従うが, これは $f(X) \cap g(X) = \emptyset$ に反する. $n' < n$ の場合も同様に矛盾する. したがって $n = n'$ となる. f, g は単射であるから $x = x'$ が従う.

故に $\aleph_0 \cdot |X| \leq |X|$ となる. $|X| \leq \aleph_0 \cdot |X|$ であるから $\aleph_0 \cdot |X| = |X|$ が従う.

(6 \implies 7) 明らか.

(7 \implies 1) X を無限集合, Y を集合, f を全単射 $\mathbf{N} \times Y \rightarrow X$ とする. 写像 $g: \mathbf{N} \times Y \rightarrow 2 \times X$ を

$$g(\langle 2n, y \rangle) = \langle 0, f(\langle n, y \rangle) \rangle, \quad g(\langle 2n+1, y \rangle) = \langle 1, f(\langle n, y \rangle) \rangle$$

により定めるとこれは全単射であるから $|X| = \aleph_0 \cdot |Y| = 2 \cdot |X|$ が従う.

(1 \implies 8) X を無限集合, Y を集合, $|Y| \leq |X|$ とする. 仮定より

$$|X| \leq |X| + |Y| \leq |X| + |X| = 2 \cdot |X| = |X|$$

となり, $|X| + |Y| = |X|$ が従う.

(8 \implies 1) 明らか. □

命題 32. 以下は同値である.

- (1) $P(\text{IV}, \text{I})$: Dedekind 有限集合は有限集合である.
- (2) $P(\text{IV}, \text{Ia})$: Dedekind 有限集合は 2 つの無限集合の非交和でない.
- (3) $P(\text{IV}, \text{II})$: Dedekind 有限集合 X について, 任意の全順序部分 $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ は最大元をもつ.
- (4) $P(\text{IV}, \text{III})$: Dedekind 有限集合の冪集合は Dedekind 有限集合である.
- (5) Dedekind 有限集合からなる Dedekind 有限集合 X の和集合 $\bigcup X$ は Dedekind 有限集合である.
- (6) Dedekind 有限集合の像は Dedekind 有限である.
- (7) 任意の集合 X に対して, $\aleph_0 \leq^* |X|$ ならば $\aleph_0 \leq |X|$.
- (8) Dedekind 無限集合 X の和集合 $\bigcup X$ は Dedekind 無限である.
- (9) 非可算集合 X と可算集合 Y に対して $|X \cup Y| = |X|$.
- (10) 非可算集合 X と可算集合 Y に対して $|X \setminus Y| = |X|$.
- (11) $|X| > \aleph_0$ かつ $|Y| = \aleph_0$ ならば $|X \setminus Y| > \aleph_0$.
- (12) 任意の集合 X に対して $\aleph_0 \leq |X|$ または $|X| \leq \aleph_0$ である.
- (13) Dedekind 有限集合 X と Dedekind 無限集合 Y に対して $|X| \leq |Y|$.
- (14) 任意の無限集合 X に対して, 選択関数 $\mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow Y$ が存在するような無限部分集合 $Y \subseteq X$ が存在する.
- (15) 無限集合は可算部分集合をもつ.

証明. 1 \implies 2, 2 \implies 3, 3 \implies 4 は明らか.

(4 \implies 1) X を Dedekind 有限集合とする. 仮定より $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 有限であり, 再び仮定より $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ は Dedekind 有限である. 命題 16 より X は有限集合である.

(1 \implies 5) 明らか.

(5 \implies 4) X を Dedekind 有限集合とし, $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限であるとする. 単射 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ で, 任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して「 $m \neq n$ ならば $f(m) \cap f(n) = \emptyset$ 」をみたすものが存在する.

\therefore) $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限であるから命題 8 より全射 $g: X \rightarrow \mathbf{N}$ が存在する. 写像

$$h: \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad n \mapsto g^{-1}(\{n\})$$

は任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して「 $m \neq n$ ならば $h(m) \cap h(n) = \emptyset$ 」をみたす単射である.

集合

$$W = \{ \{ \{n\}, \{n, x\} \} \mid n \in \mathbf{N} \wedge x \in f(n) \}$$

について考える. 集合 $\{n\}, \{n, x\}, \{ \{n\}, \{n, x\} \}$ は有限集合であるから Dedekind 有限である. 写像

$$p: W \rightarrow X, \quad \{ \{n\}, \{n, x\} \} \mapsto x$$

は単射であり, X が Dedekind 有限であるから W は Dedekind 有限である. 仮定より $\bigcup W$ は Dedekind 有限であり, 再び仮定より $\bigcup(\bigcup W)$ は Dedekind 有限である. しかし W の定義より $\mathbf{N} \subseteq \bigcup(\bigcup W)$ であるから $\bigcup(\bigcup W)$ は Dedekind 無限となり矛盾する.

(4 \implies 6) X を Dedekind 有限集合, $f: X \rightarrow Y$ を全射とする. 写像

$$g: Y \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad y \mapsto f^{-1}(\{y\})$$

は単射である. 仮定より $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 有限であるから Y は Dedekind 有限である.

(6 \implies 7) $f: X \rightarrow \mathbf{N}$ を全射とする. \mathbf{N} は Dedekind 無限集合であるから X は Dedekind 無限であり, 単射 $\mathbf{N} \rightarrow X$ が存在する.

(7 \implies 4) $\mathcal{P}(X)$ が Dedekind 無限であるとする. 命題 8 より $\aleph_0 \leq^* |X|$ が従い, 仮定より $\aleph_0 \leq |X|$ となる. 故に X は Dedekind 無限である.

(1 \implies 8) 明らか.

(8 \implies 7) X を集合, $f: X \rightarrow \mathbf{N}$ を全射とする. 写像

$$g: \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad n \mapsto f^{-1}(\{n\})$$

は単射で, \mathbf{N} が Dedekind 無限であるから $g(\mathbf{N})$ は Dedekind 無限である. 仮定より $X = \bigcup g(\mathbf{N})$ は Dedekind 無限である. したがって単射 $\mathbf{N} \rightarrow X$ が存在する.

(1 \implies 9) X を非可算集合, Y を可算集合とする. 仮定より X は Dedekind 無限集合である. $|Y \setminus X| \leq \aleph_0$ であるから

$$|X \cup Y| = |X| + |Y \setminus X| = |X|$$

が従う.

(9 \implies 10) X を非可算集合, Y を可算集合とする. $X \setminus Y$ は非可算集合であるから

$$|X| = |X \cup Y| = |(X \setminus Y) \cup Y| = |X \setminus Y|$$

が従う.

(10 \implies 11) 明らか.

(11 \implies 1) X を無限集合とする. X が可算集合なら, これは Dedekind 無限である. X を非可算集合とする. このとき $|(X \times 1) \cup (\mathbf{N} \times \{1\})| > \aleph_0$ であるから仮定より

$$|X| = |((X \times 1) \cup (\mathbf{N} \times \{1\})) \setminus (\mathbf{N} \times \{1\})| > \aleph_0$$

となり, X が Dedekind 無限であることがわかる.

(1 \iff 12) 明らか.

(1 \implies 13) 明らか.

(13 \implies 1) X を Dedekind 有限集合とする. \mathbf{N} は Dedekind 無限集合であるから, 仮定より $|X| \leq \aleph_0$ となる. したがって, X が無限集合であると仮定すると X は可算集合, すなわち Dedekind 無限となり矛盾する.

(1 \implies 14) X を無限集合とする. 仮定より X は Dedekind 無限であるから可算部分集合 Y をもつ. Y は選択関数 $\mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow Y$ をもつ.

(14 \implies 1) X を無限集合とし, Y を X の無限部分集合で選択関数 $f: \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow Y$ をもつものとする. 写像 $g: \mathbf{N} \rightarrow Y$ を

$$g(n) = \begin{cases} f(Y) & n = 0 \\ f(Y \setminus \{g(i) \mid i \in n\}) & n \neq 0 \end{cases}$$

によって定めると, これは単射である.

(1 \iff 15) 明らか. □

命題 33. 以下は同値である.

(1) $P(\text{III}, \text{I})$: 無限集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 無限である.

(2) $P(\text{III}, \text{Ia})$: X が 2 つの無限集合の非交和ならば $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 無限である.

(3) 無限集合 X に対して $\aleph_0 \leq^* |X|$.

証明. (1 \implies 2) 明らか.

(2 \implies 1) X を無限集合とする. 仮定より $\mathcal{P}((X \times 1) \cup (X \times \{1\}))$ は Dedekind 無限であり, 単射 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{P}((X \times 1) \cup (X \times \{1\}))$ が存在する.

$$\mathcal{A}_0 = \{ (X \times 1) \cap A \mid A \in f(\mathbf{N}) \}, \quad \mathcal{A}_1 = \{ (X \times \{1\}) \cap A \mid A \in f(\mathbf{N}) \}$$

とおく. $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ の少なくとも一方は無限集合である.

$\therefore \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ がともに有限集合であると仮定する. このとき

$$\mathcal{A} = \{ A_0 \cup A_1 \mid A_0 \in \mathcal{A}_0 \wedge A_1 \in \mathcal{A}_1 \}$$

は有限集合であり, $f(\mathbf{N}) \subseteq \mathcal{A}$ 故 $f(\mathbf{N})$ が有限集合となるが, これは $f(\mathbf{N})$ が可算集合であることに反する.

\mathcal{A}_0 が無限集合であるとする. 写像

$$g_0: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbf{N}, \quad A \mapsto \min \{ n \in \mathbf{N} \mid A = f(n) \cap (X \times 1) \}$$

は単射であるから \mathcal{A}_0 は可算集合である. したがって $\mathcal{P}(X)$ は Dedekind 無限である.

(1 \iff 3) 命題 8. □

命題 34. 以下は同値である.

- (1) $P(\text{II}, \text{I})$: 無限集合 X に対して $\mathcal{P}(X)$ は最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつ.
- (2) $P(\text{II}, \text{Ia})$: X が 2 つの無限集合の非交和ならば $\mathcal{P}(X)$ は最大元をもたない空でない全順序部分集合をもつ.

証明. (1 \implies 2) 明らか.

(2 \implies 1) X を無限集合とする. $\mathcal{P}(X)$ が全順序無限部分集合をもつことを示す (命題 9). 仮定より, $\mathcal{P}((X \times 1) \cup (X \times \{1\}))$ は全順序無限部分集合 \mathcal{C} をもつ.

$$\mathcal{C}_0 = \{ (X \times 1) \cap C \mid C \in \mathcal{C} \}, \quad \mathcal{C}_1 = \{ (X \times \{1\}) \cap C \mid C \in \mathcal{C} \}$$

とおく. $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ は全順序である.

\therefore) \mathcal{C}_0 が全順序であることを示す. $C_0, C'_0 \in \mathcal{C}_0$ とする. ある $C_1, C'_1 \in \mathcal{C}_1$ が存在し, $C_0 \cup C_1, C'_0 \cup C'_1 \in \mathcal{C}$ をみたす. \mathcal{C} は全順序であるから $C_0 \cup C_1 \subseteq C'_0 \cup C'_1$ または $C'_0 \cup C'_1 \subseteq C_0 \cup C_1$ である. $C_0 \cup C_1 \subseteq C'_0 \cup C'_1$ の場合, $C_0 \not\subseteq C'_0$ と仮定すると $(X \times 1) \cap (X \times \{1\}) = \emptyset$ に反するから $C_0 \subseteq C'_0$ である. 同様にして $C'_0 \cup C'_1 \subseteq C_0 \cup C_1$ ならば $C'_0 \subseteq C_0$ が従う. 故に \mathcal{C}_0 は全順序である. 同様にして \mathcal{C}_1 が全順序であることもわかる.

$\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ の少なくとも一方は無限集合である. 故に $\mathcal{P}(X)$ は全順序無限部分集合をもつ. \square

参考文献

- [1] 田中 尚夫, 『公理的集合論』, 培風館, 1982.
- [2] Horst Herrlich, *Axiom of Choice*, Springer, 2006.
- [3] Paul Howard and Jean E. Rubin, *Consequences of the Axiom of Choice*, American Mathematical Society, 1998.
- [4] J. D. Halpern and Paul E. Howard, *Cardinals m such that $2m = m$* , Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 487–490.
- [5] Paul E. Howard and Mary F. Yorke, *Definitions of Finite*, Fundamenta Mathematicae 133 (1989), 169–177.
- [6] alg-d, 壱大整域, URL:<http://alg-d.com/math/>.
- [7] Andrés E. Caicedo (<https://math.stackexchange.com/users/462/andr%c3%a9s-e-caicedo>), Given an injection $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$, how can we construct a surjection $X \rightarrow \mathbb{N}$?, Mathematics Stack Exchange, URL:<https://math.stackexchange.com/q/139713> (version: 2012-05-02).