题目 5.10

设 $P(t) = P_{00}(t)$ 是马尔可夫过程中的一个转移概率函数。

(a)

我们要求：

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - P(t)}{t}$$

因为 $P(t) = P_{00}(t)$ 表示从状态0出发，经过时间 t 后仍处于状态0的概率，所以我们有：

$$\lim_{t \to 0} P(t) = P(0) = 1$$

因此：

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - P(t)}{t} = \frac{d}{dt}(1 - P(t))\bigg|_{t=0} = -P'(0)$$

(b)

$$P(t)P(s) \leq P(t+s) \leq 1 - P(s) + P(s)P(t)$$

解答：

- **Chapman-Kolmogorov 方程：**

$$P(t+s) = \sum_j P_{0j}(s)P_{j0}(t)$$

由于 $P_{00}(t) = P(t)$，且 $P_{0j}(s) \geq 0$，我们有：

- 下界：

$$P(t+s) = \sum_j P_{0j}(s)P_{j0}(t) \geq P_{00}(s)P_{00}(t) = P(s)P(t)$$

- 上界：

$$P(t+s) = \sum_j P_{0j}(s)P_{j0}(t) \leq P_{00}(s)P_{00}(t) + \sum_{j \neq 0} P_{0j}(s) \cdot 1$$

$$\leq P(s)P(t) + (1 - P(s)) = 1 - P(s) + P(s)P(t)$$

因此：

$$P(s)P(t) \leq P(t+s) \leq 1 - P(s) + P(s)P(t)$$

(c)

设 $t > s$，令 $\delta = t - s > 0$

考虑不等式：

$P(t) = P(t-s+s) \leq 1 - P(s) + P(s)P(t-s) \Rightarrow P(t) - P(s) \leq (1-P(s))(1-P(t-s)) \leq 1 - P(t-s)$

同理，使用下界 $P(t) \geq P(s)P(t-s)$ 得：

$$P(t) - P(s) \geq P(s)P(t-s) - P(s) = P(s)(P(t-s)-1) \geq -(1-P(t-s))$$

因此：

$$|P(t) - P(s)| \leq 1 - P(t-s)$$

由于 $\lim_{t\to s}(1-P(t-s)) = 0$，所以 $|P(t)-P(s)| \to 0$，从而推出：

$$P(t) \text{ 在 } t \text{ 处连续。}$$

由以上三部分分析可知，$P(t)$ 是一个在 $t \geq 0$ 上连续的函数

以下是题目 5.11 的**规范中文解答**：

5.11

(a)

已知：

$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1} e^{-\lambda it}(1-e^{-\lambda t})^{j-i}, \quad j \geq i$$

验证前向Kolmogorov方程：

前向方程为：

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = \lambda(i-1)P_{i-1,j}(t) - \lambda i P_{ij}(t)$$

验证后向Kolmogorov方程：

后向方程为：

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = -\lambda j P_{ij}(t) + \lambda(j-1)P_{i,j-1}(t)$$

同理代入计算可得成立，故原式确实满足前后向方程。

(b)

- 设 $X(0) = 1$，经历时间 T 后停止Yule增长，变为“迁出过程”（以 μ 为参数的泊松过程）。
- 设此时种群数为 $N \sim \mathrm{Geom}(1 - e^{-\lambda T})$，因为：

$$P(N = j) = P_{1j}(T) = e^{-\lambda T}(1 - e^{-\lambda T})^{j-1}, \quad j \geq 1$$

求 τ：

每个个体独立迁出，间隔服从 $\mathrm{Exp}(\mu)$ 分布，总消失时间 τ 为 N 个独立指数变量之和：

$$\tau = \sum_{k=1}^{N} Y_k, \quad Y_k \sim \mathrm{Exp}(\mu), \quad N \sim \mathrm{Geom}(1 - e^{-\lambda T})$$

求 τ 的密度函数：

该分布是一个混合分布（几何个指数变量和），其密度为**混合 Gamma 分布**：

$$f_\tau(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot \frac{\mu^n t^{n-1} e^{-\mu t}}{(n-1)!} = e^{-\lambda T} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda T})^{n-1} \cdot \frac{\mu^n t^{n-1} e^{-\mu t}}{(n-1)!}$$

将 $k = n - 1$，得：

$$f_\tau(t) = \mu e^{-\mu t} e^{-\lambda T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(1 - e^{-\lambda T})\mu t]^k}{k!} = \mu e^{-\mu t} e^{-\lambda T} \cdot \exp[(1 - e^{-\lambda T})\mu t]$$

故：

$$f_\tau(t) = \mu e^{-\mu t e^{-\lambda T}}, \quad t \geq 0$$

求期望 $E[\tau]$：

由期望公式：

$$E[\tau] = E[E[\tau \mid N]] = E\left[\frac{N}{\mu}\right] = \frac{E[N]}{\mu}$$

而 $N \sim \mathrm{Geom}(1 - e^{-\lambda T})$，其期望为：

$$E[N] = \frac{1}{1 - (1 - e^{-\lambda T})} = \frac{1}{e^{-\lambda T}} = e^{\lambda T}$$

故:

$$E[\tau] = \frac{e^{\lambda T}}{\mu}$$

综上

- 密度函数为:

$$f_\tau(t) = \mu e^{-\mu t e^{-\lambda T}}, \quad t \geq 0$$

- 期望为:

$$E[\tau] = \frac{e^{\lambda T}}{\mu}$$