4.2

由定义得:意未来状态的条件分布独立于过去的状态，只依赖于现在的状态
所以得证

4.8

(a)
R_i 是第 i 个记录值。需要证明 R_{i+1} 只依赖于 R_i
令 $R_1 = X_{N_1}$ ，其中 N_1 是第一个记录的时刻
R_{i+1} 是第一个大于 R_i 的 X_n
由于 X_n 是独立同分布的，R_{i+1} 的值只取决于 R_i 和之后独立的 X_n 的值，即：
$\{R_i, i \geq 1\}$ 是 $Markov$ 链

转移概率计算：
$P\{R_{i+1} = s | R_i = r\} = \frac{a_s}{P\{X>r\}}$ ，$s > r$
$P\{X > r\} = \sum_{j>r} a_j$
因此，转移概率为：

$$P_{rs} = \begin{cases} \frac{a_s}{\sum_{j>r} a_j} & s > r \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(b)
$\{T_i, i \geq 1\}$ 的 $Markov$ 性：
T_i 是第 i 个记录与第 $i+1$ 个记录之间的时间间隔
由于记录的发生依赖于记录值 R_i ，而 T_i 本身不直接决定 T_{i+1} ，因此 $\{T_i\}$ 不是 $Markov$ 链

$\{(R_i, T_i), i \geq 1\}$ 的 $Markov$ 性：
由于 X_n 是独立的，(R_{i+1}, T_{i+1}) 的分布只依赖于 $R_i = r$ ，而不依赖于之前的 (R_j, T_j)，$(j < i)$
。因此，$\{(R_i, T_i), i \geq 1\}$ 是 $Markov$ 链

转移概率计算：
给定 $(R_i, T_i) = (r, t)$ ，$(R_{i+1}, T_{i+1}) = (s, k)$
$R_{i+1} = s$ ，$T_{i+1} = k$ 是几何分布：需要 $k-1$ 个 $X_n \leq s$ ，第 k 个 $X_n > s$
因此：

$P\{T_{i+1}=k|R_{i+1}=s\}=P\{X\le s\}^{k-1}P\{X>s\}$
$P\{(R_{i+1},T_{i+1})=(s,k)|(R_i,T_i)=(r,t)\}=\frac{a_s}{P\{X>r\}}\cdot P\{X\le s\}^{k-1}P\{X>s\}$

(c)
$S_n=\sum_{i=1}^n T_i$ 是第 n 个记录发生的时刻
由于 X_i 是连续的，$S_{n+1}=S_n+T_{n+1}$
T_{n+1} 依赖于 R_n ，但 $R_n=X_{S_n}$ 。由于 X_i 是独立且连续的，T_{n+1} 的分布只依赖于 $R_n=X_{S_n}$ ，而 X_{S_n} 的值由 S_n 决定
因此，$\{S_n\}$ 是 $Markov$ 链

转移概率计算：
给定 $S_n=s$ ，$S_{n+1}=s+k$ 的概率：
$P\{T_{n+1}=k|S_n=s\}=P\{X_{s+1},\cdots,X_{s+k-1}\le X_s,X_{s+k}>X_s|X_s=x\}$
由于 X_i 独立于 X_s ，且 X_i 是连续的：
$P\{T_{n+1}=k|X_s=x\}=P\{X\le x\}^{k-1}P\{X>x\}$
$P\{T_{n+1}=k\}=\frac{1}{k(k+1)}$
$P\{S_{n+1}=s+k|S_n=s\}=P\{T_{n+1}=k\}=\frac{1}{k(k+1)}$ ，$k\ge 1$

4.18

(a)

$$P_{0j}=\begin{cases}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}, & 0\le j<N\\ 1-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, & j=N\end{cases}$$

当 $i\ge 1$ 时：

$$P_{ij}=\begin{cases}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!}, & i-1\le j<N\\ 1-\sum_{k=i-1}^{N-1}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-i+1}}{(k-i+1)!}, & j=N\end{cases}$$

(b)

1. 不可约性：
   任意状态 i 可以通过有限步转移到任意状态 j，因为对于 $j>i$：可以通过一段时间内来足够多的工作达到；而对于 $j<i$：可以通过每天处理一个工作且无新工作到达来达到

2. 非周期性：

$$
\begin{aligned}
P_{00}^{(2)} &> P_{01}P_{10} > 0 \\
P_{00}^{(3)} &> P_{02}P_{21}P_{10} > 0
\end{aligned}
$$

   因此状态 0 的周期 $d_0 = 1$. 注意到这是不可约的，所有所有状态的周期 $d = 1$
3. 正常返性：
   由于状态空间有限且链不可约非周期，所有状态都是正常返的。

综上所述，该 Markov 链是遍历的。

(c)

平稳分布 $\{\pi_j\}$ 应满足以下方程组：

$$
\begin{cases}
\pi_j = \sum_{i=0}^{N} \pi_i P_{ij}, \quad 0 \le j \le N \\
\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1
\end{cases}
$$

4.23

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\text{他赢得下次赌局}|\text{当前资产是 } i\text{, 他迟早达到 } N\} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{当前资产}i,\text{迟早到}N|\text{赢得下局})\mathbb{P}(\text{赢得下局})}{\mathbb{P}(\text{当前资产}i,\text{迟早到}N)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{当前资产}i+1,\text{迟早到}N)p}{\mathbb{P}(\text{当前资产}i,\text{迟早到}N)} \\
&= \frac{f_{i+1}p}{f_i}
\end{aligned}
$$

其中 f_i 表示从 i 开始财富迟早到 N 的概率（参见例 4.4A）：

$$
f_i = \begin{cases}
\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} & \text{若 } p \ne 1/2 \\
\frac{i}{N} & \text{若 } p = 1/2
\end{cases}
$$

因此有：

$$\mathbb{P}\{他赢得下次赌局|当前资产是\, i,\, 他迟早达到\, N\} = \begin{cases} p\frac{1-(q/p)^{i+1}}{1-(q/p)^{i}} & 若\, p \neq 1/2 \\ \frac{i+1}{2i} & 若\, p = 1/2 \end{cases}$$