2.2

(a)

$$
\begin{aligned}
P_0(t+s) &= P\{N(t+s)=0\} \\
&= P\{N(t)=0, N(t+s)-N(t)=0\} \\
&= P\{N(t)=0\}P\{N(t+s)-N(t)=0\} \\
&= P_0(t)P_0(s)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= P\{X_1 \geq x\} \\
&= e^{-ax} \\
\because P\{N(t)\geq 1\} &= P\{X_1 \leq t\} \\
&= 1-e^{-at} \\
&= \lambda t + o(t) \\
\therefore a = \lambda \\
\therefore \text{对于} n \geq 2; \\
P\{X_n > s | X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\} &= e^{-\lambda s}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
P\{N(t)=n\} &= P\{N(t)\geq n\} - P\{N(t)\geq n+1\} \\
&= P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1}\leq t\} \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

2.5

由题意得:
$N_1(0)+N_2(0)=0$
$E[N_1(t)]=\lambda_1 t$, $E[N_2(t)]=\lambda_2 t$
因为两个 $Poisson$ 过程相互独立.
则有: $E[N_1(t)+N_2(t)]=E[N_1(t)]+E[N_2(t)]=\lambda_1 t+\lambda_2 t=(\lambda_1+\lambda_2)t$
所以 $\{N_1(t)+N_2(t), t\geq 0\}$ 是速率为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 $Poisson$ 过程.

设联合过程的首个事件时间为 $T=min(T_1,T_2)$ ，其中 T_1 是 N_1 的首个事件时间，T_2 是 N_2 的首个事件时间.
$P\{T_1>t\}=e^{-\lambda_1 t}$, $P\{T_2>t\}=e^{-\lambda_2 t}$
$P\{T>t\}=P\{T_1>t, T_2>t\}=P\{T_1>t\}P\{T_2>t\}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$
$P\{T_1=t, T_2>t|T=t\}=\frac{f_{T_1}(t)P\{T_2>t\}}{f_T(t)}=\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$
式中不含 t ，所以独立于事件发生的时刻.

2.13

$P\{N=n\}=(1-p)^{n-1}p$
系统失效的时间 T 服从参数为 λp 的指数分布:
$f_T(t)=\lambda p e^{-\lambda p t}$
前 $n-1$ 次冲击都不导致失效的概率为:

$P = e^{-\lambda(1-p)t} \frac{[\lambda(1-p)t]^{n-1}}{(n-1)!}$
所以联合概率密度函数:
$f_{N,T}(n,t) = f_T(t) \cdot P = \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t} \lambda}{(n-1)!} \cdot (1-p)^{n-1} p$
$P\{N=n|T=t\} = \frac{f_{N,T}(n,t)}{f_T(t)} = \frac{[\lambda(1-p)t]^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda(1-p)t}$

2.15

(a)

$$N_i\text{的分布是负二项分布}$$

(b)

$$\text{不独立}$$

(c)

$$T_i\text{是参数为}n_i\text{和}P_i\text{的}gamma\text{随机变量}$$

(d)

$$gamma\text{分布可以理解为}n\text{个指数分布的和，所以是独立的}$$

(e)

$$E[T_i] = \int_0^\infty P\{T > t\}dt$$
$$= \int_0^\infty P\{T_i > t, i = 1, 2, ..., r\}dt$$
$$= \int_0^\infty \prod_{i=1}^r P\{T_i > t\}dt$$
$$= \int_0^\infty \prod_{i=1}^r \int_t^\infty \frac{P_i e^{P_i x}(P_i x)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} dt$$

(f)

$$T = \sum X_i, \text{因为采取的是}\lambda = 1\text{的}Poisson\text{分布，所以}E[X_i] = 1,$$
$$E[T] = E[E[T|N]] = E[NE[X_i]] = E[N]$$

2.25

根据题目条件可知，随机过程$N(t)$服从强度为λt的泊松分布。当$N(t) = n$时，事件发生时刻$s_1, s_2, \cdots, s_n$在区间$[0,t]$上满足独立同分布，且每个时刻s_i服从均匀分布。进一步地，每个事件在时刻s_i产生的随机效应Y_i服从与时间相关的分布F_{s_i}。

通过将时间域$[0,t]$上的分布函数进行均匀混合，可得到Y_i的合成分布：

$$F(x) = \frac{1}{t} \int_0^t F_s(x)\, ds$$

Y_i的分布本质上是对时间相关分布F_s在区间$[0,t]$上的均值化处理，因此$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$具有独立同分布特性，且与具体发生时刻s_i无关。

考虑随机变量$W = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$，其中计数过程$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$与随机变量序列$\{Y_i\}$相互独立。

- 混合分布变量X_i的分布函数为$\frac{1}{t} \int_0^t F_s(x)\, ds$
- 计数过程的期望值$E[N] = \lambda t$

2.41

(a)

事件数会改变 $\wedge$ 的分布，所以没有独立增量的分布

(b)

$$
\begin{gathered}
P(\wedge=\lambda, N(s), o\le s\le t)=P(\wedge=\lambda, N(t)=n, S_1=s_1, ..., S_n=s_n) \\
=P(\wedge=\lambda)P(N(t)=n|\wedge=\lambda)P(S_1=s_1,...,S_n=s_n|\wedge=\lambda) \\
=dG(\lambda)e^{-\lambda}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\frac{n!}{t^n}\text{由定理2.3.1} \\
\text{由全概率公式，可得}P(N(t)=n, S_1=s_1,...,S_n=s_n)=\int_0^\infty dG(\lambda)e^{-\lambda}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\frac{n!}{t^n} \\
\therefore P(\wedge=\lambda|N(s), o\le s\le t)=\frac{dG(\lambda)e^{-\lambda}(\lambda t)^n}{\int_0^\infty dG(\lambda)e^{-\lambda}(\lambda t)^n} \\
\text{无论取什么值}\lambda\text{，}\wedge\text{的条件分布只依赖于}N(t)\text{,在给定}N(t), S_1,...,S_n\text{和}(0,t)\text{上的均匀分布的次序统计量同分布}
\end{gathered}
$$

(c)

$$
\begin{gathered}
\text{设在}t+s\text{时刻发生下一事件，} \\
P(\text{发生首个事件为}T>t+s|N(t)=n) \\
=\frac{P([t,t+s]\text{发生0个事件，}N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \\
=\frac{\int_0^\infty(e^{-\lambda s}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dG(\lambda))}{\int_0^\infty(e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dG(\lambda))}
\end{gathered}
$$

(d)

$$
\begin{gathered}
\lim_{h\to0}\frac{P(N(h)\ge1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-P(N(h)=0)}{h} \\
=\lim_{h\to0}\frac{\int_0^\infty(1-e^{-\lambda h})dG(\lambda)}{h}\because\text{泰勒展开} \\
=\int_0^\infty\lambda dG(\lambda)
\end{gathered}
$$

(e)

不独立，同分布