

# SkyAx の実装についての流れ

20B01392 松本侑真

2023 年 12 月 11 日

## 概要

## 目次

1-1	ハミルトニアン	2
1.1	Poisson 方程式	2
1.2	境界条件	3

## 1-1 ハミルトニアン の 計算

波動関数を

$$\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_\alpha^+ \\ \psi_\alpha^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\alpha^+ e^{im\phi} \\ f_\alpha^- e^{i(m+1)\phi} \end{pmatrix} \quad (1-1.1)$$

とおく。ポテンシャル

$$U, \quad \mathbf{W}, \quad B \quad (1-1.2)$$

が計算できれば、ハミルトニアンが求まる。 $W$  に関する項 ( $W_{\text{term}}$ ) は

$$i\mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \quad (1-1.3)$$

となっている。ここで、

$$(\boldsymbol{\sigma} \times \nabla)_r \psi_\alpha = (\sigma_\phi \nabla_z - \sigma_z \nabla_\phi) \psi_\alpha = \begin{pmatrix} -ie_- \nabla_z \psi_- - \nabla_\phi \psi_+ \\ ie_- \nabla_z \psi_+ + \nabla_\phi \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\partial_z f_- - i\frac{m}{r} f_+ \\ +i\partial_z f_+ + i\frac{m+1}{r} f_- \end{pmatrix} \quad (1-1.4)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \times \nabla)_\phi \psi_\alpha = (\sigma_z \nabla_r - \sigma_r \nabla_z) \psi_\alpha = \begin{pmatrix} \nabla_r \psi_+ - e_- \nabla_z \psi_- \\ -\nabla_r \psi_- - e_+ \nabla_z \psi_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r f_+ - \partial_z f_- \\ -\partial_r f_- - \partial_z f_+ \end{pmatrix} \quad (1-1.5)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \times \nabla)_z \psi_\alpha = (\sigma_r \nabla_\phi - \sigma_\phi \nabla_r) \psi_\alpha = \begin{pmatrix} e_- \nabla_\phi \psi_- + ie_- \nabla_r \psi_- \\ e_+ \nabla_\phi \psi_+ - ie_+ \nabla_r \psi_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{m+1}{r} f_- + i\partial_r f_- \\ i\frac{m}{r} f_+ - i\partial_r f_+ \end{pmatrix} \quad (1-1.6)$$

### 1.1 Poisson 方程式

ときたいものは

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \rho \quad (1-1.7)$$

つまり

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (1-1.8)$$

中心差分でやると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2r\Delta r} \quad (1-1.9)$$

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial r^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} \quad (1-1.10)$$

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z^2} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \quad (1-1.11)$$

となる。よって、

$$\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2r\Delta r} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} = \rho_{ij} \quad (1-1.12)$$

となる。

$$\left[ \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] f_{i,j-1} + \left[ \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2r\Delta r} \right] f_{i-1,j} + \left[ \frac{-2}{(\Delta r)^2} + \frac{-2}{(\Delta z)^2} \right] f_{i,j} + \left[ \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2r(\Delta r)} \right] f_{i+1,j} + \left[ \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] f_{i,j+1} = \rho_{ij} \quad (1-1.13)$$

となり、これは

$$A_2 f_{i,j-1} + A_1^- f_{i-1,j} + A_0 f_{i,j} + A_1^+ f_{i+1,j} + A_2 f_{i,j+1} = \rho_{ij} \quad (1-1.14)$$

となる。また、 $i, j \rightarrow k$  にマッピングするとき、 $k$  が与えられると

$$i = \text{mod}(k - 1, N) + 1 \quad (1-1.15)$$

$$j = [k/N] + 1 \quad (1-1.16)$$

と置くことができる。また、 $(i, j)$  が与えられると

$$k = (j - 1)N + i \quad (1-1.17)$$

と与えられる。

## 1.2 境界条件

$r = 0$  の境界条件として、偶関数であることを要求する。また、原点の値は、 $U(1, j)$  と同じものとする。 $r = Nr * dr$  の境界条件は固定端境界条件とする。つまり、

$$U(-i, j) = U(i, j) \quad (1-1.18)$$

$$U(0, j) = U(1, j) \quad (1-1.19)$$

$$U(Nr, j) = 0 \quad (1-1.20)$$

とすればよい。また、 $z = 0$  の境界条件は固定端である：

$$U(i, 0) = 0 \quad (1-1.21)$$

$$U(i, Nz) = 0 \quad (1-1.22)$$