重粒子の磁気モーメントの期待値計算について

2023 年 5 月 16 日

定理 0.1（トリプレット状態におけるスピン演算子の考察）
陽子と中性子のスピン演算子を $\vec{\mathbf{s}}_p, \vec{\mathbf{s}}_n$ とする。重陽子はトリプレットなので、

$$|S\rangle = |u\rangle|u\rangle\,, \quad \frac{1}{2}(|u\rangle|d\rangle + |d\rangle|u\rangle), \quad |d\rangle|d\rangle \tag{0.1}$$

に対して $\langle S|\vec{\mathbf{s}}_p - \vec{\mathbf{s}}_n|S\rangle = 0$ が成立する。

証明の方針

昇降演算子を用いて

$$s_{px} = \frac{1}{2}(s_{p+} + s_{p-}),\ s_{py} = \frac{1}{2i}(s_{p+} - s_{p-}) \tag{0.2}$$

としてから全ての状態に対して計算すると、$\langle S|\vec{\mathbf{s}}_p - \vec{\mathbf{s}}_n|S\rangle = 0$ が言える。

1　定理の拡張

ここでは、上の定理の一般化を行う。粒子 X_i の Hilbert 空間を $\mathcal{H}_i$、粒子 X_j の Hilbert 空間を $\mathcal{H}_j$ とする。また、2 つの Hilbert 空間は同じ構造を持っていると仮定する。以降、$\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j$ を $\mathcal{H}_{\text{single}}$ と書く。（例：陽子と中性子は異なる粒子だが、それらのスピンが持つ Hilbert 空間は同じである。）

2 個の粒子 X_i, X_j が作る Hilbert 空間 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_j$ において、粒子 X_i と粒子 X_j の状態の入れ替えに対する考察を行う。Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のエルミート演算子の集合を $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ とし、$\hat{A} \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$ は物理的な観測量を表す演算子とする。

定理 1.1
物理量 A に対応する粒子 X_i と X_j の演算子を $\hat{A}_i \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_{\text{single}}), \hat{A}_j \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_{\text{single}})$ とする。このとき、$|\Psi_s\rangle \in \mathcal{H}$ が物理量 A に対する粒子 X_i, X_j の状態の入れ替えに対して対称化されている場合、

$$\langle \Psi_s|\hat{A}_i - \hat{A}_j|\Psi_s\rangle = 0 \tag{1.1}$$

が成立する。

証明

2 粒子の状態の入れ替えを行う演算子を $\hat{P}$ とする。$|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ に対して、

$$\hat{P}\,|\Psi\rangle = \pm\,|\Psi\rangle\,,\ \hat{P}^2 = \mathrm{id}\,(\text{恒等演算子}) \tag{1.2}$$

となるため、$\hat{P}$ はユニタリ演算子である。また、定義より

$$\hat{P}\,|\Psi_s\rangle = |\Psi_s\rangle \tag{1.3}$$

が成立する。次に、反交換関係 $\left\{\hat{P},\, \hat{A}_i - \hat{A}_j\right\} = 0$ が成立することを示す。まず、

$$|A_\alpha\rangle_i\,,\quad (\alpha = 1,\, 2,\, \cdots,\, N) \tag{1.4}$$

を $\hat{A}_i$ の固有状態とする。これらは完全系を成していると仮定し、$\hat{A}_j$ の固有状態についても同様に定める。すなわち、任意の $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ は

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} C_{\alpha,\,\beta}\,|A_\alpha\rangle_i |A_\beta\rangle_j \tag{1.5}$$

と展開できる。したがって、

$$\begin{aligned}\hat{P}(\hat{A}_i - \hat{A}_j)\,|\Psi\rangle &= \hat{P}(\hat{A}_i - \hat{A}_j)\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} C_{\alpha,\,\beta}\,|A_\alpha\rangle_i |A_\beta\rangle_j = \sum_{\alpha,\,\beta}(A_\alpha - A_\beta)\hat{P}C_{\alpha,\,\beta}\,|A_\alpha\rangle_i |A_\beta\rangle_j \\ &= \sum_{\alpha,\,\beta}(A_\alpha - A_\beta)C_{\alpha,\,\beta}\,|A_\beta\rangle_i |A_\alpha\rangle_j \end{aligned} \tag{1.6}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}(\hat{A}_i - \hat{A}_j)\hat{P}\,|\Psi\rangle &= (\hat{A}_i - \hat{A}_j)\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} \hat{P}C_{\alpha,\,\beta}\,|A_\alpha\rangle_i |A_\beta\rangle_j = (\hat{A}_i - \hat{A}_j)\sum_{\alpha,\,\beta} C_{\alpha,\,\beta}\,|A_\beta\rangle_i |A_\alpha\rangle_j \\ &= \sum_{\alpha,\,\beta}(A_\beta - A_\alpha)C_{\alpha,\,\beta}\,|A_\beta\rangle_i |A_\alpha\rangle_j \end{aligned} \tag{1.7}$$

となるため、反交換関係 $\left\{\hat{P},\, \hat{A}_i - \hat{A}_j\right\} = 0$ が成立する。以上より、

$$\langle\Psi_s|\hat{A}_i - \hat{A}_j|\Psi_s\rangle = \langle\Psi_s|\hat{P}^\dagger\hat{P}(\hat{A}_i - \hat{A}_j)\hat{P}^\dagger\hat{P}|\Psi_s\rangle = -\langle\Psi_s|\hat{A}_i - \hat{A}_j|\Psi_s\rangle = 0 \tag{1.8}$$

を得る。