Bloch 球と量子状態について

松本侑真

2023 年 9 月 2 日

概要

1 量子ビットの状態を Bloch 球上の点として表現する方法について、基礎事項をまとめる。

目次

1　量子状態について

- n 量子ビットの状態は $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ の元で表される。ゼロベクトル（$\ket{0} \otimes \ket{0} \cdots \otimes \ket{0}$ ではない）は、どのような状態も表さない。
- $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ とする。このとき、

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\} \ni \ket{x} \sim \alpha \ket{x} \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{1.1}$$

  の同値類は同一状態を表す。したがって、量子状態 $\ket{\psi}$ のノルムは 1 と約束する：

$$\ket{\psi} \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\} \wedge \braket{\psi|\psi} = 1 \text{ 。} \tag{1.2}$$

- $\ket{x}, \ket{y}$ を量子状態とする。このとき、$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ として、

$$\alpha \ket{x} + \beta \ket{y} \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0) \tag{1.3}$$

  は量子状態である。

1.1　1 量子ビット系

1qubit の量子状態 $\mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ の元は、$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$\alpha \ket{0} + \beta \ket{1} \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \braket{i|j} = \delta_{ij} \ \ (i, j = 0, 1)) \tag{1.4}$$

と表す。$a, b \geq 0$, $0 \leq t - s < 2\pi$ を用いて

$$\alpha = ae^{is}, \beta = be^{it} \tag{1.5}$$

とおくと、

$$a = \cos\frac{\theta}{2}, b = \sin\frac{\theta}{2} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \tag{1.6}$$

と表すことができる。したがって、

$$\alpha \ket{0} + \beta \ket{1} = e^{is}\left(\cos\frac{\theta}{2}\ket{0} + e^{i(t-s)}\sin\frac{\theta}{2}\ket{1}\right) = \cos\frac{\theta}{2}\ket{0} + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\ket{1} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \tag{1.7}$$

と、θ, φ を用いて記述することができる。これを Bloch 球表現と呼ぶ。θ, φ をこのように設定することで、1qubit の量子状態と Bloch 球上の点を 1 対 1 に対応させることができる。

2　Bloch 球表現

$0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$ として、

$$\cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \longmapsto (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \tag{2.1}$$

という写像は、1qubit の状態と $\mathbb{R}^3$ の単位球面（Bloch 球）との 1 対 1 対応を与える。例えば、Bloch 球の北極（$\theta = 0$）は $|0\rangle$ の量子状態、南極（$\theta = \pi$）は $|1\rangle$ の量子状態に対応している。この表現を用いることで、量子ゲート（ユニタリ演算子）の作用を Bloch 球上の回転操作と同一視することができる。

2.1　立体射影

1qubit の量子状態 $|\psi\rangle$ から Bloch 球表現への写像の具体形を導出する。

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \tag{2.2}$$

の $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の係数比

$$\alpha = \frac{e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = e^{i\varphi}\tan\frac{\theta}{2} \tag{2.3}$$

は、$|\psi\rangle$ と 1 対 1 に対応する。$0 \leq \theta \leq \pi$ より、α は任意の複素数もしくは ∞ となる（$\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$）。2 つの複素数の比の集合（$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ を「比が等しい」という同値関係で割った集合で、$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視できる）を複素射影直線と呼び、$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で表す。

2.2　状態ベクトルと立体射影

3　Bloch 球上の回転操作

4　Hilbert-Schmidt 表現

4.1　量子ゲート操作の表現行列