量子力学入門 第 6 章前半

松本侑真

2023 年 11 月 19 日

目次

6 量子エンタングルメント 2
6.1 はじめに . . . 2
6.2 エンタングルメントの基礎 . . . 2
6.3 Appendix . . . 6

6　量子エンタングルメント

6.1　はじめに

1935 年、Einstein, Podolsky, Rosen は量子力学の記述が不完全である証拠として、ある思考実験を提出した。この思考実験は EPR パラドックスと呼ばれ、やがてその本質は量子力学における量子エンタングルメント（量子もつれ）という非局所的な性質にあることが理解されるようになった。量子力学的にエンタングルした 2 つの系を考えると、それらはどれだけ遠く離れていたとしても、もはや独立には振舞わない（局所性の仮定が成立しない）のである。量子エンタングルメントは元から量子力学の根幹にかかわる基礎科学的な問題として議論されていたが、1982 年に量子エンタングルメントは量子力学的な系が持つ特徴であることが実験的に確認されるとパラダイムシフトが起こった。量子エンタングルメントを単に基礎科学的な問題としてだけではなく、それをいかにして利用するかといった研究が行われ始めた。

1980 年代に入り、量子アルゴリズムや量子暗号プロトコルなどが相次いで提案されると、量子エンタングルメントは量子情報処理で利用可能な重要な資源の 1 つであると認識されるようになった。1990 年代に入ると、量子エンタングルメントの研究がきわめて活発に行われるようになる。量子情報処理が対象とする系が持っている量子エンタングルメントという性質を明らかにすることが、量子情報処理技術の発展のために必要不可欠だからである。それと同時に、量子エンタングルメントの新しい性質を発見することが新しい量子情報処理技術の発見に繋がるとの期待もあった。こうして、量子エンタングルメント理論は量子情報理論とともに急速に進展した。

特に、局所操作と古典通信（local operations and classical communication: **LOCC**）の考え方を導入することにより、量子エンタングルメントの定量化が可能となり、量子エンタングルメントに関する理解は大きく進展した。A と B の 2 者を考え、その間で量子ビットのやり取り（量子通信）はできないものの、通常の情報のやり取り（古典通信）はできるものとする。これが LOCC である。LOCC はエンタングルした状態を生成できないという性質を持っている。したがって、もし LOCC だけでは不可能だった情報処理が LOCC とエンタングル状態を組み合わせることで可能になったとすれば、それはエンタングル状態が持つ威力の発現だということができる。LOCC のように制限された操作を考えることで、量子エンタングルメントの持つ威力が浮き彫りになるのである。また LOCC は、それそのものが量子情報プロトコルとしての有用性を持つ。実際、量子テレポーテーションをはじめ、量子エンタングルメントを利用した量子情報処理プロトコルの多くが LOCC である。

3 者以上の多者からなる量子系では、さまざまな種類の量子エンタングルメントが存在し、多彩な現象を見せるようになる。また、現実の系では、量子状態はデコヒーレンスの影響により混合状態になってしまうので、混合状態における量子エンタングルメントの性質を理解しておくことは、現実の量子情報処理技術にとって重要なことである。

6.2　エンタングルメントの基礎

6.2.1　量子相関と古典相関

A と B の 2 つの量子ビットを考える。どちらの量子ビットも $|0\rangle$ である状態は $|0\rangle_{\mathrm{A}}|0\rangle_{\mathrm{B}}$、どちらも $|1\rangle$ である状態は $|1\rangle_{\mathrm{A}}|1\rangle_{\mathrm{B}}$ である。この 2 つの状態を重ね合わせた状態

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle_{\mathrm{A}}|0\rangle_{\mathrm{B}} + |1\rangle_{\mathrm{A}}|1\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} \tag{6.1}$$

はエンタングルした状態（もつれた状態）と呼ばれる。

いま、A と B それぞれの量子ビットに対し、$|0\rangle$ なのか $|1\rangle$ なのかを決める測定を行ったとする。もし A の測定結果が $|0\rangle$ だとすると、$|\Psi\rangle$ は $|0\rangle_{\mathrm{A}}|0\rangle_{\mathrm{B}}$ に収縮するので、B の測定結果も必ず $|0\rangle$ になる。同様に、A の測定結果が $|1\rangle$ だとすると、B の測定結果も必ず $|1\rangle$ になる。A と B の距離が例えどれだけ離れていようとも、A と

B の測定結果は常に同じになる。しかし、これ自体はあまり驚くべき現象ではない。例えば、いま A と B の 2 つの箱があり、2 つの箱にはそれぞれ同じ数字を書いた紙が初めから入っているとする。ただし、0 と 1 のどちらの数字が書いてあるかは知らないとする。このとき、A の箱を開けて 0 と書いた紙を見つければ、B の箱を開けたときも 0 と書いてある紙を見つけるはずである。このようなありふれた場合でも、距離に関係なく A と B の測定結果は常に同じになる。

ところが、箱の中の紙とは異なり、エンタングルした状態 $|\Psi\rangle$ は遥かに強い相関を示すのである。$|0\rangle$ と $|1\rangle$ を θ だけ回転させた直交基底を

$$\begin{cases} |\theta\rangle &= \cos\theta\,|0\rangle + \sin\theta\,|1\rangle \\ |\theta_\perp\rangle &= -\sin\theta\,|0\rangle + \cos\theta\,|1\rangle \end{cases} \tag{6.2}$$

とすると $|\Psi\rangle$ は

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle_{\mathrm{A}}\,|0\rangle_{\mathrm{B}} + |1\rangle_{\mathrm{A}}\,|1\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} = \frac{|\theta\rangle_{\mathrm{A}}\,|\theta\rangle_{\mathrm{B}} + |\theta_\perp\rangle_{\mathrm{A}}\,|\theta_\perp\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} \tag{6.3}$$

と書き換えることができる。したがって、A と B それぞれに、$|\theta\rangle$ なのか $|\theta_\perp\rangle$ なのかを決める測定を行った場合でも、両者の測定結果は常に一致するのである。このように、エンタングルした状態に対する測定結果は、基底の取り方に関係なく一致するという強い相関を示し、これは**量子相関**（quantum correlation）と呼ばれる。これに対し、箱の中の紙の例は**古典相関**（classical correlation）と呼ばれる。前者のエンタングルした状態 $|\Psi\rangle$ の密度行列表示は

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 11|) \tag{6.4}$$

であるが、後者の古典相関を持つ系の密度行列表示は

$$\sigma = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \tag{6.5}$$

の混合状態であり、$|\Psi\rangle$ の状態とは明確に区別される。

6.2.2　積状態と最大エンタングル状態

もっと一般の、A と B の 2 つの d 準位系における純粋状態 $|\psi\rangle$ を考える。Schmidt 分解より、$|\psi\rangle$ は A と B の適当な局所ユニタリ変換（$U \otimes V$）を使って

$$(U \otimes V)\,|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \sqrt{p_i}\,|i\rangle_{\mathrm{A}}\,|i\rangle_{\mathrm{B}} \tag{6.6}$$

と書くことができる。Schmidt 係数は大きい順に並んでいるとする：

$$p_0 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_{d-1}\ 。 \tag{6.7}$$

$p_0 = 1$ のとき、$p_1 = p_2 = \cdots = p_{d-1} = 0$ であり、

$$|\psi\rangle = \left(U^\dagger \otimes V^\dagger\right)(|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}) = |f\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |g\rangle_{\mathrm{B}} \tag{6.8}$$

になるが、このように A の状態と B の状態の積でかける状態を**積状態**（product state）と呼ぶ。積状態の縮約密度演算子は純粋状態である：

$$\sigma_A = |f\rangle\langle f|\,,\ \sigma_B = |g\rangle\langle g|\ 。 \tag{6.9}$$

一方、$p_0 < 1$ のとき、$|\psi\rangle$ の右辺は 2 項以上の和になり、A の状態と B の状態の積として書くことができない。[*1] この状態がエンタングル状態（entangled state）である。特に、すべての Schmidt 係数が等しく $p_i = 1/d$ のときの状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle_{\mathrm{A}}\,|i\rangle_{\mathrm{B}} \tag{6.10}$$

[*1] 必要十分かわからん

を最大エンタングル状態（maximally entangled state）と呼ぶ。最大エンタングル状態の縮約密度演算子は

$$\sigma_A = \sigma_B = \frac{1}{d} I \tag{6.11}$$

であり、規格化定数を除いて単位演算子（すなわち完全混合状態）となる。

X を A に作用する任意の演算子とし、それを

$$X = \sum_{k,l=0}^{d-1} |k\rangle X_{kl} \langle l| \tag{6.12}$$

で表す。このとき、最大エンタングル状態 $|\Psi\rangle$ に関して、

$$(X \otimes I) |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \left(\sum_{k,l} |k\rangle X_{kl} \langle l| \otimes I \right) \sum_i |i\rangle_{\mathrm{A}} |i\rangle_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k,i} X_{ki} |k\rangle_{\mathrm{A}} |i\rangle_{\mathrm{B}} \tag{6.13}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d}} \left(I \otimes \sum_{i,l} |i\rangle X_{il} \langle l| \right) \sum_k |k\rangle_{\mathrm{A}} |k\rangle_{\mathrm{B}} = \left(I \otimes X^\top \right) |\Psi\rangle \tag{6.14}$$

が成立する。これより、X を実直交行列 O とすれば、

$$(O \otimes O) |\Psi\rangle = \left(O \otimes O^\top \right) |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \tag{6.15}$$

となり、式 (6.3) が確かめられる。[*2] また、Schmidt 分解の基底の取り方の任意性を考慮すると、最大エンタングル状態は任意の局所ユニタリ変換によって変換される。すなわち、d 準位系のすべての最大エンタングル状態は $(U \otimes V) |\Psi\rangle$ の形をしていることになるが、これは

$$(U \otimes V) |\Psi\rangle = (U \otimes I)(I \otimes V) |\Psi\rangle = (UV^\top \otimes I) |\Psi\rangle = (I \otimes VU^\top) |\Psi\rangle \tag{6.16}$$

と書き換えられる。$UV^\top$ や $VU^\top$ は局所ユニタリ変換なので、すべての最大エンタングル状態は、A または B だけの局所ユニタリ変換で相互変換可能であることになる。以下の 4 つの状態は、いずれも 2 つの量子ビットにおける最大エンタングル状態である：

$$\left|\phi^\pm\right\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{|0\rangle_{\mathrm{A}} |0\rangle_{\mathrm{B}} \pm |1\rangle_{\mathrm{A}} |1\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}, \quad \left|\psi^\pm\right\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{|0\rangle_{\mathrm{A}} |1\rangle_{\mathrm{B}} \pm |1\rangle_{\mathrm{A}} |0\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} \text{。} \tag{6.17}$$

これらは **Bell 基底**（Bell basis）と呼ばれ、2 つの量子ビットにおける CONS（完全規格直交系）を構成している。Bell 状態は最大エンタングル状態なので、A 側に Pauli 行列のユニタリ変換を施すことで、以下のように相互変換ができる：

$$\left|\phi^+\right\rangle_{\mathrm{AB}} = (I \otimes I) \left|\phi^+\right\rangle_{\mathrm{AB}} , \tag{6.18}$$

$$\left|\psi^+\right\rangle_{\mathrm{AB}} = (\sigma_x \otimes I) \left|\phi^+\right\rangle_{\mathrm{AB}} , \tag{6.19}$$

$$\left|\phi^-\right\rangle_{\mathrm{AB}} = (i\sigma_y \otimes I) \left|\phi^+\right\rangle_{\mathrm{AB}} , \tag{6.20}$$

$$\left|\psi^-\right\rangle_{\mathrm{AB}} = (\sigma_z \otimes I) \left|\phi^+\right\rangle_{\mathrm{AB}} \text{。} \tag{6.21}$$

[*2] 実直交ではないユニタリ行列で変換したら成り立たないの？ 本では、基底の取り方に関係なく一致するとあったが、あくまで実直交行列による変換のみ？

6.2.3　量子テレポーテーション

エンタングルメントを利用したプロトコルの中で、最も基本的で重要なものが**量子テレポーテーション**（quantum teleportation）である。量子テレポーテーションは、エンタングル状態と古典通信を用いて量子状態を遠隔地へと転送するプロトコルである。いま、送信者と受信者はエンタングル状態

$$\left|\phi^+\right\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{|0\rangle_{\mathrm{A}}|0\rangle_{\mathrm{B}} + |1\rangle_{\mathrm{A}}|1\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} \tag{6.22}$$

を保持しているとする。また、送信者が持っている量子ビット X の状態 $|\psi\rangle_{\mathrm{X}} = a|0\rangle_{\mathrm{X}} + b|1\rangle_{\mathrm{X}}$ を受信者へ転送したいとする。このとき、X、A、B の 3 つの量子ビット全体の状態を、4 つの Bell 基底を使って書き換えると、

$$\begin{aligned}
&(a|0\rangle_{\mathrm{X}} + b|1\rangle_{\mathrm{X}}) \otimes \frac{|0\rangle_{\mathrm{A}}|0\rangle_{\mathrm{B}} + |1\rangle_{\mathrm{A}}|1\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} \\
=&\frac{1}{2}\left[\left|\phi^+\right\rangle_{\mathrm{XA}} \otimes (a|0\rangle_{\mathrm{B}} + b|1\rangle_{\mathrm{B}}) + \left|\phi^-\right\rangle_{\mathrm{XA}} \otimes (a|0\rangle_{\mathrm{B}} - b|1\rangle_{\mathrm{B}})\right. \\
&\left. + \left|\psi^+\right\rangle_{\mathrm{XA}} \otimes (a|1\rangle_{\mathrm{B}} + b|0\rangle_{\mathrm{B}}) + \left|\psi^-\right\rangle_{\mathrm{XA}} \otimes (a|1\rangle_{\mathrm{B}} - b|0\rangle_{\mathrm{B}})\right]
\end{aligned} \tag{6.23}$$

となる。

6.3 Appendix

6.3.1 Schmidt の分解定理

定理 6.1（Schmidt の分解定理）

任意の合成状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ に対して、$p_i > 0$ $(i = 1, \ldots, l \leq \min[d_1, d_2])$ と $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ の正規直交系 $\{|\zeta_i\rangle\}_{i=1}^{l}$ と $\{|\xi_j\rangle\}_{j=1}^{l}$ が存在して

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{l} \sqrt{p_i}\, |\zeta_i\rangle\, |\xi_i\rangle \tag{6.24}$$

と書くことができる。これを Schmidt 分解（Schmidt decomposition）という。p_i を Schmidt 係数（Schmidt coefficient)、l を Schmidt 階数（Schmidt rank）と呼び、

$$\sum_{i=1}^{l} p_i = 1 \tag{6.25}$$

を満たす。

証明. 一般性を失わず $d := d_1 \leq d_2$ とする。$\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^{d}$ と $\{|\xi_j\rangle\}_{j=1}^{d_2}$ をそれぞれ $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ の正規直交基底とすると、任意の状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ は、

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d_2} \alpha_{ij}\, |\phi_i\rangle \otimes |\xi_j\rangle = \sum_{i=1}^{d} |\phi_i\rangle \otimes \left(\sum_{j=1}^{d_2} \alpha_{ij}\, |\xi_j\rangle\right) = \sum_{i=1}^{d} |\phi_i\rangle \otimes |\chi_i\rangle \tag{6.26}$$

とかける。ただし、$|\chi_i\rangle := \sum_{j=1}^{d_2} \alpha_{ij}\, |\xi_j\rangle$ とした。ここで、(i,j) 成分が $X_{ij} := \langle \chi_i | \chi_j \rangle$ で与えられる $d \times d$ 複素行列 X を考える。定義より X は正値行列なので、X の固有値はすべて非負である。X の固有値を大きい順に $p_1, \ldots, p_d \geq 0$ と置き、l $(\leq d)$ 個の固有値が正であるとする。また、X を対角化する $d \times d$ ユニタリ行列を U として、

$$|\eta'_j\rangle := \sum_{i=1}^{d} U_{ij}\, |\chi_i\rangle\,, \quad |\zeta_k\rangle := \sum_{i=1}^{d} U^*_{ik}\, |\phi_i\rangle \qquad (j, k = 1, \ldots, d) \tag{6.27}$$

と置く。[*3] U のユニタリ性により、

$$\sum_{k=1}^{d} U^*_{ik}\, |\eta'_k\rangle = \sum_{k=1}^{d} U^*_{ik} \left(\sum_{j=1}^{d} U_{jk}\, |\chi_j\rangle\right) = \sum_{j=1}^{d} \delta_{ij}\, |\chi_j\rangle = |\chi_i\rangle \tag{6.28}$$

を得る。したがって、

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} |\phi_i\rangle \otimes |\chi_i\rangle = \sum_{i=1}^{d} |\phi_i\rangle \otimes \left(\sum_{k=1}^{d} U^*_{ik}\, |\eta'_k\rangle\right) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} U^*_{ik}\, |\phi_i\rangle \otimes |\eta'_k\rangle = \sum_{k=1}^{d} |\zeta_k\rangle \otimes |\eta'_k\rangle \tag{6.29}$$

が成立する。[*4]

[*3] 本に誤植あり

[*4] 本の証明では $\{|\zeta_k\rangle\}_{k=1}^{d}$ が $\mathcal{H}_1$ の正規直交基底であることを用いて示している。すなわち、$I = \sum_k |\zeta_k\rangle\langle\zeta_k|$ と、$\langle \zeta_j | \phi_i \rangle = U_{ij}$ より

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} |\phi_i\rangle \otimes |\chi_i\rangle = \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} |\zeta_j\rangle\langle\zeta_j|\right) |\phi_i\rangle \otimes \left(\sum_{k=1}^{d} U^*_{ik}\, |\eta'_k\rangle\right) = \sum_{j,k=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} U_{ij} U^*_{ik}\right) |\zeta_j\rangle \otimes |\eta'_k\rangle = \sum_{k=1}^{d} |\zeta_k\rangle \otimes |\eta'_k\rangle \tag{6.30}$$

と示している。

ところで、X の対角化

$$\sum_{k,l} U_{ki}^* X_{kl} U_{lj} = p_i \delta_{ij} \tag{6.31}$$

より、

$$\langle \eta_i' | \eta_j' \rangle = p_i \delta_{ij} \tag{6.32}$$

が成り立つため、

$$|\eta_i\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{p_i}} |\eta_i'\rangle \quad (i = 1, \ldots, l) \tag{6.33}$$

と置けば、$\{|\eta_i\rangle\}_{i=1}^{l}$ は $\mathcal{H}_2$ の正規直交系（正規直交基底ではない）を成す。$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ を用いると、$\sum_{i=1}^{l} p_i = 1$ も示される。以上より、Schmidt の分解定理が示された。

□