

# 量子力学入門 第 6 章前半

松本侑真

2023 年 11 月 19 日

## 目次

6	量子エンタングルメント	2
6.1	はじめに	2
6.2	エンタングルメントの基礎	2
6.3	エンタングルメントの定量化	6
6.4	Appendix	7

## 6 量子エンタングルメント

### 6.1 はじめに

1935 年、Einstein, Podolsky, Rosen は量子力学の記述が不完全である証拠として、ある思考実験を提出した。この思考実験は EPR パラドックスと呼ばれ、やがてその本質は量子力学における量子エンタングルメント（量子もつれ）という非局所的な性質にあることが理解されるようになった。量子力学的にエンタングルした 2 つの系を考えると、それらはどれだけ遠く離れていたとしても、もはや独立には振舞わない（局所性の仮定が成立しない）のである。量子エンタングルメントは元から量子力学の根幹にかかわる基礎科学的な問題として議論されていたが、1982 年に量子エンタングルメントは量子力学的な系が持つ特徴であることが実験的に確認されるとパラダイムシフトが起こった。量子エンタングルメントを単に基礎科学的な問題としてだけではなく、それをいかにして利用するかといった研究が行われ始めた。

1980 年代に入り、量子アルゴリズムや量子暗号プロトコルなどが相次いで提案されると、量子エンタングルメントは量子情報処理で利用可能な重要な資源の 1 つであると認識されるようになった。1990 年代に入ると、量子エンタングルメントの研究がきわめて活発に行われるようになる。量子情報処理が対象とする系が持っている量子エンタングルメントという性質を明らかにすることが、量子情報処理技術の発展のために必要不可欠だからである。それと同時に、量子エンタングルメントの新しい性質を発見することが新しい量子情報処理技術の発見に繋がるとの期待もあった。こうして、量子エンタングルメント理論は量子情報理論とともに急速に進展した。

特に、局所操作と古典通信（local operations and classical communication: **LOCC**）の考え方を導入することにより、量子エンタングルメントの定量化が可能となり、量子エンタングルメントに関する理解は大きく進展した。A と B の 2 者を考え、その間で量子ビットのやり取り（量子通信）はできないものの、通常の情報のやり取り（古典通信）はできるものとする。これが LOCC である。LOCC はエンタングルした状態を生成できないという性質を持っている。したがって、もし LOCC だけでは不可能だった情報処理が LOCC とエンタングル状態を組み合わせることで可能になったとすれば、それはエンタングル状態が持つ威力の発現だということができる。LOCC のように制限された操作を考えることで、量子エンタングルメントの持つ威力が浮き彫りになるのである。また LOCC は、それそのものが量子情報プロトコルとしての有用性を持つ。実際、量子テレポーテーションをはじめ、量子エンタングルメントを利用した量子情報処理プロトコルの多くが LOCC である。

3 者以上の多者からなる量子系では、さまざまな種類の量子エンタングルメントが存在し、多彩な現象を見せるようになる。また、現実の系では、量子状態はデコヒーレンスの影響により混合状態になってしまうので、混合状態における量子エンタングルメントの性質を理解しておくことは、現実の量子情報処理技術にとって重要なことである。

### 6.2 エンタングルメントの基礎

#### 6.2.1 量子相関と古典相関

A と B の 2 つの量子ビットを考える。どちらの量子ビットも  $|0\rangle$  である状態は  $|0\rangle_A |0\rangle_B$ 、どちらも  $|1\rangle$  である状態は  $|1\rangle_A |1\rangle_B$  である。この 2 つの状態を重ね合わせた状態

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (6.1)$$

はエンタングルした状態（もつれた状態）と呼ばれる。

いま、A と B それぞれの量子ビットに対し、 $|0\rangle$  なのか  $|1\rangle$  なのかを決める測定を行ったとする。もし A の測定結果が  $|0\rangle$  だとすると、 $|\Psi\rangle$  は  $|0\rangle_A |0\rangle_B$  に収縮するので、B の測定結果も必ず  $|0\rangle$  になる。同様に、A の測定結果が  $|1\rangle$  だとすると、B の測定結果も必ず  $|1\rangle$  になる。A と B の距離が例えどれだけ離れていようとも、A と

B の測定結果は常に同じになる。しかし、これ自体はあまり驚くべき現象ではない。例えば、いま A と B の 2 つの箱があり、2 つの箱にはそれぞれ同じ数字を書いた紙が初めから入っているとする。ただし、0 と 1 のどちらの数字が書いてあるかは知らないとする。このとき、A の箱を開けて 0 と書いた紙を見つければ、B の箱を開けたときも 0 と書いてある紙を見つけるはずである。このようなありふれた場合でも、距離に関係なく A と B の測定結果は常に同じになる。

ところが、箱の中の紙とは異なり、エンタングルした状態  $|\Psi\rangle$  は遥かに強い相関を示すのである。 $|0\rangle$  と  $|1\rangle$  を  $\theta$  だけ回転させた直交基底を

$$\begin{cases} |\theta\rangle &= \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle \\ |\theta_\perp\rangle &= -\sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle \end{cases} \quad (6.2)$$

とすると  $|\Psi\rangle$  は

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B}{\sqrt{2}} = \frac{|\theta\rangle_A|\theta\rangle_B + |\theta_\perp\rangle_A|\theta_\perp\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (6.3)$$

と書き換えることができる。したがって、A と B それぞれに、 $|\theta\rangle$  なのか  $|\theta_\perp\rangle$  なのかを決める測定を行った場合でも、両者の測定結果は常に一致するのである。このように、エンタングルした状態に対する測定結果は、基底の取り方に関係なく一致するという強い相関を示し、これは量子相関 (quantum correlation) と呼ばれる。これに対し、箱の中の紙の例は古典相関 (classical correlation) と呼ばれる。前者のエンタングルした状態  $|\Psi\rangle$  の密度行列表示は

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 11|) \quad (6.4)$$

であるが、後者の古典相関を持つ系の密度行列表示は

$$\sigma = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \quad (6.5)$$

の混合状態であり、 $|\Psi\rangle$  の状態とは明確に区別される。

### 6.2.2 積状態と最大エンタングル状態

もっと一般の、A と B の 2 つの  $d$  準位系における純粋状態  $|\psi\rangle$  を考える。Schmidt 分解より、 $|\psi\rangle$  は A と B の適当な局所ユニタリ変換 ( $U \otimes V$ ) を使って

$$(U \otimes V)|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \sqrt{p_i} |i\rangle_A |i\rangle_B \quad (6.6)$$

と書くことができる。Schmidt 係数は大きい順に並んでいるとする：

$$p_0 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_{d-1}。 \quad (6.7)$$

$p_0 = 1$  のとき、 $p_1 = p_2 = \cdots = p_{d-1} = 0$  であり、

$$|\psi\rangle = (U^\dagger \otimes V^\dagger)(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B) = |f\rangle_A \otimes |g\rangle_B \quad (6.8)$$

になるが、このように A の状態と B の状態の積でかける状態を積状態 (product state) と呼ぶ。積状態の縮約密度演算子は純粋状態である：

$$\sigma_A = |f\rangle\langle f|, \sigma_B = |g\rangle\langle g|。 \quad (6.9)$$

一方、 $p_0 < 1$  のとき、 $|\psi\rangle$  の右辺は 2 項以上の和になり、A の状態と B の状態の積として書くことができない。<sup>\*1</sup>この状態がエンタングル状態 (entangled state) である。特に、すべての Schmidt 係数が等しく  $p_i = 1/d$  のときの状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle_A |i\rangle_B \quad (6.10)$$

<sup>\*1</sup>  $i \neq j$  のとき、 $|i\rangle \neq |j\rangle$  であるため必要十分条件である。

を最大エンタングル状態 (maximally entangled state) と呼ぶ。最大エンタングル状態の縮約密度演算子は

$$\sigma_A = \sigma_B = \frac{1}{d} I \quad (6.11)$$

であり、規格化定数を除いて単位演算子 (すなわち完全混合状態) となる。

$X$  を  $A$  に作用する任意の演算子とし、それを

$$X = \sum_{k,l=0}^{d-1} |k\rangle X_{kl} \langle l| \quad (6.12)$$

で表す。このとき、最大エンタングル状態  $|\Psi\rangle$  に関して、

$$(X \otimes I) |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \left( \sum_{k,l} |k\rangle X_{kl} \langle l| \otimes I \right) \sum_i |i\rangle_A |i\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k,i} X_{ki} |k\rangle_A |i\rangle_B \quad (6.13)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d}} \left( I \otimes \sum_{i,l} |i\rangle X_{il} \langle l| \right) \sum_k |k\rangle_A |k\rangle_B = (I \otimes X^\top) |\Psi\rangle \quad (6.14)$$

が成立する。これより、 $X$  を実直交行列  $O$  とすれば、

$$(O \otimes O) |\Psi\rangle = (O \otimes O^\top) |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (6.15)$$

となり、式 (6.3) が確かめられる。<sup>\*2</sup> また、Schmidt 分解の基底の取り方の任意性を考慮すると、最大エンタングル状態は任意の局所ユニタリ変換によって変換される。すなわち、 $d$  準位系のすべての最大エンタングル状態は  $(U \otimes V) |\Psi\rangle$  の形をしていることになるが、これは

$$(U \otimes V) |\Psi\rangle = (U \otimes I)(I \otimes V) |\Psi\rangle = (UV^\top \otimes I) |\Psi\rangle = (I \otimes VU^\top) |\Psi\rangle \quad (6.16)$$

と書き換えられる。 $UV^\top$  や  $VU^\top$  は局所ユニタリ変換なので、すべての最大エンタングル状態は、 $A$  または  $B$  だけの局所ユニタリ変換で相互変換可能であることになる。以下の 4 つの状態は、いずれも 2 つの量子ビットにおける最大エンタングル状態である：

$$|\phi^\pm\rangle_{AB} = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B \pm |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}}, \quad |\psi^\pm\rangle_{AB} = \frac{|0\rangle_A |1\rangle_B \pm |1\rangle_A |0\rangle_B}{\sqrt{2}}. \quad (6.17)$$

これらは **Bell 基底** (Bell basis) と呼ばれ、2 つの量子ビットにおける CONS (完全規格直交系) を構成している。Bell 状態は最大エンタングル状態なので、 $A$  側に Pauli 行列のユニタリ変換を施すことで、以下のように相互変換ができる：

$$|\phi^+\rangle_{AB} = (I \otimes I) |\phi^+\rangle_{AB}, \quad (6.18)$$

$$|\psi^+\rangle_{AB} = (\sigma_x \otimes I) |\phi^+\rangle_{AB}, \quad (6.19)$$

$$|\phi^-\rangle_{AB} = (i\sigma_y \otimes I) |\phi^+\rangle_{AB}, \quad (6.20)$$

$$|\psi^-\rangle_{AB} = (\sigma_z \otimes I) |\phi^+\rangle_{AB}. \quad (6.21)$$

<sup>\*2</sup> 実直交ではないユニタリ行列で変換したら成り立たないの？ 本では、基底の取り方に関係なく一致するとあったが、あくまで実直交行列による変換のみ？

### 6.2.3 量子テレポーテーション

エンタングルメントを利用したプロトコルの中で、最も基本的で重要なものが量子テレポーテーション (quantum teleportation) である。量子テレポーテーションは、エンタングル状態と古典通信を用いて量子状態を遠隔地へと転送するプロトコルである。いま、送信者と受信者はエンタングル状態

$$|\phi^+\rangle_{AB} = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (6.22)$$

を保持しているとする。また、送信者が持っている量子ビット X の状態  $|\psi\rangle_X = a|0\rangle_X + b|1\rangle_X$  を受信者へ転送したいとする。このとき、X、A、B の 3 つの量子ビット全体の状態を、4 つの Bell 基底を使って書き換えると、

$$\begin{aligned} (a|0\rangle_X + b|1\rangle_X) \otimes \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}} \\ = \frac{1}{2} [|\phi^+\rangle_{XA} \otimes (a|0\rangle_B + b|1\rangle_B) + |\phi^-\rangle_{XA} \otimes (a|0\rangle_B - b|1\rangle_B) \\ + |\psi^+\rangle_{XA} \otimes (a|1\rangle_B + b|0\rangle_B) + |\psi^-\rangle_{XA} \otimes (a|1\rangle_B - b|0\rangle_B)] \end{aligned} \quad (6.23)$$

となる。送信者は X と A の 2 つの量子ビットに対し、4 つの Bell 基底  $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$  のどの状態なのかを決める測定 (Bell 状態測定、Bell state measurement) を行ったとする。送信者の測定結果  $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$  に応じ、受信者が  $\{I, \sigma_z, \sigma_x, i\sigma_y\}$  のユニタリ変換を施すことで、量子ビット X の状態を B の量子ビット上に転送することができる。

ここで、送信者の操作も受信者の操作も状態  $|\psi\rangle$  に依存していない。これは、転送する状態  $|\psi\rangle$  が何であるかをまったく知ることなく転送が行えることを意味している。一般に  $|\psi\rangle$  の状態が 1 つしかないとなると、そこから測定によって  $a$  と  $b$  の値を得ることはできない。(測定結果の確率分布になるため。) すなわち、未知の量子状態を古典通信だけで転送することは不可能である。量子テレポーテーションは、エンタングル状態を利用することで転送を可能にしている。また、量子ビットをそのまま遠隔地に伝送しようとすると、伝送途中でデコヒーレンスの影響を受け状態は容易に壊れてしまう。このように壊れやすい量子状態を、予め共有しておいたエンタングル状態と古典通信で遠隔地へ転送できることも、量子テレポーテーションの大きな利点であり、量子暗号通信の長距離伝送 (量子中継、quantum repeater) も可能にする。

量子テレポーテーションは光より速い速度で状態転送が行えるわけではないことにも注意する。もし、受信者が送信者の測定結果を知らないとする、量子ビット B の状態は  $|\phi^+\rangle_{AB}$  の縮約密度演算子  $\sigma_B = I/2$  のままであり、受信者には何の情報も伝わらない。送信者の測定結果が古典通信で伝えられて初めて、受信者は状態  $|\psi\rangle$  を手にすることができる。

また、最大エンタングル状態における局所変換の性質を用いると、量子テレポーテーションは混合状態  $\sigma$  やエンタングル状態  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_Y$  も忠実に転送できる。<sup>\*3</sup>

<sup>\*3</sup> 4 つの Bell 基底  $|\Psi_i\rangle$  は、 $|\Psi\rangle = |\phi^+\rangle$  として、ユニタリ行列  $U_i$  を用いて  $|\Psi_i\rangle = (U_i \otimes I)|\Psi\rangle$  と表される。送信したい混合状態を  $\sigma$  として、その状態がどのヒルベルト空間にあるかを添字 S で  $\sigma_S$  のように区別する。A と X に対する Bell 状態測定後の状態が  $|\Psi_i\rangle$  である場合、受信者 B が受け取る状態は

$$\sigma'_B = \frac{1}{4} U_i^\dagger \sigma_B U_i \quad (6.24)$$

となるため、Bell 状態測定結果を受け取り、適切なユニタリ演算子  $U_i$  を作用させると  $\sigma_B = \sigma$  を受け取ることができる。エンタングルした状態  $\sigma_{YX}$  の転送も同様に、

$$\sigma'_{YB} = \frac{1}{4} (I_Y \otimes U_i^\dagger) \sigma_{YB} (I_Y \otimes U_i) \quad (6.25)$$

と行われる。

## 6.2.4 超稠密符号

1つの量子ビットを送信者から受信者へと送信したとする。このとき、送信者から受信者へ送ることができる古典情報を考える。例えば、古典ビットの0を状態 $|0\rangle$ に、古典ビットの1を状態 $|1\rangle$ に符号化し量子ビットを送信することで、1ビットの古典情報を送ることができる。このように、エンタングルしていない1つの量子ビットを送信した際に送ることができる情報量の上限は1ビットである。これは、1つの量子ビットの Holevo 相互情報量の上限が1ビットであることによる。<sup>[1]</sup>ところが、エンタングルした状態を利用すると、1つの量子ビットを送信することで2ビットの古典情報を送ることが可能になる。この通信プロトコルは超稠密符号 (superdense coding) と呼ばれている。

まず、送信者と受信者はエンタングル状態

$$|\phi^+\rangle_{CD} = \frac{|0\rangle_C |0\rangle_D + |1\rangle_C |1\rangle_D}{\sqrt{2}} \quad (6.26)$$

を保持しているとする。<sup>\*4</sup>送信者は、送りたい2ビットの古典情報 $\{00, 01, 10, 11\}$ に応じ、 $\{I, \sigma_x, i\sigma_y, \sigma_z\}$ のユニタリ変換をCの量子ビットに施す。この操作により、送信者と受信者が保持していたエンタングル状態 $|\phi^+\rangle_{CD}$ は、古典情報に応じ $\{|\phi^+\rangle_{CD}, |\psi^+\rangle_{CD}, |\psi^-\rangle_{CD}, |\phi^-\rangle_{CD}\}$ のBell基底へと変化することになる。次に、送信者はCの量子ビットを受信者へと送信する。Cの量子ビットを受け取った受信者は、CとDの両方の量子ビットを持っているため、2つの量子ビットに対してBell状態測定を行うことで、状態が4つのBell基底のどれなのかを誤りなく決めることができ、結果として受信者は2ビットの古典情報を得ることができるようになる。

このプロトコルで送信者から受信者へ送られたのはCの量子ビットだけに見えるが、初めからどのようにして $|\phi^+\rangle_{CD}$ を保持したのかにも注意する必要がある。エンタングルした状態を生成するには、Cの量子ビットとDの量子ビットが何らかの物理的な相互作用をする必要がある。つまり、 $|\phi^+\rangle_{CD}$ を送信者と受信者で保持するには、送信者側でCの量子ビットとDの量子ビットを相互作用させることで $|\phi^+\rangle_{CD}$ を生成し、その後にDの量子ビットを受信者側へ送信する必要がある。このように、初期に $|\phi^+\rangle_{CD}$ を保持する過程までを考慮すると、2つの量子ビットが送信者から受信者へと伝送されていることになる。超稠密符号は、1つの量子ビットを先に送って起き、情報伝達が必要になった時点にもう1つの量子ビットを送ることで、実効的に2倍の速度での情報伝達を可能にするプロトコルである。

## 参考文献

- [1] 量子情報理論の基本：ホレボー限界 <https://qiita.com/SamN/items/921c529c0eb09867c5cb#%E3%83%9B%E3%83%AC%E3%83%9C%E3%83%BC%E9%99%90%E7%95%8C%E3%81%A8%E3%81%AF>

## 6.3 エンタングルメントの定量化

- 6.3.1 局所操作と古典通信 (LOCC)
- 6.3.2 エンタングルメントの基本単位
- 6.3.3 エンタングルメントの濃縮
- 6.3.4 量子データ圧縮
- 6.3.5 エンタングルメントの希釈
- 6.3.6 純粋状態のエンタングルメント量

---

<sup>\*4</sup> 次節で述べられているが、エンタングルした状態を生成するためには、CとDの量子ビットが何らかの物理的な相互作用をする必要がある。

## 6.4 Appendix

### 6.4.1 Schmidt の分解定理

#### 定理 6.1 (Schmidt の分解定理)

任意の合成状態  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  に対して、 $p_i > 0$  ( $i = 1, \dots, l \leq \min[d_1, d_2]$ ) と  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  の正規直交系  $\{|\zeta_i\rangle\}_{i=1}^l$  と  $\{|\xi_j\rangle\}_{j=1}^l$  が存在して

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^l \sqrt{p_i} |\zeta_i\rangle |\xi_i\rangle \quad (6.27)$$

と書くことができる。これを Schmidt 分解 (Schmidt decomposition) という。 $p_i$  を Schmidt 係数 (Schmidt coefficient)、 $l$  を Schmidt 階数 (Schmidt rank) と呼び、

$$\sum_{i=1}^l p_i = 1 \quad (6.28)$$

を満たす。

証明. 一般性を失わず  $d := d_1 \leq d_2$  とする。 $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^d$  と  $\{|\xi_j\rangle\}_{j=1}^{d_2}$  をそれぞれ  $\mathcal{H}_1$  と  $\mathcal{H}_2$  の正規直交基底とすると、任意の状態  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  は、

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{d_2} \alpha_{ij} |\phi_i\rangle \otimes |\xi_j\rangle = \sum_{i=1}^d |\phi_i\rangle \otimes \left( \sum_{j=1}^{d_2} \alpha_{ij} |\xi_j\rangle \right) = \sum_{i=1}^d |\phi_i\rangle \otimes |\chi_i\rangle \quad (6.29)$$

とかける。ただし、 $|\chi_i\rangle := \sum_{j=1}^{d_2} \alpha_{ij} |\xi_j\rangle$  とした。ここで、 $(i, j)$  成分が  $X_{ij} := \langle \chi_i | \chi_j \rangle$  で与えられる  $d \times d$  複素行列  $X$  を考える。定義より  $X$  は正値行列なので、 $X$  の固有値はすべて非負である。 $X$  の固有値を大きい順に  $p_1, \dots, p_d \geq 0$  と置き、 $l$  ( $\leq d$ ) 個の固有値が正であるとする。また、 $X$  を対角化する  $d \times d$  ユニタリ行列を  $U$  として、

$$|\eta'_j\rangle := \sum_{i=1}^d U_{ij} |\chi_i\rangle, \quad |\zeta_k\rangle := \sum_{i=1}^d U_{ik}^* |\phi_i\rangle \quad (j, k = 1, \dots, d) \quad (6.30)$$

と置く。<sup>\*5</sup>  $U$  のユニタリ性により、

$$\sum_{k=1}^d U_{ik}^* |\eta'_k\rangle = \sum_{k=1}^d U_{ik}^* \left( \sum_{j=1}^d U_{jk} |\chi_j\rangle \right) = \sum_{j=1}^d \delta_{ij} |\chi_j\rangle = |\chi_i\rangle \quad (6.31)$$

を得る。したがって、

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d |\phi_i\rangle \otimes |\chi_i\rangle = \sum_{i=1}^d |\phi_i\rangle \otimes \left( \sum_{k=1}^d U_{ik}^* |\eta'_k\rangle \right) = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d U_{ik}^* |\phi_i\rangle \otimes |\eta'_k\rangle = \sum_{k=1}^d |\zeta_k\rangle \otimes |\eta'_k\rangle \quad (6.32)$$

が成立する。<sup>\*6</sup>

<sup>\*5</sup> 本に誤植あり

<sup>\*6</sup> 本の証明では  $\{|\zeta_k\rangle\}_{k=1}^d$  が  $\mathcal{H}_1$  の正規直交基底であることを用いて示している。すなわち、 $I = \sum_k |\zeta_k\rangle\langle\zeta_k|$  と、 $\langle\zeta_j|\phi_i\rangle = U_{ij}$  より

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d |\phi_i\rangle \otimes |\chi_i\rangle = \sum_{i=1}^d \left( \sum_{j=1}^d |\zeta_j\rangle\langle\zeta_j| \right) |\phi_i\rangle \otimes \left( \sum_{k=1}^d U_{ik}^* |\eta'_k\rangle \right) = \sum_{j,k=1}^d \left( \sum_{i=1}^d U_{ij} U_{ik}^* \right) |\zeta_j\rangle \otimes |\eta'_k\rangle = \sum_{k=1}^d |\zeta_k\rangle \otimes |\eta'_k\rangle \quad (6.33)$$

と示している。

ところで、 $X$  の対角化

$$\sum_{k,l} U_{ki}^* X_{kl} U_{lj} = p_i \delta_{ij} \quad (6.34)$$

より、

$$\langle \eta'_i | \eta'_j \rangle = p_i \delta_{ij} \quad (6.35)$$

が成り立つため、

$$|\eta_i\rangle := \frac{1}{\sqrt{p_i}} |\eta'_i\rangle \quad (i = 1, \dots, l) \quad (6.36)$$

と置けば、 $\{|\eta_i\rangle\}_{i=1}^l$  は  $\mathcal{H}_2$  の正規直交系（正規直交基底ではない）を成す。 $\langle \psi | \psi \rangle = 1$  を用いると、 $\sum_{i=1}^l p_i = 1$  も示される。以上より、Schmidt の分解定理が示された。

□