Bloch 球と量子状態について

松本侑真

2023 年 9 月 2 日

概要

1 量子ビットの状態を Bloch 球上の点として表現する方法について、基礎事項をまとめる。

目次

1　量子状態について

- n 量子ビットの状態は $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ の元で表される。ゼロベクトル（$|0\rangle \otimes |0\rangle \cdots \otimes |0\rangle$ ではない）は、どのような状態も表さない。
- $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ とする。このとき、

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\} \ni |x\rangle \sim \alpha\,|x\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{1.1}$$

　の同値類は同一状態を表す。したがって、量子状態 $|\psi\rangle$ のノルムは 1 と約束する：

$$|\psi\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\} \wedge \langle\psi|\psi\rangle = 1\ 。\tag{1.2}$$

- $|x\rangle\,, |y\rangle$ を量子状態とする。このとき、$\alpha,\,\beta \in \mathbb{C}$ として、

$$\alpha\,|x\rangle + \beta\,|y\rangle \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0) \tag{1.3}$$

　は量子状態である。

1.1　1 量子ビット系

1qubit の量子状態 $\mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ の元は、$\alpha,\,\beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,\, \langle i|j\rangle = \delta_{ij}\ \ (i,j = 0,1)) \tag{1.4}$$

と表す。$a, b \geq 0,\, 0 \leq t - s < 2\pi$ を用いて

$$\alpha = ae^{is},\, \beta = be^{it} \tag{1.5}$$

とおくと、

$$a = \cos\frac{\theta}{2},\, b = \sin\frac{\theta}{2} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \tag{1.6}$$

と表すことができる。したがって、

$$\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle = e^{is}\left(\cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i(t-s)}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle\right) = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \tag{1.7}$$

と、$\theta,\,\varphi$ を用いて記述することができる。これを Bloch 球表現と呼ぶ。$\theta,\,\varphi$ をこのように設定することで、1qubit の量子状態と Bloch 球上の点を 1 対 1 に対応させることができる。

2 Bloch 球表現

$0 \leq \theta \leq \pi,\, 0 \leq \varphi < 2\pi$ として、

$$\cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \longmapsto (\sin\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta) \tag{2.1}$$

という写像は、1qubit の状態と $\mathbb{R}^3$ の単位球面（Bloch 球）との 1 対 1 対応を与える。例えば、Bloch 球の北極（$\theta = 0$）は $|0\rangle$ の量子状態、南極（$\theta = \pi$）は $|1\rangle$ の量子状態に対応している。この表現を用いることで、量子ゲート（ユニタリ演算子）の作用を Bloch 球上の回転操作と同一視することができる。

2.1 立体射影

1qubit の量子状態 $|\psi\rangle$ から Bloch 球表現への写像の具体形を導出する。

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \tag{2.2}$$

の $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の係数比

$$\alpha = \frac{e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = e^{i\varphi}\tan\frac{\theta}{2} \tag{2.3}$$

は、$|\psi\rangle$ と 1 対 1 に対応する。$0 \leq \theta \leq \pi$ より、α は任意の複素数もしくは ∞ となる（$\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$）。2 つの複素数の比の集合（$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ を「比が等しい」という同値関係で割った集合で、$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視できる）を複素射影直線と呼び、$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で表す。

$\mathbb{R}^3$ における xy 平面上の点 $(x, y, 0)$ を複素数 $x + iy$ と見て、xy 平面を複素平面と同一視する。また、原点を中心とする単位球面を S^2 とおく：

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}\ 。 \tag{2.4}$$

S^2 上の点 $\mathrm{N}(0, 0, 1)$ を北極、$\mathrm{S}(0, 0, -1)$ を南極と呼ぶ。

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して、α に対応する $\mathbb{R}^3$ 上の点を A とする。直線 SA と S^2 の交点のうち、S でない点を P として、写像

$$F \colon \mathbb{C} \ni \alpha \longmapsto \mathrm{P} \in S^2 \setminus \{\mathrm{S}\} \tag{2.5}$$

を定義する。この F を立体射影と呼ぶ。さらに、$F(\infty) = \mathrm{S}$ と定めると、写像

$$F \colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow S^2 \tag{2.6}$$

は全単射となる。F の像としての S^2 を Riemann 球面と呼ぶ。

2.2 状態ベクトルと立体射影

3 Bloch 球上の回転操作

4 Hilbert-Schmidt 表現

4.1 量子ゲート操作の表現行列