基礎から学ぶ量子計算 アルゴリズムと計算量理論

6.2 NP の量子版：QMA（後半：pp.194-pp.199）

松本侑真

2023/12/5

QMA 問題の例

NP 完全問題に対応する QMA 完全問題[1]としては、局所ハミルトニアンに関する次の問題[2]が代表的である：

問題 6.3 (k-LH (k-local Hamiltonian))

- **入力**：n 量子ビット上の k 局所ハミルトニアン

$$H = \sum_{j=1}^{r} H_j \quad \text{（ただし、} 0 \le H_j \le 1\text{）} \tag{1}$$

  および、$\beta - \alpha \ge 1/\mathrm{poly}(n)$ を満たす実数 α, β
- **出力**：H の最小固有値が α 以下ならば YES、β 以上ならば NO

[1]任意の QMA 問題が多項式時間帰着可能であるような QMA 問題

[2]NP 問題 k-SAT の量子版と考えられる

問 6.9

問題：問題 6.3 の出力は、「ある $|\psi\rangle$ が存在して、$\langle\psi|H|\psi\rangle \le \alpha$ ならば YES、どんな $|\psi\rangle$ についても $\langle\psi|H|\psi\rangle \ge \beta$ ならば NO」(★) と書き換えられることを示せ。

問 6.9 の解答

H の最小固有値と固有ベクトルの組を $(E_0, |\psi_0\rangle)$ とする。任意の $|\psi\rangle$ について、変分原理より

$$\langle\psi|H|\psi\rangle \ge \langle\psi_0|H|\psi_0\rangle = E_0 \tag{2}$$

が成立する。$E_0 \le \alpha$ ならば $|\psi_0\rangle$ に対して YES を返せば良い。また、$\forall\,|\psi\rangle[\langle\psi|H|\psi\rangle \ge \beta] \Leftrightarrow E_0 \ge \beta$ であるため、(★) と書き換えられることが示された。

例 6.1

2-LH と 2-SAT の対応

2-SAT 式

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\neg x_1 \lor x_2) \land (x_1 \lor x_3) \land (\neg x_2 \lor \neg x_3) \land (\neg x_1 \lor \neg x_3)$$

は、次のハミルトニアンの集合に対応させれば自然に 2-LH の入力となる：

$$\begin{cases} H_1 = |10\rangle\langle 10|_{12} := |10\rangle\langle 10| \otimes I & \text{（テキストに誤植あり）} \\ H_2 = |00\rangle\langle 00|_{13} := |0\rangle\langle 0| \otimes I \otimes |0\rangle\langle 0| \\ H_3 = |11\rangle\langle 11|_{23} := I \otimes |11\rangle\langle 11| \\ H_4 = |11\rangle\langle 11|_{13} := |1\rangle\langle 1| \otimes I \otimes |1\rangle\langle 1| \end{cases} \tag{3}$$

2-LH と 2-SAT の対応の意味

局所ハミルトニアン H は $H = \sum_{i=1}^{4} H_i$ である。

- 例えば $x_1 = 1,\ x_2 = 0$ の場合、$\neg x_1 \vee x_2 = 0$ となるため $F(1, 0, x_3) = 0$ である。
- これに対応して、$|\psi\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |b\rangle$ では $\langle\psi|H|\psi\rangle > 0$ となる。

$F(x_1, x_2, x_3) = f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \wedge f_4$ と見たときに、$f_i = 1$ に対応する状態 $|\psi_i\rangle$ に対して、$\langle\psi_i|H_i|\psi_i\rangle = 0$ になるように H_i を設計する。
例えば $\alpha = 0,\ \beta = 1$ とすると、この 2-SAT は 2-LH に対応する。[3]

[3] 一般にこのような H_i が存在しなくても、$F = 0$ になる状態に対してハミルトニアンの期待値を大きくし、α, β を適切に設定すれば k-LH に対応させられると思う。

k-LH が QMA に属することの保障

k-LH に対する QMA プロトコル

レジスタ R 上に証拠の候補が $|\psi\rangle_{\mathsf{R}}$ と与えられたとする。

1. レジスタ A に一様重ね合わせ状態

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{j=1}^{r}|j\rangle_{\mathsf{A}}$$

を準備する。

2. レジスタ A の値が j のとき、レジスタ R 上で POVM$\{H_j, I - H_j\}$ を実行する。そして、POVM の要素 H_j に対応する測定値を得たときに reject、$I - H_j$ に対応する測定値を得たときに accept。

k-LH が QMA に属することの保障

検証者が reject を出力する確率は

$$\Pr\left[\text{reject}\right](|\psi\rangle) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\langle\psi|H_j|\psi\rangle = \frac{1}{r}\langle\psi|H|\psi\rangle$$

となる。YES の場合は、ある状態 $|\varphi\rangle$ が存在して

$$\Pr\left[\text{reject}\right](|\varphi\rangle) = \frac{1}{r}\langle\varphi|H|\varphi\rangle \leq \frac{\alpha}{r} \quad \left(\Pr\left[\text{accept}\right](|\varphi\rangle) \geq 1 - \frac{\alpha}{r}\right)$$

となる。NO の場合は、全ての状態 $|\psi\rangle$ に対して

$$\Pr\left[\text{reject}\right](|\psi\rangle) = \frac{1}{r}\langle\psi|H|\psi\rangle \geq \frac{\beta}{r} \quad \left(\Pr\left[\text{accept}\right](|\psi\rangle) \leq 1 - \frac{\beta}{r}\right)$$

となる。