Bloch 球と量子状態について

松本侑真

2023 年 9 月 2 日

概要

1 量子ビットの状態を Bloch 球上の点として表現する方法について、基礎事項をまとめる。

目次

1　量子状態について

- n 量子ビットの状態は $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ の元で表される。ゼロベクトル（$|0\rangle \otimes |0\rangle \cdots \otimes |0\rangle$ ではない）は、どのような状態も表さない。
- $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ とする。このとき、

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\} \ni |x\rangle \sim \alpha\,|x\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{1.1}$$

  の同値類は同一状態を表す。したがって、量子状態 $|\psi\rangle$ のノルムは 1 と約束する：

$$|\psi\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \setminus \{\mathbf{0}\} \wedge \langle\psi|\psi\rangle = 1\ 。 \tag{1.2}$$

- $|x\rangle, |y\rangle$ を量子状態とする。このとき、$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ として、

$$\alpha\,|x\rangle + \beta\,|y\rangle \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0) \tag{1.3}$$

  は量子状態である。

1.1　1 量子ビット系

1qubit の量子状態 $\mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ の元は、$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を用いて

$$\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,\ \langle i|j\rangle = \delta_{ij}\ \ (i, j = 0, 1)) \tag{1.4}$$

と表す。$a, b \geq 0,\ 0 \leq t - s < 2\pi$ を用いて

$$\alpha = ae^{is},\ \beta = be^{it} \tag{1.5}$$

とおくと、

$$a = \cos\frac{\theta}{2},\ b = \sin\frac{\theta}{2} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \tag{1.6}$$

と表すことができる。したがって、

$$\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle = e^{is}\left(\cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i(t-s)}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle\right) = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \tag{1.7}$$

と、θ, φ を用いて記述することができる。これを Bloch 球表現と呼ぶ。θ, φ をこのように設定することで、1qubit の量子状態と Bloch 球上の点を 1 対 1 に対応させることができる。

2 Bloch 球表現

$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ として、

$$\cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \longmapsto (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \tag{2.1}$$

という写像は、1qubit の状態と $\mathbb{R}^3$ の単位球面（Bloch 球）との 1 対 1 対応を与える。例えば、Bloch 球の北極（$\theta = 0$）は $|0\rangle$ の量子状態、南極（$\theta = \pi$）は $|1\rangle$ の量子状態に対応している。この表現を用いることで、量子ゲート（ユニタリ演算子）の作用を Bloch 球上の回転操作と同一視することができる。

2.1 立体射影

1qubit の量子状態 $|\psi\rangle$ から Bloch 球表現への写像の具体形を導出する。

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \tag{2.2}$$

の $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の係数比

$$\alpha = \frac{e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = e^{i\varphi}\tan\frac{\theta}{2} \tag{2.3}$$

は、$|\psi\rangle$ と 1 対 1 に対応する。$0 \leq \theta \leq \pi$ より、α は任意の複素数もしくは ∞ となる（$\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$）。2 つの複素数の比の集合（$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ を「比が等しい」という同値関係で割った集合で、$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視できる）を複素射影直線と呼び、$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で表す。

$\mathbb{R}^3$ における xy 平面上の点 $(x, y, 0)$ を複素数 $x + iy$ と見て、xy 平面を複素平面と同一視する。また、原点を中心とする単位球面を S^2 とおく：

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}\ 。 \tag{2.4}$$

S^2 上の点 $\mathrm{N}(0, 0, 1)$ を北極、$\mathrm{S}(0, 0, -1)$ を南極と呼ぶ。

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して、α に対応する $\mathbb{R}^3$ 上の点を A とする。直線 SA と S^2 の交点のうち、S でない点を P として、写像

$$F \colon \mathbb{C} \ni \alpha \longmapsto \mathrm{P} \in S^2 \setminus \{\mathrm{S}\} \tag{2.5}$$

を定義する。この F を立体射影と呼ぶ。さらに、$F(\infty) = \mathrm{S}$ と定めると、写像

$$F \colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow S^2 \tag{2.6}$$

は全単射となる。F の像としての S^2 を Riemann 球面と呼ぶ。

定理 2.1（立体射影の表現）
立体射影 F は

$$F(x+iy) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\, \frac{2y}{1+x^2+y^2},\, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right) \tag{2.7}$$

で与えられる。

証明

$F(x+iy) = (X,\, Y,\, Z)$ とおく。P は S と A の内分点または外分点となっているため、$SP : AP = t : 1-t$ とおくと、P $\neq$ S より $t \neq 0$ である。$\boldsymbol{SP} = (X,\, Y,\, Z+1)$, $\boldsymbol{PA} = (x-X,\, y-Y,\, -Z)$ なので、

$$X = tx, \quad Y = ty, \quad Z = t-1 \tag{2.8}$$

が成立する。また、P は S^2 上の点なので、t について

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = t^2(x^2+y^2) + (t-1)^2 = 1$$
$$\therefore\ t = \frac{2}{1+x^2+y^2} \tag{2.9}$$

を得る。

2.2　状態ベクトルと立体射影

状態ベクトルの集合 $\longleftrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longleftrightarrow S^2$ がそれぞれ 1 対 1 に対応している。

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \tag{2.10}$$

に対応する $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の元は

$$e^{i\varphi}\tan\frac{\theta}{2} = \cos\varphi\tan\frac{\theta}{2} + i\sin\varphi\tan\frac{\theta}{2} = x+iy \tag{2.11}$$

であった。$x^2+y^2+1 = \tan^2(\theta/2)+1 = \cos^{-2}(\theta/2)$ より、

$$F\left(e^{i\varphi}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\frac{\theta}{2}\left(2\cos\varphi\tan\frac{\theta}{2},\, 2\sin\varphi\tan\frac{\theta}{2},\, 1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right) = (\sin\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta) \tag{2.12}$$

を得る。これは、Bloch 球上の極座標表示と一致し、Bloch 球は立体射影から構成されることがわかった。

3　Bloch 球上の回転操作

量子状態に作用させるユニタリ操作において、$|\boldsymbol{n}| = 1$ なる $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$ を用いて

$$R_n(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{3.1}$$

と表されるものを考える。これを量子状態に作用させると、Bloch 球上では、$\boldsymbol{n}$ 方向の θ 回転を引き起こす。

例：$\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ のとき（z 軸回転）

$$R_z(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z\right) \tag{3.2}$$

に対して、$\sigma_z|0\rangle = |0\rangle, \quad \sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$ になることに注意すると、

$$R_z(\alpha)\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right) = e^{-i\alpha/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i(\varphi+\alpha)}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right) \tag{3.3}$$

となり、Bloch 球上では $(\theta, \varphi) \to (\theta, \varphi + \alpha)$ の変換が行われている。これは、z 軸方向に α 回転していることに他ならない。

他の例として、$\boldsymbol{n}_H = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ に対して、$R_{n_H}(\pi)$ は Hadamard ゲートに対応している。

4　Hilbert-Schmidt 表現

4.1　量子ゲート操作の表現行列