

# プラズマ中の波動

20B01392 松本侑真

2023 年 1 月 25 日

## 概要

## 目次

1	概要	2
1.1	CGS 単位系	2
2	流体としてのプラズマの解析方法	3
2.1	理想流体としてのプラズマの運動方程式	3
2.2	流体に作用するマクロな力を考慮したプラズマの運動方程式	3
2.3	流体プラズマを記述する方程式群	4
2.4	外部磁場に対する流体ドリフトについて	5
2.5	プラズマ近似	7
3	方程式の線形化と単一モード解析	8
4	横波	9
4.1	電子プラズマ波	9
4.2	イオン音波	9
4.3	高域混成振動	9
4.4	低域混成振動	9
4.5	静電イオンサイクロトロン波	9
5	縦波	9
5.1	外部磁場がない場合	9
5.2	正常波	9
5.3	異常波	9
5.4	外部磁場と波数ベクトルが平行な場合	9

# 1 概要

プラズマ中の波動は、外部磁場が印加されている場合とそうでない場合などで沢山の種類に分類される。まずはプラズマ波の一覧を列挙する：

- 縦波 ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ )
  - $B_0 = 0$ 
    - ▷ 電子プラズマ波
    - ▷ イオン音波
  - $B_0 \neq 0$ 
    - ▷ 高域混成振動 ( $T = 0$ )
    - ▷ 低域混成振動
    - ▷ 静電イオンサイクロトロン波 ( $\theta \approx 90 \text{ deg}$  であり、横波成分は必ず含まれる。)
- 横波 ( $\mathbf{k} // \mathbf{E}$ )
  - $B_0 = 0$ 
    - ▷ プラズマ周波数  $\omega_P$  を遮断周波数とした  $\omega > \omega_P$  の通常の電磁波
  - $B_0 = 0 \wedge \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ 
    - ▷  $\mathbf{E}_1 // \mathbf{B}_0$  : 正常波 (O 波)
    - ▷  $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$  : 異常波 (X 波)
  - $B_0 = 0 \wedge \mathbf{k} // \mathbf{B}_0$ 
    - ▷ L 波と R 波である円偏光の重ね合わせの電磁波

## 1.1 CGS 単位系

教科書の単位系では、SI 単位系における  $\varepsilon_0, \mu_0$  に対して

$$\varepsilon_0 \rightarrow \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \quad (1.1)$$

$$\mu_0 \rightarrow 4\pi\mu_0 \quad (1.2)$$

としている。

## 2 流体としてのプラズマの解析方法

プラズマが流体みなせるための条件は

$$\text{イオンや電子の平均自由行程} \ll \text{プラズマサイズ} \quad (2.1)$$

が満たされることである。プラズマ中で荷電粒子が十分に衝突を繰り返し、Maxwell 分布での平衡状態を達成することで温度が定義される。

### 2.1 理想流体としてのプラズマの運動方程式

単一荷電粒子の運動方程式は以下で与えられた：

$$m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = q\{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\}。 \quad (2.2)$$

まず、衝突や熱運動がないと仮定する。このとき、流体要素中のすべての粒子は一緒に動き、粒子の平均速度  $\mathbf{u}$  は個々の粒子の速度  $\mathbf{v}$  に等しい。したがって、流体の方程式は密度  $n$  をかけることによって得られる：

$$mn \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = qn\{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}\}。 \quad (2.3)$$

しかし、このままでは扱いにくい。なぜなら、左辺の時間微分は粒子とともに動いている座標系（Lagrange 座標系）で行わねばならないからだ。この座標系では微小な流体要素の挙動のみを追うことができる。そのため、空間に固定された座標系（Euler 座標系）に変換し、プラズマ全体の集団的挙動を解析できるようにする。すなわち、ある Euler 座標系からの位置ベクトル  $\mathbf{x}$  を用いて、プラズマの速度ベクトルの位置依存性を考慮する：

$$\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \mathbf{u}。 \quad (2.4)$$

ここで、固定された座標系から見たプラズマの位置ベクトルの時間変化  $\dot{\mathbf{x}}$  は流体の移動速度  $\mathbf{u}$  に他ならず、プラズマの運動方程式は以下のように記述される：

$$mn \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn\{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}\}。 \quad (2.5)$$

なお、左辺第二項は対流項と呼ばれるものである。

### 2.2 流体に作用するマクロな力を考慮したプラズマの運動方程式

熱運動や衝突を考慮しない式 (2.5) で表される運動方程式では、流体にかかるマクロな力を考慮していない。流体全体の運動量変化を考えることで、マクロな力が加わった運動方程式が導出される。まずは、簡単のために  $x$  方向の圧力変化を考える。粒子は微小時間  $\Delta t$  の間に平均速度  $\langle v_x \rangle$  で  $\Delta x$  の距離を進むとする。

$x = x_0$  が中心であり、体積  $\Delta x \Delta y \Delta z$  の流体要素に流入する運動量  $P_+$  は

$$P_+ = [(\Delta n \langle v_x \rangle \Delta y \Delta z) m \langle v_x \rangle]_{x_0 - \Delta x} \Delta t \quad (2.6)$$

と表される。ここで、 $\Delta n$  は平均速度  $\langle v_x \rangle$  を持って流体要素に流入してくる粒子数であり、 $\Delta n = n/2$  の関係がある。なお、圧力が定義できているということは、粒子の速度分布は Maxwell 分布になっていることを用いた。流体要素から流出する運動量  $P_-$  は

$$P_- = [(\Delta n \langle v_x \rangle \Delta y \Delta z) m \langle v_x \rangle]_{x_0} \Delta t \quad (2.7)$$

と表される。したがって、流体要素中の運動量変化は逆方向に進む粒子も考慮して、

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = 2 \frac{P_+ - P_-}{\Delta t} = \Delta y \Delta z \frac{[mn \langle v_x^2 \rangle]_{x_0 - \Delta x} - [mn \langle v_x^2 \rangle]_{x_0}}{\Delta t} \quad (2.8)$$

と表される。 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限を取ると、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -m \frac{\partial}{\partial x} (n \langle v_x^2 \rangle) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.9)$$

となる。これが流体自身の正味の圧力変化と等しくなるため、

$$\frac{\partial}{\partial t} (nm u_x) \Delta x \Delta y \Delta z = -m \frac{\partial}{\partial x} (n \langle v_x^2 \rangle) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.10)$$

が成立する。ここで、粒子の速度を流体速度  $u_x$  と熱速度  $v_{xT}$  に分離する：

$$v_x = u_x + v_{xT}, \quad \langle u_x \rangle = u_x, \quad \langle v_{xT} \rangle = 0, \quad \frac{1}{2} m \langle v_{xT}^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T. \quad (2.11)$$

このとき、式 (2.10) は

$$\frac{\partial}{\partial t} (mn u_x) = -m \frac{\partial}{\partial x} [n \langle u_x^2 + 2u_x v_{xT} + v_{xT}^2 \rangle] = -m \frac{\partial}{\partial x} \left[ n \left( u_x^2 + \frac{k_B T}{m} \right) \right] \quad (2.12)$$

$$\therefore mn \frac{\partial u_x}{\partial t} + mu_x \frac{\partial n}{\partial t} = -mu_x \frac{\partial}{\partial x} (nu_x) - mn u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (nk_B T) \quad (2.13)$$

と計算できる。<sup>\*1</sup> また、左辺が質量保存則

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nu_x) = 0 \quad (2.14)$$

を用いて、流体の圧力を  $P = nk_B T$  と置くと、最終的に

$$mn \frac{\partial u_x}{\partial t} = -mn u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.15)$$

となる。したがって、 $y, z$  方向でも同様の議論が成立し、理想的な場合の運動方程式と合わせて

$$mn \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn \{ \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \} - \nabla P \quad (2.16)$$

となる。

## 2.3 流体プラズマを記述する方程式群

### 2.3.1 運動方程式

$$mn \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn \{ \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \} - \nabla P \quad (2.17)$$

### 2.3.2 Maxwell 方程式

電荷密度  $\sigma = n_i q_i + n_e q_e$ 、電流密度  $\mathbf{j} = n_i q_i \mathbf{v}_i + n_e q_e \mathbf{v}_e$  とおける：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi (n_i q_i + n_e q_e) \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.20)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi (n_i q_i \mathbf{v}_i + n_e q_e \mathbf{v}_e) + \dot{\mathbf{E}} \quad (2.21)$$

---

<sup>\*1</sup>  $nu_x^2 = (nu_x) \cdot u_x$  とみなして積の微分法を用いた。

### 2.3.3 連続の式

体積  $V$  中の粒子の総数  $N$  は  $V$  を囲む表面  $S$  を横切る正味の粒子の流束がある場合にのみ変化する。粒子の流束密度は  $n\mathbf{u}$  であるため、Stokes の定理により、

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = - \oint_S (n\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (n\mathbf{u}) dV \quad (2.22)$$

が任意の  $V$  で成立する。したがって、連続の式は以下ようになる：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0. \quad (2.23)$$

### 2.3.4 状態方程式

圧力  $p$  と粒子数密度  $n$  を関係付ける熱力学の状態方程式を扱う：

$$p = C\rho^\gamma. \quad (2.24)$$

ここで、 $C$  は定数で  $\gamma$  は比熱比  $C_p/C_V$  である。したがって、

$$\frac{\nabla p}{p} = \gamma \frac{\nabla n}{n} \quad (2.25)$$

となり、等温圧縮では

$$\nabla p = \nabla(nk_B T) = k_B T \nabla n \quad (2.26)$$

が成立するため、明らかに  $\gamma = 1$  となる。断熱圧縮に対しては、自由度  $N$  に対して

$$\gamma = (2 + N)/N \quad (2.27)$$

が成立する。

## 2.4 外部磁場に対する流体ドリフトについて

### 2.4.1 外部磁場に垂直な流体ドリフト

流体要素はたくさんの粒子から成っているため、個々の粒子の旋回中心が外部磁場  $\mathbf{B}$  に垂直な方向にドリフトをすれば、流体も  $\mathbf{B}$  に垂直な方向にドリフトされることが期待される。しかし、実際は  $\nabla \mathbf{B}$  ドリフトは流体中に存在せず、圧力勾配が存在する場合には流体全体のドリフト運動が生じることを示す。

まず、プラズマ中の粒子の運動方程式

$$mn \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = qn \{ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \} - \nabla P \quad (2.28)$$

において、 $\mathbf{v} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  とおく。また、磁場に垂直な成分  $\mathbf{v}_\perp$  の運動を考えることにする。サイクロトロン角周波数  $\omega_c = qB/m$  を用いると、

$$\left| \frac{mn \partial \mathbf{v}_\perp / \partial t}{qn \mathbf{v}_\perp B} \right| = \left| \frac{m\omega}{qB} \right| \approx \frac{\omega}{\omega_c} \quad (2.29)$$

となるため、サイクロトロン運動の時間スケールより遅いドリフトであれば  $\partial \mathbf{v}_\perp / \partial t$  は無視できる。また、後にわかることであるが、対流項は  $(\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{v}_\perp = 0$  となるため、無視して計算を行う。 $\mathbf{B}$  との外積を作ることで、運動方程式は以下のように変形できる：

$$\begin{aligned} 0 &= qn [\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \nabla P \times \mathbf{B} \\ &= qn [\mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{B}(\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{v}_\perp B^2] - \nabla P \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

したがって、

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla P \times \mathbf{B}}{qnB^2} =: \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_D \quad (2.31)$$

と求まる。ここで、

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad \mathbf{E} \times \mathbf{B} \text{ ドリフト} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v}_D = -\frac{\nabla P \times \mathbf{B}}{qnB^2} \quad \text{反磁性ドリフト} \quad (2.33)$$

である。反磁性ドリフトによってプラズマが反磁性の性質を持つことを図解する。図 1 は、円柱プラズマ内に磁場が印加されており、中心軸方向に圧力勾配が存在する場合を表している。

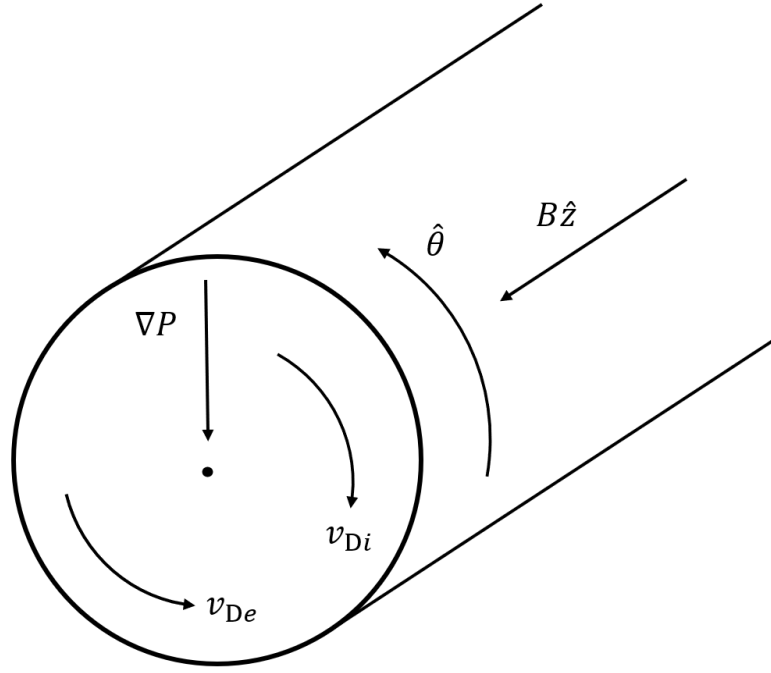


図 1: 円柱プラズマ内の反磁性ドリフト

$\nabla P \propto -\hat{r}$ ,  $\mathbf{B} \propto \hat{z}$  であるため、 $\mathbf{v}_D \propto -\hat{\theta}$  となる。すなわち、イオンの反磁性ドリフト、電子の反磁性ドリフトそれぞれが外部磁場  $\mathbf{B}$  を打ち消す方向の円電流を生むことがわかる。そのため、プラズマ内に同じ方向の電流  $j_D$  が生じることがわかる。その値はプラズマ近似  $n_i = n_e = n$  の元で

$$\mathbf{j}_D = qn(\mathbf{v}_{Di} - \mathbf{v}_{De}) = (k_B T_i + k_B T_e) \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2} \quad (2.34)$$

である。最後に、対流項が磁場に垂直な成分を持たないことを示す。

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} v_r & v_\theta & v_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

であることと、 $\mathbf{v}_D = v(r)\hat{\theta}$  と表されることより、

$$(\mathbf{v}_D \cdot \nabla) \mathbf{v}_D = \left( v(r) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v(r) \hat{\theta} = 0 \quad (2.36)$$

となる。

## 2.4.2 外部磁場に平行な流体ドリフト

流体の運動方程式の  $z$  成分は

$$mn \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z \right] = qnE_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.37)$$

である。対流項は時間微分項に比べて無視できることが多い。 $p = Cn^\gamma$  を代入すると、

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{qE_z}{m} - \frac{\gamma k_B T}{mn} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (2.38)$$

となる。 $m \rightarrow 0$  の極限（イオンに比べて電子の方が質量が小さいため、電子に対する運動方程式を考えていることになる。）をとると、

$$qE_z = \frac{\gamma k_B T}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (2.39)$$

となる。 $q = -e$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  を用いて両辺を積分すると、

$$n = n_0 \exp \left( \frac{e\phi}{k_B T} \right) \quad (2.40)$$

と求まる。すなわち、プラズマ中の電子（外部磁場に平行な成分）は Boltzmann 分布をしていることになる。イオンに比べて電子の質量は非常に小さいため、電子は大きな移動度を持つ。電場によって速やかに高エネルギーに加速されるため、このような分布を取る。

## 2.5 プラズマ近似

電子の慣性項が無視できるとき、電子運動は低周波でなければならない。逆に、高周波の運動を考える際には電子の慣性項が無視できなくなる： $m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} \neq 0$ 。

電子が低周波運動を行っているとき、プラズマでは普通  $n_i = n_e$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$  を同時に満たされると仮定することが可能である。これをプラズマ近似と呼ぶ。プラズマ近似が成立している際に  $\mathbf{E}$  を求めるために Poisson 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e) \quad (2.41)$$

を用いることができないことに注意する必要がある。また、電子が高周波で運動している場合にプラズマ近似ができないのは、イオンの質量が大きいため電子の運動に追従することができなくなり、電子とイオンの密度に差が生じてしまうからである。

### 3 方程式の線形化と単一モード解析

いろんな種類の波に対する共通の考え方が方程式の線形化と単一モード解析である。単一モード解析とは、各周波数  $\omega$  と波数  $k$  を用いて、物理量  $\mathbf{A}$  が

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \quad (3.1)$$

と表されることを元にして分散関係を導出することである。方程式の線形化とは、全ての物理量を平衡成分と摂動成分（それぞれ添え字に 0 と 1 を）に分けることである。そして、その摂動成分がどのような関数系になっているかを導出するということである。また、摂動成分はその 1 次項までで近似する。例として、電子に対する方程式群

$$mn_e \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -en_e \mathbf{E} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi en_e \quad (3.4)$$

を線形化してみる。 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$  として、 $\mathbf{E}_1$  成分について線形化すると、

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -e \mathbf{E}_1 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_{e0} \nabla \cdot \mathbf{v}_{e1} + \mathbf{v}_{e0} \cdot \nabla n_{e0} = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -4\pi en_{e1} \quad (3.7)$$

と 1 次の摂動で書ける。すべての摂動を  $\exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}$  として、 $\mathbf{v}_{e1} = v_1 \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{E}_1 = E_1 \hat{\mathbf{x}}$  として解くと、線形化した方程式は

$$-im\omega v_1 = -eE_1 \quad (3.8)$$

$$-i\omega n_{e1} = -n_{e0} ikv_{e1} \quad (3.9)$$

$$ikE_1 = -4\pi en_{e1} \quad (3.10)$$

となる。これはイオンについても同様に成立する。上の 2 式から

$$n_{e1} = \frac{k}{\omega} n_{e0} v_{e1} = \frac{k}{\omega} n_{e0} \left( \frac{-ie}{m\omega} \right) E_1 \quad (3.11)$$

となり、これを最後の式に代入すると、

$$\omega^2 E_1 = \frac{4\pi n_{e0} e^2}{m} E_1 \quad (3.12)$$

となり、

$$\omega_{p_e} = \sqrt{\frac{4\pi n_{e0} e^2}{m}} \quad (3.13)$$

を電子プラズマ周波数と呼ぶ。質量  $M$  のイオンの寄与まで考えると、

$$\omega^2 E_1 = 4\pi n_{e0} e^2 \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) E_1 \quad (3.14)$$

となり、

$$\omega_{p_i} = \sqrt{\frac{4\pi n_{e0} e^2}{M}} \quad (3.15)$$

をイオンプラズマ周波数と呼ぶ。



## 4 横波

### 4.1 電子プラズマ波

### 4.2 イオン音波

### 4.3 高域混成振動

### 4.4 低域混成振動

### 4.5 静電イオンサイクロトロン波

## 5 縦波

### 5.1 外部磁場がない場合

### 5.2 正常波

### 5.3 異常波

### 5.4 外部磁場と波数ベクトルが平行な場合