

プラズマ中の波動

20B01392 松本侑真

2023 年 1 月 20 日

概要

目次

1	概要	2
2	流体としてのプラズマの解析方法	2
2.1	理想流体としてのプラズマの運動方程式	2
2.2	流体に作用するマクロな力を考慮したプラズマの運動方程式	3

1 概要

プラズマ中の波動は、外部磁場が印加されている場合とそうでない場合などで沢山の種類に分類される。まずはプラズマ波の一覧を列挙する：

- 縦波 ($\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$)
 - $B_0 = 0$
 - ▷ 電子プラズマ波
 - ▷ イオン音波
 - $B_0 \neq 0$
 - ▷ 高域混成振動 ($T = 0$)
 - ▷ 低域混成振動
 - ▷ 静電イオンサイクロトロン波 ($\theta \approx 90 \text{ deg}$ であり、横波成分は必ず含まれる。)
- 横波 ($\mathbf{k} // \mathbf{E}$)
 - $B_0 = 0$
 - ▷ プラズマ周波数 ω_P を遮断周波数とした $\omega > \omega_P$ の通常の電磁波
 - $B_0 = 0 \wedge \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$
 - ▷ $\mathbf{E}_1 // \mathbf{B}_0$ ：正常波 (O 波)
 - ▷ $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$ ：異常波 (X 波)
 - $B_0 = 0 \wedge \mathbf{k} // \mathbf{B}_0$
 - ▷ L 波と R 波である円偏光の重ね合わせの電磁波

2 流体としてのプラズマの解析方法

プラズマが流体みなせるための条件は

$$\text{イオンや電子の平均自由行程} \ll \text{プラズマサイズ} \quad (2.1)$$

が満たされることである。プラズマ中で荷電粒子が十分に衝突を繰り返し、Maxwell 分布での平衡状態を達成することで温度が定義される。

2.1 理想流体としてのプラズマの運動方程式

単一荷電粒子の運動方程式は以下で与えられた：

$$m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = q\{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\}。 \quad (2.2)$$

まず、衝突や熱運動がないと仮定する。このとき、流体要素中のすべての粒子は一緒に動き、粒子の平均速度 \mathbf{u} は個々の粒子の速度 \mathbf{v} に等しい。したがって、流体の方程式は密度 n をかけることによって得られる：

$$mn \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = qn\{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}\}。 \quad (2.3)$$

しかし、このままでは扱いにくい。なぜなら、左辺の時間微分は粒子とともに動いている座標系 (Lagrange 座標系) で行わねばならないからだ。この座標系では微小な流体要素の挙動のみを追うことができる。そのため、空間に固定された座標系 (Euler 座標系) に変換し、プラズマ全体の集団的挙動を解析できるようにする。すなわ

ち、ある Euler 座標系からの位置ベクトル \mathbf{x} を用いて、プラズマの速度ベクトルの位置依存性を考慮する：

$$\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \mathbf{u}。 \quad (2.4)$$

ここで、固定された座標系から見たプラズマの位置ベクトルの時間変化 $\dot{\mathbf{x}}$ は流体の移動速度 \mathbf{u} に他ならず、プラズマの運動方程式は以下のように記述される：

$$mn \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn \{ \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \}。 \quad (2.5)$$

なお、左辺第二項は対流項と呼ばれるものである。

2.2 流体に作用するマクロな力を考慮したプラズマの運動方程式

熱運動や衝突を考慮しない式 (2.5) で表される運動方程式では、流体にかかるマクロな力を考慮していない。流体全体の運動量変化を考えることで、マクロな力が加わった運動方程式が導出される。まずは、簡単のために x 方向の圧力変化を考える。粒子は微小時間 Δt の間に速度 v_x で Δx の距離を進むとする。

$x = x_0$ が中心であり、体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ の流体要素に流入する運動量 P_+ は

$$P_+ = [(\Delta n v_x \Delta y \Delta z) m v_x]_{x_0 - \Delta x} \Delta t \quad (2.6)$$

と表される。ここで、 Δn は速度 v_x を持って流体要素に流入してくる粒子数であり、 $\Delta n = n/2$ の関係がある。なお、圧力が定義できているということは、粒子の速度分布は Maxwell 分布になっていることを用いた。流体要素から流出する運動量 P_- は

$$P_- = [(\Delta n v_x \Delta y \Delta z) m v_x]_{x_0} \Delta t \quad (2.7)$$

と表される。したがって、流体要素中の運動量変化は逆方向に進む粒子も考慮して、

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = 2 \frac{P_+ - P_-}{\Delta t} = \Delta y \Delta z \frac{[m n v_x^2]_{x_0 - \Delta x} - [m n v_x^2]_{x_0}}{\Delta t} \quad (2.8)$$

と表される。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取ると、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -m \frac{\partial}{\partial x} (n v_x^2) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.9)$$

となる。これが流体自身の正味の圧力変化と等しくなるため、

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m u_x) \Delta x \Delta y \Delta z = -m \frac{\partial}{\partial x} (n v_x^2) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.10)$$

が成立する。ここで、粒子の速度を流体速度 u_x と熱速度 v_{xT} に分離する：

$$v_x = u_x + v_{xT}, \quad \bar{v}_x = \bar{u}_x, \quad \frac{1}{2} m \bar{v}_{xT} = \frac{1}{2} k_B T。 \quad (2.11)$$