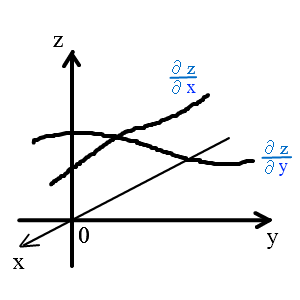
●偏微分と全微分

２変数関数 のグラフにすると、３次元空間に浮かぶ平面や曲線といった「面」になる。

ある2変数関数が表している曲面に接する平面を接平面という。

そして、その説平面の傾きを求めるのが、「全微分」

平面を方向に切った時に現れる曲線の傾きを求めるのが、

「における偏微分」

も同様。

偏微分：に関して、

に関する偏微分：以外を定数として微分する。

に関しても、同様なことが言える。

（例）の時、

に関する偏微分：　,　に関する偏微分：

参考URL：http://remedics.air-nifty.com/main/2016/04/post-1859.html

●全微分：に関して、の全微分は、

（例1）今、基本単位ベクトルを、とする。

（例2）

とする。

（例3）

●勾配ベクトル

2変数関数に対して、2次元勾配ベクトルは、で定義する。

（例）のにおける勾配ベクトル

で偏微分すると、これは、の時、

また、も同様にして、

よって、求める勾配ベクトルは、

●∇（ナブラ）ちゃんの公式

をスカラー関数、をベクトル関数とする。

これらに関する∇（ナブラ）ちゃんの公式は次の３つ。

①、　　　　②

：ベクトル関数との外積。

∇（ナブラ）ちゃんをスカラー関数との内積で表したものを勾配といい、次のように表される。

※スカラー関数から、ベクトルができている。

※ある点から、最も値が変化するのはどの向きかを表したのが勾配。

|  |
| --- |
| （例1）今、基本単位ベクトルを、とする。  （例2）  とする。  今、  よって、  （例3）  今、  よって、 |

∇（ナブラ）ちゃんをベクトル関数との内積で表したものを発散といい、次のように表される。

※発散は、スカラー量になっていることに注意。

※ベクトルからスカラーが出る。

∇（ナブラ）ちゃんをベクトル関数との外積で表したものを回転またはカールといい、次のように表される。

※回転は、ベクトルになっている。

※ベクトルから、ベクトルが出てくる。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| （練習①）の証明。  （練習②）  ここで、スカラー三重積の性質  と  外積の交換法則より次のことが言える。   |  | | --- | | 外積の性質  交換法則：  分配法則：  結合法則： |  |  | | --- | | ベクトル三重積（外積の外積）：3つのベクトルの値からベクトル値を返す。  以下の性質が成り立つ。  ①、②を合わせてラグランジュの公式とも呼ばれる。  ①  ②  ③ |  |  | | --- | | スカラー三重積：外積と内積を組み合わせたもの。スカラー値を返す。  が成り立つ。  実際に、  ※1回行を入れ替えるとマイナスが付く。2回でプラス。  が成り立つ。  実際に、 | |

スカラー3重積・ベクトル3重積参考URL：<http://www.li.nu/blog/2010/07/-1-2.html>

∇（ナブラ）ちゃん参考URL：<http://www.li.nu/blog/2010/07/-2-2.html>

<http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/20vectr/020vct.html>

●変分 : 無限ベクトル（関数）で微分をとる。

まず、ベクトルは、ｎ次元ベクトルから実数への関数であることの説明。

数学の記号で表すと、

|  |
| --- |
| の説明。 |

次のように、ベクトルからスカラーへの関数になっている。

|  |
| --- |
| V=[5,3,2,1]（これは、）であるとする。  このとき、V[0]=5(0番目は5である)、V[3]=2(3番目は2である)  であるとすると、  このベクトルを無限に考えたのが普段考えている関数で、実数の稠密性よりΣでなく、積分で考えることができる。 |

次に、ベクトルに関する∇を考える。

今、とおく。

この時の、は次のようになる。

|  |
| --- |
| これは、普段考えている合成関数の微分と同じように考えればいい。  の微分は、と置き、それぞれを微分して考えた。  実際に、は、と置き、  これを一般化して、の形であらわすと、  次に、これを∇𝑏さらに、これをの形で表すと、 |

よって、具体的な変分を考える。

|  |
| --- |
| とする。  ※としても良い。 |

●ヤコビアン：変換の拡大率を表す量。

●ヤコビ行列：

重積分の変数変換

今、から、新しい座標に移ることを考える。

と書くことにする。このときで見た積分領域Aが、では、Bになるとする。

また、上の変数変換をしてを表したものをと書くことにする。

ここで、は、でどのように書き表せるか。

B

A

変数変換によって、座標が伸び縮み（ひねり）した効果を表すものが必要。これがヤコビアン。

参考URL：<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/06/zoku15-060511.pdf>

●ラグランジュ乗数法

のもとで、を最大化したい。

を作ると、が極値をあたえる。

は、の解。または、の解。

（例）のもとで、の最大値を求める

この3式より、をえる。

●言葉

PDF（Probability density function）：確率密度関数

Mean：期待値

Mode：最も現れる所

Median：ちょうど半分の所

Variance：分散

宿題

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | コーシー列  無限数列について、が成り立つ時、はコーシー列という。 |  |  | | --- | | 論法  無限数列について、が成り立つ。 |  |  | | --- | | 有界  数列が有界である。 | |

仮定より、次が成り立つ。

背理法(否定をとり、矛盾が生じること)によって証明する。

上式右辺より、 であるとする。

よって、に反するため、矛盾。よって示せた。

これを論法で書き表すと次のようになる。

よって、に矛盾。

●全微分

|  |  |
| --- | --- |
|  | + |

をだけ動かすと、はどれだけ動くか。

これを、に置き換えると、

よって、

●テイラー展開

平均値の定理より、

|  |
| --- |
| 平均値の定理  関数が、区間で微分可能、かつ、ならば、  を満たすが存在する。 |

また、ロルの定理より、

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | ロルの定理  関数が、区間で微分可能、かつ、ならば、  を満たすが存在する。 |   と置き、はを満たす定数とする。上記の定義より、。そのため、ロルの定理を適用できる。つまり、を満たすが存在する。  上記の式の両辺を微分すると、  今、より、である。  また、仮定、より、 |

以上の平均値の定理とロルの定理より、テイラー展開の公式は得られる。