2. בקרת מיקום מערכת SRV02 בשיטות LQR, Ziegler-Nichols ו-Auto-tuning באמצעות Relay

2.1. תקציר

המערכת עליה מבוצע הניסוי המתואר בחלק זה של הדו"ח מתוארת לפי פונקציית התמסורת הבאה:

$$\frac{\Omega_l(s)}{V_m(s)} = \frac{K}{(\tau s + 1)} \tag{3}$$

כאשר $\Omega\ [s]$ הינו טרנספורמציית לפלס של מהירות ציר ההעמסה $\omega_t(t)$, $V_m(s)$ הוא טרנספורמציית לפלס של מתח הכניסה למנוע $v_m(t)$, K הוא הגבר מצב מתמיד, τ הוא קבוע זמן ו-s הוא אופרטור לפלס.

על מנת לבקר את המערכת יחושבו קבועי הבקר PID באמצעות שלוש שיטות: LQR, שיטת זייגלר-ניקולס וכיוונון אוטומטי מבוסס Relay.

הקודים ופרטים טכניים נוספים מוצגים בנספחים בסוף הדוח למען שלמות התיעוד והמימוש.

2.2. תיאוריה ומדידות

2.2.1. Linear Quadratic Regulator - LQR

שיטת הבקרה ב-LQR מתבססת על פונקציית מחיר שהמהנדס ירצה למזער. פונקציה זו בצורתה המפורשת היא:

$$\boldsymbol{J} = \int_0^\infty \boldsymbol{x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)\ dt} \tag{4}$$

$$= \int_0^\infty [\boldsymbol{\theta} \quad \boldsymbol{\alpha} \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{q_2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{q_3} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{q_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{uRu\ dt} =$$

$$\boldsymbol{J} = \int_0^\infty \boldsymbol{\theta^2 q_1 + \alpha^2 q_2 + \dot{\theta}^2 q_3 + \dot{\alpha}^2 q_4 + u^2 R\ dt}$$

כאשר Q ו-R הן מטריצות משקלים ומשמשות את המתכנן לקביעת הפרמטרים החשובים לתכן והיחסים ביניהם.

הבקר, לפי משפט הבקרה מתקבל מהמשוואה:

$$u(t) = Kx(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) \tag{5}$$

גודל הפרמטרים של Q מגדיר את חשיבות הדיוק במשתני המערכת לתכן. לדוגמה, q_2 מייצג את משקל החשיבות של זווית העיוות של הזרוע, והגדלת פרמטר זה תוביל לתכנון בו זווית זו תהיה קטנה יותר בזמן פעולת הבקר. הגדלת ערכים אלו יגרמו להגדלת הגבר הבקר המתאים למשתנה, ובאופן כללי להגדלת ערך הכניסה של הבקר u, כאשר ערך המשתנה המתאים אינו אפסי. מהצד השני, R מייצג את חשיבות מזעור הכניסה, או עלות הפעלת המנוע. הגדלת R תוביל לערכי הגבר כניסה קטנים יותר מה שיקטין את הכניסה u על חשבון מהירות התייצבות המערכת.

במערכת הניסוי ערכי מטריצות המשקלים נבחרו בצורה שהסתמכה על דו״ח 2 בקורס זה, כמובא במטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\tau & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ K \\ 0 \end{pmatrix};\ Q = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ R = (1)$$

הערכים הראשוניים שהתקבלו מהצבת פקודת LQR עם המערכת ומטריצות המשקלים הם:

$$.k_i = 1.73,\ k_p = 11.79,\ k_v = 0.23$$

2.2.2. Auto Tuning לפי Zeigler and Nicholas

שיטת כיול בקרים זו בעלת שתי וריאציות: מאפיינים במישור הזמן ומאפיינים במישור התדר. בדוח זה בוצעה השיטה המבוססת על התגובה במישור הזמן, בה מועבר משיק לתגובה לכניסת מדרגה בנקודה בעלת השיפוע המקסימלי ומציאת החיתוך שלו עם הצירים t ו-y (התגובה) שבהתאמה נותנים את הפרמטרים τ ו-a. למציאת ההגברים של הבקר הפרמטרים מוצבים בטבלה הבאה:

טבלה 1: מציאת קבועים לבקר לפי שיטת ZN

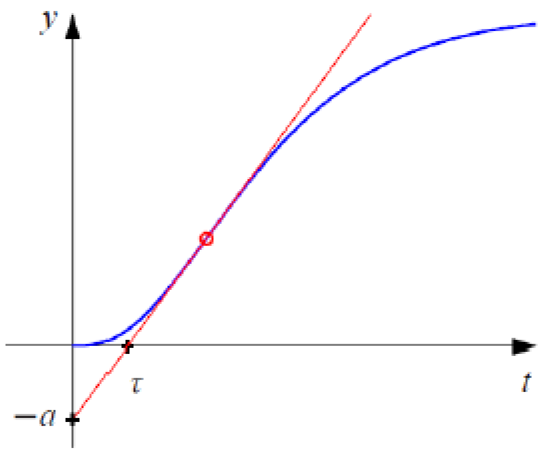
Type	k_p	T_i	T_d
P	1/a		
PI	0.9/a	3τ	
PID	1.2/a	2τ	0.5τ

על מנת לבצע Auto-tuning, האלגוריתם ב- MATLAB מחשב אוטומטית את פרמטרי המערכת מתגובה למדרגה. התוכנה מבצעת step response מוצאת את נקודת השיפוע המקסימלי ומחשבת את τו-a אוטומטית כך:

$$a = -(-\frac{dy}{dt}_{max} \cdot t_0 + \theta_0) \tag{6}$$

$$\tau = t_0 - \frac{\theta_0}{\frac{dy}{dt}_{max}} \tag{7}$$

הקבועים שהתקבלו הם : $\tau = 0.025$ ו-$-a = 0.0588$.



איור 8: המחשה של מציאת הקבועים לשיטת ZN באמצעות העברת משיק לתגובה

2.2.3. Auto Tuning באמצעות Relay

בשיטה זו מובאת מערכת המקבלת אות מדרגה לסף יציבות על ידי הגדלת ההגבר עד לערך שנקרא ההגבר הקריטי. לאחר מכן, ניתן להציב את זמן המחזור שמתקבל מהתגובה ואת ההגבר הקריטי בטבלה 2 ולקבל את הבקר :

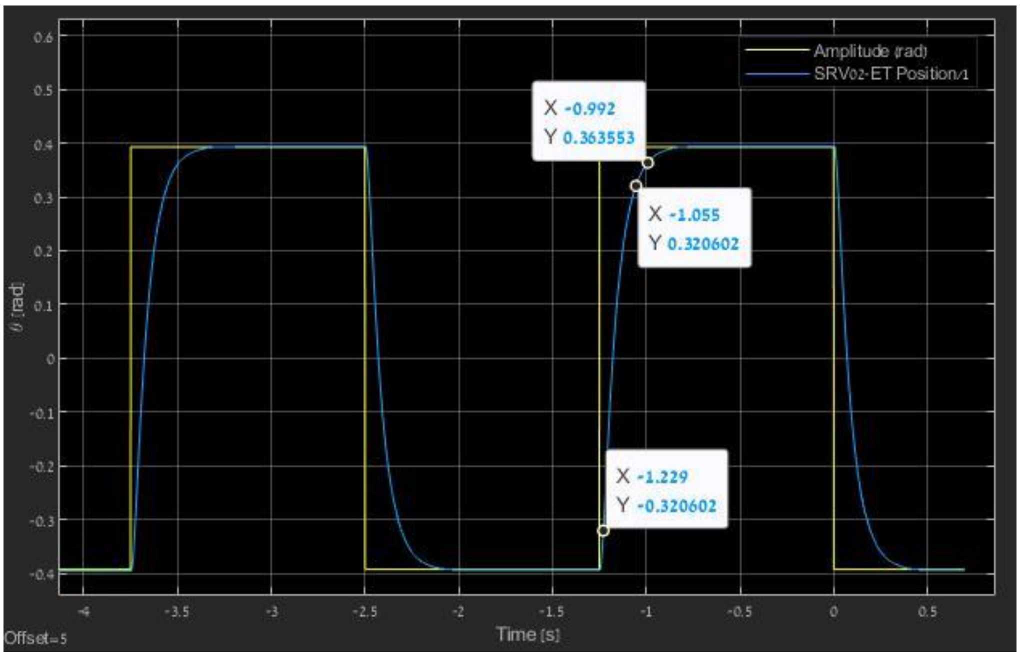
טבלה 2: מציאת קבועים לבקר לפי שיטת Auto Tuning באמצעות Relay

Type	k_p	T_i	T_d
P	$0.5k_c$		
PI	$0.4k_c$	$0.8T_c$	
PID	$0.6k_c$	$0.5T_c$	$0.125T_c$

הקבועים שהתקבלו בסימולציה עבור מערכת הניסוי הם $k_c = 11.3861$ ו-$T_c = 0.3631$. לכן הבקר מורכב מהקבועים $K_v = 0.05$, $k_p = 6.83$ ו- $k_i = 0.18$.

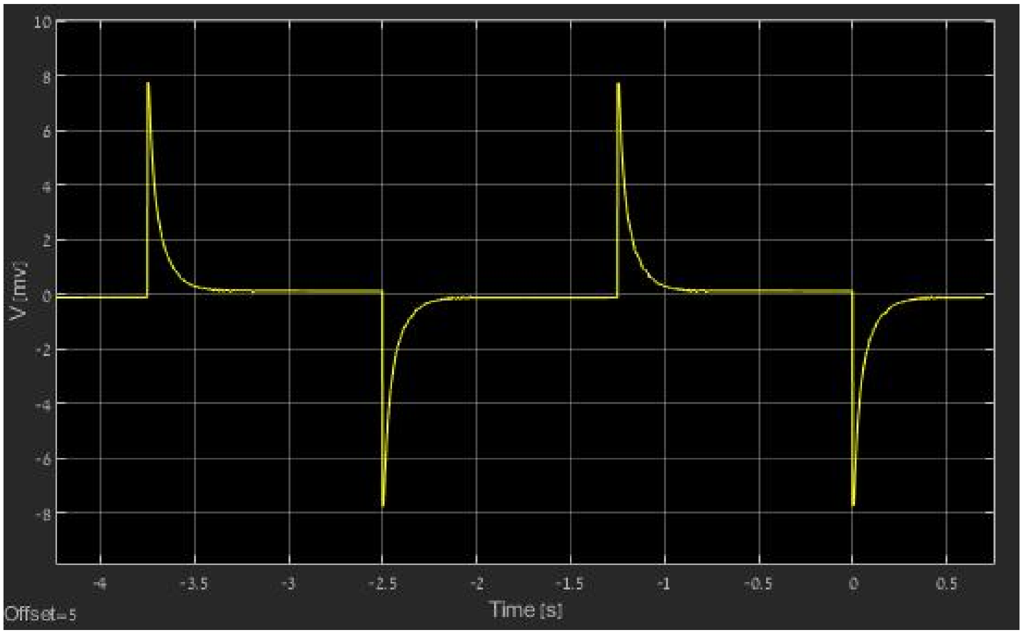
2.3. תוצאות הבקר בשיטת LQR

הבקר הראשון שנבחן הוא בקר LQR עם הקבועים $k_v = 0.31$, $k_p = 10$ ו-$k_i = 3.88$. התגובה לכניסת מדרגה היא:



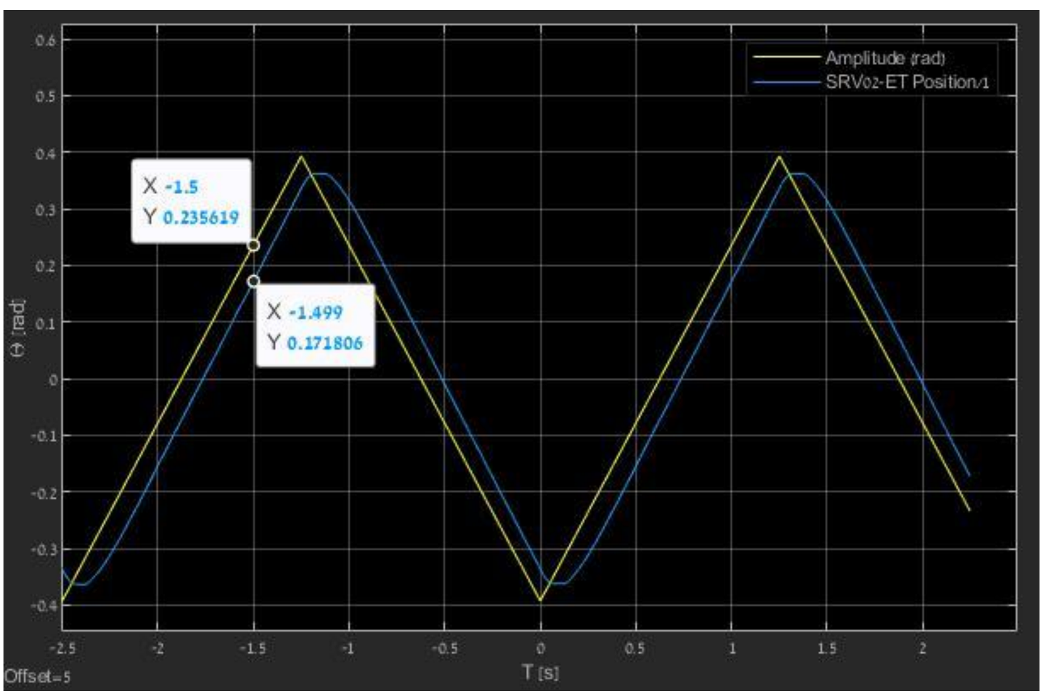
איור 9: תגובת המערכת עם בקר בשיטת LQR לכניסת מדרגה

ניתן לראות שמתקבלת עקיבה כמעט מושלמת אחרי אות הכניסה, זמן עלייה (בהסטה של הזמן 5 שניות בתחילת הניסוי שהייתה טעות במערכת הניסוי) $t_r = -1.055 + 1.229 = 0.174\ [s]$ והזמן כניסה לשרוול של 5% הוא כ-$t_p = -0.992 + 1.75 = 0.758\ [s]$. בנוסף, עוצמת אות הבקרה אינה עוברת $[V]$ 10 ואינה גורמת למנוע להכנס לסטורציה:



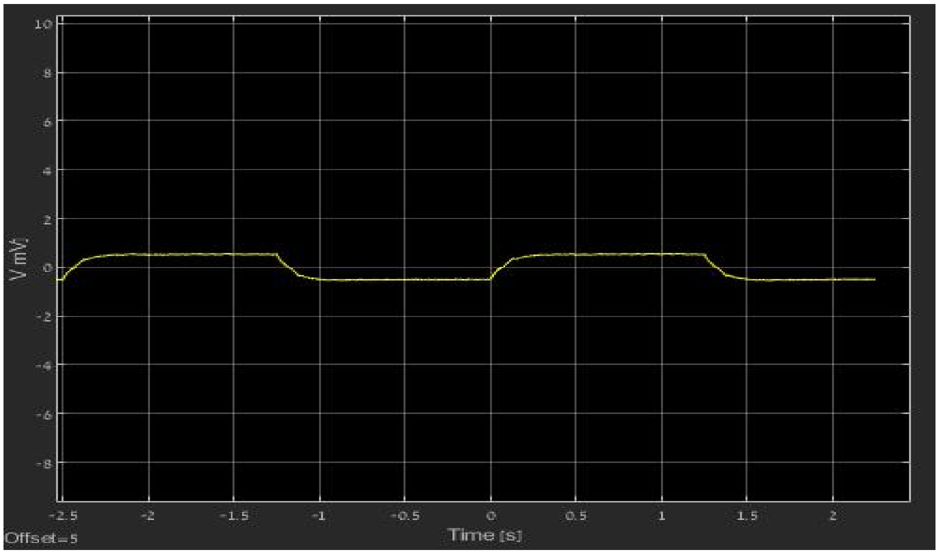
איור 10: מתח אות הבקרה עם בקר בשיטת LQR לכניסת מדרגה

לאחר שהתקבלה תגובה טובה לכניסת מדרגה, ייבחן הבקר אל מול כניסת מהירות. ניתן לראות באיור 6 שלמערכת שגיאה קבועה אחריי האות של כ- $e_{ss} = 0.235 - 0.171 = 0.064\ [rad]$ שזה כ-אחוז מאות הכניסה.



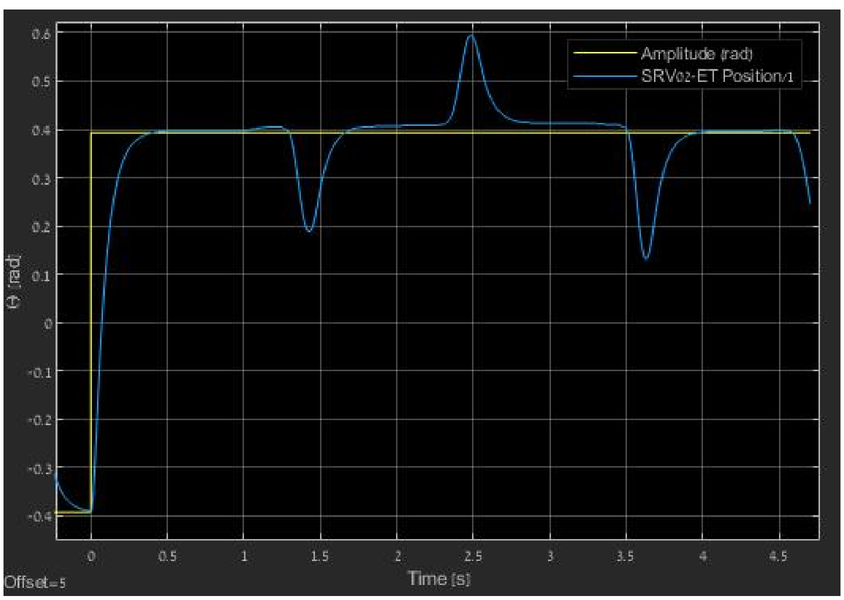
איור 11: תגובת המערכת עם בקר בשיטת LQR לכניסת מהירות

שגיאה זו צפויה בהתחשב בכך שלמערכת מסדר אפס, כמו למערכת בניסוי, תהיה שגיאה לכניסת מהירות גם עם בקר אינטגרלי. בנוסף, גם במקרה זה מאמץ הבקרה לא גרם לרוויה במנוע והמתח קטן מ- $10\ [V]$:



איור 12: מתח אות הבקרה עם בקר בשיטת LQR לכניסת מהירות

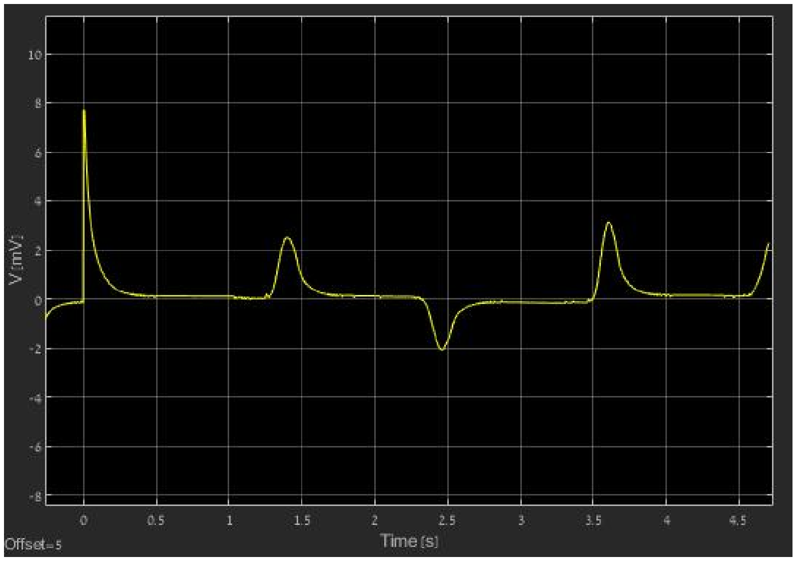
האלמנט האחרון שנבדק בבקר זה היה העמידות שלו מול הפרעות חיצוניות למערכת. בחלק זה הוכנסו הפרעות באמצעות מגע בגלגל השיניים שמחובר למערכת מלמעלה ונבדקה השפעה על אות הבקרה.



איור 13: תגובת המערכת עם בקר בשיטת LQR להפרעות

המערכת הצליחה להתייצב על אות הערך של אות הכניסה בהניתן וקיבלה מספיק זמן "להתאוששׁ" מההפרעה, אך החזרה לאות הייתה איטית יחסית. יש לבדוק את מצב המתח מהמנוע על מנת לוודא

שבאמת הבקר נותן למערכת את המתח הדרוש או שאינו משתמש במלוא עוצמת המנוע לחזרה למעקב אחריי האות.

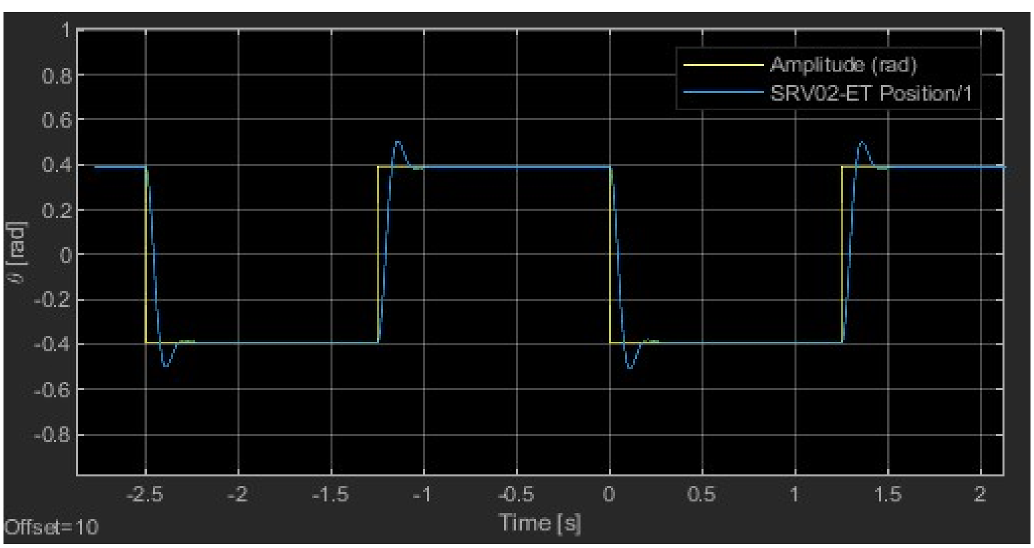


איור 14: מתח אות הבקרה עם בקר בשיטת LQR להפרעות

כפי שניתן לראות, הבקר אינו מפעיל מאמץ בקרה גבוה מהמנוע על מנת לחזור לעקיבה אחר אות הכניסה.

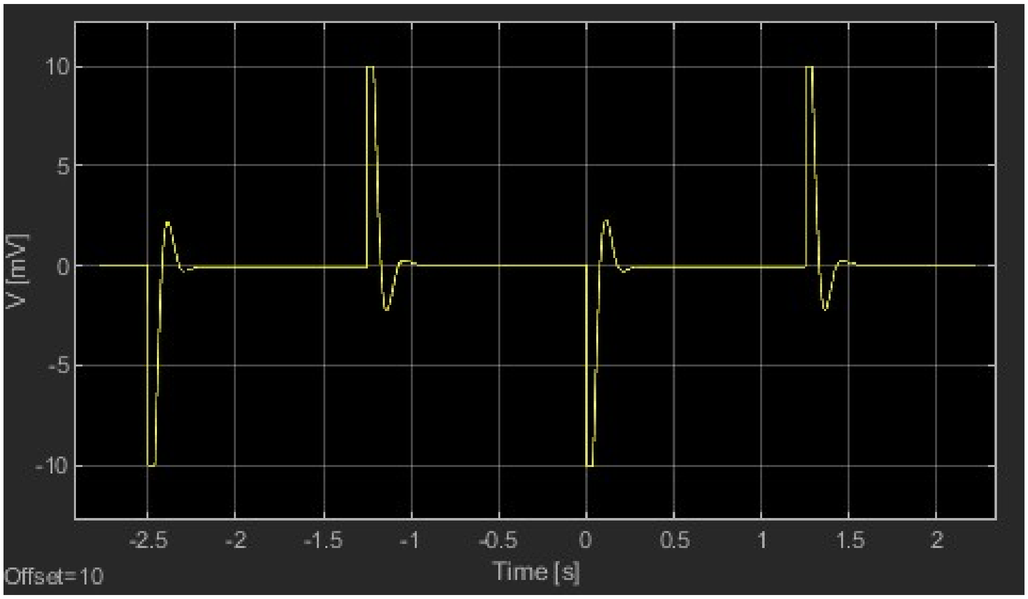
2.4. תוצאות הבקר בשיטת Zeigler and Nicholas

בניגוד לשיטת LQR, העבודה בשיטת Z&N דרשה כיול משמעותי של הבקר. הבקר הראשון שהתקבל היה בעל הקבועים $k_v = 5 \cdot 10^{-4}$, $k_p = 20.4$ ו-$k_i = 0.002$. התגובה הבאה התרחשה:



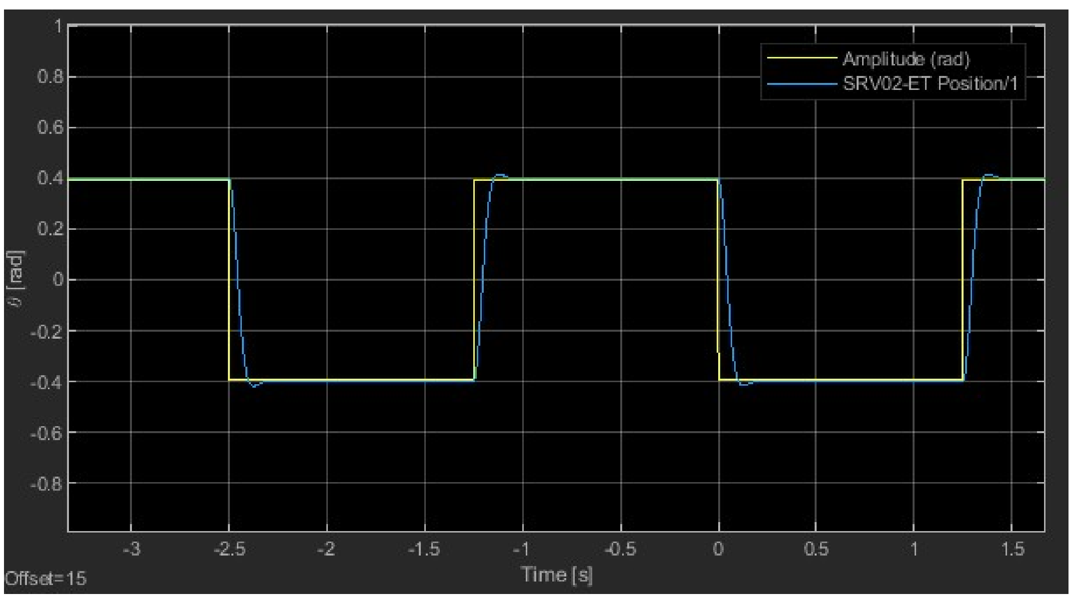
איור 15: תגובת המערכת בניסוי הראשון עם בקר בשיטת ZN

על אף שתגובת המערכת הייתה טובה, כמופיע באיור 11, נוצרה סטורציה במנוע:



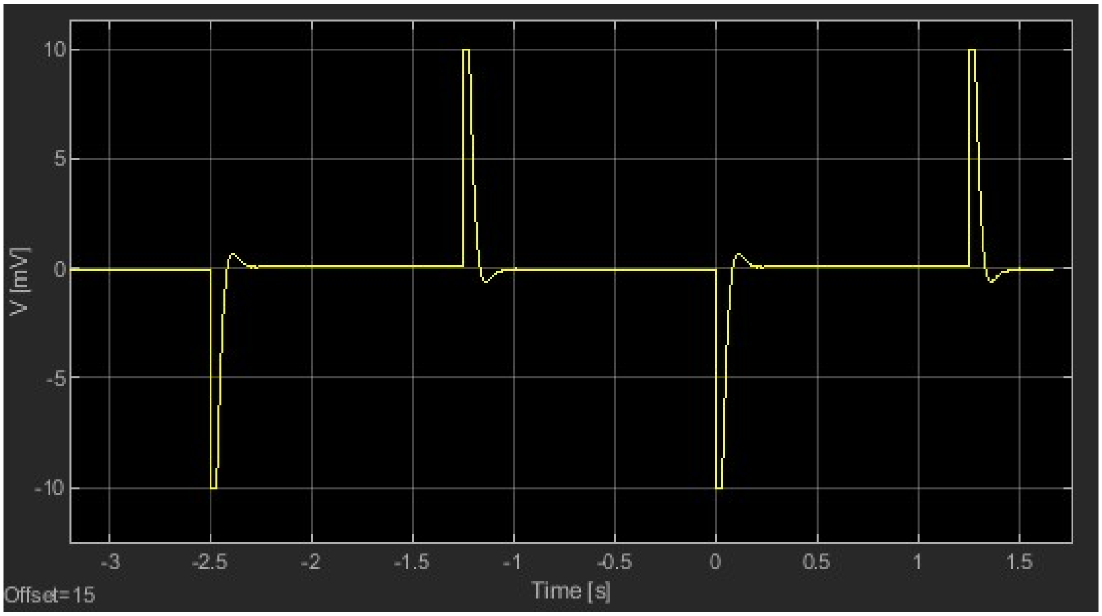
איור 16: המתח אל המנוע בניסוי הראשון עם בקר בשיטת ZN

לכן, ניסיון להוריד את המתח המגיע אל המנוע והורדת ה-OS נעשה דרך העלאת הריסון- שיפור הבקר הדיפרנציאלי ל-$k_v = 0.2$. גרף התגובה שהתקבל הוא הגרף להלן:



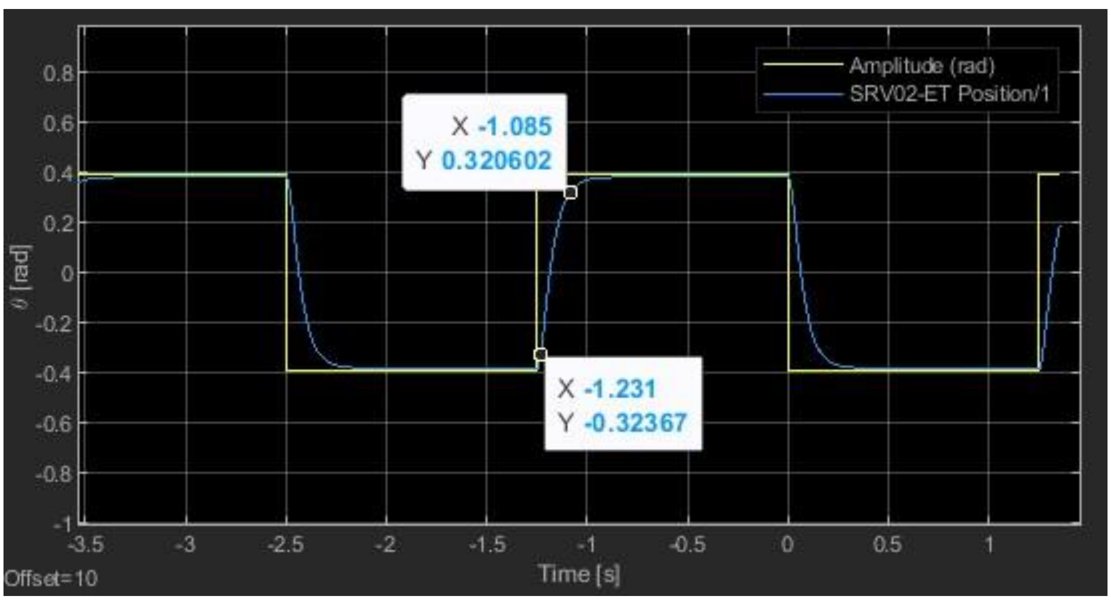
איור 17: תגובת המערכת בניסוי השני עם בקר בשיטת ZN

ניתן לראות שיפור בתגובה, אך אות הבקרה עדין העביר מתח גבוה מדי אל המנוע:



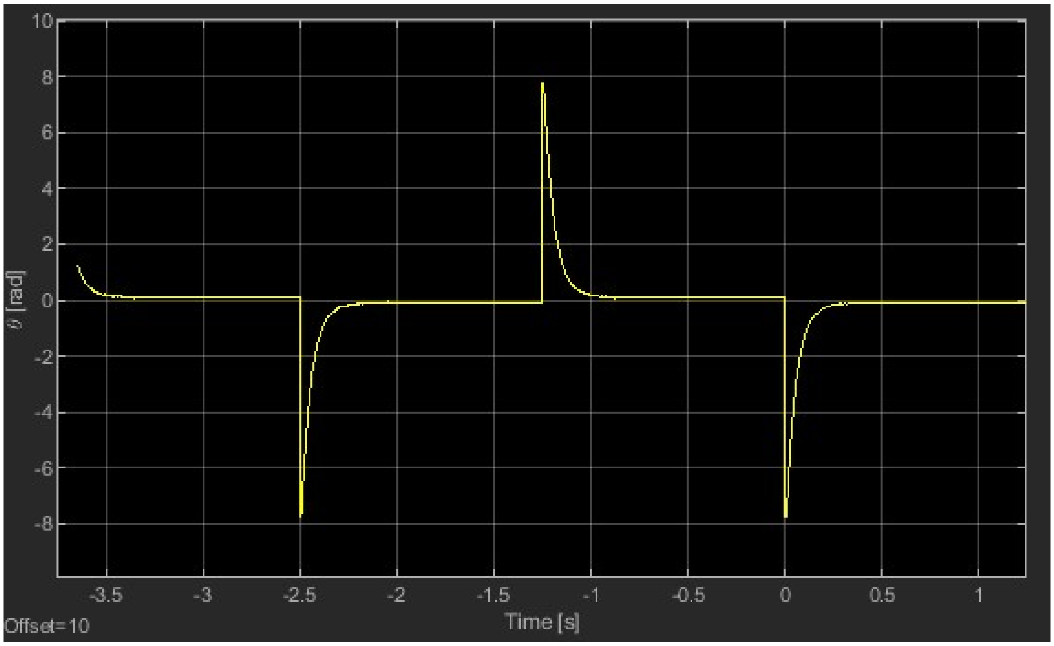
איור 18: המתח אל המנוע בניסוי השני עם בקר בשיטת ZN

בניסיון השלישי לבקר את המערכת שונה גם ערך הבקר הפרופורציונלי ל- $k_p = 10$ בעוד שאר רכיבי הבקר נשארו זהים לנסיונות הקודמים. גרף 14 מציג את תגובת המערכת לבקר המשופר:



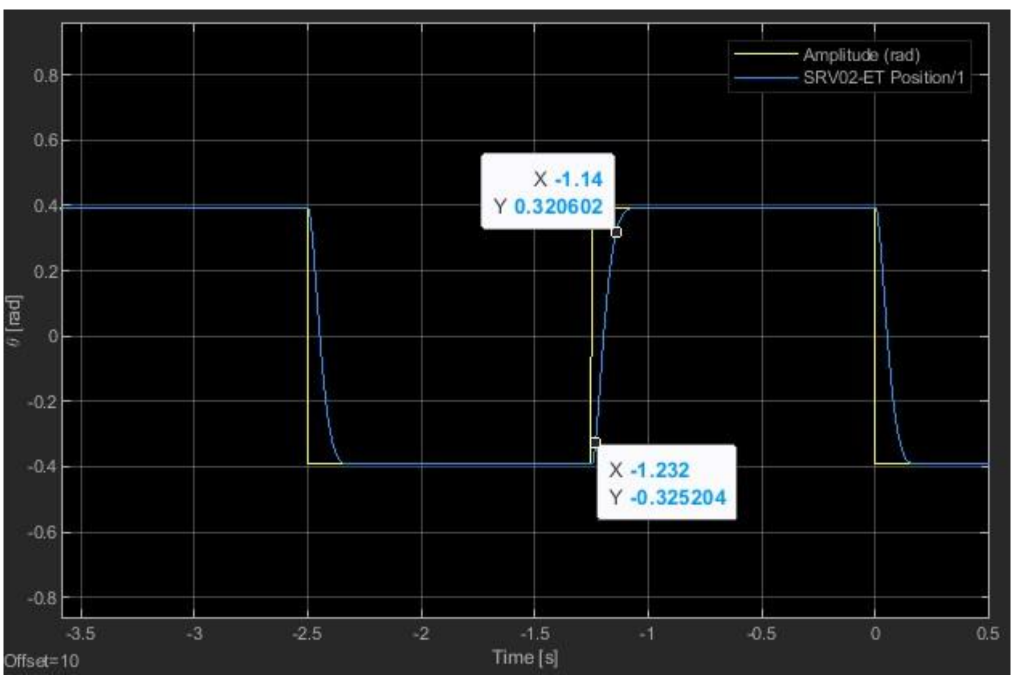
איור 19: תגובת המערכת בניסוי השלישי עם בקר בשיטת ZN

השינוי שנעשה לבקר הפרופורציונלי ברור- אין תגובת יתר, וזמן העלייה השתנה $t_r = -1.085 + 1.231 = 0.146\ [s]$. גרף המתח למנוע הראה את השינוי המיוחל והמתח בעת הבקרה על המערכת ירד מתחת ל10 mV:



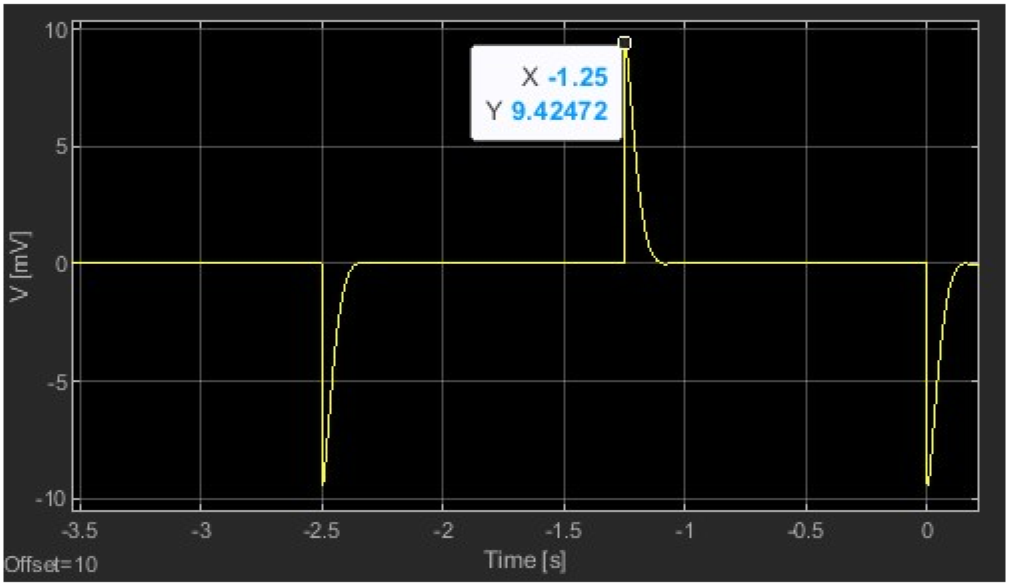
איור 20: המתח אל המנוע בניסוי השלישי עם בקר בשיטת ZN

השינוי שנעשה לבקר הפרופורציונלי השאיר הרבה מרחב עבודה מבחינת מתח אל המנוע, ולכן בניסיון לשפר את התגובה הדינמית הועלה מעט ערכו של הקבוע k_p ל-12 ושל k_d ל-0.1. התגובה בגרף 16 היא התגובה של המערכת עם הבקר הרביעי:



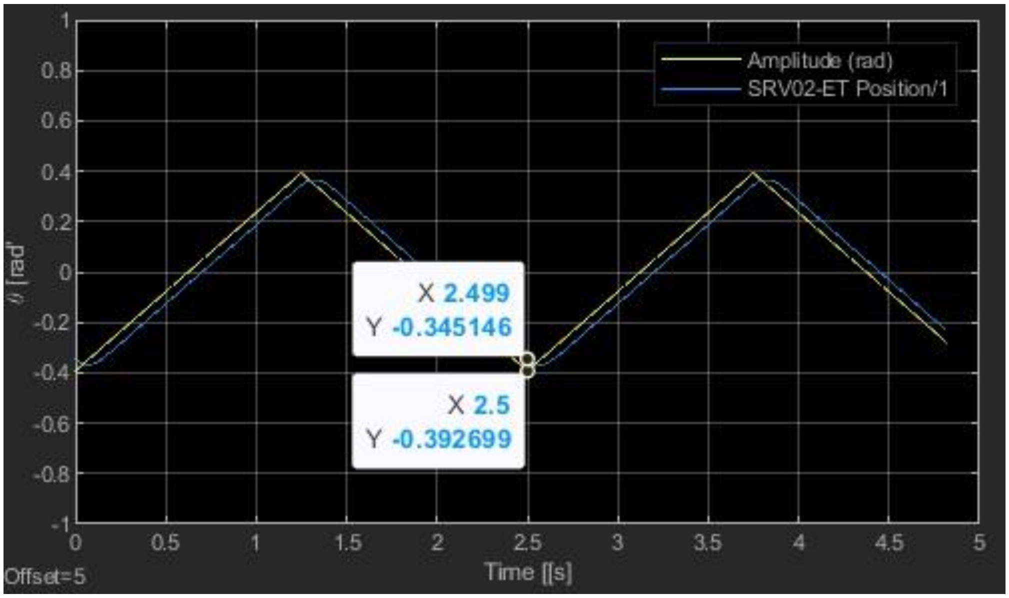
איור 21: תגובת המערכת בניסוי הרביעי עם בקר בשיטת ZN

התגובה הדינמית של המערכת השתפרה: $t_r = -1.14 + 1.232 = 0.092\ [s]$. כעת יש רק לוודא שאות הבקר לא גורם למנוע לחצות את סף הרוויה. התוצאה מוצגת בגרף מטה:



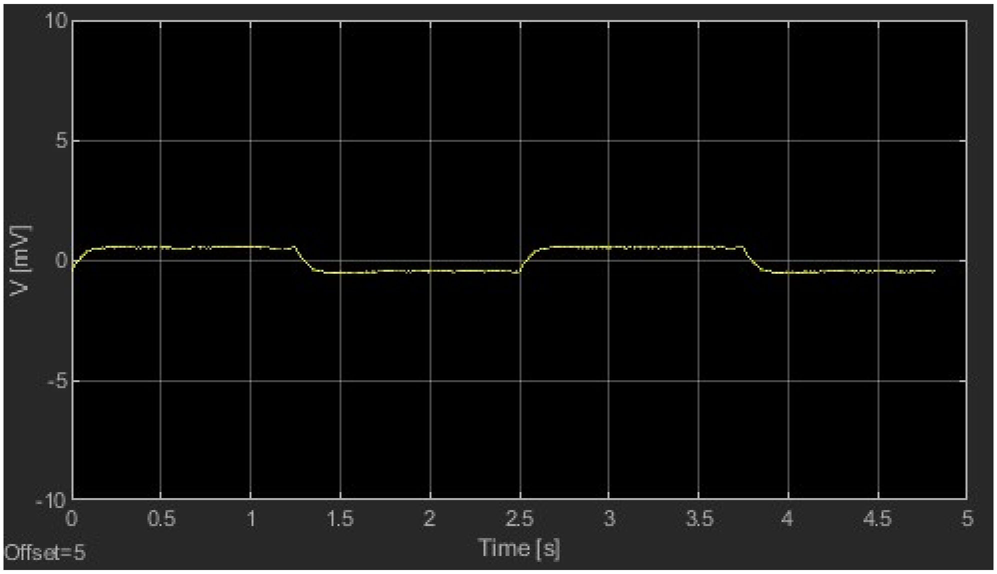
איור 22: המתח אל המנוע בניסוי הרביעי עם בקר בשיטת ZN

התגובה שהתקבלה רצויה, ולכן ניתן להפסיק את כיול הבקר ולעבור לבחינה שלו עבור אותות משתנים בזמן ומול הפרעות. בגרף הבא מוצגת התגובה של המערכת לכניסת מהירות.



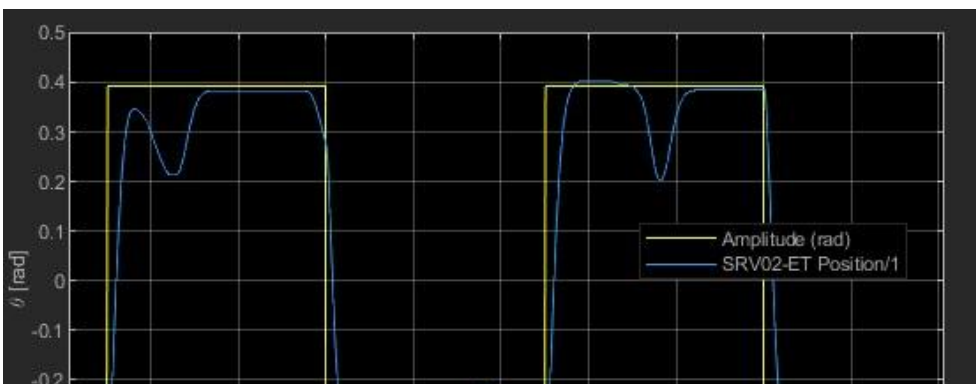
איור 23: תגובת המערכת עם בקר בשיטת ZN לכניסת מהירות

ניתן לראות שלמערכת שגיאה צפויה בחוג סגור עם הבקר של $e = -0.345 + 0.392 = 0.047$.
המתח אל המנוע לא היה גבוה מ- $10\ mV$ כפי שניתן היה לשער (מאחר ובבקר משיטת LQR המתח לכניסת מהירות היה נמוך מלכניסת מדרגה), כמו שניתן לראות באיור 19.



איור 24: המתח אל המנוע עם בקר בשיטת ZN בכניסת מהירות

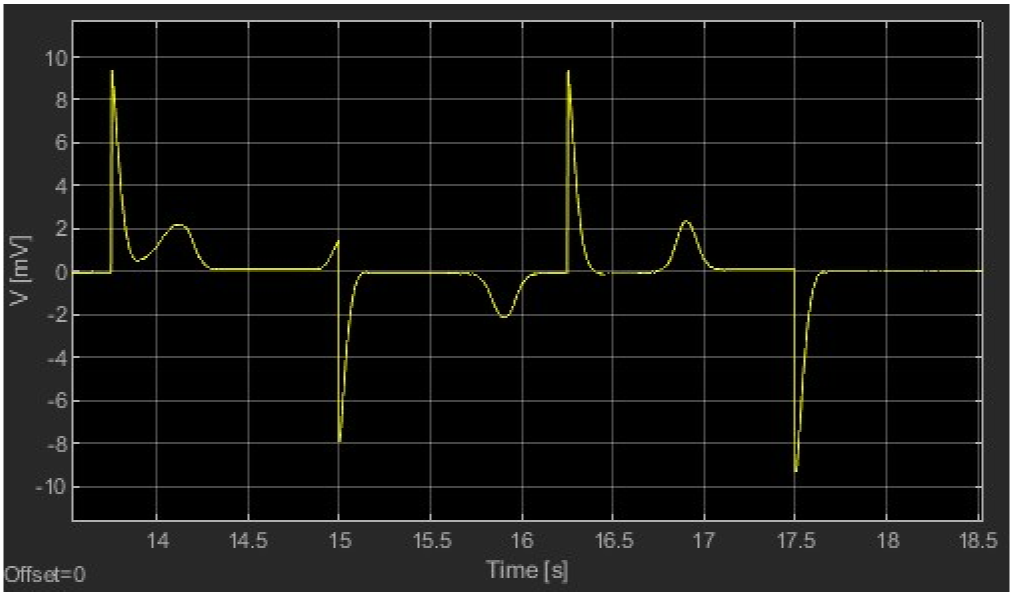
בחלק האחרון בבחינת הבקר ייבחן הכנסה של הפרעה למערכת באמצעות מגע בגלגל ההעמסה המחובר לציר המנוע. להלן איור של תגובת המערכת לכך :



איור 25: תגובת המערכת עם בקר בשיטת ZN להפרעות

ניתן לראות שמיד לאחר שהמערכת התכנסה לאות הכניסה הוכנס כח חיצוני למערכת שהוציא אותה מהעקיבה על האות, אך באופן מיידי ומהיר הבקר החזיר אותה לעקיבה.כעת ייבחן האות של המתח

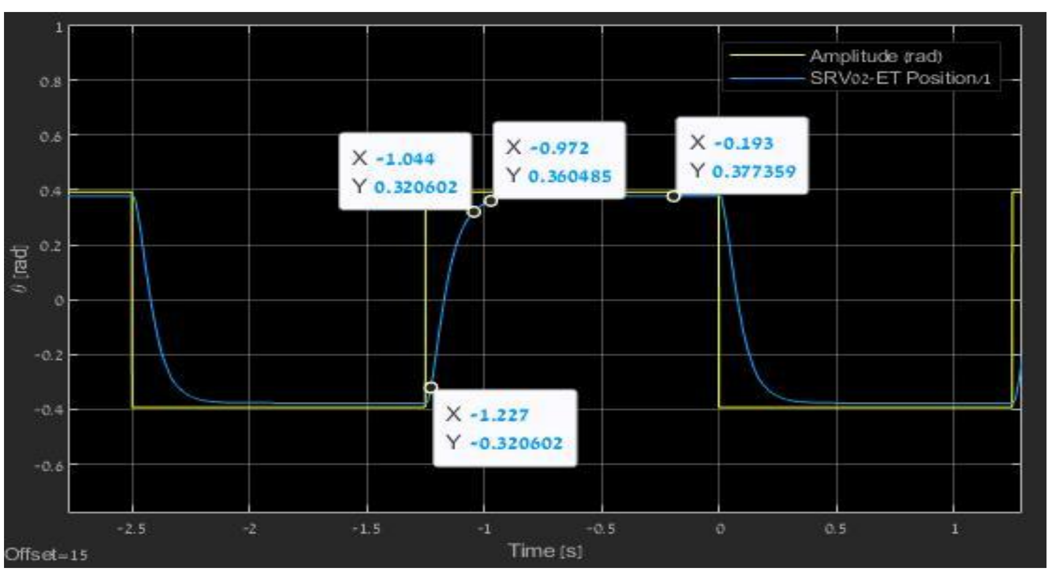
למנוע במקביל, על מנת לראות את צריכת המתח של המנוע במהלך העקיבה בעת ההפרעה. באיור 21 ניתן לראות את האות של העקיבה אחריי הכניסה שזהה לאיור 20 ולאחר מכן את "הקפיצות" במתח שמקבילות להפרעות באיור 20 ומסמנות את התנועה של המנוע שמחזירה אותו לעקוב אחריי האות.



איור 26: מתח אות הבקרה עם בקר בשיטת LQR להפרעות

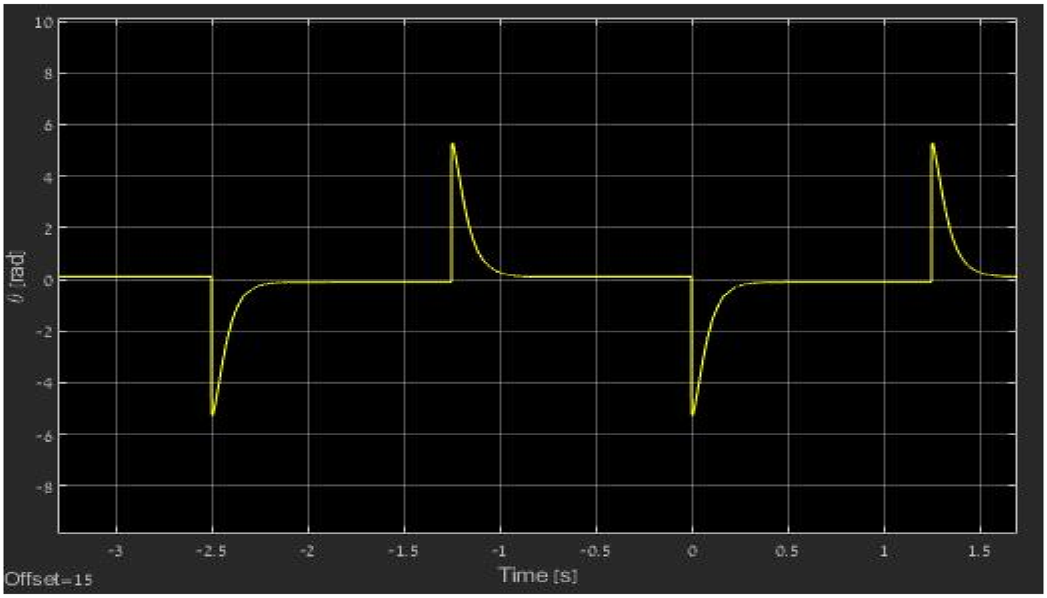
2.5. תוצאות הבקר בשיטת Auto Tuning באמצעות Relay

בשיטת הבקרה באמצעות Relay הבקר הראשון שהתקבל היה בעל הקבועים $k_p = 6.83$, $k_v = 0.05$ ו-$k_i = 0.18$. בהרצה הראשונה התקבלה התגובה הבאה:



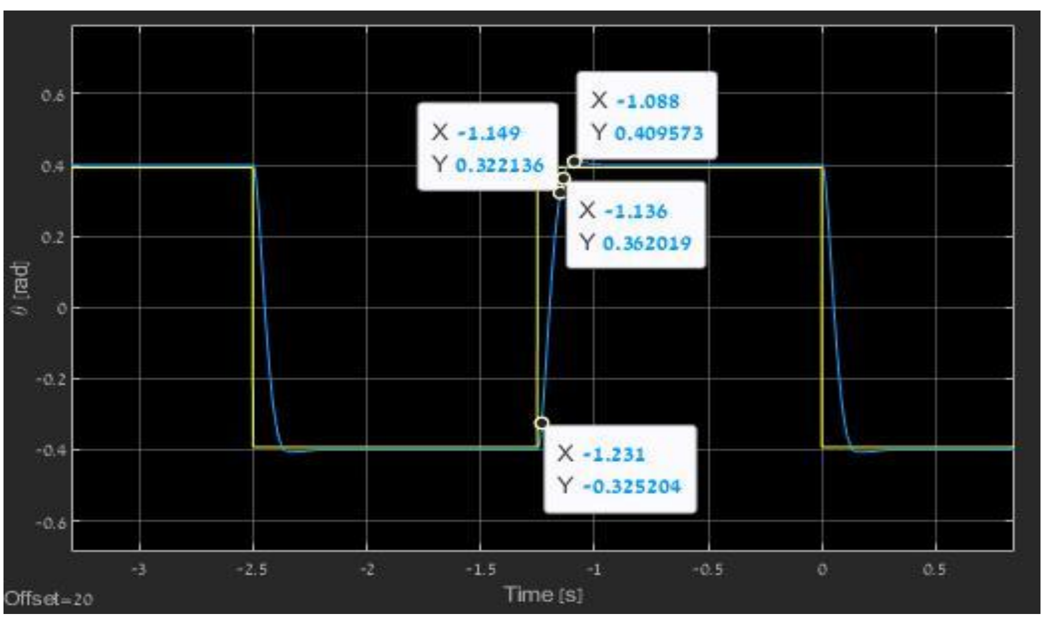
איור 27: תגובת המערכת עם בקר Auto Tuning באמצעות Relay לכניסת מדרגה

לתגובה אין עקיבה מושלמת, והשגיאה היא $e = 0.4 - 0.377 = 0.023\ [rad]$ שזה כ-6% מאות הכניסה. בנוסף, $t_r = -1.227 + 1.044 = 0.183\ [s]$ והזמן כניסה לשרוול של 5% הוא שחושב הוא כ- $t_p = -0.972 + 1.75 = 0.778\ [s]$. אות הבקרה לא גרם למנוע להכנס לסטורציה מכיוון שהיה קטן מ- $[V]$ 10 ולכן ניתן לשפר את הבקר על מנת לקבל ערכים טובים יותר.



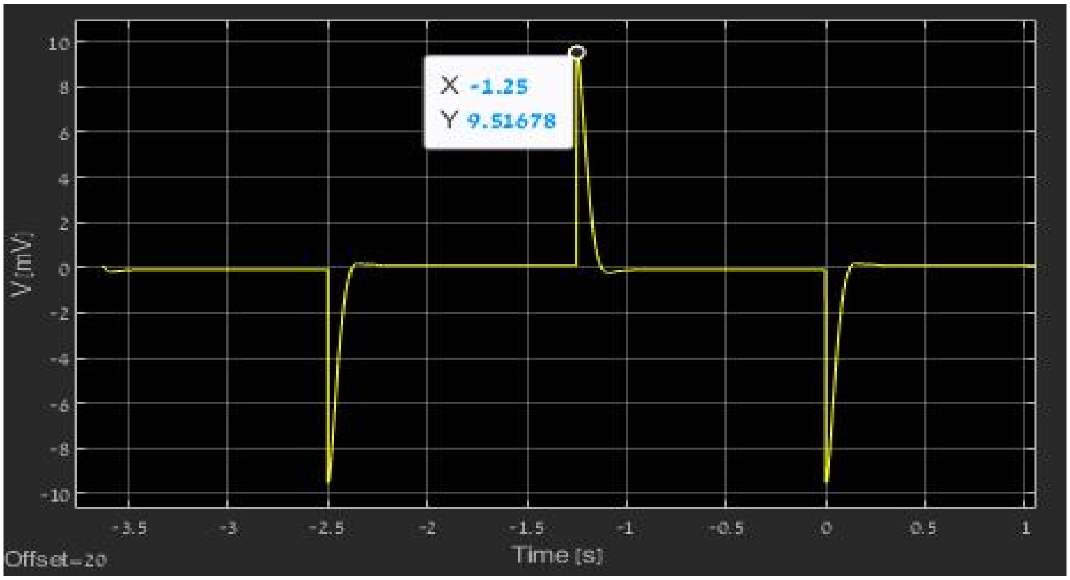
איור 28: מתח אות הבקרה עם בקר Auto Tuning באמצעות Relay לכניסת מדרגה

על מנת לשפר את שגיאת העקיבה ותגובת המעבר שונה הערך של הבקר הפרופורציונלי ל-12 $= k_p$.
התגובה הבאה התקבלה:



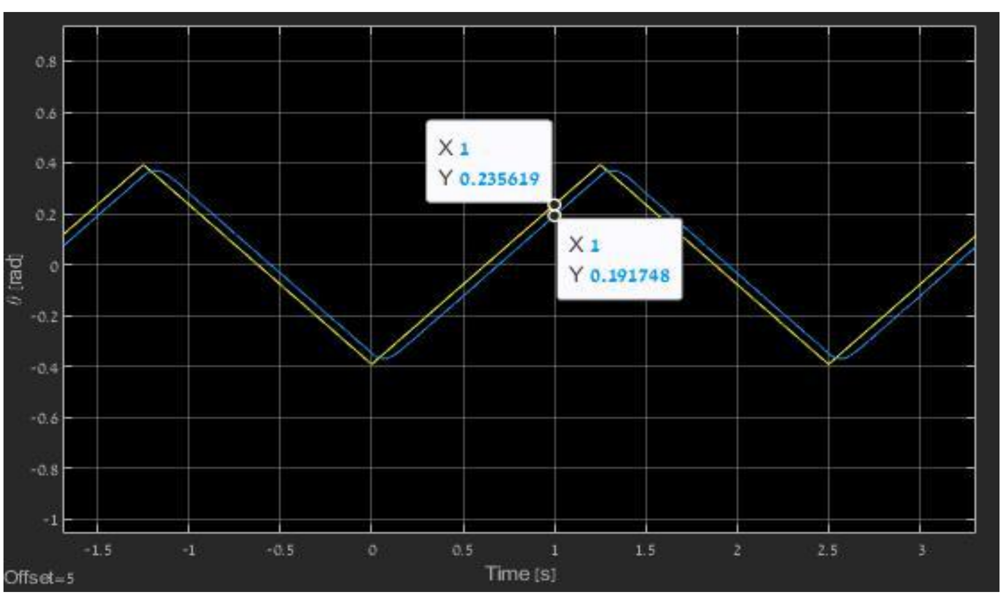
איור 29: תגובת המערכת עם בקר Auto Tuning באמצעות Relay לכניסת מדרגה בניסיון שני

ניתן לראות מיידית שיש שיפור משמעותי בתגובה- העקיבה מושלמת, יש תגובת יתר יחסית קטנה $OS\% = \frac{0.809-0.8}{0.8-0} = 1.125\%$ וזמן העלייה הוא $t_r = -1.221 + 1.149 = 0.072\ [s]$. כעת יש לבדוק שהמחיר של הבקר המצויין אינו בעל תו מחיר יקר באות הבקרה. לשם כך אות הבקרה נבדק:



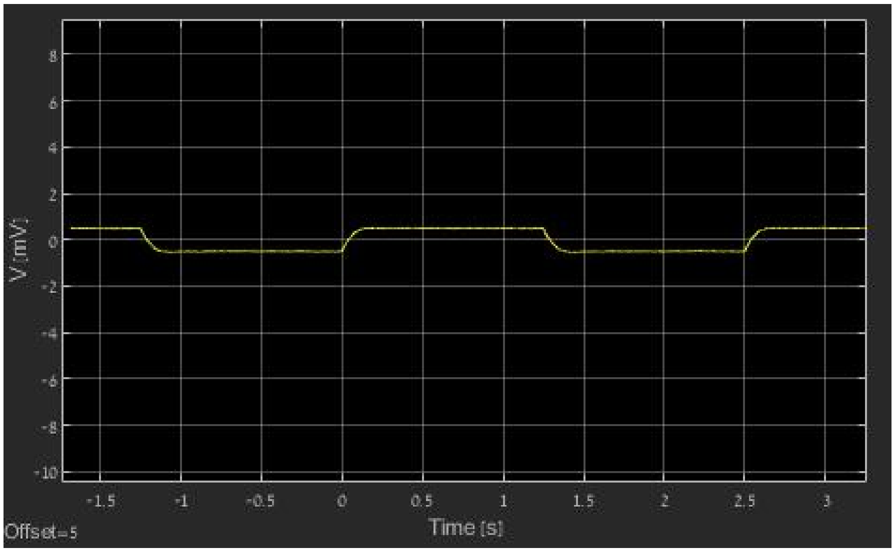
איור 30: מתח אות הבקרה עם בקר Auto Tuning באמצעות Relay לכניסת מדרגה בנסיון שני

אות הבקרה קטן מ- $10\ [V]$ ולכן הבקר עומד בדרישות, על אף שהקרבה לרוויה של המנוע גדולה מאוד. לאחר שנבחר בקר, נבחנה תגובת המערכת מול כניסת מהירות. באיור 11 ניתן לראות בגרף שהעקיבה כאן אינה מושלמת כצפוי (כפי שהוסבר במערכת עם הבקר LQR) והשגיאה שחושבה היא כ- $e = 0.235 - 0.191 = 0.044$, כ- 5.5% שגיאה.



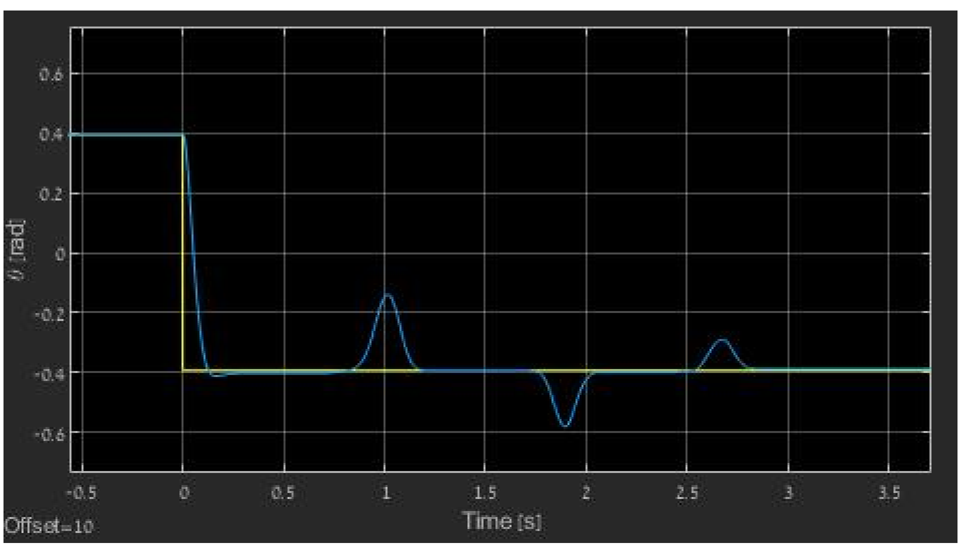
איור 31: תגובת המערכת עם בקר Auto Tuning באמצעות Relay לכניסת מהירות

מתח הבקרה מראה שהמערכת אינה בסטורציה גם עבור כניסת מהירות :



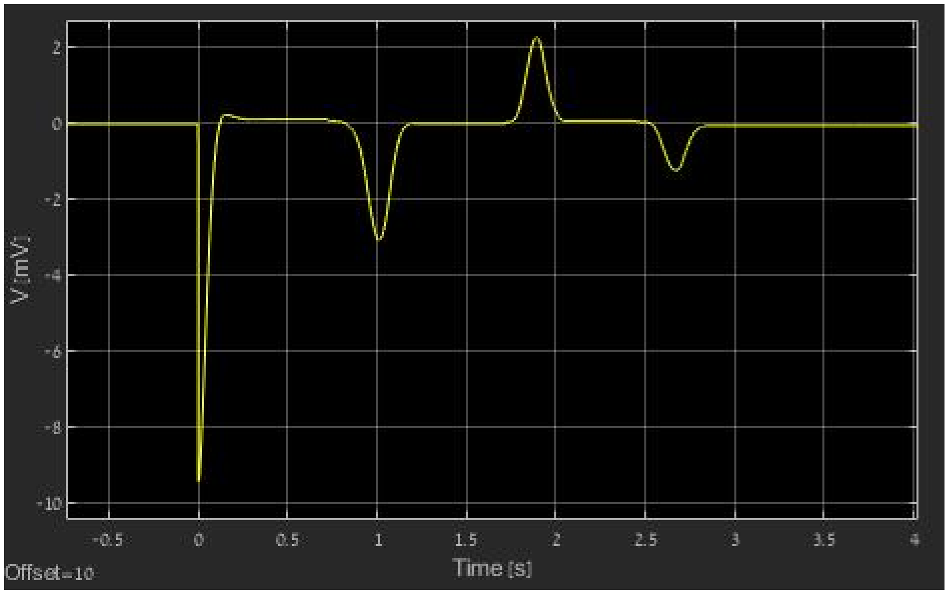
איור 32 : מתח אות הבקרה עם בקר Auto Tuning באמצעות Relay לכניסת מהירות

בשלב אחרון של בחינת הבקר, יש צורך למדוד את ביצועי המערכת להפרעה תחת כניסת מדרגה. התוצאות שהתקבלו מעידות על חזרה לעקיבה סטנדרטית יחסית שלא נמשכה יותר מכמה עשרות שניות בממוצע. מאחר והמתח מהמנוע כבר מקסימלי בתגובת למדרגה, אין מרחב עבודה על מנת לשפר את התגובה להפרעה.



איור 33 : תגובת המערכת עם בקר Auto Tuning באמצעות Relay להפרעות

כעת ייבדק האם התיקון מההפרעה מכניס את המנוע למצב סטורציה. ניתן לראות שלמעט תגובת המערכת לאות הכניסה שכפי שהודגם לעיל אינו מגיע לרוויה, המערכת נשארת איתנה מול הפרעות ולא דרוש מתח רב בהפרעות שנוצרו על מנת לחזור להשאר בעקיבה.



איור 34: מתח אות הבקרה עם בקר Auto Tuning באמצעות Relay להפרעות

2.6. דיון ומסקנות

ההבדלים הבולטים ביותר בין השיטות השונות למציאת הבקר קשורים בשיטות החישוב של קבועי הבקר, האופטימיזציה שלו ובביצועי המערכת בחוג סגור. לכל השיטות החישובים המקדימים היו קצרים יחסים ודרשו מעט שורות קוד. שיטת LQR חישבה מיידית בקר נח בעל דרישות מתח נמוכות יחסית עם ביצועים טובים. לעומתן, בשיטות של ניקול- זייגלר נדרש היה כוונון ומספר חזרות על מנת למצוא את הבקר האופטימלי, אך מלכשהתקבלו הבקרים, סיפקו ביצועים מצוינים במחיר של מתח גבוה למערכת. צריכת המתח של הבקר עלולה להיות מסוכנת למערכת אמיתית מחוץ למעבדה שמתווספים לה תנאי שטח, שמעלים את החיכוך וההתנגדות של המערכת ויכולים להביא לעלייה במתח אל המנוע ולכניסת המנוע לסטורציה.

מאחר וחלק מהותי מהרכבת הבקר והשגת ביצועים ממנו כלל אופטימיזציה של הקבועים שלו, הניסיון שנרכש עם הבקר בשיטה השנייה סייע מאוד להבנה ולתחושה של השפעת הערכים על הביצועים והקל משמעותית על התהליך עבור הבקר בשיטה השלישית. ייתרה מכך, שימוש בערכי בקר משיטה אחת קיצר את התהליך עבור שיטה אחרת, והמחיש את החשיבות שבהכרת כל שיטות הבקרה, על יתרונותיהן וחסרונותיהן ושימוש בהן כדי לפצות בצורה הדדית.

מהניתוח הכמותי של התוצאות עולים ההבדלים הבאים בביצועים הדינמיים: LQR הציג זמן עלייה של $0.174\ [s]$ ללא overshoot ו- settling time של כ-$0.758\ [s]$. ZN Auto-tuning השיג זמן עלייה מהיר יותר של $0.092\ [s]$ אך דרש כיוונונים חוזרים כדי להימנע מסטורציה ולקבל ביצועים אופטימליים. Relay Auto-tuning הציג את הביצועים המהירים ביותר עם זמן עלייה של $0.072\ [s]$, overshoot מינימלי של 1.125% ו- settling time קצר.

מבחינת צריכת מתח ויציבות, LQR הציג מתח מקסימלי נמוך מ-$10\ [V]$ ללא סיכון סטורציה, תוך שמירה על יציבות גבוהה. ZN דרש מתח גבוה שגרם לסטורציה בניסויים הראשונים והצריך כיוונונים נוספים. Relay הציג מתח מתחת ל-$10\ [V]$ ואיזון טוב בין ביצועים ובטיחות.

מהשוואת השיטות עולה שלכל אחת יש תחום יישום מועדף. LQR מתאים למערכות הדורשות יציבות ובטיחות גבוהים, ZN מספק תגובה מהירה במחיר של סיכון גבוה יותר וצורך בכיוונון זהיר, ו- Relay מציע פשרה אופטימלית בין מהירות תגובה לבטיחות המערכת. למערכות קריטיות מומלץ LQR ולמערכות הדורשות תגובה מהירה עם יכולת כיוונון- Relay Auto-tuning.

3. בקרת מיקום מערכת מפרק גמיש בשיטת תכנון ישיר עם משערך

3.1. תקציר

בחלקו האחרון של דוח זה מוצגת בקרת מיקום של מערכת מפרק גמיש באמצעות בקר ומשערך בתכנון ישיר דיגיטלי. השיטות שבהן נעשה שימוש לתכנון הבקר והמשערך מתבססות על עקרונות השואבים השראה משיטות בעולם התדר, עם הוספת מימוש במשוואות הפרשים הנדרש לעבודה בזמן בדיד.

מודל המערכת מכיל אינטגרל בחוג הפתוח המסייע למערכת להתכנס לאותות ייחוס קבועים. העבודה כוללת מימוש מלא של מערכת הבקרה הדיגיטלית, החל משלב התכנון התיאורטי ועד למימוש מעשי בסימולציה.

הניסויים בוחנים את השפעתם של זמני דגימה שונים על ביצועי מערכת הבקרה הדיגיטלית, כאשר נבדקו שלושה זמני דגימה שונים ונערכה השוואה מפורטת עם ביצועי הבקרה הרציפה. התוצאות מציגות תמונה ברורה של הקשר בין זמן הדגימה ליציבות המערכת ואיכות הבקרה.

הדוח כולל ניתוח מפורט של התוצאות, השוואה בין השיטות השונות, ומסקנות לגבי תחומי היישום המתאימים לכל גישה. תרשימי הזרימה, הקוד ופרטים טכניים נוספים מוצגים בנספחים בסוף הדוח למען שלמות התיעוד והמימוש.

3.2. תיאוריה ומדידות

הבקרה בזמן הבדיד דומה לבקרה בזמן רציף, אם כי באופן מתמטי התנהגות המערכת אינה מתוארת עוד על ידי משוואות דיפרנציאליות אלא על ידי משוואות הפרשים, כך שעבור מרחב מצב:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{8}$$

$$y = Cx + Du \tag{9}$$

מתקבל בזמן בדיד:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{10}$$

$$y_{k+1} = Cx_k + Du_k \tag{11}$$

בהתאם לזאת, כפי שניתן להתמיר את המשוואות הדיפרנציאליות בעזרת התמרת לפלס, את משוואת ההפרשים נתמיר באמצעות התמרת Z המוגדרת כך :

$$X(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{12}$$

בגישת התכנון הישיר, המוטיבציה היא ליצור מודל מתמטי דיסקרטי של המערכת במרחב המצב, ולתכנן בקר בדיד להפעלת המערכת בעזרת הכלים שלמדנו.

אם כן, ניתן לקבוע קטבים המתארים את התנהגות המערכת הרצויה בעזרת פרמטרים מוכרים : ω_n , ζ, ולהיעזר בקשר בין קטבים במישור S לקטבים במישור Z, כאשר T הוא זמן הדגימה :

$$\overline{p}_i=e^{p_iT} \tag{13}$$

בהמשך, בעזרת הייצוג המתמטי-מטריציוני של המערכת אפשר לבחור בכל שיטה מוכרת : צורה קנונית, הצבת ישירה, נוסחת אקרמן ועוד.

3.3. מימוש הבקרה

לצרכי מימוש הבקרה ממודלת המערכת המבוקרת במרחב המצב שבוצעה בעבר במעבדת מפרק גמיש כך שעבור וקטור המשתנים המוגדר :

$$x^T=\left[\theta\ \alpha\ \dot{\theta}\ \dot{\alpha}\right]$$

מתקבלות מטריצות המתארות את התנהגות המערכת במרחב המצב הרציף על ידי :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 483.13 & -27.29 & 0\\ 0 & -1.14\cdot 10^{-3} & 27.29 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 49.7\\ -49.7\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$D=\bar{0}$$

בהינתן דינמיקת המערכת הרציפה במטריצות A, B, C, D המערכת הומרה למרחב הבדיד באמצעות זמן דגימה של $Ts=0.002[s]$ שניות. ההמרה בוצעה באמצעות שיטת Zero-Order Hold (ZOH),

שיטה המחזיקה את ערך הכניסה קבוע לאורך כל מרווח הדגימה, ומתוכה התקבלו המטריצות הבדידות A, B, C, D המתאימות לתכנון הבקר הדיגיטלי.

לאחר שהמערכת הותמרה למרחב הבדיד עבור זמן הדגימה הנתון התקבלו המטריצות הבאות עבור משוואות הפרשים:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9.48 \cdot 10^{-4} & 0.0019 & 6.35 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 0.9977 & 5.36 \cdot 10^{-5} & 0.002 \\ 0 & 0.94 & 0.947 & 9.48 \cdot 10^{-4} \\ 0 & -2.2527 & 0.0531 & 0.998 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9.76 \cdot 10^{-5} \\ -9.76 \cdot 10^{-5} \\ 0.097 \\ -0.097 \end{bmatrix}$$

מטריצות C ו-D נותרו זהות.

הקטבים הרצויים עבור התנהגות רצויה של המערכת הם:

$$\omega_n = 20\,, \zeta = 0.6$$

$$\sigma_3 = 20\,, \sigma_4 = 25$$

על מנת לתכנן את הבקר הדיגיטלי, הוגדרו קטבי המערכת הרצויים במישור הרציף S ולאחר מכן הומרו למישור Z באמצעות הקשר בנוסחה 13. בעזרת שיטת השמת קטבים מחושבת מטריצת הגברים K כך שהקטבים של המערכת הסגורה ימוקמו במיקומים הרצויים- התקבלה מטריצת ההגברים K עבור המערכת הבדידה.

מכאן שהקטבים במערכת הבדידה:

$$P_{1,2} = 0.9758 \pm 0.0312j, P_3 = 0.9608, P_4 = 0.9512$$

עבור בקר משוב מצב מלא, בשיטת השמת קטבים מתקבלת מטריצת ההגברים הבאה:

$$K = [5.876 \quad -9.640 \quad 0.338 \quad -0.461]$$

בנוסף לבקר המתואר אשר מבקר את המערכת באמצעות הגברים המכפילים את המשתנים ונגזרותיהן, התווסף בקר אינטגרלי במעגל נפרד המבקר את אינטגרל המשתנים, אשר הגברו נקבע באמצעות ניסוי:

$$K_I = [1.6\ 1.6]$$

מכיוון שמטריצת הפלט C מראה כי רק שני משתני המצב נמדדים ישירות $(\theta\ \alpha)$ נדרש שיערוך של המהירויות הזוויתיות $\dot{\theta}$ ו- $\dot{\alpha}$ במימוש זה, השתמשנו במשערך נגזרת נומרית כשיטת שיערוך פשוטה :

$$\dot{\theta}(k) = \frac{[\theta(k) - \ \theta(k-1)]}{T_s} \tag{14}$$

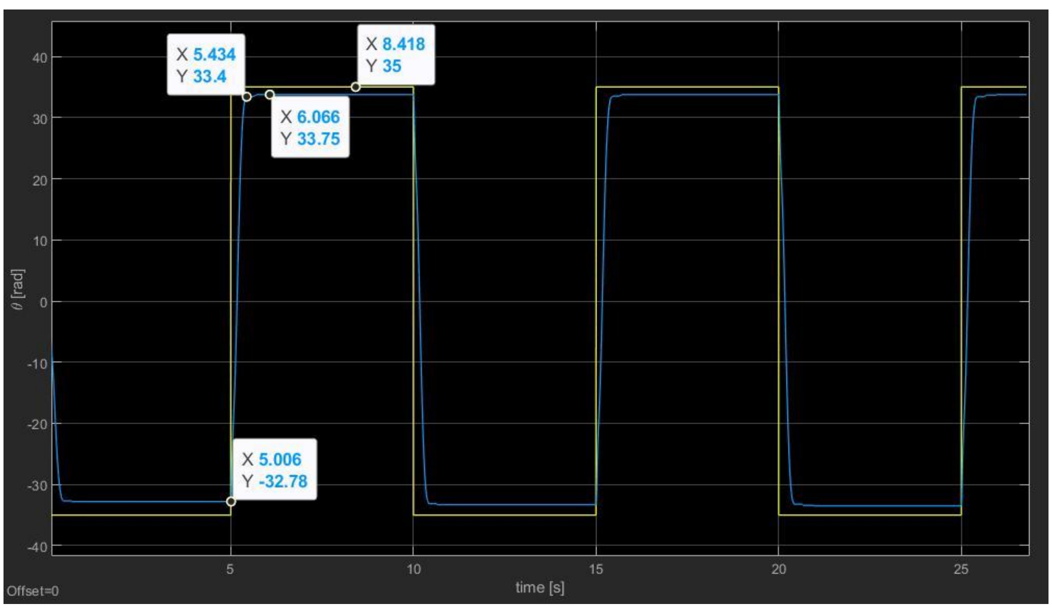
$$\dot{\alpha}(k) = \frac{[\alpha(k) - \ \alpha(k-1)]}{T_s} \tag{15}$$

כאשר T_s הינו מרווח הדגימה. שיטת שיערוך זו מהווה קירוב דיגיטלי לנגזרת הזמן ומאפשרת הערכה נומרית של

3.4.תוצאות הבקר

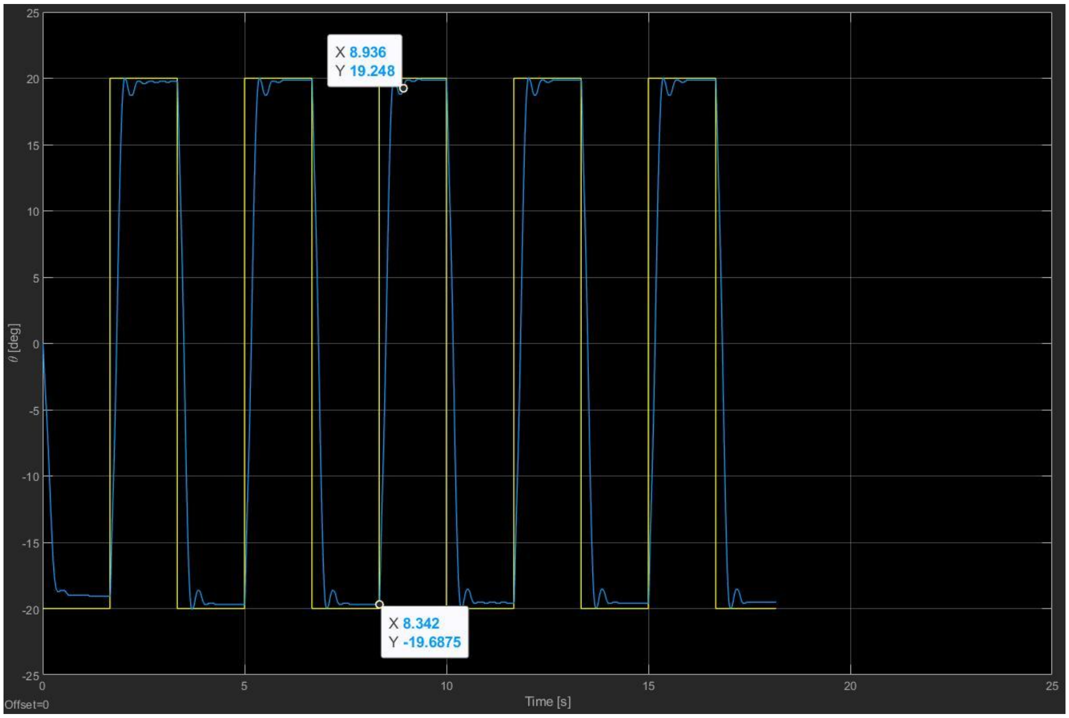
להלן מובאת השוואה בין ביצועי המערכת בצורת הבקרה הרציפה ובין בקרה בדידה במספר קצבי דגימה.

באיור 31 מודגמת זווית הזרוע θ עבור בקרה רציפה :



איור 35 : זווית המנוע כתלות בזמן תחת בקרה רציפה.

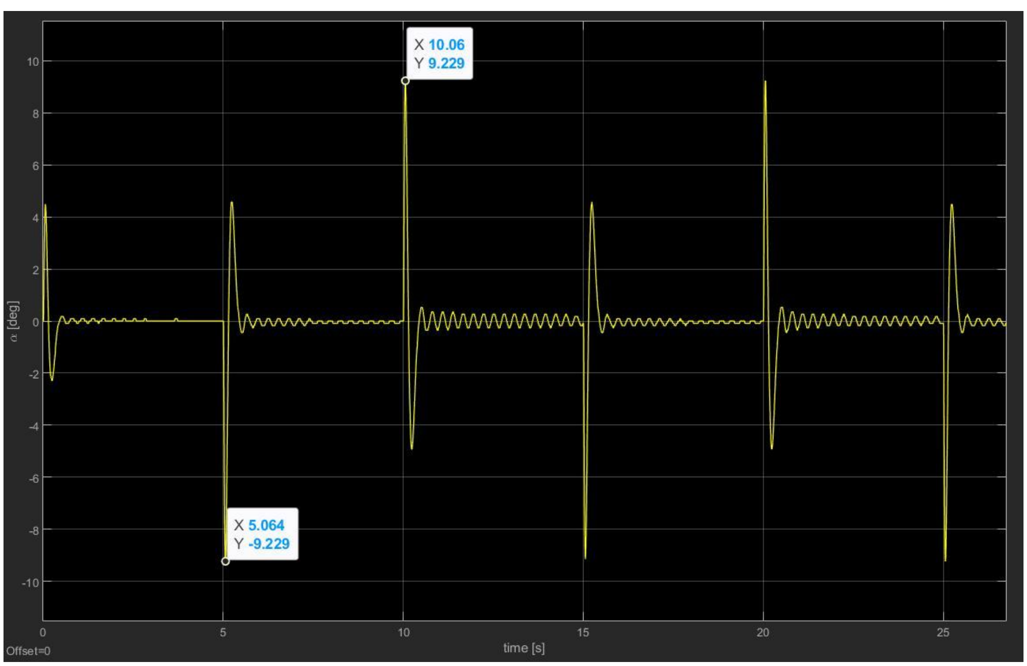
בהשוואה לתגובה בקצב דגימה של $0.002[s]$, כולל בקר אינטגרלי :



איור 36: תגובת זווית לבקרה בזמן דגימה של 0.002 שניות.

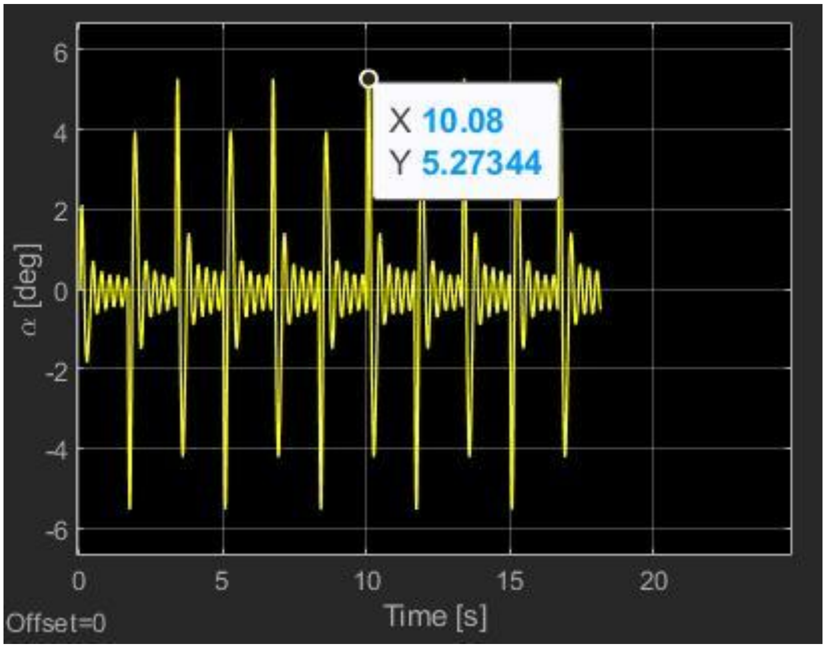
התקבלה התנהגות מעט פחות יציבה, אם כי ללא תגובת יתר, ובעלת זמן התכנסות מספק של כ-0.6 שניות.

ההשוואה בין זוויות המפרק, α:



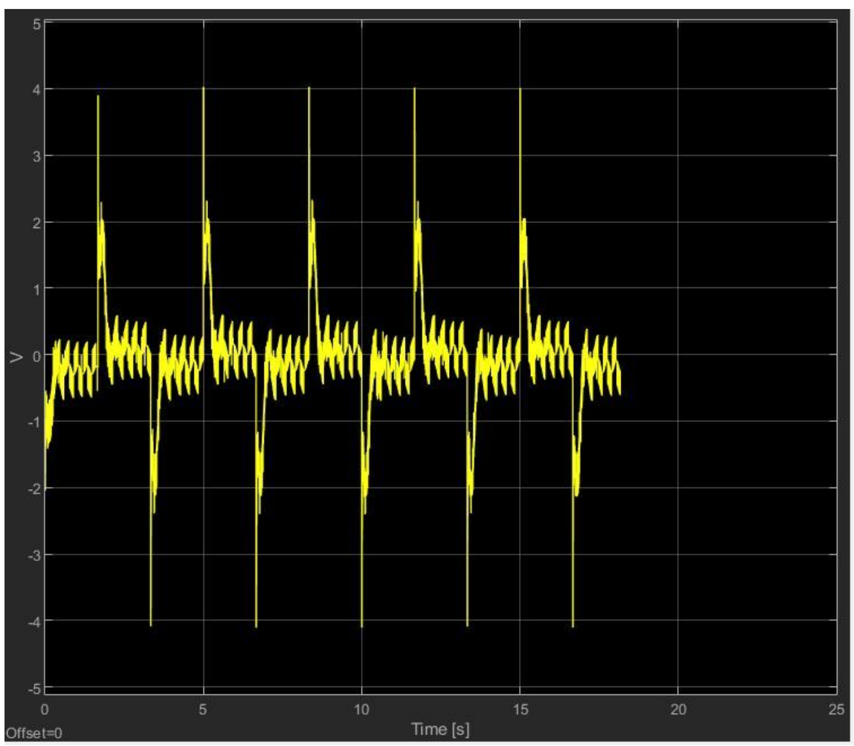
איור 37: זווית המפרק בתגובה לבקרה רציפה.

עבור בקרה בדידה בזמן דגימה 0.002 שניות התקבל:



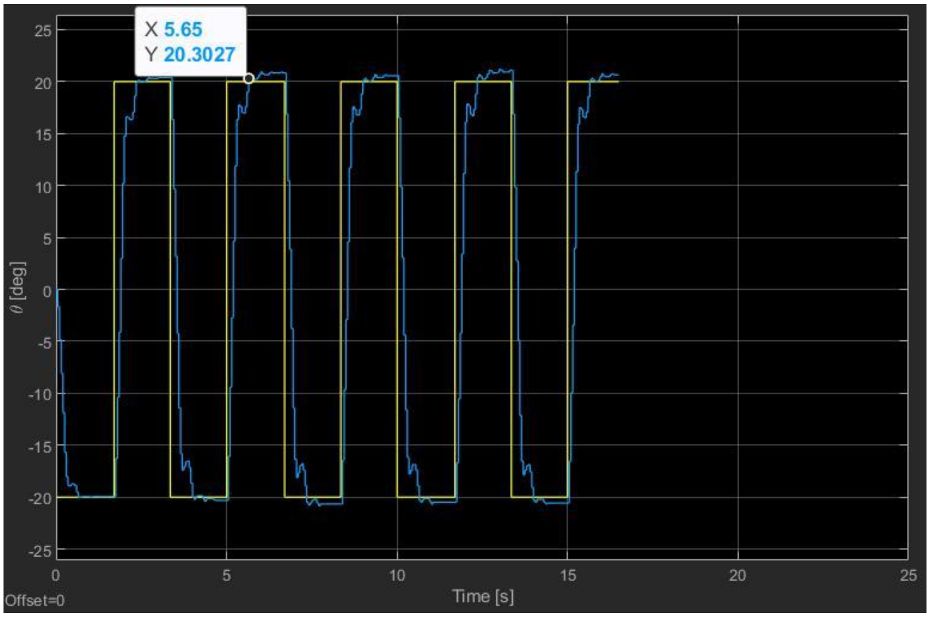
איור 38: זווית המפרק בתגובה לבקרה בדידה בזמן דגימה 0.002 שניות.

התקבלה התנהגות דומה אך טובה יותר מבחינת זווית מקסימלית, כאשר האידיאל הוא כמובן זווית אפס. גרף המתח שהתקבל עבור תגובה זו:



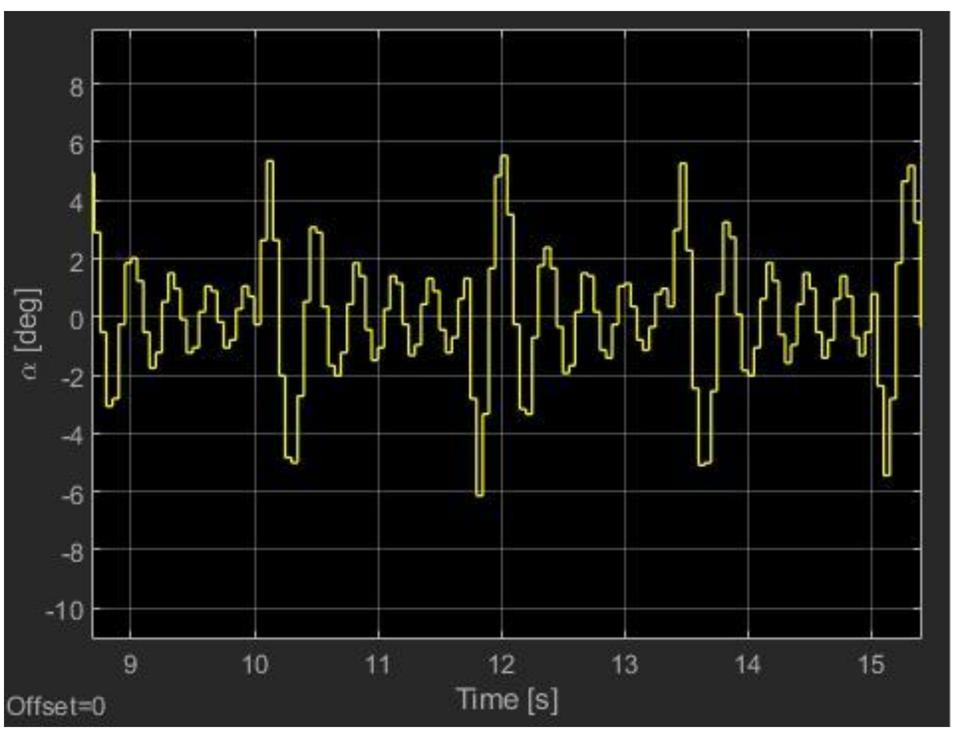
איור 39: מתח המנוע בתגובה המבוקרת הבדידה.

ניתן כעת לבחון השפעת קצב הדגימה על ביצועי הבקרה. באיור 35 מודגמת בקרה בזמן דגימה של 0.05 שניות:



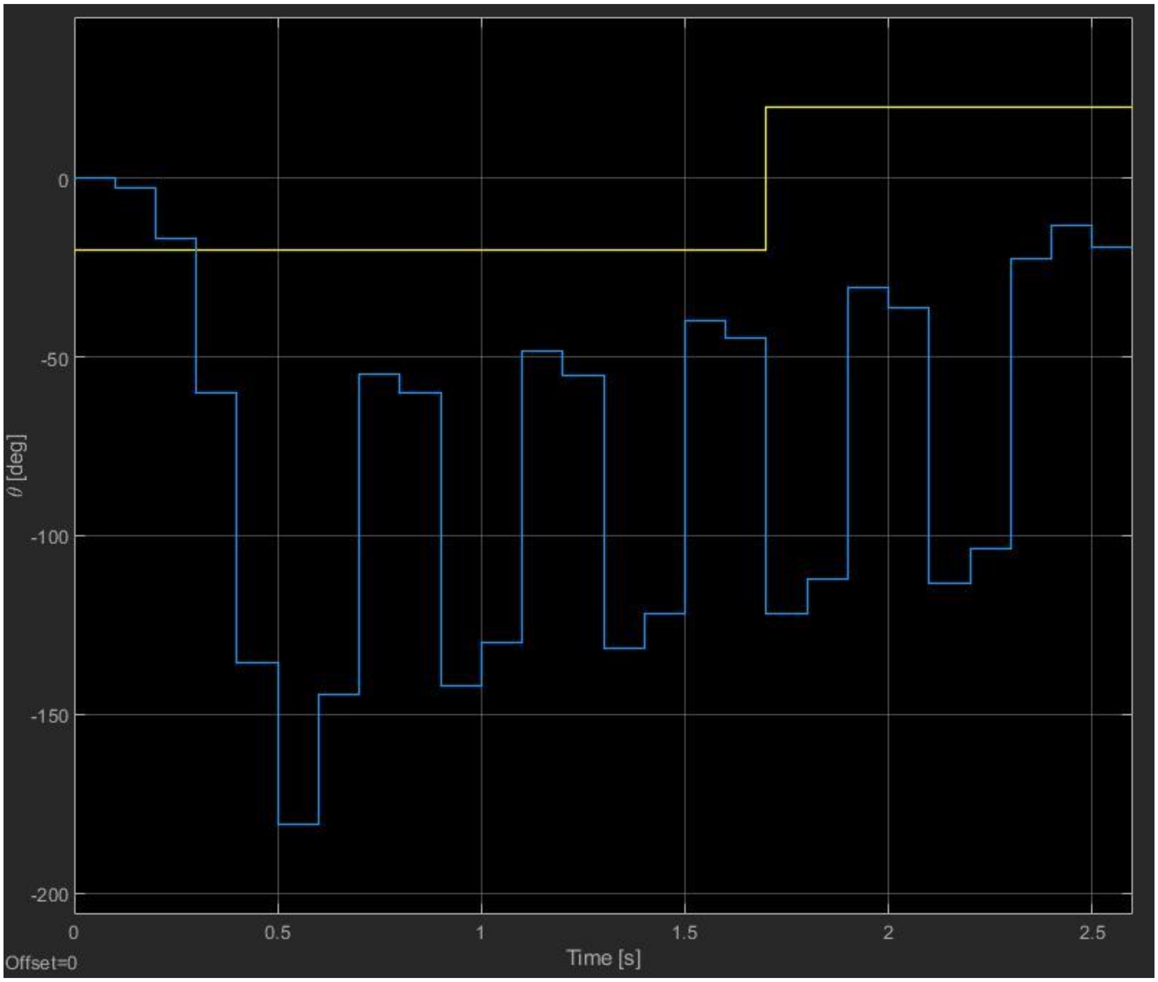
איור 40: תגובת המנוע לבקרה בזמן דגימה של 0.05 שניות.

התקבלה התנהגות טובה למדי אם כי תנודתית מעט, הודות לזמן הדגימה האיטי יחסית. עבור זווית המפרק התוצאות דומות:



איור 41: תגובת זווית המפרק לבקרה בזמן דגימה של 0.05 שניות.

בניסוי עבור זמן דגימה של 0.1 שניות, זמן ארוך מאוד יחסית לדינמיקת המערכת הפיזיקלית, והתקבלו תוצאות בלתי יציבות ולמעשה לא הושגה שליטה בזרוע בניסוי. באיור 36 מופיעה התגובה של המערכת:



איור 42: תגובת המערכת לבקרה בזמן דגימה 0.1 שניות.

3.5. דיון ומסקנות

במערכת זו נבדקה השפעתם של זמני דגימה שונים על ביצועי מערכת הבקרה הדיגיטלית של המפרק הגמיש. התוצאות מציגות תמונה של הקשר בין זמן הדגימה ליציבות המערכת. עבור זמני דגימה של 0.002 שניות ו-0.05 שניות נראה כי התקבלה בקרה יציבה עם ביצועים סבירים, בעוד שזמן דגימה של 0.1 שניות הוביל לאובדן השליטה במערכת.

הסיבה העיקרית לתופעה זו נראית נעוצה בכך שתדר הדגימה צריך להיות גבוה מספיק כדי לתעד בנאמנות את הדינמיקה הפיזיקלית של המערכת. המפרק הגמיש מאופיין בתדרים טבעיים יחסית גבוהים, ולכן זמן דגימה ארוך מדי נראה כלא מצליח לקלוט את השינויים המהירים במערכת, מה שעלול לגרום לאי-יציבות ולהתבדרות.

השוואה בין הביצועים בזמני דגימה שונים מראה מגמה של הידרדרות ביצועים ככל שזמן הדגימה גדל. בזמן דגימה של 0.002 שניות המערכת מציגה תגובה חלקה יחסית וזמן התכנסות סביר. כאשר עוברים לזמן דגימה של 0.05 שניות, התגובה נראית מעט יותר תנודתית וזמן ההתכנסות נעשה איטי יותר. זווית המפרק הגמיש גם נראית מגיעה לערכים גבוהים יותר, מה שעלול להעיד על פחות שליטה במערכת.

המשערך הנומרי הפשוט שיושם במערכת להערכת המהירויות הזוויתיות נראה כיעיל עבור זמני הדגימה הקצרים. שיטת הנגזרת הנומרית, למרות פשטותה, מספקת הערכות מספיק טובות כדי לאפשר בקרה יציבה. עם זאת, שיטה זו עלולה להיות רגישה לרעש מדידה ויכולה ליצור אותות בקרה "קופצים" במיוחד כאשר זמן הדגימה גדל.

בהשוואה לביצועי הבקרה הרציפה, הבקרה הדיגיטלית עם זמן דגימה של 0.002 שניות הציגה ביצועים דומים למדי. ההבדלים בזמן התגובה ובחלקות נראים מינימליים, מה שעלול לאשש שבקרה דיגיטלית מתוכננת היטב יכולה להתחרות בבקרה רציפה מבחינת איכות.

מסקנה העולה היא שהצלחת מערכת בקרה דיגיטלית נראית תלויה במידה רבה בבחירה נכונה של זמן הדגימה. הכלל המעשי שעולה הוא לשקול בחירת זמן דגימה שהוא לפחות פי עשרה מהיר מהזמן האופייני של המערכת. עבור המערכת הנחקרת, זמן דגימה של 0.002 שניות נראה כאופטימלי, בעוד ש-0.05 שניות עדיין מאפשר פעולה אך עם פגיעה בביצועים.

לסיכום, הניסוי מראה כי תכנון בקרה דיגיטלית בגישת התכנון הישיר עלול להוות כלי יעיל לבקרת מערכות מכטרוניות מורכבות, בתנאי שהתכנון נעשה תוך הבנת המגבלות הטכנולוגיות והפיזיקליות של המערכת.

4. מקורות

1. תדריכי מעבדות בקרת מהירות ובקרת מפרק גמיש וההרצאות הקורס, קורס תכנון ובנייה מערכות בקרה שומשיות, מודל בן גוריון.
2. דו"ח מעבדה - מעבדת בקרת מהירות.
3. דו"ח מעבדה - מעבדת בקרת מפרק גמיש. תבססת על הגדרת המערכת במרחב מצבים וחישוב מטריצת הגברים אופטימלית באמצעות מזעור פונקציית מחיר ריבועית. הקוד הבא ממממש את השיטה עבור מערכת SRV02 ומחשב את קבועי הבקר הנדרשים.

5.2. בקרת מיקום מערכת SRV02 בשיטות LQR, ZEIGLER-NICHOLAS ו- AUTO-TUNING באמצעות RELAY

בנספח זה מוצגים הפרטים הטכניים והקוד הנדרש למימוש בקרת מיקום מערכת SRV02 בשלוש השיטות שנבחנו.

5.2.1. LQR

שיטת LQR מתבססת על הגדרת המערכת במרחב מצבים וחישוב מטריצת הגברים אופטימלית באמצעות מזעור פונקציית מחיר ריבועית. הקוד הבא מממש את השיטה עבור מערכת SRV02 ומחשב את קבועי הבקר הנדרשים.

```
% הגדרת מטריצות המערכת במרחב מצבים
% המערכת מתוארת על ידי: x_dot = Ax + Bu, y = Cx + Du

A = [0  1  0      % מטריצת המערכת A (3x3)
     0 -1/tau 0   % tau הוא קבוע הזמן של המערכת
     1  0  0];

B = [0            % מטריצת הכניסה B (3x1)
     K            % K הוא הגבר הממיר של המערכת
     0];

% הגדרת מטריצות המשקלים לפונקציית המחיר
Q = [30  0  0     % מטריצת משקלי המצבים Q (3x3)
     0   0  0
     0   0  3];

R = 1;            % משקל הכניסה R (סקלר)
                  % קובע את חשיבות מדור מאמץ הבקרה

% חישוב מטריצת הגברים של בקר LQR
[K1, S, e] = lqr(A, B, Q, R);

% הצגת תוצאות החישוב
K1                % מטריצת הבקר - וקטור [Kv Kp KI]
```

הקוד מתחיל בהגדרת מטריצות המערכת A ו- B המתארות את הדינמיקה של מערכת SRV02 במרחב מצבים. מטריצת A מייצגת את הקשרים הפנימיים במערכת, כאשר השורה הראשונה מבטאת שהנגזרת של המיקום היא המהירות, והשורה השנייה מתארת את דינמיקת מסדר ראשון עם קבוע זמן τ, מטריצת B מגדירה כיצד כניסת הבקרה משפיעה על מצבי המערכת. מטריצות המשקלים Q ו- R מגדירות את חשיבותם היחסית של דיוק במצבי המערכת לעומת מזעור מאמץ הבקרה. לבסוף, הפונקציה lqr מחשבת את מטריצת ההגברים K1 האופטימלית שממזערת את פונקציית המחיר הריבועית.

5.2.2. Ziegler-Nichols

שיטת Ziegler-Nichols מתבססת על ניתוח תגובת המערכת הפתוחה לכניסת מדרגה. השיטה כוללת זיהוי נקודת השיפוע המקסימלי בתגובה, העברת משיק דרך נקודה זו, ומציאת נקודות החיתוך עם הצירים לחישוב פרמטרי a ו- τ. הקוד הבא מממש תהליך זה באופן אוטומטי.

```
s = tf('s');                        % יצירת משתנה עבור פונקציית תמסורת
sys = K/(tau*s+1);                  % הגדרת פונקציית תמסורת המערכת

[y,tOut] = step(sys);               % חישוב תגובת מדרגה של המערכת
dt=diff(tOut);                      % חישוב הפרשי הזמן בין דגימות
dt=0.001;                           % הגדרת צעד זמן קבוע
y=theta_1;                          % הצבת נתוני התגובה המעשיים

dy=diff(y)./diff(tOut);             % חישוב הנגזרת הראשונה - השיפוע
dydy=diff(dy)./diff(tOut(2:end)); % חישוב הנגזרת השנייה

[DP,IndexP]=max(dy);                % מציאת השיפוע המקסימלי ומיקומו
theta0=y(IndexP);                   % ערך התגובה בנקודת השיפוע המקסימלי
t0=IndexP*dt;                       % זמן נקודת השיפוע המקסימלי

a=-(-DP*t0+theta0);                 % חישוב פרמטר אלפא לפי שיטת זייגלר-ניקולס
ztau=t0-theta0/DP;                  % חישוב פרמטר טאו לפי שיטת זייגלר-ניקולס

kp=1.2/a;                           % חישוב קבוע הבקר הפרופורציונלי
ki=2*ztau;                          % חישוב קבוע הבקר האינטגרלי
kv=0.5*ztau;                        % חישוב קבוע הבקר הדיפרנציאלי
```

הקוד מתחיל ביצירת פונקציית התמסורת של המערכת וביצוע סימולציית תגובת מדרגה. לאחר מכן מחושבת הנגזרת הראשונה של התגובה (dy) לזיהוי השיפוע בכל נקודת זמן. הפונקציה max מוצאת את נקודת השיפוע המקסימלי (DP) ואת מיקומה בזמן. על בסיס נתונים אלה מחושבים הפרמטרים $\boldsymbol{a}$ו-$\boldsymbol{\tau}$ לפי הנוסחאות של שיטת זייגלר-ניקולס. לבסוף, הפרמטרים $\boldsymbol{a}$ ו-$\boldsymbol{\tau}$ מוצבים בנוסחאות הסטנדרטיות של השיטה לחישוב קבועי הבקר $\boldsymbol{k_v}$, $\boldsymbol{k_p}$, $\boldsymbol{k_i}$.

5.2.3. Auto Tuningבאמצעות Relay

שיטת Auto Tuning באמצעות Relay מתבססת על הבאת המערכת לסף יציבות על ידי יישום בקרת Relay. השיטה כוללת הפעלת בקר Relay על המערכת, מדידת פרמטרי התנודה הקריטיים המתקבלים, וחישוב קבועי הבקר לפי טבלת הכיוונון הסטנדרטית.

```
%constants for relay tuning model
tau=0.0254;                   % קבוע הזמן של המערכת
K=1.5286;                     % הגבר המצב מתמיד של המערכת

%y, u, t derived from relay simulation
out = sim("RELAY_TUNING");    % הרצת סימולציית הממסר
t = get(out,"tout");          % חילוץ וקטור הזמן מהסימולציה
y = get(out,"y");             % חילוץ תגובת המערכת מהסימולציה
u = get(out,"u");             % חילוץ אות הבקרה מהסימולציה

%parameters for pid tuning
d= max(u);                    % שיא אות הבקרה - משרעת הגל הריבועי
a= max(y);                    % שיא תגובת המערכת - משרעת הפלט
[P,T]=findpeaks(y);           % מציאת הפסגות בתגובת המערכת
Tc=t(T(6))-t(T(5));           % חישוב זמן המחזור הקריטי

Kc=4*d/(a*pi);                % חישוב הגבר הקריטי
wc=2*pi/Tc  ;                 % חישוב התדר הקריטי

kp=0.6*Kc                     % חישוב קבוע הבקר הפרופורציונלי
ki=0.5*Tc                     % חישוב קבוע הבקר האינטגרלי
kv=0.125*Tc                   % חישוב קבוע הבקר הדיפרנציאלי
```

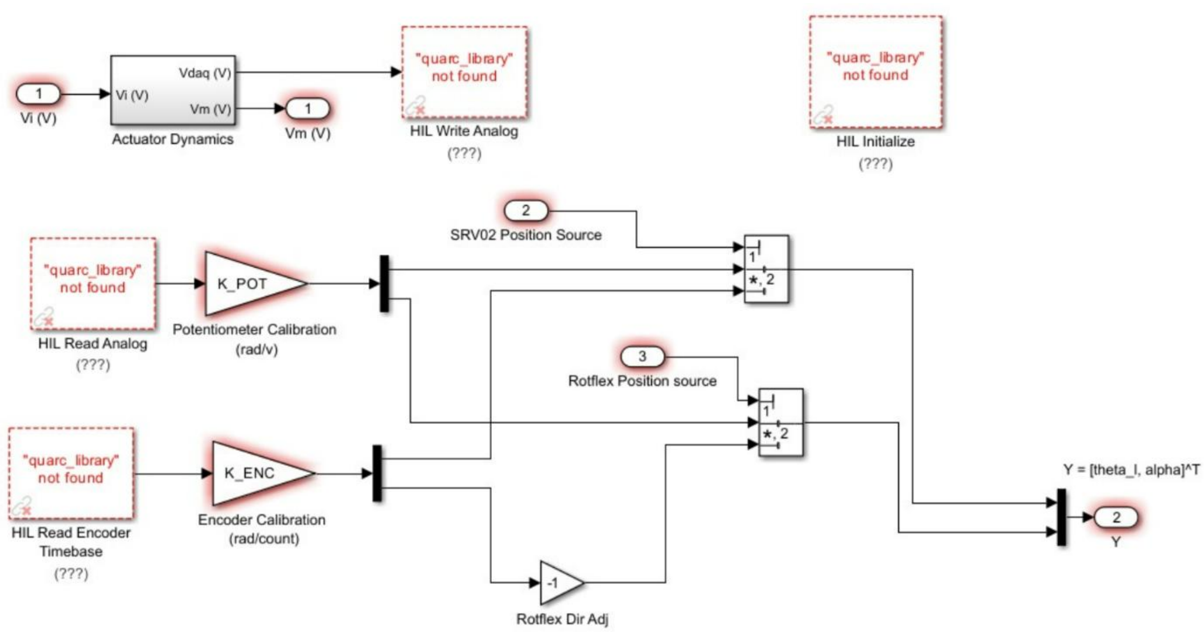
הקוד מתחיל בהגדרת קבועי המערכת ובהרצת סימולציית Relay שמביאה את המערכת לתנודות קבועות. לאחר מכן מחולצים נתוני הזמן, תגובת המערכת ואות הבקרה מהסימולציה. הפונקציה מוצאת את הפסגות בתגובה ומחשבת את זמן המחזור הקריטי. על בסיס משרעת הפלט ומשרעת הכניסה מחושב ההגבר הקריטי. לבסוף, הפרמטרים הקריטיים מוצבים בנוסחאות הסטנדרטיות של Auto Tuning באמצעות Relay לחישוב קבועי הבקר הפרופורציונלי, האינטגרלי והדיפרנציאלי.

5.3. בקרת מיקום מערכת מפרק גמיש בשיטת תכנון ישיר עם בקר משוב מצב יחד עם חישוב נומרי של משתני מצב לא נמדדים

בפרק זה מוצגים הפרטים הטכניים הנוספים הנדרשים למימוש המערכת, כולל תרשימי זרימה של הסימולציות בסימיולינק וקוד ה-MATLAB הרלוונטי .

5.3.1. מבנה המערכת הפיזיקלית

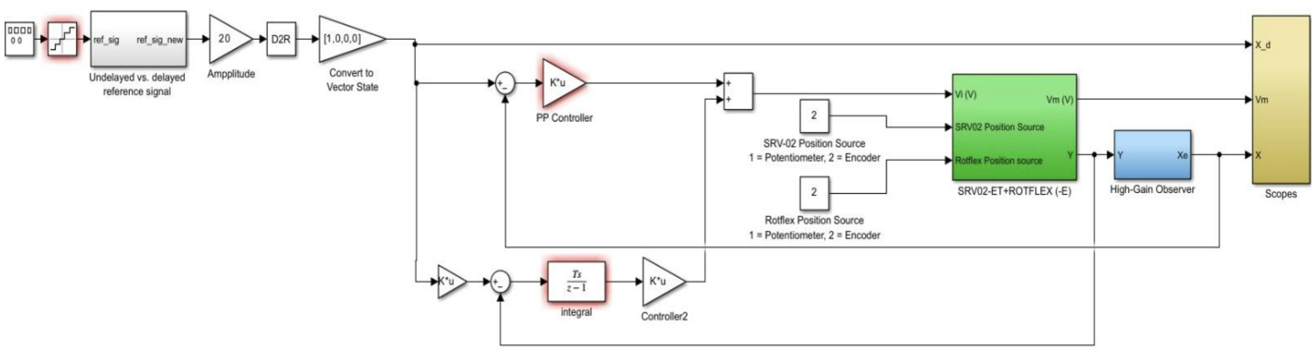
התרשים הבא מציג את מודל הסימולציה הבסיסי של מערכת הזרוע הגמישה כפי שמומש בסימיולינק, הכולל את רכיבי החומרה העיקריים וזרימת האותות במערכת.



המערכת מורכבת משני מקורות מיקום עיקריים : מנוע SRV02 המודד את זווית הזרוע $(\boldsymbol{\theta})$ ומפרק Rotflex המודד את זווית המפרק הגמיש $(\boldsymbol{\alpha})$. כל אחד מהמקורות מחובר לחיישנים המבצעים כיול של האותות - פוטנציומטר לקריאה אנלוגית ואנקודר לקריאה דיגיטלית. האותות הנמדדים מהחיישנים עוברים דרך בלוקי כיול המבצעים המרה ליחידות מתאימות (רדיאנים למתח עבור הפוטנציומטר ורדיאנים לספירות עבור האנקודר). לאחר הכיול, האותות מועברים למטריצת הפלט שמרכבת את וקטור המדידה. בלוק Actuator Dynamics מייצג את הדינמיקה הפיזיקלית של המערכת, כולל את מאפייני המנוע, המפרק הגמיש והעומסים. בלוק זה מקבל כקלט את מתח ההפעלה ומחזיר את התגובה הדינמית של המערכת. הפלט הסופי של המערכת הוא וקטור דו-ממדי= $\boldsymbol{Y}$ $[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}]^{\wedge}\boldsymbol{T}$ המכיל את שתי הזוויות הנמדדות. וקטור זה מהווה את המדידות הזמינות לבקר ומשמש לחישוב האותות הלא נמדדים (המהירויות הזוויתיות) באמצעות השיטות הנומריות שתוארו בפרק 3.3.

5.3.2. מימוש הבקרה הבדידה

התרשים הבא מציג את מבנה הבקר הדיגיטלי המלא כפי שמומש בסימיולינק, הכולל את רכיבי הבקרה, המשערך, והאינטגרטור לביטול שגיאת מצב מתמיד.



הבקר מורכב משני רכיבים עיקריים - בקר PP (Pole Placement) הממשש את משוב המצב עם מטריצת הגברים K, ובקר אינטגרלי נפרד המבטיח התכנסות לאותות ייחוס קבועים. האות הייחוס מועבר דרך בלוק עיכוב (D2R) וממיר לוקטור מצב לפני הזנתו למערכת. רכיב מרכזי נוסף הוא משערך המצב בעל הגבר גבוה, המחשב את המשתנים הלא נמדדים (המהירויות הזוויתיות) על בסיס המדידות הזמינות. המשערך מקבל כקלט את וקטור המדידות ואת אות הבקרה, ומחזיר הערכה מלאה של וקטור המצב. זרימת האותות מתבצעת בלולאה סגורה : אות הייחוס מופחת מהמדידה ליצירת שגיאה, השגיאה מועברת לבקר האינטגרלי ולבקר PP, אותות הבקרה מסוכמים ומוזנים למערכת הפיזיקלית דרך רכיבי SRV02 ו- Rotflex. הבקר מתממשק עם המערכת הפיזיקלית דרך בלוקים ירוקים המייצגים את חומרת SRV02 והמפרק הגמיש. הפלט מהמערכת מוזן חזרה למשערך המצב וליצירת השגיאה,

וכך נסגרת לולאת הבקרה הדיגיטלית. כל המערכת פועלת בזמן בדיד עם קצב דגימה Ts, כפי שמוגדר בפרמטרי הסימולציה. הדגימה מתבצעת באמצעות בלוקי ZOH (Zero-Order Hold) הממירים בין האותות הרציפים לבדידים.

5.3.3. מימוש הבקרה ב-MATLAB

שיערוך נומרי של מהירויות באמצעות נגזרת נומרית:

```
if k > 1 % בדיקה שיש מדידה קודמת לחישוב ההפרש
    x_est(3,k) = (y(1,k) - y(1,k-1)) / Ts; % נגזרת נומרית של זווית זרוע -
    x_est(4,k) = (y(2,k) - y(2,k-1)) / Ts; % נגזרת נומרית של זווית מפרק
end

% העתקת משתנים הנמדדים
x_est(1,k) = y(1,k); % זווית זרוע - מועתקת ישירות מהמדידה
x_est(2,k) = y(2,k); % זווית מפרק - מועתקת ישירות מהמדידה
```

השוואה שיטתית של זמני דגימה שונים:

```
Ts_values = [0.002, 0.05, 0.1]; % זמני דגימה בשניות - מהיר, בינוני, איטי
Ts_names = {'Ts = 0.002s', 'Ts = 0.05s', 'Ts = 0.1s'}; % שמות לתצוגה בגרפים

for i = 1:length(Ts_values) % לולאה על כל זמני הדגימה
    Ts = Ts_values(i); % זמן דגימה נוכחי
    % סימולציה עבור כל זמן דגימה
    [t_disc, y_disc, x_disc] = simulate_digital_system(...); % קריאה לפונקציית סימולציה
    results(i).Ts = Ts; % שמירת זמן דגימה במבנה תוצאות
    results(i).t = t_disc; % שמירת וקטור זמנים
    results(i).y = y_disc; % שמירת פלטי המערכת
    results(i).x = x_disc; % שמירת משתני מצב
end
```

ניתוח יציבות במישור Z :

```
% מפת קטבים
for i = 1:length(Ts_values) % לולאה על זמני דגימה שונים
    A_cl = sys_disc.A - sys_disc.B * K_disc; % מטריצת מערכת סגורה
    eig_cl = eig(A_cl); % חישוב ערכים עצמיים (קטבים)
    plot(real(eig_cl), imag(eig_cl), 'o', 'MarkerSize', 10); % קטבים במישור מרוכב
end

% עיגול יחידה
theta = 0:0.01:2*pi; % זוויות לעיגול מלא
plot(cos(theta), sin(theta), '--k', 'LineWidth', 1); % עיגול יחידה - גבול יציבות
title('מיקום קטבים במישור Z'); % כותרת הגרף
```

בדיקת השפעת רעש מדידה :

```
function [t, y] = simulate_with_noise(sys_cont, Ts, t_final, ref_theta, ref_alpha, noise_level)
    % הוספת רעש למדידות
    y_clean = sys_disc.C * x(:,k); % מדידה נקייה ללא רעש
    y(:,k) = y_clean + noise_level * randn(2,1); % הוספת רעש גאוסי אקראי
end

% בדיקה עם רמות רעש שונות
noise_levels = [0, 0.001, 0.005, 0.01]; % רמות רעש הולכות וגדלות
for noise_level = noise_levels % לולאה על כל רמת רעש
    [t_noise, y_noise] = simulate_with_noise(...); % הרצת סימולציה עם רעש
    plot(t_noise, y_noise(1,:), 'DisplayName', ['רעש = ', num2str(noise_level)]); % הצגת תוצאה עם תווית
end
```

ניתוח ביצועים כמותי מפורט:

```matlab
% חישוב שגיאות
final_theta = results(i).y(1,end); % זווית זרוע סופית
final_alpha = results(i).y(2,end); % זווית מפרק סופית
error_theta = abs(ref_theta - final_theta); % שגיאה אבסולוטית זרוע
error_alpha = abs(ref_alpha - final_alpha); % שגיאה אבסולוטית מפרק

% זמן התכנסות
settling_time = find(abs(results(i).y(1,:) - ref_theta) < 0.05*ref_theta, 1) * Ts; % זמן להגיע ל-5% מהערך הסופי

disp(['שגיאת מצב מתמיד זרוע: ', num2str(error_theta, '%.4f'), ' רדיאן']); % הדפסת שגיאה
disp(['זמן התכנסות (זרוע): ', num2str(settling_time, '%.3f'), ' שניות']); % הדפסת זמן התכנסות
```

פונקציית סימולציה דיגיטלית מותאמת:

```matlab
function [t, y, x] = simulate_digital_system(Ad, Bd, Cd, K, KI, Ts, t_final, ref_theta, ref_alpha)
    N = ceil(t_final/Ts); % מספר צעדי זמן בסימולציה
    t = (0:N-1) * Ts; % וקטור זמנים דיסקרטי

    x = zeros(4, N); % אתחול מטריצת משתני מצב
    y = zeros(2, N); % אתחול מטריצת פלטים
    x_est = zeros(4, N); % אתחול מטריצת הערכת מצב

    int_error_theta = 0; % אתחול אינטגרל שגיאת זרוע
    int_error_alpha = 0; % אתחול אינטגרל שגיאת מפרק

    for k = 1:N-1 % לולאת הסימולציה הדיגיטלית
        % מדידות
        y(:,k) = Cd * x(:,k); % חישוב פלטים מהמצב האמיתי

        % שיערוך נומרי
        if k > 1 % מהצעד השני ואילך
            x_est(3,k) = (y(1,k) - y(1,k-1)) / Ts; % שיערוך מהירות זרוע
            x_est(4,k) = (y(2,k) - y(2,k-1)) / Ts; % שיערוך מהירות מפרק
        end

        % בקרה אינטגרלית
        error_theta = ref_theta - y(1,k); % חישוב שגיאת זרוע
        error_alpha = ref_alpha - y(2,k); % חישוב שגיאת מפרק
        int_error_theta = int_error_theta + error_theta * Ts; % עדכון אינטגרל זרוע
        int_error_alpha = int_error_alpha + error_alpha * Ts; % עדכון אינטגרל מפרק

        u(k) = K * x_est(:,k) + KI(1) * int_error_theta + KI(2) * int_error_alpha; % חישוב אות בקרה
        x(:,k+1) = Ad * x(:,k) + Bd * u(k); % עדכון מצב המערכת לצעד הבא
    end
end
```

הבקרה דיגיטלית:

```
Csys=ss(A,B,C,D); % הגדרת המערכת הרציפה במרחב מצב
Ts=0.002; % זמן דגימה של 2 מילישניות
Dsys=c2d(Csys,Ts); % המרת המערכת הרציפה למערכת דיסקרטית
[AD,BD,CD,DD]=ssdata(Dsys); % חילוץ המטריצות של המערכת הדיסקרטית

zeta=0.6; % יחס הריסון הרצוי
wn=20; % תדר טבעי רצוי ברד/שנייה
sig=zeta*wn; % חלק הממשי של הקוטב הדומיננטי
wd=wn*sqrt(1-zeta^2); % תדר הדעיכה המדעדע
s3=20; % קוטב ממשי שלישי
s4=25; % קוטב ממשי רביעי

pCont=[-sig+wd*j,-sig-wd*j,-s3,-s4]; % קטבים רצויים במישור s
pDisc=exp(pCont.*Ts); % המרת הקטבים למישור z
cont=place(A,B,pCont); % מטריצת הרווח לבקר רציף (לצורך השוואה)
K=place(AD,BD,pDisc); % מטריצת הרווח לבקר דיסקרטי

%s=tf('s') % הגדרת המשתנה s לפונקציית העברה
%systf=C*(s*eye-A)^(-1)*B % פונקציית העברה של המערכת הרציפה
```