3.1.6 אפיון היינה לקיום גבול של פונקציה בנקודה

תהי $f:D\to\mathbb{R}$ המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0\in\mathbb{R}$. אז יש לf גבול בx_0 אם"ם לכל $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת היינה עבור f ב-x_0, הסדרה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

הוכחה נראה שקילות לאפיון היינה:

- $\Leftarrow$ אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\in\mathbb{R}$, לכל $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת היינה יתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$ בפרט, כלומר קיים הגבול הנ"ל כנדרש.
- $\Rightarrow$ נגדיר 2 סדרות היינה $\tilde{x}_n,\hat{x}_n$, נסמן $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{x}_n=L_2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{x}_n=L_1$. אזי מאינפי 1 הסדרה השזורה $(\tilde{x}_1,\hat{x}_1,\tilde{x}_2,\hat{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n,\hat{x}_n,\ldots)$ היא גם סדרת היינה, ולפי ההנחה הסדרה הנ"ל מתכנסת (נסמןL) ולכן קבוצת הגבולות החלקיים שלה היא בדיוק $\{L\}$, כלומר $L_1=L=L_2$ ולכן מאפיון היינה $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ כנדרש