יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, $g,f:[a,b]\to\mathbb{R}$ הרציפות ב-$[a,b]$ וגזירות ב-(a,b).

משפט רול אם הפונקציה f מקיימת:

1. f רציפה ב$[a,b]$
2. f גזירה ב(a,b)
3. $f(a)=f(b)$

אזי קיימת $c\in(a,b)$, לפחות אחת (לדוגמה פונקציה קבועה), שעבורה $f'(c)=0$.

הוכחה מהמשפט השני של ויירשטראס, קיימים מינימום ומקסימום ב-$[a,b]$, לכן המינימום או המקסימום יהיו נקודות פנימיות של הקטע וממשפט פרמה הנגזרת שלו 0

משפט לגראנז' (הערך הממוצע) בהינתן התנאים, קיימת נקודה (אחת לפחות) $c\in(a,b)$, שעבורה $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

הוכחה
1. נגדיר $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הישר העובר דרך $(a,f(a)),(b,f(b))$. $l(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$.
2. נגדיר $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימת $h(x)=f(x)-l(x)$ $\forall x\in[a,b]$.$\Leftarrow$ $h(a)=f(a)-l(a)=0=f(a)-l(b)=h(b)$
3. נשים לב - $h'(x)=f'(x)-l'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
4. נפעיל את משפט רול ונקבל $c\in(a,b)$ שעבורו $h'(c)=0 \overset{3}{=} f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ כנדרש.

הערות
1. משפט רול הוא מקרה פרטי של לגראנז'
2. את משפט לגראנז' הוכחנו בעזרת משפט רול ולכן אי אפשר להוכיח את רול ע"י לגראנז'.

מונוטוניות ע"פ סימן הנגזרת **כאן אין צורך ברציפות, אלא רק גזירות.** נחלק למקרים:

1. f קבועה ב-$(a,b)\Leftrightarrow f'(x)=0 \quad \forall x\,(a,b)$
2. f מונוטונית עולה (יורדת) ב-$(a,b)\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)\quad \forall x\,(a,b)$
3. $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)\quad \forall x\,(a,b)\Rightarrow$ f מונוטונית עולה (יורדת) **ממש**

הערה חשובה בסעיף **3 זה לא אם"ם!!!!** ד"נ $f(x)=x^3$

רציפות הנגזרת[1] אם f **רציפה ב**$[a,b)$**(!!!!)**, וקיים הגבול במובן הצר $L\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)$, אזי f' רציפה מימין

הערה באותה מידה תקף על פונקציה הגזירה בסביבה מנוקבת של a וגזירה בסביבה מלאה שלו, או על פונקציה הרציפה ב$(b,a]$

מסקנה אם f גזירה ב-(a,b), ל-f' תהיינה רק נקודות אי רציפות מסוג שני (אחד מהגבולות החד צדדיים אינו קיים במובן הצר)

משפט קושי בהינתן התנאים, קיימת נקודה (אחת לפחות) $c\in(a,b)$, שעבורה מתקיים:

1. $f'(c)(g(b)-g(a))=g'(c)(f(b)-f(a))$
2. אם בנוסף $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$, נוכל לכתוב את 1 בצורה: $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

הוכחה:
1. נגדיר $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימת $h(x)=f(x)(g(b)-g(a))-g(x)(f(b)-f(a))$ $\forall x\in[a,b]$ רציפה מאריתמטיקה של רציפות כסכום פונקציות רציפות
2. $\forall x\in[a,b]\, h'(x)=f'(x)(g(b)-g(a))-g'(x)(f(b)-f(a))$
3. **מתקיים** $h(b)=h(a)$
4. h מקיימת את תנאי משפט רול, נפעיל ונקבל שקיים (לפחות אחד) $c\in(a,b)$ שעבורו $h'(c)=0=f'(c)(g(b)-g(a))-g'(c)(f(b)-f(a))$ ומכאן נפתח כנדרש.

הערה לגראנז' מקרה פרטי של קושי (2) עבור $g(x)=x$

משפט דרבו תהא f פונקציה גזירה ב(a,b), וגזירה חד-כיוונית בקצוות, ויהא $\lambda\in(\min\{f'(a),f'(b)\},\max\{f'(a),f'(b)\})$. אזי קיימת נקודה (אחת לפחות) $c\in(a,b)$, שעבורה מתקיים $f'(c)=\lambda$.

הוכחה: נניח בה"כ $f'(a)<f'(b)$

1. נגדיר $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימת $h(x)=f'(x)-\lambda x$ $\forall x\in[a,b]$ רציפה מאריתמטיקה של רציפות כסכום פונקציות רציפות[1]

2. מהמשפט השני של ויירשטראס נקבל שקיימת נקודה (אחת לפחות) $c \in [a,b]$ שעבורה $h(c) \le h(x)$ $\forall x \in [a,b]$.
3. נראה ש$c \notin \{a,b\}$:

א) $h'_+(a) = f'_+(a) - \lambda < 0$ $\Leftarrow$ קיימת U_a סביבה ימנית מנוקבת של a שבה מתקיים $\forall x \in U_a \, \frac{h(x)-h(a)}{x-a} < 0 \overset{x>a}{\Leftrightarrow} h(x) < h(a) \Leftrightarrow c \neq a$

ב) $h'_-(b) = f'_-(b) - \lambda > 0$ $\Leftarrow$ קיימת U_b סביבה שמאלית מנוקבת של b שבה מתקיים $\forall x \in U_b \, \frac{h(x)-h(b)}{x-b} < 0 \overset{x<b}{\Leftrightarrow} h(x) > h(b) \Leftrightarrow c \neq b$

4. מכאן נובע ש-c נקודה פנימית, ובנוסף c נקודת קיצון של h ב-$[a,b]$ ולכן $f'(c) - \lambda = h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \lambda$