סדרות הסופרמה והאינפימה של סדרה חסומה מונוטוניות וחסומות (+קיום)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה.
אזי סדרת האינפימה u_n מונוטונית יורדת וחסומה מלעיל, וסדרת האינפימה ℓ_n מונוטונית עולה וחסומה מלרע.

הוכחה באינפי 1 הוכחנו שבהינתן $B \subseteq A \neq \phi$ מתקיים $\sup A \geq \sup B \bigwedge \inf A \leq \inf B$.
נסמן $A_n = \{a_k \mid k \geq n\}$, ונשים לב שמתקיים $A_{n+1} \subseteq A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
בנוסף מתקיים $\inf A_n = \ell_n \bigwedge \sup A_n = u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
לכן $u_n \geq u_{n+1} \bigwedge \ell_n \leq \ell_{n+1}$ ולכן הסופרמה מונוטונית יורדת והאינפימה מונוטונית עולה.
חסימות נובעת ממשפט הירושה שכן a_n חסומה (מלרע ומלעיל)
בפרט לכן הסדרות הנ"ל חסומות שתיהן מלרע ומלעיל ומכך מתכנסות שתיהם, ולכן **בסדרה חסומה תמיד קיימים** $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n, \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$