10.1 אסוציאטיביות בטורים (הוספה ופתיחת סוגריים לטור)

הגדרות

1. הכנסת סוגריים לטור

נאמר שהטור $\sum_k b_k$ **מתקבל מהטור** $\sum_n a_n$ **על ידי הכנסת סוגריים** כאשר קיימת סדרת אינדקסים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים כך שלכל $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_n = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}$, עם המוסכמה $n_0 = 0$ להגדרת b_1.

משפטים

1. הסס"ח של b_k הוא תת סדרה של הסס"ח של a_n

יהי $\sum_k b_k$ טור המתקבל מ-$\sum_n a_n$ע"י הכנסת סוגריים במקומות ה$(n_k)_{k=0}^{\infty}$, ויהיו $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$, $T_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$ סס"חים של $\sum_n a_n$ ו-$\sum_k b_k$בהתאמה.
אזי $T_n = S_{n_k}$ לכל $k \in \mathbb{N}$, כלומר T_k תת סדרה של S_n.

הוכחה

נשים לב שמתקיים לכל $k \in \mathbb{N}$

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} b_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} a_n \right) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + \left(a_{n_{j-1}+1} + \cdots + a_{n_j}\right) =$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2} + \cdots + a_{n_{j-1}+1} + \cdots + a_{n_j} = S_{n_k}$$

כאשר המעבר בין השורות הוא פתיחת סוגריים בחיבור, מאסוציאטיביות סכומים סופיים מעל $\mathbb{R}$, כנדרש.

2. משפטי הירושה לטורים המתקבלים על ידי הכנסת סוגריים

יהי $\sum_k b_k$ טור המתקבל מ-$\sum_n a_n$ע"י הכנסת סוגריים. אזי מתקיים:

1. אם $\sum_n a_n$ מתכנס ל-$S \in \mathbb{R}$, אזי $\sum_k b_k$ מתכנס וסכומו S
2. אם $\sum_n a_n$ מתבדר ל∞ (ל$-\infty$), אזי $\sum_k b_k$ מתבדר ל∞ (ל$-\infty$)

הוכחה

לפי המשפט הקודם על S_n, T_k הסס"חים של הסדרות הנ"ל, $\sum_k b_k$ תת סדרה של $\sum_n a_n$ המתכנסת ל$S \in \mathbb{R}$.
אזי ממשפט הירושה בסדרות, כל תת סדרה של סדרה מתכנסת תתכנס לאותו הגבול. ולכן 1 מתקיים, ונציין ש-2 נובע מאותו משפט על גבולות במובן הרחב, כנדרש.

3. טור חסום מתכנס אם"ם כל טור מתכנס המתקבל על ידי הכנסת סוגריים מתכנס לאותו $S \in \mathbb{R}$.

הטור החסום $\sum_n a_n$ מתכנס אם"ם קיים $S \in \mathbb{R}$ כך שכל טור **מתכנס** המתקבל מהכנסת סוגריים לטור, מתכנס ל-S

הוכחה

לפי משפט 1, טענה זו שקולה לטענה על גבולות חלקיים בסדרות - הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$S \in \mathbb{R}$ אם"ם קבוצת כל הגבולות החלקיים שלה מקיימת $S_a = \{S\}$.

4. אם טור המתקבל מהכנסת סוגריים לטור אי שלילי מתכנס, הטור המקורי מתכנס גם הוא לאותו הגבול

יהי $\sum\limits_k b_k$ טור **מתכנס** המתקבל ע"י הכנסת סוגריים בטור האי שלילי $\sum\limits_n a_n$. אזי $\sum\limits_n a_n$ מתכנס גם הוא ולאותו הגבול (אינפי 1)

הוכחה

$\sum\limits_n a_n$ אי שלילי, לכן S_k מונוטונית עולה ואי שלילית.

לפי משפט 1, טענה זו שקולה לטענה הנ"ח: סדרה מונוטונית עולה עם תת סדרה מתכנסת, מתכנסת גם היא ולאותו הגבול (אינפי 1)

5. הכנסת סוגריים כך שכל המחוברים בתוכן שווי סימן

יהי $\sum\limits_k b_k$ טור **מתכנס** המתקבל מ-$\sum\limits_n a_n$ ע"י הכנסת סוגריים במקומות ה-$(n_k)_{k=1}^{\infty}$

אם עבור כל $k \in \mathbb{N}$, כל מחובריי b_k בעלי אותו סימן, אזי $\sum\limits_n a_n$ מתכנס ולאותו הגבול

הוכחה

נגדיר סס"חים $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, $T_k = \sum\limits_{j=1}^{k} b_j$. אזי $\forall k \in \mathbb{N}\, T_k = S_{n_k}$. נתון שקיים $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = L \in \mathbb{R}$.

לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $k \in \mathbb{N}$ יחיד המקיים $n_{k-1} < n \le n_k$, ולכן מתקיים $\begin{cases} S_{n_{k-1}} \le S_n \le S_{n_k} & b_k \ge 0 \\ S_{n_k} \le S_n \le S_{n_{k-1}} & b_k \le 0 \end{cases}$.

והרי $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_{k-1}} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = L$, אזי ממשפט הכריך $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, כנדרש.

6. הכנסת אפסים (מסקנה מהכנסת סוגריים שווי סימן)

יהי $\sum\limits_k c_k$ טור כלשהו ו-$(m_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים מונוטונית עולה ממש. נגדיר $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $\forall n \in \mathbb{N}\, d_n = \begin{cases} c_k & n \in \{m_k \mid k \in \mathbb{N}\} \\ 0 & n \notin \{m_k \mid k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$.

אזי הטור $\sum\limits_n d_n$ מתכנס אם"ם הטור $\sum\limits_k c_k$

במקרה זה שניהם מתכנסים לאותו הסכום.

הוכחה

נראה ש-$\sum\limits_k c_k$ מתקבל מהטור $\sum\limits_n d_n$ ע"י הכנסת סוגריים:

נגדיר $m_0 = 0$ ונקבל שמתקיים $\forall k \in \mathbb{N}\, c_k = d_{m_k} = \sum\limits_{n=m_{k-1}+1}^{m_k} d_n = 0 + \cdots + 0 + d_{m_k}$, ולכן $\sum\limits_k c_k$ מתקבל מהטור $\sum\limits_n d_n$ ע"י הכנסת סוגריים במקומות ה-$(m_k)_{k=0}^{\infty}$, ולכן המשפט הקודם על הכנסת סוגריים כך שכל המחוברים שווי סימן תקף גם פה, כנדרש.

7. הוספת סוגריים באורך חסום

יהי $\sum\limits_k b_k$ טור **מתכנס** המתקבל מ-$\sum\limits_n a_n$ ע"י הכנסת סוגריים במקומות ה-$(n_k)_{k=1}^{\infty}$

נניח שקיים $M \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $n_k - n_{k-1} \le M$.

אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, אזי $\sum\limits_k b_k$ מתכנס אם ורק אם $\sum\limits_n a_n$ מתכנס, והם מתכנסים לאותו הגבול.

הוכחה

$\Leftarrow$ נובע ישירות ממשפטי הירושה.

$\Leftarrow$ נגדיר סס"חים $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$, $T_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$.

אזי $\lim_{k\to\infty} T_k = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = L \in \mathbb{R}$ עבור L כלשהו.

יהא $\varepsilon > 0$ נתון

אזי קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > K$ מתקיים $|S_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ (♠), וקיים $J \in \mathbb{N}$ שעבורו לכל $j > J$ מתקיים $|a_j| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ (♣)

נגדיר $N = \max\{J, n_K\}$. לכן לכל $n > N$ קיים $k_0 \in \mathbb{N}$ המקיים $n_{k_0 - 1} < n \leq n_{k_0}$

ולכן מתקיים $S_n = S_{n_{k_0}} - \sum_{j=n+1}^{n_{k_0}} \leq S_{n_{k_0}}$, ובנוסף $n_{k_0} - n < n_{k_0} - n_{k_0-1} \leq M$ $(*)$ מחסימות אורך הסוגריים.

לכן נקבל שמתקיים

$$|S_n - L| = \left| \left(S_{n_{k_0}} - \sum_{j=n+1}^{n_{k_0}} a_j \right) - L \right| \overset{(\triangle)}{\leq} \left| S_{n_{k_0}} - L \right| + \sum_{j=n+1}^{n_{k_0}} |a_j| \overset{(♠)(♣)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=n+1}^{n_{k_0}} \frac{\varepsilon}{2M} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \sum_{j=n+1}^{n_{k_0}} 1 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot (n_{k_0} - n) \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + M = \varepsilon$$