3.1.4 שלילת רבמ"ש

יהיו $D\subseteq\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$. f איננה רבמ"ש ב-D אס"ם קיים $\varepsilon_0>0$ וקיימות 2 סדרות $\left(\hat{x}_n\right)_{n=1}^{\infty},\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המקיימות את שלושת התנאים הבאים:

1. $\forall n\in\mathbb{N}\,x_n,\hat{x}_n\in D$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-\hat{x}_n\right)=0$
3. $\forall n\in\mathbb{N}\,\left|f\left(x_n\right)-f\left(\hat{x}_n\right)\right|\geq\varepsilon_0$

הוכחה $\Leftarrow$ אם f אינה רבמ"ש, היא מקיימת את השלילה של ההגדרה, קרי $\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x,\hat{x}\in D\quad|\hat{x}-x|<\delta\bigwedge|f(\hat{x})-f(x)|\geq\varepsilon$. אזי בפרט לכל $n\in\mathbb{N}$ עבור $\delta=\frac{1}{n}$, קיימים $x_n,\hat{x}_n$ המקיימים $\left|\hat{x}_n-x_n\right|<\delta=\frac{1}{n}\bigwedge|f(\hat{x})-f(x)|\geq\varepsilon$. ולכן מתקיים

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \left|\hat{x}_n-x_n\right|<\delta=\frac{1}{n}\iff-\frac{1}{n}\leq\hat{x}_n-x_n\leq\frac{1}{n}$$

וממשפט הכריך נקבל $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\hat{x}_n-x_n\right)=0$

$\Rightarrow$ ניישם היינה על הכיוון