9.3 טורים כלליים והתכנסות בהחלט

הגדרות

1. טור לייבניץ

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת, אי שלילית ואפסה, אז הטור המתחלף $\sum_n (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ יקרא **טור לייבניץ**.

הערות
- גם הטור $\sum_n (-1)^n a_n$ הוא טור לייבניץ
- משום שa_n אי שלילית ומונוטונית יורדת, אם $a_N = 0$ עבור $N \in \mathbb{N}$ כלשהו, אז היא 0 כמעט תמיד. לכן נתמקד בסדרות חיוביות ולא רק אי שליליות.

2. טור חסום

נאמר ש**הטור** $\sum_n a_n$ **חסום** אם"ם הסס"ח $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה.

3. טור מתכנס בהחלט

נאמר ש**הטור** $\sum_n a_n$ **מתכנס בהחלט** אם"ם הטור $\sum_n |a_n|$ מתכנס

4. טור מתכנס בתנאי

נאמר ש**הטור** $\sum_n a_n$ **מתכנס בתנאי** אם"ם הטור $\sum_n a_n$ מתכנס והטור $\sum_n |a_n|$ איננו מתכנס

5. סימון: x^+, x^- בהינתן $x \in \mathbb{R}$ נסמן

$$\begin{cases} x^- = & \frac{|x|-x}{2} = \max\{-x, 0\} \geq 0 \\ x^+ = & \frac{|x|+x}{2} = \max\{x, 0\} \end{cases}$$

אזי מתקיים $x = x^+ - x^-$ וגם $|x| = x^+ + x^-$

משפטים

1. משפט לייבניץ לטורים מתחלפים

יהי $\sum_n (-1)^{n+1} a_n$ טור לייבניץ. אזי:

1. הטור $\sum_n (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס
2. נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = L \in \mathbb{R}$. **אזי** $0 \leq a_1 - a_2 \leq L \leq a_1$
3. יהי $N \in \mathbb{N}$. נגדיר $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ סכום טור ה-N זנב של $\sum_n (-1)^{n+1} a_n$. **אזי** $|r_N| \leq a_{N+1}$

הוכחה

1. נגדיר $\forall n \in \mathbb{N}\, b_n = (-1)^{n+1} a_n$, ונגדיר את הסס"ח $(S_k)_{n=1}^{\infty}$, ונסתכל על תתי הסדרות S_{2k-1}, S_{2k}:

$$S_{2(k+1)} - S_{2k} = (-1)^{2k+2} a_{2k+2} + (-1)^{2k+1} a_{2k+1} + \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} a_n = a_{2k+2} - a_{2k+1} \underset{decreaseing}{\overset{monotonic}{\geq}} 0$$

$$S_{2(k+1)-1} - S_{2k-1} = (-1)^{2k+1} a_{2k+1} + (-1)^{2k} a_{2k} + \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} a_n = a_{2k} - a_{2k+1} \underset{decreaseing}{\overset{monotonic}{\leq}} 0$$

כלומר S_{2k} מונוטונית עולה וS_{2k-1} מונוטונית יורדת
בנוסף נשים לב שמתקיים

$$\forall k\in\mathbb{N}\, S_{2k}=S_{2k-1}+b_{2k}=S_{2k-1}+(-1)^{2k+1}a_{2k}\overset{(a_{2k}\geq 0)}{\leq}S_{2k-1}$$

ולכן סדרת הקטעים $([S_{2k},S_{2k-1}])_{k=1}^{\infty}$ מקיימת את הלמה של קנטור, ובנוסף מכך מתקיים

$$\forall k\in\mathbb{N}\, S_{2k-1}-S_{2k}=S_{2k-1}-(S_{2k-1}+b_{2k})=a_{2k}\iff\lim_{k\to\infty}(S_{2k-1}-S_{2k})=0$$

אזי מהלמה של קנטור נקבל שמתקיים $\lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=L=\lim_{k\to\infty}S_{2k}$, ומשום ש$\{S_{2k-1}\mid k\in\mathbb{N}\}\cup\{S_{2k}\mid k\in\mathbb{N}\}=\{S_k\mid k\in\mathbb{N}\}$, מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=L$ כנדרש.

2. מהלמה של קנטור, נקבל שמתקיים $L=\sup\{S_{2k}\mid k\in\mathbb{N}\}$, אזי ממשפט החסם העליון $L\geq S_2=a_1-a_2\geq 0$.
באותו אופן $L=\inf\{S_{2k-1}\mid k\in\mathbb{N}\}$ ולכן ממשפט החסם התחתון $L\leq S_1=a_1$
כלומר קיבלנו $0\leq a_1-a_2\leq L\leq a_1$ כנדרש.

3. ממשפט על טורים מתכנסים, נקבל שטור ה-N זנב של b_n מתכנס גם הוא, ומתקיים

$$r_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=(-1)^N\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_{n+N}$$

והרי סדרת הזנב a_{n+N} אפסה, אי שלילית ומונוטונית יורדת גם היא ממשפט הירושה. לכן $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_{n+N}$ טור לייבניץ.

אזי מסעיף 2 נקבל שמתקיים $0\leq\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_{n+N}\leq a_{N+1}$ $(*)$.

- לכן אם N זוגי, מתקיים $r_N=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_{n+N}$ ולכן $0\leq r_N\leq a_{N+1}$
- אחרת אם N אי זוגי, מתקיים $r_N=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_{n+N}$ ולכן $0\leq -r_N\leq a_{N+1}$

ובכל מקרה נקבל $|r_N|\leq a_{N+1}$ כנדרש.

2. התכנסות בהחלט גוררת התכנסות

אם $\sum_n a_n$ מתכנס בהחלט, אזי $\sum_n a_n$ מתכנס.

הוכחה נשים לב שמתקיים $\sum_n a_n=\sum_n(|a_n|-(|a_n|-a_n))$ ובנוסף $\forall n\in\mathbb{N}\, 0\leq|a_n|-a_n\leq 2|a_n|$
לכן מאריתמטיקה של טורים הטור $\sum_n 2|a_n|$ מתכנס גם הוא, וממבחן ההשוואה הטור $\sum_n(|a_n|-a_n)$ מתכנס גם הוא
אז שוב מאריתמטיקה של טורים נקבל ש$a_n=2|a_n|-(|a_n|-a_n)$ ולכן הטור $\sum_n a_n$ מתכנס גם הוא, כנדרש

מסקנות
1. כל טור חיובי מתכנס גם מתכנס בהחלט
2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2}$ מתכנס בהחלט
3. הטור ההרמוני המתחלף, כשלעצמו מתכנס בתנאי: כשלעצמו הוא טור לייבניץ ולכן מתכנס, אך $\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$ ואינו מתכנס.
4. דוגמה - נחפש את כל הערכים של $x\in\mathbb{R}$ שעבורם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ מתכנס: נשתמש בדלאמבר הגבולי ונקבל שלכל $|x|<1$ הטור מתכנס, ועבור $x=1$ נקבל שמתקיים: $\forall n\in\mathbb{N}\,\frac{x^n}{n}=\begin{cases}\frac{1}{n} & x=1\\ \frac{(-1)^n}{n} & x=-1\end{cases}$, לכן כאשר $x=-1$ זהו טור לייבניץ ההרמוני, אזי הוא מתכנס בתנאי (3), וכאשר $x=1$ הטור אינו מתכנס. כלומר רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $[-1,1)$.
5. טור מתכנס הוא חסום כי הסס"ח שלו מתכנסת ועל כן חסומה
6. יש טורים חסומים שלא מתכנסים: הטור $\sum_{n=1}^{k}(-1)^n$ חסום אך לא מתכנס
7. אם לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש זנב חיובי או שלילי והטור $\sum_n a_n$ חסום, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס

3. תנאי שקול התכנסות בהחלט על ידי הפירוק להפרש של אי־שליליים

$\sum\limits_n a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם הטורים האי שליליים $\sum\limits_n a_n^+, \sum\limits_n a_n^-$ מתכנסים, ואז מתקיים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$, ובפרט $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט ועל כן מתכנס.

הוכחה

$\Leftarrow$ $\sum\limits_n a_n$ מתכנס בהחלט, כלומר $\sum\limits_n |a_n|$ מתכנס.

מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\, 0 \le a_n^+, a_n^- \le |a_n|$ ועל כן ממבחן ההשוואה $\sum\limits_n a_n^-, \sum\limits_n a_n^+$ מתכנסים כנדרש.

$\Rightarrow$ מתקיים $\forall k \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{n=1}^{k} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{k} a_n^- \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^+ + a_n^- = |a_n|$ ועל כן מאריתמטיקה של טורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

4. פירוק להפרש אי־שליליים של טור מתכנס בתנאי

אם $\sum\limits_n a_n$ מתכנס בתנאי, $\sum\limits_n a_n^+ = \infty \bigwedge \sum\limits_n a_n^- = \infty$.

הוכחה משום שהטור $\sum\limits_n a_n$ מתכנס בתנאי, הטור $\sum\limits_n |a_n| = \sum\limits_n a_n^+ + \sum\limits_n a_n^-$ מתבדר, אזי אחד הטורים לפחות יהיה חייב להתבדר. נניח בשלילה שאחד הטורים (נניח בה"כ $\sum\limits_n a_n^-$) מתכנס. מתקיים $\sum\limits_n a_n = \sum\limits_n a_n^+ - \sum\limits_n a_n^-$. אזי אם $\sum\limits_n a_n^+$ מתכנס נקבל מאריתמטיקה של גבולות ש $\sum\limits_n a_n^-$ מתכנס גם הוא בסתירה. לכן מתקיים הנדרש.