7.1 המשפט היסודי והנוסחה היסודית של החשבון האינטגרלי

הגדרות

1. **הערך הממוצע**
יהיו $a < b \in \mathbb{R}$ ותהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
המספר הממשי $\mathbb{R} \ni \mu := \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(t)\,dt$ נקרא **הערך הממוצע של** f **ב**$[a,b]$

2. **פונקציה צוברת:**
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ב$[a,b]$. אזי **הפונקציה הצוברת** של f ב$[a,b]$ היא $\tilde{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$

3. **פונקציה קדומה:**
יהיו $I \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ ותהי $f : D \to \mathbb{R}$, ותהי $F : I \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה במקטע I.
נאמר ש-F **פונקציה קדומה של** f **במקטע** I אם"ם מתקיים $\forall x \in I\ F'(x) = f(x)$, עם גזירות חד צדדית בקצוות.
אם F פונקציה קדומה של f, נסמן $\int f(x)\,dx \overset{def}{=} \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ **אוסף הפונקציות הקדומות של** f **במקטע** I.

הערות

1. אין זכר למקטע שבו $\int f(x)\,dx$ מוגדרת.
2. פונקציה קדומה היא קבועה עד כדי C ולכן הפסוק "F היא ה̲פונקציה ה̲קדומה של f בקטע I" אינו מוגדר כהלכה.
3. ישנן פונקציות שתחום ההגדרה המקסימלי שלהן או של הפונקציה הקדומה שלהן הוא איחוד זר של קטעים

$$\left(f(x) = -\frac{1}{x^2}, F(x) = \frac{1}{x}, \quad f, F : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R} \right)$$

4. אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה אזי $\tilde{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ פונקציה קדומה שלה. נקבע $x_0 \in [a,b]$, ונגדיר $\tilde{H}(x) = \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt$, ואז נקבל

$$\forall x \in [a,b]\ \tilde{H}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t) = \int\limits_a^x f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt = \tilde{F}(x) - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt \Rightarrow \tilde{H} \in \int f(x)\,dx$$

משפטים

1. **המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי:**
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ב$[a,b]$. אזי $\tilde{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ מקיימת:

   1. $\tilde{F}$ רציפה ב$[a,b]$
   2. אם f רציפה ב$x_0 \in [a,b]$ אזי $\tilde{F}$ גזירה בx_0 ומתקיים $\tilde{F}'(x_0) = f(x_0)$

הערה סעיף ב יכול להיות גם f רציפה חד צדדית ב-x_0 $\Leftarrow$ $\tilde{F}$ גזירה חד צדדית ב-x_0

הוכחה:

1.
   - תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ב$[a,b]$
   - יהיו $x_1 \neq x_2 \in [a,b]$. נניח בה"כ $x_2 < x_1$
   - צ"ל שמתקיים $\forall x_0 \in [a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1 \in [a,b] \quad |x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \tilde{F}(x_1) - \tilde{F}(x_0) \right| < \varepsilon$
   - f אינטגרבילית ועל כן, ממשפט שהוכח בכיתה, חסומה. כלומר קיים $M > 0$ המקיים $\forall x \in [a,b]\ |f(x)| \le M \quad (\clubsuit)$.

- מתקיים

$$\left|\tilde{F}(x_1)-\tilde{F}(x_2)\right| = \left|\int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_2} f(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt\right| \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{x_2}^{x_1} |f(t)|\,dt \overset{(\clubsuit)}{\leq} \int_{x_2}^{x_1} M dt = M(x_1-x_2) = M|x_1-x_2| \iff$$

$$\iff \left|\tilde{F}(x_1)-\tilde{F}(x_0)\right| \leq M|x_1-x_0| \quad (\spadesuit)$$

כאשר $(*)$ היא אי שוויון המשולש האינטגרלי

- אזי $\tilde{F}$ היא M-ליפשיצית ועל כן רבמ"ש (ממשפט שהוכח בתרגול) ועל כן בפרט רציפה (ממשפט שהוכח בהרצאה), כנדרש.

2. - יהיו $x_0 \in [a,b)$, $\varepsilon > 0$ נתון.
- צ"ל שמתקיים $\lim_{x\to x_0} \frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$
- נתון בנוסף ש-f רציפה בx_0. אזי קיימת $\delta > 0$ שעבורה מתקיים $(\diamondsuit)\ |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$
- לכן מתקיים לכל $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$:

$$\left|\frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\frac{x-x_0}{x-x_0}\right| = \frac{1}{|x-x_0|}\left|\tilde{F}(x)-\tilde{F}(x_0)-f(x_0)(x-x_0)\right| =$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - f(x_0)(x-x_0)\right| \overset{(*)}{=} \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt\right| \overset{(**)}{=}$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} f(t)-f(x_0)\,dt\right| \overset{(\diamondsuit)}{<}$$

$$\overset{(\diamondsuit)}{<} \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \varepsilon dt\right| = \frac{\varepsilon}{|x-x_0|}|x-x_0| = \varepsilon \blacksquare$$

כאשר $(*)$נובע מהגדרת האינטגרל לפונקציות קבועות, ו$(**)$ מליניאריות האינטגרל

2. **גזירות פונקציה צוברת של פונקציה רציפה** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב$[a,b]$, אזי $\tilde{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ מקיימת $\forall x\in[a,b]\ \tilde{F}'(x) = f(x)$ עם גזירה חד צדדית בקצוות

   הוכחה: משום שf רציפה, נפעיל את המשפט היסודי ומסעיף ב נקבל את הנדרש.

   מסקנה $\forall x\in[a,b]\ \tilde{F}'(x) = f(x)$, עם גזירות חד צדדית בקצוות

3. **נבדלות פונקציות צוברות בקבוע במקטע**
   יהי I מקטע לא טריוויאלי (כלומר יש בו לפחות 2 נקודות), ויהיו F_1, F_2 פונקציות גזירות בI.
   אזי $\forall x\in I\ F_1'(x) = F_2'(x) \iff F_1(x) = F_2(x) + C$

4. **קיום פונקציה קדומה לכל פונקציה רציפה במקטע**
   יהי I מקטע לא טריוויאלי (כלומר יש בו לפחות 2 נקודות).
   אזי יש לF פונקציה קדומה בI.

5. **רציפות אינה תנאי הכרחי לקיום פונקציה קדומה**

דוגמא נגדית: $f(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \Leftarrow F(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

6. **הנוסחה היסודית של החשבון האינטגרלי - משפט ניוטון-לייבניץ - גרסה קלה**
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **רציפה** ב$[a,b]$ ותהי F פונקציה קדומה כלשהי של f ב-$[a,b]$
אזי מתקיים $\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) = F(x)\big|_a^b$

הוכחה
- נגדיר את הפונקציה הצוברת $\tilde{F}:[a,b]\to\mathbb{R}$ המוגדרת $\forall x\in[a,b]\ \tilde{F}(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$
- ממשפט 2 נובע ש$\tilde{F}$ מקיימת $\forall x\in[a,b]\ \tilde{F}'(x)=f(x)$ עם גזירות חד צדדית בקצוות
- הפונקציות מוגדרות ב$[a,b]$, לכן ממשפט 3 נקבל שקיים $C\in\mathbb{R}$ שעבורו $\forall x\in[a,b]\ \tilde{F}(x)=F(x)+C$.
- אזי מתקיים

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt=\tilde{F}(b)=\tilde{F}(b)-0=\tilde{F}(b)-\tilde{F}(a)=F(b)+C-(F(a)+C)=F(b)-F(a)_\blacksquare$$

7. **הנוסחה היסודית של החשבון האינטגרלי - משפט ניוטון-לייבניץ - גרסה כללית**
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **אינטגרבילית** ב$[a,b]$ותהי F פונקציה קדומה כלשהי של f ב-$[a,b]$
אזי מתקיים $\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) = F(x)\big|_a^b$

הוכחה
- תהא $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.
- F גזירה ב-$[a,b]$ועל כן בפרט רציפה, ולכן מקיימת את תנאי משפט לגראנז' לכל $i\in[n]$ ב-$[x_{i-1},x_i]$.
  - כלומר קיים $c_i\in(x_{i-1},x_i)$ המקיים

$$f(c_i)=F'(c_i)=\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\iff F(x_i)-F(x_{i-1})=f(c_i)(x_i-x_{i-1})\quad(*)$$

- נגדיר $P^*=\{c_i\mid i\in[n]\}$ בחירת נקודות ביחס לP.
- נשים לב שמתקיים

$$S(f,P,P^*)=\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i-x_{i-1})\overset{(*)}{=}\sum_{i=1}^n F(x_i)-F(x_{i-1})\underset{sun}{\overset{telescopic}{=}}F(b)-F(a)$$

- ממשפט על סכומי רימן, מתקיים $L(f,p)\le S(f,P,P^*)\le U(f,P)\iff L(f,p)\le F(b)-F(a)\le U(f,P)$ $(\spadesuit)$
- משום ש-f אינטגרבילית ב$[a,b]$, ממשפט על אינטגרביליות, המספר היחיד שמקיים את $(\spadesuit)$ הוא האינטגרל בקטע.
- כלומר קיבלנו $F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(t)\,dt$ כנדרש.

8. **משפט הערך הממוצע האינטגרלי**
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב$[a,b]$.
אזי קיימת $c\in[a,b]$ שמקיימת $f(c)=\mu=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt$

הוכחה
- f רציפה בקטע $[a,b]$, ולכן מהמשפט השני של ויירשטראס קיימים $M,m\in\mathbb{R}$ המקיימים $Im(f)=[m,M]$.
- בנוסף מאינטגרביליות f, כל חלוקה היא עידון של החלוקה הטריוויאלית, ולכן מתקיים

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(t)\,dt\le M(b-a)\iff m\le\mu\overset{def}{=}\frac{\int\limits_a^b f(t)\,dt}{b-a}\le M\iff\mu\in Im(f)$$

- לכן קיימת $c\in[a,b]$ שעבורה $f(c)=\mu=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt$ כנדרש.

חיזוק למשפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב$[a,b]$.
אזי קיימת $c\in(a,b)$ שמקיימת $f(c)=\mu=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt$.

הוכחה • f רציפה ב$[a,b]$ ולכן ממשפט 2 נקבל ש$\tilde{F}$ הפונקציה הצוברת של f היא גם פונקצייה קדומה שלה.

• $\tilde{F}$ גזירה ב-$[a,b]$ועל כן בפרט רציפה, ולכן מקיימת את תנאי משפט לגראנז' בכל $[a,b]$.

• מלגראנז' נקבל שקיים $c \in (a,b)$ המקיים $f(c) = \tilde{F}'(c) = \frac{\tilde{F}(b)-\tilde{F}(a)}{b-a} = \frac{\int_a^b f(t)dt - 0}{b-a} = \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ כנדרש.

9. **נגזרת של אינטגרל עם גבולות משתנים**

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב$[a,b]$, ויהיו $\alpha<\beta\in\mathbb{R}$, כך ש הפונקציות $\varphi,\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ גזירות ב$[\alpha,\beta]$

נגדיר $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ע"י $\forall x\in[\alpha,\beta]\ G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$

אזי G גזירה בכל $x\in[\alpha,\beta]$ ולכל $x\in[\alpha,\beta]$ מתקיים $G'(x) = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

הוכחה • נגדיר את הפונקציה הצוברת (קיימת מהמשפט היסודי): $\tilde{F}$ המקיימת $\forall x\in[a,b]\ \tilde{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

• אזי מתקיים

$$G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \int_{\varphi(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \int_{a}^{\psi(x)} f(t)\,dt - \int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \tilde{F}(\psi(x)) - \tilde{F}(\varphi(x))$$

• f רציפה בתחומה ועל כן מהמשפט היסודי $\tilde{F}$ גזירה בתחומה גם כן. אזי מתקיים לכל x_0 בתחום

$$G'(x_0) = \left(\tilde{F}(\psi(x_0))\right)' - \left(\tilde{F}(\varphi(x_0))\right)' \overset{chain'}{=} \tilde{F}'(\psi(x))\,\psi'(x) - \tilde{F}'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$