12 טורי חזקות

12 בפברואר 5202

הגדרות

1. טור טיילור

תהא $f:[x_0-\delta,x_0+\delta]\to\mathbb{R}$ המוגדרת בסביבה מלאה של x_0 וגזירה בה אינסוף פעמים.
נגדיר את **טור טיילור של f סביב** x_0 ע"י:

$$T_{f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x_0)^k$$

לכן, לכל $x_1\in\mathbb{R}$ הסכום החלקי ה-n-י, $S_n(x_1)$ של הטור T_{f,x_0} הוא הערך בנקודה x של פולינום טיילור מסדר n של f סביב x_0:

$$S_n(x_1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}(x-x_0)^k=P_{n,f,x_0}(x_1)$$

2. טור חזקות

תהא $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ סדרה ב-$\mathbb{R}$, ו-$x_0\in\mathbb{R}$. הטור $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ נקרא **טור חזקות (ב-x) סביב x_0.**
נשים לב שטור חזקות הוא טור של פונקציות, והצבת xים שונים תוליד טורים מספריים שונים.

3. תחום התכנסות

נגדיר את הקבוצה $\mathbb{R}\supseteq D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \exists L\in\mathbb{R}\ \sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k=L\right\}$, **קבוצת כל ה-$x$ים הממשיים שהטור המוגדר בעזרת הסדרה $a_k(x-x_0)^k$ סביב x_0 מתכנס.**
נקרא ל-D **תחום ההתכנסות של** $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$.

נשים לב שהטור הנ"ל מגדיר בתחום ההכנסות שלו את הפונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$

נסמן בנוסף $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$ $\forall x\in D\,\forall n\in\mathbb{N}$, ונשים לב שמתקיים $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. ובנוסף $f_n\in\mathbb{R}[x]$ ומקיימת $\deg f_n\le n$

4. רדיוס התכנסות

בהינתן L (כתוצאה מקושי-הדאמאר או מדלמבר), נקרא ל-$R:=\frac{1}{L}$ **רדיוס ההתכנסות של הטור** $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$, כאשר מוסכם בהקשר זה $\frac{1}{0}=\infty,\frac{1}{\infty}=0$
ומתקיים $R=\sup_{x\in D}|x-x_0|$.
כאשר $0<R\in\mathbb{R}$, מתקיים $(x_0-R,x_0+R)\subseteq D\subseteq[x_0-R,x_0+R]$.
אזי למרות שהוגדר בעזרת קושי-הדאמר, בהינתן D נוכל לחשב R בעזרת D.

5. אנליטיות

בהינתן f, נאמר ש-$f\left(x\right)$ **אנליטית ב**x_0 אם"ם קיימים $0<r\in\mathbb{R}$, וסדרה $\left(a_k\right)_{k=0}^{\infty}$ כך ש $f\left(x\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ $\forall x\in\left(x_0-r,x_0+r\right)$, כלומר אם"ם **קיימת ל-$f$ הצגה כטור חזקות בסביבת** x_0.

משפטים

1. משפט קושי-הדאמר

תהא $\left(a_k\right)_{k=0}^{\infty}$ סדרה ב-$\mathbb{R}$, ו-$x_0\in\mathbb{R}$.

נסמן ב-L את הגבול במובן הרחב $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$. אזי אם:

$L=0$ אזי הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$

$L=\infty$ אזי הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ מתבדר לכל $x\neq x_0$

$0<L\in\mathbb{R}$ אזי הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$ ומתבדר לכל $x\notin\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$

הוכחה

ראשית, אם $x=x_0$ הטור הוא 0 ובפרט מתכנס. נתמקד ב-$x\neq x_0$, ונסמן $b_k=a_k\left(x-x_0\right)^k$ $\forall k\in\mathbb{N}$. אזי מתקיים:

$$\sqrt[k]{|b_k|}=\sqrt[k]{\left|a_k\left(x-x_0\right)^k\right|}=\sqrt[k]{|a_k|}\cdot\sqrt[k]{|x-x_0|^k}=\sqrt[k]{|a_k|}\cdot|x-x_0|\iff$$

$$\iff\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|b_k|}=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\left(x-x_0\right)^k\right|}=|x-x_0|\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=L\left|x-x_0\right|$$

לכן מתקיים:

$L=0$ אזי $L\left|x-x_0\right|=0$ ולכן הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$

$L=\infty$ אזי $|b_k|>1\iff\sqrt[k]{|b_k|}>1$ באופן שכיח, כלומר b_k לא אפסה, אז ולכן הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k$ מתבדר לכל $x\neq x_0$

$0<L\in\mathbb{R}$ אזי $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$ ומתבדר לכל $x\notin\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$

2. משפט דלמבר

יהיו $x_0\in\mathbb{R}$, $\left(a_k\right)_{k=0}^{\infty}$ סדרה ב-$\mathbb{R}$ שונים מאפס החל ממקום מסויים, עבורה קיים הגבול במובן הרחב $L=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$

אזי רדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ הנו $R=\frac{1}{L}$, עם אותן ההסכמות בהגדרת R.

הוכחה

דומה מאוד להוכחת קושי, נשתמש במשפט דלמבר הגבולי להתכנסות טורים מספריים:
ראשית, אם $x=x_0$ הטור הוא 0 ובפרט מתכנס. נתמקד ב-$x\neq x_0$, ונסמן $b_k=a_k\left(x-x_0\right)^k$ $\forall k\in\mathbb{N}$. אזי מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|\left|x-x_0\right|^{k+1}}{|a_k|\left|x-x_0\right|^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\left|x-x_0\right|=L\left|x-x_0\right|$$

לכן מתקיים:

$L=0$ אזי $L\left|x-x_0\right|=0$ ולכן הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$

$L=\infty$ אזי $\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|}>1$ באופן שכיח, כלומר b_k לא אפסה, אז ולכן הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ מתבדר לכל $x\neq x_0$

$0<L\in\mathbb{R}$ אזי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\left(x-x_0\right)^k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$ ומתבדר לכל $x\notin\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$

3. למה-קירוב טור חזקות

יהי $f\left(x\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\left(x-x_0\right)^k$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$ ויהי $r\in\left(0,R\right)$. אזי מתקיים

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall x\in\left[x_0-r,x_0+r\right]\,\forall n\geq N\quad\left|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|\leq\varepsilon$$

הוכחה

$r\in\left(0,R\right)$ ולכן הטור $f\left(r-x_0\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ מתכנס. אזי בהינתן $\varepsilon>0$, קיים $N\in\mathbb{N}$ המקיים $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\left|a_k\right|r^k$. אזי לכל $x\in\left[x_0-r,x_0+r\right]$ מתקיים:

$$\left|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_k\left(x-x_0\right)^k\right|=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_k\right|\left|\left(x-x_0\right)^k\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_k\right|\leq\varepsilon$$

4. רציפות טור חזקות

יהי $f\left(x\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\left(x-x_0\right)^k$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0<R\in\mathbb{R}$. אזי הפונקציה f רציפה ב$\left(x_0-R,x_0+R\right)$

הוכחה

תהא $x_1\in\left(x_0-R,x_0+R\right)$. נבחר $r\in\left(\left|x_1-x_0\right|,R\right)$, ויהא $\varepsilon>0$ נתון.
לפי הלמה (3) קיים $N\in\mathbb{N}$ המקיים לכל $n\geq N$ ולכל $x\in\left[x_0-r,x_0+r\right]$: $\left|f\left(x_1\right)-f_n\left(x_1\right)\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}$ $(*)$.
f פולינום ועל כן רציפה בכל $\mathbb{R}$ ובפרט בx_1, כלומר קיימת $\delta_1>0$ המקיימת לכל $x\in\left(x_0-\delta_1,x_0+\delta_!\right)$ את $(*)$.
נבחר $0<\delta<\delta_1$ כך שמתקיים $\left(x_1-\delta,x_1+\delta\right)\subseteq\left[x_0-r,x_0+r\right]$, ונקבל שמתקיים לכל $x\in\left(x_1-\delta,x_1+\delta\right)$:

$$\begin{aligned}\left|f\left(x\right)-f\left(x_1\right)\right|&=\left|f\left(x\right)-f_N\left(x\right)+f_N\left(x\right)-f_N\left(x_1\right)+f_N\left(x_1\right)-f\left(x_1\right)\right|\leq\\&\overset{(\triangle)}{\leq}\left|f\left(x\right)-f_N\left(x\right)\right|+\left|f_N\left(x\right)-f_N\left(x_1\right)\right|+\left|f_N\left(x_1\right)-f\left(x_1\right)\right|\leq\\&\overset{(*)}{\leq}3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

לכן f רציפה בx_1 לכל $x_1\in\left(x_0-R,x_0+R\right)$, כנדרש.

5. למה: $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}=\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\left|a_n\right|}$

בהינתן הסדרה $\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty}$, מתקיים $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}=\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\left|a_n\right|}$.

הוכחה

נשים לב שהטורים $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=x\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ בעלי אותו תחום התכנסות, שכן השני תוצאה של כפל בx של הראשון
והרי תחום ההתכנסות נקבע ע״י $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}$ ועל כן מתקיים הדרוש.

6. לטורי החזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(x-x_0\right)^{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \left(x-x_0\right)^n$ אותו <u>רדיוס</u> התכנסות

הוכחה ראינו שמתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1 \Leftarrow \limsup\limits_{n\to\infty} b_n = \limsup\limits_{n\to\infty}\left(b_n c_n\right)$, ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} = 1$, אזי מהלמה (5) מתקיים

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|a_n|}\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ולכן $R = \left(\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|}\right)^{-1} = \left(\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$

הערה: לא חייב להיות להם אותו <u>תחום</u> התכנסות

מסקנה בשילוב עם המשפט על אינטגרציה איבר איבר, נקבל שבנוסף הטורים חולקים את רדיוס ההתכנסות עם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(n+1\right) a_n \left(x-x_0\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n \left(x-x_0\right)^{n-1}$

הבהרה רדיוס ההתנסות של פונקציה המוגדרת כנ"ל זהה גם לרדיוס ההתכנסות של הנגזרת וגם של הפונקציה הקדומה שלו!

7. אינטגרציה איבר-איבר של טורי חזקות

יהי $f\left(x\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^k$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0 < R$. אזי מתקיים לכל $x \in \left(x_0 - R, x_0 + R\right)$:

$$\int_{x_0}^{x} f\left(t\right)dt = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(t-x_0\right)^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_n \left(t-x_0\right)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(t-x_0\right)^{n+1}$$

מסקנה הפונקציה $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(x-x_0\right)^{n+1}$ היא פונקציה קדומה של $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^n$

8. גזירה איבר איבר של טורי חזקות

יהי $f\left(x\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0 < R$. אזי f גזירה בכל $x \in \left(x_0 - R, x_0 + R\right)$ ומתקיים $f'\left(x\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(n+1\right) a_n \left(x-x_0\right)^n$

הוכחה בעזרת המשפט על אינטגרציה איבר איבר

מסקנה כל נגזרת מכל סדר ניתנת להצגה כטור חזקות

9. יחידות טור חזקות המייצג פונקציה

תהי f פונקציה בעלת נגזרת מכל סדר ב$x_0 \in \mathbb{R}$. אם יש ל-f יצוג כטור חזקות בסביבה כלשהי של x_0, הוא יחיד, ומתקיים $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

הוכחה נגזור את f $k \in \mathbb{N}$ פעמים, ונקבל $f^{(k)}\left(x\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n \left(x-x_0\right)^{n-k}$. נציב $x = x_0$ ונקבל $f^{(k)}\left(x_0\right) = k! a_k \iff a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ כנדרש.

10. ל-f קיימת הצגה כטור חזקות אם"ם f היא הגבול של $\left(P_{m,f,x_0}\right)_{m=1}^{\infty}$

הוכחה לפי המשפט על יחידות הייצוג של טור חזקות, ובנוסף אפשר להוכיח עם יחידות פולינום טיילור ולהשאיף לאינסוף.

11. ל-f קיימת הצגה כטור חזקות אם"ם $\lim\limits_{m\to\infty} R_{m,f,x_0}\left(x\right) = 0$

נובע מההוכחה הקודמת, בנוסף למשפט על שארית הפיתוח של פולינומי טיילור

12. הלמה של אבל $\left(\text{Abel}\right)$

תהי $\left(a_{k}\right)_{k=0}^{\infty}\supseteq\mathbb{R}$ סדרה נתונה.

מקרה פרטי

אם קיים $\mathbb{R}\ni x_{1}\neq0$ שעבורו הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{k}x_{1}^{k}$, אזי הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{k}x^{k}$ מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x|<|x_{1}|$.

הוכחה יהי $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x|<|x_{1}|$. התכנסות הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{k}x_{1}^{k}$ גורר $a_{k}x_{1}^{k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, ובפרט חסומה. לכן קיים $M>0$ שעבורו $\left|a_{k}x_{1}^{k}\right|\leq M$, אזי

$$\left|a_{k}x^{k}\right|=\left|a_{k}x_{1}^{k}\right|\left|\frac{x^{k}}{x_{1}^{k}}\right|\leq M\left|\frac{x}{x_{1}}\right|^{k}$$

והרי $|x|<|x_{1}|$ אזי $\left|\frac{x}{x_{1}}\right|^{k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ ועל כן זהו טור הנדסי מתכנס (בהחלט!), אזי מאריתמטיקה הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}M\left|\frac{x}{x_{1}}\right|^{k}$ מתכנס בהחלט, אזי גם הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{k}x_{1}^{k}$ מתכנס בהחלט, ממבחן ההשוואה.

המקרה הכללי:

אם קיים $x_{1}\neq x_{0}$ עבורו הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{k}\left(x_{1}-x_{0}\right)^{k}$ מתכנס, אזי הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{k}\left(x-x_{0}\right)^{k}$ מתכנס להחלט לכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-x_{1}|<|x-x_{0}|$.

הוכחה נסמן $z:=x-x_{0}$, $z_{1}:=x_{1}-x_{0}$. ונפעיל את המקרה הפרטי על z,z_{1}.