פולינומי טיילור

בהתחשב ב5.1, נחפש להמשך ולדייק את הקירוב לפונקציה בנקודה.. מכאן נסתכל על $a=0$

הנחות לחלק: יהיו $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, f פונקציה גזירה n פעמים ב$a=0$.

טענה יהי $p\in\mathbb{R}[x]$ שמקיים $\deg p\le n$. אזי $p(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^k$ (הוכחה-נגזור את p n פעמים.)

הגדרה **פולינום טיילור מסדר n של f סביב a** הוא

$$P_n(x)=P_{n,f,a}(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}x+\frac{f''(a)}{2!}x^2,\dots,\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k$$

טענה נגדיר P_n פולינום טיילור מסדר n של f סביב 0. אזי $P_n^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)\quad\forall k\in[n]\cup\{0\}$

הגדרה **השארית של פיתוח טיילור מסדר n של f סביב a** הוא:

$$R_n(x)=R_{n,f,a}(x)=f(x)-P_n(x)=f(x)-\left(f(a)+\frac{f'(a)}{1!}x+\frac{f''(a)}{2!}x^2,\dots,\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n\right)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k$$

משפט(קיום השארית) בהינתן התנאים, מתקיים לנ"ל $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}=\lim\limits_{x\to a}\frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}=0$ הוכחה באינדוקציה על n, כאשר הג'וקר זה לופיטל.

משפט(יחידות השארית) בהינתן התנאים, אם קיים $Q\in\mathbb{R}[x]$, $\deg Q\le n$, המקיים $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=0$, אזי $Q=P_{n,f,a}$

קווים להוכחה נניח בשלילה שקיימים $Q_1,Q_2\in\mathbb{R}[x]$ שעבורם מתקיים הנ"ל, אזי מאש"ג נקבל שקיים הגבול ומתקיים

$$\lim_{x\to a}\frac{Q_1(x)-Q_2(x)}{(x-a)^n}=0$$

אזי קיים $S\in\mathbb{R}[x]$ המוגדר ע"י $Q_1(x)-Q_2(x)=S(x)=s_0+s_1(x-a)+s_2(x-a)^2+\dots+s_n(x-a)^n$ ולכן מקיים $\deg S\le n$, ושוב מאש"ג נקבל

$$\lim_{x\to a}\frac{Q_1(x)-Q_2(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{S(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{S(x)}{(x-a)^n}\cdot(x-a)^n\overset{(x-a)\to0}{=}0\Leftrightarrow\lim_{x\to a}S(x)=0$$

ומכאן מתקיים

$$c_0=\lim_{x\to a}S(x)=\lim_{x\to a}\left(c_0+c_1(x-a)+\dots+c_n(x-a)^n\right)=0$$

אזי אם נמשיך באינדוקציה (בדומה להוכחת יחידות על צ"ל של אופטרטור נילפוטנטי), נראה שלכל $k\in[n]\cup\{0\}$ מתקיים $c_k=0$. לכן $Q_1-Q_2=S=0\Leftrightarrow Q_1=Q_2$ כנדרש.

הגדרה **פולינום מקלורן של f** הוא מקרה פרטי של פולינום טיילור של f כאשר $a=0$

משפט טיילור(!) יהיו $a<x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, f פונקציה הגזירה לפחות $n+1$ פעמים, כך ש$f^{(n)}$ רציפה בקטע $[a,x]$ ו$f^{(n+1)}$ רציפה ב(a,x). אזי:

1. קיימת נקודה $c\in(a,x)$, אחת לפחות, שעבורה מתקיים (**השארית בצורת לגראנז'**)

$$R_{n,f,a}(x)=f(x)-P_{n,f,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

2. קיימת נקודה $\hat{c}\in(a,x)$, אחת לפחות, שעבורה מתקיים (**השארית בצורת קושי**)

$$R_{n,f,a}(x)=f(x)-P_{n,f,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\hat{c})}{n!}(x-\hat{c})^n(x-a)$$

הוכחה:

נגדיר פונקציית עזר $g:[a,x]\to\mathbb{R}$, המוגדרת ע"י $\forall t\in[a,x]\ g(t)=f(x)-f(t)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$.

$(*)$ g מקיימת

$$\begin{aligned}g(a)=&f(x)-\left(f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)=f(x)-P_{n,f,a}(x)=R_{n,f,a}(x)\\ g(x)=&f(x)-f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(\overset{=0}{x-x})^k=0\end{aligned}$$

בנוסף מאריתמטיקה של רציפות נקבל שg רציפה ב$[a,x]$, ומאריתמטיקה של גזירות נקבל שg גזירה ב-(a,x). נגזור את g:

$$\begin{aligned}g'(t)=&\left(f(x)-f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)'=0-f'(t)-\sum_{k=1}^{n}\left(\overset{\text{functions Product}}{\frac{f^{(k)}(t)}{k!}\cdot(x-t)^k}\right)'=\\ =&-f'(t)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-k\cdot\frac{f^{(k)}(t)}{k!}\cdot(x-t)^{k-1}\right)=\\ \underset{sum}{\overset{telescopic}{=}}&-f'(t)-\left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-1\cdot\frac{f^{(1)}(t)}{1!}\cdot(x-t)^{1-1}\right)=\\ =&-f'(t)-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+f'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+f'(t)-f'(t)\\ =&-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\end{aligned}$$

יהא $0<p\in\mathbb{R}$, ונגדיר כעת $h:[a,x]\to\mathbb{R}$, $\forall t\in[a,x]\ h(t)=(x-t)^p$

h רציפה ב$[a,x]$וגזירה ב(a,x) מאריתמטיקות, ובנוסף נגזרתה אינה מתאפסת לאורך תחום הגזירות שלה.

אזי h,g עומדות בתנאי משפט קושי, **ולכן קיים** $c\in(a,x)$ שעבורו $\frac{g'(c)}{h'(c)}=\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)}$ (♠), כלומר מתקיים עבור c:

$$\begin{aligned}&\frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^p}=\frac{0-R_{n,f,a}(x)}{(x-x)^p-(a-x)^p}\overset{(*)}{=}\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)}=\\ =&\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)}\overset{(\spadesuit)}{=}\frac{g'(c)}{h'(c)}=\frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-p(x-c)^{p-1}}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow&R_{n,f,a}(x)=\frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{p(x-c)^{p-1}}\cdot(x-a)^p=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\cdot p}(x-c)^{n-p+1}(x-a)^p\ (\clubsuit)\end{aligned}$$

מכאן, נציב ב(♣):

לגראנז' $p=n+1$ **ונקבל** $c\in(a,x)$ המקיים $R_{n,f,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

קושי נציב $p=1$ **ונקבל** $\hat{c}\in(a,x)$ המקיים $R_{n,f,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\hat{c})}{n!}(x-\hat{c})^n(x-a)$

הערה: נשים לב ב$c,\hat{c}$ תלויים ב-x!

מכאן נובעת הטענה הבאה:

יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, f פונקציה הגזירה לפחות $n+1$ פעמים, כך ש$f^{(n)}$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו$f^{(n+1)}$ רציפה ב(a,b). אזי קיימת $\theta\in(0,1)$ אחת לפחות שעבורה $R_{n,f,a}(b)=f(b)-P_{n,f,a}(b)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))}{n!}(1-\theta)^n(b-a)^{n+1}$. הוכחה: ממשפט טיילור, לפי שארית קושי, קיים $\hat{c}\in(a,b)$ המקיים $R_{n,f,a}(b)=\frac{f^{(n+1)}(\hat{c})}{n!}(b-\hat{c})^n(b-a)$. אזי $\frac{\hat{c}-a}{b-a}\in(0,1)\Leftrightarrow a<\hat{c}<b$ ולכן עבור $\theta=\frac{\hat{c}-a}{b-a}\in(0,1)$ מתקיים

$$b-\hat{c}=b=a-\theta(b-a)=(1-\theta)(b-a)\ ,\hat{c}=a+\theta(b-a)$$

מכאן נציב בשארית הנ"ל ונקבל $R_{n,f,a}(b)=\frac{f^{(n+1)}(\hat{c})}{n!}(b-\hat{c})^n(b-a)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))}{n!}(1-\theta)^n(b-a)^{n+1}$ כנדרש.