6.3 אי-רגישות האינטגרל למספר סופי של שינויים באינטגרנד

הגדרות

1. **פונקציית מדרגות**
הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ תיקרא פונקציית מדרגות אם קיימת $P=\{a=x_0,\dots,x_n=b\}$ וקיימים קבועים $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ שעבורם מתקיים
$\forall i\in[n]\ \forall x\in(x_{i-1},x_i)\quad f(x)=\lambda_i$

משפטים

1. **יהי** $t_o\in[a,b]$, **ותהי** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **המוגדרת** $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq t_0\\ 1 & x=t_0\end{cases}\quad\forall x\in[a,b]$.
אזי f **אינטגרבילית ב**$[a,b]$**ומקיימת** $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$ **מקרה פרטי של 2 (ובפרט של 3)**

2. **יהי** $m\in\mathbb{N}$, $t_1,\dots,t_m\in[a,b]$ **שונים זמ"ז, ו-**$\lambda_1,\dots,\lambda_m$**תהי** f **פונקציה המוגדרת** $f(x)=\begin{cases}0 & x\notin\{t_i\mid i\in[m]\}\\ \lambda_i & x=t_i\end{cases}\quad\forall x\in[a,b]$
א≤זי f **אינטגרבילית ב**$[a,b]$**ומקיימת** $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$ **הוכחה בתרגיל הבית.** נציין שזהו מקרה פרטי של 3

הוכחה מקרה פרטי של 3. נגדיר $f_i(x)=\begin{cases}0 & x\notin\{t_i\mid i\in[m]\}\\ \lambda_i & x=t_i\end{cases}\quad\forall i\in[n]\ \forall x\in[a,b]$ ונסכום. נציין שהסכימה מתבצעת מליניאריות האינטגרל

3. **אי-רגישות האינטגרל למספר סופי של שינויים באינטגרנד**
תהי g פונקציה אינטגרבילית ב$[a,b]$, ותהא h פונקציה המתקבלת מ-g ע"י שינוי תמונתה במספר סופי של נקודות,
(נסמן קבוצה זו $D\overset{def}{=}\{x\in[a,b]\mid g(x)\neq h(x)\}$ ונסמן $|D|=m\in\mathbb{N}$)
אזי h אינטגרבילית ב$[a,b]$ ומתקיים $\int\limits_a^b h(x)\,dx=\int\limits_a^b g(x)\,dx$

הוכחה בהתבסס על טענות 1,2.

- נסמן את נקודות השוני בין הפונקציות $t_1,\dots,t_m$ (קיים סדר מעקרון הסדר ב$\mathbb{R}$).
- נגדיר $\forall x\in[a,b]\ f(x)=h(x)-g(x)$
- נשים לב שf מקיימת: $f(x)=\begin{cases}0 & x\notin D\\ \lambda_i\in\mathbb{R} & x\in D\end{cases}\quad\forall x\in[a,b]$, כאשר $0\neq\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ בעלי ערך כלשהו שאינו אפס.
- לכן מטענה 2 f אינטגרבילית ומקיימת $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$.
- מתקיים $h=f+g\iff f=h-g$ ולכן מליניאריות האינטגרל מתקיים ש-h אינטגרבילית ומקיימת $\int\limits_a^b h(x)\,dx=\int\limits_a^b g(x)\,dx+\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b g(x)\,dx$
כנדרש.

4. **אם** f **חסומה ב**$[a,b]$ **ואינטגרבילית בכל תת קטע של** $[a,b]$**, היא אינטגרבילית ב-**$[a,b]$**:**
תהי $f\,[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אם היא אינטגרבילית בכל $[\alpha,\beta]\subseteq(a,b)$ כאשר $a<\alpha<\beta<b$, אזי היא אינטגרבילית ב$[a,b]$.

הוכחה :

כיוון ראשון בעזרת תנאי דרבו (מהכיתה):

- f חסומה ב-$[a,b]$ולכן קיים $M>0$ כך ש$\forall x\in[a,b]\ |f(x)|\le M$
- יהא $\varepsilon>0$ נתון. נבחר $\alpha<\beta\in(a,b)$ כך שמתקיים $\alpha-a<\frac{\varepsilon}{8M},\ b-\beta<\frac{\varepsilon}{8M}$
- f אינטגרבילית ב$[\alpha,\beta]$, מהנתון, ולכן קיימת Q חלוקה של $[\alpha,\beta]$ המקיימת $U(f,Q)-L(f,Q)<\frac{\varepsilon}{2}$
- נסמן $M_a=\sup\limits_{x\in[a,\alpha]}f(x) m_a=\inf\limits_{x\in[a,\alpha]}f(x) M_b=\sup\limits_{x\in[\beta,b]}f(x) m_b=\inf\limits_{x\in[\beta,b]}f(x)$
- $P=Q\cup\{a,b\}$ חלוקה של $[a,b]$ ומתקיים:

$$U(f,P)-L(f,P)=M_a(\alpha-a)+M_b(b-\beta)+U(f,Q)-(L(f,Q)+m_a(\alpha-a)+m_b(b-\beta))=$$
$$=(\alpha-a)(M_a-m_a)+(b-\beta)(M_b-m_b)+U(f,Q)-L(f,Q)<$$
$$<2M(a-\alpha)+2M(b-\beta)+\frac{\varepsilon}{2}<2\cdot\frac{2M\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2}=2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ולכן מתנאי דרבו לאינטגרביליות, fאינטגרבילית ב$[a,b]$כנדרש.

כיוון שני בעזרת המסקנה מהתוספת ללמת החתכים:

- f חסומה ב-$[a,b]$ולכן קיים $M>0$ כך ש$\forall x\in[a,b]\ |f(x)|\le M \iff -M\le f(x)\le M$
- תהא $\delta>0$. אזי מהנתון f אינטגרבילית ב$[a+\delta,b-\delta]$.
- לכן קיימת סדרת חלוקות $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ שמקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}(U(f,P_n)-L(f,P_n))=0\ (*)$
- נסמן $M_a=\sup\limits_{x\in[a,\alpha]}f(x) m_a=\inf\limits_{x\in[a,\alpha]}f(x) M_b=\sup\limits_{x\in[\beta,b]}f(x) m_b=\inf\limits_{x\in[\beta,b]}f(x)$
- נגדיר $\left(\overline{P}_n\right)_{n=1}^{\infty}$סדרת חלוקות של $[a,b]$ המוגדרת ע"י $\overline{P}_n=P_n\cup\{a,b\}\quad\forall n\in\mathbb{N}$.
- מתקיים $U\left(f,\overline{P}_n\right)=U(f,P_n)+\delta(M_a+M_b)\bigwedge L\left(f,\overline{P}_n\right)=L(f,P_n)+\delta(m_a+m_b)$
- מארכימדיות, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ שעבורו מתקיים $\delta\le\frac{1}{n}$.
- אזי מתקיים לכל $n\ge n_0$

$$0\le U\left(f,\overline{P}_n\right)-L\left(f,\overline{P}_n\right)=U(f,P_n)+\delta(M_a+M_b)-L(f,P_n)-\delta(m_a+m_b)\le$$
$$\le U(f,P_n)-L(f,P_n)+4M\cdot\delta\le U(f,P_n)-L(f,P_n)+\frac{4M}{n}$$

- ממשפט הכריך נקבל $0\le U\left(f,\overline{P}_n\right)-L\left(f,\overline{P}_n\right)\le U(f,P_n)-L(f,P_n)+\frac{4M}{n}\iff\lim\limits_{n\to\infty}U\left(f,\overline{P}_n\right)-L\left(f,\overline{P}_n\right)=0$
- לכן f אינטגרבילית ב-$[a,b]$כנדרש.

מסקנה אם f חסומה ב$[a,b]$ ורציפה ב(a,b), f אינטגרבילית ב-$[a,b]$

הוכחה: f רציפה ב$(a,b)\iff f$ אינטגרבילית בכל $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$ וחסומה ב-$[a,b]\iff f$ אינטגרבילית ב$[a,b]$

5. **אם f חסומה ב$[a,b]$ ואפשר לחסום אותה עם פונקציות מדרגות, היא אינטגרבילית** תהי $f\ [a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.

f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיימות $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש$h(x)\le f(x)\le g(x)\ \forall x\in[a,b]$ וגם $\int\limits_a^b(g(x)-h(x))<\varepsilon$