3.1.9 פונקציית הנגזרת f' חסומה אס"ם f ליפשיצית

תהי f רציפה במקטע I וגזירה בכל נקודה פנימית של I, ובנוסף f' חסומה בI
אזי f היא ליפשיצית.
הוכחה
f' חסומה ועל כן קיים $M \in \mathbb{R}$ $0 \leq M$ כך שמתקיים $\forall x \in I \; |f'(x)| \leq M$.
יהיו $x_1 < x_2 \in I$. f גזירה רציפה בI ולכן רציפה ב$[x_1, x_2] \subseteq I$, וגזירה בפרט ב$(x_1, x_2) \subseteq I$.
לכן מקיימת בקטע את תנאי משפט לגראנז, אזי קיים $c \in (x_1, x_2)$ המקיים

$$|f'(c)| = \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} \iff f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ובתוספת של הנתון נקבל שמתקיים $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|$ ועל כן ליפשיצית כנדרש.