9.2 טורים אי-שליליים והתכנסותם

הגדרות

הטור $\sum\limits_n a_n$ יקרא **אי שלילי** (חיובי) אם"ם מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\, a_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}\, a_n > 0)$

משפטים על טורים א"ש

1. סדרת הסכומים החלקיים של טור א"ש מונוטונית עולה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה ותהי $(S_k)_{k=1}^{\infty}$סדרת הסכומים החלקיים שלה.

1. אם $\sum\limits_n a_n$ אי שלילי, אזי $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה
2. אם $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה, אזי $\sum\limits_n a_{n+1}$ טור ה-1זנב של a_n אי שלילי.

נובע ישירות מכך שמתקיים $\forall k \in \mathbb{N}\, S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$

2. טור א"ש מתכנס אם"ם סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה

מבחני התכנסות לטורים א"ש

1. מבחן ההשוואה

יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$סדרות המקיימות $\forall N \in \mathbb{N}\, 0 \leq a_n \leq b_n$
אזי אם $\sum\limits_n b_n$ מתכנס, גם $\sum\limits_n a_n$ מתכנס ומתקיים $\sum\limits_n a_n \leq \sum\limits_n b_n$.

2.מבחן ההשוואה כמעט תמיד

יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המקיימות $0 \leq a_n \leq b_n$ כמעט תמיד
אזי אם $\sum\limits_n b_n$ מתכנס, גם $\sum\limits_n a_n$ מתכנס ומתקיים $\sum\limits_n a_n \leq \sum\limits_n b_n$.

3. מבחן ההשוואה באמצעות מנה

יהיו $\sum\limits_n a_n, \sum\limits_n b_n$ טורים **אי שליליים** כך ש$b_n \neq 0$ כמעט תמיד.
אם קיימים $0 < u, v \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $u \leq \frac{a_n}{b_n} \leq v$ כמעט תמיד, אזי $\sum\limits_n a_n$ מתכנס אם"ם $\sum\limits_n b_n$ מתכנס.

4. מבחן ההשוואה הגבולי

יהיו $\sum\limits_n a_n, \sum\limits_n b_n$ טורים **אי שליליים** כך ש$b_n \neq 0$ כמעט תמיד.
אם קיים $0 < L \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, אזי $\sum\limits_n a_n$ מתכנס אם"ם $\sum\limits_n b_n$ מתכנס.

5. מבחן ההשוואה באמצעות מנות של עוקבים

יהיו $\sum\limits_n a_n, \sum\limits_n b_n$ טורים **אי שליליים** כך ש$a_n, b_n \neq 0$ כמעט תמיד.
אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ כמעט תמיד ו$\sum\limits_n b_n$ מתכנס, אזי $\sum\limits_n a_n$ מתכנס

6. מבחן ד'למבר

יהי $\sum\limits_n a_n$ טור אי שלילי כך ש$a_n \neq 0$ כמעט תמיד.

1. אם קיים $q \in (0,1)$ כך ש$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ כמעט תמיד, $\sum\limits_n a_n$ מתכנס
2. אם קיים $q \geq 1$ כך ש$q \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ כמעט תמיד, $\sum\limits_n a_n$ מתבדר

7. מבחן ד'למבר הגבולי

יהי $\sum\limits_n a_n$ טור אי שלילי כך ש$a_n \neq 0$ כמעט תמיד. נניח שקיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$

1. אם $L \in [0,1)$ $\sum\limits_n a_n$ מתכנס
2. אם $L > 1$ $\sum\limits_n a_n$ מתבדר
3. אם $L = 1$ לא נוכל להסיק כלום על התכנסות הטור

8. מבחן השורש של קושי להתכנסות טורים אי שליליים

יהי $\sum\limits_n a_n$ טור א״ש.

1. אם קיים $q \in (0,1)$ כך שמתקיים כמעט תמיד $\sqrt[n]{a_n} \le q$, הטור מתכנס
2. אם $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ באופן שכיח, הטור מתבדר.

9. מבחן השורש הגבולי של קושי להתכנסות טורים אי שליליים

יהי $\sum\limits_n a_n$ טור א״ש. נניח שקיים הגבול העליון $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}$.

1. אם $L \in [0,1)$ $\sum\limits_n a_n$ מתכנס
2. אם $L > 1$ $\sum\limits_n a_n$ מתבדר
3. אם $L = 1$ לא נוכל להסיק כלום על התכנסות הטור

10. מבחן האינטגרל לטורים חיוביים

תהי $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ אי שלילית ומונוטונית יורדת ב$[1,\infty)$.

אזי הטור $\sum\limits_n f(n)$ מתכנס אם״ם האינטגרל $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס ובמקרה זה מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \int_1^\infty f(x)\,dx \le \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$