3.2 גבול עליון ותחתון של סדרה

הגדרות

1. סדרות הסופרמה והאינפימה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה.
נגדיר את $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, סדרת הסופרמה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, המוגדרת $\forall n \in \mathbb{N}\, u_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$
ונגדיר את $(\ell_n)_{n=1}^{\infty}$, סדרת האינפימה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, המוגדרת $\forall n \in \mathbb{N}\, \ell_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}$.

2. גבול עליון ותחתון של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה.
המספר $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ נקרא **הגבול העליון** של a_n ומסומן $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ או $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$
המספר $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n$ נקרא **הגבול העליון** של a_n ומסומן $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ או $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

3. גבול עליון ותחתון במובן הרחב

תקף גם לסדרות לא חסומות.
נגדיר:$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ אם"ם a_n לא חסומה מלעיל.
נגדיר:$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ אם"ם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
נגדיר$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ אם"ם a_n לא חסומה מלרע
נגדיר $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ אם"ם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
כלומר לסדרה a_n יש גבול במובן הרחב אם"ם $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

משפטים

1. סדרות הסופרמה והאינפימה של סדרה חסומה מונוטוניות וחסומות (+קיום)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה.
אזי סדרת האינפימה u_n מונוטונית יורדת וחסומה מלעיל, וסדרת האינפימה ℓ_n מונוטונית עולה וחסומה מלרע.

הוכחה באינפי 1 הוכחנו שבהינתן $\phi \neq A \subseteq B$ מתקיים $\inf B \leq \inf A \bigwedge \sup B \geq \sup A$.
נסמן $A_n = \{a_k \mid k \geq n\}$, ונשים לב שמתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\, A_{n+1} \subseteq A_n$.
בנוסף מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\, u_n = \sup A_n \bigwedge \ell_n = \inf A_n$
לכן $\ell_n \leq \ell_{n+1} \bigwedge u_n \geq u_{n+1}$ ולכן הסופרמה מונוטונית יורדת והאינפימה מונוטונית עולה.
חסימות נובעת ממשפט הירושה שכן a_n חסומה (מלרע ומלעיל)
בפרט לכן הסדרות הנ"ל חסומות שתיהן מלרע ומלעיל ומכך מתכנסות שתיהם, ולכן **בסדרה חסומה תמיד קיימים** $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n, \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

2. הגבול העליון הוא הגבול החלקי הגדול ביותר והתחתון הוא הקטן ביותר בסדרה חסומה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה.
אזי $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n, \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ הם הגבול החלקי הקטן והגדול ביותר של a_n, בהתאמה.

הוכחה (זהה לגבול עליון או תחתון עם היפוך הסימנים, נוכיח על עליון)
נסמן $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$, ויהי $\tilde{\lambda}$גבול חלקי כלשהו של a_n. אז קיימת תת סדרה a_{n_k} המתכנסת ל$\tilde{\lambda}$. מתקיים $\forall k \in \mathbb{N}\, a_{n_k} \leq u_{n_K}$ ולכן מעקרון הסדר בגבולות $\tilde{\lambda} \leq \lambda$
נבנה בצורה רקורסיבית את u_n מתוך a_n ונקבל שλ הוא הגבול שלה, ולכן גבול חלקי מקסימלי של a_n.

הערה מבולצאנו ויירשטראס, a_nחסומה ולכן קיימת לה תת סדרה מתכנסת, ובנוסף לכן קבוצת הגבולות החלקיים S_a חסומה ומקיימת ממשפט החסם העליון (והתחתון) ועקרון הסדר ש-

$$\inf\left(S_a\right) \overset{order}{=} \min\left(S_a\right) = \liminf_{n\to\infty} a_n \bigwedge \sup\left(S_a\right) \overset{order}{=} \max\left(S_a\right) = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

3. a_n מתכנסת אמ"ם $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

במקרה זה יתקיים $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

הוכחה נובעת ישירות מהמשפט על סדרה חסומה מתכנסת אמ"מ יש לה גבול יחיד

4. אפיון הגבול העליון (התחתון) של סדרה חסומה באמצעות סביבות

תהא a_n סדרה חסומה, $\lambda \in \mathbb{R}$.

אזי $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lambda$ אם"ם לכל $\varepsilon > 0$, מתקיים $a_n > \lambda - \varepsilon$ באופן שכיח וגם $a_n < \lambda + \varepsilon$ מתקיים כמעט תמיד

5. עקרון הסדר בגבולות עליונים של סדרות חסומות

יהיו הסדרות החסומות a_n, b_n. אזי אם מתקיים $a_n \leq b_n$ כמעט לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.