12. טורי חזקות

הגדרות

1. טור טיילור

תהא $f:[x_0-\delta,x_0+\delta]\to\mathbb{R}$ המוגדרת בסביבה מלאה של x_0 וגזירה בה אינסוף פעמים.
נגדיר את **טור טיילור של f סביב** x_0 ע"י:

$$T_{f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x_0)^k$$

לכן, לכל $x_1\in\mathbb{R}$ הסכום החלקי ה-n-י, $S_n(x_1)$ של הטור T_{f,x_0} הוא הערך בנקודה x של פולינום טיילור מסדר n של f סביב x_0:

$$S_n(x_1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}(x-x_0)^k=P_{n,f,x_0}(x_1)$$

2. טור חזקות

תהא $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ סדרה ב-$\mathbb{R}$, ו-$x_0\in\mathbb{R}$. הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ נקרא **טור חזקות (ב-x) סביב** x_0.
נשים לב שטור חזקות הוא טור של פונקציות, והצבת xים שונים תוליד טורים מספריים שונים.

3. תחום התכנסות

נגדיר את הקבוצה $\mathbb{R}\supseteq D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\exists L\in\mathbb{R}\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k=L\right\}$, **קבוצת כל ה-$x$ים הממשיים שהטור המוגדר בעזרת הסדרה** $a_k(x-x_0)^k$ **סביב** x_0 **מתכנס**.
נקרא ל-D **תחום ההתכנסות של** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$.

נשים לב שהטור הנ"ל מגדיר בתחום ההכנסות שלו את הפונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$

נסמן בנוסף $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$ $\forall x\in D\,\forall n\in\mathbb{N}$, ונשים לב שמתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. ובנוסף $f_n\in\mathbb{R}[x]$ ומקיימת $\deg f_n\le n$

4. רדיוס התכנסות

בהינתן L (כתוצאה מקושי-הדאמאר או מדלמבר), נקרא ל-$R:=\frac{1}{L}$ **רדיוס ההתכנסות של הטור** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$, כאשר מוסכם בהקשר זה $\frac{1}{0}=\infty,\frac{1}{\infty}=0$
ומתקיים $R=\sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$.
כאשר $0<R\in\mathbb{R}$, מתקיים $(x_0-R,x_0+R)\subseteq D\subseteq[x_0-R,x_0+R]$.
אזי למרות שהוגדר בעזרת קושי-הדאמר, בהינתן D נוכל לחשב R בעזרת D.

5. אנליטיות

בהינתן f, נאמר ש-$f(x)$ **אנליטית ב-**x_0 אם"ם קיימים $0<r\in\mathbb{R}$, וסדרה $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ כך ש-$\forall x\in(x_0-r,x_0+r)\ f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$, כלומר אם"ם **קיימת ל-$f$ הצגה כטור חזקות בסביבת** x_0.

משפטים

1. משפט קושי-הדאמר

תהא $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ סדרה ב-$\mathbb{R}$, ו-$x_0\in\mathbb{R}$.

נסמן בL את הגבול במובן הרחב $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$. אזי אם:

$L=0$ אזי הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$

$L=\infty$ אזי הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ מתבדר לכל $x\neq x_0$

$0<L\in\mathbb{R}$ אזי הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$ ומתבדר לכל $x\notin\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$

הוכחה ראשית, אם $x=x_0$ הטור הוא 0 ובפרט מתכנס. נתמקד ב$x\neq x_0$, ונסמן $\forall k\in\mathbb{N}\, b_k=a_k\left(x-x_0\right)^k$. אזי מתקיים:

$$\sqrt[k]{|b_k|}=\sqrt[k]{\left|a_k\left(x-x_0\right)^k\right|}=\sqrt[k]{|a_k|}\cdot\sqrt[k]{|x-x_0|^k}=\sqrt[k]{|a_k|}\cdot|x-x_0|\iff$$

$$\iff\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|b_k|}=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\left(x-x_0\right)^k\right|}=|x-x_0|\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=L\left|x-x_0\right|$$

לכן מתקיים:

$L=0$ אזי $L\left|x-x_0\right|=0$ ולכן הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$

$L=\infty$ אזי $|b_k|>1\iff\sqrt[k]{|b_k|}>1$ באופן שכיח, כלומר b_k לא אפסה, אז ולכן הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k$ מתבדר לכל $x\neq x_0$

$0<L\in\mathbb{R}$ אזי $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$ ומתבדר לכל $x\notin\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$

2. משפט דלמבר

יהיו $x_0\in\mathbb{R}$, $\left(a_k\right)_{k=0}^{\infty}$ סדרה ב$\mathbb{R}$ שונים מאפס החל ממקום מסויים, עבורה קיים הגבול במובן הרחב $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=L$

אזי רדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ הנו $R=\frac{1}{L}$, עם אותן ההסכמות בהגדרת R.

הוכחה דומה מאוד להוכחת קושי, נשתמש במשפט דלמבר הגבולי להתכנסות טורים מספריים:

ראשית, אם $x=x_0$ הטור הוא 0 ובפרט מתכנס. נתמקד ב$x\neq x_0$, ונסמן $\forall k\in\mathbb{N}\, b_k=a_k\left(x-x_0\right)^k$. אזי מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|\left|x-x_0\right|^{k+1}}{|a_k|\left|x-x_0\right|^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\left|x-x_0\right|=L\left|x-x_0\right|$$

לכן מתקיים:

$L=0$ אזי $L\left|x-x_0\right|=0$ ולכן הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$

$L=\infty$ אזי $\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|}>1$ באופן שכיח, כלומר b_k לא אפסה, אז ולכן הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k$ מתבדר לכל $x\neq x_0$

$0<L\in\mathbb{R}$ אזי $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$ ומתבדר לכל $x\notin\left(x_0-\frac{1}{L},x_0+\frac{1}{L}\right)$

3. למה-קירוב טור חזקות

יהי $f\left(x\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$ ויהי $r\in\left(0,R\right)$. אזי מתקיים

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall x\in\left[x_0-r,x_0+r\right]\,\forall n\geq N\quad\left|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|\leq\varepsilon$$

הוכחה $r\in(0,R)$ ולכן הטור $f(r-x_0)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k$ מתכנס. אזי בהינתן $\varepsilon>0$, קיים $N\in\mathbb{N}$ המקיים $\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|r^k$. אזי לכל $x\in[x_0-r,x_0+r]$ מתקיים:

$$|f(x)-f_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k(x-x_0)^k\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_k(x-x_0)^k\right|=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\left|(x-x_0)^k\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\le\varepsilon$$

4. רציפות טור חזקות

יהי $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0<R\in\mathbb{R}$. אזי הפונקציה f רציפה ב(x_0-R,x_0+R)

הוכחה תהא $x_1\in(x_0-R,x_0+R)$. נבחר $r\in(|x_1-x_0|,R)$, ויהא $\varepsilon>0$ נתון.
לפי הלמה (3) קיים $N\in\mathbb{N}$ המקיים לכל $n\ge N$ ולכל $x\in[x_0-r,x_0+r]$: $|f(x_1)-f_n(x_1)|\le\frac{\varepsilon}{3}$ $(*)$.
f פולינום ועל כן רציפה בכל $\mathbb{R}$ ובפרט בx_1, כלומר קיימת $\delta_1>0$ המקיימת לכל $x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$ את $(*)$.
נבחר $0<\delta<\delta_1$ כך שמתקיים $(x_1-\delta,x_1+\delta)\subseteq[x_0-r,x_0+r]$, ונקבל שמתקיים לכל $x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)$:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_1)|&=|f(x)-f_N(x)+f_N(x)-f_N(x_1)+f_N(x_1)-f(x_1)|\le\\&\overset{(\triangle)}{\le}|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_1)|+|f_N(x_1)-f(x_1)|\le\\&\overset{(*)}{\le}3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

לכן f רציפה בx_1 לכל $x_1\in(x_0-R,x_0+R)$, כנדרש.

5. למה: $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

בהינתן הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, מתקיים $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

הוכחה נשים לב שהטורים $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ בעלי אותו תחום התכנסות, שכן השני תוצאה של כפל בx של הראשון
והרי תחום ההתכנסות נקבע ע"י $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ ועל כן מתקיים הדרוש.

6. לטורי החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}(x-x_0)^n$ **אותו <u>רדיוס</u> התכנסות**

הוכחה ראינו שמתקיים $\lim_{n\to\infty}c_n=1\Leftarrow\limsup_{n\to\infty}b_n=\limsup_{n\to\infty}(b_nc_n)$, ומתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=1$, אזי מהלמה (5) מתקיים

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{|a_n|}\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

ולכן $R=\left(\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|}\right)^{-1}=\left(\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$

הערה: לא חייב להיות להם אותו <u>תחום</u> התכנסות

מסקנה בשילוב עם המשפט על אינטגרציה איבר איבר, נקבל שבנוסף הטורים חולקים את רדיוס ההתכנסות עם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$

הבהרה רדיוס ההתנסות של פונקציה המוגדרת כנ"ל זהה גם לרדיוס ההתכנסות של הנגזרת וגם של הפונקציה הקדומה שלו!

7. אינטגרציה איבר-איבר של טורי חזקות

יהי $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(x-x_{0}\right)^{k}$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0<R$. אזי מתקיים לכל $x\in\left(x_{0}-R,x_{0}+R\right)$:

$$\int_{x_{0}}^{x}f\left(t\right)dt=\int_{x_{0}}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(t-x_{0}\right)^{n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_{0}}^{x}a_{n}\left(t-x_{0}\right)^{n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n}}{n+1}\left(t-x_{0}\right)^{n+1}$$

מסקנה הפונקציה $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n}}{n+1}\left(x-x_{0}\right)^{n+1}$ היא פונקציה קדומה של $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(x-x_{0}\right)^{n}$

8. גזירה איבר איבר של טורי חזקות

יהי $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(x-x_{0}\right)^{n}$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0<R$. אזי f גזירה בכל $x\in\left(x_{0}-R,x_{0}+R\right)$ ומתקיים $f'\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n}\left(x-x_{0}\right)^{n}$

הוכחה בעזרת המשפט על אינטגרציה איבר איבר

מסקנה כל נגזרת מכל סדר ניתנת להצגה כטור חזקות

9. יחידות טור חזקות המייצג פונקציה

תהי f פונקציה בעלת נגזרת מכל סדר ב$x_{0}\in\mathbb{R}$. אם יש ל-f יצוג כטור חזקות בסביבה כלשהי של x_{0}, הוא יחיד, ומתקיים $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\quad a_{k}=\frac{f^{(k)}(x_{0})}{k!}$

הוכחה נגזור את f $k\in\mathbb{N}$ פעמים, ונקבל $f^{(k)}\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_{n}\left(x-x_{0}\right)^{n-k}$. נציב $x=x_{0}$ ונקבל $f^{(k)}\left(x_{0}\right)=k!a_{k}\iff a_{k}=\frac{f^{(k)}(x_{0})}{k!}$ כנדרש.

10. ל-f קיימת הצגה כטור חזקות אס"ם f היא הגבול של $\left(P_{m,f,x_{0}}\right)_{m=1}^{\infty}$

הוכחה לפי המשפט על יחידות הייצוג של טור חזקות, ובנוסף אפשר להוכיח עם יחידות פולינום טיילור ולהשאיף לאינסוף.

11. ל-f קיימת הצגה כטור חזקות אס"ם $\lim\limits_{m\to\infty}R_{m,f,x_{0}}\left(x\right)=0$

נובע מההוכחה הקודמת, בנוסף למשפט על שארית הפיתוח של פולינומי טיילור