

# סכומי דרבו

## הגדרות

**חלוקה** יהיו  $a < b \in \mathbb{R}$ . חלוקה של הקטע  $[a, b]$  היא קבוצה סופית  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  שבה מתקיים  $\forall i \in [n], x_{i-1} < x_i$ , חייב להתקיים  $a, b \in P$

**הערה**  $P = \{a, b\}$  נקראת החלוקה הטריטוראלית

**קוטר של חלוקה** קוטר פרמטר של חלוקה  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  נתונה הוא  $\Delta(P) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{x_i - x_{i-1} \mid i \in [n]\}$

**עידון של חלוקה** יהיו  $a < b \in \mathbb{R}$  ו  $P, Q$  חלוקות של  $[a, b]$ . אם  $P \subseteq Q$  נאמר ש  $P$  עידון של  $Q$ .

**עידון משותף** יהיו  $a < b \in \mathbb{R}$  ו  $P, Q$  חלוקות של  $[a, b]$ , אזי  $P \cup Q$  הוא העידון המשותף של  $P, Q$ .

**הערה**  $P \subseteq Q \Rightarrow \Delta P \geq \Delta Q$ , כלומר קוטר העידון תמיד  $\geq$  קוטר החלוקה המקורית

$M, m, M_i, m_i$  תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה, ותהי  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  חלוקה של  $[a, b]$ . לכל  $i \in [n]$  נסמן:

$$\begin{cases} M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), & M = \sup I_m(f) \\ m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), & m = \inf I_m(f) \end{cases}$$

**סכומי דרבו** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה, ותהי  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  חלוקה של  $[a, b]$ .

$$\begin{cases} U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) & \text{Upper} \\ L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) & \text{Lower} \end{cases} : P \text{ ביחס לחלוקה של } f$$

**תנודה** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

**התנודה של  $f$  ב- $[a, b]$**  היא  $M - m \stackrel{\text{def}}{=} \omega_f([a, b])$

$\mathcal{L}, \mathcal{U}$  תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה, ותהי  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  חלוקה של  $[a, b]$ . נסמן:

$$\begin{cases} \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \{U(f, P) \mid P \text{ is a division of } [a, b]\} \\ \mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{L(f, P) \mid P \text{ is a division of } [a, b]\} \end{cases}$$

**אינטגרל תחתון ועליון** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה, ותהי  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  חלוקה של  $[a, b]$ . אזי האינטגרל העליון (למעלה)

$$\begin{cases} \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \inf \mathcal{U} & \text{Upper} \\ \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \sup \mathcal{L} & \text{Lower} \end{cases} : \text{התחתון (למטה) של } f \text{ ב-}[a, b] \text{ הוא:}$$

## משפטים

**חסמים של סכומי דרבו** בהינתן  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה,  $P \subseteq Q$  חלוקות של  $[a, b]$ , כאשר  $|Q \setminus P| = k \in \mathbb{N}$  מתקיים  $L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P)$  וגם  $0 \leq U(f, P) - U(f, Q) \leq k \omega_f \Delta(P)$

**ומעבר לכך מתקיים לכל  $P$ :**  $m(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a)$

**למת החתכים עבור סכומי דרבו** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה. אזי הבאים שקולים:

$$L(f, P_1) \leq c \leq U(f, P_2) \text{ מתקיים } P_1, P_2 \text{ של } [a, b] \iff c \in \mathbb{R} \text{ יחיד שלכל שתי חלוקות } P_1, P_2 \text{ של } [a, b]$$

$$f \text{ אינטגרלית ב-}[a, b] \iff$$

$$\iff \text{לכל } \varepsilon > 0 \text{ קיימות 2 חלוקות } P_1, P_2 \text{ של } [a, b] \text{ שעבורן מתקיים } U(f, P_2) - L(f, P_1) < \varepsilon$$