11.1 התכנסות נקודתית

81 בפברואר 5202

הגדרות

סדרת פונקציות

יהי $D \subseteq \mathbb{R}$. נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ נתונה פונקציה $f_n : D \to \mathbb{R}$. אז הסדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ תיקרא **סדרת פונקציות**

הערות

1. זוהי העתקה מהטבעיים למרחב הפונקציות, ול f_n לא חייב בהכרח להיות קשר אלגברי ל$n \in \mathbb{N}$.
2. סדרות פונקציות יהיו בעלות תחום משותף - $\forall n \neq k \in \mathbb{N} \quad f_n^{-1} = f_k^{-1}$

טור פונקציות

אם $f_n : D \to \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}\,; (f_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת פונקציות, נגדיר $s_n : D \to \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}\,; (s_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של (f_n):

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in D \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

כלומר s_n סדרת פונקציות שהיא סס"ח של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ יקרא **טור פונקציות**

צמצום של פונקציה לתחום

תהי $f : D \to \mathbb{R}$ ותהי $A \subseteq D$. נסמן $f_{|A}$ בתור הצמצום של f לקטע A, כלומר

$$f_{|A} : A \to \mathbb{R};$$
$$\forall x \in \forall f_{|A}(x) = f(x)$$

התכנסות נקודתית של סדרה

יהי $D \subseteq \mathbb{R}$. אם לסדרת הפונקציות $f_n : D \to \mathbb{R}$, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ קיימת $A \subseteq D$ כך שלכל $x \in A$ הסדרה $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (במובן הצר!), נסמן את הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(x) := f(x)$, ונאמר שסדרת הפונקציות מתכנסת **נקודתית לגבול** f **בקבוצה** $A \subseteq D$, וA יקרא **תחום ההתכנסות (הנקודתית) של הסדרה** f_n.

הבהרה

הכוונה בגבול הוא בקיבוע של $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \in \mathbb{R}$

הערות

1. יחידות הגבול - אם קיים ל(f_n) גבול, הוא יחיד
2. גבול נקודתי אינו משמר רציפות - יתכן ו$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות, המתכנסות נקודתית ב$B \subseteq \mathbb{R}$ לf, אך f אינה רציפה (ספויילר - התכנסות במ"ש משמרת רציפות)

התכנסות נקודתית של טור

באותו אופן, התכנסות נקודתית של טור פונקציות $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ בA היא ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ לכל $x\in A$

הערה גם כאן, הגבול תלוי בx.

הבהרה אם $S:A\to\mathbb{R}$ היא הגבול הנקודתי של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, זה אומר שמתקיים:

$$\forall x\in AS\left(x\right):=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n\left(x\right)\iff$$

$$\iff\forall x\in A\,\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n>N\quad\left|S\left(x\right)-\sum_{j=1}^{n} f_j\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

התכנסות בהחלט (נקודתית) של טור פונקציות

תהי $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ב$D\subseteq\mathbb{R}$ ותהי $A\subseteq D$. נאמר שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ **מתכנס בהחלט ב**A אם"ם הסס"ח $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_n\left(x_0\right)\right|$ מתכנס נקודתית לכל $x_0\in A$, וזה שקול לכל שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x_0\right)$ מתכנס בהחלט לכל $x_0\in A$.

דוגמאות

e^x**:** היא הסדרה $\left(e_n\right)_{n=1}^{\infty}$, כאשר $e_n\left(x\right)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\quad\forall n\in\mathbb{N}$. ראינו באינפי 1 שלכל $x\in\mathbb{R}$ יש $y\in\mathbb{R}$ שעבורו $y=e^x$ ועל כן $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא הגבול הנקודתי של e_n ב-$\mathbb{R}$.

דוגמאות נוספות בסיכומים