אינטגרביליות

הגדרות

1. **אינטגרביליות** יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **חסומה.**
נאמר ש-**f אינטגרבילית ב[a, b]** אם"ם מתקיים $\underline{\int_b^a} f(x)\,d(x)=\overline{\int_b^a} f(x)\,dx$. במקרה זה נסמן את הערך הנ"ל $\int_b^a f(x)\,dx$ והוא יקרא **האינטגרל של f ב[a, b].**

2. **שטח** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **חסומה.**
אם $\forall x\in[a,b]\ \ f(x)\geq0$ ו-f אינטגרבילית ב$[a,b]$, אז המספר האי שלילי $\int_b^a f(x)\,dx\in\mathbb{R}^+$ יקרא השטח של הקבוצה $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],y\in[0,f(x)]\}$

3. יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **אינטגרבילית ב**$[a,b]$. נגדיר $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$, $\int_a^a f(x)\,dx=0$

משפטים

1. **תנאי דרבו לאינטגרביליות** תהי $f[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי f אינטגרבילית ב$[a,b]$ אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P שעבורה $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

כיוון להוכחה: למת החתכים לסכומי דרבו!

$\Leftarrow$ אם f אינטגרבילית, מלמת החתכים נקבל שבהינתן $\varepsilon>0$, קיימות P_1,P_2 שעבורן $U(f,P_1)-L(f,P_2)<\varepsilon$. אזי העידון המשותף $Q\overset{def}{=}P_1\cup P_2$ מקיים

$$\forall P\in\{P_1,P_2\}\quad L(f,P)\leq L(f,Q)\leq U(f,Q)\leq U(f,P)$$

ולכן מתקיים $0\leq U(f,Q)-L(f,Q)\leq U(f,P_1)-L(f,P_2)<\varepsilon$ כנדרש.

$\Rightarrow$ אם בהינתן $\varepsilon>0$ קיימת P שעבורה $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$, P מקיימת את התנאי השלישי של למת החתכים לסכומי דרבו (אפשר באותה מידה לעדן את P ע"י הוספת $x\in[a,b]$ ל-P בדומה ל-$\Leftarrow$).

א) **מסקנה** תהי $f[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי f אינטגרבילית ב$[a,b]$ אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P שעבורה $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$.
משום ש-

$$\forall P\quad U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\overset{by}{\underset{def}{=}}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})\overset{by}{\underset{def}{=}}\omega(f,P)$$

2. תוספת ללמת החתכים יהיו $\mathcal{L},\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ לא ריקות ומקיימות $\mathcal{L}\leq\mathcal{U}$. הבאות שקולות:
$\Longleftrightarrow$ $\sup\mathcal{L}=\inf\mathcal{U}$

$\Longleftrightarrow$ קיימות שתי סדרות $(\ell_n)_{n=1}^{\infty},(u_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש $\forall n\in\mathbb{N}\ l_n\in\mathcal{L},u_n\in\mathcal{U}$

א) **מסקנה** יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי f אינטגרבילית ב$[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ קיימת $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת חלוקות של $[a,b]$ המקיימת

$$\lim_{n\to\infty}(U(f,P_n)-L(f,P_n))=0$$

3. **משפט דרבו** יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\delta_1,\delta_2>0$ כך שלכל P חלוקה של $[a,b]$ מתקיים

$$\begin{cases}U(f,P)-\overline{\int_b^a} f(x)\,dx<\varepsilon & \Delta(P)<\delta_1\\ \underline{\int_b^a} f(x)\,d(x)-L(f,P)<\varepsilon & \Delta(P)<\delta_2\end{cases}$$

הוכחה סקיצה:

- מהגדרת $\int\limits_{b}^{\overline{a}} f(x)\,dx$ קיימת חלוקה $\tilde{P}$ עבורה מתקיים $U\left(f,\tilde{P}\right)-\int\limits_{b}^{\overline{a}} f(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\left|\tilde{P}\right|=k_1\in\mathbb{N}$
- נגדיר $0<\delta_1-\frac{\varepsilon}{2k_1(M-m+1)}$
- תהא חלוקה P שמקיימת $\Delta P<\delta_1$.
- נסתכל על העידון המשותף $P\cup\tilde{P}$,ונאמר כי $P\cup\tilde{P}$ מתקבלת מ-P על ידי תוספת של $k\in\mathbb{N}$ נקודות.
- נשים לב שמתקיים $k<k_1$, שכן $\{a,b\}\subseteq P\cap\tilde{P}$.
- מתקיים $0\le U(f,P)-U\left(f,P\cup\tilde{P}\right)\le k(M-m)\Delta P<k_1(M-m)\Delta P<k_1(M-m)\delta_1<\frac{\varepsilon}{2}$.
- מכאן נקבל

$$U(f,P)-\int\limits_{b}^{\overline{a}} f(x)\,dx=U(f,P)-U\left(f,P\cup\tilde{P}\right)+U\left(f,P\cup\tilde{P}\right)-\int\limits_{b}^{\overline{a}} f(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{2}+U\left(f,\tilde{P}\right)-\int\limits_{b}^{\overline{a}} f(x)\,dx<\varepsilon$$

א) **מסקנה!** לכל סדרה $(P_j)_{j=1}^{\infty}$המקיימת $\lim\limits_{j\to\infty}\Delta P_j=0$ מתקיים $\lim\limits_{j\to\infty}U(f,P_j)=\int\limits_{b}^{\overline{a}} f(x)\,dx$ וגם $\lim\limits_{j\to\infty}L(f,P_j)=\int\limits_{\underline{b}}^{a} f(x)\,dx$

הוכחה למסקנה: $\lim\limits_{j\to\infty}\Delta P_j=0$ $\Leftarrow$ קיים $J\in\mathbb{N}$ שעבורו לכל $j>J$ מתקיים $\Delta P_j<\delta_1$ ולכן עומדת בתנאי דרבו ומתקיים $\forall j>J\quad U(f,P_j)-\int\limits_{b}^{\overline{a}} f(x)\,dx<\varepsilon$ כנדרש.

4. **אינטגרביליות בכל תת קטע** יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$, ותהי $f:[\min\{a,b,c\},\max\{a,b,c\}]$. אינטגרבילית בקטע. אז מתקיים

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx+\int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx$$

הוכחה ישירות מהגדרה 3

5. **אינטגרביליות של פונקציה מונוטונית** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית. אזי f אינטגרבילית בהגדרתה.

סקיצת הוכחה מונוטוניות בקטע סגור $\Leftarrow$ חסימות ע"י $f(a),f(b)$. אם קבועה-הוכחנו בעבר. לכן עולה\יורדת ואינה קבועה. (נניח בה"כ עולה לכן $f(a)<f(b)$)

- נגדיר $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ כך ש $\Delta P<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, לכן $\forall i\in[n]$ f עולה ב-$[x_{i-1},x_i]$, אזי $M_i-f(x_i),m_i=f(x_{i-1})$.
-

$$\begin{aligned}U(f,P)-L(f,P)&=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})\\&\le\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\Delta P=\Delta P\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)=\\&\underset{sum}{\overset{telescopic}{=}}\Delta P\left(f(b)-f(a)\right)<\varepsilon\frac{f(b)-f(a)}{f(b)-f(a)}=\varepsilon\end{aligned}$$

הערה נשים לב ש-f אינה חייבת להיות רציפה!

סיכום תכונות האינטגרל המסוים

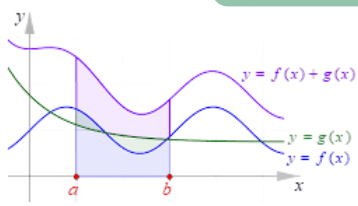
אריתמטיקה & אינטגרביליות

יהיו $a, b, c, \lambda \in \mathbb{R}$ כך ש־ $a < b$ ויהיו $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ו־ $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב־ $[a, b]$.

1. (הומוגניות) הפונקציה λf גם היא אינטגרבילית ב־ $[a, b]$ ומתקיים : $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

2. (אדיטיביות) הפונקציה $f + g$ גם היא אינטגרבילית ב־ $[a, b]$ ומתקיים :

$$\int_a^b (f + g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx .$$



(a₁+a₂)

3. (הפרש) הפונקציה $f - g$ גם היא אינטגרבילית ב־ $[a, b]$ ומתקיים : $\int_a^b (f - g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.

$(a_1+a_2)(b_1+b_2) \neq a_1b_1+a_2b_2$

4. פונקצית המכפלה $f \cdot g$ אינטגרבילית ב־ $[a, b]$. (אבל **אין כפליות! האינטגרל של המכפלה <u>לא</u> שווה למכפלת האינטגרלים**)

5. אם קיים קבוע ממשי חיובי $C > 0$ כך ש־ $C \leqslant |g(x)|$, $\forall x \in [a, b]$ אז הפונקציה $\frac{f}{g}$ גם היא אינטגרבילית ב־ $[a, b]$.

6. (חיוביות) אם $0 \leqslant f$ (כלומר $0 \leqslant f(x)$ לכל x ב־ $[a, b]$) אז $0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx$.

7. (מונוטוניות) אם $f \leqslant g$ (כלומר $f(x) \leqslant g(x)$ לכל x ב־ $[a, b]$) אז $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

אי שוויון המשולש האינטגרלי

8. (ערך מוחלט) הפונקציה $|f|$ גם היא אינטגרבילית ב־ $[a, b]$ ומתקיים : $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

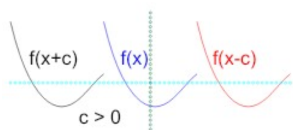
9. (ירושה) אם $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מקיימים $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, אזי הפונקציה f גם אינטגרבילית ב־ $[\alpha, \beta]$.

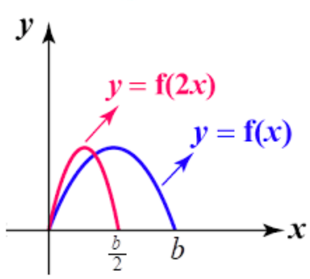
10. (יחידה) הפונקציה הקבועה $f(x) \equiv 1$ אינטגרבילית ב־ $[a, b]$ ומתקיים : $\int_a^b 1\,dx = (b - a)$.

11. (אינווריאנטיות להזזה אופקית) הפונקציה $h : [a - c, b - c] \to \mathbb{R}$ על ידי $h(x) = f(x + c)$ לכל $x \in [a - c, b - c]$.

אזי h אינטגרבילית ב־ $[a - c, b - c]$ ומתקיים:

$$\int_{a-c}^{b-c} h(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x + c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$





פינצ'ינג מגדה,
ניפוח או כיווץ

12. (הוֹמוֹתֶטִיָה) עבור $0 < m \in \mathbb{R}$ נגדיר את הפונקציה $h : [a/m, b/m] \to \mathbb{R}$

על ידי $h(x) = f(mx)$ לכל $x \in [a/m, b/m]$.

אזי h אינטגרבילית ב־ $[a/m, b/m]$ ומתקיים:

$$\int_{a/m}^{b/m} h(x)\,dx = \int_{a/m}^{b/m} f(mx)\,dx = \frac{1}{m} \int_a^b f(x)\,dx$$

13. (אדיטיביות ביחס לאיחוד קטעים בלי נקודות פנימיות משותפות. שימו לב : ההנחות על f שונות בהשוואה לתכונות הקודמות)

אם $a < c < b$ והפונקציה f אינטגרבילית ב־ $[a, c]$ וב־ $[c, b]$

אזי f אינטגרבילית ב־ $[a, c] \cup [c, b] = [a, b]$ ומתקיים:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$