9.3.4 משפט דיריכלה והלמה של אבל

משפט (למת הסכימה של אבל)

יהי $m \in \mathbb{N}$ ונניח ש $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m)$ סדרות סופיות באורך m של מספרים ממשיים. אזי $\sum\limits_{j=1}^{m} a_j b_j = a_m B_m + \sum\limits_{j=1}^{m-1} B_j (a_j - a_{j+1})$, כאשר $B_k := \sum\limits_{j=1}^{k} b_j \quad \forall k \in [m]$

הוכחה

נסמן $B_0 := 0$. אזי $b_j = B_j - B_{j-1}$ לכל $j \in [m]$, ואז נקבל

$$\sum_{j=1}^{m} a_j b_j = \sum_{j=1}^{m} a_j (B_j - B_{j-1}) = \sum_{j=1}^{m} a_j B_j - \sum_{j=}^{m} a_j B_{j-1} \overset{j-1:=i}{=} \sum_{j=1}^{m} a_j B_j - \sum_{i=1}^{m-1} a_{i+1} B_i =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} a_j B_j - \sum_{j=1}^{m-1} a_{j+1} B_j = a_m B_m + \sum_{j=1}^{m-1} a_j B_j - \sum_{j=1}^{m-1} a_{j+1} B_j =$$
$$= a_m B_m + \sum_{j=1}^{m-1} (a_j - a_{j+1}) B_j$$

מסקנה מהלמה

אם ידוע ש $(a_j)_{j=1}^{m}$ מונוטונית, ושקיים $L > 0$ כך שלכל $k \in [m]$ מתקיים $|B_k| \le L$, אזי

$$\left| \sum_{j=1}^{m} a_j b_j \right| \le L (2 |a_m| + |a_1|)$$

הוכחה

ממונוטוניות a_j נקבל שלכל $j \neq i \in [m]$ מתקיים $sgn(a_j - a_{j-1}) = sgn(a_i - a_{i-1})$, ועל כן $\left| \sum_{j=1}^{m} a_j - a_{j-1} \right| = \sum_{j=1}^{m} |a_j - a_{j-1}| \underset{sum}{\overset{telescopic}{=}} |a_m - a_1| \; (*)$ ומנוסחת הסכימה

$$\left| \sum_{j=1}^{m} a_j b_j \right| = \left| a_m B_m + \sum_{j=1}^{m-1} (a_j - a_{j+1}) B_j \right| \overset{(\triangle)}{\le}$$
$$\overset{(\triangle)}{\le} |a_m| |B_m| + \sum_{j=1}^{m-1} |a_j - a_{j+1}| |B_j| \le L |a_m| + L \sum_{j=1}^{m-1} |a_j - a_{j+1}| \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} L (|a_n| + |a_m + a_1|) \overset{(\triangle)}{\le} L (2 |a_m| + |a_1|)$$

מבחן דיריכלה

נניח ש $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית ו$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ו$\sum\limits_{n} b_n$ טור חסום (כלומר הסס"ח שלו $(T_k)_{k=1}^{\infty}$חסומה). אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה

נשתמש בקריטריון קושי להתכנסות טורים:

יהי $\varepsilon > 0$ נתון. אזי קיים $M > 0$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $|T_k| = \left|\sum_{n=1}^{k} b_n\right| \leq M$. בנוסף קיים $N \in \mathbb{N}$ שעבורו לכל $n > N$ מתקיים $|a_n| < \frac{\varepsilon}{6M}$. נקבע $N_0 := N + 1$ ואז מתקיים לכל $p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=N_0}^{N_0+p} b_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N_0+p} b_n - \sum_{n=1}^{N_0} b_n\right| = |T_{N_0+p} - T_{N_0-1}| \leq 2M$$

ומהלמה שהוכחנו, לכל $p \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left|\sum_{n=N_0}^{N_0+p} a_n b_n\right| \leq 2M \left(2\left|a_{N_0+p}\right| + |a_{N_0}|\right) < 2M \cdot \frac{3\varepsilon}{6M} = \varepsilon$$

ועל כן הטור מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס (הכללה של משפט לייבניץ)