טענה הקדמה ללופיטל:

יהיו
$$f,g$$
 מוגדרות בסביבה מלאה של f,g). יהיו f,g פונקציות גזירות ב f,g (f,g) בפרט לכן f,g מוגדרות בסביבה מלאה של f,g). אם f,g פונקציות גזירות ב $f(x)$ אזי קיים הגבול $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ויהין $f(x_0) \neq 0$, וי $f(x_0) \neq 0$, וי $f(x_0) \neq 0$, וי

הוכחה $\forall x \in U$ סביבה מנוקבת של $x_0 \neq 0 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x-x_0} \neq 0$ שבה מתקיים של סביבה מנוקבת של הוכחה אז מתקיים

$$\forall x \in U \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

ומאריתמטיקה של גבולות נקבל

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}}{\frac{g\left(x\right) - g\left(x_0\right)}{x - x_0}} = \frac{f'\left(x_0\right)}{g'\left(x_0\right)}$$

 ${'rac{0}{0}}'$ בגרסת (L'Hospital, L'H) משפט לופיטל ופיטל (פונקציות גזירות בf,g , $a< b\in \mathbb{R}$ יהיו

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a^{+}} g(x) = 0$$
 .1

$$\forall x \in (a, b] \ g'(x) \neq 0$$
 .2

הרחב
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
 קיים במובן -3.

 $\lim_{x o a^+}rac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x o a^+}rac{f'(x)}{g'(x)}$ אזי הגבול $\lim_{x o a^+}rac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב גם הוא ומתקיים האותה $\lim_{x o a^+}rac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב גם הוא ומתקיים האותה מידה נוכל לעשות את זה על גבול לא חד צדדית בשילוב שתי הגבולות הנ"ל הערה באותה מידה נוכל לעשות את זה על גבול לא חד צדדית בשילוב

$$f,g$$
 באדיר f,\hat{g} מהתלכדותן עם f,\hat{g} אזי f,\hat{g} רציפות ב f,\hat{g} וגזירות ב f,\hat{g} מהתלכדותן עם f,\hat{g} אזי f,\hat{g} רציפות ב f,\hat{g} אזי f,\hat{g} רציפות ב f,\hat{g} אזי f,\hat{g}

המקיים $c_x \in (a,x)$ מקיימות את תנאי משפט קושי ולכן קיים \hat{f},\hat{g} $.x \in (a,b]$ יהא .*

$$(*) \ \forall x_0 \in (a,b) \ \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{\hat{f}(x_0)}{\hat{g}(x_0)} \stackrel{(\mathbf{x})}{=} \frac{\hat{f}(x_0) - \hat{f}(a)}{\hat{g}(x_0) - \hat{g}(a)} = \frac{\hat{f}'(c_x)}{\hat{g}'(c_x)}$$

$$\lim_{x o a^+}rac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$$
 .'א

 $orall x \in (a,b] \ a < x < a + \delta \Rightarrow \left| rac{f'(x)}{g'(x)} - L
ight| < arepsilon$ שעבורה מתקיים $\delta > 0$ שעבור $\delta > 0$ נתון. אזי קיימת יומת $\delta > 0$

כנדרש
$$\forall x \in (a,b] \left| rac{f(x)}{g(x)} - L
ight| < arepsilon \Leftrightarrow \left| rac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L
ight| < arepsilon$$
נקבל המקיים • $a < c_x < x < a + \delta$ כנדרש •

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$
 .'ב

 $(**)\ \forall x \in (a,b]\ a < x < a + \delta \Rightarrow rac{f'(x)}{g'(x)} > M$ יהא $\delta > 0$ שעבורה אזי קיימת $\delta > 0$ שעבורה מתקיים • יהא

ענדרש
$$\forall x \in (a,b] \, rac{f(x)}{g(x)} > M \Leftrightarrow rac{f'(c_x)}{g'(c_x)} > M$$
 נקבל (**) נקבל , $a < c_x < x < a + \delta$ מתקיים •

$$h=-rac{f}{g}$$
 ג'י. $h=-rac{f}{g}$ נציב $\lim_{x o a^+}rac{f'(x_0)}{g'(x_0)}>-M$ נציב וויה וויה וויה או שנגדיר $\lim_{x o a^+}rac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$.'ג

 $rac{*}{\infty}'$ בגרסת (L'Hospital, L'H) משפט לופיטל ופיטל לופיטל פונקציות גזירות בf,g , $a< b\in \mathbb{R}$ יהיו

$$\lim_{x \to a^{+}} g\left(x\right) = \infty .1$$

$$\forall x \in (a, b] \ g'(x) \neq 0 \ .2$$

הרחב
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
 קיים במובן 3.

$$\lim_{x o a^+}rac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x o a^+}rac{f'(x)}{g'(x)}$$
 אזי הגבול $\lim_{x o a^+}rac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב גם הוא ומתקיים

 $\lim_{x o a+}rac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x o a+}rac{f'(x)}{g'(x)}$ אזי הגבול $\lim_{x o a+}rac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב גם הוא ומתקיים ב $\lim_{x o a+}rac{f'(x)}{g'(x)}$ אזי הגבול $\lim_{x o a+}rac{f(x)}{g(x)}$ אזי הגבול לעשות את זה על גבול לא חד צדדית בשילוב שתי הגבולות הנ"ל, וגם על שאיפה לאינסוף (!)

$$.b$$
 אחרת נקטין את . $\forall x\in(a,b]\ g\left(x
ight)
eq0$ שמתקיים בה"כ שמתקיים, $\lim_{x o a^{+}}g\left(x
ight)=\infty$. 1

$$.x < x_1 \in (a,b]$$
 יהיו. 2

.3 מכאן: $g\left(x
ight)
eq g\left(x_{1}
ight)$, ממשפט רול נקבל $g\left(x_{1}
ight)$, ומשום ש $g\left(x_{2}
ight)
eq a$, ממשפט רול נקבל f,g מראן:

$$\begin{split} &\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \frac{f\left(x\right) - f\left(x_{1}\right) + f\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} = \frac{f\left(x\right) - f\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} + \frac{f\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} = \\ &= \frac{f\left(x\right) - f\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right) - g\left(x_{1}\right)} \left(\frac{g\left(x\right) - g\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)}\right) + \frac{f\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} = \\ &= \frac{f\left(x\right) - f\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right) - g\left(x_{1}\right)} \left(1 - \frac{g\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)}\right) + \frac{f\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} \end{split}$$

עומדות בתנאי משפט קושי, לכן קיימת $c \in (x,x_1)$ שעבורו מתקיים f,g

$$(*) \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}$$

5. מכאן נחלק למקרים:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} . \star$$

$$(\spadesuit)\ orall x \in (a,b]\ a < x < a + \delta_1 \Rightarrow \left|rac{f'(x)}{g'(x)} - L
ight| < rac{arepsilon}{6}$$
 שעבורה מתקיים $\delta_1 > 0$ שעבור $\delta_1 > 0$ יהא $\epsilon > 0$ נתון. אזי קיימת

$$a < c_x < x < x_1$$
 מקיימת (*) מקיימת מר c_x שי $a < x < x_1$ אזי מתקיים לכל האזי מתקיים לכל מבחר $a < x < x_1$ אזי מתקיים לכל

$$\left|rac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L
ight| < rac{arepsilon}{6}$$
 נסיק שמתקיים •

• מתקיים מ-(*):

$$\left(\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)} - L\right) \left(1 - \frac{g\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)}\right) - L\frac{g\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} + \frac{f\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} =$$

$$= \frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)} \left(1 - \frac{g\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)}\right) + \frac{f\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} - L + L\frac{g\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} - L\frac{g\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} \stackrel{*}{=} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} - L$$

• מאי שוויון המשולש נקבל

$$\left(\triangle\right) \left| \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} - L \right| \stackrel{*}{=} \left| \frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)} - L \right| \left(1 + \frac{g\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)}\right) + \left|L\right| \left| \frac{g\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} \right| + \left| \frac{f\left(x_{1}\right)}{g\left(x\right)} \right|$$

מתקיים $x\in(a,a+\delta_2)$ לכן נסיק שקיימת $\delta_2>0$ שעבורה לכל נסיק לכן נסיק לכן היים, $\lim_{x\to a^+}g\left(x
ight)=\infty$

$$(1)g(x) > \frac{3}{\varepsilon} |f(x_1)|$$

$$(2) \Lambda g(x) > \frac{3}{\varepsilon} |I| |g(x)|$$

$$(2) \bigwedge g(x) > \frac{3}{\varepsilon} |L| |g(x_1)|$$

$$(3) \bigwedge g(x) > |g(x_1)|$$

נקבל שמתקיים $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ אזי עבור •

$$\begin{split} \left| \frac{f\left(x \right)}{g\left(x \right)} - L \right| & \triangleq \left| \frac{f'\left(c \right)}{g'\left(c \right)} - L \right| \left(1 + \frac{g\left(x_1 \right)}{g\left(x \right)} \right) + \left| L \right| \left| \frac{g\left(x_1 \right)}{g\left(x \right)} \right| + \left| \frac{f\left(x_1 \right)}{g\left(x \right)} \right| < \\ & < \frac{\varepsilon}{6} \left(1 + \left| \frac{g\left(x \right)}{g\left(x \right)} \right| \right) + \frac{\left| L \right| \left| g\left(x_1 \right) \right|}{\frac{3}{\varepsilon} \left| L \right| \left| g\left(x_1 \right) \right|} + \left| \frac{f\left(x_1 \right)}{\frac{3}{\varepsilon} \left| f\left(x_1 \right) \right|} \right| = \\ & = \frac{2\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \blacksquare \end{split}$$

נתון באותה באורה - $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.*

$$h=-rac{f}{g}$$
 נציב $rac{f'(x_0)}{g'(x_0)}>-M$ נציב $\lim_{x o a^+}rac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$.*

: המקיימות: בקרן (c,∞) בגרסת בקרן (L'Hospital, L'H) היהיו היהיו f,g ,a < b , $a,b,c \in \mathbb{R}$ יהיו המקיימות: (L'Hospital, L'H) בגרסת

$$\lim_{x\to\infty}g\left(x\right)=\infty,\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\infty \ .1$$

$$\forall x \in [c, \infty) \ g'(x) \neq 0 \ .2$$

קיים במובן הרחב $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 3.

 $\lim_{x o\infty}rac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x o\infty}rac{f'(x)}{g'(x)}$ אזי הגבול $\lim_{x o\infty}rac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב גם הוא ומתקיים

הערה באותה מידה נוכל לעשות את זה על גבול לא חד צדדית בשילוב שתי הגבולות הנ"ל

: המקיימות: בקרן (c,∞) בגרסת (L'Hospital, L'H) המקיימות: בקרן בערסת ($a,b,c\in\mathbb{R}$ יהיו ' $(x o\infty)$ המקיימות:

$$\lim_{x\rightarrow\infty}g\left(x\right) =0,\lim_{x\rightarrow\infty}f\left(x\right) =0\text{ .1}$$

$$\forall x \in [c, \infty) \ g'(x) \neq 0$$
 .2

וות $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב.3

 $\lim_{x o\infty}rac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x o\infty}rac{f'(x)}{g'(x)}$ אזי הגבול $\lim_{x o\infty}rac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב גם הוא ומתקיים

הערה באותה מידה נוכל לעשות את זה על גבול לא חד צדדית בשילוב שתי הגבולות הנ"ל

 $\left(0,\frac{1}{b}
ight)$ על הקטע $ar{f}\left(u
ight)=f\left(rac{1}{u}
ight),\,x=rac{1}{u}\Leftrightarrow\lim_{x o\infty}f\left(x
ight)=\lim_{u o0^{+}}ar{f}\left(u
ight)=\lim_{u o0^{+}}f\left(rac{1}{u}
ight)$ על הקטע $x o\infty$ הוכחות של גרסאות $x o\infty$