$4.1.1$ הגדרת הנגזרת

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$.

הגדרה

נאמר ש-f גזירה בנקודה x_0 אם"ם קיים הגבול במובן הצר $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
אם גבול זה קיים, הוא יקרא הנגזרת של f בנקודה x_0 **ויסומן** $f\grave{}\,(x_0)$

$\Leftarrow$ גזירות חד צדדית (f מוגדרת בסביבה מלאה ימנית\שמאלית של x_0)

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad f'_{+}(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

הגדרות שקולות לגזירות בנקודה:

נאמר ש-f גזירה בנקודה x_0 אם"ם:

$\Updownarrow$ הגבול $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים במובן הצר. ממנו נובע:

$\Updownarrow$ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$ הגבולות מימין ומשמאל קיימים במובן הצר ומקיימים $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f'_{-}(x_0) = f'(x_0) = f'_{+}(x_0)$