

# רציפות במידה שווה וליפשיציות

## הגדרות

1. תהייה  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ . נאמר ש- $f$  רציפה במידה שווה (רבמ"ש) ב- $D$  אם מתקיים

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, \hat{x} \in D \quad |\hat{x} - x| < \delta \Rightarrow |f(\hat{x}) - f(x)| < \varepsilon$$

• ההבדל בין רבמ"ש לרציפות:  $f$  רציפה ב- $D$  אם היא רציפה בכל  $x \in D$  אם  $x \in D$   $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \hat{x} \in D \quad |\hat{x} - x| < \delta \Rightarrow |f(\hat{x}) - f(x)| < \varepsilon$ , כלומר לכל  $x_0$  קיימת  $\delta$  התלויה גם ב- $x_0$  וגם ב- $\varepsilon$ , ואם  $f$  רבמ"ש ב- $D$ ,  $\delta$  תלויה רק ב- $\varepsilon$ .

## ליפשיציות

תהי  $f$  רציפה במקטע  $I$  וגזירה בכל נקודה פנימים של  $I$  אם קיים  $M \in \mathbb{R}$  כך ש- $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ ,  $\forall x_1, x_2 \in I$ . נאמר ש- $f$  היא M-ליפשיצית

## משפטים

### 1. רבמ"ש $\Leftarrow$ רציפות:

יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$ , ותהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  רבמ"ש ב- $I$ . אזי  $f$  רציפה ב- $I$  (הוכחה מיידית מההגדרות)

2. יהיו  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f$  איננה רבמ"ש ב- $D$  אם קיים  $\varepsilon_0 > 0$  וקיימות 2 סדרות  $(x_n)_{n=1}^\infty, (\hat{x}_n)_{n=1}^\infty$  המקיימות את שלושת התנאים הבאים:

א)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n, \hat{x}_n \in D$

ב)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \hat{x}_n) = 0$

ג)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x_n) - f(\hat{x}_n)| \geq \varepsilon_0$

הוכחה  $\Leftarrow$  אם  $f$  אינה רבמ"ש, היא מקיימת את השלילה של ההגדרה, קרי  $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, \hat{x} \in D \quad |\hat{x} - x| < \delta \wedge |f(\hat{x}) - f(x)| \geq \varepsilon$ . אזי בפרט לכל  $n \in \mathbb{N}$  עבור  $\delta = \frac{1}{n}$ , קיימים  $x_n, \hat{x}_n$  המקיימים  $|\hat{x}_n - x_n| < \delta = \frac{1}{n} \wedge |f(\hat{x}_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ . ולכן מתקיים

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\hat{x}_n - x_n| < \delta = \frac{1}{n} \iff -\frac{1}{n} \leq \hat{x}_n - x_n \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{x}_n - x_n) = 0$$

וממשפט הכריך נקבל  $\Rightarrow$  נישים היינה על הכיוון

### 3. משפט קנטור

יהיו  $a < b \in \mathbb{R}$ , ותהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה בכל  $[a, b]$ . אזי  $f$  רבמ"ש ב- $[a, b]$ .

הוכחה • נניח בשלילה שהיא איננה רבמ"ש

• ממשפט (2) קיים  $\varepsilon_0 > 0$  וקיימות 2 סדרות  $(x_n)_{n=1}^\infty, (\hat{x}_n)_{n=1}^\infty$  המקיימות את 2, ב, ג.

• מ-2 נסיק ש- $(x_n)_{n=1}^\infty, (\hat{x}_n)_{n=1}^\infty$  חסומות ע"י  $a, b$ , כלומר  $a \leq x_n, \hat{x}_n \leq b$ .  $\forall n \in \mathbb{N}$ . ולכן ממשפט בולצאנו ווירשטראס קיימות תת סדרות מתכנסות  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty, (\hat{x}_{n_k})_{k=1}^\infty$ , ונסמן  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in D$

• נשים לב שמתקיים  $\forall k \in \mathbb{N} \quad x_{n_K} = \hat{x}_{n_k} + (x_{n_k} - \hat{x}_{n_k})$  ומאש"ג נקבל  $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$

• מרציפות  $f$  נקבל  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\hat{x}_{n_k}) = f(x_0)$  ולכן בפרט קיים  $K \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $k > K$  מתקיים  $|x_{n_k} - \hat{x}_{n_k}| < \varepsilon_0$  בסתירה

### 4. אפיון היינה לקיום גבול של פונקציה בנקודה

תהי  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ . אז יש ל- $f$  גבול ב- $x_0$  אם לכל  $(x_n)_{n=1}^\infty$  סדרת היינה עבור  $f$  ב- $x_0$ , הסדרה  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$  מתכנסת.

הוכחה נראה שקילות לאפיון היינה:

$\Leftarrow$  אם קיים הגבול  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ , לכל  $(x_n)_{n=1}^\infty$  סדרת היינה יתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ , כלומר קיים הגבול הנ"ל כנדרש.  
 $\Rightarrow$  נגדיר 2 סדרות היינה  $\tilde{x}_n, \hat{x}_n$ , נסמן  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = L_1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n = L_2$ . אזי מאינפי 1 הסדרה השזורה  $(\tilde{x}_1, \hat{x}_1, \tilde{x}_2, \hat{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \hat{x}_n, \dots)$  היא גם סדרת היינה, ולפי ההנחה הסדרה הנ"ל מתכנסת (נסמן  $L$ ) ולכן קבוצת הגבולות החלקיים שלה היא בדיוק  $\{L\}$ , כלומר  $L_1 = L = L_2$  ולכן מאפיון היינה  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  כנדרש

5. קריטריון קושי לקיום גבול של פונקציה בנקודה  
 תהי  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת בסביבה מנוקבת של  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  
 אז יש ל  $f$  גבול ב  $x_0$  אם מתקיים תנאי קושי לקיום גבול של פונקציה בנקודה:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tilde{x}, \hat{x} \in D \quad \tilde{x}, \hat{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(\tilde{x}) - f(\hat{x})| < \varepsilon$$

הוכחה יהא  $\varepsilon > 0$  נתון.

$\Leftarrow$  נניח שקיים  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{def}{=} L \in \mathbb{R}$ . אזי קיימת  $\delta > 0$  שעבורה  $\delta > 0$   $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$   $\hat{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$  אזי בפרט עבור  $\tilde{x}, \hat{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  מתקיים כנדרש:

$$|f(\tilde{x}) - f(\hat{x})| = |f(\tilde{x}) - L + L - f(\hat{x})| \stackrel{\Delta}{\leq} |f(\tilde{x}) - L| + |L - f(\hat{x})| = |f(\tilde{x}) - L| + |f(\hat{x}) - L| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

בערה ההבדל מרבמש הוא הסביבה המנוקבת!

$\Rightarrow$  נגדיר סדרת היינה  $x_n$  ל  $x_0$  עבור  $f$ , אזי עבור  $\delta > 0$  המתאימה ל  $\varepsilon$  הנתון לפי תנאי קושי, ונקבל שקיים  $N \in \mathbb{N}$  שמקיים לכל  $n > N$   $0 < |x_n - x_0| < \delta$  ולכן בפרט לכל  $n, m$  מתקיים  $0 < |x_n - x_m| < \delta$  ולכן  $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$  אזי  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$  היא סדרת קושי ועל כן מתקיים  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  כנדרש.

6. רציפות בקטע פתוח + גבולות בקצוות  $\Leftarrow$  רבמש בקטע  
 יהיו  $a < b \in \mathbb{R}$  ותהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה בכל  $(a, b)$ . אזי  $f$  רמב"ש ב  $(a, b)$  אם קיימים במובן הצר הגבולות החד צדדיים  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ .

הוכחה ראשית נשים לב שזוהי גרסה למשפט קנטור על קטע פתוח.

$\Rightarrow$  נניח שהגבולות קיימים.

$$\forall x \in [a, b] \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) & x = a \\ f(x) & x \in (a, b) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) & x = b \end{cases} \quad \bullet \text{ נגדיר } \hat{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ כך ש}$$

$\bullet$  ממשפט קנטור  $\hat{f}$  רבמש ב  $[a, b]$  ובפרט לכן רבמש ב  $(a, b)$  משום ש  $(a, b) \subseteq [a, b]$

$\bullet$   $f, \hat{f}$  מתלכדות ב  $(a, b)$ , לכן  $f$  רמב"ש ב  $(a, b)$

$\Leftarrow$  נניח ש-  $f$  רבמש ב  $(a, b)$ .

נשים לב להערה בהוכחה על קושי, אזי לכל  $\varepsilon$  נתאים  $\delta$  בהגדרת רבמש, אזי תנאי קושי מתקיים ולכן יש גבולות ב  $\{a, b\}$ .

מסקנה (!) הפונקציה הרציפה  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  רמב"ש בקטע הפתוח  $(a, b)$  אם קיימת לה הרחבה רציפה לקטע הסגור  $[a, b]$

7. פונקציית הנגזרת  $f'$  חסומה אם  $f$  ליפשיצית

תהי  $f$  רציפה במקטע  $I$  וגזירה בכל נקודה פנימית של  $I$ , ובנוסף  $f'$  חסומה ב  $I$  אזי  $f$  היא ליפשיצית.

הוכחה

$\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq M$   $0 \leq M \in \mathbb{R}$  שמתקיים

יהיו  $x_1 < x_2 \in I$ . גזירה רציפה ב  $I$  ולכן רציפה ב  $[x_1, x_2]$ , וגזירה בפרט ב  $(x_1, x_2)$ .

לכן מקיימת בקטע את תנאי משפט לגראנז', אזי קיים  $c \in (x_1, x_2)$  המקיים  $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$   $\iff |f'(c)| = \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|}$  ובתוספת של הנתון נקבל שמתקיים  $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|$  ועל כן ליפשיצית כנדרש.