4.5.1 מינימום ומקסימום

82 בפברואר 5202

יהיו $A \subseteq D, f: D \to \mathbb{R}$.

הגדרות

מינימום ומקסימום גלובלי

נאמר ש-$x_0 \in A$ נקודת מקסימום (מינימום) גלובלי בקבוצה A אם מתקיים $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in A$. ל-$f(x_0)$ נקרא **הערך המקסימלי** של f ב-A

הערה 1

לא בהכרח קיים ערך מקסימלי\מינימלי בקבוצה

הערה 2

אם קיים ערך מקסימלי ל-A, הוא יחיד מעקרון הסדר ב-$\mathbb{R}$, אך יכול להתקיים: $\exists x_0 \neq x_1 \in A \; s.t. \; f(x_0) = f(x_1)$

נקודת קיצון מקומי

$x_0 \in D$ יקרא נקודת **מקסימום\מינימום מקומי** של f אם קיימת U סביבה מלאה של x_0 שבה $\forall x \in U \; f(x) \le f(x_0)$

משפטים

משפט פרמה

יהיו $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ נקודת קיצון מקומי של f. אם f גזירה ב-x_0, $f'(x_0) = 0$.

תקציר הוכחה f גזירה $\Leftarrow$ f רציפה $\Leftarrow$ $f'(x) \approx f(x) \circ \frac{1}{x}$ רציפה.
נראה שהיא מונוטונית חלשה משני צדדיה ולכן מטריכוטומיה מקיימת $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 0 \le f'(x_0) \le 0$

הערות:

1. גם אם x_0 נק' קיצון של f, לא תמיד f תהיה גזירה ב-x_0 (דוגמה - $f(x) = |x|, x_0 = 0$)
2. קיימות פונקציות בהן קיימים $x_0 \in D$ שעבורו $f'(x_0) = 0$ אבל x_0 אינה נקודות קיצון (דוגמה - $f(x) = x^3, x_0 = 0$)

מסקנה:

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ f גזירה ב-x_0. אם קיימת $\delta > 0$ כך ש-f מונוטונית עולה (יורדת) בסביבת δ חד צדדית מלאה, אזי $f'(x_0) \ge 0$ ($f'(x_0) \le 0$)