4.2 משפטים חשובים על הנגזרת

אם f גזירה בx_0, f רציפה בx_0

הערה רציפות בנקודה לא גוררת גזירות בנקודה.

ד"נ: $f(x)=|x|$ אינה גזירה בנק' $x_0=0$)

אריתמטיקה של נגזרות:

יהיו $\lambda\in\mathbb{R}$, ו- f,g פונקציות גזירות בנק' $x_0\in\mathbb{R}$. אזי הפונקציות הבאות גם הן גזירות בx_0:

1. $f+g$ ונגזרת הסכום היא $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
2. $f\cdot g$ ונגזרת המכפלה היא $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$
3. λf ונגזרתה $(\lambda f)'(x_0)=\lambda f'(x_0)$
4. $f-g$ ונגזרת ההפרש $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$
5. $\frac{1}{g}$, אם $g(x_0)\neq 0$, ונגזרתה $-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
6. $\frac{f}{g}$, אם $g(x_0)\neq 0$, ונגזרתה $\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

כלל השרשרת:

יהיו f פונקציה גזירה בנק' $x_0\in\mathbb{R}$, g פונקציה גזירה בנק($y_0=f(x_0)$.
אזי $g\circ f$ גזירה בx_0 ומקיימת $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

הערה

הכלל תקף כאשר f גזירה חד צדדית וg גזירה, אך לא כאשר שתיהן גזירות חד צדדית

נגזרת של הפונקציה ההופכית

יהיו $D,E\subseteq\mathbb{R}$, $f:D\to E$ פונקציה חח"ע ועל, $f^{-1}:E\to D$ ההופכית של f. אם מתקיים:

1. f גזירה ב$x_0\in D$
2. f^{-1} רציפה בנקודה $y_0=f(x_0)$
3. $f'(x_0)\neq 0$

אזי f^{-1}גזירה בנקודה y_0 ומקיימת $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{\grave{}}{f'(f^{-1}(x_0))}$

מסקנה

מכאן נובע שאם $f:D\to E$ וגזירה ב$x_0\in D$, שעבורו $f'(x_0)=0$, אזי $f^{-1}:D\to E$ איננה גזירה בx_0.

טרנזיטיביות בגזירות לפונקציות זהות

יהיו f, g המוגדרות בסביבה מלאה U של $x_0 \in \mathbb{R}$, כך ש$\forall x \in U \; f(x) = g(x)$.
אם f גזירה בx_0, אזי g גזירה גם היא ומתקיים $f'(x_0) = g'(x_0)$