8.2 מבחני השוואה להתכנסות והתכנסות בהחלט

הגדרות

התכנסות בהחלט

יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי $f:[a,\infty) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,N]$ לכל $a<N \in \mathbb{R}$.

נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ **מתכנס בהחלט** אם"ם האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ מתכנס.

באותה מידה נטען על $g:[a,\infty)$ כאשר $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ אינטגרל לא אמיתי מהסוג השני

משפטים

1. מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים

יהיו $f,g:[a,\infty) \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות ב$[a,N]$ לכל $a<N \in \mathbb{R}$.
נניח שקיים $c \in [a,\infty)$ שמקיים $\forall x \geq c\; 0 \leq f(x) \leq g(x)$. אזי:

1. אם $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס, $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס גם הוא, ומתקיים $\int\limits_c^\infty f(x)\,dx \leq \int\limits_c^\infty g(x)\,dx$.
2. אם $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ מתבדר, $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ מתבדר גם הוא.

כלומר $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx, \int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו

באותה מידה תקף לאינטגרלים מהסוג השני, כאשר $f,g:[a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in f,g:[a,b) \to \mathbb{R},\ a<b \in \mathbb{R}$ וf,g אינטגרביליות ב$[a,b-\delta]$ לכל $\delta \in \left(a, \frac{b-a}{2}\right)$.

הוכחה נשים לב שהפונקציה הצוברת $\tilde{F}$ מונוטונית עולה לכל $x \in [c,\infty)$ מאי שליליות האינטגרל, ובאופן דומה גם הפונקציה הצוברת $\tilde{G}$, אזי הגבולות $\lim\limits_{N\to\infty} \tilde{F}(N), \lim\limits_{N\to\infty} \tilde{G}(N)$ קיימים במובן הצר אם"ם $\tilde{F}, \tilde{G}$ חסומות מלעיל ב$[a,\infty)$.

ממונוטוניות האינטגרל נקבל שמתקיים $\forall x \in [c,\infty)\; 0 \leq f(x) \leq g(x) \Rightarrow \tilde{F}(x) \leq \tilde{G}(x)$
אז אם $\lim\limits_{N\to\infty} \tilde{F}(N) = \infty$, ממשפט הכריך $\lim\limits_{N\to\infty} \tilde{G}(N) = \infty$. אחרת נניח בשלילה ש$\tilde{F}$ מתבדרת לאינסוף ו$\tilde{G}$ מתכנסת, ונקבל סתירה.

2. קריטריון קושי לאינטגרלים לא אמיתיים

יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי $f:[a,\infty) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a,N]$ לכל $a<N \in \mathbb{R}$.
אזי $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס אם"ם $\forall \varepsilon>0\; \exists B \in \mathbb{R}\; \forall b_1,b_2>B \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

הוכחה **תקציר:** נפעיל את קריטריון קושי להתכנסות פונקציות על הפונקציה הצוברת $\tilde{F}$.

מהמשפט היסודי של החשבון האינטגרלי, קיימת ל-f הפונקציה הצוברת $\tilde{F}$. אזי מהגדרת האינטגרל הלא אמיתי, $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס אם"ם $\lim\limits_{N\to\infty} \tilde{F}(N)$ קיים במובן הצר,

ולפי קריטריון קושי להתכנסות פונקציות, $\tilde{F}$ מתכנסת אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיים $B \in \mathbb{R}$ שלכל $b_1,b_2>B$ מתקיים $\left|\tilde{F}(b_2)-\tilde{F}(b_1)\right| < \varepsilon$

נשים לב שמתקיים $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^{b_2} f(x)\,dx - \int\limits_a^{b_1} f(x)\,dx\right| = \left|\tilde{F}(b_2)-\tilde{F}(b_1)\right|$ כנדרש

3. התכנסות בהחלט$\Leftarrow$התכנסות

יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$

אזי אם האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס בהחלט, האינטגרל $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

הוכחה

1. דרך ארוכה:
   - נגדיר $\forall x \in [a, \infty) \quad f_-(x) = -\min\{f(x), 0\},\ f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$
   - מתקיים $(i)\ f^+, f_- \geq 0, \quad (ii)\ f = f^+ - f_-, \quad (iii)\ |f| = f^+ + f_-, \quad (iv)\ f_-, f^+ \leq |f|$
   - נקבל מ$(i), (iv)$ שf^+, f_- אינטגרביליות ב$[a, \infty)$ ולכן מתקיים

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx \overset{(ii)}{=} \int\limits_a^\infty f^+(x)\,dx - \int\limits_a^\infty f_-(x)\,dx \overset{(i)}{\leq} \int\limits_a^\infty f^+(x)\,dx + \int\limits_a^\infty f_-(x)\,dx \overset{(iii)}{=} \int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$$

2. נפעיל את קריטריון קושי לאינטגרלים לא אמיתיים על $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$, ובהינתן $\varepsilon > 0$, מאי שוויון המשולש האינטגרלי מתקיים $\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\right| \leq$ $\left|\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$

4. התכנסות $\int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{x^p}dx$

תהי $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[1, N]$ לכל $1 < N \in \mathbb{R}$.

אם f חסומה ב$[1, \infty)$, האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{x^p}dx$ מתכנס לכל $p > 0$

הוכחה f חסומה$\Leftarrow$קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך ש$\forall x \in [1, \infty)\ |f(x)| \leq M$, והרי $\int\limits_1^\infty \frac{M}{x^p}dx$ מתכנס בהחלט לכל $M, p > 0$ ולכן ממבחן ההשוואה $\int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{x^p}dx$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס