9.1 טורים, כללי

הגדרות

1. סדרת הסכומים החלקיים

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ממשית. נגדיר סדרה חדשה $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ שהיא **סדרת הסכומים החלקיים של** a_n**,** המוגדרת ע"י $\forall k \in \mathbb{N}\, S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$

אם לסדרה יש גבול במובן הרחב, נסמן $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

בכל מקרה, נסמן את הסדרה S_k $\sum\limits_n a_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{k} a_n\right)_{k=1}^{\infty} = (S_k)_{k=1}^{\infty}$

1.1 טור חסום

נאמר ש**הטור** $\sum\limits_n a_n$ **חסום** אם"ם הסס"ח $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה.

2. טור

למילה 2 משמעויות:

1. S_k סדרת הסכומים החלקיים של a_n היא **טור הסדרה** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$**.**
2. אם קיים הגבול $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = L$, נאמר ש-$L$ הוא **טור הסדרה** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$**.**
   (א) אם $L \in \mathbb{R}$, נאמר ש**הטור מתכנס** ו**שסכום הטור הוא** L
   (ב) אם $L \in \{-\infty, \infty\}$, נאמר ש**הטור** $\sum\limits_n a_n$ **מתבדר לאינסוף (מינוס אינסוף)**

2. טור זנב וטור הזנב

יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ממשית, $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ שהיא סדרת הסכומים החלקיים של a_n ו-$N \in \mathbb{N}$
טור ה-N-זנב של a_n הוא הטור $\sum\limits_n a_{n+N} = a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots, a_{N+n}, \ldots$ **ואינו קשור לסדרת הסכומים החלקיים** (S_k)**!**

אם טור ה-N-זנב של a_n מתכנס, נסמן את גבול הטור $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+N}$

לעומת זאת, **ה-N-זנב של הטור** $\sum\limits_n a_n$ הוא $(S_{k+N})_{k=1}^{\infty}$ המוגדר $\forall k > N\, S_K = a_{N+1} + a_{N+2} + a_k \cdots = \sum\limits_{n=1}^{k} a_k - \sum\limits_{n=1}^{N} a_N$

סימון: x^+, x^-

בהינתן $x \in \mathbb{R}$ נסמן

$$\begin{cases} x^- = & \frac{|x|-x}{2} = \max\{-x, 0\} \geq 0 \\ x^+ = & \frac{|x|+x}{2} = \max\{x, 0\} \end{cases}$$

אזי מתקיים $x = x^+ - x^-$ וגם $|x| = x^+ + x^-$

משפטים

1. התכנסות טורים הנדסיים

ראשית נציין שסדרה תיקרא סדרה הנדסית אם"ם קיימים $a_1, q \in \mathbb{R}$ המקיימים $\forall n \in \mathbb{N}\, a_n = a_1 q^{n-1}$
בנוסף, נשים לב שהסדרה $q_1 = q \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}\, q_k = q^k$, $(q_k)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם"ם $|q| \leq 1$, **ואם כך בפרט גם אפסה.**
נשים לב שS_kמקיימת:

$$\forall k \in \mathbb{N}\, S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 q^{k-1} = a_1 \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1}\right) = a_1 \frac{1-q^k}{1-q} \quad (*)$$

כאשר $(*)$ תקפה לכל $q \neq 1$
ולכן, אם q_k **לא אפסה הסכום ימשיך לגדול לכל** k**, אזי משלילת הנ"ל נקבל ש**S_k **מתכנסת** $\iff$ q_k**מתכנסת** $\iff$ $|q| \leq 1$
אם $a_1 = 0$, **אזי** $\forall n \in \mathbb{N}\, a_n = a_1 q^{n-1} = 0$ **ולכן** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.
אחרת נשאל: האם הטור $\sum\limits_{n} a_n$ מתכנס? אם $a_1 \neq 0$, **תלוי ב**q:

- $q = 1$ **אזי** a_n**קבועה, ולכן לא תתכנס לכל** $a_1 \neq 0$**, שכן** $\forall k \in \mathbb{N}\ \sum\limits_{n=1}^{k} a_n = k \cdot a_1 \underset{n\to\infty}{\to} \infty$,
- $|q| > 1$ **משום ש**$a_1 \neq 0$**, לפי הנ"ל** S_k **לא תתכנס וכן** a_n **לא אפסה.**
- $|q| < 1$ **אזי מתקיים** $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \overset{(*)}{=} \lim\limits_{k\to\infty} a_1 \frac{1-q^k}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$ **והטור מתכנס (בפרט הסדרה אפסה)**

2. טור מתכנס רק אם הסדרה אפסה

אם $\sum\limits_{n} a_n$ מתכנס, אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

הוכחה

נסמן $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. אזי מתקיים

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \sum_{n=1}^{k} a_n = a_k + \sum_{n=1}^{k-1} a_n \iff a_k = \sum_{n=1}^{k} - \sum_{n=1}^{k-1} \iff \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} - \sum_{n=1}^{k-1} = L - L = 0$$

3. התבדרות הטור ההרמוני

נוכיח באינדוקציה על m שמתקיים $\forall m \in \mathbb{N}\quad \sum\limits_{n=1}^{2^{m-1}} = S_{2^{m-1}} \geq \frac{m+1}{2}$:

- **בסיס** $m = 1$: מתקיים $S_{2^{1-1}} = S_1 = 1 \geq \frac{1+1}{2} = 1$.
- **צעד** נניח שמתקיים $S_{2^{m-1}} \geq \frac{m+1}{2}$, נוכיח שמתקיים $S_{2^m} \geq \frac{m+2}{2}$:

$$\begin{aligned}
&S_{2^m} = S_{2^{m-1}} + h_{2^{m-1}+1} + h_{2^{m-1}+2} + \cdots h_{2^m-1} + h_{2^m} = \\
&= S_{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m-1} + \frac{1}{2^m} \geq S_{2^{m-1}} + 2^{m-1}\left(\frac{1}{2^m}\right) \overset{step}{\geq} \\
&\overset{step}{\geq} \frac{m+1}{2} + \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{(m+1)+1}{2}
\end{aligned}$$

כנדרש.

לכן נקבל שS_{2^k}תת הסדרה של S_k מקיימת $\sum\limits_{n=1}^{2^{k-1}} = S_{2^{k-1}} \geq \frac{k+1}{2} \underset{k\to\infty}{\to} \infty$ **ולכן אינה חסומה, אזי ממשפט הירושה גם** S_k **אינה חסומה ועל כן אינה מתכנסת, כנדרש.**

4. אריתמטיקה של טורים מתכנסים

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות ממשיות ויהא $c \in \mathbb{R}$ נתון. אזי מתקיים:

1. אם הטור $\sum_n a_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum_n (ca_n)$ מתכנס ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
2. אם $c \neq 0$, והטור $\sum_n (ca_n)$ מתכנס, אזי הטור $\sum_n (a_n)$ מתכנס ומקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$
3. **תוספת** אם הטורים $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ מתכנסים, אזי הטור $\sum_n (a_n + b_n)$ מתכנס ומקיים $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

5. קריטריון קושי לטורים מתכנסים

הטור $\sum_n a_n$ מתכנס אם"ם

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \forall k, p \in \mathbb{N} \quad N < k \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon$$

הוכחה

נשים לב שמתקיים $\left| S_{k+p} - S_k \right| = \left| \sum_{n=1}^{k+p} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| \quad \forall k, p \in \mathbb{N}$, ולכן הגדרה זו שקולה לקריטריון קושי להתכנסות סדרות, כנדרש.

6. טור מתכנס אם"ם טור ה-N-זנב מתכנס

יהי $N \in \mathbb{N}$. הטור $\sum_n a_n$ מתכנס אם"ם טור ה-N-זנב שלו $\sum_n a_{n+N}$ מתכנס, ואז מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+N} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n$.

הוכחה

נשים לב שכאשר נגדיר S_k סדרת הסכומים החלקיים של a_n, ואת T_k סדרת הסכומים החלקיים של a_{n+N}, מתקיים

$$\forall k \in \mathbb{N} \, T_k = \sum_{n=N+1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = S_k - S_N$$

והרי בין אם הטור מתכנס או לא, $S_N \in \mathbb{R}$ קבוע ואינו תלוי ב-k ועל כן מאריתמטיקה של גבולות T_kו-S_k מתכנסים ומתבדרים יחדיו, כנדרש.