11.2 התכנסות במידה שווה של סדרות וטורי פונקציות

81 בפברואר 5202

הגדרות

התכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות

תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בD ותהי $f : D \to \mathbb{R}$. נאמר ש(f_n) **מתכנסת ל-f במידה שווה (במ"ש)** (**Uniformly**) אםם

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N} \, \forall x \in D \, \forall n > N \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

הערות

- במקרה של התכנסות במ"ש, N לא תלוי ב$x \in D$.
- התכנסות במ"ש תלויה בתחום
- התכנסות במ"ש בD גוררת התכנסות נקודתית בD.
- שיתוף השם עם התכנסות במידה שווה נובע מכך שזהו תנאי שהוא חזק יותר מאשר התכנסות\רציפות רגילה, ובעצם מגביל כמה כל מאורע בפונקציה יכול להתרחק מאחר עם כלל חזק יותר מאשר __ות שאינה במידה שווה - נוכל להבין יותר בקלות מה קורה עם כל נקודה\פונקציה ביחס לאחרת עד כדי ε גם אם הן "רחוקות" זו מזו במיקום שלהן\בn שבו הן תלויות

התכנסות במ"ש של טור פונקציות

תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בD ותהיינה $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ ו- $g : A \to \mathbb{R}$. נאמר שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במידה שווה לg בA ונסמן

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \xrightarrow[n\to\infty]{A} g$$

אם ורק אם הסס"ח מתכנס במידה שווה לg בA, קרי $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{A} g$

התכנסות של טורים במ"ש בהחלט

טור טור תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בD. נאמר שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס בהחלט במ"ש ב-D אם"ם הסס"ח של $|f_n|$ מתכנסת במ"ש בD.

מרחק פונקציות בקטע

תהיינה $f, g : D \to \mathbb{R}$ ו$A \subseteq D$. אם הקבוצה $\{|f(x) - g(x)| \, x \in A\}$ חסומה מלעיל, נסמן

$$d_A(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)| \, x \in A\}$$

ואחרת נסמן

$$d_A(f, g) = \infty$$

משפטים

התכנסות במ"ש בD גוררת התכנסות נקודתית בD

סקיצת הוכחה: ישירות מההצרנה - אם N "גלובלי" ביחס לx אז בפרט הזוג (N, x) מקיימים את תנאי ההתכנסות הנקודתית.

קריטריון קושי להתכנסות במ"ש של סדרת פונקציות

תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרת על $D \subseteq \mathbb{R}$. הבאים שקולים:

1. (f_n) מתכנסת במ"ש ב-D אס"ם
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall m, n > N \, \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$
3. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall m, n > N \quad d_A(f_n, f_m) < \varepsilon$

הוכחה השקילות בין 1 ל2 מיידית. הוכחת $\frac{\varepsilon}{2}$.

"$2 \Leftarrow 3$" נניח (f_n) מתכנס במ"ש בD. הוכחת $\frac{\varepsilon}{2}$.

"$2 \Rightarrow 3$" נניח שהקריטריון מתקיים. יהי $\varepsilon > 0$ נתון. אזי לכל $x \in D$ הסדרה **המספרית!** מקיימת את תנאי קושי; יהי $x \in D$. לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ שעבורו

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \iff f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < f_m(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

לכל $m, n > N$. נקבע $m > N$ ועל כן $f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f_m(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ ועל כן מתקיים לכל $n > N$

$$|f(x) - f_m(x)| \overset{(\triangle)}{\leq} \left|f_m(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right| + \left|f_m(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right| < \varepsilon$$

כנדרש.

קריטריון קושי להתכנסות במ"ש של טור פונקציות

תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרת על $D \subseteq \mathbb{R}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש ב-D אס"ם

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall k, n > N \, \forall x \in D \quad \left|\sum_{j=n}^{n+k} f_j(x)\right| < \varepsilon$$

הוכחה כמו כל הוכחה אחרת של קושי, נראה ש-s_n הסס"ח סדרת קושי

אריתמטיקה של מרחקים

יהיו $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ ותהי $A \subseteq D$. אזי מתקיים:

סימטריה $d_A(f,g) = d_A(g,f)$

א"ש המשולש $d_A(f,h) \leq d_A(f,g) + d_A(g,h)$

חיוביות בהחלט $d_A(f,g) \geq 0$ ומתקיים $d_A(f,g) = 0 \iff f_{|A} = g_{|A}$

עם המוסכמות $a + \infty = \infty + \infty = \infty$ וגם $a \leq \infty$ לכל $a \in \mathbb{R}$

"היינה" להתכנסות במ"ש

תהיינה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ עם $f_n : D \to \mathbb{R}$ ו$A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$.

הבאים שקולים $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש בA אם ורק אם קיימת סדרה אפסה $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ (עם $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$) שעבורה

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d_A(f, f_n) < \varepsilon_n$$

הוכחה: נבחין שמהגדרת הגבול הנ"ל מתקיים אסם $\lim_{n\to\infty} d_A(f, f_n) = \varepsilon_n = 0$.

מבחן M של ויירשטארס

תהיינה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ עם $f_n : D \to \mathbb{R}$ ו$A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$.

אם קיים טור חיובי **מתכנס** של מספרים $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ המקיים $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A \, \forall n \in \mathbb{N}$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט במ"ש בA.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$ נתון. נבחין שמתנאי קושי להתכנסות טורי מספרים, קיים $N \in \mathbb{N}$ שעבורו לכל $n > N, p \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k\right| < \varepsilon$$

מאי שוויון המשולש $(\triangle)$ נקבל אזי שלכל $x \in A$ מתקיים:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k\left(x\right) \overset{(\triangle)}{\leq} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k\right| < \varepsilon$$

אזי הטור מתכנס במ"ש בA מתנאי קושי להתכנסות במ"ש.

דוגמאות

e^x: היא הסדרה $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, כאשר $e_n\left(x\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. ראינו באינפי 1 שלכל $x \in \mathbb{R}$ יש $y \in \mathbb{R}$ שעבורו $y = e^x$ ועל כן $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא הגבול הנקודתי של e_n ב-$\mathbb{R}$.