12.1 הכנסות במ"ש של טורי חזקות

71 בפברואר 5202

משפטים

1. טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R \in \mathbb{R}$ מתכנס במ"ש ב-$[x_0 - r, x_0 + r]$ לכל $0 < r < R$

יהי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $0 < R \in \mathbb{R}$. אזי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ מתכנס במ"ש בקטע הסגור $[x_0 - r, x_0 + r]$ לכל $0 < r < R$.

הוכחה יהי $0 < r < R$. מהלמה של אבל, הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|a_k r^k\right|$ מתכנס. לכל $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ מתקיים $\left|a_k (x - x_0)^k\right| \leq \left|a_k r^k\right|$, ועל כן ממבחן M של ויירשטראס, הטור מתכנס בהחלט במ"ש ב-$[x_0 - r, x_0 + r]$, ובפרט במ"ש.

2. על טור חזקות המתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$

יהי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ טור חזקות המתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$ ($R = \infty$). אזי:

1. הטור מתכנס במ"ש בכל קטע סגור $[x_0 - r, x_0 + r]$ לכל $r \in \mathbb{R}^+$
2. הטור מתכנס במ"ש ב-$\mathbb{R}$ אם"ם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$a_k = 0$ לכל $k > N$

3. התכנסות של טור פונקציות רציף בקטע חצי פתוח גוררת התכנסות במ"ש בקטע סגור

יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ טור חזקות כך ש-$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה ב-$[a, b]$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אם $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש בקטע $[a, b)$, אזי הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n (b)$ מתכנס ו-$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n (x)$ מתכנס במ"ש ב-$[a, b]$.

הוכחה

נבחין שמתנאי קושי קיים $N \in \mathbb{N}$ שלכל $m, n > N$ ולכל $x \in [a, b)$ מקיים $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} f_k (x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. f_k רציפה משמאל ומדובר בסכום סופי אזי נפעיל אריתמטיקה של רציפות ונקבל

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k (b)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ועל כן הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n (b)$ מתכנס. אזי טור הפונקציות מתכנס ב-$[a, b)$ וגם ב-b, אזי מתכנס במ"ש ב-$[a, b]$, כנדרש.

מסקנה

אם טור חזקות עם רדיוס $R \in \mathbb{R}^{++}$ אינו מתכנס ב-$x_0 + R$, אז אינו מתכנס במ"ש ב-$[x_0, x_0 + R)$, ואם אינו מתכנס ב-$x_0 - R$, אינו מתכנס במ"ש ב-$(x_0 - R, x_0]$.

התכנסות נקודתית בקצה הרדיוס גוררת התכנסות במ"ש ב$[x_0, x_0+R]$

יהי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-x_0\right)^k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $0<R\in\mathbb{R}$ המתכנס עבור $x:=x_0+R$. אזי הטור מתכנס במ"ש ב$[x_0, x_0+R]$

(יהי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-x_0\right)^k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $0<R\in\mathbb{R}$ המתכנס עבור $x:=x_0-R$. אזי הטור מתכנס במ"ש ב$[x_0-R, x_0]$)

מסקנה: טור חזקות מתכנס במ"ש בכל תת קטע סגור של תחום ההתכנסות הנקודתית שלו