פעולות על פולינומי טיילור

03 באוגוסט 4202

הגדרה בהינתן $Q\in\mathbb{R}[x]$, שהצגתו סביב $a\in\mathbb{R}$ היא $Q(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}q_i(x-a)^i$, **הקטימה** של Q **מסדר** $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ **סביב** a היא $[Q]_{m,a}(x):=\sum\limits_{i=0}^{m}q_i(x-a)^i$

משפט קטימה שומרת על יחידות הפולינום: תהא f הגזירה $n\in\mathbb{N}$ פעמים, ויהא $m\in[n]$. אזי מהגדרת פולינומי טיילור מתקיים $P_{m,f,a}(x)=[P_{n,f,a}(x)]_{m,a}$

משפט הפרש של פולינום והקטימה: יהא $Q\in\mathbb{R}[x]$, ויהא $a\in\mathbb{R}$. אזי $\lim\limits_{x\to a}\frac{Q(x)-[Q]_{n,a}}{(x-a)^n}$

פולינום של מכפלת פונקציות יהיו f,g פונקציות הגזירות n פעמים בנקודה a, p_n,q_n פולינומי טיילור של f,g בהתאמה סביב a. אזי הפונקציה $h:=f\cdot g$ גזירה nפעמים בנקודה a והפולינום טיילור שלה הוא $t_n(x)=[p_n(x)\cdot q_n(x)]_{n,a}$

הוכחה: נראה שמתקיים $\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)-t_n(x)}{(x-a)^n}=0$:

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)-t_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-t_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)+[f(x)q_n(x)+p_n(x)q_n(x)]-[f(x)q_n(x)+p_n(x)q_n(x)]-t_n(x)}{(x-a)^n}=$$

$$=\frac{f(x)g(x)-f(x)q_n(x)}{(x-a)^n}+\frac{f(x)q_n(x)-p_n(x)q_n(x)}{(x-a)^n}+\frac{p_n(x)q_n(x)-t_n(x)}{(x-a)^n}$$

נחשב את המחוברים בנפרד:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(x)q_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}f(x)\frac{g(x)-q_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}f(x)\frac{R_{n,g,a}(x)}{(x-a)^n}=0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)q_n(x)-p_n(x)q_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}q_n(x)\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}q_n(x)\frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}=0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{p_n(x)\cdot q_n(x)-t_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{p_n(x)\cdot q_n(x)-[p_n(x)\cdot q_n(x)]_{n,a}}{(x-a)^n}=0$$

אזי מאש"ג $\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)-t_n(x)}{(x-a)^n}=0$ ולכן מהמשפט על יחידות פולינום טיילור קיבלנו את הדרוש.

פולינום של הרכבה יהיו: fפונקציה הגזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$, g הגזירה n פעמים בנקודה $f(a)\in\mathbb{R}$. אזי $P_{n,g\circ f,a}(x)=[P_{n,g,a}(P_{n,f,a}(x))]_{n,a}$