3.1.7 קריטריון קושי לקיום גבול של פונקציה בנקודה

קריטריון קושי לקיום גבול של פונקציה בנקודה
תהי $f:D\to\mathbb{R}$ המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0\in\mathbb{R}$.
אז יש לf גבול בx_0 אם"ם מתקיים תנאי קושי לקיום גבול של פונקציה בנקודה:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall\tilde{x},\hat{x}\in D\quad \tilde{x},\hat{x}\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}\Rightarrow|f(\tilde{x})-f(\hat{x})|<\varepsilon$$

הוכחה יהא $\varepsilon>0$ נתון.

$\Leftarrow$ נניח שקיים $L\in\mathbb{R}\overset{def}{=}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. אזי קיימת $\delta>0$ שעבורה $|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\{x_0\}\setminus(x_0-\delta,x_0+\delta)\ni\hat{x}$. אזי בפרט עבור $\tilde{x},\hat{x}\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ מתקיים כנדרש:

$$|f(\tilde{x})-f(\hat{x})|=|f(\tilde{x})-L+L-f(\hat{x})|\overset{\triangle}{\leq}|f(\tilde{x})-L|+|L-f(\hat{x})|=|f(\tilde{x})-L|+|f(\hat{x})-L|<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

הערה ההבדל מרבמש הוא הסביבה המנוקבת!

$\Rightarrow$ נגדיר סדרת היינה x_n לx_0 עבור f, אזי עבור $\delta>0$ המתאימה לε הנתון לפי תנאי קושי, ונקבל שקיים $N\in\mathbb{N}$ שמקיים לכל $n>N$ $0<|x_n-x_0|<\delta$, ולכן בפרט לכל $m,n>N$ מתקיים $0<|x_n-x_m|<\delta$ ולכן $|f(x_n)-f(x_m)|<\delta$, אזי $f(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ועל כן מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ כנדרש.