אינטגרביליות

22 בפברואר 5202

הגדרות

1. **אינטגרביליות**
יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **חסומה.**
נאמר ש-**f אינטגרבילית ב[a, b]** אם"ם מתקיים $\overline{\int_{b}^{a}} f(x)\,dx = \underline{\int_{b}^{a}} f(x)\,d(x)$. במקרה זה נסמן את הערך הנ"ל $\int_{b}^{a} f(x)\,dx$ והוא יקרא **האינטגרל של f ב[a, b].**

2. **שטח**
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **חסומה.**
אם $\forall x\in[a,b]\ \ f(x)\geq 0$ ו-f אינטגרבילית ב$[a,b]$, אז המספר האי שלילי $\int_{b}^{a} f(x)\,dx\in\mathbb{R}^{+}$ יקרא השטח של הקבוצה $\mathbb{R}^{2}\mid x\in[a,b]\,,y\in[0,f(x)]\}$

3. יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **אינטגרבילית ב**$[a,b]$. נגדיר $\int_{a}^{a} f(x)\,dx=0, \int_{a}^{b} f(x)\,dx=-\int_{b}^{a} f(x)\,dx$

משפטים

1. **תנאי דרבו לאינטגרביליות**
תהי $f\ [a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי f אינטגרבילית ב$[a,b]$אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P שעבורה $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

כיוון להוכחה: למת החתכים לסכומי דרבו!

$\Leftarrow$ אם f אינטגרבילית, מלמת החתכים נקבל שבהינתן $\varepsilon>0$, קיימות P_1,P_2 שעבורן $U(f,P_1)-L(f,P_2)<\varepsilon$. אזי העידון המשותף $Q\overset{def}{=}P_1\cup P_2$ מקיים

$$\forall P\in\{P_1,P_2\}\quad L(f,P)\leq L(f,Q)\leq U(f,Q)\leq U(f,P)$$

ולכן מתקיים $0\leq U(f,Q)-L(f,Q)\leq U(f,P_1)-L(f,P_2)<\varepsilon$ כנדרש.

$\Rightarrow$ אם בהינתן $\varepsilon>0$ קיימת P שעבורה $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$, P מקיימת את התנאי השלישי של למת החתכים לסכומי דרבו (אפשר באותה מידה לעדן את P ע"י הוספת $x\in[a,b]$ ל-P בדומה ל-$\Leftarrow$.)

א) **מסקנה** תהי $f\ [a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי f אינטגרבילית ב$[a,b]$אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P שעבורה $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$.
משום ש-

$$\forall P\quad U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\underset{def}{\overset{by}{=}}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})\underset{def}{\overset{by}{=}}\omega(f,P)$$

2. **תוספת ללמת החתכים**
יהיו $\mathcal{L},\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ לא ריקות ומקיימות $\mathcal{L}\leq\mathcal{U}$. הבאות שקולות:
$\Longleftrightarrow$ $\sup\mathcal{L}=\inf\mathcal{U}$

$\Longleftrightarrow$ קיימות שתי סדרות $(\ell_n)_{n=1}^{\infty},(u_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש $\forall n\in\mathbb{N}\ l_n\in\mathcal{L},u_n\in\mathcal{U}$

א) **מסקנה** יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ $\iff$ קיימת $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת חלוקות של $[a,b]$ המקיימת

$$\lim_{n\to\infty}\left(U\left(f,P_n\right)-L\left(f,P_n\right)\right)=0$$

3. **משפט דרבו**
יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\delta_1,\delta_2>0$ כך שלכל P חלוקה של $[a,b]$ מתקיים

$$\begin{cases}U\left(f,P\right)-\overline{\int\limits_a^b} f\left(x\right)dx<\varepsilon & \Delta\left(P\right)<\delta_1\\ \underline{\int\limits_a^b} f\left(x\right)d\left(x\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon & \Delta\left(P\right)<\delta_2\end{cases}$$

הוכחה סקיצה:

- מהגדרת $\overline{\int\limits_b^a} f\left(x\right)dx$ קיימת חלוקה $\tilde{P}$ עבורה מתקיים $U\left(f,\tilde{P}\right)-\int\limits_a^b f\left(x\right)dx<\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\left|\tilde{P}\right|=k_1\in\mathbb{N}$
- נגדיר $0<\delta_1-\frac{\varepsilon}{2k_1(M-m+1)}$
- תהא חלוקה P שמקיימת $\Delta P<\delta_1$.
- נסתכל על העידון המשותף $P\cup\tilde{P}$,ונאמר כי $P\cup\tilde{P}$ מתקבלת מ-P על ידי תוספת של $k\in\mathbb{N}$ נקודות.
- נשים לב שמתקיים $k<k_1$, שכן $\{a,b\}\subseteq P\cap\tilde{P}$.
- מתקיים $0\leq U\left(f,P\right)-U\left(f,P\cup\tilde{P}\right)\leq k\left(M-m\right)\Delta P<k_1\left(M-m\right)\Delta P<k_1\left(M-m\right)\delta_1<\frac{\varepsilon}{2}$.
- מכאן נקבל

$$U\left(f,P\right)-\overline{\int\limits_a^b} f\left(x\right)dx=U\left(f,P\right)-U\left(f,P\cup\tilde{P}\right)+U\left(f,P\cup\tilde{P}\right)-\overline{\int\limits_a^b} f\left(x\right)dx<\frac{\varepsilon}{2}+U\left(f,\tilde{P}\right)-\overline{\int\limits_a^b} f\left(x\right)dx<\varepsilon$$

א) **מסקנה!** לכל סדרת חלוקות $(P_j)_{j=1}^{\infty}$המקיימת $\lim\limits_{j\to\infty}\Delta P_j=0$ מתקיים $\lim\limits_{j\to\infty}U\left(f,P_j\right)=\overline{\int\limits_a^b} f\left(x\right)dx$ וגם $\lim\limits_{j\to\infty}L\left(f,P_j\right)=\underline{\int\limits_a^b} f\left(x\right)dx$

הוכחה למסקנה: $\lim\limits_{j\to\infty}\Delta P_j=0$ $\Leftarrow$ קיים $J\in\mathbb{N}$ שעבורו לכל $j>J$ מתקיים $\Delta P_j<\delta_1$ ולכן עומדת בתנאי דרבו ומתקיים $\forall j>J\quad U\left(f,P_j\right)-\overline{\int\limits_a^b} f\left(x\right)dx<\varepsilon$ כנדרש.

4. **אינטגרביליות בכל וריציאציה של קטע סגור**
יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$, ותהי $f:[\min\{a,b,c\},\max\{a,b,c\}]$. אינטגרבילית בקטע. אז מתקיים

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^c f\left(x\right)dx+\int\limits_c^b f\left(x\right)dx$$

הוכחה ישירות מהגדרה 3

5. **אינטגרביליות של פונקציה מונוטונית בקטע סגור**
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית. אזי f אינטגרבילית בהגדרתה.

סקיצת הוכחה מונוטוניות בקטע סגור $\Leftarrow$ חסימות ע"י $f\left(a\right),f\left(b\right)$. אם קבועה-הוכחנו בעבר. לכן עולה\יורדת ואינה קבועה. (נניח בה"כ עולה לכן $f\left(a\right)<f\left(b\right)$)

- נגדיר $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ כך ש$\Delta P<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, לכן $\forall i\in[n]$ f עולה ב-$[x_{i-1},x_i]$, אזי $m_i=f\left(x_{i-1}\right),M_i-f\left(x_i\right)$.

•

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$$
$$\leq\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\Delta P=\Delta P\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=$$
$$\underset{sum}{\overset{telescopic}{=}}\Delta P(f(b)-f(a))<\varepsilon\frac{f(b)-f(a)}{f(b)-f(a)}=\varepsilon$$

הערה נשים לב ש-f אינה חייבת להיות רציפה!

6. **אינטגרביליות של פונקציה רציפה בקטע סגור**
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי f אינטגרבילית ב$[a,b]$

הוכחה

- f רציפה בקטע סגור ולכן מהמשפט הראשון של ויירשטראס היא חסומה.
- f חסומה בקטע סגור ולכן ממשפט קנטור היא רבמ"ש.
- יהא $\varepsilon>0$ נתון
- עבור $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{b-a}$ קיימת $\delta>0$ שמקיימת ε_1 $\forall t_1,t_2\in[a,b]\ |t_1-t_2|<\delta\Rightarrow|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon_1$
- תהא $P=\{x_0=a,x_1,\ldots,x_n=b\}$ חלוקה של $[a,b]$המקיימת $\Delta P<\delta$, עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו.
- f רציפה ב$[a,b]$ ולכן בפרט רציפה ב$[x_i,x_{i-1}]$ לכל $i\in[n]$.
- מהמשפט השני של ויירשטראס נקבל שקיימים c_i,d_i כך ש-$f(c_i)=M_i,\ f(d_i)=m_i$ ערך מינימלי ומקסימלי בכל קטע בחלוקה, בהתאמה
- על כן מתקיים $\forall i\in[n]\quad|c_i-d_i|\leq|x_i-x_{i-1}|\leq\Delta P<\delta\Rightarrow f(c_i)-f(d_i)=|M_i-m_i|<\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{b-a}$
- מכאן נקבל שמתקיים בהכרח

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(f(c_i)-f(d_i))(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<$$
$$<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}x_i-x_{i-1}\underset{sum}{\overset{telescopic}{=}}\frac{\varepsilon(b-a)}{b-a}=\varepsilon$$

- לכן f מקיימת את תנאי דרבו ועל כן אינטגרבילית ב$[a,b]$, כנדרש

7. **שיקוף דרך ציר הY**
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.
נגדיר $g:[-b,-a]\to\mathbb{R}$ ע"י $\forall x\in[-b,-a]\ g(x)=f(-x)$
אזי g אינטגרבילית ב$[-b,-a]$ ומתקיים $\int_{-b}^{-a}g(x)\,dx=\int_{a}^{b}f(x)\,dx$

8. **האינטגרל של פונקציה אי שלילית עם מקטע חיובי הוא חיובי**
תהי f אינטגרבילית ואי שלילית ב$[a,b]$, ותהא $x_0\in[a,b]$ שבה f רציפה וחיובית. אזי $\int_{a}^{b}f(x)\,dx\geq0$.
הוכחה
f רציפה, ועל כן קיימת $\delta_1>0$ שמקיימת

$$\forall x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)\ |f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}f(x_0)\iff-\frac{1}{2}f(x_0)<f(x)-f(x_0)<\frac{1}{2}f(x_0)\iff f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0\ (*)$$

f אינטגרבילית ב$[a,b]$ ועל כן אינטגרבילית בכל תת מקטע שלו. אזי עבור $\delta\in(0,\delta_1)$ מתקיים

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{x_0-\delta}f(x)\,dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\,dx+\int_{x_0+\delta}^{b}f(x)\,dx\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\,dx$$

ובפרט לכל $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ מתקיים $(*)$ ולכן מתקיים

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx =\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left(f(x) + \frac{f(x_0)}{2} - \frac{f(x_0)}{2}\right) dx \stackrel{int\,nonotone}{=}$$

$$= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) - \frac{f(x_0)}{2} dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2} dx \stackrel{(*)}{>} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x_0) > 2\delta f(x_0) > 0$$