11.3 מסקנות מהתכנסות במידה שווה של סדרות וטורי פונקציות

הגדרות

משפטים

התכנסות במ"ש משמרת רציפות

תהי $\left(f_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $I\subseteq D\subseteq\mathbb{R}$ סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש בI לפונקציה $f:I\to\mathbb{R}$, ויהי $x_{0}\in I$. **אם** f_{n}**רציפה** (מימין, משמאל), **אזי גם** f **רציפה** (מימין, משמאל)

הוכחה

יהי $x_{0}\in I$ ו$\varepsilon>0$ נתון.

מההתכנסות במ"ש קיים $N\in\mathbb{N}$ שעבורו לכל $n>N$ ולכל $x\in I$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-f\left(x_{n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. נקבע $n_{0}>N$, והרי $f_{n_{0}}$ רציפה בx_{0} ועל כן קיימת $\delta>0$ שעבורה $\left|f_{n_{0}}\left(x\right)-f_{n_{0}}\left(x_{0}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ לכל $x\in\left(x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right)$. אזי לכל x שכזה מתקיים

$$\begin{aligned}\left|f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)\right| & =\left|f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)+f_{n_{0}}\left(x\right)-f_{n_{0}}\left(x\right)+f_{n_{0}}\left(x_{0}\right)-f_{n_{0}}\left(x_{0}\right)\right|\overset{(\triangle)}{\leq}\\
 & \overset{(\triangle)}{\leq}\left|f\left(x\right)-f_{n_{0}}\left(x\right)\right|+\left|f\left(x_{0}\right)-f_{n_{0}}\left(x_{0}\right)\right|+\left|f_{n_{0}}\left(x\right)-f_{n_{0}}\left(x_{0}\right)\right|<\\
 & <3\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon
\end{aligned}$$

מסקנות

1. אם f_{n} רציפה בI לכל $n\in\mathbb{N}$ ו$\left(f_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל-f ב-I, אזי f רציפה בI.
2. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{n}$ מתכנס במ"ש בI ל-g וf_{n} רציפה ב$x_{0}\in I$ לכל $n\in\mathbb{N}$, אזי g רציפה בx_{0}.
3. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{n}$ מתכנס במ"ש בI ל-g וf_{n} רציפה בI לכל $n\in\mathbb{N}$, אזי g רציפה בI.

הערה נוכל לנסח את תוצאת המשפט בצורה הבאה:

$$\lim_{x\to x_{0}}\left(\lim_{n\to\infty}f_{n}\left(x\right)\right)=f\left(x_{0}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_{0}}f_{n}\left(x_{0}\right)\right)$$

בתנאי שf_{n} רציפה בx_{0} לכל $n\in\mathbb{N}$ והסדרה $\left(f_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לf בI.

התכנסות במ"ש משמרת חסימות

תהי $\left(f_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $I\subseteq D\subseteq\mathbb{R}$ סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש בI לפונקציה $f:I\to\mathbb{R}$. אם f_{n} חסומה בI לכל $n\in\mathbb{N}$, אזי f חסומה בI.

הוכחה

לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $0<K_{n}\in\mathbb{R}$ שעבורו $\left|f_{n}\left(x\right)\right|\leq K_{n}\quad\forall x\in I$. בפרט קיים $N\in\mathbb{N}$ שעבורו לכל $x\in I,n>N$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-f_{n}\left(x\right)\right|<1$. אזי

$$\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(x\right)-f_{N+1}\left(x\right)+f_{N+1}\left(x\right)\right|\overset{(\triangle)}{\leq}\left|f\left(x\right)-f_{N+1}\left(x\right)\right|+\left|f_{N+1}\left(x\right)\right|<1+K_{N+1}$$

אזי f חסומה בI, כנדרש.

התכנסות במ"ש משמרת אינטגרביליות

יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ ותהי $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות ב$[a,b]$ המתכנסת במ"ש ב$[a,b]$ לf. אזי

$$\tilde{F}_n\left(x\right)=\int_a^x f_n\left(t\right)dt\xrightarrow[n\to\infty]{U[a,b]}\tilde{F}\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)dt$$

הוכחה

לכל $n\in\mathbb{N}$, f_n אינטגרבילית בקטע הסגור אזי אינטגרבילית רימן ועל כן חסומה, ואינטגרבילית בפרט ב$[a,x]$ לכל $x\in[a,b]$. משימור החסימות (משפט קודם), f גם היא חסומה ב$[a,b]$ ועל כן אינטגרבילית ב$[a,b]$, כנדרש.

אינטגרציה איבר איבר

יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ ותהי $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות ב$[a,b]$, כך ש$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ מתכנס במ"ש ב$[a,b]$ ל-f. אזי f אינטגרבילית ב$[a,b]$ (התכנסות במ"ש משמרת אינטגרביליות) ומתקיים

$$\int_a^b f\left(t\right)dt=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(t\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n\left(t\right)dt$$

הוכחה מלינאריות ואדיטיביות של האינטגרל ושל הטור

גזירות לא משתמרת בהתכנסות במ"ש.

דוגמה נגדית:

נגדיר לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in I$, $f_n\left(x\right):=\begin{cases}\frac{1}{n}\sin nx & x\geq0\\ x & x<0\end{cases}$. נבחין כי f_n מתכנסת במ"ש ב$\mathbb{R}$ לf, כאשר $f\left(x\right):=\begin{cases}0 & x\geq0\\ x & x<0\end{cases}$. נבחין כי f אינה גזירה ב0, אך לכל $n\in\mathbb{N}$ $f_n'\left(0\right)=0$

גזירה של פונקציה גבולית - המקרה הפרטי (כולל הוכחה)

יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ ותהי $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות גזירות ברציפות ב$[a,b]$. נתון שקיימת $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך שg $f_n'\xrightarrow[n\to\infty]{U[a,b]}$ במ"ש ב$[a,b]$ וגם קיים $u\in[a,b]$ שעבורו $\lim\limits_{n\to\infty}f_u\left(u\right)=L\in\mathbb{R}$.

אזי קיימת $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימת:

1. f $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{U[a,b]}$ ובפרט $f\left(u\right)=L$
2. f גזירה ב$[a,b]$
3. $f'\equiv g$

הוכחה

מהנוסחה היסודית נקבל שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $\int_u^x f_n'\left(t\right)dt=f_n\left(x\right)-f_n\left(u\right)\iff f_n\left(x\right)=f_n\left(u\right)+\int_u^x f_n'\left(t\right)dt$.

והרי g $f_n'\xrightarrow[n\to\infty]{U[a,b]}$, אזי g רציפה ב$[a,b]$, ו$\int_a^b f_n'\left(t\right)dt\xrightarrow[n\to\infty]{U[a,b]}\int_a^b g\left(t\right)dt$, ועל כן $f_n\left(x\right)=f_n\left(u\right)+\int_u^x f_n'\left(t\right)dt\xrightarrow[n\to\infty]{U[a,b]}L+\int_u^x g\left(t\right)dt$.

נגדיר $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י $f\left(x\right)=L+\int_u^x g\left(t\right)dt\quad\forall x\in[a,b]$, והרי g רציפה אז מהמשפט היסודי f גזירה (2), ומקיימת , כנדרש.

גזירה של פונקציה גבולית - המקרה הכללי

יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ ותהי $\left(f_k\right)_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות גזירות ב$[a,b]$. נתון שקיימת $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימת g $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k'\xrightarrow[n\to\infty]{U[a,b]}$ ושקיים $u\in[a,b]$ שעבורו $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k\left(u\right)=L\in\mathbb{R}$.

אזי קיימת $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימת:

1. $f \xrightarrow[n\to\infty]{U[a,b]} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ ובפרט $f(u)=L$
2. f גזירה ב$[a,b]$
3. $f' \equiv g$

ללא הוכחה

גזירה איבר איבר של טורים

יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ ותהי $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות גזירות ב$[a,b]$. נתון שקיימת $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימת $g \xrightarrow[n\to\infty]{U[a,b]} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k$ ושקיים $u\in[a,b]$ שעבורו $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(u)=L\in\mathbb{R}$.

אזי קיימת $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימת:

1. $f \xrightarrow[n\to\infty]{U[a,b]} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ ובפרט $f(u)=L$
2. f גזירה ב$[a,b]$
3. $f' \equiv g$

נבחין כי

$$(3) \iff \forall x\in[a,b]$$
$$\iff \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

הוכחה מיידית מהמסקנות הקודמות

דוגמאות