טענה הקדמה ללופיטל:
יהיו $x_0 \in \mathbb{R}$, f,g פונקציות גזירות בx_0. ($\Leftarrow$ בפרט לכן f,g מוגדרות בסביבה מלאה של x_0).
אם $f(x_0)=0=g(x_0)$, ו-$g'(x_0)\neq 0$, אזי קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

הוכחה נגדיר U סביבה מנוקבת של x_0 שבה מתקיים $\frac{g(x)}{x-x_0}\neq 0 \Leftrightarrow \forall x\in U\ g(x)\neq 0$, אז מתקיים

$$\forall x\in U\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

ומאריתמטיקה של גבולות נקבל

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

משפט לופיטל (L'Hospital, L'H) בגרסת $'\frac{0}{0}'$
יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, f,g פונקציות גזירות ב$(a,b]$, המקיימות:

1. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$
2. $\forall x\in(a,b]\ g'(x)\neq 0$
3. הגבול $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב

אזי הגבול $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב גם הוא ומתקיים $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
הערה באותה מידה נוכל לעשות את זה על גבול לא חד צדדית בשילוב שתי הגבולות הנ"ל
הוכחה:

1. נגדיר $\begin{cases}\hat{f}(x)= & \begin{cases}f(x) & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases}\\ \hat{g}(x)= & \begin{cases}g(x) & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases}\end{cases}$ $\forall x\in D$. אזי $\hat{f},\hat{g}$ רציפות ב $[a,b]$ וגזירות ב-(a,b) מהתלכדותן עם f,g.

*. יהא $x\in(a,b]$. $\hat{f},\hat{g}$ מקיימות את תנאי משפט קושי ולכן קיים $c_x\in(a,x)$ המקיים

$$(*)\ \forall x_0\in(a,b)\ \frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{\hat{f}(x_0)}{\hat{g}(x_0)}\overset{(\text{א})}{=}\frac{\hat{f}(x_0)-\hat{f}(a)}{\hat{g}(x_0)-\hat{g}(a)}=\frac{\hat{f}'(c_x)}{\hat{g}'(c_x)}$$

*. מכאן נחלק למקרים:

א'. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$.

- יהא $\varepsilon>0$ נתון. אזי קיימת $\delta>0$ שעבורה מתקיים $\forall x\in(a,b]\ a<x<a+\delta\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon$
- מתקיים $a<c_x<x<a+\delta$, לכן מ-$(*)$ נקבל $\left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}-L\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\varepsilon\ \forall x\in(a,b]$ כנדרש

ב'. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$

- יהא $M>0$נתון. אזי קיימת $\delta>0$ שעבורה מתקיים $(**)\ \forall x\in(a,b]\ a<x<a+\delta\Rightarrow\frac{f'(x)}{g'(x)}>M$
- מתקיים $a<c_x<x<a+\delta$, לכן מ-$(**)$ נקבל $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}>M\Leftrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}>M\ \forall x\in(a,b]$ כנדרש

ג'. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$ נציב $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}>-M$ או שנגדיר $h=-\frac{f}{g}$

משפט לופיטל (L'Hospital, L'H) בגרסת $'\frac{*}{\infty}'$
יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, f,g פונקציות גזירות ב$(a,b]$, המקיימות:

1. $\lim\limits_{x\to a^+} g\left(x\right)=\infty$
2. $\forall x\in\left(a,b\right]\ g'\left(x\right)\neq 0$
3. הגבול $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב

אזי הגבול $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב גם הוא ומתקיים $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
הערה באותה מידה נוכל לעשות את זה על גבול לא חד צדדית בשילוב שתי הגבולות הנ"ל, **וגם על שאיפה לאינסוף**(!)
הוכחה

1. $\lim\limits_{x\to a^+} g\left(x\right)=\infty$, ולכן נניח בה"כ שמתקיים $\forall x\in\left(a,b\right]\ g\left(x\right)\neq 0$. אחרת נקטין את b.
2. יהיו $x<x_1\in\left(a,b\right]$.
3. אזי f,g גזירות ב-$\left[x,x_1\right]\subseteq\left(a,b\right]$, ומשום ש$\forall x\in\left(a,b\right]\ g\left(x\right)\neq 0$, ממשפט רול נקבל $g\left(x\right)\neq g\left(x_1\right)$. מכאן:
$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_1\right)+f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}+\frac{f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}=$$
$$=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)-g\left(x_1\right)}\left(\frac{g\left(x\right)-g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right)+\frac{f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}=$$
$$=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)-g\left(x_1\right)}\left(1-\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right)+\frac{f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}$$
4. f,g עומדות בתנאי משפט קושי, לכן קיימת $c\in\left(x,x_1\right)$ שעבורו מתקיים
$$(*)\ \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}\left(1-\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right)+\frac{f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}$$
5. מכאן נחלק למקרים:

*. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$.

- יהא $\varepsilon>0$ נתון. אזי קיימת $\delta_1>0$ שעבורה מתקיים $\forall x\in\left(a,b\right]\ a<x<a+\delta_1\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{6}$ $(\spadesuit)$
- נבחר $x_1=a+\frac{1}{2}\delta_1$. אזי מתקיים לכל $a<x<x_1$, ש-c_x מ-$(*)$ מקיימת $a<c_x<x<x_1$
- נסיק שמתקיים $\left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{6}$
- מתקיים מ-$(*)$:
$$\left(\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}-L\right)\left(1-\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right)-L\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}+\frac{f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}=$$
$$=\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}\left(1-\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right)+\frac{f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}-L+L\cancel{\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}}-L\cancel{\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}}\overset{*}{=}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-L$$
- מאי שוויון המשולש נקבל
$$(\triangle)\ \left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-L\right|\overset{*}{=}\left|\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}-L\right|\left(1+\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right)+\left|L\right|\left|\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right|+\left|\frac{f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right|$$
- $\lim\limits_{x\to a^+} g\left(x\right)=\infty$, לכן נסיק שקיימת $\delta_2>0$ שעבורה לכל $x\in\left(a,a+\delta_2\right)$ מתקיים
$$(1) g\left(x\right)>\frac{3}{\varepsilon}\left|f\left(x_1\right)\right|$$
$$(2)\bigwedge g\left(x\right)>\frac{3}{\varepsilon}\left|L\right|\left|g\left(x_1\right)\right|$$
$$(3)\bigwedge g\left(x\right)>\left|g\left(x_1\right)\right|$$

• אזי עבור $\delta=\min\left(\delta_1,\delta_2\right)$ נקבל שמתקיים

$$\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-L\right|\overset{\triangle}{=}\left|\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}-L\right|\left(1+\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right)+\left|L\right|\left|\frac{g\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right|+\left|\frac{f\left(x_1\right)}{g\left(x\right)}\right|<$$
$$\overset{(\spadesuit)}{<}\frac{\varepsilon}{6}\left(1+\overset{(3)}{\left|\frac{g\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|}\right)+\overset{(2)}{\frac{\left|L\right|\left|g\left(x_1\right)\right|}{\frac{3}{\varepsilon}\left|L\right|\left|g\left(x_1\right)\right|}}+\overset{(1)}{\left|\frac{f\left(x_1\right)}{\frac{3}{\varepsilon}\left|f\left(x_1\right)\right|}\right|}=$$
$$=\frac{2\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\blacksquare$$

*. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ - נהפוך את האי שוויונים ביחס ל$M>0$ נתון באותה הצורה

*. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$ נציב $-M$ $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}>-M$ או שנגדיר $h=-\frac{f}{g}$

משפט לופיטל (L'Hospital, L'H) בגרסת $'\frac{\infty}{\infty}$, $\left(x\to\infty\right)'$ יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a<b$, f,g פונקציות גזירות בקרן $[c,\infty)$, המקיימות:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}g\left(x\right)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=\infty$
2. $\forall x\in\left[c,\infty\right)\ g'\left(x\right)\neq0$
3. הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב

אזי הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב גם הוא ומתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

הערה באותה מידה נוכל לעשות את זה על גבול לא חד צדדית בשילוב שתי הגבולות הנ"ל

משפט לופיטל (L'Hospital, L'H) בגרסת $'\frac{0}{0}$, $\left(x\to\infty\right)'$ יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a<b$, f,g פונקציות גזירות בקרן $[c,\infty)$, המקיימות:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}g\left(x\right)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=0$
2. $\forall x\in\left[c,\infty\right)\ g'\left(x\right)\neq0$
3. הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב

אזי הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב גם הוא ומתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

הערה באותה מידה נוכל לעשות את זה על גבול לא חד צדדית בשילוב שתי הגבולות הנ"ל

הוכחות של גרסאות $x\to\infty$ זהות, רק שנציב $\lim\limits_{u\to0^+}f\left(\frac{1}{u}\right)=\lim\limits_{u\to0^+}\bar{f}\left(u\right)=\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)\Leftrightarrow x=\frac{1}{u}$, $\bar{f}\left(u\right)=f\left(\frac{1}{u}\right)$ על הקטע $\left(0,\frac{1}{b}\right)$