10.2 שינוי סדר

הגדרות

1. תמורה על הטבעיים

היא פונקציה חח"ע ועל $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

2. שינוי סדר

נאמר כי $\sum\limits_n b_n$ הוא **שינוי סדר של** $\sum\limits_n a_n$ אם"ם קיימת תמורה על הטבעיים $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך שמתקיים $\forall n\in\mathbb{N}\, b_n=a_{\sigma(n)}$

משפטים

1. תמורה על איברי טור א"ש מתכנס לא פוגעת בהתכנסותו

יהי $\sum\limits_n a_n$ טור אי שלילי מתכנס

אם הטור $\sum\limits_n b_n$ הוא שינוי סדר של $\sum\limits_n a_n$, אזי $\sum\limits_n b_n$ מתכנס ובפרט לאותו הסכום

הוכחה נגדיר S_k, T_k סס"חים של $\sum\limits_n a_n, \sum\limits_n b_n$ בהתאמה. משינוי הסדר, מתקיים $\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ומכאן נובע $\{T_k \mid k\in\mathbb{N}\}=:$

בנוסף, $\sum\limits_n a_n$ אי שלילית ועל כן גם $\sum\limits_n b_n$, ובפרט S_k מונוטונית עולה.

כלומר S_k מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, אזי מתכנסת ל- $\lim\limits_{k\to\infty} S_k=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\sup\{S_k \mid k\in\mathbb{N}\}$

בהינתן $k\in\mathbb{N}$, נסמן $q_k=\max\{\sigma(i) \mid i\in[k]\}$.

אזי ממונוטוניות S_k ואי שליליות b_n מתקיים $\forall k\in\mathbb{N}\, T_k=\sum\limits_{n=1}^{k} b_n=\sum\limits_{n=1}^{k} a_{\sigma(n)}\le\sum\limits_{n=1}^{q_k}=S_{q_k}\le\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ כלומר T_k חסומה ע"י $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

בנוסף כמו שאמרנו, היא מונוטונית עולה ולכן מתכנסת, וגבולה $\lim\limits_{k\to\infty} T_k\le\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

נשים לב שמשום ש σ חח"ע ועל, קיימת הפונקציה ההפוכה σ^{-1}, אז $\sum\limits_n a_n$ שינוי סדר של $\sum\limits_n b_n$ ומאותם הנסיבות מתקיים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\lim\limits_{k\to\infty} S_k\le\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

מטריכוטמיה נקבל שוויון בין הסכומים, כנדרש.

2. תמורה על איברי טור מתכנס בהחלט לא פוגעת בהתכנסותו

אם הטור $\sum\limits_n a_n$ מתכנס בהחלט, אז כל שינוי סדר שלו מתכנס לאותו גבול ובפרט ולמעשה מתכנס בהחלט.

הוכחה נסתכל על $\sum\limits_n |a_n|, \sum\limits_n |b_n|$, אזי אלו טורים אי שליליים ומשפט 1 תקף גם כאן, כנדרש.

3. משפט רימן

יהי $\sum\limits_n a_n$ טור המתכנס בתנאי. אזי מתקיים:

1. לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ קיים שינוי סדר של הטור $\sum\limits_n a_n$ המתכנס לλ.
2. קיים שינוי סדר המתבדר ל∞ (וכן ל$-\infty$)
3. קיים שינוי סדר המתבדר במובן הרחב (כלומר לא ל-∞ או ל-$-\infty$)