3.1.8 רציפות בקטע פתוח + גבולות בקצוות $\Leftarrow$ רבמש בקטע

יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל (a,b). אזי f רמב"ש ב(a,b) אס"ם קיימים במובן הצר הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\,,\,\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$.

הוכחה ראשית נשים לב שזוהי גרסה למשפט קנטור על קטע פתוח.

- $\Rightarrow$ נניח שהגבולות קיימים.
  - נגדיר $\hat{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$, כך ש $\forall x\in[a,b]\ \hat{f}(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x) & x=a\\ f(x) & x\in(a,b)\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x) & x=b\end{cases}$.
    - ממשפט קנטור $\hat{f}$ רבמש ב$[a,b]$ ובפרט לכן רבמש ב-(a,b) משום ש$(a,b)\subseteq[a,b]$
    - $\hat{f},f$ מתלכדות ב(a,b), לכן f רבמ"ש ב(a,b)
- $\Leftarrow$ נניח ש-f רבמש ב(a,b).

  נשים לב להערה בהוכחה על קושי, אזי לכל ε נתאים δ בהגדרת רבמש, אזי תנאי קושי מתקיים ולכן יש גבולות ב$\{a,b\}$.

מסקנה(!) הפונקציה הרציפה $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ רבמ"ש בקטע הפתוח (a,b)אס"ם קיימת לה הרחבה רציפה לקטע הסגור $[a,b]$