9.3.3 טורי ומשפט לייבניץ

הגדרות

1. טור לייבניץ

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת, אי שלילית ואפסה, אז הטור המתחלף $\sum\limits_n (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ יקרא **טור לייבניץ**.

הערות

- גם הטור $\sum\limits_n (-1)^n a_n$ הוא טור לייבניץ
- משום שa_n אי שלילית ומונוטונית יורדת, אם $a_N = 0$ עבור $N \in \mathbb{N}$ כלשהו, אז היא 0 כמעט תמיד. לכן נתמקד בסדרות חיוביות ולא רק אי שליליות.

משפטים

1. משפט לייבניץ לטורים מתחלפים

יהי $\sum\limits_n (-1)^{n+1} a_n$ טור לייבניץ. אזי:

1. הטור $\sum\limits_n (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס
2. נסמן $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = L \in \mathbb{R}$. אזי $0 \leq a_1 - a_2 \leq L \leq a_1$
3. יהי $N \in \mathbb{N}$. נגדיר $r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ סכום טור ה-N זנב של $\sum\limits_n (-1)^{n+1} a_n$. אזי $|r_N| \leq a_{N+1}$

הוכחה

1. נגדיר $\forall n \in \mathbb{N}\, b_n = (-1)^{n+1} a_n$, ונגדיר את הסס"ח $(S_k)_{k=1}^{\infty}$, ונסתכל על תתי הסדרות S_{2k-1}, S_{2k}:

$$S_{2(k+1)} - S_{2k} = (-1)^{2k+2} a_{2k+2} + (-1)^{2k+1} a_{2k+1} + \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} a_n = a_{2k+2} - a_{2k+1} \underset{decreaseing}{\overset{monotonic}{\geq}} 0$$

$$S_{2(k+1)-1} - S_{2k-1} = (-1)^{2k+1} a_{2k+1} + (-1)^{2k} a_{2k} + \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} a_n = a_{2k} - a_{2k+1} \underset{decreaseing}{\overset{monotonic}{\leq}} 0$$

כלומר S_{2k} מונוטונית עולה וS_{2k-1} מונוטונית יורדת
בנוסף נשים לב שמתקיים

$$\forall k \in \mathbb{N}\, S_{2k} = S_{2k-1} + b_{2k} = S_{2k-1} + (-1)^{2k+1} a_{2k} \overset{(a_{2k} \geq 0)}{\leq} S_{2k-1}$$

ולכן סדרת הקטעים $([S_{2k}, S_{2k-1}])_{k=1}^{\infty}$ מקיימת את הלמה של קנטור, ובנוסף מכך מתקיים

$$\forall k \in \mathbb{N}\, S_{2k-1} - S_{2k} = S_{2k-1} - (S_{2k-1} + b_{2k}) = a_{2k} \iff \lim_{k \to \infty} (S_{2k-1} - S_{2k}) = 0$$

אזי מהלמה של קנטור נקבל שמתקיים $\lim\limits_{k \to \infty} S_{2k-1} = L = \lim\limits_{k \to \infty} S_{2k}$, ומשום ש$\{S_{2k-1} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{S_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{S_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, מתקיים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = L$ כנדרש.

2. מהלמה של קנטור, נקבל שמתקיים $L = \sup\{S_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$, אזי ממשפט החסם העליון $L \geq S_2 = a_1 - a_2 \geq 0$.
באותו אופן $L = \inf\{S_{2k-1} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ולכן ממשפט החסם התחתון $L \leq S_1 = a_1$
כלומר קיבלנו $0 \leq a_1 - a_2 \leq L \leq a_1$ כנדרש.

3. ממשפט על טורים מתכנסים, נקבל שטור ה-N זנב של b_n מתכנס גם הוא, ומתקיים

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = (-1)^N \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_{n+N}$$

והרי סדרת הזנב a_{n+N} אפסה, אי שלילית ומונוטונית יורדת גם היא ממשפט הירושה. לכן $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_{n+N}$ טור לייבניץ.

אזי מסעיף 2 נקבל שמתקיים $0 \le \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_{n+N} \le a_{N+1} \quad (*)$.

- לכן אם N זוגי, מתקיים $r_N = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_{n+N}$ ולכן $0 \le r_N \le a_{N+1}$
- אחרת אם N אי זוגי, מתקיים $r_N = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_{n+N}$ ולכן $0 \le -r_N \le a_{N+1}$

ובכל מקרה נקבל $|r_N| \le a_{N+1}$ כנדרש.