10.1 אסוציאטיביות בטורים (הוספה ופתיחת סוגריים לטור)

הגדרות

1. הכנסת סוגריים לטור

נאמר שהטור $\sum\limits_k b_k$ **מתקבל מהטור** $\sum\limits_n a_n$ **על ידי הכנסת סוגריים** כאשר קיימת סדרת אינדקסים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים כך שלכל $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \sum\limits_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_n = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}$, עם המוסכמה $n_0 = 0$ להגדרת b_1.

משפטים

1. הסס"ח של b_k הוא תת סדרה של הסס"ח של a_n

יהי $\sum\limits_k b_k$ טור המתקבל מ-$\sum\limits_n a_n$-ע"י הכנסת סוגריים במקומות ה$(n_k)_{k=0}^{\infty}$, ויהיו $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, $T_k = \sum\limits_{j=1}^{k} b_j$ סס"חים של $\sum\limits_n a_n$ ו-$\sum\limits_k b_k$בהתאמה.

אזי $T_n = S_{n_k}$ לכל $k \in \mathbb{N}$, כלומר T_k תת סדרה של S_n.

הוכחה נשים לב שמתקיים לכל $k \in \mathbb{N}$

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} b_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} a_n \right) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + \left(a_{n_{j-1}+1} + \cdots + a_{n_j}\right) =$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2} + \cdots + a_{n_{j-1}+1} + \cdots + a_{n_j} = S_{n_k}$$

כאשר המעבר בין השורות הוא פתיחת סוגריים בחיבור, מאסוציאטיביות סכומים סופיים מעל $\mathbb{R}$, כנדרש.

2. משפטי הירושה לטורים המתקבלים על ידי הכנסת סוגריים

יהי $\sum\limits_k b_k$ טור המתקבל מ-$\sum\limits_n a_n$-ע"י הכנסת סוגריים. אזי מתקיים:

1. אם $\sum\limits_n a_n$ מתכנס ל-$S \in \mathbb{R}$, אזי $\sum\limits_k b_k$ מתכנס וסכומו S
2. אם $\sum\limits_n a_n$ מתבדר ל∞ (ל$-\infty$), אזי $\sum\limits_k b_k$ מתבדר ל∞ (ל$-\infty$)

הוכחה לפי המשפט הקודם על S_n, T_k הסס"חים של הסדרות הנ"ל, $\sum\limits_k b_k$ תת סדרה של $\sum\limits_n a_n$ המתכנסת ל$S \in \mathbb{R}$.

אזי ממשפט הירושה בסדרות, כל תת סדרה של סדרה מתכנסת תתכנס לאותו הגבול. ולכן 1 מתקיים, ונציין ש-2 נובע מאותו משפט על גבולות במובן הרחב, כנדרש.

3. טור חסום מתכנס אם"ם כל טור מתכנס המתקבל על ידי הכנסת סוגריים מתכנס לאותו $S \in \mathbb{R}$.

הטור החסום $\sum\limits_n a_n$ מתכנס אם"ם קיים $S \in \mathbb{R}$ כך שכל טור **מתכנס** המתקבל מהכנסת סוגריים לטור, מתכנס ל-S

הוכחה לפי משפט 1, טענה זו שקולה לטענה על גבולות חלקיים בסדרות - הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל$S \in \mathbb{R}$ אם"ם קבוצת כל הגבולות החלקיים שלה מקיימת $S_a = \{S\}$.

4. אם טור המתקבל מהכנסת סוגריים לטור אי שלילי מתכנס, הטור המקורי מתכנס גם הוא לאותו הגבול

יהי $\sum\limits_k b_k$ טור **מתכנס** המתקבל ע"י הכנסת סוגריים בטור האי שלילי $\sum\limits_n a_n$. אזי $\sum\limits_n a_n$ מתכנס גם הוא ולאותו הגבול (אינפי 1)

הוכחה $\sum\limits_n a_n$ אי שלילי, לכן S_k מונוטונית עולה ואי שלילית.

לפי משפט 1, טענה זו שקולה לטענה הנ"ח: סדרה מונוטונית עולה עם תת סדרה מתכנסת, מתכנסת גם היא ולאותו הגבול (אינפי 1)

5. הכנסת סוגריים כך שכל המחוברים בתוכן שווי סימן

יהי $\sum\limits_k b_k$ טור **מתכנס** המתקבל מ-$\sum\limits_n a_n$ע"י הכנסת סוגריים במקומות ה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$

אם עבור כל $k\in\mathbb{N}$, כל מחובריי b_k בעלי אותו סימן, אזי $\sum\limits_n a_n$ מתכנס ולאותו הגבול

הוכחה נגדיר סס"חים $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, $T_k=\sum\limits_{j=1}^{k} b_j$. אזי $\forall k\in\mathbb{N}\, T_k=S_{n_k}$. נתון שקיים $\lim\limits_{k\to\infty} T_k=\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}=L\in\mathbb{R}$.

לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $k\in\mathbb{N}$ יחיד המקיים $n_{k-1}<n\le n_k$, ולכן מתקיים $\begin{cases} S_{n_{k-1}}\le S_n\le S_{n_k} & b_k\ge 0\\ S_{n_k}\le S_n\le S_{n_{k-1}} & b_k\le 0\end{cases}$.

והרי $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_{k-1}}=L$, אזי ממשפט הכריך $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=L=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, כנדרש.

6. הכנסת אפסים (מסקנה מהכנסת סוגריים שווי סימן)

יהי $\sum\limits_k c_k$ טור כלשהו ו$(m_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים מונוטונית עולה ממש. נגדיר $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $\forall n\in\mathbb{N}\, d_n=\begin{cases} c_k & n\in\{m_k\mid k\in\mathbb{N}\}\\ 0 & n\notin\{m_k\mid k\in\mathbb{N}\}\end{cases}$.

אזי הטור $\sum\limits_n d_n$ מתכנס אם"ם הטור $\sum\limits_k c_k$

במקרה זה שניהם מתכנסים לאותו הסכום.

הוכחה נראה ש$\sum\limits_k c_k$מתקבל מהטור $\sum\limits_n d_n$ ע"י הכנסת סוגריים:

נגדיר $m_0=0$ ונקבל שמתקיים $\forall k\in\mathbb{N}\, c_k=d_{m_k}=\sum\limits_{n=m_{k-1}+1}^{m_k} d_n=0+\cdots 0+d_{m_k}$, ולכן $\sum\limits_k c_k$מתקבל מהטור $\sum\limits_n d_n$ ע"י הכנסת סוגריים במקומות ה$(m_k)_{k=0}^{\infty}$, ולכן המשפט הקודם על הכנסת סוגריים כך שכל המחוברים שווי סימן תקף גם פה, כנדרש.

7. הוספת סוגריים באורך חסום

יהי $\sum\limits_k b_k$ טור **מתכנס** המתקבל מ-$\sum\limits_n a_n$ע"י הכנסת סוגריים במקומות ה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$

נניח שקיים $M\in\mathbb{N}$ כל שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $n_k-n_{k-1}\le M$.

אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, אזי $\sum\limits_k b_k$ מתכנס אם ורק אם $\sum\limits_n a_n$ מתכנס, והם מתכנסים לאותו הגבול.

הוכחה $\Leftarrow$ נובע ישירות ממשפטי הירושה.

$\Rightarrow$ נגדיר סס"חים $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, $T_k=\sum\limits_{j=1}^{k} b_j$.

אזי $\lim\limits_{k\to\infty} T_k=\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}=L\in\mathbb{R}$ עבור L כלשהו.

יהא $\varepsilon>0$ נתון

אזי קיים $K\in\mathbb{N}$ כך שלכל $k>K$ מתקיים $|S_{n_k}-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ $(\spadesuit)$, וקיים $J\in\mathbb{N}$ שעבורו לכל $j>J$ מתקיים $|a_j|\le\frac{\varepsilon}{2M}$ $(\clubsuit)$

נגדיר $N=\max\{J,n_K\}$. לכן לכל $n>N$ קיים $k_0\in\mathbb{N}$ המקיים $n_{k_0-1}<n\le n_{k_0}$

ולכן מתקיים $S_{n_{k_0}}\le\sum\limits_{j=n+1}^{n_{k_0}} - S_{n_{k_0}}=S_n$, ובנוסף $M\ge n_{k_0}-n_{k_0-1}>n_{k_0}-n$ $(*)$ מחסימות אורך הסוגריים.

לכן נקבל שמתקיים

$$|S_n-L|=\left|\left(S_{n_{k_0}}-\sum_{j=n+1}^{n_{k_0}} a_j\right)-L\right|\overset{(\triangle)}{\le}\left|S_{n_{k_0}}-L\right|+\sum_{j=n+1}^{n_{k_0}}|a_j|\overset{(\spadesuit)(\clubsuit)}{<}\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{j=n+1}^{n_{k_0}}\frac{\varepsilon}{2M}=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2M}\cdot\sum_{j=n+1}^{n_{k_0}}1=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2M}\cdot(n_{k_0}-n)\overset{(*)}{<}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2M}<\frac{\varepsilon}{2}+M=\varepsilon$$