9.3.2 התכנסות בתנאי של טורים כלליים

הגדרות

טור מתכנס בתנאי

נאמר ש**הטור** $\sum\limits_n a_n$ **מתכנס בתנאי** אס"ם הטור $\sum\limits_n a_n$ מתכנס והטור $\sum\limits_n |a_n|$ איננו מתכנס

5. סימון: x^+, x^- בהינתן $x \in \mathbb{R}$ נסמן

$$\begin{cases} x^- = & \frac{|x|-x}{2} = \max\{-x, 0\} \geq 0 \\ x^+ = & \frac{|x|+x}{2} = \max\{x, 0\} \end{cases}$$

אזי מתקיים $x = x^+ - x^-$ וגם $|x| = x^+ + x^-$

משפטים

1. פירוק להפרש אי־שליליים של טור מתכנס בתנאי

אם $\sum\limits_n a_n$ מתכנס בתנאי, $\sum\limits_n a_n^+ = \infty \bigwedge \sum\limits_n a_n^- = \infty$.

הוכחה משום שהטור $\sum\limits_n a_n$ מתכנס בתנאי, הטור $\sum\limits_n |a_n| = \sum\limits_n a_n^+ + \sum\limits_n a_n^-$ מתבדר, אזי אחד הטורים לפחות יהיה חייב להתבדר. נניח בשלילה שאחד הטורים (נניח בה"כ $\sum\limits_n a_n^-$) מתכנס. מתקיים $\sum\limits_n a_n = \sum\limits_n a_n^+ - \sum\limits_n a_n^-$. אזי אם $\sum\limits_n a_n^+$ מתכנס נקבל מאריתמטיקה של גבולות ש $\sum\limits_n a_n^-$ מתכנס גם הוא בסתירה. לכן מתקיים הנדרש.

2. משפט רימן יהי $\sum\limits_n a_n$ טור המתכנס בתנאי. אזי:

א) לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ קיים שינוי סדר של הטור $\sum\limits_n a_n$ המתכנס לλ.

ב) קיימים (לפחות אחד מכל סוג) שינויי סדר של הטור $\sum\limits_n a_n$ כך שאחד מתבדר ל∞ והשני ל$-\infty$

ג) קיים שינוי סדר של הטור $\sum\limits_n a_n$ המתבדר במובן הרחב (כלומר אין לו גבול ממשי, גם במובן הרחב)

הוכחה לא תועבר, אך היא מסתמכת על משפט 1.