סכומי דרבו

הגדרות

חלוקה יהיו $a < b \in \mathbb{R}$. חלוקה של הקטע $[a,b]$היא קבוצה סופית $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ שבה מתקיים $x_{i-1} < x_i$ $\forall i \in [|P|]$, חייב להתקיים $a, b \in P$

הערה $P = \{a, b\}$ נקראת החלוקה הטריוויאלית

קוטר של חלוקה קוטר\פרמטר של חלוקה $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ נתונה הוא $\Delta(P) \overset{def}{=} \max\{x_i - x_{i-1} \mid i \in [n]\}$.

עידון של חלוקה יהיו $a < b \in \mathbb{R}$ וP, Q חלוקות של $[a,b]$. אם $P \subseteq Q$ נאמר ש P עידון של Q.

עידון משותף יהיו $a < b \in \mathbb{R}$ וP, Q חלוקות של $[a,b]$, אזי $P \cup Q$ הוא העידון המשותף של P, Q.

הערה $P \subseteq Q \Rightarrow \Delta P \geq \Delta Q$, כלומר קוטר העידון תמיד $\leq$ קוטר החלוקה המקורית

M, m, M_i, m_i תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה, ותהי $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ חלוקה של $[a,b]$. לכל $i \in [n]$ נסמן:

$$\begin{cases} M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), & M = \sup Im(f) \\ m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), & m = \inf Im(f) \end{cases}$$

סכומי דרבו תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה, ותהי $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ חלוקה של $[a,b]$.

נגדיר את סכום דרבו עליון ותחתון של f ביחס לחלוקה P:
$$\begin{cases} U(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) & Upper \\ L(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) & Lower \end{cases}$$

תנודה תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

התנודה של f **ב-**$[a,b]$ היא $\omega_f([a,b]) \overset{def}{=} M - m$

התנודה של f **ביחס לחלוקה** P היא $\omega(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1})$

$\mathcal{L}, \mathcal{U}$ תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה, ותהי $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ חלוקה של $[a,b]$. נסמן:

$$\begin{cases} \mathcal{U} \overset{def}{=} \{U(f,P) \mid P\, is\, a\, division\, of\ [a,b]\} \\ \mathcal{L} \overset{def}{=} \{L(f,P) \mid P\, is\, a\, division\, of\ [a,b]\} \end{cases}$$

אינטגרל תחתון ועליון תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה, ותהי $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ חלוקה של $[a,b]$. אזי האינטגרל העליון (למעלה) והתחתון (למטה) של f ב-$[a,b]$ הוא:
$$\begin{cases} \int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx \overset{def}{=} \inf \mathcal{U} & Upper \\ \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \overset{def}{=} \sup \mathcal{L} & Lower \end{cases}$$

משפטים

חסמים של סכומי דרבו בהינתן $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה, $P \subseteq Q$ חלוקות של $[a,b]$, כאשר $|Q \backslash P| = k \in \mathbb{N}$ מתקיים $L(f,P) \le L(f,Q) \le U(f,Q) \le U(f,P)$, וגם $0 \le U(f,P) - U(f,Q) \le k\omega_f \Delta(P)$

ומעבר לכך מתקיים לכל P : $m(b-a) \le L(f,P) \le U(f,P) \le M(b-a)$

למת החתכים עבור סכומי דרבו תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה. אזי הבאים שקולים:

$\Longleftrightarrow$ קיים $c \in \mathbb{R}$ יחיד שלכל שתי חלוקות P_1, P_2 של $[a,b]$ מתקיים $L(f,P_1) \le c \le U(f,P_2)$

$\Longleftrightarrow$ f אינטגרבילית ב$[a,b]$

$\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיימות 2 חלוקות P_1, P_2 של $[a,b]$ שעבורן מתקיים $U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon$