10.2 שינוי סדר

הגדרות

1. תמורה על הטבעיים

היא פונקציה חח"ע ועל $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

2. שינוי סדר

נאמר כי $\sum_n b_n$ הוא **שינוי סדר של** $\sum_n a_n$ אם"ם קיימת תמורה על הטבעיים $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך שמתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\, b_n = a_{\sigma(n)}$

משפטים

1. תמורה על איברי טור א"ש מתכנס לא פוגעת בהתכנסותו

יהי $\sum_n a_n$טור אי שלילי מתכנס

אם הטור $\sum_n b_n$ הוא שינוי סדר של $\sum_n a_n$, אזי $\sum_n b_n$מתכנס ובפרט לאותו הסכום

הוכחה

נגדיר S_k, T_k סס"חים של $\sum_n a_n, \sum_n b_n$, בהתאמה. משינוי הסדר, מתקיים $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ומכאן נובע $\{T_k \mid k \in \mathbb{N}\} =$.

בנוסף, $\sum_n a_n$אי שלילית ועל כן גם $\sum_n b_n$, ובפרט S_k מונוטונית עולה.

כלומר S_kמונטונית עולה וחסומה מלעיל, אזי מתכנסת ל- $\lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{S_k \mid k \in \mathbb{N}\}$

בהינתן $k \in \mathbb{N}$, נסמן $q_k = \max\{\sigma(i) \mid i \in [k]\}$.

אזי ממונוטוניות S_k ואי שליליות b_n מתקיים $\forall k \in \mathbb{N}\, T_k = \sum_{n=1}^{k} b_n = \sum_{n=1}^{k} a_{\sigma(n)} \le \sum_{n=1}^{q_k} = S_{q_k} \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כלומר T_kחסומה ע"י $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

בנוסף כמו שאמרנו, היא מונוטונית עולה ולכן מתכנסת, וגבולה $\lim_{k\to\infty} T_k \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

נשים לב שמשום שσ חח"ע ועל, קיימת הפונקציה ההפוכה σ^{-1}, אז $\sum_n a_n$ שינוי סדר של $\sum_n b_n$ ומאותם הנסיבות מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

מטריכוטמיה נקבל שוויון בין הסכומים, כנדרש.

2. תמורה על איברי טור מתכנס בהחלט לא פוגעת בהתכנסותו

אם הטור $\sum_n a_n$מתכנס בהחלט, אז כל שינוי סדר שלו מתכנס לאותו גבול ובפרט ולמעשה מתכנס בהחלט.

הוכחה

נסתכל על $\sum_n |a_n|, \sum_n |b_n|$, אזי אלו טורים אי שליליים ומשפט 1 תקף גם כאן, כנדרש.

3. משפט רימן

יהי $\sum_n a_n$ טור המתכנס בתנאי. אזי מתקיים:

1. לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ קיים שינוי סדר של הטור $\sum_n a_n$ המתכנס לλ.
2. קיים שינוי סדר המתבדר ל∞ (וכן ל$-\infty$)
3. קיים שינוי סדר המתבדר במובן הרחב (כלומר לא ל-∞ או ל-$-\infty$)

הוכחה לא תועבר השנה ☺