7.2 פונקציית רימן ואינטגרציה בחלקים

פונקציית רימן

הגדרה

פונקציית רימן $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x\in\mathbb{Q},\ x=\frac{p}{q},p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\end{cases}$

תכונות

1. **הערה:**
   א) $f(0)=f\left(\frac{0}{1}\right)=\frac{1}{1}=1$
   ב) $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=f(x+1)$
2. פונקציית רימן **איננה רציפה** באף $x_0\in\mathbb{Q}$, ורציפה לכל $x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
3. $\forall x_0\in\mathbb{R}\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$
4. פונקציית רימן אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$, ומתקיים $\int\limits_a^b f(t)\,dt=0$

שיטות אינטגרציה

אינטגרציה בחלקים

יהיו u,v פונקציות גזירות ב$[a,b]$, כך שu',v' אינטגרביליות ב$[a,b]$.
אזי $u\cdot v',u'\cdot v$ אינטגרביליות גם הן ב-$[a,b]$ ומתקיים

$$\int\limits_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)|_a^b-\int\limits_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

אינטגרציה בהצבה

תהיינה הפונקציות f,F,φ המקיימות: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב-$[a,b]$, F פונקציה קדומה של f ב$[a,b]$, $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ גזירה כך שφ' אינטגרבילית ב$[\alpha,\beta]$.
אזי מתקיים

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,du=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=(F\circ\varphi)(x)|_\alpha^\beta$$