9.2 טורים אי-שליליים והתכנסותם

הגדרות

הטור $\sum_n a_n$ יקרא **אי שלילי** (חיובי) אם"ם מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\, a_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}\, a_n > 0)$

משפטים על טורים א"ש

1. סדרת הסכומים החלקיים של טור א"ש מונוטונית עולה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה ותהי $(S_k)_{k=1}^{\infty}$סדרת הסכומים החלקיים שלה.

1. אם $\sum_n a_n$ אי שלילי, אזי $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה
2. אם $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה, אזי $\sum_n a_{n+1}$ טור ה-1זנב של a_n אי שלילי.

הוכחה נובע ישירות מכך שמתקיים $\forall k \in \mathbb{N}\, S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$

2. טור א"ש מתכנס אם"ם סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה

$\Leftarrow$ אם הטור א"ש ומתכנס, אזי סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת, ובפרט לכן חסומה

$\Rightarrow$ הטור אי שלילי ולכן ממשפט 1 S_k מונוטונית עולה, ומשום שהיא חסומה היא בפרט מתכנסת, לכן הטור מתכנס.

מבחני התכנסות לטורים א"ש

1. מבחן ההשוואה

יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$סדרות המקיימות $\forall N \in \mathbb{N}\, 0 \leq a_n \leq b_n$
אזי אם $\sum_n b_n$ מתכנס, גם $\sum_n a_n$ מתכנס ומתקיים $\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$.

הוכחה נגדיר סדרות סכומים חלקיים $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n, T_k = \sum_{n=1}^{k} b_n \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

S_k, T_k סס"ח של סדרות אי שליליות ולכן מונוטוניות עולות, ובנוסף אי שליליות, כלומר $\forall k \in \mathbb{N}\, 0 \leq S_k \leq T_k$

אזי אם$\sum_n b_n$מתכנס, מתקיים $\lim_{k\to\infty} T_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$, ולכן מתקיים $\forall k \in \mathbb{N}\, 0 \leq S_k \leq L$, כלומר S_k חסומה

ממשפט על התכנסות טורים אי שליליים שהוכח בהרצאה, טור א"ש מתכנס אם"ם הסס"ח שלו חסומה, ועל כן $\sum_n a_n$ מתכנס ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ כנדרש.

2.מבחן ההשוואה כמעט תמיד

יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המקיימות $0 \leq a_n \leq b_n$ כמעט תמיד
אזי אם $\sum_n b_n$ מתכנס, גם $\sum_n a_n$ מתכנס ומתקיים $\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$.

הוכחה מהנתון נסיק שקיים $N \in \mathbb{N}$ שמקיים $\forall n > N\, 0 \leq a_n \leq b_n$.

נגדיר סדרות סכומים חלקיים $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n, T_k = \sum_{n=1}^{k} b_n \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

אם $\sum_n b_n$ מתכנס, גם ה-N זנב שלנו $\sum_n b_{n+N}$ מתכנס, אזי ממבחן השוואה $\sum_n a_{n+N}$ מתכנס וזה מתקיים אם"ם $\sum_n a_n$ מתכנס, כנדרש.

3. מבחן ההשוואה באמצעות מנה

יהיו $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ טורים **אי שליליים** כך ש$b_n \neq 0$ כמעט תמיד.

אם קיימים $0 < u, v \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $u \leq \frac{a_n}{b_n} \leq v$ כמעט תמיד, אזי $\sum_n a_n$ מתכנס אם"ם $\sum_n b_n$ מתכנס.

הוכחה מההנחה נסיק שמתקיים כמעט תמיד $0 < u \cdot b_n \leq a_n \leq v \cdot b_n$.
אזי נוכיח את $\Leftarrow$ ממבחן ההשוואה + אריתמטיקה של טורים על אי השוויון $0 < a_n \leq v \cdot b_n$
ואת $\Rightarrow$ ממבחן ההשוואה + אריתמטיקה של טורים על אי השוויון $0 < u \cdot b_n \leq a_n$

4. מבחן ההשוואה הגבולי

יהיו $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ טורים **אי שליליים** כך ש$b_n \neq 0$ כמעט תמיד.

אם קיים $0 < L \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, אזי $\sum_n a_n$ מתכנס אם"ם $\sum_n b_n$ מתכנס.

הוכחה אם הגבול קיים, קיים $N \in \mathbb{N}$ שעבורו $\forall n \in \mathbb{N}\, 0 < \frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3L}{2}$ ולכן מתקיימים תנאי מבחן ההשוואה באמצעות מנה.

5. מבחן ההשוואה באמצעות מנות של עוקבים

יהיו $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ טורים **אי שליליים** כך ש$a_n, b_n \neq 0$ כמעט תמיד.

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ כמעט תמיד ו$\sum_n b_n$ מתכנס, אזי $\sum_n a_n$ מתכנס

הוכחה יהא $N \in \mathbb{N}$ שעבורו מתקיים הנתון לכל $n > N$.
נראה באינדוקציה שמתקיים $\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{a_{N+k}}{a_{N+1}} \leq \frac{b_{N+k}}{b_{N+1}}$
מכאן נקבל $\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{b_{N+1}}{a_{N+1}} \leq \frac{b_{N+k}}{a_{N+k}}$
ואז נגדיר $v := \frac{b_{N+1}}{a_{N+1}}$ ולכן ממבחן ההשוואה באמצעות מנה מתקיים הנ"ל כנדרש.

6. מבחן ד'למבר

יהי $\sum_n a_n$ טור אי שלילי כך ש$a_n \neq 0$ כמעט תמיד.

1. אם קיים $q \in (0,1)$ כך ש$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ כמעט תמיד, $\sum_n a_n$ מתכנס
2. אם קיים $q \geq 1$ כך ש $q \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ כמעט תמיד, $\sum_n a_n$ מתבדר

הוכחה

1. נסמן $\forall n \in \mathbb{N}\, b_n = q^n$. אזי b_n מקיים $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ וגם $\forall n \in \mathbb{N}\, b_n \neq 0$
לכן מתקיים כמעט תמיד $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \frac{q^n}{q^{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
בנוסף הוכחנו שטור סדרה הנדסית שקבוע הכפל בה מקיים $q \in (0,1)$ מתכנס ולכן $\sum_n b_n$ מתכנס.
על כן ממבחן ההשוואה לפי מנות של עוקבים a_nמתכנס
2. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \leq 1$ כמעט תמיד, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $a_{n+N} \leq a_{n+N+1} \iff \forall n \in \mathbb{N}\, 1 \leq q \leq \frac{a_{n+N+1}}{a_{n+N}}$ ולכן יש לסדרה האי שלילית a_n זנב מונוטוני עולה ועל כן אינה אפסה, אזי לא מתכנסת.

7. מבחן ד'למבר הגבולי

יהי $\sum_n a_n$ טור אי שלילי כך ש$a_n \neq 0$ כמעט תמיד. נניח שקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$

1. אם $L \in [0,1)$ $\sum_n a_n$ מתכנס
2. אם $L > 1$ $\sum_n a_n$ מתבדר

3. אם $L=1$ לא נוכל להסיק כלום על התכנסות הטור

הוכחה

1. $L\in[0,1)$, אזי נקבע $q\in(0,L)$
מהנתון נסיק שקיים $N\in\mathbb{N}$ שמקיים $\left|\frac{a_{n+N+1}}{a_{n+N}}-L\right|<q-L$ $\forall n\in\mathbb{N}$, ולכן מתקיים $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<q-L+L=q<1$ כמעט תמיד.
ממבחן דלמבר הטור מתכנס.

2. $L>1$, אזי נקבע $q\in(1,L)$
מהנתון נסיק שקיים $N\in\mathbb{N}$ שמקיים $\left|\frac{a_{n+N+1}}{a_{n+N}}-L\right|<L-q$ $\forall n\in\mathbb{N}$, ולכן מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>-(L-q)+L=q>1$ כמעט תמיד
ממבחן דלמבר הטור מתבדר.

3. נראה דוגמה שבה הטור מתכנס ועוד דוגמה בה הוא מתבדר (נגיד $\sum_n\frac{1}{n},\sum_n\frac{1}{n^2}$

8. מבחן השורש של קושי להתכנסות טורים אי שליליים

יהי $\sum_n a_n$ טור א"ש.

1. אם קיים $q\in(0,1)$ כך שמתקיים כמעט תמיד $\sqrt[n]{a_n}\le q$, הטור מתכנס
2. אם $\sqrt[n]{a_n}\ge 1$ באופן שכיח, הטור מתבדר.

הוכחה

1. נשים לב שמתקיים כמעט תמיד $\sqrt[n]{a_n}\le q$ אם"ם מתקיים כמעט תמיד $0\le a_n\le q^n$, והרי $q\in(0,1)$ ולכן הטור $\sum_n q^n$ מתכנס
ממבחן השוואה נקבל שלכן $\sum_n a_n$ מתכנס גם הוא.

2. אם מתקיים כמעט תמיד $\sqrt[n]{a_n}\ge 1$, אזי בפרט מתקיים כמעט תמיד $a_n\ge 1$. והרי הטור $\sum_n 1$ מתבדר לאינסוף.
לכן ממבחן ההשוואה הטור מתבדר גם הוא.

9. מבחן השורש הגבולי של קושי להתכנסות טורים אי שליליים

יהי $\sum_n a_n$ טור א"ש. נניח שקיים הגבול העליון $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L\in\mathbb{R}$.

1. אם $L\in[0,1)$ $\sum_n a_n$ מתכנס
2. אם $L>1$ $\sum_n a_n$ מתבדר
3. אם $L=1$ לא נוכל להסיק כלום על התכנסות הטור

הוכחה

1. נסתכל על u_n סדרת הסופרמה של $\sqrt[n]{a_n}$. אזי מתקיים מהגדרתה $a_n\le(u_n)^n \iff \sqrt[n]{a_n}\le u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$
משום שהגבול העליון של $\sqrt[n]{a_n}$ הוא $L\in[0,1)$, מתקיים באופן שכיח עבור $\varepsilon=\frac{1-L}{2}$, $\sqrt[n]{a_n}<L+\varepsilon=L+\frac{1-L}{2}=\frac{L+1}{2}<1 \iff a_n<\left(\frac{L+1}{2}\right)^n<1$
והרי $\left(\frac{L+1}{2}\right)^n\in(0,1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $L\in[0,1)\Rightarrow\frac{L+1}{2}\in(0,1)$ ולכן ממבחן ההשוואה $\sum_n a_n$ מתכנס

2. אם מתקיים $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1$, אזי בפרט מתקיים כמעט תמיד לכל $\varepsilon>0$, $a_n>(1+\varepsilon)^n>1$. והרי הטור $\sum_n 1$ מתבדר לאינסוף
לכן ממבחן ההשוואה הטור מתבדר גם הוא.

3. נראה דוגמה שבה הטור מתכנס ועוד דוגמה בה הוא מתבדר (נגיד $\sum_n\frac{1}{n},\sum_n\frac{1}{n^2}$

10. מבחן האינטגרל לטורים חיוביים

תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ אי שלילית ומונוטונית יורדת ב$[1,\infty)$.

אזי הטור $\sum\limits_{n} f(n)$ מתכנס אם"ם האינטגרל $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס

ובמקרה זה מתקיים $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f(n) \le \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$

הוכחה נגדיר סדרה a_nהמוגדרת על ידי $a_n = f(n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ואת סדרת הסכומים החלקיים שלה S_k

f מונוטונית יורדת ולכן אינטגרבילית לכל $1<N\in\mathbb{N}$ בקטע הסגור $[1,N]$.

בנוסף משום שf אי שלילית, האינטגרל $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס אם"ם הפונקציה הצוברת $\tilde{F}(N)=\int\limits_{1}^{N} f(x)\,dx$ חסומה מלעיל,

ו-$\tilde{F}$חסומה מלעיל אם"ם הסדרה $\left(\int\limits_{1}^{k} f(x)\,dx\right)_{k=1}^{\infty}$ חסומה

בדומה, $\sum\limits_{n} f(n)$ מתכנס אם"ם S_k חסומה מלעיל.

משום שf מונוטונית יורדת, מתקיים $f(n+1)\le f(x)\le f(n) \quad \forall n\in\mathbb{N}\,\forall x\in[n,n+1]$ ועל כן ממונוטוניות האינטגרל מתקיים לכל $n\in\mathbb{N}, x\in[n,n+1]$

$$f(n+1)=(n+1-n)\,f(n+1)=\int\limits_{n}^{n+1} f(n+1)\,dx \le \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,dx \le \int\limits_{n}^{n+1} f(n)\,dx=(n+1-n)\,f(n)=f(n)$$

אזי מתקיים מהנ"ל

$$\forall 2\le k\in\mathbb{N} \quad \sum_{n=1}^{k-1} f(n+1) \le \sum_{n=1}^{k-1}\int\limits_{1}^{k} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{k-1} f(n)$$

ולכן הסדרה $\left(\int\limits_{1}^{k} f(x)\,dx\right)_{k=1}^{\infty}$ חסומה, אזי $\tilde{F}$, לכן האינטגרל מתכנס, וממבחן ההשוואה נקבל שהטור מתכנס גם הוא, כנדרש.