

פונקציית רימן

הגדרה

פונקציית רימן $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

תכונות

1. הערה:

$$\begin{aligned} &\text{א) } f(0) = f\left(\frac{0}{1}\right) = \frac{1}{1} = 1 \\ &\text{ב) } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x+1) \end{aligned}$$

2. פונקציית רימן איננה רציפה באף $x_0 \in \mathbb{Q}$, ורציפה לכל $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$3. \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

4. פונקציית רימן אינטגרבילית בכל קטע $[a, b]$, ומתקיים $\int_a^b f(t) dt = 0$