3.1.5 משפט קנטור

יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל $[a,b]$. אזי f רמב״ש ב$[a,b]$.

הוכחה

נניח בשלילה שהיא איננה רבמש
ממשפט (2) קיים $\varepsilon_0>0$ וקיימות 2 סדרות $(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty},(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימות את 2א, 2ב, 2ג.
מ2א נסיק ש $(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty},(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומות ע״י a,b, כלומר $\forall n\in\mathbb{N}\, a\le x_n,\hat{x}\le b$. ולכן ממשפט בולצאנו ויירשטראס קיימות תת סדרות מתכנסות $(\hat{x}_{n_k})_{k=1}^{\infty},(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, ונסמן $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in D$
נשים לב שמתקיים $\forall k\in\mathbb{N}\, x_{n_K}=\hat{x}_{n_k}+(x_{n_k}-\hat{x}_{n_k})$ ומאש״ג נקבל $\lim\limits_{k\to\infty}\hat{x}_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$
מרציפות f נקבל $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=x_0$ ולכן בפרט קיים $\lim\limits_{k\to\infty}(\hat{x}_{n_k})=$ $K\in\mathbb{N}$ כך שלכל $k>K$ מתקיים $|x_{n_k}-\hat{x}_{n_k}|<\varepsilon_0$ בסתירה