9.3.1 התכנסות בהחלט של טורים כלליים

הגדרה

טור מתכנס בהחלט

נאמר ש**הטור** $\sum\limits_{n} a_n$ **מתכנס בהחלט** אם"ם הטור $\sum\limits_{n} |a_n|$ מתכנס

משפטים

1. התכנסות בהחלט גוררת התכנסות

אם $\sum\limits_{n} a_n$ מתכנס בהחלט, אזי $\sum\limits_{n} a_n$ מתכנס.

הוכחה נשים לב שמתקיים $\sum\limits_{n} a_n = \sum\limits_{n} (|a_n| - (|a_n| - a_n))$ ובנוסף $\forall n \in \mathbb{N}\, 0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|$
לכן מאריתמטיקה של טורים הטור $\sum\limits_{n} 2|a_n|$ מתכנס גם הוא, וממבחן ההשוואה הטור $\sum\limits_{n} (|a_n| - a_n)$ מתכנס גם הוא
אז שוב מאריתמטיקה של טורים נקבל ש$a_n = 2|a_n| - (|a_n| - a_n)$ ולכן הטור $\sum\limits_{n} a_n$ מתכנס גם הוא, כנדרש

מסקנות
1. כל טור חיובי מתכנס גם מתכנס בהחלט
2. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2}$ מתכנס בהחלט
3. הטור ההרמוני המתחלף, כשלעצמו מתכנס בתנאי: כשלעצמו הוא טור לייבניץ ולכן מתכנס, אך $\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$ ואינו מתכנס.
4. דוגמה - נחפש את כל הערכים של $x \in \mathbb{R}$ שעבורם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ מתכנס: נשתמש בדלאמבר הגבולי ונקבל שלכל $|x| < 1$ הטור מתכנס, ועבור $x = 1$ נקבל שמתקיים: $\forall n \in \mathbb{N}\, \frac{x^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1 \\ \frac{(-1)^n}{n} & x = -1 \end{cases}$, לכן כאשר $x = -1$ זהו טור לייבניץ ההרמוני, אזי הוא מתכנס בתנאי (3), וכאשר $x = 1$ הטור אינו מתכנס. כלומר רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $[-1, 1)$.
5. טור מתכנס הוא חסום כי הסס"ח שלו מתכנסת ועל כן חסומה
6. יש טורים חסומים שלא מתכנסים: הטור $\sum\limits_{n=1}^{k} (-1)^n$ חסום אך לא מתכנס
7. אם לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש זנב חיובי או שלילי והטור $\sum\limits_{n} a_n$ חסום, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

3. תנאי שקול להתכנסות בהחלט על ידי הפירוק להפרש של אי־שליליים

$\sum\limits_{n} a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם הטורים האי שליליים $\sum\limits_{n} a_n^+, \sum\limits_{n} a_n^-$ מתכנסים, ואז מתקיים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$, ובפרט $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט ועל כן מתכנס.

הוכחה

$\Leftarrow$ $\sum\limits_{n} a_n$ מתכנס בהחלט, כלומר $\sum\limits_{n} |a_n|$ מתכנס.
מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\, 0 \leq a_n^+, a_n^- \leq |a_n|$ ועל כן ממבחן ההשוואה $\sum\limits_{n} a_n^-, \sum\limits_{n} a_n^+$ מתכנסים כנדרש.

$\Rightarrow$ מתקיים $\forall k \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{n=1}^{k} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{k} a_n^- \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^+ + a_n^- = |a_n|$ ועל כן מאריתמטיקה של טורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.