רציפות במידה שווה וליפשיציות

הגדרות

1. תהיינה $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. נאמר ש-f **רציפה במידה שווה (רבמ"ש) ב-D** אם"ם מתקיים

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{D} \quad |\hat{x} - x| < \delta \Rightarrow |f(\hat{x}) - f(x)| < \varepsilon$$

- ההבדל בין רבמ״ש לרציפות: f רציפה ב-D אם"ם היא רציפה בכל $x \in D$ אם"ם $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D} \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall \hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{D} \quad |\hat{x} - x| < \delta \Rightarrow |f(\hat{x}) - f(x)| < \varepsilon$, כלומר לכל x_0 קיימת δ התלויה גם בx_0 וגם בε, ואם f רבמ"ש בD, δ תלויה רק בε.

2. **ליפשיציות**
תהי f רציפה במקטע I וגזירה בכל נקודה פנימים של I
אם קיים $0 \leq M \in \mathbb{R}$ כך ש$\forall x_1, x_2 \in I \; |f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$,
נאמר ש-f היא **M-ליפשיצית**

משפטים

1. **רבמ"ש$\Leftarrow$רציפות:**
יהי $I \subseteq \mathbb{R}$, ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ רבמ"ש ב-I. אזי f רציפה בI
[הוכחה מיידית מההגדרות]

2. יהיו $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. f איננה רבמ"ש ב-D אם"ם קיים $\varepsilon_0 > 0$ וקיימות 2 סדרות $(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימות את שלושת התנאים הבאים:

א) $\forall n \in \mathbb{N} \, x_n, \hat{x}_n \in D$

ב) $\lim_{n \to \infty} (x_n - \hat{x}_n) = 0$

ג) $\forall n \in \mathbb{N} \; |f(x_n) - f(\hat{x}_n)| \geq \varepsilon_0$

הוכחה $\Leftarrow$ אם f אינה רבמ"ש, היא מקיימת את השלילה של ההגדרה, קרי $\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x, \hat{x} \in D \quad |\hat{x} - x| < \delta \bigwedge |f(\hat{x}) - f(x)| \geq \varepsilon$.
אזי בפרט לכל $n \in \mathbb{N}$ עבור $\delta = \frac{1}{n}$, קיימים $x_n, \hat{x}_n$ המקיימים $|\hat{x}_n - x_n| < \delta = \frac{1}{n} \bigwedge |f(\hat{x}) - f(x)| \geq \varepsilon$. ולכן מתקיים

$$\forall n \in \mathbb{N} \; |\hat{x}_n - x_n| < \delta = \frac{1}{n} \iff -\frac{1}{n} \leq \hat{x}_n - x_n \leq \frac{1}{n}$$

וממשפט הכריך נקבל $\lim_{n \to \infty} (\hat{x}_n - x_n) = 0$

$\Rightarrow$ ניישם היינה על הכיוון

3. **משפט קנטור**
יהיו $a < b \in \mathbb{R}$, ותהי $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל $[a, b]$. אזי f רמב"ש ב$[a, b]$.

הוכחה
- נניח בשלילה שהיא איננה רבמש
- ממשפט (2) קיים $\varepsilon_0 > 0$ וקיימות 2 סדרות $(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימות את 2א, 2ב, 2ג.
- מ2א נסיק ש $(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומות ע"י a, b, כלומר $\forall n \in \mathbb{N} \, a \leq x_n, \hat{x} \leq b$. ולכן ממשפט בולצאנו ויירשטראס קיימות תת סדרות מתכנסת $(\hat{x}_{n_k})_{k=1}^{\infty}, (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, ונסמן $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \in D$
- נשים לב שמתקיים $\forall k \in \mathbb{N} \, x_{n_K} = \hat{x}_{n_k} + (x_{n_k} - \hat{x}_{n_k})$ ומאש"ג נקבל $\lim_{k \to \infty} \hat{x}_{n_k} = \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$
- מרציפות f נקבל $\lim_{k \to \infty} (\hat{x}_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = x_0$ ולכן בפרט קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > K$ מתקיים $|x_{n_k} - \hat{x}_{n_k}| < \varepsilon_0$ בסתירה

4. **אפיון היינה לקיום גבול של פונקציה בנקודה**
תהי $f : D \to \mathbb{R}$ המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0 \in \mathbb{R}$. אז יש לf גבול בx_0 אם"ם לכל $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת היינה עבור f ב-x_0, הסדרה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

הוכחה נראה שקילות לאפיון היינה:

⇐ אם קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, לכל $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת היינה יתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ בפרט, כלומר קיים הגבול הנ"ל כנדרש.

⇒ נגדיר 2 סדרות היינה $\tilde{x}_n, \hat{x}_n$, נסמן $\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = L_2$, $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = L_1$. אזי מאינפי 1 הסדרה השזורה $(\tilde{x}_1, \hat{x}_1, \tilde{x}_2, \hat{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \hat{x}_n, \ldots)$ היא גם סדרת היינה, ולפי ההנחה הסדרה הנ"ל מתכנסת (נסמןL) ולכן קבוצת הגבולות החלקיים שלה היא בדיוק $\{L\}$, כלומר $L_1 = L = L_2$ ולכן מאפיון היינה $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ כנדרש

5. **קריטריון קושי לקיום גבול של פונקציה בנקודה**

תהי $f : D \to \mathbb{R}$ המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0 \in \mathbb{R}$.

אז יש לf גבול בx_0 אם"ם מתקיים תנאי קושי לקיום גבול של פונקציה בנקודה:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall\tilde{x}, \hat{x} \in D \quad \tilde{x}, \hat{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(\tilde{x}) - f(\hat{x})| < \varepsilon$$

הוכחה יהא $\varepsilon > 0$ נתון.

⇐ נניח שקיים $\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{def}{=} L \in \mathbb{R}$. אזי קיימת $\delta > 0$ שעבורה $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\hat{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. אזי בפרט עבור $\tilde{x}, \hat{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ מתקיים כנדרש:

$$|f(\tilde{x}) - f(\hat{x})| = |f(\tilde{x}) - L + L - f(\hat{x})| \overset{\triangle}{\leq} |f(\tilde{x}) - L| + |L - f(\hat{x})| = |f(\tilde{x}) - L| + |f(\hat{x}) - L| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

בערה ההבדל מרבמש הוא הסביבה המנוקבת!

⇒ נגדיר סדרת היינה x_n לx_0 עבור f, אזי עבור $\delta > 0$ המתאימה לε הנתון לפי תנאי קושי, ונקבל שקיים $N \in \mathbb{N}$ שמקיים לכל $n > N$ $0 < |x_n - x_0| < \delta$, ולכן בפרט לכל $N < m, n$ מתקיים $0 < |x_n - x_m| < \delta$ ולכן $|f(x_n) - f(x_m)| < \delta$, אזי $f(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ועל כן מתקיים $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ כנדרש.

6. **רציפות בקטע פתוח + גבולות בקצוות ⇐ רבמש בקטע**

יהיו $a < b \in \mathbb{R}$, ותהי $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל (a, b). אזי f רמב"ש ב(a, b) אם"ם קיימים במובן הצר הגבולות החד צדדיים $\lim_{x\to b^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

הוכחה ראשית נשים לב שזוהי גרסה למשפט קנטור על קטע פתוח.

⇒ נניח שהגבולות קיימים.

- נגדיר $\hat{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$, כך ש $\hat{f}(x) = \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) & x = a \\ f(x) & x \in (a, b) \\ \lim_{x\to b^-} f(x) & x = b \end{cases}$ $\forall x \in [a, b]$.
- ממשפט קנטור $\hat{f}$ רבמש ב$[a, b]$ ובפרט לכן רבמש ב-(a, b) משום ש$(a, b) \subseteq [a, b]$
- $\hat{f}, f$ מתלכדות ב(a, b), לכן f רבמ"ש ב(a, b)

⇐ נניח ש-f רבמש ב(a, b).

נשים לב להערה בהוכחה על קושי, אזי לכל ε נתאים δ בהגדרת רבמש, אזי תנאי קושי מתקיים ולכן יש גבולות ב$\{a, b\}$.

מסקנה(!) הפונקציה הרציפה $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ רבמ"ש בקטע הפתוח (a, b)אם"ם קיימת לה הרחבה רציפה לקטע הסגור $[a, b]$

7. **פונקציית הנגזרת f' חסומה אם"ם f ליפשיצית**

תהי f רציפה במקטע I וגזירה בכל נקודה פנימית של I, ובנוסף f' חסומה בI

אזי f היא ליפשיצית.

הוכחה

f' חסומה ועל כן קיים $0 \leq M \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $|f'(x)| \leq M$ $\forall x \in I$.

יהיו $x_1 < x_2 \in I$. f גזירה רציפה בI ולכן רציפה ב$[x_1, x_2] \subseteq I$, וגזירה בפרט ב$(x_1, x_2) \subseteq I$.

לכן מקיימת בקטע את תנאי משפט לגראנז, אזי קיים $c \in (x_1, x_2)$ המקיים $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \iff |f'(c)| = \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|}$.

ובתוספת של הנתון נקבל שמתקיים $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$ ועל כן ליפשיצית כנדרש.