9.2 טורים אי-שליליים והתכנסותם - הוכחות

12 בפברואר 5202

הגדרות

הטור $\sum_n a_n$ יקרא **אי שלילי** (חיובי) אם"ם מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\, a_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}\, a_n > 0)$

משפטים על טורים א"ש

1. סדרת הסכומים החלקיים של טור א"ש מונוטונית עולה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה ותהי $(S_k)_{k=1}^{\infty}$סדרת הסכומים החלקיים שלה.

1. אם $\sum_n a_n$ אי שלילי, אזי $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה
2. אם $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה, אזי $\sum_n a_{n+1}$ טור ה-1זנב של a_n אי שלילי.

הוכחה נובע ישירות מכך שמתקיים $\forall k \in \mathbb{N}\, S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$

2. טור א"ש מתכנס אם"ם סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה

$\Leftarrow$ אם הטור א"ש ומתכנס, אזי סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת, ובפרט לכן חסומה

$\Rightarrow$ הטור אי שלילי ולכן ממשפט 1 S_k מונוטונית עולה, ומשום שהיא חסומה היא בפרט מתכנסת, לכן הטור מתכנס.

מבחני התכנסות לטורים א"ש

1. מבחן ההשוואה

יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$סדרות המקיימות $\forall N \in \mathbb{N}\, 0 \leq a_n \leq b_n$
אזי אם $\sum_n b_n$ מתכנס, גם $\sum_n a_n$ מתכנס ומתקיים $\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$.

הוכחה נגדיר סדרות סכומים חלקיים $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n, T_k = \sum_{n=1}^{k} b_n \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
S_k, T_k סס"ח של סדרות אי שליליות ולכן מונוטוניות עולות, ובנוסף אי שליליות, כלומר $\forall k \in \mathbb{N}\, 0 \leq S_k \leq T_k$
אזי אם$\sum_n b_n$מתכנס, מתקיים $\lim_{k\to\infty} T_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$, ולכן מתקיים $\forall k \in \mathbb{N}\, 0 \leq S_k \leq L$, כלומר S_k חסומה
ממשפט על התכנסות טורים אי שליליים שהוכח בהרצאה, טור א"ש מתכנס אם"ם הסס"ח שלו חסומה, ועל כן $\sum_n a_n$ מתכנס ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ כנדרש.

2.מבחן ההשוואה כמעט תמיד

יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המקיימות $0 \leq a_n \leq b_n$ כמעט תמיד
אזי אם $\sum_n b_n$ מתכנס, גם $\sum_n a_n$ מתכנס ומתקיים $\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$.

הוכחה מהנתון נסיק שקיים $N \in \mathbb{N}$ שמקיים $\forall n > N\, 0 \le a_n \le b_n$.

נגדיר סדרות סכומים חלקיים $\forall k \in \mathbb{N} \quad S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n, T_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$.

אם $\sum_n b_n$ מתכנס, גם ה-N-זנב שלנו $\sum_n b_{n+N}$ מתכנס, אזי ממבחן השוואה $\sum_n a_{n+N}$ מתכנס וזה מתקיים אם"ם $\sum_n a_n$ מתכנס, כנדרש.

3. מבחן ההשוואה באמצעות מנה

יהיו $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ טורים **אי שליליים** כך ש$b_n \neq 0$ כמעט תמיד.

אם קיימים $0 < u, v \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $u \le \frac{a_n}{b_n} \le v$ כמעט תמיד, אזי $\sum_n a_n$ מתכנס אם"ם $\sum_n b_n$ מתכנס.

הוכחה מההנחה נסיק שמתקיים כמעט תמיד $0 < u \cdot b_n \le a_n \le v \cdot b_n$.

אזי נוכיח את $\Leftarrow$ ממבחן ההשוואה + אריתמטיקה של טורים על אי השוויון $0 < a_n \le v \cdot b_n$

ואת $\Rightarrow$ ממבחן ההשוואה + אריתמטיקה של טורים על אי השוויון $0 < u \cdot b_n \le a_n$

4. מבחן השוואה הגבולי

יהיו $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ טורים **אי שליליים** כך ש$b_n \neq 0$ כמעט תמיד.

אם קיים $0 < L \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, אזי $\sum_n a_n$ מתכנס אם"ם $\sum_n b_n$ מתכנס.

הוכחה אם הגבול קיים, קיים $N \in \mathbb{N}$ שעבורו $\forall n \in \mathbb{N}\, 0 < \frac{L}{2} \le \frac{a_n}{b_n} \le \frac{3L}{2}$ ולכן מתקיימים תנאי מבחן ההשואה באמצעות מנה.

5. מבחן ההשוואה באמצעות מנות של עוקבים

יהיו $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ טורים **אי שליליים** כך ש$a_n, b_n \neq 0$ כמעט תמיד.

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ כמעט תמיד ו$\sum_n b_n$ מתכנס, אזי $\sum_n a_n$ מתכנס

הוכחה יהא $N \in \mathbb{N}$ שעבורו מתקיים הנתון לכל $n > N$.

נראה באינדוקציה שמתקיים $\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{a_{N+k}}{a_{N+1}} \le \frac{b_{N+k}}{b_{N+1}}$

מכאן נקבל $\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{b_{N+1}}{a_{N+1}} \le \frac{b_{N+k}}{a_{N+k}}$

ואז נגדיר $v := \frac{b_{N+1}}{a_{N+1}}$ ולכן ממבחן ההשוואה באמצעות מנה מתקיים הנ"ל כנדרש.

6. מבחן ד'למבר

יהי $\sum_n a_n$ טור אי שלילי כך ש$a_n \neq 0$ כמעט תמיד.

1. אם קיים $q \in (0,1)$ כך ש$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ כמעט תמיד, $\sum_n a_n$ מתכנס
2. אם קיים $q \ge 1$ כך ש $q \le \frac{a_{n+1}}{a_n}$ כמעט תמיד, $\sum_n a_n$ מתבדר

הוכחה

1. נסמן $\forall n \in \mathbb{N}\, b_n = q^n$. אזי b_n מקיים $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ וגם $\forall n \in \mathbb{N}\, b_n \neq 0$
לכן מתקיים כמעט תמיד $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \frac{q^n}{q^{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
בנוסף הוכחנו שטור סדרה הנדסית שקבוע הכפל בה מקיים $q \in (0,1)$ מתכנס ולכן $\sum_n b_n$ מתכנס.
על כן ממבחן ההשוואה לפי מנות של עוקבים a_nמתכנס
2. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \le 1$ כמעט תמיד, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $a_{n+N} \le a_{n+N+1} \iff \forall n \in \mathbb{N}\, 1 \le q \le \frac{a_{n+N+1}}{a_{n+N}}$ ולכן יש לסדרה האי שלילית a_n זנב מונוטוני עולה ועל כן אינה אפסה, אזי לא מתכנסת.

7. מבחן ד'למבר הגבולי

יהי $\sum_n a_n$ טור אי שלילי כך ש$a_n \neq 0$ כמעט תמיד. נניח שקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$

1. אם $L \in [0,1)$ $\sum_n a_n$ מתכנס
2. אם $L > 1$ $\sum_n a_n$ מתבדר
3. אם $L = 1$ לא נוכל להסיק כלום על התכנסות הטור

הוכחה

1. $L \in [0,1)$, אזי נקבע $q \in (0,L)$
מהנתון נסיק שקיים $N \in \mathbb{N}$ שמקיים $\left|\frac{a_{n+N+1}}{a_{n+N}} - L\right| < q - L$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ולכן מתקיים $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q - L + L = q < 1$ כמעט תמיד.
ממבחן דלמבר הטור מתכנס.
2. $L > 1$, אזי נקבע $q \in (1,L)$
מהנתון נסיק שקיים $N \in \mathbb{N}$ שמקיים $\left|\frac{a_{n+N+1}}{a_{n+N}} - L\right| < L - q$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ולכן מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > -(L-q) + L = q > 1$ כמעט תמיד
ממבחן דלמבר הטור מתבדר.
3. נראה דוגמה שבה הטור מתכנס ועוד דוגמה בה הוא מתבדר (נגיד $\sum_n \frac{1}{n}, \sum_n \frac{1}{n^2}$

8. מבחן השורש של קושי להתכנסות טורים אי שליליים

יהי $\sum_n a_n$ טור א"ש.

1. אם קיים $q \in (0,1)$ כך שמתקיים כמעט תמיד $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, הטור מתכנס
2. אם $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ באופן שכיח, הטור מתבדר.

הוכחה

1. נשים לב שמתקיים כמעט תמיד $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ אם"ם מתקיים כמעט תמיד $0 \leq a_n \leq q^n$, והרי $q \in (0,1)$ ולכן הטור $\sum_n q^n$מתכנס
ממבחן השוואה נקבל שלכן $\sum_n a_n$ מתכנס גם הוא.
2. אם מתקיים כמעט תמיד $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, אזי בפרט מתקיים כמעט תמיד $a_n \geq 1$. והרי הטור $\sum_n 1$ מתבדר לאינסוף.
לכן ממבחן ההשוואה הטור מתבדר גם הוא.

9. מבחן השורש הגבולי של קושי להתכנסות טורים אי שליליים

יהי $\sum_n a_n$ טור א"ש. נניח שקיים הגבול העליון $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}$.

1. אם $L \in [0,1)$ $\sum_n a_n$ מתכנס
2. אם $L > 1$ $\sum_n a_n$ מתבדר
3. אם $L = 1$ לא נוכל להסיק כלום על התכנסות הטור

הוכחה

1. נסתכל על u_n סדרת הסופרמה של $\sqrt[n]{a_n}$. אזי מתקיים מהגדרתה $\forall n \in \mathbb{N}\ \sqrt[n]{a_n} \leq u_n \iff a_n \leq (u_n)^n$
משום שהגבול העליון של $\sqrt[n]{a_n}$ הוא $L \in [0,1)$, מתקיים באופן שכיח עבור $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$, $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon = L + \frac{1-L}{2} = \frac{L+1}{2} < 1 \iff a_n < \left(\frac{L+1}{2}\right)^n < 1$
והרי $\forall n \in \mathbb{N}\ \left(\frac{L+1}{2}\right)^n \in (0,1)$ $L \in [0,1) \Rightarrow \frac{L+1}{2} \in (0,1)$ ולכן ממבחן ההשוואה $\sum\limits_n a_n$ מתכנס

2. אם מתקיים $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, אזי בפרט מתקיים כמעט תמיד לכל $\varepsilon > 0$, $a_n > (1+\varepsilon)^n > 1$. והרי הטור $\sum\limits_n 1$ מתבדר לאינסוף לכן ממבחן ההשוואה הטור מתבדר גם הוא.

3. נראה דוגמה שבה הטור מתכנס ועוד דוגמה בה הוא מתבדר (נגיד $\sum\limits_n \frac{1}{n}, \sum\limits_n \frac{1}{n^2}$

10. מבחן האינטגרל לטורים חיוביים

תהי $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ אי שלילית ומונוטונית יורדת ב$[1,\infty)$.
אזי הטור $\sum\limits_n f(n)$ מתכנס אם"ם האינטגרל $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס
ובמקרה זה מתקיים $\sum\limits_{n=2}^\infty f(n) \leq \int\limits_1^\infty f(x)\,dx \leq \sum\limits_{n=1}^\infty f(n)$

הוכחה נגדיר סדרה a_nהמוגדרת על ידי $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = f(n)$ ואת סדרת הסכומים החלקיים שלה S_k
f מונוטונית יורדת ולכן אינטגרבילית לכל $1 < N \in \mathbb{N}$ בקטע הסגור $[1,N]$.
בנוסף משום שf אי שלילית, האינטגרל $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס אם"ם הפונקציה הצוברת $\tilde{F}(N) = \int\limits_1^N f(x)\,dx$ חסומה מלעיל,
ו-$\tilde{F}$חסומה מלעיל אם"ם הסדרה $\left(\int\limits_1^k f(x)\,dx\right)_{k=1}^\infty$ חסומה
בדומה, $\sum\limits_n f(n)$ מתכנס אם"ם S_k חסומה מלעיל.
משום שf מונוטונית יורדת, מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in [n,n+1] \quad f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ ועל כן ממונוטוניות האינטגרל מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [n,n+1]$

$$f(n+1) = (n+1-n)\,f(n+1) = \int\limits_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int\limits_n^{n+1} f(n)\,dx = (n+1-n)\,f(n) = f(n)$$

אזי מתקיים מהנ"ל

$$\forall 2 \leq k \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=1}^{k-1} f(n+1) \leq \sum_{n=1}^{k-1}\int\limits_1^k f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{k-1} f(n)$$

ולכן הסדרה $\left(\int\limits_1^k f(x)\,dx\right)_{k=1}^\infty$ חסומה, אזי $\tilde{F}$, לכן האינטגרל מתכנס, וממבחן ההשוואה נקבל שהטור מתכנס גם הוא, כנדרש.