סכומי רימן

הגדרות

1. **סכום רימן**
יהיו $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $P=\{x_a=a,x_1,\dots,x_n=b\}$ חלוקה של $[a,b]$, $P^*=\{c_1,\dots,c_n\}$ קבוצת נקודות כך ש$c_i\in[x_i,x_{i-1}]$ $\forall i\in[n]$
המספר $S\left(f,P,P^*\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)$ נקרא **סכום רימן של** f **ביחס לחלוקה** P **והקבוצה** P^*

הערה בהינתן f,P, ישנן אינסוף סכומי רימן ביחס לנתונים, הנבדלים בבחירת P^*, לכן אין סכום רימן יחיד של חלוקה ופונקציה

2. **אינטגרביליות לפי רימן:**
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ לאו דווקא חסומה. נאמר ש-f **אינטגרבילית רימן** אם"ם קיים $I\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$המקיימת $\Delta P<\delta$ ולכל בחירה של נקודות ביניים P^* ביחס לP מתקיים $\left|S\left(f,P,P^*\right)-I\right|<\varepsilon$.
במקרה זה נקרא I **אינטגרל רימן של** f **ב**$[a,b]$**.**

משפטים

1. **סכומי דרבו חסמים של סכום רימן**
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **חסומה.**
תהא $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$. אזי מתקיים לכל בחירת נקודות $P^*=\{c_i\in[x_{i-1},x_i]\mid i\in[n]\}$

$$L\left(f,P\right)\leq S\left(F,P,P^*\right)\leq U\left(f,P\right)$$

הוכחה: נסמן M_i,m_I לכל $i\in[n]$. אזי מתקיים $m_i\leq f\left(c_i\right)\leq M_i \iff x_{i-1}\leq c_i\leq x_i \quad \forall i\in[n]$. ולכן נקבל

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)}^{=L(f,P)}\leq\overbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i\left(x_i-x_{i-1}\right)}^{=S(f,P,P^*)}\leq\overbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)}^{=U(f,P)}$$

2. אם f אינטגרבילית לפי דרבו ב$[a,b]$, f אינטגרבילית רימן ב$[a,b]$ו $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=I$

3. **אם** f **אינטגרבילית רימן,** f **חסומה ב**$[a,b]$

הוכחה:
- נניח בשלילה שf אינה חסומה ב$[a,b]$
- f אינטגרבילית רימן ולכן קיימים $I\in\mathbb{R}$, $\delta>0$ שעבור כל $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$ עם $\Delta P<\delta$ וכל בחירת נקודות ביניים P^* ביחס לP מתקיים
$$\left|S\left(f,P,P^*\right)-I\right|<1$$
- לכן מתקיים
$$\left|S\left(f,P,P^*\right)\right|-\left|I\right|\leq\left|S\left(f,P,P^*\right)-I\right|<1 \iff \left|S\left(f,P,P^*\right)\right|<\left|I\right|+1$$
- מההנחה בשלילה, קיים $j\in[n]$ כך שהקטע $[x_{j-1},x_j]$ אינו חסום., כלומר מתקיים $f\left(x\right)\geq M \quad \forall M\in\mathbb{R}\,\exists x\in[x_{j-1},x_j]$
- נסמן $g_i=f\left(c_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right) \quad \forall i\in[n]$מכאן נקבל שמתקיים

$$\left|S\left(f,P,P^*\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n} g_i\right|=\left|-\sum_{i=1}^{n} g_i\right|=\left|-\setminus_{i\in[n}\left\{j\right\}]\sum g_i-g_j\right|\overset{(\triangle)}{\geq}\left|-g_j\right|-\left|-\setminus_{i\in[n}\left\{j\right\}]\sum g_i-g_j\right|=\left|g_j\right|-\left|\setminus_{i\in[n}\left\{j\right\}]\sum g_i\right|$$

- לכן מתקיים

$$\left|g_j\right|-\left|\setminus_{i\in[n}\left\{j\right\}]\sum g_i\right|\leq\left|S\left(f,P,P^*\right)\right|<\left|I\right|+1 \iff$$
$$\iff \left|f\left(c_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)\right|=\left|g_j\right|<\left|I\right|+1+\left|\setminus_{i\in[n}\left\{j\right\}]\sum g_i\right| \iff$$
$$\iff \left|f\left(c_j\right)\right|<\frac{1}{x_j-x_{j-1}}\left(\left|I\right|+1+\left|\setminus_{i\in[n}\left\{j\right\}]\sum g_i\right|\right)\in\mathbb{R}$$

והרי עבור $\mathbb{R} \ni M_1 =: 1 + \left(|I| + 1 + \left|\sum g_i [\bigcup_{i\in[n} \{j\}\right|\right) \frac{1}{x_j - x_{j-1}}$ קיים $c \in [x_{j-1}, x_j]$ המקיים $M_1 \geq f(c)$, לכן $= \overline{P}^*$ $P^* \setminus \{c_j\} \cup \{c\}$ מקיימת $\left|S\left(f, P, \overline{P}^*\right) - I\right| < 1$ גם היא, ולכן מתקיים $M_1 < M_1 + 1 \leq f(c) = M_1$ בסתירה לטריכוטומיה, כנדרש.

4. f **אינטגרבילית רימן ב**$[a,b]$ $\Leftarrow$ f **אינטגרבילית דרבו ב**$[a,b]$ וI $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$

הוכחה: אינטגרביליות

- יהא $\varepsilon > 0$ נתון.
- f אינטגרבילית רימן ולכן קיימת $\delta > 0$ כך שכל חלוקה P וכל בחירת נקודות בחלוקה P^* מקיימות

$$|S(f,P,P^*) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \iff -\frac{\varepsilon}{2} < S(f,P,P^*) - I < \frac{\varepsilon}{2} \iff$$
$$(*) \iff I - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,P,P^*) < I + \frac{\varepsilon}{2} \iff -I - \frac{\varepsilon}{2} < -S(f,P,P^*) < \frac{\varepsilon}{2} - I$$

.

- תהא $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ המקיימת $\Delta P < \delta$.
  - נגדיר M_i, m_i כרגיל, ונגדיר בנוסף p^*, P^* ביחס ל-P המקיימות $P^* = \{M_i \mid i \in [n]\}, p^* = \{m_i \mid i \in [n]\}$.
  - נשים לב ש$S(f,P,P^*) = \sum\limits_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), S(f,P,p^*) \sum\limits_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ והם מקיימים את $(*)$
- מתקיים

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \overset{(*)}{<}$$
$$\overset{(*)}{<} \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2} - I\right) = \varepsilon$$

  לכן מתקיים תנאי דרבו, אזי f אינטגרבילית דרבו ב-$[a,b]$.

- **שוויון האינטגרלים:**
- מאינטגרביליות דרבו מתקיים $S(f,P,P^*) = U(f,P) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. כלומר נקבל ש$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx - I\right| < \varepsilon$ ומשרירותיות ε נקבל $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$ כנדרש.