8.1 סוגי אינטגרלים לא אמיתיים

סוגי אינטגרלים

1 אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון - תחום האינטגרציה הוא קרן

תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל $[a,N]$ עבור $a<N\in\mathbb{R}$.

- אם קיים במובן הצר הגבול $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_a^N f(x)\,dx=L\in\mathbb{R}$, נאמר ש**האינטגרל הלא אמיתי** $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ **מתכנס**, או שf **אינטגרבילית ב**$[a,\infty)$.
  - במקרה זה נסמן $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx=L$
- אם הגבול $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_a^N f(x)\,dx$ לא קיים במובן הצר, נאמר ש**האינטגרל הלא אמיתי** $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ **מתבדר** או **לא קיים**
- בדומה, עבור $f:(-\infty,a]$, נבדוק את $\lim\limits_{N\to-\infty}\int\limits_N^a f(x)\,dx$

2 אינטגרל לא אמיתי מסוג שני - תמונת הפונקציה אינה חסומה

תהי $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ב$[a,b-\delta]$ לכל $\delta>0$.

- אם קיים במובן הצר הגבול $\lim\limits_{\delta\to0^+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx=L\in\mathbb{R}$, נאמר ש**האינטגרל הלא אמיתי** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ **מתכנס**, או שf **אינטגרבילית ב**$[a,b)$.
  - במקרה זה נסמן $\int\limits_a^b f(x)\,dx=L$
- אם הגבול $\lim\limits_{\delta\to0^+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ לא קיים במובן הצר, נאמר ש**האינטגרל הלא אמיתי** $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ **מתבדר** או **לא קיים**
- בדומה, עבור $f:(a,b]$, נבדוק את $\lim\limits_{\delta\to0^-}\int\limits_{a+\delta}^b f(x)\,dx$

3 אינטגרלים לא אמיתיים בצורה מרובה

אינטגרלים כאלו יהיו לא אמיתיים בכמה נקודות קצה

1.3 אינטגרל מ$-\infty$ עד ∞

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית לכל $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$

נניח שקיים (כלומר יהא) $x_0\in\mathbb{R}$ כך ששני האינטגרלים הלא אמיתיים מהסוג הראשון $\int\limits_{x_0}^\infty f(x)\,dx,\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx$ מתכנסים.

אם שני הגבולות קיימים במובן הצר, באופן **נפרד בלתי תלוי** (כלומר הגבול $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^N f(x)\,dx$ לא רלוונטי בבדיקה זו-ד"נ היא $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$)

במקרה זה נאמר ש$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ מתכנס, מתקיים $\int\limits_{x_0}^\infty f(x)\,dx+\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

2.3 אינטגרל בקטע חסום ופתוח עם פונקציה לא חסומה בשני קצוות הקטע

תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל $[a+\delta,b-\delta]$ לכל $\delta\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$.

נניח שקיים (כלומר יהא) $x_0\in(a,b)$ כך ששני האינטגרלים הלא אמיתיים מהסוג הראשון $\int\limits_{x_0}^{b} f(x)\,dx, \int\limits_{b}^{x_0} f(x)\,dx$ **מתכנסים באופן בלתי תלוי**.

אם הדבר קורה, נאמר ש$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ מתכנס, ומתקיים $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=\int\limits_{b}^{x_0} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0}^{b} f(x)\,dx$

3.3 אינטגרל בקרן פתוחה (התחום לא חסום והפונקציה לא חסומה בקצה הממשי)

תהי $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל $[a+\delta,\infty]$. נגדיר $a<x_0\in\mathbb{R}$. אם $\int\limits_{x_0}^{N} f(x)\,dx, \int\limits_{a}^{x_0} f(x)\,dx$ מתכנסים,

נאמר ש$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס ומתקיים $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{x_0} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$

4 משפטים

1. הגדרת האינטגרל ב$(-\infty,\infty)$ אינה תלויה בבחירת x_0.
נוכיח בכך שנשים לב שאם ההתכנסות מתקיימת אז בפרט f אינטגרבילית ב$[x_0,x_1]$, עבור $x_0<x_1\in\mathbb{R}$ ומקיימת

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx-\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx+\int\limits_{x_1}^{\infty} f(x)\,dx$$

2. אריתמטיקה של אינגטרביליות בקטעים פתוחים
יהיו $g,f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ עם $\lambda,a\in\mathbb{R}$. אזי:

(א) הפונקציה λf אינטגרבילית בקטע $[a,\infty)$ ומתקיים

$$\int\limits_{a}^{\infty}\lambda f(x)\,dx=\lambda\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

(ב) הפונקציה $(f+g)(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,\infty)$ ומתקיים

$$\int\limits_{a}^{\infty}(f+g)(x)\,dx=\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx+\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx$$

(ג) f אינטגרבילית ב$[c,\infty)$ לכל $c>a$ ומתקיים

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx+\int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$