מועד א' בדידה 2 סמסטר ב' תשפ"א – פתרון

1. א. עבור $n=1$, נקבל שהטענה היא: $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$, כלומר: $1+x \geq 1+x$, והטענה אכן נכונה.

כעת, נניח שהטענה נכונה עבור שלב n כלשהו, כלומר נתון: $(1+x)^n \geq 1+nx$. באמצעות הנתון, נוכיח שהטענה נכונה גם לשלב הבא $n+1$, כלומר צ"ל:

$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. אם כן:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

החלפנו את $(1+x)^n$ בביטוי $1+nx$, ולפי הנחת האינדוקציה הקטנו (קטן-שווה) את הביטוי. נמשיך:

$$(1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+x+nx$$

הורדנו ביטוי אי-שלילי: nx^2, ולכן הביטוי לא גדל. נמשיך:

$$1+x+nx = 1+(n+1)x$$

וסה"כ: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)\,x$, כנדרש.
לכן, הטענה נכונה לכל n טבעי, באינדוקציה.

ב. ננסח בעיה קומבינטורית ששני אגפי השוויון עונים עליה.

למשל – אנו רוצים לבחור ועדה של k ח"כים, כאשר k יכול להיות כל מספר בין 1 לבין n, ומתוך הועדה לבחור ח"כ אחד שיהיה המלך של הח"כים.

מצד אחד, אפשר לבחור k ח"כים מתוך n לועדה. זו בחירה בלי חזרה (אי-אפשר לבחור את אותו ח"כ פעמיים) ובלי חשיבות לסדר (בועדה אין תפקידים), ולכן יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לעשות זאת. כעת, מתוך ה-k שנבחרו יש k אפשרויות להמלכת המלך של הח"כים. אם כן, לפי עקרון המכפלה, יש $k\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחור ועדה ובה מלך עם k חברים. מכיוון ש-k יכול להיות כל מספר בין 1 לבין n, מעקרון הסכום נקבל שמספר האפשרויות לבנות ועדה כפי שתיארנו הוא: $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

מצד שני, אפשר לספור זאת באופן הבא – נבחר קודם כל את המלך, יש n אפשרויות לעשות זאת, ולאחר מכן נבחר את שאר חברי הועדה. כל תת-קבוצה של $n-1$ הח"כים שנשארו תענה על הדרוש, ואנו יודעים שלקבוצה עם $n-1$ איברים יש 2^{n-1} תתי-קבוצות. לפי עקרון המכפלה, מדובר ב-$n2^{n-1}$.

סה"כ, שני האגפים אכן סופרים את אותו הדבר.

2. א. נשתמש בקש"ב; נגדיר שתי פונקציות $f:A\to B, g:B\to A$ ונראה שכל אחת מהן מוגדרת היטב וחח"ע. כמובן, יש הרבה דרכים לעשות זאת.

נגדיר $f:A\to B$ ע"י: $f\left(x,y\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{100},\frac{3}{2}+\frac{y}{100}\right)$.

f חח"ע - יהיו $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\in A$ עבורם: $f\left(x_1,y_1\right)=f\left(x_2,y_2\right)$,

צ"ל: $\left(x_1,y_1\right)=\left(x_2,y_2\right)$. אכן:

$$f\left(x_1,y_1\right)=f\left(x_2,y_2\right)\Longrightarrow\left(\frac{3}{2}+\frac{x_1}{100},\frac{3}{2}+\frac{y_1}{100}\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{x_2}{100},\frac{3}{2}+\frac{y_2}{100}\right)$$

$$\Longrightarrow\frac{3}{2}+\frac{x_1}{100}=\frac{3}{2}+\frac{x_2}{100}\wedge\frac{3}{2}+\frac{y_1}{100}=\frac{3}{2}+\frac{y_2}{100}\Longrightarrow$$

$$150+x_1=150+x_2\wedge150+y_1=150+y_2\Longrightarrow x_1=x_2\wedge y_1=y_2$$

ואכן: $\left(x_1,y_1\right)=\left(x_2,y_2\right)$.

f מוגדרת היטב - יהי $\left(x,y\right)\in A$, צ"ל: $f\left(x,y\right)\in B$, כלומר:

$\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{100},\frac{3}{2}+\frac{y}{100}\right)\in B$. מהגדרת B, פירוש הדבר שצריך להראות ש:

$$1\leq\frac{3}{2}+\frac{x}{100}\leq2\wedge1\leq\frac{3}{2}+\frac{y}{100}$$

אם כן, $\left(x,y\right)\in A$ פירושו: $x^2+\left(y-1\right)^2\leq2$.

בפרט, $x^2\leq2\wedge\left(y-1\right)^2\leq2$, ובפרט: $-3\leq x,y\leq3$. לכן, $-\frac{3}{100}\leq$

$\frac{x}{100},\frac{y}{100}\leq\frac{3}{100}$. מכאן, נקבל שאכן: $1\leq\frac{3}{2}+\frac{x}{100}\leq2\wedge1\leq\frac{3}{2}+\frac{y}{100}$.

כעת, נגדיר $g:B\to A$ ע"י: $g\left(x,y\right)=\left(\frac{x}{100},\frac{1}{y}\right)$.

g חח"ע - יהיו $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\in B$ עבורם: $g\left(x_1,y_1\right)=g\left(x_2,y_2\right)$,

צ"ל: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. אכן:

$$g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2) \Longrightarrow \left(\frac{x_1}{100}, \frac{1}{y_1}\right) = \left(\frac{x_2}{100}, \frac{1}{y_2}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{x_1}{100} = \frac{x_2}{100} \wedge \frac{1}{y_1} = \frac{1}{y_2} \Longrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

ואכן: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

g מוגדרת היטב - יהי $(x, y) \in B$, צ"ל: $g(x, y) \in A$, כלומר:
$\left(\frac{x}{100}, \frac{1}{y}\right) \in A$. מהגדרת A, פירוש הדבר שצריך להראות ש:

$$\left(\frac{x}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 \leq 2$$

אם כן, $(x, y) \in B$ פירושו: $1 \leq x \leq 2 \wedge y \geq 1$. לכן, $\frac{1}{100} \leq \frac{x}{100} \leq \frac{2}{100}$ מצד אחד.

מצד שני: $1 \leq \frac{1}{y} \leq 0$. לכן, $0 \leq \frac{1}{y} - 1 \leq -1$ ולכן: $1 \leq \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 \leq 0$.

לכן, נקבל:

$$\left(\frac{x}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 \leq \left(\frac{2}{100}\right)^2 + 1^2 \leq 2$$

כנדרש.

סה"כ, מצאנו פונקציות $f : A \to B, g : B \to A$ חח"ע. לכן, לפי ק.ש.ב., נוכל להסיק ש: $A \sim B$.

ב. נסמן ב-A_1 את קבוצת כל הפונקציות ש-1 לא נמצא בתמונה שלהן, ובאופן דומה נסמן A_2, A_3, A_4. קבוצת הפונקציות שהן לא על היא: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, בעוד שסך כל הפונקציות הוא: 4^7. לכן, אנו רוצים לחשב את:

$$4^7 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

כשאת עוצמת האיחוד נחשב בעזרת עקרון ההכלה וההדחה.

מהי $|A_1|$? כמה פונקציות $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4\}$ מקיימות ש-1 לא נמצא בתמונה שלהן? בפונקציות כאלו, לכל אחד מ-7 איברי התחום יש 3 אפשרויות ללכת אליהן בטווח; במילים אחרות, אפשר לחשוב על פונקציות כאלו כעל פונקציות: $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{2,3,4\}$. יש 3^7 פונקציות כאלו.

החישוב זהה גם עבור שאר הקבוצות – זה לא משנה אם 1 הוא זה שירד מהטווח, או שזה 2 או 3 או 4; לכן העוצמה של כל A_i היא $|A_i| = 3^7$. לכן: $\sum |A_i| = 4 \cdot 3^7$.

כעת, מהי $|A_i \cap A_j|$? באופן דומה למקרה של קבוצה אחת, פונקציה $f \in A_i \cap A_j$ היא פונקציה שגם i וגם j לא נמצאים בתמונה שלה. אפשר לחשוב על פונקציות כאלו כעל פונקציות מקבוצה עם 7 איברים לקבוצה עם 2 איברים, ולכן יש 2^7 פונקציות כאלו. יש $\binom{4}{2}$ חיתוכים שונים של שתי קבוצות, ולכן: $\sum |A_i \cap A_j| = \binom{4}{2} 2^7$.

מהי $|A_i \cap A_j \cap A_k|$? בכל חיתוך $A_i \cap A_j \cap A_k$ יש רק פונקציה אחת –

זו ששולחת את כל האיברים מהתחום לאיבר היחיד בטווח ששונה מ-i, j, k;

יש 4 חיתוכים כאלו, ולכן: $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k| = 4$.

לבסוף, הקבוצה $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ ריקה - לא קיימת פונקציה $\{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4\}$ שאף אחד מהאיברים $1,2,3,4$ לא נמצא בטווח שלה.

סה"כ, התשובה היא:

$$4^7 - \left(4 \cdot 3^7 - \binom{4}{2} 2^7 + 4\right) = 8400$$

אמריקאיות:

מתאים לטופס המבחן המצורף - הטענה הראשונה היא הנכונה.

1. נלך הפוך - התשובה השניה לא נכונה, כי לא נקבל את $(1,6)$ שנמצא בקבוצה.

התשובה השלישית לא נכונה, כי לא נקבל את $(4,3)$ שנמצא בקבוצה.
התשובה הרביעית לא נכונה, כי נקבל את $(1,9)$ שלא נמצא בקבוצה.

2. $f\left(2\right)$ - המילה החוקית היחידה בת 2 אותיות היא AA, כלומר: $f\left(2\right) = 1$.

המילים החוקיות מאורך 3 הן: AAB, AAC, BAA, CAA, AAA.

לכן: $f\left(3\right) = 5$.

כעת, נתבונן במילה באורך n. נחלק למקרים.

א. אם היא מתחילה ב-B או ב-C, כדי שהיא תהיה חוקית שאר ה-$n-1$ אותיות צריכות להיות מילה חוקית; אם כן, יש 2 אפשרויות לאות הראשונה ו-

$f\left(n-1\right)$ לשאר האותיות, ולפי עקרון המכפלה יש $2f\left(n-1\right)$ מילים חוקיות כאלו.

ב. אם היא מתחילה ב-A, נחלק לתתי-מקרים.

1. אם האות אחרי A היא B או C, כדי שהמילה תהיה חוקית אנו צריכים ששאר ה-$n-2$ אותיות תהיינה מילה חוקית, כלומר $2f\left(n-2\right)$.

2. אם האות אחרי A היא A, כבר יש לנו רצף AA וכל שאר ה-$n-2$ אותיות יכולות להיות מה שנחפוץ - 3^{n-2} (בחירה של $n-2$ פעמים מתוך 3, עם חזרה ועם חשיבות לסדר כי במילים יש חשיבות לסדר).

סה"כ, לפי עקרון הסכום, נקבל שאכן:

$$f\left(n\right)=2f\left(n-1\right)+2f\left(n-2\right)+3^{n-2}$$

3. אם $A\sim B$, אז קיימות $f:A\rightarrow B$ חח"ע ועל וגם: $f^{-1}:B\rightarrow A$ חח"ע ועל, ובפרט קיימת $f:A\rightarrow B$ חח"ע ו-$g:B\rightarrow A$ על.

הטענה השניה לא נכונה - $A=\{1\}$ וגם $B=\{1,2\}$ הן בנות-מניה, למרות ש: $|A|<|B|$.

הטענה שלישית לא נכונה - $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י $f\left(n\right)=n$ היא חח"ע ולא על, למרות ש: $|\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}|$.

הטענה הרביעית לא נכונה - למשל $A=\mathbb{R},B=P\left(\mathbb{R}\right)$.

4. f על, מכיוון ש: $f\left(\{a\}\right)=a$ לכל $a\in\mathbb{N}$; g לא על, מכיוון ש: $g\left(a\right)\leq3$ לכל $a\in\mathbb{N}$.

5. בעצם, מדובר בסידור של AB, AB, AB, C, C, D בשורה, ולפי הנוסחה לתמורות עם חזרה יש: $\frac{6!}{2!3!} = \frac{6!}{3!2!1!}$ כאלו.

6. כל כיתה מקבלת תמונה אחת של קנטור באנקר. נשאר לחלק 13 תמונות של קנטור בין 7 הכיתות – לכל אחת מ-13 התמונות בוחרים כיתה. זו בחירה עם חזרה (אפשר לבחור את אותה הכיתה שוב ושוב) ובלי חשיבות לסדר (התמונות זהות) ולכן: $\binom{19}{6} = \binom{13+7-1}{7-1}$.

כעת, מספר האפשרויות לחלק 20 תמונות של שרדר הוא: $\binom{20+7-1}{7-1}$, ומספר האפשרויות לחלק 20 תמונות של ברנשטיין הוא $\binom{20+7-1}{7-1}$.

סה"כ, אנו מחלקים את כל התמונות, ולפי עקרון המכפלה נקבל:

$$\binom{19}{6}\binom{20+7-1}{7-1}\binom{20+7-1}{7-1} = \binom{19}{6}\binom{26}{6}^2$$

7. נפרק את 960 למכפלת ראשוניים ונקבל: $960 = 2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^1$. כל מחלק הוא מהצורה: $2^i3^j5^k$ כאשר: $0 \le i \le 7, 0 \le j, k \le 1$ ולכן יש $7 \cdot 2 \cdot 2 = 28$ מחלקים. שניים מהם הם $1, 2$, ולכן יש 26 מחלקים שהם גדולים מ-2.

8. לפי עקרון שובך היונים; אפשר גם להסתכל על זה ב"היגיון" – מהו המקרה "הכי גרוע", כלומר המספר המקסימלי של ימים שאחריו אבא גוריו עדיין לא ילבש את אותה חולצה 5 פעמים? אם במשך 45 יום הוא לבש את כל 5 החולצות, כל אחת 9 פעמים. ביום ה-46, לא משנה מה לא משנה מי, הוא בוודאות ילבש אחת מהחולצות לפחות 5 פעמים.

9. אפשר לצייר גרף שדרגות קודקודיו הן $0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3$.

הטענה השניה לא נכונה, כי בגרף עם 8 קודקודים קודקוד שדרגתו 7 הוא קודקוד שמחובר לכל השאר בעוד שקודקוד שדרגתו 0 לא מחובר לאף אחד, ושני הדברים סותרים זה את זה.

הטענה השלישית לא נכונה, כי בגרף עם 8 קודקודים הדרגה המקסימלית היא 7.

הטענה הרביעית לא נכונה, כי בגרף עם 8 קודקודים קודקוד שדרגתו 7 הוא קודקוד שמחובר לכל השאר, אם יש שניים כאלו פירוש הדבר שכל קודקוד מחובר לשני קודקודים לפחות; זאת, בסתירה לכך שיש קודקוד שדרגתו 1.

10. השאלה נלקחה מהחוברת, עמ' 41.