פתרון מועד ב' בדידה 2 תשפ"א

**שאלות פתוחות:**

1. א. צריך להוכיח שלכל $n$ טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+3n=2n\,(2n+1)$$

ראשית, נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=1$:

$$1+2+3=2\cdot 1\cdot(2\cdot 1+1)$$

ואכן $6=6$ – הטענה אכן נכונה.

כעת, נניח שהטענה נכונה עבור שלב $n$ כלשהו, כלומר נתון ש:

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+3n=2n\,(2n+1)$$

ובאמצעות ההנחה, נוכיח שהטענה נכונה עבור השלב הבא $n+1$, כלומר

צ"ל:

$$(n+1)+(n+2)+(n+3)\cdots+3(n+3)=2(n+1)(2(n+1)+1)$$

נתחיל מאגף שמאל ונגיע לאגף ימין; כדי להשתמש בהנחת האינדוקציה, נוסיף ונוריד $n$:

$$(n+1)+(n+2)+(n+3)\cdots+3(n+3)=$$

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)\cdots+3(n+3)-n=$$

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)\cdots+3n+(3n+1)+(3n+2)+(3n+3)-n$$

כעת, מהנחת האינדוקציה נקבל:

$$=2n(2n+1)+(3n+1)+(3n+2)+(3n+3)-n=$$

$$4n^2+2n+8n+6=4n^2+10n+6=(2n+2)(2n+3)=$$

$$=2(n+1)(2(n+1)+1)$$

כנדרש.

ב. אגף ימין מתאר את הספירה הבאה – כמה תתי קבוצות של $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ מכילות 2 איברים בדיוק? זו בחירה בלי חזרה (בקבוצה לא מופיע אותו האיבר פעמיים) ובלי חשיבות לסדר (בקבוצות אין משמעות לסדר האיברים) ואכן: $\binom{n+1}{2}$.

מצד שני, אפשר לתאר את הספירה הזו באופן הבא. נחלק למקרים:

קבוצות עם שני איברים שהאיבר הגדול בהן הוא 2 – לאיבר הנוסף יש רק אפשרות אחת, 1, ולכן יש קבוצה אחת כזו.

קבוצות עם שני איברים שהאיבר הגדול בהן הוא 3 – לאיבר הנוסף יש 2 אפשרויות, $1, 2$.

קבוצות שהאיבר הגדול בהן הוא 4, קבוצות שהאיבר הגדול בהן הוא 5 וכן הלאה עד קבוצות שהאיבר הגדול בהן הוא $n$. באופן כללי, יש $k-1$ קבוצות של שני איברים שהאיבר הגדול בהן הוא $k$ (כי יש $k-1$ אפשרויות לאיבר השני – $1, 2, \ldots, k-1$). לפי עקרון הסכום, נחבר את כל התוצאות ונקבל שמספר תתי-הקבוצות של $n+1$ המכילות 2 איברים בדיוק הוא:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

וזהו אגף שמאל.

סה"כ, אגף ימין ואגף שמאל מתארים את אותה הספירה ולכן הם שווים.

2. נשתמש בקש"ב.

מצד אחד, נגדיר פונקציה $f : A \to B$ ע"י:

$$f\left(x,y\right)=\left(\frac{1}{x+1},\frac{1}{-y+2}\right)$$

$f$ מוגדרת היטב - יהי $(x,y)\in A$ ונראה ש: $f(x,y)\in B$, כלומר צ"ל: $\left(\frac{1}{x+1},\frac{1}{-y+2}\right)\in B$.

אם כן, מהגדרת הקבוצות $A,B$, נתון ש: $x\geq 0, y<1$

וצ"ל: $\left(\frac{1}{x+1}\right)^2+\left(\frac{1}{-y+2}\right)^2\leq 5$.

מכיוון ש-$x\geq 0$, $x+1\geq 1$ ולכן: $0<\frac{1}{x+1}\leq 1$. כמו כן, $y<1$, לכן $-y>-1$ ולכן: $-y+2>1$. מכאן, נקבל: $0<\frac{1}{-y+2}<1$.

משני האי-שוויונים: $0<\frac{1}{x+1}\leq 1, 0<\frac{1}{-y+2}<1$ נקבל:

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^2+\left(\frac{1}{-y+2}\right)^2<1^2+1^2\leq 5$$

כנדרש.

$f$ חח"ע - יהיו $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$ עבורם: $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$, צ"ל: $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

אם כן:

$$f\left(x_1,y_1\right)=f\left(x_2,y_2\right)\Longrightarrow\left(\frac{1}{x_1+1},\frac{1}{-y_1+2}\right)=\left(\frac{1}{x_2+1},\frac{1}{-y_2+2}\right)$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{x_1+1}=\frac{1}{x_2+1}\wedge\frac{1}{-y_1+2}=\frac{1}{-y_2+2}\Longrightarrow$$

$$x_1+1=x_2+1\wedge -y_1+2=-y_2+2\Longrightarrow x_1=x_2\wedge y_1=y_2$$

ואכן $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, כנדרש.

מצד שני, נגדיר $g:B\to A$ ע"י: $g\left(x,y\right)=\left(x+50,y-50\right)$.

$g$ מוגדרת היטב - יהי $(x,y)\in B$ ונראה ש: $g\left(x,y\right)\in A$, כלומר צ"ל: $\left(\frac{1}{x+1},\frac{1}{-y+2}\right)\in A$.

אם כן, מהגדרת הקבוצות $A,B$, נתון ש: $x^2+y^2\leq 5$ וצ"ל: $x+50\geq 0, y-50<1$.

מכיוון ש: $x^2+y^2\leq 5$, $x^2,y^2\leq 5$ ולכן: $-\sqrt{5}\leq x,y\leq \sqrt{5}$, ואפשר גם לומר: $-10\leq x,y\leq 10$. לכן: $40\leq x+50\leq 60, -60\leq y-50\leq -40$, ובפרט: $x+50\geq 0, y-50<1$, כנדרש.

$g$ חח"ע - $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\in B$ עבורם: $g\left(x_1,y_1\right)=g\left(x_2,y_2\right)$, צ"ל: $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

אם כן:

$$g\left(x_1,y_1\right)=g\left(x_2,y_2\right)\Longrightarrow\left(x_1+50,y_1-50\right)=\left(x_2+50,y_2-50\right)$$

$$\Longrightarrow x_1+50=x_2+50\wedge y_1-50=y_2-50\Longrightarrow x_1=x_2\wedge y_1=y_2$$

ואכן $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, כנדרש.

סה"כ, מצאנו שתי פונקציות $f:A\to B$ ו-$g:B\to A$ חח"ע, ולכן - לפי קש"ב - $A\sim B$, כנדרש.

ב. ראשית, יש: $9\cdot10^3 = 9000$ מספרים בעלי 4 ספרות – לספרה הראשונה יש 9 אפשרויות (הכל חוץ מ-0), לשאר הספרות 10 אפשרויות ולכן, לפי עקרון המכפלה, יש $9 \cdot 10^3$ מספרים בעלי 4 ספרות.

כעת, נסמן ב-$A_1$ את קבוצת כל המספרים שלא מכילים את הספרה 2, ב-$A_2$ את קבוצת כל המספרים שלא מכילים את הספרה 3 ו ב-$A_3$ את קבוצת כל המספרים שלא מכילים את הספרה 4. לפי עקרון המשלים, אנו רוצים לחשב את:

$$9000 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

את עוצמת האיחוד נחשב, כמובן, באמצעות עקרון ההכלה וההדחה.

$|A_1|$ – כמה מספרים בעלי 4 ספרות לא מכילים את הספרה 2? לספרה הראשונה יש 8 אפשרויות (לא 0 ולא 2), לשאר הספרות 9 אפשרויות ולכן – לפי עקרון המכפלה – $|A_1| = 8\cdot9^3$. באופן דומה, גם: $|A_2| = |A_3| = 8\cdot9^3$.

$|A_1 \cap A_2|$ – כמה מספרים בעלי 4 ספרות לא מכילים את הספרות $2, 3$? לספרה הראשונה יש 7 אפשרויות (לא 0, לא 2 ולא 3), לשאר הספרות 8 אפשרויות ולכן – לפי עקרון המכפלה – $|A_1 \cap A_2| = 7 \cdot 8^3$. באופן דומה, גם: $|A_1 \cap A_3| = |A_3 \cap A_2| = 8 \cdot 9^3$.

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ – כמה מספרים בעלי 4 ספרות לא מכילים את הספרות $2, 3, 4$? לספרה הראשונה יש 6 אפשרויות (לא $0, 2, 3, 4$), לשאר הספרות 7 אפשרויות (לא $2, 3, 4$) ולכן – לפי עקרון המכפלה – $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 6\cdot7^3$.

סה"כ:

$$9000-\left|A_1\cup A_2\cup A_3\right|=$$

$$9000-\left(3\cdot 8\cdot 9^3-3\cdot 7\cdot 8^3+6\cdot 7^3\right)=198$$

**אמריקאיות:**

מתאים לטופס המצורף, שבו התשובה הנכונה היא הראשונה.

1. הטענה הנכונה היא $a\leq 2b$ לכל $(a,b)\in A$. אכן, האיבר בבסיס הרקורסיה: $(0,0)$ מקיים זאת: $0\leq 2\cdot 0$, ואם $(a,b)\in A$ מקיים את הטענה, כלומר $a\leq 2b$, כל אחד מהאיברים שמתקבלים ממנו ע"י כלל הרקורסיה מקיימים אותה גם הם:

$$(a+1,b+1)\Longrightarrow a+1\leq 2b+1\leq 2b+2=2\left(b+1\right)$$

$$(a,b+1)\Longrightarrow a\leq 2b\leq 2b+2=2\left(b+1\right)$$

$$(a+2,b+1)\Longrightarrow a+2\leq 2b+2=2\left(b+1\right)$$

שאר הטענות לא נכונות – הטענה השניה לא נכונה, כי $(0,2)\in A$ אך לא מקיים אותה.

הטענה השלישית לא נכונה, $(0,1)\in A$ אך לא מקיים אותה.
הטענה הרביעית לא נכונה, $(0,0)\in A$ אך לא מקיים אותה.

2. יש 4 מילים חוקיות עם 2 אותיות: $AA, AB, BA, BB$ ולכן: $f(2)=4$;
יש 7 מילים חוקיות עם 3 אותיות: $AAA, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB$
ולכן: $f(3)=7$.

כעת, אם מילה בעלת $n$ אותיות מתחילה ב-$B$, אפשר להשלים אותה למילה חוקית ב-$f(n-1)$ אופנים.

אם מילה בעלת $n$ אותיות מתחילה ב-$A$, יש שני מקרים – אם האות הבאה אחריה היא $B$, אפשר להשלים אותה למילה חוקית ב-$f(n-2)$ אופנים. אם האות הבאה היא $A$, כדי שהרצף $AAB$ לא יופיע שאר האותיות חייבות להיות $A$, כלומר יש רק מילה אחת כזו.

סה"כ, לפי עקרון הסכום, נקבל:

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+1$$

3. החיתוך הוא קבוצה עם איבר אחד: $P(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\cap P(\mathbb{N})=\{\emptyset\}$, כלומר זו קבוצה סופית.

4. $f$ לא חח"ע, למשל: $f(\{1\},\{2\})=f(\{2\},\{1\})=\{1,2\}$ למרות

ש: $(\{1\},\{2\}) \neq (\{2\},\{1\})$.

$g$ לא חח"ע, למשל: $g(\mathbb{N},\mathbb{N}) = g(\mathbb{N},\{1\}) = \emptyset$ למרות ש: $(\mathbb{N},\mathbb{N}) \neq (\mathbb{N},\{1\})$.

5. אחרי שכל סטודנט מקבל מחברת, נשארו לדודות $60$ מחברות לחלק ל-$340$ סטודנטים, ללא הגבלה. זו חלוקה עם חזרה (אפשר לבחור את אותו הסטודנט שוב) ובלי חשיבות לסדר (המחברות זהות), ולכן:

$$\binom{340+60-1}{340-1} = \binom{399}{339}$$

6. מספר עד $120$ הוא חופשי מריבועים אם הוא לא מתחלק ב-$2^2, 3^2, 5^2, 7^2$. כמה מספרים כן מתחלקים ב-$4, 9, 25, 49$? אפשר לספור זאת בעזרת עקרון ההכלה וההדחה. נסמן ב-$A_1$ את אלו שמתחלקים ב-$4$, ב-$A_2$ את אלו שמתחלקים ב-$9$, ב-$A_3$ את אלו שמתחלקים ב-$25$ וב-$A_4$ את אלו שמתחלקים ב-$49$. אנו רוצים לחשב את $120 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$.

הגדלים של קבוצות בודדות הם:

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{120}{4} \right\rfloor = 30, |A_2| = \left\lfloor \frac{120}{9} \right\rfloor = 13$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{120}{25} \right\rfloor = 4, |A_4| = \left\lfloor \frac{120}{49} \right\rfloor = 2$$

חיתוכים:

$$|A_1\cap A_2|=\left\lfloor\frac{120}{4\cdot 9}\right\rfloor=3,|A_1\cap A_3|=\left\lfloor\frac{120}{4\cdot 25}\right\rfloor=1$$

שאר כל החיתוכים הם קבוצות ריקות - למשל, אין מספר בין $1$ ל-$120$ שמתחלק גם ב-$9$ וגם ב-$25$...

אם כן, נקבל:

$$120-(30+13+4+2-3-1)=75$$

7. $1000=2^3\cdot 5^3$, $900=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$. כדי שמספר יחלק את שניהם, הוא צריך לחלק את $2^2\cdot 5^2$, ויש $9$ מספרים כאלו.

8. כמה קבוצות שונות יכולות להיות? $\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=20$; בכל משחק משחקות שתי קבוצות, ולכן יש $10$ משחקים שונים. כדי שאותה קבוצה תשחק לפחות $5$ פעמים, לפי שובך היונים המספר המינימלי של משחקים הדרוש לשם כך הוא $4\cdot 10+1=41$.

9. בגרף $P_n$ יש $n-1$ צלעות, ולכן בגרף המשלים $\overline{P_n}$ יש $\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)$ צלעות. מספר הצלעות במשלים גדול ממספר הצלעות בגרף המסלול, אם:

$$\frac{n\left(n-1\right)}{2}-\left(n-1\right)>n-1 \iff \frac{n\left(n-1\right)}{2}>2\left(n-1\right) \iff n>4$$

וזה אכן המצב.

הטענה השניה לא נכונה – במשלים של הגרף השלם אין בכלל צלעות, בעוד שבגרף השלם יש $\frac{n(n-1)}{2}$.

הטענה השלישית לא נכונה – $P_n$ לא רגולרי.

הטענה הרביעית לא נכונה – בגרף $C_n$ יש $n$ צלעות, בעוד שבגרף הקוביה יש $n2^{n-1}$.

10. המשוואה האופיינית היא: $x^2 = 4x - 4$ ויש שורש כפול: $x = 2$. לכן, הפתרון ההומוגני הוא מהצורה:

$$f_h\left(n\right) = C_1 2^n + C_2 n 2^n$$

כעת, התוספת הלא-הומוגנית היא $2 \cdot 3^n$; מכיוון ש-3 איננו שורש של המשוואה האופיינית, הפתרון הלא הומוגני הוא מהצורה $f_p\left(n\right) = C \cdot 3^n$. כדי למצוא את $C$, נציב את $f_p$ בנוסחת הנסיגה ונקבל:

$$C \cdot 3^n = 4C \cdot 3^{n-1} - 4C \cdot 3^{n-2} + 2 \cdot 3^n$$

נצמצם ב-$3^n$ ונקבל:

$$9C = 12C - 4C + 18$$

כלומר $C = 18$ ולכן: $f_p\left(n\right) = 18 \cdot 3^n$, הפתרון הוא:

$$f\left(n\right) = f_h + f_p = C_1 2^n + C_2 n 2^n + 18 \cdot 3^n$$

בשביל למצוא את הקבועים $C_1, C_2$ נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 20 = f\left(0\right) = C_1 \cdot 2^0 + 0 + 18 \cdot 3^0 \\ 54 = f\left(1\right) = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 1 \cdot 2^1 + 18 \cdot 3^1 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה, $20 = C_1 + 18$, כלומר $C_1 = 2$. נציב זאת במשוואה השניה ונקבל: $54 = 4 + 2C_2 + 54$, כלומר $C_2 = -2$. סה"כ:

$$f\left(n\right) = 2 \cdot 2^n - 2n2^n + 18 \cdot 3^n = \left(1 - n\right) 2^{n+1} + 2 \cdot 3^{n+2}$$