פתרון - מועד ב - בדידה 2 - קיץ תשפ"א

שאלה מספר 1:

א. [8 נקודות] נסמן ב $f(n)$ את מספר הדרכים השונות לרצף לוח $2 \times n$ $(n \geq 1)$ על ידי האריחים הבאים:

1×2 אדום, 2×1 ירוק, 2×2 כחול, 1×2 צהוב, 2×2 סגול.

מצאו נוסחת נסיגה ותנאים התחלתיים עבור $f(n)$. נמקו.

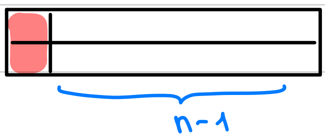
ב. [14 נקודות] בכמה דרכים שונות ניתן לסדר בשורה 5 אנשים בגבהים שונים (אין אף שניים באותו גובה) כך שלא יהיו 3 אנשים **בעלי גובה עוקב**, בסדר עולה או יורד שיעמדו ברצף (כלומר בין כל 3 אנשים העומדים בשורה הבן אדם האמצעי בגובה אינו עומד באמצע)?

נמקו.

פתרון:

א. נבדיל בין המקרים הבאים:

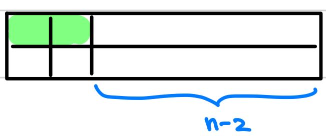
- אם האריח הראשון אדום, אז יש $f(n-1)$ דרכים שונות לסיים את הריצוף כי ככה



- באופן דומה, אם האריח הראשון הוא 1×2 כחול, אז יש $f(n-1)$ דרכים שונות לסיים את הריצוף.

אם האריח הראשון הוא 2×1 ירוק או צהוב, למעלה

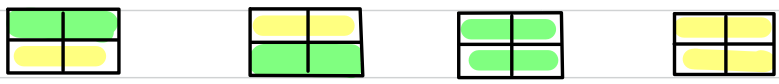
אז למטה:



על מנת לסיים את הריצוף יש לרצף את המשבצות $(n-2) \times 2$

לכן יש $f(n-2)$ דרכים שונות לעשות את זה.

בשתי המשבצות הראשונות יש 4 סידורים אפשריים בין הארִיחים הירוקים והצהובים:



לכן בסה"כ במקרה הזה יש $4f(n-2)$ דרכים שונות לרצף את השביל.

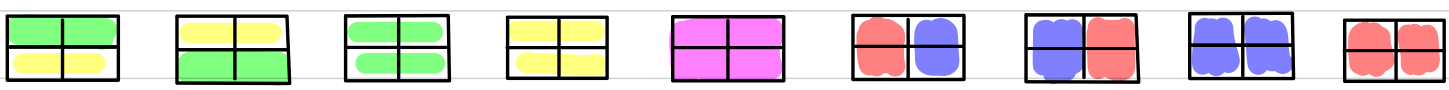
- אם השביל מתחיל עם אריח סגול 2×2 אז משיקולים דומים לעיל, מס' דרכים שונות לרצף את השביל שווה ל-$f(n-2)$

לפי עקרון הסכום, נקבל כי נוסחת הנסיגה היא:

$$f(n)=2f(n-1)+5f(n-2)$$

תנאים התחלתיים: $f(1)=2$ רק הארִיחים 1×2 אדום או כחול מתאימים

$f(2)=9$



ב: נמספר את האנשים לפי גובה מהקטן אל הגבוה ביותר

נסמן A_i גובה של בן אדם מס' i

אזי מתקיים: $A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < A_5$

לפי דרישות השאלה אסור שבסידור האנשים יופיעו הרצפים

הבאים: $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$

$A_3A_2A_1$, A_4,A_3,A_2, $A_5A_4A_3$

נסמן

U = קבוצת כל הסידורים בשורה של 5 אנשים

אזי $|U| = 5!$

B_1 = קבוצת כל הסידורים בשורה של 5 אנשים בהם

מופיע הרצף $A_1A_2A_3$ או הרצף $A_3A_2A_1$

כלומר, האנשים הממוספרים 1,2,3

מופיעים זה אחרי זה בסדר צמודים עולה או יורדת

לכן $|B_1| = \underbrace{3!}\cdot\underbrace{2}$

מס' סידורים בשורה של הפרטים $\boxed{A_1A_2A_3}, A_4, A_5$

סדר עולה

או סדר יורד

באופן דומה,

B_2 = קב' כל הסידורים בשורה של 5 אנשים בהם

מופיע הרצף $A_2A_3A_4$ או הרצף $A_4A_3A_2$

כלומר, האנשים הממוספרים 2,3,4

מופיעים כך אחד ליד השני בסדר עולה או יורד

לכן $|B_2| = \underbrace{3!}_{} \cdot \underbrace{2}_{}$

מס' סידורים בשורה של 3 פריטים $A_5, A_1, \boxed{A_2A_3A_4}$

סדר עולה

או סדר יורד

B_3 = קב' כל הסידורים בשורה של 5 אנשים בהם

מופיע הרצף $A_3A_4A_5$ או הרצף $A_5A_4A_3$

כלומר, האנשים הממוספרים 3,4,5

מופיעים כך אחד ליד השני בסדר עולה או יורד

לכן $|B| = \underbrace{3!}_{} \cdot \underbrace{2}_{}$

מס' סידורים בשורה של 3 פריטים $A_2, A_1, \boxed{A_3A_4A_5}$

סדר עולה

או סדר יורד

לכן $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ = קבוצת כל הסידורים בהם מופיע לפחות אחד הרצפים האסורים

מכאן $U \setminus (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ = קבוצת כל הסידורים הדרושים.

עלינו לחשב את $|U \setminus (B_1 \cup B_2 \cup B_3)|$:

$$|U \setminus \bigcup_{i=1}^{3} B_i| = |U| - |\bigcup_{i=1}^{3} B_i|$$

מכאן, לפי עקרון הכלה והדחה, נקבל:

$$= |U| - \left(\sum_{i=1}^{3} |B_i| - \sum_{1 \le i < j \le 3} |B_i \cap B_j| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3| \right)$$

(*)

- $B_1 \cap B_2$ = קבוצת כל הסידורים מהצורה

$\boxed{A_4 A_3 A_2 A_1}, A_5$ או $\boxed{A_1 A_2 A_3 A_4}, A_5$

לכן $|B_1 \cap B_2| = 2 \cdot 2! = 4$

- $B_1 \cap B_3$ = קבוצת כל הסידורים מהצורה

$\boxed{A_5 A_4 A_3 A_2 A_1}$ או $\boxed{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5}$

לכן $|B_1 \cap B_3| = 2$

- $B_2 \cap B_3$ = קבוצת כל הסידורים מהצורה

$A_1, \boxed{A_5 A_4 A_3 A_2}$ או $A_1, \boxed{A_2 A_3 A_4 A_5}$

לכן $|B_2 \cap B_3| = 2\cdot 2! = 4$

- $B_1 \cap B_3 = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \Leftarrow |B_1 \cap B_2 \cap B_3| = 2$

נציב ב (*) ונקבל:

$$|U \setminus \bigcup_{i=1}^{3} A_i| = 5! - \left(3\cdot 2\cdot 3! - (4+2+4) + 2\right) =$$

$$= 5! - 28$$

<u>שאלה מספר 2:</u>

א. [11 נקודות] דני מקבל דמי כיס במשך 92 ימים (3 חודשים), לפחות שקל ביום, אך לא יותר מ 150 ש״ח בכל התקופה. הוכיחו תוך שימוש ב**עקרון שובך היונים** כי יש תקופה רציפה של כמה ימים בהם דני יקבל 33 שקלים בדיוק.

ב. [11 נקודות] הוכיחו כי:

$$\{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}^+\} \sim \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}^+, a \geq b \geq c\}$$

אין להשתמש באריתמטיקה של עוצמות. יש להוכיח על ידי בניית פונקציית שקילות או תוך שימוש במשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין.

<u>פתרון</u>:

<u>א</u>: נסמן a_i הסכום שדני מקבל עד יום i, <u>כולל</u>, כאשר $1 \leq i \leq 92$. כיוון שדני מקבל כל יום לפחות שקל אחד אך לא יותר מ- 150 ש״ח סה״כ, מתקיים:

$$1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_{92} \le 150 \quad (*)$$

עלינו להוכיח שקיימים ימים i ו- j כך ש- $j>i$

ומתקיים $a_j - a_i = 33$.

נחבר לכל אגפי הא"ש (*) 33 ונקבל א"ש חדש

$$34 \le a_1+33 < a_2+33 < \dots < a_{92}+33 \le 183 \quad (**)$$

כך קיבלנו 184 מספרים:

$$a_1, \dots, a_{92}, a_1+33, \dots, a_{92}+33$$

אשר מקבלים ערכים בין 1 ל-183

לכן, לפי עקרון שובך היונים, יש לפחות שני מספרים

ששווים זה לזה.

כיוון שא"ש (*) ו-(**) כוללים $<$,

לא יתכן ששני המספרים הנ"ל מ-(*) וגם לא יתכן ששניהם

מ-(**). לכן אחד המספרים הוא מ-(*) והשני מ-(**).

לאמור קיימים j,i כך ש- $a_j = a_i + 30$

$i<j$ כי הרי כל יום דן מקבל לפחות שקל אחד. <u>מש"ל</u>

ב. נסמן $A=\{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}^+\}$

$B=\{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}^+ ,\ a>b>c\}$

נשים לב כי מתקיים $B \subseteq A$ ולכן $|B| \le |A|$,

מכוון, על מנת להוכיח כי $|A|=|B|$ מספיק להראות,

לפי משפט קש"ב, כי $|A| \le |B|$.

כלומר, יש להראות פו' חח"ע $f: A \to B$

נגדיר:

$$\forall (a,b,c) \in A \qquad f(a,b,c) = (a+b+c \,,\, b+c \,,\, c)$$

נשים לב כי $\underbrace{a}_{>0}+b+c > \underbrace{b}_{>0}+c > c$

כי הרי $a,b,c > 0$. ולכן $f(a,b,c)=(a+b+c,b+c,c) \in B$

ולכן f מוגדרת היטב.

נראה ש- f חח"ע

נניח כי מתקיים:

$$\underbrace{f(a_1,b_1,c_1)}_{\parallel} = \underbrace{f(a_2,b_2,c_2)}_{\parallel}$$

$$(a_1+b_1+c_1 \,,\, b_1+c_1 \,,\, c_1) = (a_2+b_2+c_2 \,,\, b_2+c_2 \,,\, c_2)$$

$\Downarrow$

$$a_1+b_1+c_1 = a_2+b_2+c_2 \quad \wedge \quad b_1+c_1 = b_2+c_2 \quad \wedge \quad c_1 = c_2$$

$$a_1 = a_2 \qquad \text{נציב} \qquad b_1 = b_2 \qquad \text{נציב}$$

בסה"כ קיבלנו $(a_1,b_1,c_1) = (a_2,b_2,c_2)$.

לכן f חח"ע, כנדרש.

חלק ב'

שאלה מספר 1:

נסמן $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. תהי $A = \{(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid a+b \text{ זוגי} \}$.

למען הסר ספק: 0 הוא מספר זוגי.

אזי ההגדרה הרקורסיבית של A היא:

א. בסיס הרקורסיה: $(0,0) \in A$

כלל הרקורסיה: $(a,b) \in A \implies (a+2,b) \in A \wedge (a,b+2) \in A \wedge (a+1,b+1) \in A$

ב. בסיס הרקורסיה: $(2,0) \in A \wedge (0,2) \in A$

כלל הרקורסיה: $(a,b) \in A \implies (a+2,b) \in A \wedge (a,b+2) \in A \wedge (a+1,b+1) \in A$

ג. בסיס הרקורסיה: $(0,0) \in A$

כלל הרקורסיה: $(a,b) \in A \implies (a+1,b+1) \in A$

ד. בסיס הרקורסיה: $(0,0) \in A$

כלל הרקורסיה: $(a,b) \in A \implies (a+2,b) \in A \wedge (a,b+2) \in A$

פתרון: ניתן 'להוכיח' באינדוקציה על המבנה הרקורסיבי של A

שאלה מספר 2:

בכמה אופנים שונים ניתן לסדר את אותיות המילה $MISSISSIPPI$ כך ש לפחות 3 אותיות S תהיינה צמודות זו לזו?

א. $\frac{9!}{4!2!} - \frac{8!}{4!2!}$

ב. $\frac{8!}{4!3!2!} - \frac{8!}{4!2!}$

ג. $\frac{9!}{4!3!2!} - \frac{8!}{4!4!2!}$

ד. $\binom{11}{4}\binom{7}{3}$

פתרון: מספר הסידורים השונים שווה למס' סידורים שונים

בשורה של ה"פריטים" הבאים: S, $\boxed{SSS}$, P, P, I, I, I, I, M

בלוק אחד

שווה $\frac{9!}{4!\,2!} - \frac{8!}{4!\,2!}$

הורדנו את כל הסידורים שבהם נוצר הבלוק $\boxed{SSSS}$

שאלה מספר 3:

נתונות שתי הקבוצות הבאות:

$$A = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{N}, a < b\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

איזו מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

א. $|B| = |P(A)| = \aleph$

ב. $|A| = |B|$

ג. $|A|^{|B|} < |B|^{|A|}$

ד. $|A|^{|B|} < |P(B)|^{|A|}$

פתרון: א. $A \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow |A| = \aleph_0 \Rightarrow |P(A)| = \aleph$

$B \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow |B| = \aleph$

ב. $A \neq B$

ג. $|B|^{|A|} = \aleph^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph \not< |A|^{|B|} = \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph}$

ד. $|P(B)|^{|A|} = (2^{\aleph})^{\aleph_0} = 2^{\aleph} \not< |A|^{|B|} = 2^{\aleph}$

שאלה מספר 4:

נתונה נוסחת הנסיגה $f(n) = kf(n-1) + mf(n-2) + 3^{n-2}(2n-5)$:

עבור אילו מהערכים הבאים של הפרמטרים k **ו-**m **צורת הפתרון הפרטי היא:**

$b(n) = 3^n(cn^2 + dn)$?

א. $k = 11, m = -24$

ב. $k = -24, m = 11$

ג. $k = 2, m = 15$

ד. לא קיימים ערכי k ו-m כאלה

<u>פתרון</u> : פונקציית התוספת של הנוסחה הלא הומוגנית הנתונה

היא :

$$g(n)=3^{n-2}(2n-5)$$

$$=3^n\underbrace{\left(\frac{2}{9}n-\frac{5}{9}\right)}_{r(n)=\frac{2}{9}n-\frac{5}{9}}$$

$x=3$

פולינום ממעלה 1

לכן צורת הפתרון הפרטי היא

$$b(n)=3^n n^t(cn+d)$$

כאשר $t=$ ריבוי של $x=3$ כשורש של פולינום אופייני של

הנוסחה ההומוגנית המתאימה

לפי הנתון $b(n)=3^n n(cn+d)=3^n(cn^2+dn)$

לכן $t=1$, כלומר $x=3$ הוא שורש של פולינום אופייני

מריבוי 1 (רק פעם אחת).

בשאלה הנתונה, הפולינום האופייני הוא $x^2-kx-m=0$

כאשר $k=11,\ m=-24$ נקבל $x^2-11x+24=0$

לפולינום הזה יש שני שורשים 3 ו- 8.

כלומר, $x=3$ הוא שורש מריבוי 1 של פ"א <u>כנדרש</u>.

<u>שאלה מספר 5:</u>

כמה פתרונות שונים שלמים אי שליליים יש למשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 48$$

כאשר נתון כי $x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6$

א. $\binom{26}{2}^2$

ב. $\binom{53}{5} \cdot \frac{1}{2}$

ג. $2\binom{26}{2}$

ד. $\binom{53}{5} \cdot \frac{1}{2^3}$

<u>פתרון</u>: נציב $x_1+x_2+x_3 = x_4+x_5+x_6$

במשוואה הנתונה ונקבל:

$$2(x_1+x_2+x_3) = 48$$

$x_1+x_2+x_3 = 24$ כאשר $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
מס' שלמים

כידוע, מס' פתרונות שונים שלמים אי שליליים של המשוואה הנ"ל

שווה ל- $\binom{3-1+24}{3-1} = \binom{26}{2}$

כיוון ש- $x_1+x_2+x_3 = x_4+x_5+x_6$ מתקיים $x_4+x_5+x_6 = 24$

וגם למשוואה הזו יש $\binom{26}{2}$ פתרונות שונים שלמים אי שליליים

לכן מס' פתרונות שונים שלמים אי שליליים של המשוואה

הנתונה שווה ל- $\binom{26}{2}^2$

<u>שאלה מספר 6:</u>

כמה מילים באורך 8 ניתן ליצור מהאותיות a, b, c, d, e כך שכל אות תופיע לפחות פעם אחת והאותיות a ו- b יופיעו בדיוק פעמיים?

א. $3 \cdot \frac{8!}{2^3}$

ב. $\frac{8!}{2^3}$

ג. $\binom{8}{2}\binom{6}{2}4^3$

ד. $\binom{8}{2}\binom{6}{2}4!$

<u>פתרון</u>: תחילה נקבע מקום של 2 אותיות a.

יש $\binom{8}{2}$ אפשרויות שונות לבחירה כנ"ל.

כעת נקבע מקום עבור 2 אותיות b מתוך 6 מקומות

הנותרים. יש $\binom{6}{2}$ אפשרויות שונות לבחירה הנ"ל.

ב- 4 המקומות הנותרים צריך למקם את האותיות

c, d, e כך שכל אות תופיע לפחות פעם אחת

לכן כל המקרים האפשריים הם:

(1) ב- 4 המקומות הנ"ל יופיעו האותיות c, c, d, e

(2) ב- 4 המקומות הנ"ל יופיעו האותיות c, d, d, e

(3) ב- 4 המקומות הנ"ל יופיעו האותיות c, d, e, e

בכל אחד מהמקרים הנ"ל יש $\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{בחירת מקומות עבור שתי האותיות הצפות}} \cdot \underbrace{2!}_{\text{סידור בשורה של 2 האותיות הנותרות}}$ סידורים אפשריים

כעת, לפי עקרון המכפלה, נקבל כי מספר הסידורים הדרושים שווה ל-

$$\binom{8}{2}\binom{6}{2} \underset{\uparrow}{3} \binom{4}{2} 2! = \frac{8!}{2!\cancel{6!}} \frac{\cancel{6!}}{2!\cancel{4!}} \cdot 3 \cdot \frac{\cancel{4!}}{2!\cancel{2!}} \cancel{2!} = 3 \cdot \frac{8!}{2^3}$$

3 המקרים הנ"ל

<u>שאלה מספר 7:</u>

בעץ <u>מושרש</u> $T = (V, E)$ מסדר n יש בדיוק 5 קדקודים שאינם עלים והם בעלי דרגות $2, 3, 4, 5, 6$.

אזי n שווה ל-

א. 21

ב. 10

ג. 20

ד. 17

<u>פתרון</u>: כידוע מס' הצלעות בכל <u>מושרש</u> שווה לסכום דרגות הקדקודים הפנימיים (שאינם עלים).

להבהרה: דרגת קדקד בעץ מושרש שווה למס' בנים שיש לו.

לכן מס' הצלעות ב-T שווה ל- $2+3+4+5+6=20$

כידוע, מס' הצלעות בעץ מסדר n שווה $n-1$,

לכן $n-1=20$, מכאן $n=21$.

<u>שאלה מספר 8:</u>

נתון עץ <u>לא מושרש</u> $T=(V,E)$ מסדר $n\geq 9$ שבו יש בדיוק 5 קדקודים בעלי דרגה 4,

בדיוק 4 קדקודים בעלי דרגה 2 ושאר הקדקודים הם עלים.

איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. בגרף המשלים $\bar{T}$ קיים מסלול אוילר שאינו מעגל אם"ם $n=11$

ב. בגרף המשלים $\bar{T}$ קיים מעגל אויילר לכל $n\geq 7$

ג. הגרף המשלים $\bar{T}$ אינו קשיר

ד. מספר הצלעות בגרף המשלים $\bar{T}$ שווה ל $(n-1)^2$

פתרון: מס' הצלעות בעץ מסדר n שווה ל- $(n-1)$

לכן מס' הצלעות בגרף המשלים $\bar{T}$ שווה ל

$$\underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{מס' צלעות ב-}K_n} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \neq (n-1)^2$$

$\underbrace{\forall n\geq 9}_{\text{נתון}}$

לכן סעיף ד' לא נכון.

הגרף המשלים קשיר לכן סעיף ג' לא נכון:

יהיו u,v שני קדקדים.

• אם אין ביניהם צלע בעץ T אז יש ביניהם צלע ב-$\bar{T}$

• אם יש ביניהם צלע ב-T, נשים לב כי לפי נתוני השאלה
דרגת כל קדקד ב-T מקיימת $1 \le d \le 4$.
לכן ל-u ול-v ביחד יש לכל היותר 8 שכנים,
כיוון ש-$n \ge 9$ קיים קדקד w ב-T שבהכרח אינו
שכן לא של v ולא של u. לכן יש צלע המקשרת ב-u ו- w
ב-$\bar{T}$ וכן יש צלע בין w ל-v ב-$\bar{T}$ ולכן קיים מסלול (v,w,u)
ב-$\bar{T}$ בין v ו- u. לכן $\bar{T}$ קשיר

<u>נתון</u>:

דרגת קדקד v ב-T	דרגת קדקד v ב-$\bar{T}$	מס' קדקדים כולל
1	$\underbrace{(n-1)}_{\text{דרגת קדקד ב-}K_n}-1 = n-2$	$n-9$
4	$(n-1)-4 = n-5$	5
2	$(n-1)-2 = n-3$	4

כידוע,

- בגרף קשיר קיים מעגל אוילר $\iff$ כל הקדקדים בעלי דרגה זוגית
- בגרף קשיר קיים מסלול אוילר $\underbrace{}_{}$ שאינו מעגל $\iff$ כל הקדקדים בעלי דרגה זוגית פרט לשניים בעלי דרגה אי־זוגית

לפי השאלה הנתונה דרגות הקדקדים ב-$\bar{T}$ הן $n-2, n-3, n-5$

ולכן לא קיים ערך n עבורו כל הדרגות זוגיות.

ולכן לא קיים n עבורו קיים ב-$\bar{T}$ מעגל אוילר.

ולכן סעיף ב' לא נכון.

הדרגות $n-5$, $n-3$ זוגיות והדרגה $n-2$ אי־זוגית

ויש בדיוק שני קדקדים בעלי דרגה $n-2$ אםם $n-9=2$
$\Updownarrow$
$n=11$

נסכם: בגרף המשלים $\bar{T}$ קיים מסלול אוילר שאינו מעגל $\iff$ $n=11$.