

קורס בקרה 2

ד"ר גבי דוידוב



נושאי הקורס "בקרה 2"

1. חזרה על בקרה 1: **LOOP SHAPING** משתני מצב, קונטרולאביליות, אובזרבביליות, צורות קנוניות
2. בקרת מערכות בעזרת משוב מצב והזזת קטבים
3. משחזר מצב ותכונותיו, תכן משחזר מסדר מלא וסדר מופחת
4. שילוב משחזר מצב ומשוב מצב
5. הרחבת מושגי קונטרולאביליות ואובזרווביליות, צורות קנוניות של מערכות לא מינימאליות, Detectability, Stabilizability
6. ליאפונוב: בחינת יציבות מערכות לא לינאריות, עיקרון לה-סאל, למת ברבלט, (בקרה אדפטיבית)
7. מבוא לבקרה אופטימאלית LQR – Linear Quadratic Regulator : אופטימיזציות משוב המצב והמשערך לפי קריטריונים ריבועיים של אנרגיית הבקרה ושגיאות מצב
8. מסנן קלמן: חזרה על אותות אקראיים גאוסיים, משחזר מצב למערכות רועשות - אופטימאלי
9. מבוא לבקרה אופטימאלית עבור תהליך ומדידה רועשים: LQG- Linear Quadratic Gaussian
10. מערכות לינאריות משתנות בזמן



1. רקע היסטורי על התפתחות הבקרה ▲

2. חזרה על בקרה קלאסית – דוגמת תכן LOOP SHAPING ▲

4. משוואות מצב רציפות ודסקרטיות של מערכות לינאריות ▲

5. פולנום אופייני, משפט קיילי המילטון, קונטרולאביליות, אובזרואביליות ▲

6. מערכת מינימאלית, טרנספורמציות, צורות קנוניות, שקילות, תוצאות מאלגברה לינארית ▲

7. מידול של מערכות ▲



רקע היסטורי על התפתחות הבקרה

▲ בקרה קלאסית – עד שנות ה-60 של המאה ה-20 (בקרה 1)

- פונקציות תמסורת (התמרות לפלס) תגובת תדר

- כלים עיקריים: דיאגרמות בודה נייקויסט Root Locus ניקולס - גישה היוריסטית (Cut and Try)

▲ בקרה "מודרנית" במרחב המצב – שנות 60 ואילך (בקרה 2)

- תכן במרחב המצב

- בקרה אופטימאלית על בסיס קריטריוני ביצועים - גישה מתימטית

▲ בקרה "מודרנית" במישור התדר – שנות 80 ואילך

- חזרה לפונקציות תמסורת ותגובת תדר – דגש על אי וודאות במודל – בקרה רובוסטית

QFT , H_2 H_∞

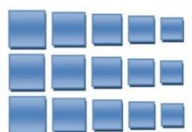
- בקרה אדפטיבית (בקרה 2)

- בקרת NN

- Fuzzy Logic

- MPC:** Model predictive Control

- Reinforcement Learning Control



עבודת מהנדס הבקרה/מערכת

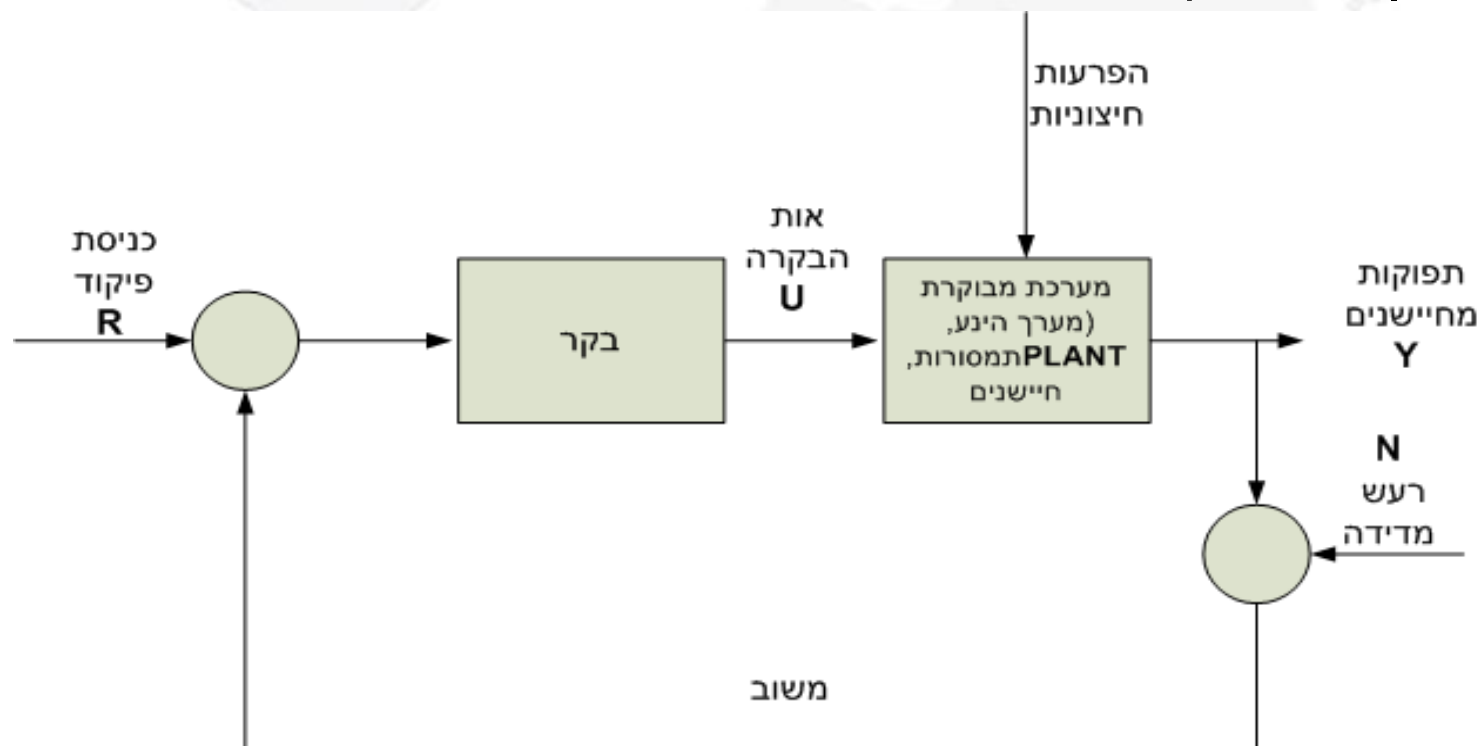
1. מפרט דרישות ביצועים מהמערכת

עקיבה, מהירויות, תאוצות, הצבה

ייצוב/רגולציה נגד הפרעות קרקע אוויר, ים, רעשי חיישנים

דיוקי תצפית ללא רעידות, דיוקי ירי, דיוקי הצבה/חיתוך/כרסום...

פיתרון בעיות עקב השהיות





עבודת מהנדס הבקרה/מערכת

2. ניתוח הדרישות: מידול מערכת- סימולציה, תקציב שגיאות ובחירת רכיבים: ▲

🚩 הפרעות במערכת: קרקע, הלמים, רעידות, רוח/גלים – PSD (עיבוד אותות)
PSD – Power Spectrum Density

🚩 בחירת הנעים (Actuators): חשבון מומנטים/כוחות נדרשים (הנדסת הספק)

🚩 סנסורים: מדי זווית יחסיים - אנקודרים, רזולוורים, פוטנציומטרים, טכומטרים,
מדידים אינרציאליים: ג'ירוסקופים, מדי תאוצה, GPS, מצלמות: עיבוד
תמונה/ראייה ממוחשבת

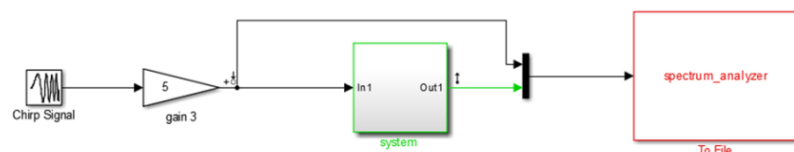
🚩 הגדרת דרישות על המכאניקה: מומנטי חיכוך, אי איזון, תדרים עצמיים (הנד.
מכניקה)

🚩 דרישות מחשב: יישום הבקרה ב- CPU, קצבי דגימה, השהיות מותרות, אורך מילה
(תוכנה קידוד)

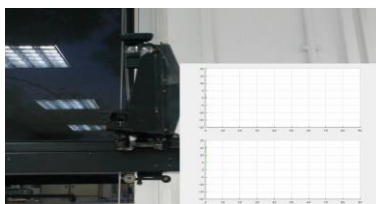


עבודת מהנדס הבקרה/מערכת - המשך

3. לאחר בניית אב טיפוס - מבצעים מדידות לאימות המידול והסימולציה – ספקטרום אנלייזר, עירור המערכת, מדידת התגובות וביצוע אנאליזה ספקטראלית וזמנית.



4. תכן מתימטי על בסיס המידול והמדידות – תכן לעמידה בדרישות – בסימולציות (נתמקד בקורס).

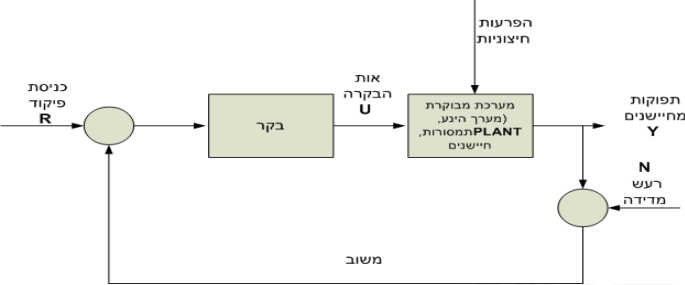



5. יישום וכוון התכן – יישום בסימולציות ועל הדגם הניסויי.

6. מימוש – יישום התכן על המערכת המבוקרת וביצוע אופטימיזציות ביצועים


בעיית הבקרה של מערכות - תזכורת

דרישות ביצועים עיקריות במערכות בקרה: 




עקיבה – עקיבה עם שגיאות מצב מתמיד מינימאליות של פלט המערכת Y אחר אות פיקוד R 

עמידה להפרעות (רגולציה) – רגישות נמוכה של הפלט Y להפרעות חיצוניות. 

עמידות לרעשים – רגישות נמוכה לרעשי מדידה מחיישנים ומאות המשוב. 

הגבלת מאמץ הבקרה – עמידה בביצועים במסגרת הגבלות המומנטים האפשריים במערכת – הגבלת U . 

רובוסטיות – רגישות נמוכה לשינויים ואי – ודאויות בפרמטרים של מודל התהליך. קריטי בייצור שוטף של מערכות. 

הדרישות לעיל עלולות להיות מנוגדות זו לזו ומצריכות ביצוע "פשרות הנדסיות" בביצוע התכן. 

Control development process

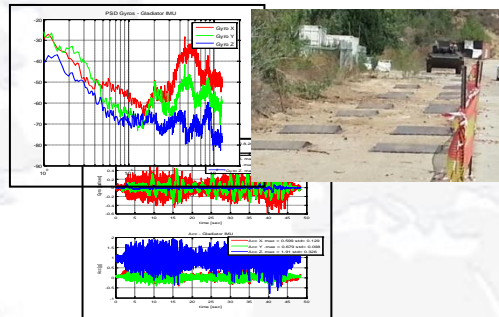
System Analysis

Mechanical & Servo requirements
revision- a design to achieve
performance goals.
Hit Probability Analysis



Vehicle Parameters tests

ground disturbances
measurements



Simulation

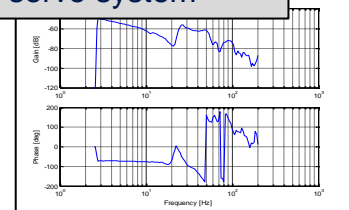
Developing full system
electro-mechanic simulations

Servo & Mechanic
detailed design & manufacture

Prototype receiving
(Plant)

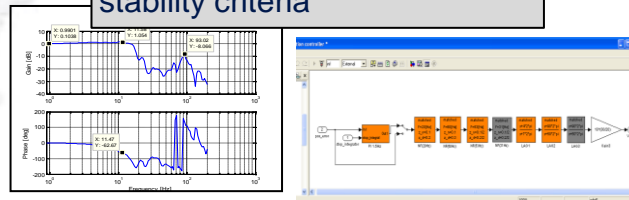
Plant Measurements

Time & Frequency
domains tests to verify
designed servo system



Control model Design

Design control loops under
stability criteria



Dynamic development

Running the turret on a 2DOF
Simulator with the measured ground
disturbances. Optimization of servo
controllers and testing the
stabilization performance



Field tests

- * Course driving – test
stabilization performance
- * Shooting tests

Results analysis ,
Updates & optimizations

Return on
tests - if
needed



ייצוב אינרציאלי של עמדת נשק

רגולציה כנגד הפרעות קרקע ▲





סימולציה מערכתית בסיסית – "מולקולה"

$$T_{M[Nm]} = I_{c[A]} K_{T[NM/A]} T_m$$

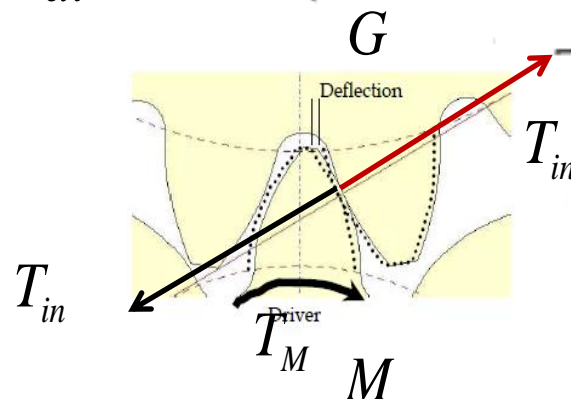
$$T_{in} = J_G \frac{d\Omega_G}{dt}$$

$$T_M - T_{in} = J_M \frac{d\Omega_M}{dt}$$

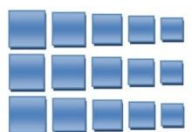
$K_T[Nm/Amp]$ Motor Const

$K_K[Nm/rad]$ Gear Stiffness (spring)

$K_V[Nm/rad/sec]$ Gear Damping



$$T_{in} = K_{K[Nm/rad]} \underbrace{\int (\Omega_M - \Omega_G) dt}_{\Delta\Theta[rad]} + K_{V[NM/rad/s]} \underbrace{(\Omega_M - \Omega_G)}_{\Delta\Omega[rad/sec]}$$



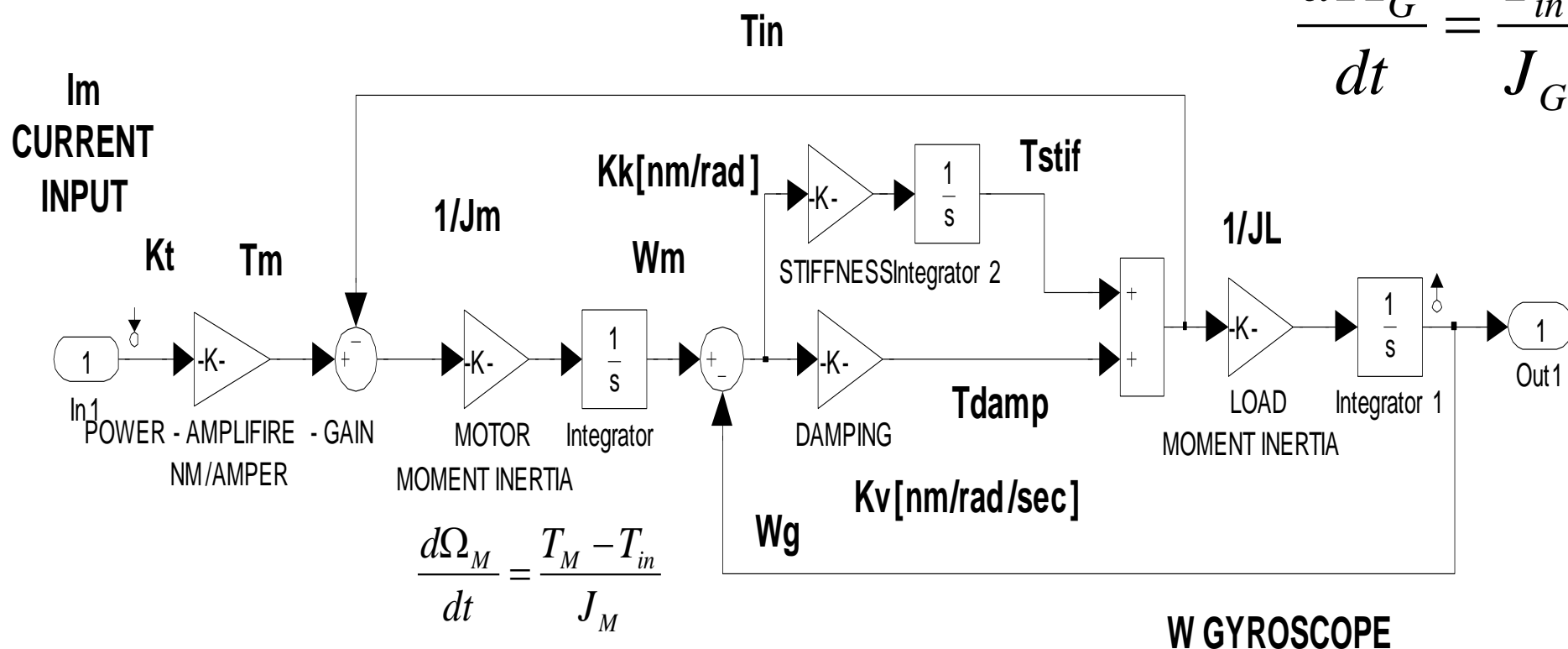
סימולציה מערכתית בסיסית - המשך

סימולציה מערכתית 

$$T_{in} = K_{K[NM/RAD]} \int (\Omega_M - \Omega_G) dt + K_{V[Nm/rad/s]} (\Omega_m - \Omega_G)$$

$$T_{M[Nm]} = I_{c[A]} K_{T[Nm/A]}$$

$$\frac{d\Omega_G}{dt} = \frac{T_{in}}{J_G}$$

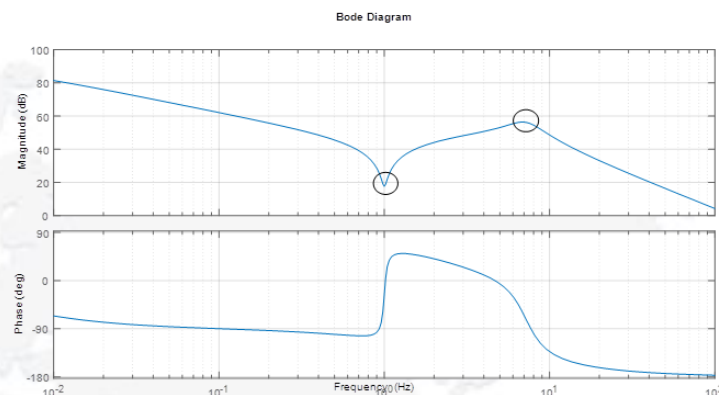




סימולציה מערכתית בסיסית

פונקציית תמסורת מזרם מנוע למהירות ציר מנוע

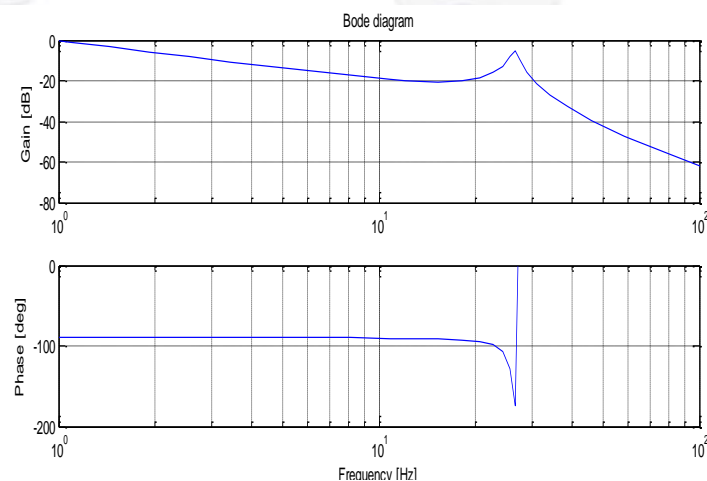
$$\frac{\Omega_M}{I_c}(s) = \frac{K_T}{(J_g + J_M)s} \frac{1 + \frac{K_V}{K_K}s + \frac{J_G}{K_K}s^2}{1 + \frac{K_V}{K_K}s + \frac{J^*}{K_K}s^2}$$



פונקציית תמסורת מזרם מנוע למהירות עומס

$$\frac{\Omega_G}{I_c}(s) = \frac{K_T}{(J_g + J_M)s} \frac{1 + \frac{K_V}{K_K}s}{1 + \frac{K_V}{K_K}s + \frac{J^*}{K_K}s^2}$$

$$J^* = \frac{J_M J_L}{J_M + J_L}$$



תזכורת למערכת מסדר שני

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

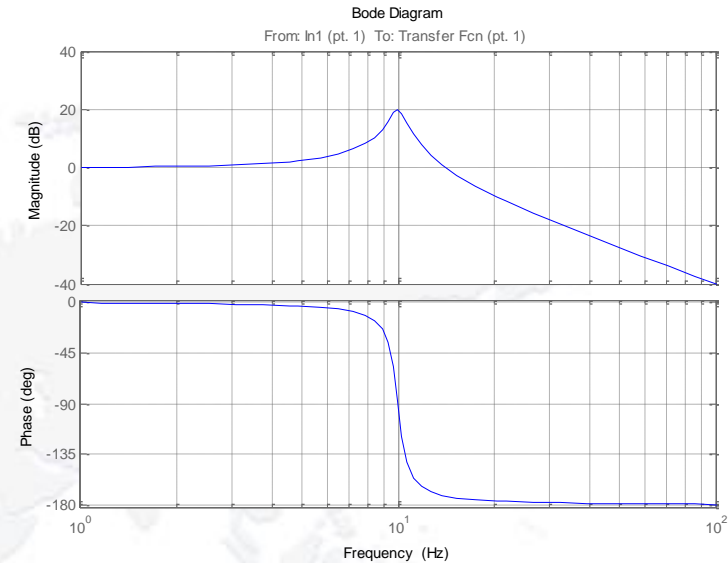
ξ : damping ratio, ω_n : natural frequency

$\xi > 1$: overdamped

$\xi < 1$: underdamped

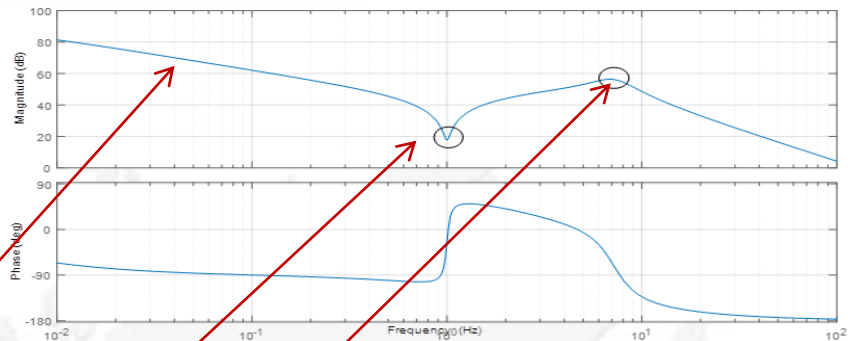
$\xi = 1$: critically damped

$\xi = 0$: undamped



"המולקולה" הבסיסית

Bode Diagram



ניתן לראות שהתמסורת כוללת:

אינטגרטור טהור (עקב המעבר ממומנט – תאוצה) למהירות זוויתית

$$\frac{K_T}{(J_g + J_M)s}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_z} = \sqrt{\frac{K_k}{K_V}}$$

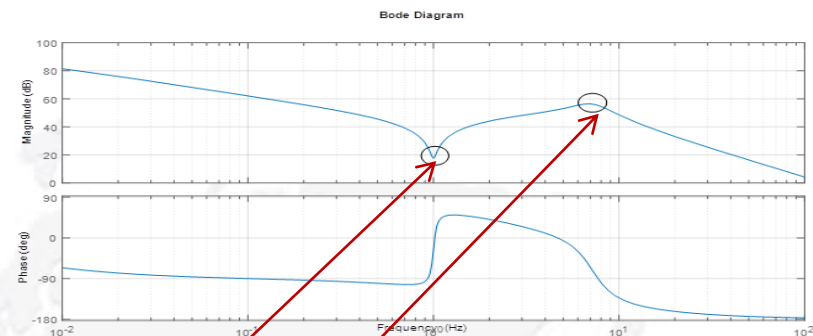
שני אפסים קומפלקסיים עם תדר עצמי: $\omega_z = 2\pi f_z = \sqrt{\frac{K_k}{J_G}}$ ועם ריסון:

$$\frac{2\xi}{\omega_p} = \sqrt{\frac{K_k}{K_V}}$$

שני קטבים קומפלקסיים עם תדר עצמי: $\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{K_k}{J_G \parallel J_m}}$ ועם ריסון:

"המולקולה" הבסיסית מומנט מנוע - טכו

$$\frac{\Omega_M}{I_c}(s) = \frac{K_T}{(J_g + J_M)s} \frac{1 + \frac{K_V}{K_K}s + \frac{J_G}{K_K}s^2}{1 + \frac{K_V}{K_K}s + \frac{J^*}{K_K}s^2}$$



הוא למעשה גבול העברת מומנטים ממנוע

לעומס. על מנת לאפשר העברה של מומנטים ברוחב סרט גדול יש להגדיל את קשיחות הממסרת ו/או להקטין את אינרציית העומס.

$$\omega_z = 2\pi f_z = \sqrt{\frac{K_k}{J_G}}$$

התדר

הוא תדר רזוננס מנוע-ממסרת.

$$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{K_k}{J_G \parallel J_m}} \approx \sqrt{\frac{K_k}{J_m}}$$

התדר

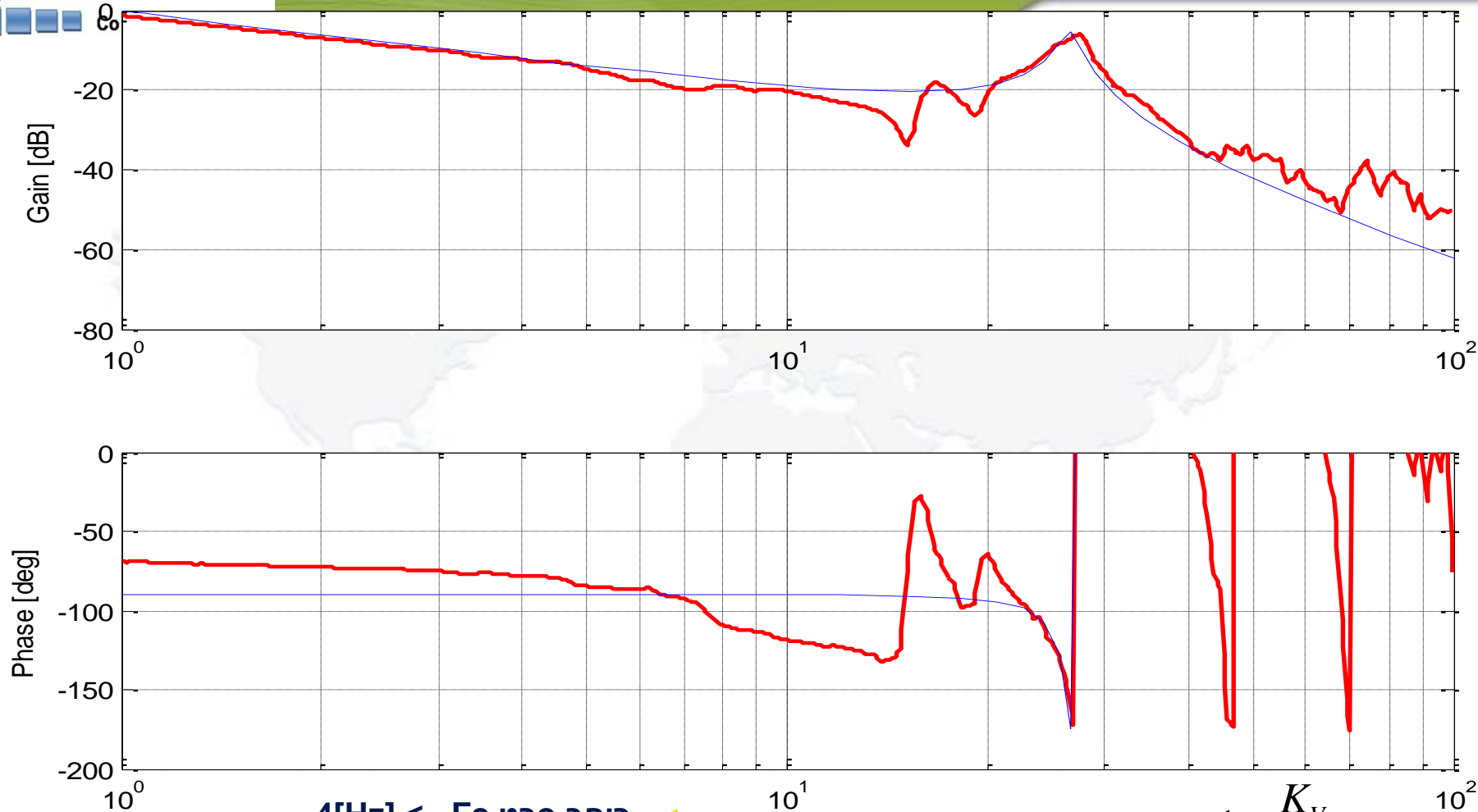
בדרך כלל $J_G \gg J_m$ אז $\omega_p > \omega_z$

כשאיפה נרצה שרזוננס העומס (לא נראה כאן) יהיה שונה מרזוננס מנוע-ממסרת

על מנת לקבל מערכת מרוסנת נדרוש K_V גבוה על ידי בחירת חומרים עם מקדם תקומה גבוה.

LOOP SHAPING

Bode diagram



רוחב סרט $F_c < 4[\text{Hz}]$

עודף פאזה $< 40[\text{Deg}]$

עודף הגבר $< 10[\text{dB}]$

הגבר חוג פתוח ב- $1[\text{Hz}] < 20[\text{dB}]$

שגיאת מצב מתמיד אפס לכניסת ריצה



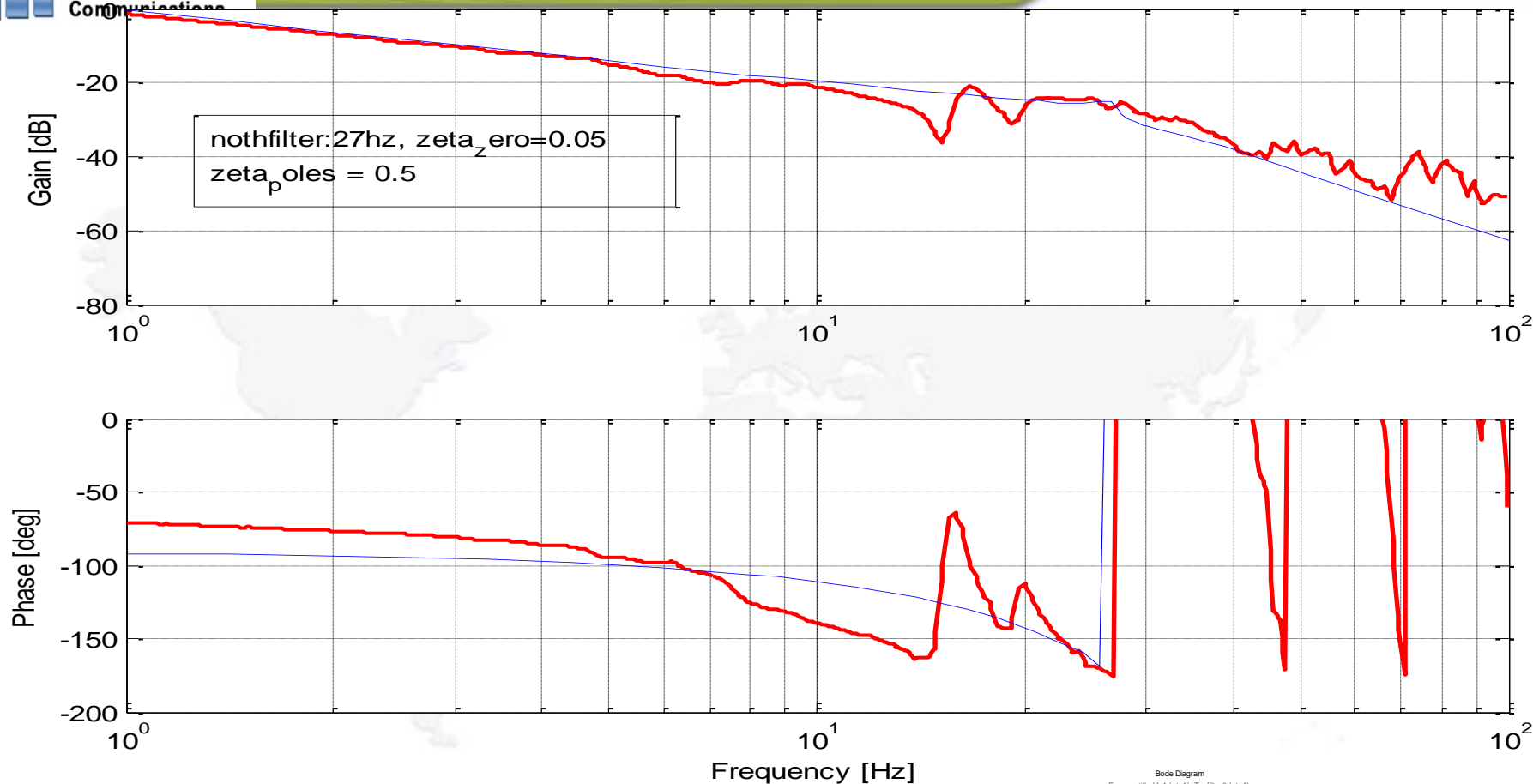
Frequency [Hz]

$$\frac{\Omega_G}{I_c}(s) = \frac{K_T}{(J_g + J_M)s} \frac{1 + \frac{K_V}{K_K}s}{1 + \frac{K_V}{K_K}s + \frac{J^*}{K_K}s^2}$$

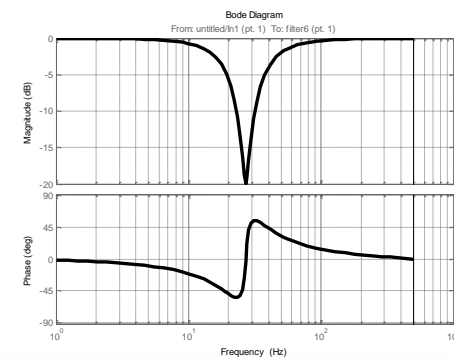


LOOP SHAPING

Bode diagram

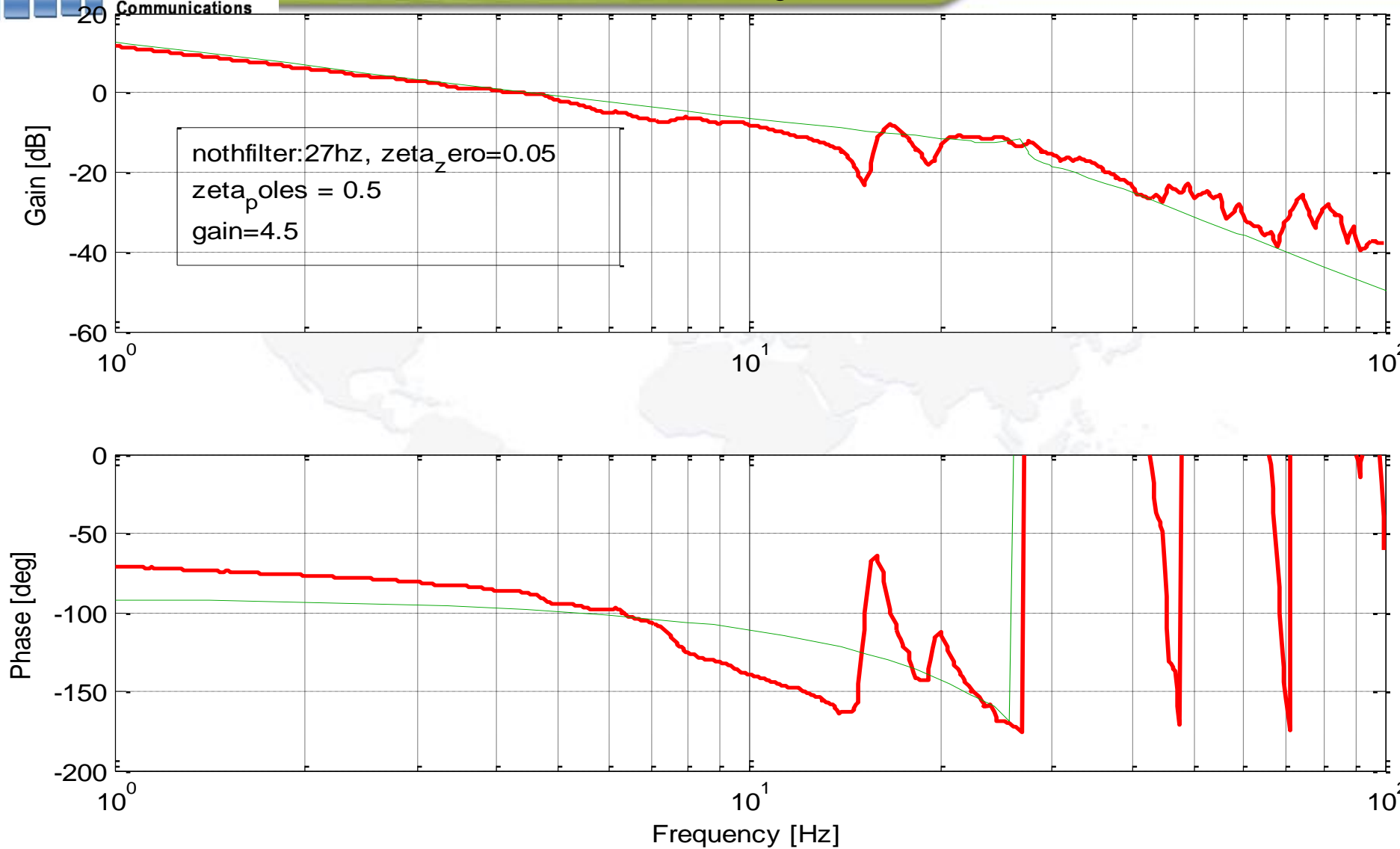


$$H(s) \Big|_{\text{Notch Filter}} = \frac{s^2 + 2\xi_0\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi_p\omega_n s + \omega_n^2} \quad \xi_p > \xi_0$$



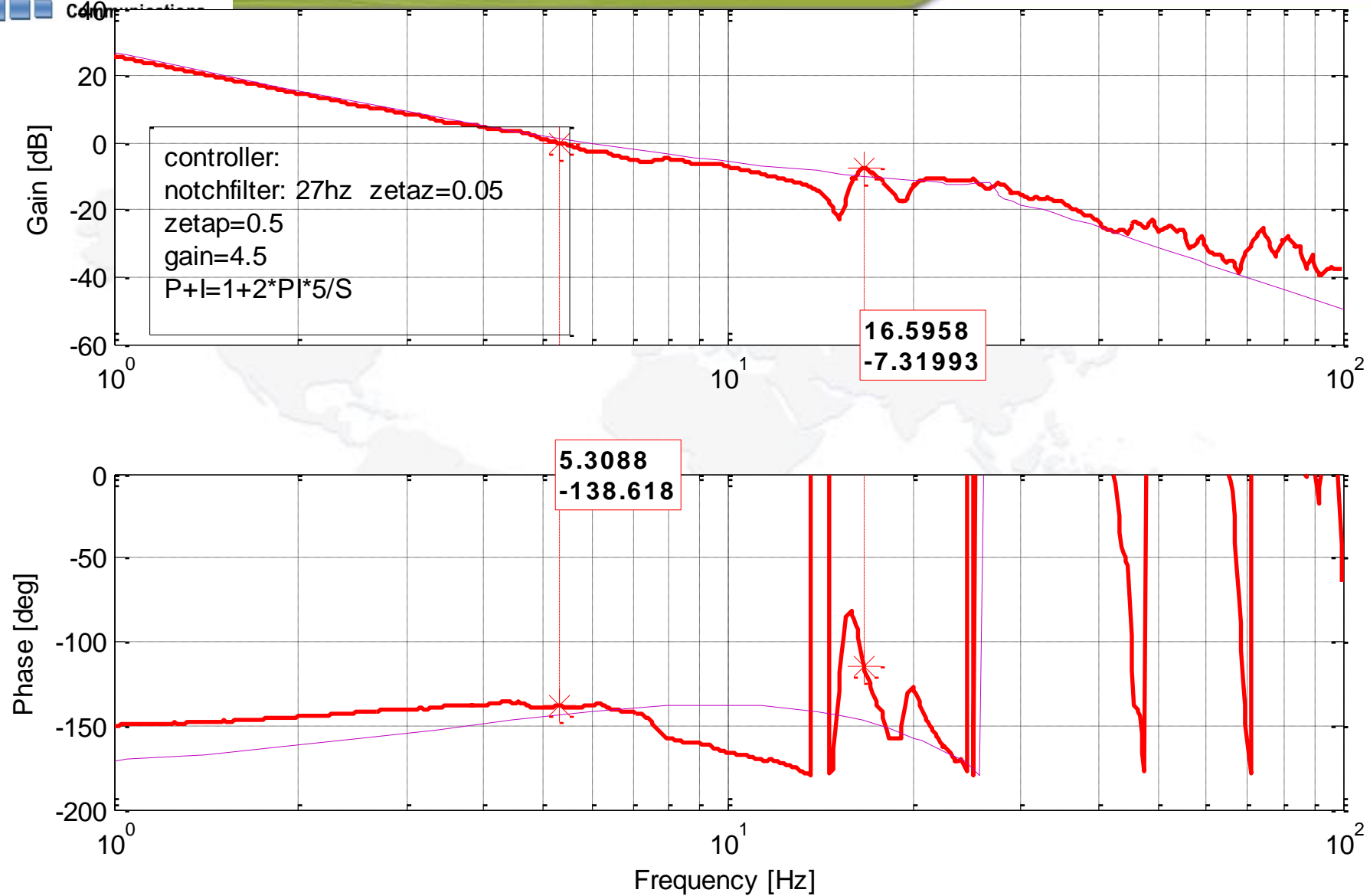
LOOP SHAPING

Bode diagram



LOOP SHAPING

Bode diagram



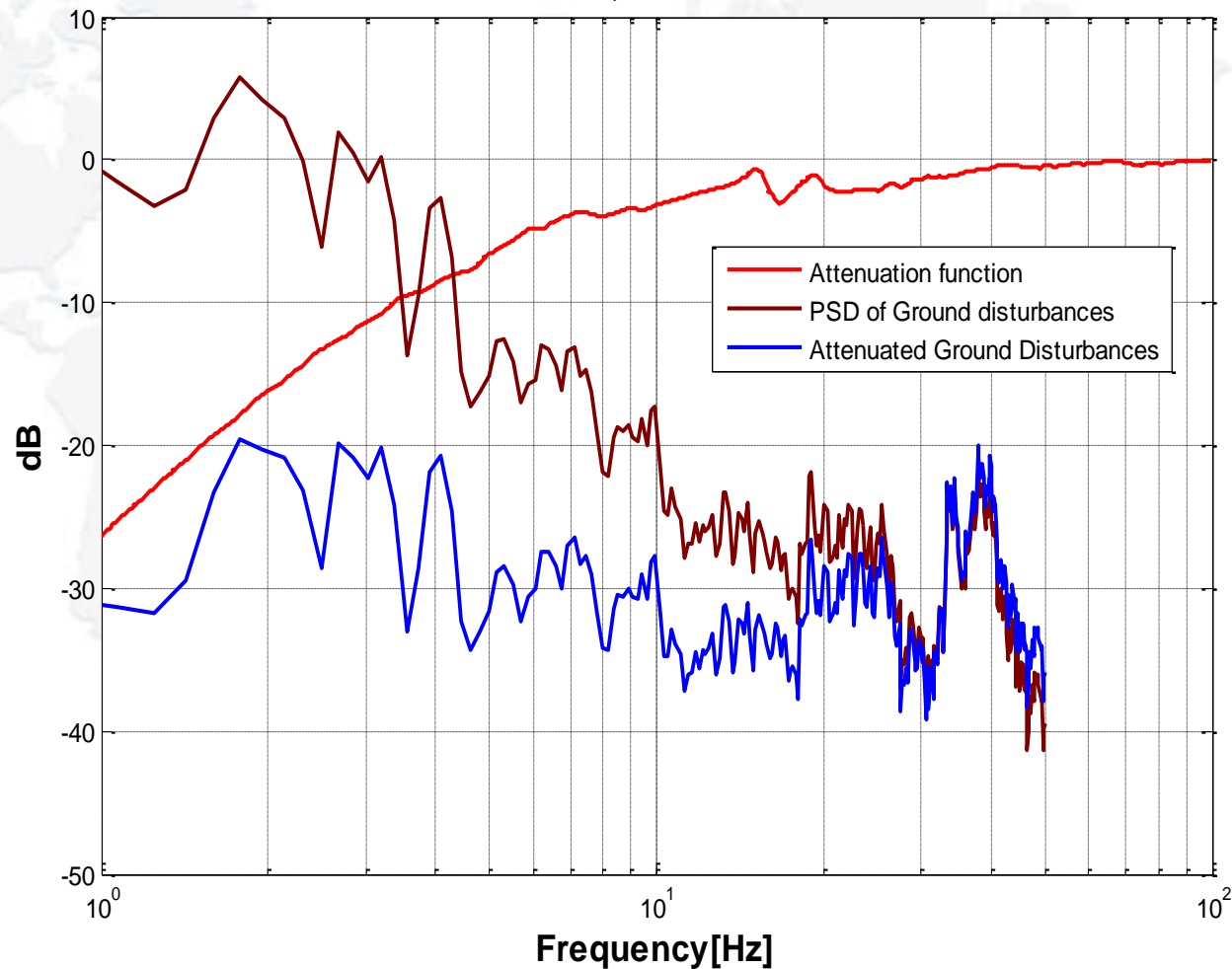
DISTURBANCE ATTENUATION

```

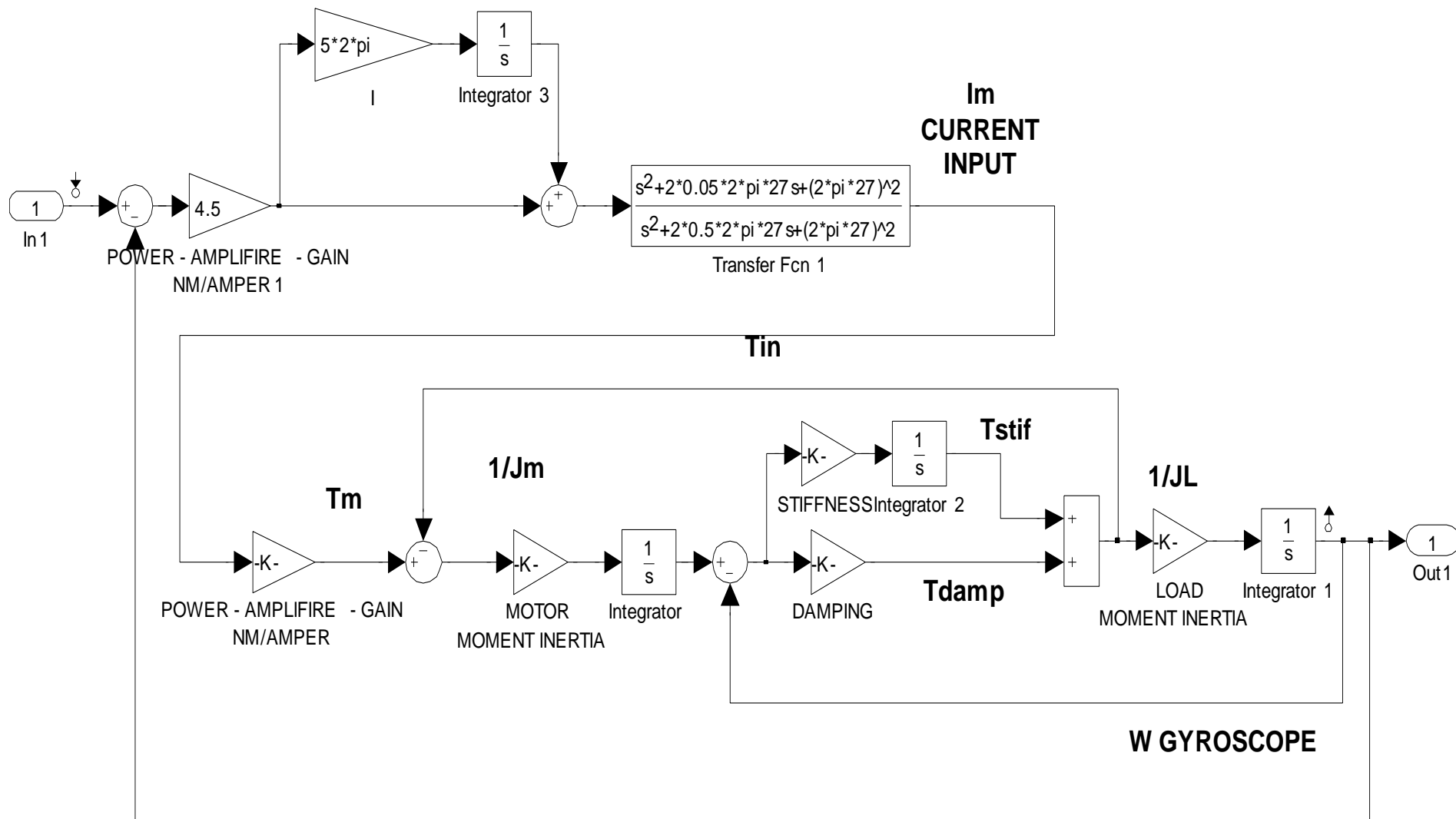
Fs = 150; t = 0:1/Fs:3000;
x=edegt(:,2);
y= stabvel(:,2);
h = spectrum. periodogram;
hpsd = psd(h,x,'Fs',Fs);
plot(hpsd)
hold on
hpsd = psd(h,y,'Fs',Fs);
plot(hpsd)

```

**System Attenuation Function,
PSD Ground Disturbances , Attenuated Groun Disturbances**

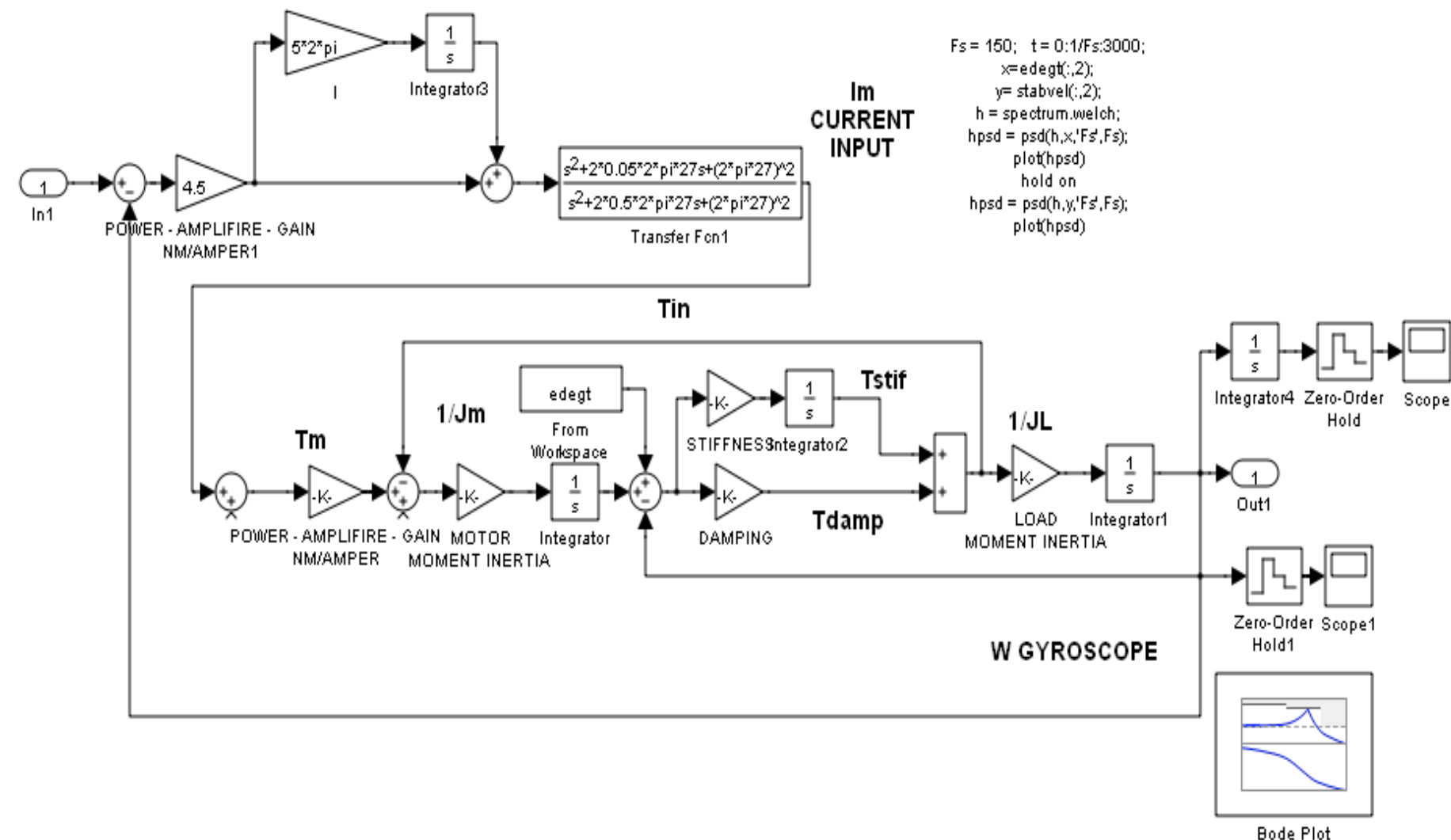


hazaraDugmaNotch.slx





hazaraDugmaNotchstabAcc.slx





חזרה על משוואות מצב



State Space Equations

Continuous

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

$$X(t_0) = X_0$$

Discrete

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k)$$

$$Y(k) = CX(k) + DU(k) \quad X(0) = X_0, k = 0, 1, \dots, n$$

Transfer function

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

$$\mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} = e^{At}1(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} 1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(zI - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} 1(k)$$

Impulse Response

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

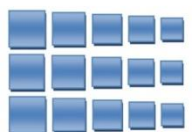
$$= Ce^{At}B \cdot 1(t) + D\delta(t)$$

$$g(k) = CA^{k-1}B1(k-1) + D\delta(k)$$

Solution

$$y(t) = Ce^{At}X_0 + \int_0^t e^{A\tau}BU(t-\tau)d\tau + DU(t)$$

$$y(k) = CA^kX_0 + \sum_{l=1}^k CA^{l-1}B(k-l)d\tau + DU(k)$$



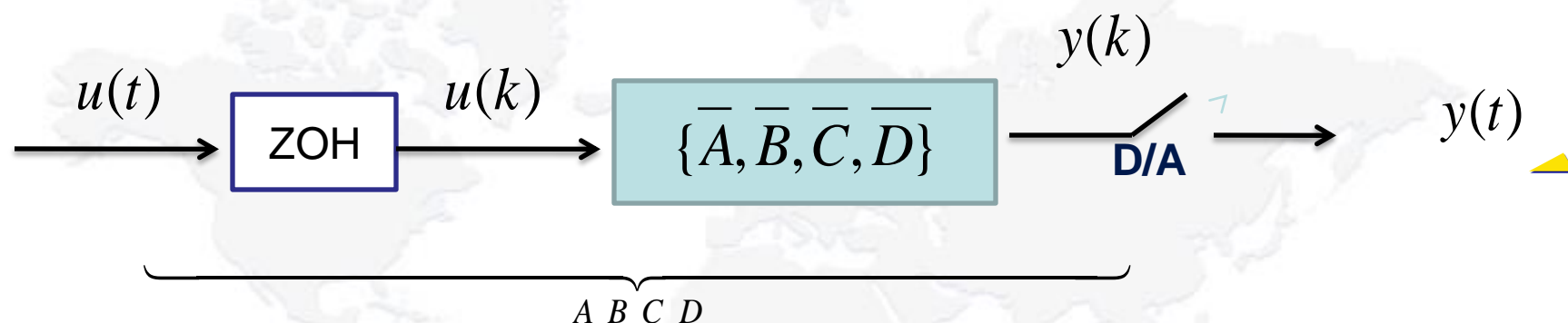
חזרה על משוואות מצב

דגימה - מעבר מרציף לבדיד 

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

$$X(t_0) = X_0$$



$$\bar{A} = e^{AT}; \quad \bar{B} = \left[\int_0^T e^{A\sigma} d\sigma \right] B; \quad \bar{C} = C; \quad \bar{D} = D$$

$$X(k+1) = \bar{A}X(k) + \bar{B}U(k)$$

$$Y(k) = \bar{C}X(k) + \bar{D}U(k) \quad X(0) = X_0, k = 0, 1, \dots, n$$

T Sampling Time



תוצאות מאלגברה לינארית

▲ פולינום אופייני של מטריצה A :

▲ נסמן:
$$a(s) = \det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

▲ ל- $a(s)$ יש n שרשים: λ_i .

▲ כאשר λ_i הם הערכים העצמיים של A .

▲ וקטור עצמי p של מטריצה A : $Ap = \lambda p$

▲ נסמן:
$$(\lambda I - A)p = 0$$



תוצאות מאלגברה לינארית

מתקיים: 

$$\det A = \lambda_1 * \lambda_2 * \lambda_3 * \dots * \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

משפט קיילי המילטון: 

כל מטריצה ריבועית מקיימת את הפולינום האופייני שלה: 

$$a(A) = \det(sI - A)|_{s \leftrightarrow A} \Rightarrow A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0$$

$$\Rightarrow A^n = -a_1 A^{n-1} - a_2 A^{n-2} - \dots - a_{n-1} A - a_n I$$

ניתנת לביטוי כצירוף לינארי של: A^n ולכן 

$$\{A^n \Rightarrow I, A^1, A^2 \dots A^{n-1}\}$$



חזרה על משוואות מצב

קונטרולאביליות

מערכת נקראת קונטרולאבילית אם ניתן להביאה מכל מצב התחלתי נתון לכל מצב סופי רצוי על ידי כניסת בקרה מתאימה.

משפט: מערכת LTI נתונה הינה קונטרולאבילית אם ורק אם המטריצה 

$$\mathcal{C} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

היא בדרגה מלאה דהיינו: 

$$\text{rank } \mathcal{C} = n$$



חזרה על משוואות מצב

אובורביליות ▲

מערכת נקראת אובורבילית אם ניתן לשחזר את כל וקטור המצב עבור כל מצב התחלתי, מתוך מדידות הכניסה, ומדידות חלקיות של תפוקות המערכת.

משפט: מערכת LTI נתונה הינה אובורבילית אם ורק אם המטריצה ▲

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

▲ היא בדרגה מלאה דהיינו:

$$\text{rank } \mathcal{O} = n$$



חזרה על משוואות מצב

מערכת מינימאלית

מערכת נקראת מינימאלית אם היא גם קונטרולאבילית וגם

אובזרבבילית ואז ב- $G(s)$

אין צמצום קטבים ואפסים

טרנספורמציות

עבור T לא סינגולארית כלשהיא המערכת המקורית S והמערכת לאחר
טרנספורמציה \bar{S} הן מערכות שקולות:

$$\bar{X} \longleftrightarrow T^{-1} X$$

$$S \in \{A, B, C, D\} \longleftrightarrow \bar{S} \in \{T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D\}$$



חזרה על משוואות מצב

▲ טרנספורמציית השקילות שומרת על תכונות המערכת:

– אותם ע"ע

– תכונות אובזרבביליות וקונטרולאביליות נשמרות

– אותן פונקציות תמסורת

– הקשר בין מטריצות הקונטרולאביליות:

$$\bar{\mathcal{C}} = T^{-1} \mathcal{C}$$

– הקשר בין מטריצות אובזרבביליות:

$$\bar{\mathcal{O}} = T \mathcal{O}$$



Canonical forms

Controller Form

$$\{A_c, B_c, C_c, D_c\}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

כאשר:

משפט:

כל מערכת קונטרולאבילית S ניתן להעתיק על ידי T מתאים לקבלת מערכת \bar{S} בעלת צורה קנונית Controller Form.

שתי המערכות בעלות אותה תמסורת נומינאלית והן שקולות זו לזו.



צורות קנוניות

נחשב מטריצת שקילות T

נתונה מערכת $S \in \{A, B, C, D\}$ יש למצוא מטריצה T הפיכה לקבלת:

$$\{A_c = T^{-1}AT, B_c = T^{-1}B, C_c = CT\}$$

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{colons}} \end{bmatrix}$$

נסמן:

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = TB_c = [t_1, \cdots t_n] * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = t_1 \Rightarrow t_1 = B$$

מתקיים:



צורות קנוניות

נחשב את העמודות הבאות:

$$A_c = T^{-1}AT \Rightarrow TA_c = AT \quad AT = [At_1, At_2, \dots, At_n] = [t_1, t_2, \dots, t_n]$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow At_1 = -a_1 t_1 + t_2 \Rightarrow t_2 = At_1 + a_1 t_1|_{t_1=B} \Rightarrow t_2 = AB + a_1 B$$

עמודה ראשונה:

עמודה שנייה:

$$At_2 = -a_2 t_1 + t_3 \Rightarrow t_3 = A \underbrace{(AB + a_1 B)}_{t_2} + \underbrace{a_2 B}_{a_2 t_1} = A^2 B + a_1 AB + a_2 B$$

$$At_n = -a_n t_1 \Rightarrow t_n = -a_n A^{-1} B$$

עמודה N:

$$-a_n I = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A$$

ממשפט קיילי המילטון:

$$\Rightarrow -a_n A^{-1} B = [A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A] A^{-1} B = t_n$$

$$\Rightarrow -a_n A^{-1} B = [A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I] B = t_n$$



צורות קנוניות

קיבלנו:

$$T = \left[\underbrace{B}_{t_1}, \underbrace{AB + a_1 B}_{t_2}, \underbrace{A^2 B + a_1 AB + a_2 B}_{t_3}, \dots, \underbrace{A^{n-1} B + a_1 A^{n-2} B + \dots + a_{n-1} B}_{t_n} \right]$$

לאחר אירגון וסידור איברים נקבל

$$T = [B, AB, A^2 B \dots, A^{n-1} B] \mathcal{C}^{-1}$$

שלבים לחישוב T

חשבו מטריצת קונ' של המערכת הנתונה

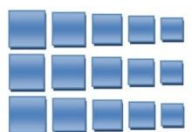
חשבו מקדמי פולינום אופייני של A

חשבו הופכי של מטריצת קונ' קנונית ←

חשבו

$$T = \mathcal{C} * \mathcal{C}^{-1}$$

$$\mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

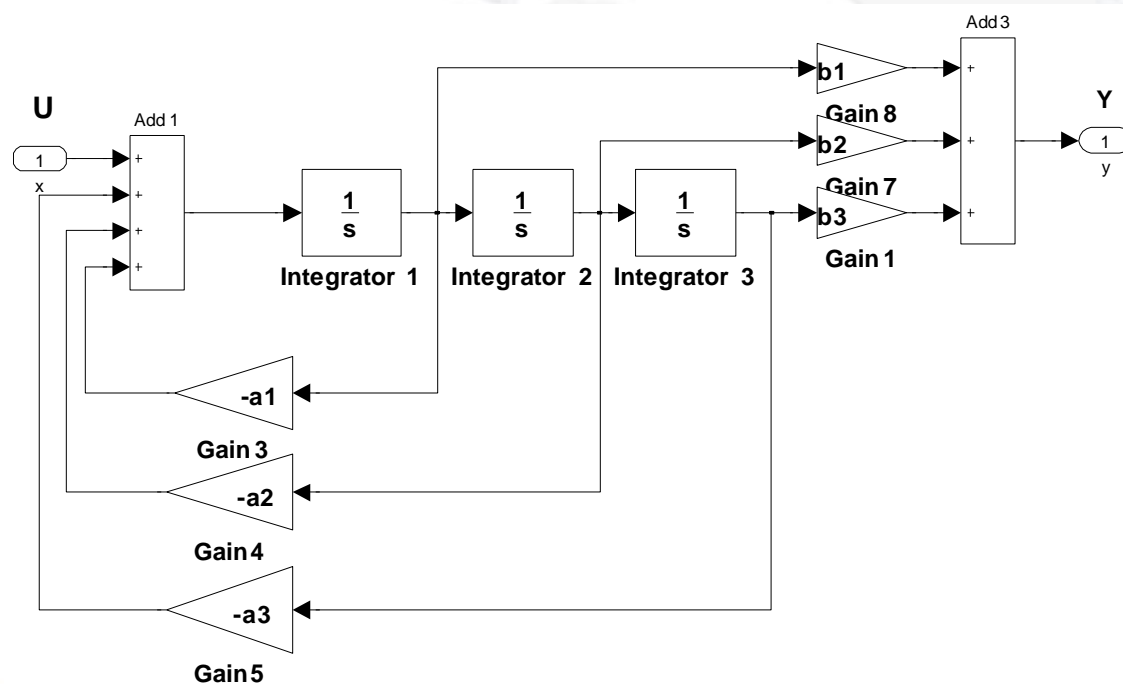


צורות קנוניות

מימוש צורה קנונית של קונטרולר: 

$$H(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_c = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$





Observer Form

$$\{A_o, B_o, C_o, D_o\}$$

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_o = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

כאשר:

משפט:

כל מערכת אוברבילית S ניתן להעתיק על ידי T מתאים למערכת \bar{S} בעלת צורה קנונית Observer Form.

שתי המערכות בעלות אותה תמסורת נומינאלית והן שקולות זו לזו. $\bar{\mathcal{O}} \mathcal{O}^{-1} = T$

מטריצת אוברביליות של הצורה הקנונית הינה נתונה לפי:

$$\mathcal{O}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & -a_1 & 1 & \ddots & 0 \\ -a_n & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & -a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

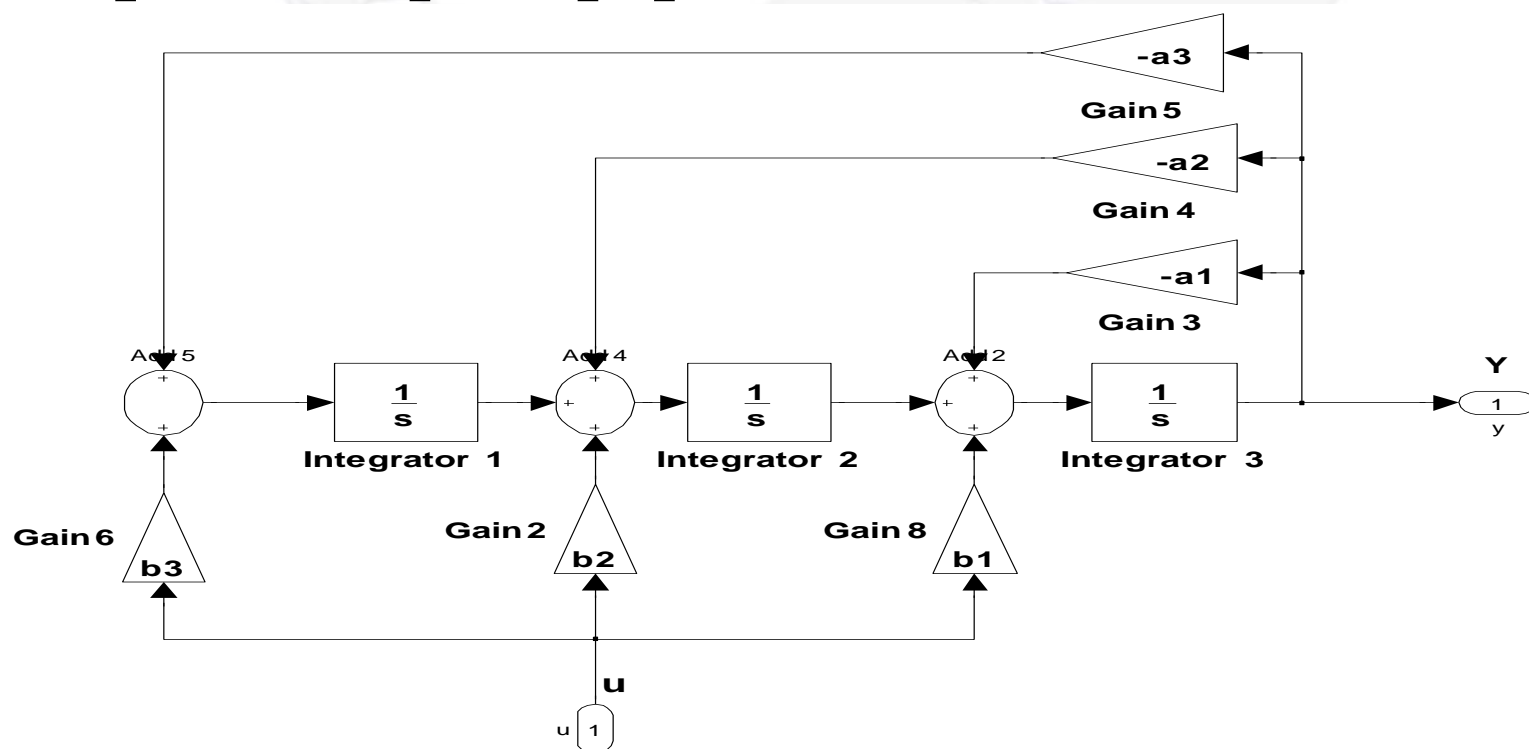


צורות קנוניות

מימוש צורה קנונית של אובזרוור:

$$H(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, C_o = [1 \quad 0 \quad 0]$$





תוצאות מאלגברה לינארית

תת מרחב נפרש: 

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

נתונה קבוצת וקטורים: 

תת המרחב הנפרש על ידי קבוצה זו נתון לפי: 

$$\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \alpha_i \in R \right\}$$

אי השוויון של קושי שוורץ 

$$|x^T y|^2 = \left(\sum x_i y_i \right)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$



תוצאות מאלגברה לינארית

חישוב דטרמיננטה של מטריצה

עבור מטריצה A נסמן ב- $M_{i,j}$ את המטריצה $(n-1) \times (n-1)$ המתקבלת ע"י מחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j של המטריצה A .

$$\gamma_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{i,j})$$

נסמן 

(הקופקטור של $a_{i,j}$) 

אזי: 

$$\det A = \sum_j a_{i,j} \gamma_{i,j}$$

עבור i כלשהוא 



תוצאות מאלגברה לינארית

תהליך גרהם שמיט:

בניית קבוצה אורתו-נורמאלית הפורשת את אותו תת-מרחב כמו קבוצת וקטורים נתונה.

נתונה קבוצת וקטורים: 

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

תהליך גרהם שמיט נתון על ידי: 

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$$y_2 = \frac{x_2 - \alpha y_1}{\|x_2 - \alpha y_1\|} \xrightarrow{\text{such that}} y_1^T y_2 = 0$$

$$y_3 = \frac{x_3 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2}{\|x_3 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2\|} \xrightarrow{\text{such that}} y_1^T y_3 = 0, y_2^T y_3 = 0$$

וכך הלאה. 



מטריצת טופליץ (Toeplitz):

זו מטריצה בה כל האיברים (i, j) אשר $(i - j)$ קבוע - שווים ביניהם

כלומר:

$$a_{i,j} = a_{i+l,j+l}$$

חישוב דטרמיננטה של מטריצה

עבור מטריצה A נסמן ב- $M_{i,j}$ את המטריצה $(n-1) \times (n-1)$ המתקבלת ע"י מחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j של המטריצה A .

נסמן $\gamma_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{i,j})$

(הקופקטור של $a_{i,j}$)

אזי: $\det A = \sum_j a_{i,j} \gamma_{i,j}$

עבור i כלשהוא



תוצאות מאלגברה לינארית

חישוב הופכי של מטריצה לא סינגולרית: 

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$$

$$[\text{adj}A^T]_{i,j} = \gamma_{i,j}$$

כאשר: 

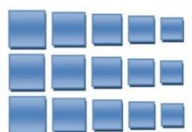
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}$$

מטריצות בלוקים: 

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \det A * \det B$$

אם המטריצה A אינה סינגולרית אזי: 

$$\det \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det A * \det [B - CA^{-1}D]$$



תוצאות מאלגברה לינארית

דטרמיננט של מכפלת מטריצות ריבועיות ▲

$$\det AB = \det BA = \det A \cdot \det B$$

אם שתי המכפלות AB ו- BA מוגדרות אזי: ▲

$$\det[I - AB] = \det[I - BA]$$

עבור מטריצה A , מרחב האפס של A (Null Space) ▲

$$\mathcal{N}(A) = \{x \mid Ax = 0\}$$

התחום של A (range): ▲

$$\mathcal{R}(A) = \{x \mid x = Ay\}$$



תוצאות מאלגברה לינארית

▲ דרגת שורות של מטריצה: מספר מקסימאלי של שורות הבלתי תלויות של A .

▲ דרגת העמודות של A : מוגדרת בצורה זהה על עמודות A .

▲ מתקיים תמיד: דרגת המטריצה = דרגת עמודות = דרגת שורות

▲ נסמן את דרגות A, B : $\rho(A), \rho(B)$ כאשר AB ו $A+B$ קיימים:

▲ אזי: $\rho(A) + \rho(B) - n \leq \rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$

▲ כאשר n הוא מספר העמודות של A והשורות של B .

▲ בנוסף: $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$

▲ אם עבור וקטורים u, v מתקיים: $A = uv^T$

▲ אזי: $\rho(A) = 1$



תוצאות מאלגברה לינארית

▲ אם A הפיכה (לא סינגולארית) ו- u, v שני ווקטורים אזי:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}$$

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + E\Delta^{-1}F & -E\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}F & \Delta^{-1} \end{bmatrix}$$

▲ היפוך מטריצות בלוקים:

$$\Delta = B - CA^{-1}D$$

▲ כאשר :

$$E = A^{-1}D$$

$$F = CA^{-1}$$



מטריצות חיוביות / אי שליליות

▶ מטריצות חיוביות / אי שליליות: בקורס זה מטריצות המוגדרות כ- חיוביות או אי

שליליות - הן מטריצות **סימטריות וממשיות**

▶ מטריצה אי שלילית A היא מטריצה המקיימת: $\forall x \neq 0 \quad x^T A x \geq 0$

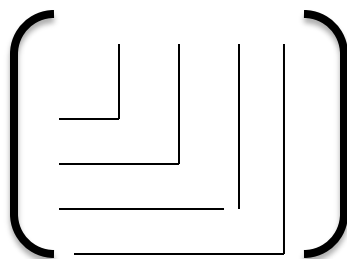
▶ מטריצה חיובית מוגדרת A היא מטריצה המקיימת:

$$\forall x \neq 0 \quad x^T A x > 0$$

▶ מטריצה היא **חיובית מוגדרת** אם ורק אם **כל הערכים העצמיים שלה הם חיוביים ממש**.

▶ מטריצה היא **אי שלילית** אם ורק אם **חלק מהערכים העצמיים שלה הם חיוביים וחלקם הוא אפס**.

▶ מטריצה היא **חיובית מוגדרת** אם **כל המינוסים המובילים שלה הם חיוביים**
(הדטרמיננטות של המטריצות):





מידול משוואות מצב של מערכות סטאטיות, מהירות קבועה:


מודל Bias (סחיפה קבועה או שגיאה קבועה) של חיישן, או דינאמיקת מטרה 
סטאטית:

$$x = c \rightarrow \dot{x} = 0 \cdot x + 0 \cdot u = 0$$

מודל מטרה נעה במהירות קבועה והמיקום בלבד נמדד: 

$$x_{vel} = c \rightarrow x_{pos} = x_1, x_{vel} = x_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ y = x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$




מידול משוואות מצב של מערכות מתמרנות:

מודל מטרה מתמרנת בתדר קבוע ידוע והמיקום נמדד בעזרת חיישן מתאים 
 הכולל שגיאה קבועה לא ידועה :

$$x_{pos} = a \sin(\omega t) \rightarrow x_{pos} = x_1, x_{vel} = x_2$$

$$y = x_{pos} + c$$

יש למצוא משוואות מצב לתיאור התמרון והסחיפה הקבועה: 

$$\dot{x}_1 = a\omega \cos(\omega t), \quad \dot{x}_1 \overset{\Delta}{=} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a\omega^2 \sin(\omega t) \rightarrow \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1$$

$$x_3 = c \rightarrow \dot{x}_3 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ y = x_1 + x_3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$





מידול של מערכות דיסקרטיות - דוגמא

מידול משוואות מצב של מערכות דיסקרטיות:

$$x(k) = ak + b \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

מצאו משוואות מצב של המערכת: 

a b קבועים ואינם ידועים 

ניתן לראות כי: 

$$x(k) = ak + b$$

$$x(k+1) = a(k+1) + b = ak + a + b$$

$$x(k+2) = a(k+2) + b = ak + 2a + b$$

$$\Rightarrow x(k+2) = 2x(k+1) - x(k)$$

מתקיים: 

משוואות מצב: 

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix}$$



Electronics

Computers

Communications

נספח

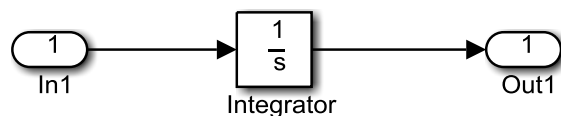


נספח

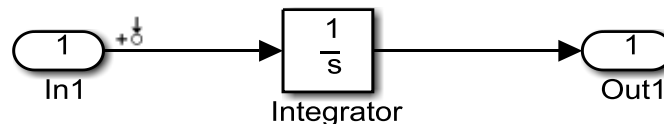


קבלת BODE בסימוליןק

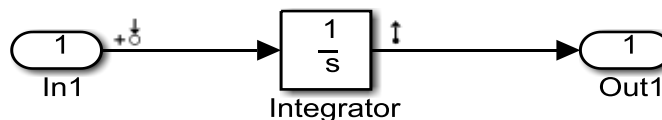
בנו מודל בסימוליןק כמתואר בדוגמא: ▲



עמדו עם העכבר על חץ קלט ובצעו קליק שמאני ואחר כך קליק ימני ▲
 בחרו Linear Analysis Point ← Input perturbation לקבלת: 🇮🇱



באופן דומה בצעו על חץ הפלט אבל יש לבחור Output Measurement לקבלת: 🇮🇱



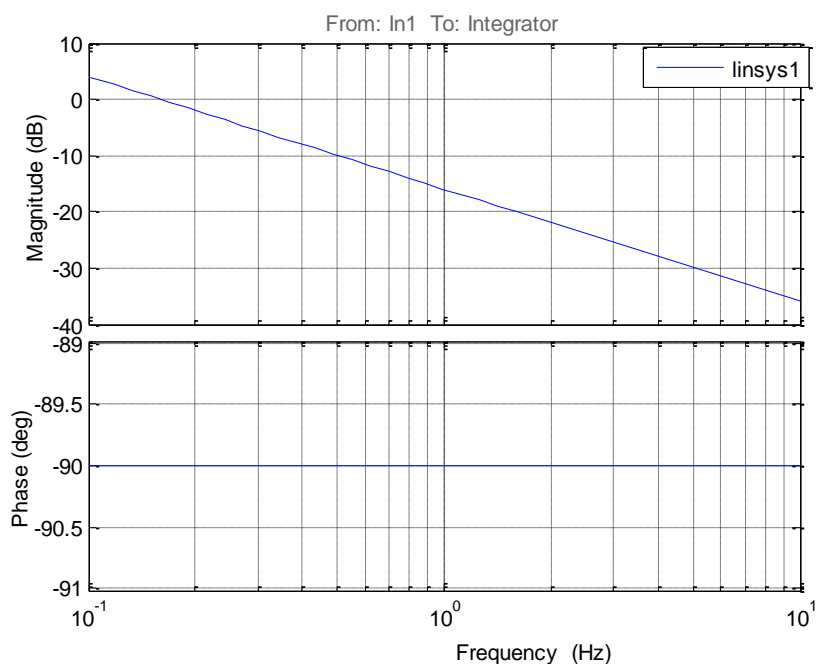


קבלת BODE בסימולינק

בסרגל הכלים של המודל בחרו **Analysis** ← **Control Design** ← **Linear Analysis** ▲

יתקבל מסך חדש. בסרגל הכלים לשונית **EXECT LINEARIZATION** ← **New Bode** ויש להפעיל את החץ הירוק לקבלת גרף בודה אמפליטודה ופאזה ▲

על מנת להעביר את הגרף לאיור יש לבחור **FIGURS** בסרגל הכלים ולבחור **Print to Figure** ▲





בדוגמת ההרצאה נתון פייל נתונים: **plant.mat** שהם תוצאה

ספקטראלית מדודה ממערכת סרוו אמיתית

במטלב בצעו: **load('plant.mat')** בעזרת **who** יתקבלו:

o2i1.mat פייל של מספרים קומפלקסיים

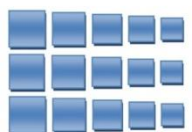
- **o2i1x.mat** פייל תדרים בהרצים

הפקודה:

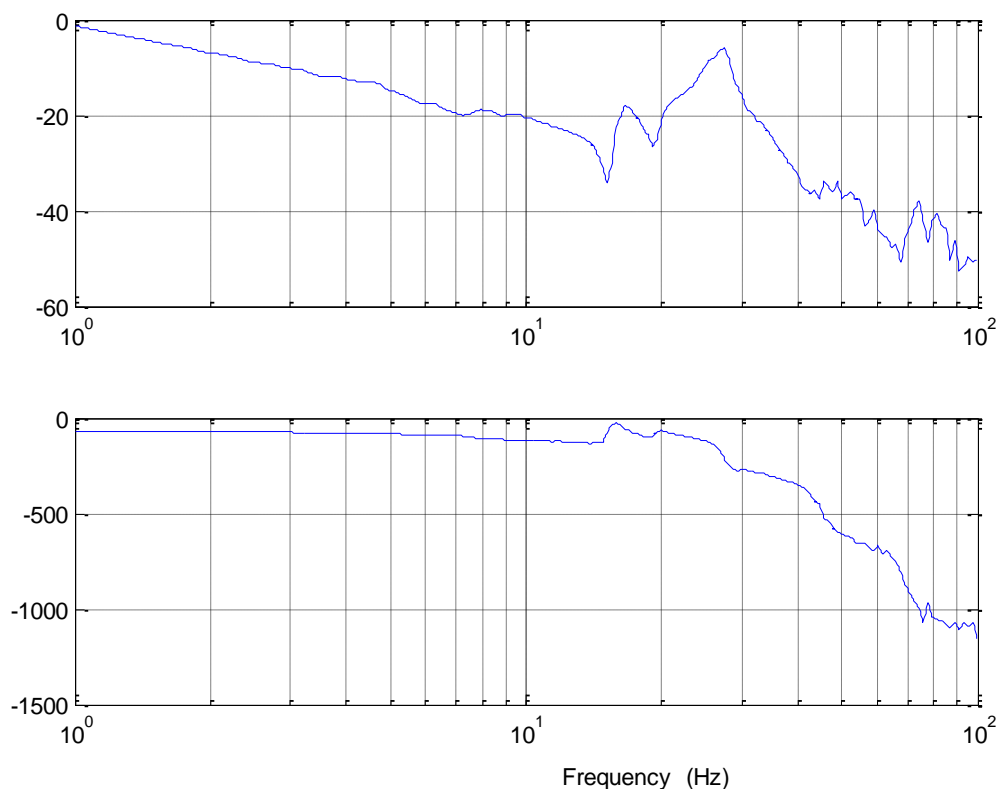
Figure, subplot(2,1,1)...,
semilogx(o2i1x,20*log10(o2i1)),grid,subplot(2,1,2)...

,semilogx(o2i1x,(180/pi)*phase(o2i1)),grid

תניב גרף בודה:



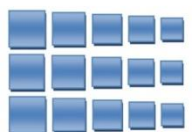
עבודה עם פייל נתונים



▲ לצורך עבודה עם **sis tool** נהפוך את פיילי הנתונים למערכת בעזרת הפקודה:

`sys=frd(o2i1,o2i1x,'FrequencyUnit','Hz');` 🇮🇱

▲ נעת **sys** הינה פונקציית תמסורת שניתן להפעיל עליה את פונקציות **sisotool**



צורות קנוניות

מימוש צורה קנונית של אוברביליטי:

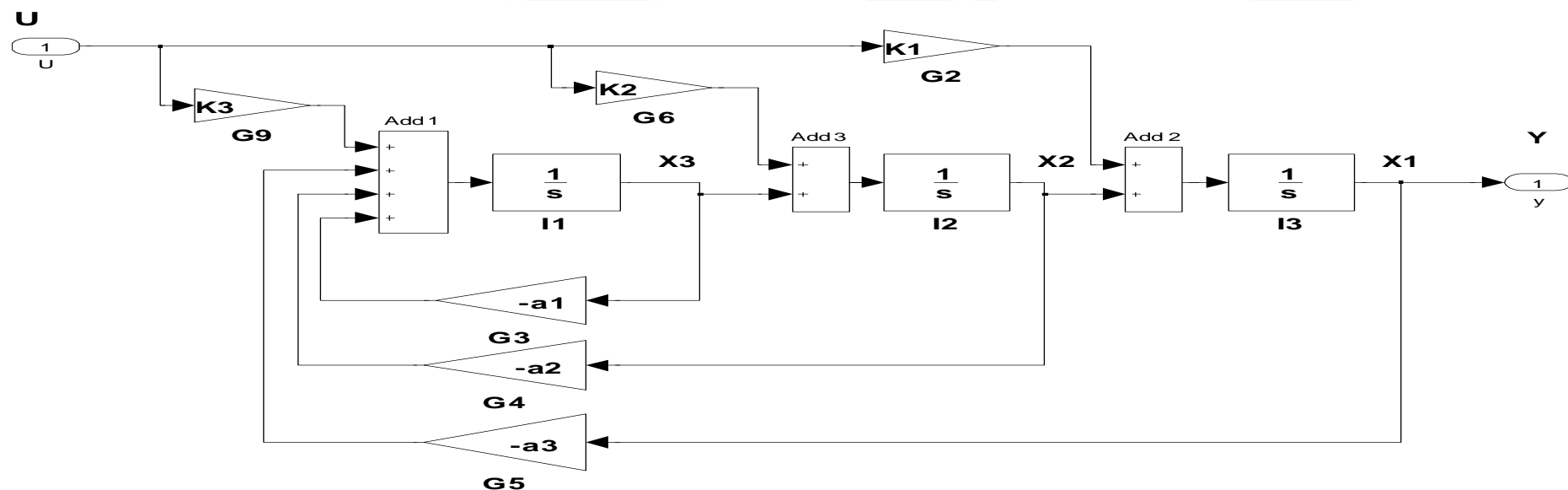
$$H(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$A_{oT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, B_{oT} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, C_{oT} = [1 \ 0 \ 0]$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = b_1 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 b_1 \\ \beta_3 = b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_1^2 b_1 \end{cases}$$

למטריצה A המבנה:

Companion Form





צורות קנוניות

מימוש צורה קנונית של קונטרולר ביליטי:

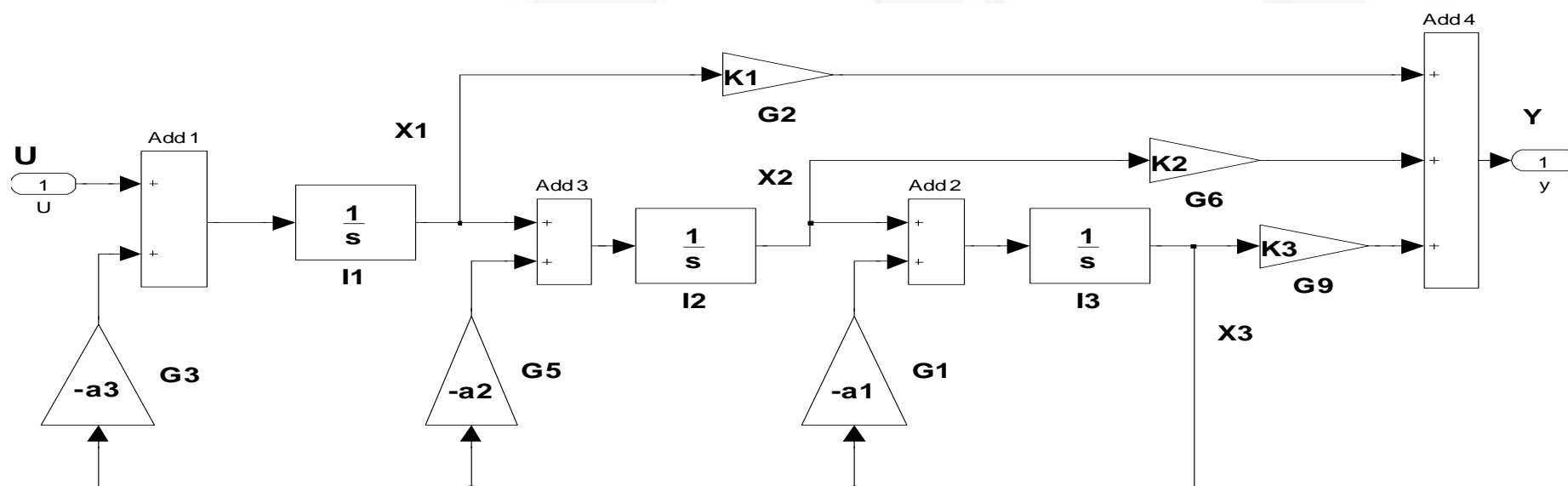
$$H(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$A_{cT} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, B_{cT} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{cT} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]$$

$$[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

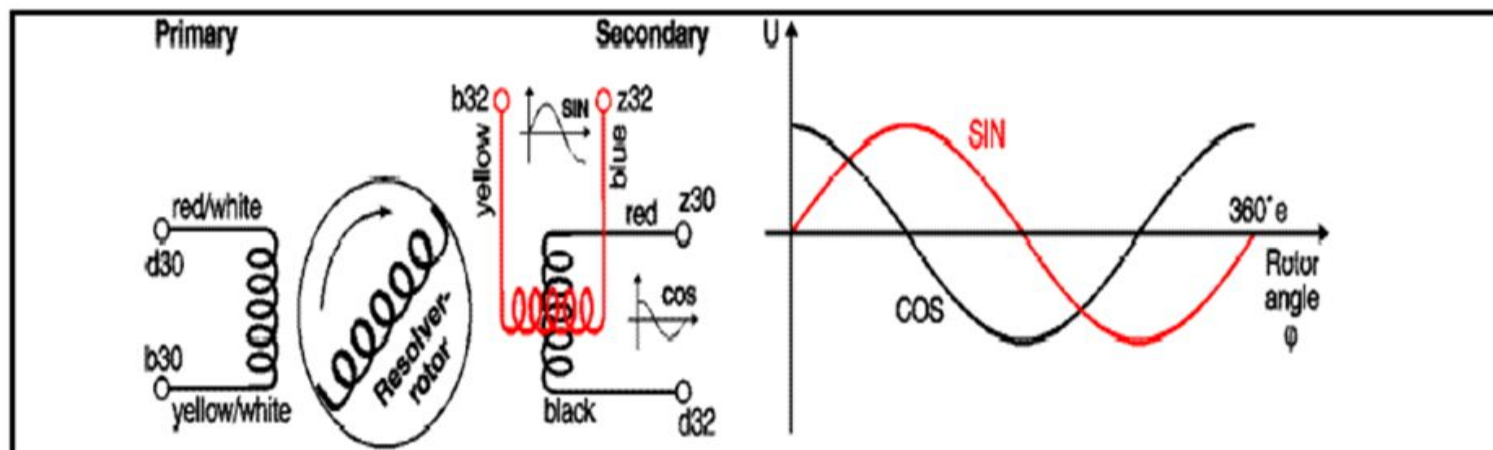
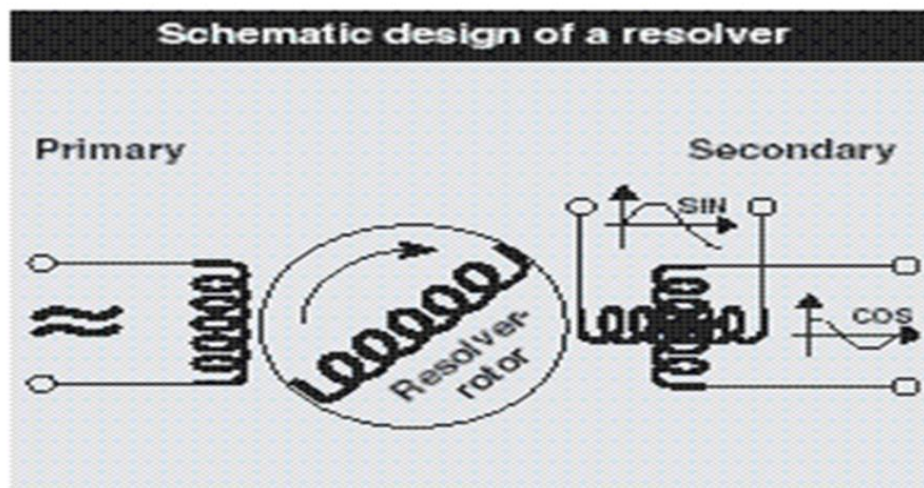
למטריצה A' המבנה:

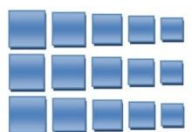
Companion Form





RESOLVER

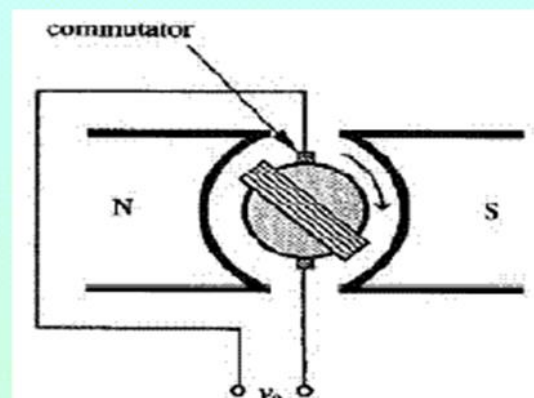




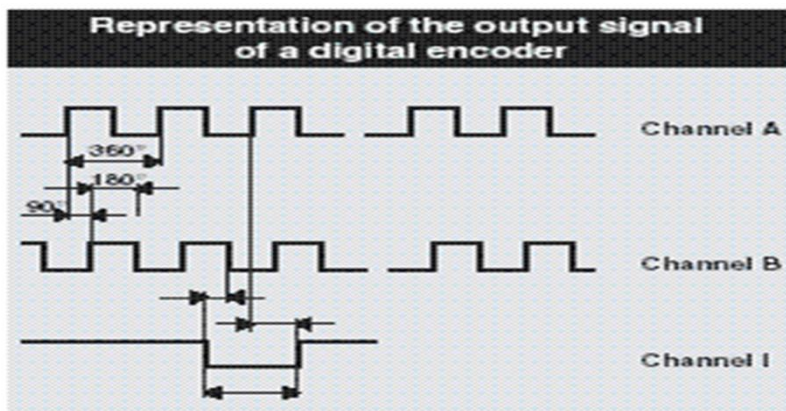
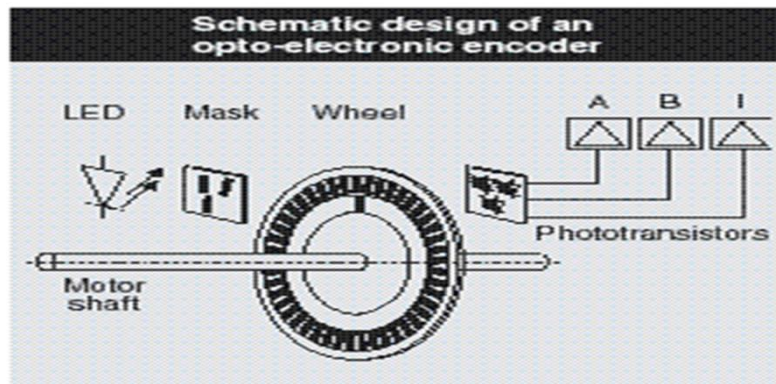
TACHOMETER ▲

Tachometer

Fig. 9.6. The principle of a DC tachometer

*Working principle:*

The permanent magnet generates a steady and uniform magnetic field. Relative motion between the field and the rotor induces voltages, which is proportional to the speed of the rotor.



SHAFT ENCODER ▲

INCREMENTAL 🇮🇱

ABSOLUTE 🇮🇱

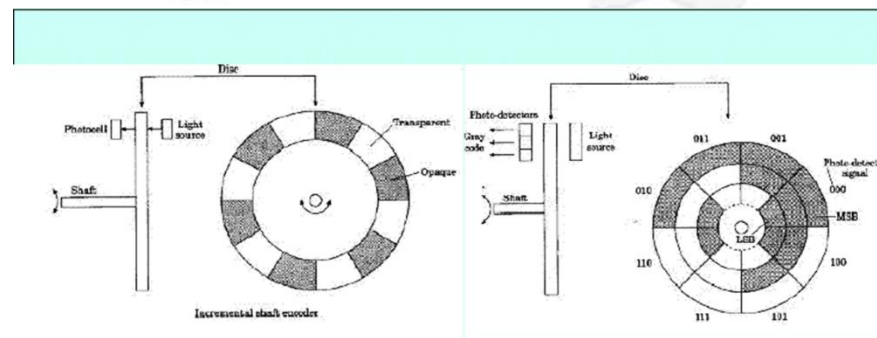


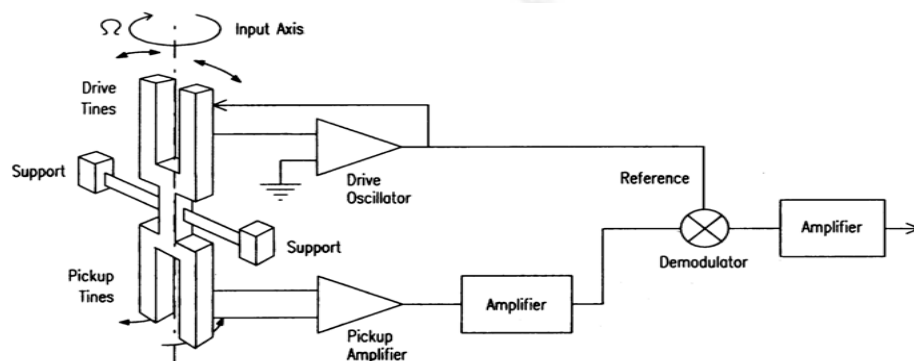
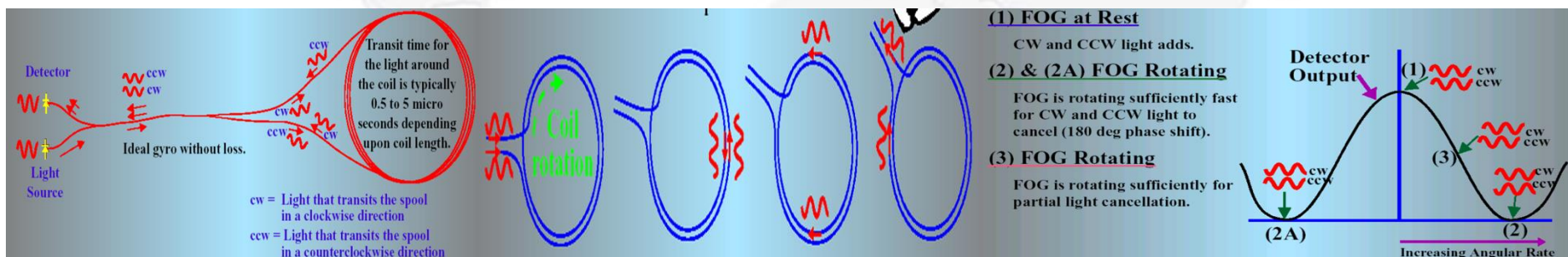
Fig. 9.7. Incremental and absolute shaft encoders



GYROSCOPE

Electro-mechanical

Fiber Optic Gyro – FOG



MEMS – Coriolis Gyro