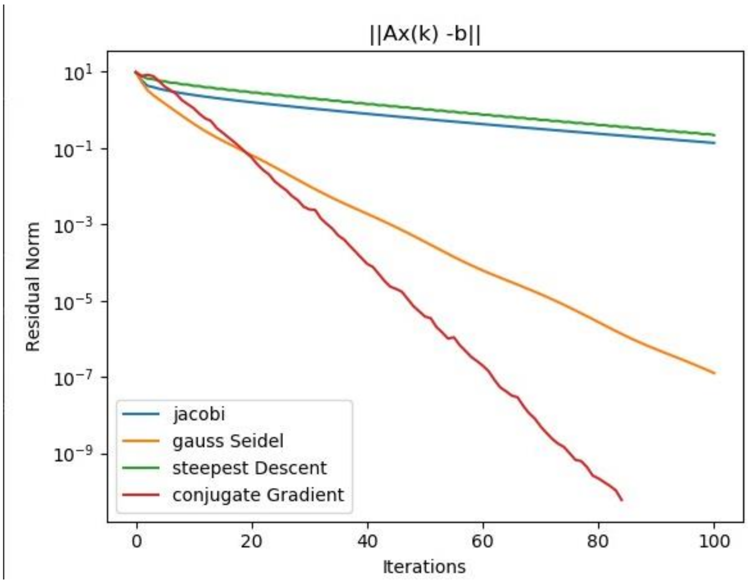
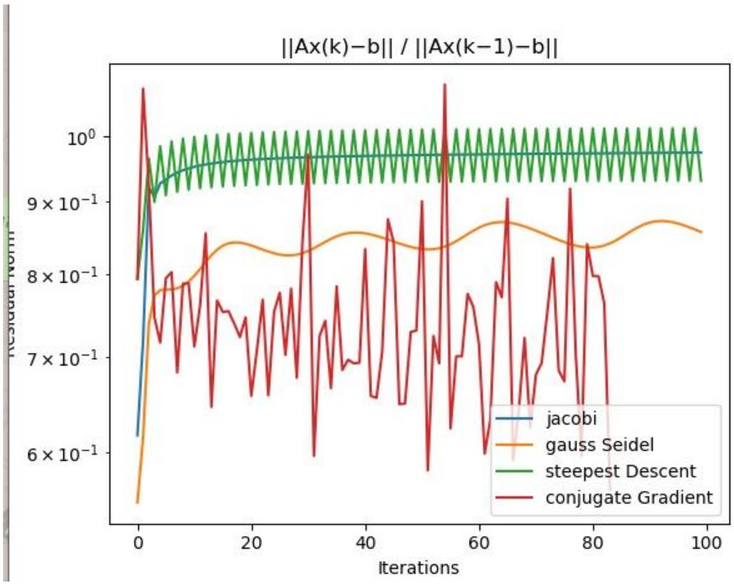
הדס עטיה: 312214109

יובל גבע: 315509174

Assignment 2

1.b.





2.a

$$\mathbf{Ax^* = b}, \quad \mathbf{x^k = -e^k + x^*}, \quad \mathbf{A \neq 0 : \ ||A|| > 0}$$

$$\mathbf{x^{k+1} = x^k + \frac{1}{||A||}(b - Ax^k)}$$

$$=> -e^{k+1} + x^* = -e^k + x^* + \frac{1}{||A||}\left(b - A\left(-e^k + x^*\right)\right) =$$

$$= -e^k + x^* + \frac{1}{||A||}b + \frac{1}{||A||}Ae^k - \frac{1}{||A||}Ax^* =$$

$$=> -e^{k+1} = -e^k + \frac{1}{||A||}b + \frac{1}{||A||}Ae^k - \frac{1}{||A||}b = -e^k + \frac{1}{||A||}Ae^k = \left(I - \frac{1}{||A||}A\right)(-e^k)$$

$$=> e^{k+1} = \left(I - \frac{1}{||A||}A\right)(e^k)$$

$$=> ||e^{k+1}|| = ||(I - \tfrac{1}{||A||}A)e^k|| \leq \left\|\left(I - \tfrac{1}{||A||}A\right)\right\| \, ||e^k||$$

לכן, כדי שהשיטה תתכנס נדרוש כי $\left|\left\|\left(I - \frac{1}{||A||}A\right)\right\|\right| < 1$.

A spd : λi(A) >0 ¥0<=i<=n

$$\left\|\left(I - \tfrac{1}{||A||}A\right)\right\| = \rho\left(I - \tfrac{1}{||A||}A\right) = \max\{|1 - \tfrac{1}{||A||}\lambda\max(A)\ |, |1 - \tfrac{1}{||A||}\lambda\min(A)|\}$$

$$||A|| \geq \rho(A) = \lambda\max(A) \geq 0 => \quad 0 \leq \frac{1}{||A||} \leq \frac{1}{\rho(A)} = \frac{1}{\lambda\max(A)}$$

$$0 \leq \frac{\lambda\max(A)}{||A||} \leq \frac{\lambda\max(A)}{\rho(A)} = \frac{\lambda\max(A)}{\lambda\max(A)} = 1 => 0 \leq \frac{\lambda\max(A)}{||A||} \leq 1 => |1 - \tfrac{1}{||A||}\lambda\max(A)| < 1$$

$$0 \leq \frac{\lambda\min(A)}{||A||} \leq \frac{\lambda\min(A)}{\rho(A)} = \frac{\lambda\min(A)}{\lambda\max(A)} < 1 => 0 \leq \frac{\lambda\max(A)}{||A||} < 1 => |1 - \tfrac{1}{||A||}\lambda\max(A)| < 1$$

$$\mathbf{\left\|\left(I - \frac{1}{||A||}A\right)\right\| = \max\{|1 - \frac{1}{||A||}\lambda\max(A)\ |, |1 - \frac{1}{||A||}\lambda\min(A)|\} < 1}$$

לכן השיטה מתכנסת לכל נורמה מושרת.

2.b

$$\text{ℷmin}(\mathbf{A}) < \mathbf{0}\ ,\text{ℷmax}(\mathbf{A}) > \mathbf{0}$$

$$\left\|\left(I-\frac{1}{\|A\|}A\right)\right\| = \acute{\rho}\left(I-\frac{1}{\|A\|}A\right) = \max\{|1-\frac{1}{\|A\|}\text{ℷmax}(A)\ |,|1-\frac{1}{\|A\|}\text{ℷ}\min(A)\,|\}$$

$$\|A\| \geq \acute{\rho}(A) = \max\{|\text{ℷmin}(A)|,|\,\text{ℷ}\max(A)|\} > 0 > \text{ℷmin}(A)$$

$$\frac{1}{\text{ℷmin}(A)} < 0 < \frac{1}{\|A\|} \leq \frac{1}{\acute{\rho}(A)} = \frac{1}{\max\{|\text{ℷmin}(A)|,|\,\text{ℷ}\max(A)|\}}$$

$$1 = \frac{\text{ℷmin}(A)}{\text{ℷmin}(A)} > 0 > \frac{\text{ℷmin}(A)}{\|A\|} \geq \frac{\text{ℷmin}(A)1}{\acute{\rho}(A)} = \frac{\text{ℷmin}(A)}{\max\{|\text{ℷmin}(A)|,|\,\text{ℷ}\max(A)|\}}$$

$$=> 0 > \frac{\text{ℷmin}(A)}{\|A\|} => |1-\frac{1}{\|A\|}\text{ℷmin}\,(A)| > 1$$

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{A}\right)\right\| = \mathbf{max}\left\{|\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{A}\|}\text{ℷ}\mathbf{max}\,(\boldsymbol{A})\ |,\left|\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{A}\|}\text{ℷ}\,\mathbf{min}(\mathbf{A})\,\right|\right\} \geq |\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{A}\|}\text{ℷ}\mathbf{min}\,(\boldsymbol{A})| > \mathbf{1}$$

לכן השיטה אינה מתכנסת.

2.c.1

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\||\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}}-\mathbf{x}^{*}\|_{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})^{\mathbf{t}}}\mathbf{A}\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} - \mathbf{2}\mathbf{x}^{*\mathbf{t}}\mathbf{A}\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} + \mathbf{x}^{*\mathbf{t}}\mathbf{A}\mathbf{x}^{*})$$

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} = \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} + \frac{<\mathbf{r}^{(\mathbf{k})},\mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{k}}>\mathbf{r}^{(\mathbf{k})}}{<\mathbf{r}^{(\mathbf{k})},\mathbf{A}\mathbf{r}^{(\mathbf{k})}>}$$

נציב את המשוואה השניה בראשונה:

$$f\left(x^{(k+1)}\right) = f\left(x^{(k)} + \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right)^{t}A\left(x^{(k)} + \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) - 2x^{*t}A\left(x^{(k)} + \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) + x^{*t}Ax^{*}\Bigg)$$

$$=> f\left(x^{(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left({x^{(k)}}^{t}Ax^{(k)} - 2x^{*t}Ax^{(k)} + x^{*t}Ax^{*}\right) + \frac{1}{2}({x^{(k)}}^{t}A\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>} + (\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>})^{t}Ax^{(k+1)} + (\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>})^{t}A\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>} - 2x^{*t}A\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>})) =$$

$$= f\left(x^{(k)}\right) + \frac{1}{2}({x^{(k)}}^{t}A\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>} + (\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>})^{t}Ax^{(k)} + \left(\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right)^{t}A\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>} - 2x^{*t}A\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>})) =$$

נבחין :

$a = \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}$ סקלר אז $x^{(k)}$, $\frac{<r^{(k)},Ae^{k}> r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}$וקטורים.

בגלל סימטריות המכפלה הפנימית-

$$\mathbf{1.}\ \ \mathbf{x^{(k)}}^{\mathbf{t}}\mathbf{A}\left(\frac{<\mathbf{r^{(k)}},\mathbf{Ae^{k}}>\mathbf{r^{(k)}}}{<\mathbf{r^{(k)}},\mathbf{Ar^{(k)}}>}\right) = <\mathrm{Ax^{(k)}},\left(\frac{<\mathrm{r^{(k)}},\mathrm{Ae^{k}}>\mathrm{r^{(k)}}}{<\mathrm{r^{(k)}},\mathrm{Ar^{(k)}}>}\right)> =$$

$$<\left(\frac{<\mathrm{r^{(k)}},\mathrm{Ae^{k}}>\mathrm{r^{(k)}}}{<\mathrm{r^{(k)}},\mathrm{Ar^{(k)}}>}\right),<\mathrm{Ax^{(k)}}> = \left(\frac{<\mathbf{r^{(k)}},\mathbf{Ae^{k}}>\mathbf{r^{(k)}}}{<\mathbf{r^{(k)}},\mathbf{Ar^{(k)}}>}\right)^{\mathbf{t}}\mathbf{Ax^{(k)}}$$

$$\mathbf{2.}\ \ \left(\frac{<\mathbf{r^{(k)}},\mathbf{Ae^{k}}>\mathbf{r^{(k)}}}{<\mathbf{r^{(k)}},\mathbf{Ar^{(k)}}>}\right)^{\mathbf{t}}\mathbf{A}\,\frac{<\mathbf{r^{(k)}},\mathbf{Ae^{k}}>\mathbf{r^{(k)}}}{<\mathbf{r^{(k)}},\mathbf{Ar^{(k)}}>} = \left(\frac{<\mathrm{r^{(k)}},\mathrm{Ae^{k}}>}{<\mathrm{r^{(k)}},\mathrm{Ar^{(k)}}>}\right)^{2}\mathrm{r^{(k)}}^{\mathrm{t}}\mathrm{Ar^{(k)}} =$$

$$= \left(\frac{<\mathrm{r^{(k)}},\mathrm{Ae^{k}}>}{<\mathrm{r^{(k)}},\mathrm{Ar^{(k)}}>}\right)^{2}<\mathrm{r^{(k)}},\mathrm{Ar^{(k)}}> = \frac{<\mathbf{r^{(k)}},\mathbf{Ae^{k}}>^{2}}{<\mathbf{r^{(k)}},\mathbf{Ar^{(k)}}>}$$

$$\mathbf{3.}\boldsymbol{A\ spd \Rightarrow A = A^{t}}$$

$$\mathbf{4.}\boldsymbol{r^{(k)} = b - Ax^{(k)} = Ax^{*} - Ax^{(k)} = A\left(x^{*} - x^{(k)}\right) = Ae^{(k)}}$$

$$=_{1,2}\ f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\left(-2{x^{(k)}}^{t}A\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>} + 2{x^{*}}^{t}A\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>r^{(k)}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) + \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>^{2}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}) =$$

$$= f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\left(\left(-2{x^{(k)}}^{t} + 2{x^{*}}^{t}\right)A\left(\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right)\left(r^{(k)}\right) + \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>^{2}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) =$$

$$= f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\left(2{e^{(k)}}^{t}A\left(\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right)\left(r^{(k)}\right) + \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>^{2}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) =$$

$$=_{3}\ f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\left(2{e^{(k)}}^{t}A^{t}\left(r^{(k)}\right)\left(\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) + \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>^{2}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) =$$

$$= f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\left(2\left(Ae^{(k)}\right)^{t}\left(Ae^{(k)}\right)\left(\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) + \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>^{2}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) =$$

$$=_{4}\ f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\left(2\left(r^{(k)}\right)^{t}\left(Ae^{(k)}\right)\left(\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) + \frac{<r^{(k)},Ae^{k}>^{2}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) =$$

$$= f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\left((2+1)\frac{<r^{(k)},Ae^{k}>^{2}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}\right) = f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\frac{<r^{(k)},Ae^{(k)}>^{2}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}$$

$$\Rightarrow \mathbf{f\left(x^{(k+1)}\right)} = \boldsymbol{f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\frac{<r^{(k)},Ae^{(k)}>^{2}}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}}$$

נבחין :

5. A spd => $\boldsymbol{¥x > 0 : \quad x^t A x > 0}$

6. $\boldsymbol{r^{(k)} > 0}$

=>$_{5,6}$ $< r^{(k)}, Ar^{(k)} > \; = \; {r^{(k)}}^t Ar^{(k)} \; > 0$ => $\frac{<r^{(k)},Ae^{(k)}>^2}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>} \; > 0$

=> $\boldsymbol{f\left(x^{(k+1)}\right) = f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\frac{<r^{(k)},Ae^{(k)}>^2}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>} < f(x^{(k)})}$

2.c.2

$$\mathbf{f\left(x^{(k+1)}\right) = f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\frac{< r^{(k)}, Ae^{(k)} >^2}{< r^{(k)}, Ar^{(k)} >} = c^{(k)} f\left(x^{(k)}\right)}$$

$$\mathbf{1.\ \ f\left(x^{(k)}\right) = \frac{1}{2}||x^k - x*||_A = \frac{1}{2}||e^k||_A = \frac{1}{2} < e^{(k)}, Ae^{(k)} >}$$

$$=> c^{(k)} = \frac{f\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{2}\frac{<r^{(k)},Ae^{(k)}>^2}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>}}{f\left(x^{(k)}\right)} = 1 - \frac{1}{2}\frac{<r^{(k)},Ae^{(k)}>^2}{f\left(x^{(k)}\right)<r^{(k)},Ar^{(k)}>} =_1 1 - \frac{<r^{(k)},Ae^{(k)}>^2}{<e^{(k)},Ae^{(k)}><r^{(k)},Ar^{(k)}>} =$$

מסעיף קודם: $\frac{<r^{(k)},Ae^{(k)}>^2}{<r^{(k)},Ar^{(k)}>} > 0$,

$$< e^{(k)}, Ae^{(k)} > =_5 {e^{(k)}}^t Ae^{(k)} \; > 0$$

=> $\frac{<r^{(k)},Ae^{(k)}>^2}{<e^{(k)},Ae^{(k)}><r^{(k)},Ar^{(k)}>} \; > 0$

$$\mathbf{c^{(k)} = 1 - \frac{<r^{(k)},Ae^{(k)}>^2}{<e^{(k)},Ae^{(k)}><r^{(k)},Ar^{(k)}>} \; < 1}$$

2.c.3

$$\forall v: \quad 0 \le \lambda min(A) \le \frac{v^t A v}{v^t v} = \frac{< v, Av >}{< v, v >} \ \le \ \lambda max(A)$$

$$1. r^{(k)} = Ax^* - Ax^{(k)} = Ae^{(k)} \ => \ A^{-1} r^{(k)} = e^{(k)}$$

A spd =>

$$2.1.\ A^{-1} \text{ symatric} => {A^{-1}}^t = A^{-1}$$
$$2.2\ \lambda max(A^{-1}) = \lambda min(A), \lambda min(A^{-1}) = \lambda max(A)$$

$$c^{(k)} = 1 - \frac{< r^{(k)}, Ae^{(k)} >^2}{< e^{(k)}, Ae^{(k)} >< r^{(k)}, Ar^{(k)} >} = 1 - \frac{< Ae^{(k)}, Ae^{(k)} >^2}{< e^{(k)}, Ae^{(k)} >< Ae^{(k)}, AAe^{(k)} >} =$$

$$= 1 - \frac{<Ae^{(k)},Ae^{(k)}>^2}{<e^{(k)},Ae^{(k)}><Ae^{(k)},AAe^{(k)}>} = 1 - \frac{<Ae^{(k)},Ae^{(k)}>^2}{<e^{(k)},Ae^{(k)}><Ae^{(k)},AAe^{(k)}>} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{<e^{(k)},Ae^{(k)}>}{<Ae^{(k)},Ae^{(k)}>}} \frac{1}{\frac{<Ae^{(k)},AAe^{(k)}>}{<Ae^{(k)},Ae^{(k)}>}} =_1 1 - \frac{1}{\frac{<A^{-1}r^{(k)},r^{(k)}>}{<r^{(k)},r^{(k)}>}} \frac{1}{\frac{<Ae^{(k)},AAe^{(k)}>}{<Ae^{(k)},Ae^{(k)}>}} =$$

$$=_{2.1} 1 - \frac{1}{\frac{<r^{(k)},A^{-1}r^{(k)}>}{<r^{(k)},r^{(k)}>}} \frac{1}{\frac{<Ae^{(k)},AAe^{(k)}>}{<Ae^{(k)},Ae^{(k)}>}} \le 1 - \frac{1}{\lambda max(A^{-1})} \frac{1}{\lambda max(A)} \le_{2.2} 1 - \frac{1}{\frac{1}{\lambda min(A)}} \frac{1}{\lambda max(A)} =$$

$$= 1 - \frac{\lambda min(A)}{\lambda max(A)} < 1$$

$$\mathbf{c^{(k)}} \le \ \mathbf{1} - \frac{\lambda \mathbf{min(A)}}{\lambda \mathbf{max(A)}} < \mathbf{1}$$

2.c.4

$$\mathbf{c^{(k)}} \le \ \mathbf{1} - \frac{\lambda \mathbf{min(A)}}{\lambda \mathbf{max(A)}} < \mathbf{1}$$

$$\mathbf{f(x^{(k+1)}) = c^{(k)} f(x^{(k)}) \le f(x^{(k)})}$$

$$\mathbf{0} \le \lim_{k\to\infty} \mathbf{f(x^{(k+1)})} \le \lim_{k\to\infty} \mathbf{f(x^{(k)})} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{c^{(k-1)}} * \ldots * \boldsymbol{c^{(0)} f(x^{(0)})}$$

$$\le \lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{max}\{= \boldsymbol{c^{(k-1)}} * \ldots * \boldsymbol{c^{(0)}}\})^{\boldsymbol{k-1}} \boldsymbol{f(x^{(0)})} = \mathbf{0}$$

$$=> 0 \le \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) \le 0 => \ \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = 0 =>$$

$$0 = \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} | \left|\left|\mathbf{x^k - x^*}\right|\right|_{\mathbf{A}}^2 => \ \lim_{k\to\infty} \ \left|\left|\mathbf{x^k - x^*}\right|\right|_{\mathbf{A}}^2 = 0 => \ \lim_{k\to\infty} \ \mathbf{x^k = x^*}$$

3.a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + a * \left(b - Ax^{(k)}\right) = x^{(k)} + ar^{(k)}$$

g(a) $=_{\text{סימון}} \left\| Ax^{*} - A(x^{(k)} + ar^{(k)}) \right\|_{2}^{2} = \left\| r^{(k)} - Aar^{(k)} \right\|_{2}^{2} = \left(r^{(k)} - Aar^{(k)}\right)^{t}\left(r^{(k)} - Aar^{(k)}\right) =$

$= {r^{(k)}}^{t} r^{(k)} - {r^{(k)}}^{t} Aar^{(k)} - \left(Aar^{(k)}\right)^{t} r^{(k)} + \left(Aar^{(k)}\right)^{t} Aar^{(k)} =$

$= {r^{(k)}}^{t} r^{(k)} - 2{r^{(k)}}^{t} Aar^{(k)} + \left(Aar^{(k)}\right)^{t} Aar^{(k)} =$

$= {r^{(k)}}^{t} r^{(k)} - a2{r^{(k)}}^{t} Ar^{(k)} + a^{2}\left(Ar^{(k)}\right)^{t} Ar^{(k)}$

=> g(a) $= {r^{(k)}}^{t} r^{(k)} - a2{r^{(k)}}^{t} Ar^{(k)} + a^{2}\left(Ar^{(k)}\right)^{t} Ar^{(k)}$

$\min \left\| r^{(k+1)} \right\|_{2} = \min \left\| Ax^{*} - Ax^{(k+1)} \right\|_{2} = \min \left\| Ax^{*} - A(x^{(k)} + ar^{(k)})) \right\|_{2} =$
$\min \left\| Ax^{*} - A(x^{(k)} + ar^{(k)})) \right\|_{2}^{2} = g(a)$

$$\frac{\partial g(a^{(k)})}{\partial a^{(k)}} = -2{r^{(k)}}^{t} Ar^{(k)} + 2a\left(Ar^{(k)}\right)^{t} Ar^{(k)} = 0$$

=> $\boldsymbol{a^{k} = \frac{{r^{(k)}}^{t} Ar^{(k)}}{\left(Ar^{(k)}\right)^{t} Ar^{(k)}} = \frac{{r^{(k)}}^{t} Ar^{(k)}}{{r^{(k)}}^{t} A^{t} Ar^{(k)}}}$

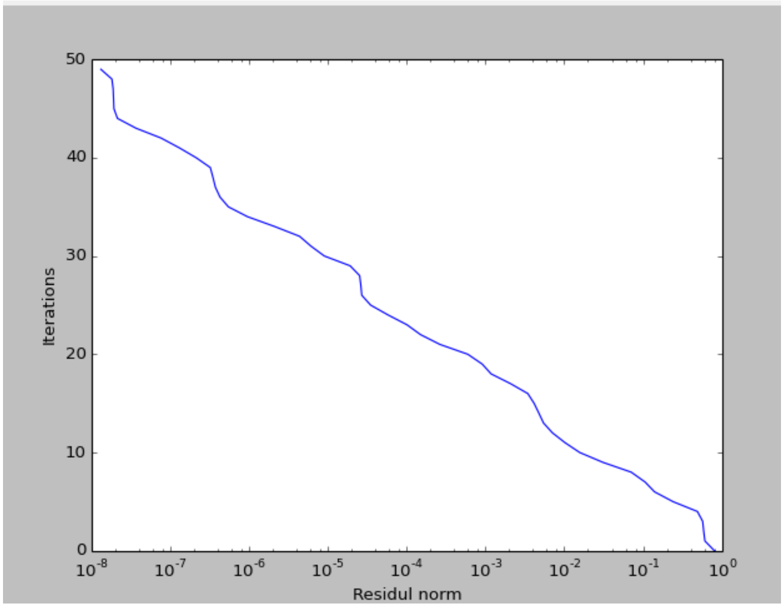
3.b

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$
for k = 1; …; maxIter do:
d= $Ar^{(k-1)}$ # כפל מטריצה בוקטור
$a^{k-1} = \frac{{r^{(k)}}^{t} Ar^{(k)}}{{r^{(k)}}^{t} A^{t} Ar^{(k)}} = \frac{{r^{(k)}}^{t} d}{d^{t} d}$ # כפל וקטור בוקטור

$x^{(k)} = x^{(k-1)} + a^{k-1} r^{(k-1)}$#כפל וקטור בוקטור
$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} = r^{(k-1)} - a^{k-1} Ar^{(k-1)} = r^{(k-1)} - a^{k-1} d$ #כפל וקטור בוקטור
$Ar^{(k-1)}$ is already computed for calculating d
If convergence is reached, break
end
Return $x^{(k)}$ as the solution.

נבחין כי ישנו חישוב יחיד המכיל כפל של מטריצה בוקטור והוא d= $\boldsymbol{Ar^{(k-1)}}$

3.c



3.d

הגרף שקיבלנו מונוטוני משום שככל שהאיטרציות מתקדמות הפתרון המשוערך $x^{(k)}$ מתקרב יותר ויותר לפתרון המדוייק x^*.
אנו בוחרים a^k בכל איטרציה באופן אופטימלי כך שנגיע לוקטור השגיא המינימלי האפשרי.
לכן $r^{(k+1)} \leq r^{(k)}$.

זאת אומרת שוקטור השארית קטן יותר ויותר בכל איטרציה- וכך גם נורמת וקטור השארית $||r^{(k+1)}|| \leq ||r^{(k)}||$.

3.e

$$a^{(k)} = [a1^{(k)}, a2^{(k)}]$$

$$R^{(k)} = [r^{(k)}, r^{(k-1)}]$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + a1^{(k)}r^{(k)} + a2^{(k)}r^{(k-1)} = x^{(k)} + R^{(k)}a^{(k)}$$

$$g(a) \underset{\text{סימון}}{=} \min \left\| r^{(k)} - AR^{(k)}a^{(k)} \right\|_2^2 = \left(r^{(k)} - AR^{(k)}a^{(k)}\right)^t \left(r^{(k)} - AR^{(k)}a^{(k)}\right)) =$$

$$= r^{(k)^t} r^{(k)} - r^{(k)^t} AR^{(k)}a^{(k)} - \left(AR^{(k)}a^{(k)}\right)^t r^{(k)} + \left(AR^{(k)}a^{(k)}\right)^t AR^{(k)}a^{(k)} =$$

$$=> g(a) = r^{(k)^t} r^{(k)} - r^{(k)^t} AR^{(k)}a^{(k)} - a^{(k)^t} \left(AR^{(k)}\right)^t r^{(k)} + a^{(k)^t} \left(AR^{(k)}\right)^t AR^{(k)}a^{(k)}$$

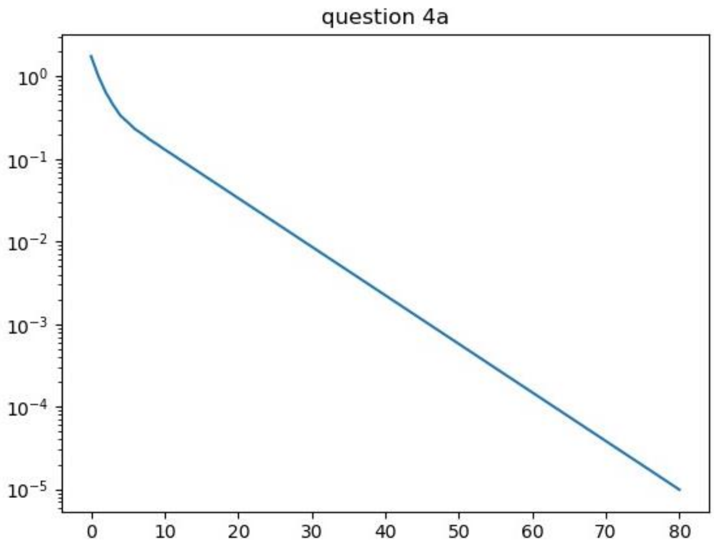
$$\min\left|\left|b - Ax^{(k+1)}\ \right|\right|_2 = \min\left|\left|b - A(x^{(k)} + R^{(k)}a^{(k)})\right|\right|_2 = \min\left|\left|b - Ax^{(k)} - AR^{(k)}a^{(k)})\right|\right|_2 = \min\left|\left|r^{(k)} - AR^{(k)}a^{(k)})\right|\right|^2{}_2 = g(a)$$

$$\frac{\partial g(a^{(k)})}{\partial a^{(k)}} = -2\left(AR^{(k)}\right)^t r^{(k)} + 2\left(AR^{(k)}\right)^t AR^{(k)}a^{(k)} = 0$$

$$\boldsymbol{=>a^k} = \left(\boldsymbol{AR^{(k)}}\right)^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{r^{(k)}}\left(\left(\boldsymbol{AR^{(k)}}\right)^{\boldsymbol{t}}AR^{(k)}\right)^{\boldsymbol{-1}}$$

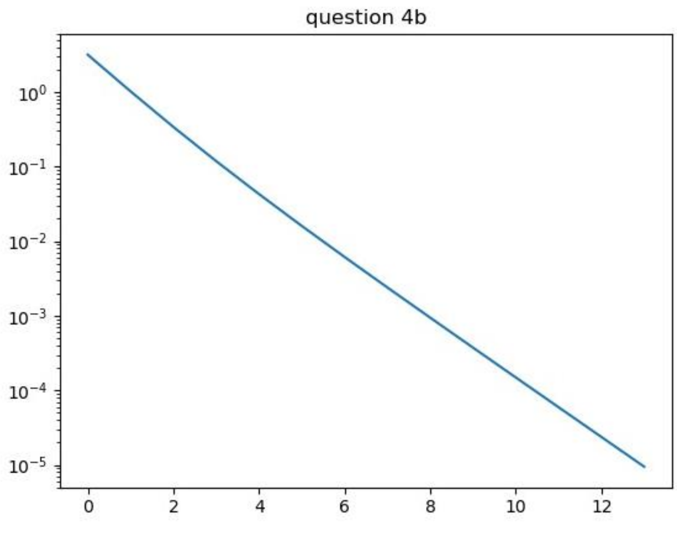
4.a

82 איטרציות נדרשות:



4.b

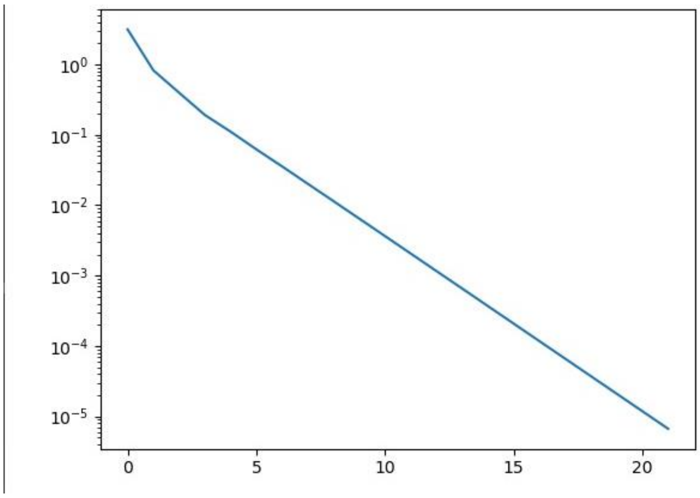
12 איטרציות נדרשות:



השיטה מפחיתה את מספר האיטרציות מ80 ל-12.

4.c

20 איטרציות נדרשות:



הערה: לפי הוראות השאלה בדקנו את התכנסות החלוקות עם משקל של 0.7 בלבד. ניתן לשפר את מספר האיטרציות באמצעות משקל אחרת למשל 0.8 שייתן 16 איטרציות.

חילקנו את קבוצות הקודקודים ל- {1,2,3,4}, {5,6,7}, {8,9,10} . לאחר מספר נסיונות של חלוקה גילינו שזו החלוקה הטובה ביותר של הקודקודים המביאה למספר איטרציות הקטן ביותר. האינטואיציה הייתה להוריד כמות קטנה ביותר של צלעות מהגרף על ידי החלוקה, אך במקרה זה – האינטואיציה לא פעלה שכן זוהי לא החלוקה הטובה ביותר מבחינת הורדת צלעות אך היא מתכנסת ביותר. אולי בגרפים אחרים ששונים בגודל או במבנה הצלעות- הנחה זו תפעל.