

Spectral Clustering

କାନ୍ଦିବିରି କାନ୍ଦିବିରି -
କାନ୍ଦିବିରି କାନ୍ଦିବିରି -
କାନ୍ଦିବିରି କାନ୍ଦିବିରି -

לעתם מושגנו בטבילה וטבילה מושגנו בטבילה.

top-down

K-means

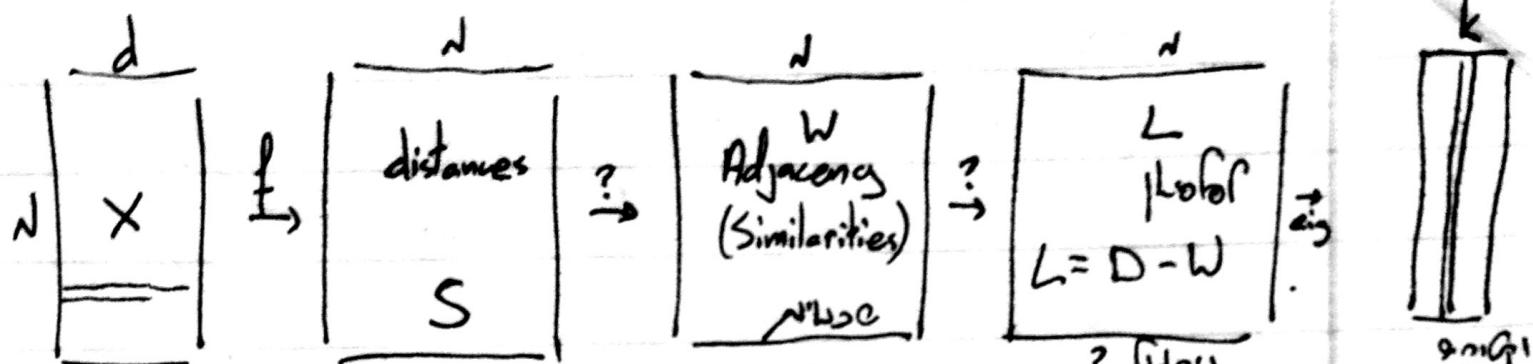
? K-Ind., NP-Hard, Graph

למ"ד למדנו בtop-down וbottom-up "מבנה נתונים" גורם ל-K-means וDBSCAN מלהירך וליישם.

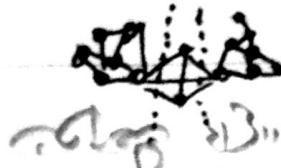
גַּלְגָּלֶת וְסִירֵי כְּבָדָה וְכְבָדָה.

2. From right new profile 6 #2 $\text{W}_0 \rightarrow \text{C}_P$ -

. ק. גודלן מגילה ר' יונה מילר ברוך גוטמן ק-



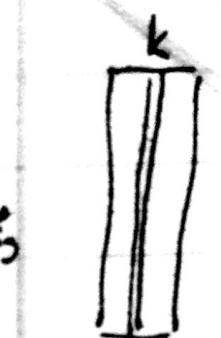
הינה מטרס \rightarrow מטרס של
 $x_i \in \mathbb{R}^d$



טבליות
טבליות

$$Lv = \lambda v$$

לפיה נסמן ב-v



הנחיות מטרס זה מושג בהנחיות
 מטרס זה מושג בהנחיות. "ב" מושג בהנחיות.
 מושג בהנחיות בהנחיות מושג בהנחיות.

? מי יתמודד בפער ? מי יתמודד בפער ! מי יתמודד בפער

? מי יתמודד בפער ? מי יתמודד בפער ? מי יתמודד בפער

ϵ מי יתמודד בפער ? מי יתמודד בפער - מי יתמודד בפער

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 1 & \|x_i - x_j\| \leq \epsilon \\ 0 & \|x_i - x_j\| > \epsilon \end{cases}$$

כדי $\omega_{ij} + \omega_{ji} \neq 0$

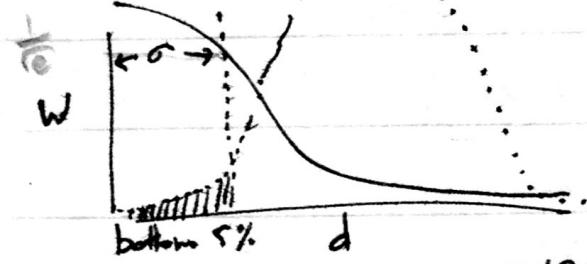
K-nearest neighbors - מי יתמודד בפער

$\omega_{ij} > 0$ iff x_i among k nearest neighbors of x_j or vice versa
 (outliers \propto גורם) scale free

($\text{אוסף נード}=k \cdot n \cdot \text{איל}$) ? K נード

Weights function: $\exp \cdot \frac{||x_i - x_j||^2}{2\sigma^2}$

$$w_{ij} = \exp \left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2} \right)$$



$\sum w_{ij} \leq \int w_{ij} d\sigma \approx \sigma$

~~What is Graph "cool" ? What is it?~~

5. point which will do what we want

Prob ratio 213%

$W = \text{matrix form}$

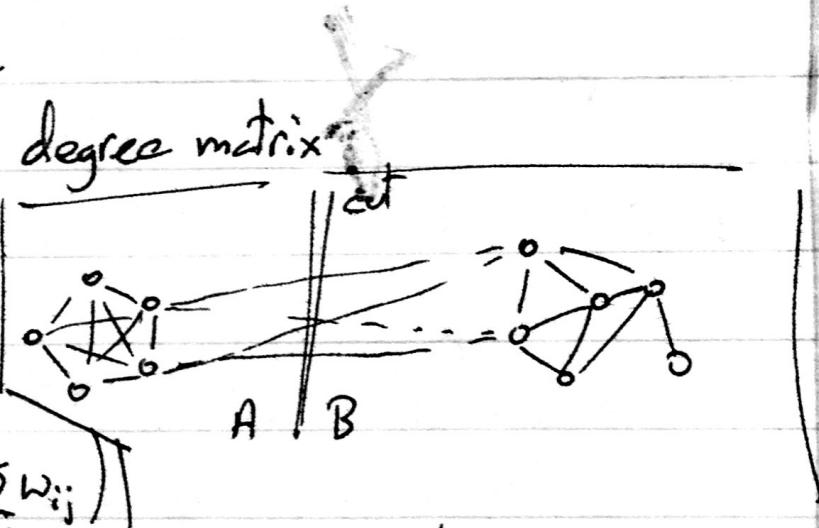
$d_i = \sum_j w_{ij}$ degree

$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ degree matrix

$$|A| = \sum_{i \in A} 1 \quad \begin{array}{l} \text{on } A \\ \text{on } B \end{array}$$

$$\text{vol}(A) = \sum_{i \in A} d_i \quad \left(= \sum_{i \in A} \sum_j w_{ij} \right)$$

A \Rightarrow weight = prob of $i \in A$



Clustering

$$\arg \min_{A, B} \text{CUT}(A, B) = \sum_{\substack{i \in A \\ j \in B}} w_{ij}$$

Prob w_{ij} that $i \in A$

Time complexity $\Theta(V^2E)$ $\Theta(V^2E)$ $\Theta(V^2E)$ $\Theta(V^2E)$

$O(VE^2)$

(only one iteration)

and new role < .oh. & st nos

Global MinCut. C Stoer-Wagner C parallel and GDI

անդիքս օճառ $\sim O(n^3)$

הקל גהה אונס גיג גען זיך . 19018 טז

תעלת מלחמה ומלחמות

$\left[\text{.} \left(\text{use } \mu \text{h} \right) \quad \begin{array}{c} \mu h_2 \leftarrow \text{good} \\ \cancel{\text{if } h_1 \neq 0} \end{array} \quad \text{oh no} \right]$

91% of people with ~~the~~ ^{no longer} disease are asymptomatic.

$$\text{Ratio Cut } (A, B) = \text{CUT}(A, B) \cdot \left[\frac{1}{|A|} + \frac{1}{|B|} \right]$$

$$\text{RatioCut}(A_1, \dots, A_k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{\text{cut}(A_i, \bar{A}_i)}{|A_i|}$$

←

$$J_{cut} = CUT(A, B) \cdot \left[\frac{1}{vol(A)} + \frac{1}{vol(B)} \right] \quad \text{ik} \quad vol(A) = \sum_{i \in A} d_{ii}$$

గీత ప్రాచుర్య జీ గం శాఖలు.

מורי ב. פון גראן (F. von Gran) מגדיר מושג זה כ'

exp. 18 - the lungs and liver and kidneys

לענין דיאוגרפיים

RatioCut یک CUT پردازی است که برای اینجا نیاز ندارد.

[Final HP] Graph Laplacian

$$L = D - W$$

$\forall i \quad w_{ij} \geq 0 \quad \text{forall } j \in V : W$

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sum_k w_{ik} & \text{forall } i \in V : D \end{cases}$$

~~graph~~ all 2 \Rightarrow size G also ~ 16

$$L \cdot \vec{1} = 0 \cdot \vec{1} \quad \text{forall } i \in V : \vec{1}$$

(Positive Semi-Definite) \Rightarrow PSD

$$f^T L f = f^T D f - f^T W f = \sum_i d_i f_i^2 - \sum_{ij} f_i f_j w_{ij} = \underbrace{\quad}_{\forall f \quad f^T L f \geq 0}$$

$$\frac{1}{2} \left(\sum_i \left[\sum_j w_{ij} \right] f_i^2 - 2 \sum_{ij} f_i f_j w_{ij} + \sum_j \left[\sum_i w_{ij} \right] f_j^2 \right) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} w_{ij} (f_i - f_j)^2$$

PSD \leftarrow $f^T L f \geq 0 \quad f \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f \in \text{range } L$
 (forall D , $\forall W$) \Rightarrow L has

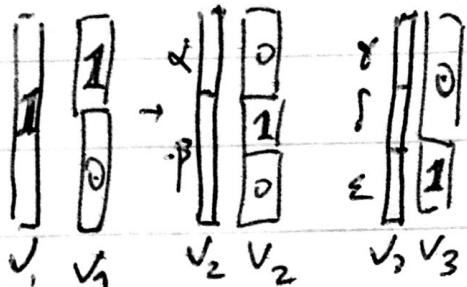
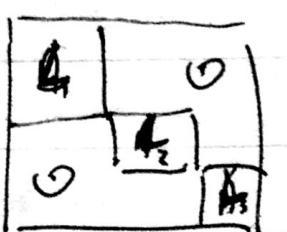
(1)

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad \text{all eigenvalues are real}$$

• Only λ_1 is non-zero if G is connected

$$0 \leq v^T L v = v^T (\lambda \cdot I) v = \lambda \sum_i v_i^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow 0 \leq \text{all } \lambda \geq \lambda_1 = e^T L e$



ארכיטקטורה

6. տեսօն և աղմբ, թ. ՀԱ ՀՀ առ յօդի

הניל. גלעדי ח'אמן.

j. k. KlPf eigenwert λ

לעומת גורם זה, מילוי הדרישה מחייב קיומו של גוף כלשהו.

K. in ylls

առջև պոլիտ կ. յ կ-means

me gđ.?

କେବଳ ୨



מגניטים מודולריים, מילוט → ווילס וו. טב
טב. טב. טב. טב. טב. טב. טב. טב.

Normalized graph Laplacian

Vol(A) = $\sum_{i \in A} d_i \cdot |A| \rightarrow$ max? min?

Shi & Malik (2000) $L_n = D^{-1}L$ $= I - D^{-1}W$

RatioCut $(d_i \rightarrow \frac{1}{\lambda_i}) \rightarrow G_{avg}(h)$ \rightarrow $L_n u = \lambda D u$ $(? \text{ PSD } \rightarrow L_n)$

Ng, Jordan, Weiss (2002) $L_{sym} = D^{\frac{1}{2}} L D^{\frac{1}{2}} \rightarrow I - D^{\frac{1}{2}} W D^{-\frac{1}{2}}$

$D_j \rightarrow \frac{1}{d_j}$ $\rightarrow w_{ij}$ \rightarrow L_{sym} \rightarrow $L_{sym} u = 0$

$$f' L_s f = \frac{1}{2} \sum w_{ij} \left(\frac{f_i}{\sqrt{d_i}} - \frac{f_j}{\sqrt{d_j}} \right)^2 : f \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$L_{sym} \left[D^{\frac{1}{2}} u \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda \neq 0) \ L(G) u \neq 0 \quad \text{G.p.}$$

$$(\lambda \neq 0) \ L_{sym} G \neq 0 \quad \text{u} \in D^{\frac{1}{2}} u$$

[מ长时间の間、L(G)u = 0 となる u の性質]

$$DL_n u = \lambda u \rightarrow L_n u = \lambda D u$$

$$L_n u = \lambda D u \quad \text{with } L_n G \neq 0 \quad \text{u}, \neq 0 \quad \lambda -$$

$$D^{\frac{1}{2}} u \neq 0 \quad \text{and } L_{sym} G \neq 0 \quad \text{u}, \neq 0 \quad \lambda -$$

(in GAO) graph
 Input: $\{x_1, \dots, x_n\}$ $x_i \in \mathbb{R}^d$

S : Distance matrix ~~W_{ij}~~ $S_{ij} = \|x_i - x_j\|$

W : Adjacency matrix $W_{ij} = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}\right)$

D : Degree matrix (diags) $D_{ii} = \sum_j W_{ij}$

- Compute $L = \overline{D} - D^{-\frac{1}{2}} W D^{-\frac{1}{2}}$

- Compute first k eigenvectors, $U = [u_1, \dots, u_k]$

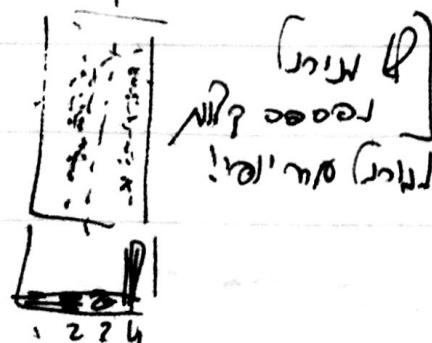
normalize rows
 $T = U$: $t_{ij} = u_{ij} / \sqrt{\sum_k u_{ik}^2}$

- Rows y_i ($i=1, \dots, n$) of T
- Cluster using k-means.

(in GAO II) graph

right L of λ β -

$\lambda u = L u = \lambda D u$: D of λ_i wrt β -



Ratios Cut $\cdot \frac{\text{second jet} \geq 30\%}{\text{first jet} \geq 30\%}$

$$\arg \min_{A \in V} \text{RatioCut}(A, \bar{A}) = \text{cut}(A, \bar{A}) \left[\frac{1}{|A|} + \frac{1}{|\bar{A}|} \right]$$

$\forall i \in A$ $\exists \alpha_i, \beta_i$ such that $\alpha_i + \beta_i = 1$ and $\alpha_i^2 = \beta_i^2$

$$f' L f = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} (f_i - f_j)^2 =$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in A \\ j \in \bar{A}}} w_{ij} (\alpha + \beta)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \bar{A} \\ j \in A}} w_{ij} (-\alpha + \beta)^2 =$$

$$\sum_{\substack{i \in S \\ j \in T}} \|i-j\| = \text{CUT}(A, \bar{A}) \cdot [\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2] = \text{CUT}(A, \bar{A}) \left[\frac{|A|}{|\bar{A}|} + \frac{|A| + |\bar{A}|}{|\bar{A}|} \cdot 2 \right]$$

$$= \text{CWT}(A, \bar{A}) \left(\frac{\frac{N}{2}}{|A|} + \frac{\frac{N}{2}}{|\bar{A}|} \right) = \frac{N}{2} \cdot \text{CWT}(A, \bar{A}) \cdot \left[\frac{1}{|A|} + \frac{1}{|\bar{A}|} \right] =$$

$$= \mathfrak{J}_N \cdot \text{Ratioswt}(A, \bar{A})$$

! RatioCut \in $\text{r}^{\text{B}}\text{e}\text{a}\text{d}\text{e}$ range and $f_{\text{abj}} \approx 0.15$

$\sum f_i = 0$, $\|f\|^2 = n$

• $\|f\| = \sqrt{n}$ and $\sigma_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i^2$

$$\min_{A \subseteq V} f^T f \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = \sqrt{\frac{|A|}{n}} \\ \beta = -\sqrt{\frac{|A|}{n}} \end{array} \right) : f \perp 1, \|f\| = \sqrt{n} : \text{Ratiocut}, \gamma_{02}$$

señal regular ↓

$$\min_{f \in \mathbb{R}^n} f^T f : f \perp 1, \|f\| = \sqrt{n} : \text{sign cut}, \gamma_{02}$$

: $\alpha f \geq 0$ s.t. $f^T f = \lambda f^T f = \lambda \cdot n$

. $v_i \in A \text{ iff } f_i \geq 0$

? $\sqrt{n} \geq 2 \cdot \sqrt{n} \geq \sqrt{n} \geq \sqrt{n}$
! $\text{Café} \cdot \text{zwischen} \cdot \text{und} \cdot \text{zu} \cdot \text{viel} \cdot k \cdot \notin G_0$

$$\tilde{L} - \tilde{D}^{\frac{1}{2}} \tilde{W} \tilde{D}^{\frac{1}{2}} = L_{sym} \text{ nach Graphen } \text{plotzen}$$

↓ cut \Rightarrow k mit pairs ≥ 1

- $\text{Cut}(A, B) \cdot \left[\frac{1}{\text{vol}(A)} + \frac{1}{\text{vol}(B)} \right]$

- A Tutorial on Spectral Clustering : $\gamma_{02} \sim 1/k$
- Ulrike von Luxburg, 2007