# תורת המידה

יובל קפלן

סיכום הרצאות פרופ׳ שחר מוזס בקורס ״תורת המידה״ (80517) באוניברסיטה העברית, 9–2008.

תוכן מחברת זו הוקלד ונערך על־ידי יובל קפלן. אין המרצה אחראי לכל טעות שנפלה בו. סודר באמצעות $\LaTeX\,2_\varepsilon$ ב־8 בפברואר 2009.

עדכונים ותיקונים יופיעו ב־http://www.limsoup.net/. לתגובות, לתיקונים ובכל עניין אחר, אנא כתבו ל־yuvak@gmx.net.

סיכומים נוספים בסדרה:

| | | |
|---|---|---|
| 2006–7 | חשבון אינפיניטסימלי 1 | אלגברה לינארית 1 |
| | חשבון אינפיניטסימלי 2 | אלגברה לינארית 2 |
| | תורת הקבוצות | |
| 2007–8 | חשבון אינפי' מתקדם 1 | מבנים אלגבריים 1 |
| | חשבון אינפי' מתקדם 2 | מבנים אלגבריים 2 |
| | תורת ההסתברות 1 | מבוא לטופולוגיה |
| | תורת המספרים וקריפטו' | תולדות המתמטיקה |
| 2008–9 | לוגיקה של מבנים מת' | פונקציות מרוכבות |
| | משוואות דיפ' רגילות | תורת המידה |
| | תורת המשחקים 1 | |

# תוכן עניינים

# 1 תורת המידה

## 1.1 מידת לבג

### 1.1.1 מוטיבציה

3.11.2008 רוצים "למדוד" גודל של קבוצות. למשל, ב־$\mathbb{R}$, עבור קטעים $[a,b]$, $(a,b)$, $(a,b]$, $[a,b)$ מוגדר אורך: $l([a,b])=b-a$; היינו רוצים, אידיאלית, פונקציה $m:P(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}$ שמוגדרת על כל תת־קבוצה של $\mathbb{R}$ כך ש־

א. היא תתלכד עם אורך קטעים: עבור קטע $I$, $m(I)=l(I)$;

ב. אם $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ קבוצות זרות ב־$\mathbb{R}$, אזי $m(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)$ ($\sigma$־אדיטיביות);

ג. לכל $E\subseteq\mathbb{R}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$, $m(E)=m(E+x)$ (אינווריאנטיות תחת הזזה).

נניח ש־$m$ פונקציה שמקיימת את התנאים (ב) ו־(ג) ומוגדרת על קטעים. אם $m([0,1))=1$, אזי לכל קטע $I$, $m(I)=l(I)$.

**טענה 1:** אין פונקציה $m$ המקיימת תכונות (א), (ב) ו־(ג) ומוגדרת על כל התת־קבוצות של $\mathbb{R}$.

**הוכחה.** נגדיר יחס שקילות $\sim$ על $\mathbb{R}$: $x\sim y$ אס"ם $x-y\in\mathbb{Q}$. נצמצם את יחס השקילות ל־$I=[0,1)$. תהא $E\subseteq I$ קבוצת נציגים של מחלקות השקילות (קיימת, מאקסיומת הבחירה – או, באופן שקול, מהלמה של צורן). עבור כל $q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)$, נגדיר

$$A_q=\{x+q\mid x\in E,x+q<1\}\cup\{x+q-1\mid x\in E,x+q\geq 1\}$$

נשים לב כי מתכונות (ב) ו־(ג) נובע כי $m(A_q)=m(E)$.

**למה 1.1:** $[0,1)=\coprod_{q\in\mathbb{Q}}A_q$.

**הוכחה.** מתקיים $A_q\cap A_r=\varnothing$ ל־$q\neq r\in\mathbb{Q}\cap[0,1)$, כי אם $y\in A_q\cap A_r$, אז $y=x_0+\tilde{q}$ ל־$\tilde{q}\in\{q,q-1\}$ ו־$y=x_1+\tilde{r}$ ל־$\tilde{r}\in\{r,r-1\}$, כאשר $x_0,x_1\in E$. אז $x_1-x_0\in\mathbb{Q}$, והיות ש־$\tilde{q}\neq\tilde{r}$, גם $x_1\neq x_0$, בסתירה לכך שב־$E$ אין שני איברים שקולים.

לכל $x\in[0,1)$ קיים $q$ כך ש־$x\in A_q$, כי קיים $x_0\in E$ כך ש־$s=x-x_0\in\mathbb{Q}$ ל־$-1<s<1$, ואז $x\in A_s$ או $x\in A_{1+s}$.

לכן $1=m([0,1))=\sum_{q\in\mathbb{Q}}m(A_q)=\sum_{q\in\mathbb{Q}}m(E)$, וסתירה.

### 1.1.2 בניית מידת לבג על $\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$

**הגדרה.** יהי $X$ מרחב. $\mathcal{B}$ אוסף תת־קבוצות של $X$ ייקרא **$\sigma$־אלגברה** אם (א) $\varnothing,X\in\mathcal{B}$; (ב) $\mathcal{B}$ סגור תחת איחודים בני־מניה; (ג) $\mathcal{B}$ סגור תחת משלים. $\sigma$־אלגברה

**הגדרה.** **מידה חיצונית** על $\mathbb{R}$ היא פונקציה $\mu^*$ המוגדרת על כל התת־קבוצות של $\mathbb{R}$ ומקיימת מידה חיצונית

א. $\mu^*(\varnothing)=0$;

ב. מונוטוניות: $E_1\subseteq E_2 \Longleftarrow \mu^*(E_1)\leq\mu^*(E_2)$;

ג. תת־אדיטיביות בת־מניה: $\mu^*(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n)$.

עבור $E \subseteq \mathbb{R}$, נגדיר $m^*(E) = \inf \sum_{j=1}^\infty l(I_j) \in [0,\infty]$ כאשר $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ סדרת קטעים פתוחים כך ש־$E \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$.

**טענה 2:** עבור כל קטע $I$, $m^*(I) = l(I)$.

**הוכחה.** נניח ראשית $I = [a,b]$.

לכל $\varepsilon > 0$, $[a,b] \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, ומכאן $m^*([a,b]) \leq l([a,b])$.

צריך להראות את אי־השוויון ההפוך. נניח $[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$. אזי יש לו תת־כיסוי סופי, $[a,b] \subseteq \sum_{j=1}^N I_j$. קיים איזשהו $1 \leq j_0 \leq N$, $a \in I_{j_0} = (a_0,b_0)$. אם $b \geq b_0$ אזי קיים $1 \leq j_1 \leq N$ כך ש־$b \in I_{j_1} = (a_1,b_1)$. נמשיך באופן זה, ולאחר מספר סופי של צעדים נקבל $b \in I_k = (a_k,b_k)$.[1] אז

$$\sum_{l=0}^k l(I_{j_l}) = \sum_{l=0}^k (b_l - a_l) \geq b_0 - a_0 + \sum_{l=1}^k (b_l - b_{l-1}) = b_k - a_0 \geq b - a$$

עבור קטעים פתוחים, ברור, כי לכל $\varepsilon > 0$, $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subseteq (a,b)$ ולכן

$$l(a,b) - 2\varepsilon = m^*([a+\varepsilon, b-\varepsilon]) \leq m^*(a,b)$$

עבור קטעים מהצורה $[a,b)$ ו־$(a,b]$, הדרוש מתקבל באופן דומה.

ברור ש־$m^*$ אינרוואינטי להזזות ושאם $E \subseteq F$, אזי $m^*(E) \leq m^*(F)$.

**טענה 3:** למשפחה בת־מניה של קבוצות $A_n$ ב־$\mathbb{R}$, מתקיים $m^*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty m^*(A_n)$.

**הוכחה.** אם עבור $n$ מסוים $m^*(A_n) = \infty$, הטענה ברורה. אחרת, נקבע $\varepsilon > 0$. לכל $n$ נמצא כיסוי פתוח בן־מניה $\{I_{n,j}\}_{j=1}^\infty$, $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_{n,j}$, כך ש־$m^*(A_n) \geq \sum_{j=1}^\infty l(I_{n,j}) - \frac{\varepsilon}{2^n}$. אז

$$m^*(\bigcup A_n) \leq \sum_n \sum_j l(I_{n,j}) \leq \sum_n (m^*(A-n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_n m^*(A_n) + \varepsilon$$

והיות ש־$\varepsilon$ שרירותי, נובע $m^*(\bigcup A_n) \leq \sum_n m^*(A_n)$.

**מסקנה 4:** אם $A$ בת־מניה, אזי $m^*(A) = 0$.

עבור $d = 2$: נאמר כי אוסף מלבנים הוא **כמעט זר** אם המלבנים נחתכים רק בשפה שלהם. אם מכסים מלבן באוסף סופי כמעט זר של מלבנים, שטח המלבן הוא סכום שטחיהם (תרגיל).

ל־$d$ כללי, נגדיר מידה חיצונית $m^*(E) = \inf \sum_{j=1}^\infty |Q_j|$ כאשר $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ כיסוי של $E$ על־ידי תיבות פתוחות ($|Q_j|$ – נפח $Q_j$).

**טענה 5:** לכל קבוצה $E$, $m^*(E) = \inf_{E \subseteq O \text{ open}} m^*(O)$.

[1] נקבל סדרה $a > a_0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < a_4 < \ldots < b_{k-1} < b_k > b$.

**הוכחה.** ברור ש־$m^*(E) \le m^*(O)$ לכל $E \subseteq O$ פתוחה (בהגדרה שנתנו; אם מגדירים על־ידי קוביות סגורות, צריך לעבוד).

**טענה 6:** נניח כי $E = E_1 \cup E_2$, $0 < d(E_1, E_2)$.[2] אזי $m(E) = m(E_1) + m(E_2)$.

**הוכחה.** נכסה את $E_1 \cup E_2$ בקוביות שקוטרן קטן מ־$\delta < d(E_1, E_2)$, $E_1 \cup E_2 \subseteq \bigcup_{j\in I} Q_j$ ($I$ בן־מניה). אז $\sum_{j\in I} |Q_j| - \varepsilon \ge m^*(E_1 \cup E_2)$. ניקח $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, $E_1 \subseteq \bigcup_{i\in I_1} Q_i$, $E_2 \subseteq \bigcup_{i\in I_2} Q_i$ ונקבל $\varepsilon + m^*(E_1 \cup E_2) \ge \sum_{in\in I_1} |Q_i| + \sum_{i\in I_2} |Q_i| \ge m^*(E_1) + m^*(E_2)$. מכאן, $m^*(E_1 \cup E_2) \ge m^*(E_1) + m^*(E_2)$. הכיוון השני תמיד מתקיים.

**הגדרה.** קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^d$ תיקרא **מדידה לבג** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה פתוחה $O$ כך ש־$E \subseteq O$, $m^*(O \setminus E) < \varepsilon$.

5.11.2008 נסמן ב־$\mathcal{L}$ את אוסף הקבוצות המדידות לבג. נראה כי $\mathcal{L}$ הוא $\sigma$־אלגברה המכילה את כל הקבוצות הפתוחות ב־$\mathbb{R}^d$.

**טענה 7:** כל קבוצה פתוחה $O \subseteq \mathbb{R}^d$ שייכת ל־$\mathcal{L}$.

**טענה 8:** אם $E \subseteq \mathbb{R}^d$ כך ש־$m^*(E) = 0$ אזי $E \in \mathcal{L}$.

**טענה 9:** איחוד בן מניה של קבוצות מדידות הוא מדיד.

**הוכחה.** לכל $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in \mathcal{L}$. בהינתן $\varepsilon > 0$, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת קבוצה פתוחה $E_n \subseteq O_n$ כך ש־$m^*(O_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. לכן $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ ו־$O \setminus E \subseteq \bigcup (O_n \setminus E_n)$, ולכן $m^*(O \setminus E) \le m^*(\bigcup (O_n \setminus E_n)) \le \sum m^*(O_n \setminus E_n) < \varepsilon$.

**טענה 10:** קבוצה סגורה היא מדידה.

**הוכחה.** די להראות זאת עבור קבוצות חסומות, כי אז אם $F$ קבוצה סגורה, נגדיר $F_n = F \cap B_n$, $B_n = \overline{B(0,n)}$; $F_n$ סגורות וחסומות, לכן הן מדידות ולכן גם $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ מדידה.

תהא $F \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה סגורה וחסומה. תהא $B$ קבוצה פתוחה וחסומה המכילה את $F$. $B \setminus F$ פתוחה; ניתן להציג אותה כאיחוד בן מניה $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ של קוביות סגורות כמעט זרות. אז מתקיים $m^*(B \setminus F) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$, ובהינתן $\varepsilon > 0$, קיים $N$ כך ש־$\sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| < \varepsilon$.

$L = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ קבוצה סגורה ו־$F \subseteq B \setminus L$ כאשר $B \setminus L$ פתוחה. אז $m^*((B \setminus L) \setminus F) < \varepsilon$, כי $B \setminus (L \setminus F) = (B \setminus L) \setminus F \subseteq \bigcup_{i=N+1}^{\infty} Q_i$: כל נקודה ב־$B$ שייכת ל־$F$ או ל־$B \setminus F = \bigcup_i Q_i$. אם $x \in B \setminus (L \cup F)$, אזי $x \in B \setminus F = \bigcup_i Q_i$, והיות ש־$x \notin L = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ נובע $x \in \bigcup_{i=N+1}^{\infty} Q_i$. כעת, $m^*(\bigcup_{N+1}^{\infty} Q_i) \le \sum_{N+1}^{\infty} |Q_i| < \varepsilon$.

**טענה 11:** משלים קבוצה מדידה הוא מדיד.

[2] $d(E_1, E_2) = \inf\{d(x,y) \mid x \in E_1, y \in E_2\}$.

**הוכחה.** תהא $E$ מדידה. לכל $n$ קיימת פתוחה $E \subseteq O_n$, $m^*(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. $O_n^C$ מדידה, $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^C \subseteq E^C$ מדידה. אז $E^C = S \cup (E^C \setminus S)$. לכל $n$, $E^C \setminus S \subseteq E^C \setminus O_n^C = O_n \setminus E$, ולפיכך $m^*(E^C \setminus S) \leq m^*(O_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$. אז $m^*(E^C \setminus S) = 0$ ולכן $E^C \setminus S$ מדידה. לכן $E^C$ מדידה.

**מסקנה 12:** חיתוך בן מניה של מדידות הוא מדיד.

עבור $E \in \mathcal{L}$, נסמן כעת $m(E) = m^*(E)$.

**משפט 13:** אם $E_i$ קבוצות מדידות זרות, אזי $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_i^{\infty} m(E_i)$.

**הוכחה.** נניח ראשית כי $E_i$ חסומות. נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו. לכל $E_i$, תהא $F_i$ סגורה, $F_i \subseteq E_i$, כך ש־$m(E_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. הראינו כי לכל זוג קבוצות סגורות $L_1$, $L_2$ (חסומות) כך ש־$d(L_1, L_2) > 0$ מתקיים $m(L_1 \cup L_2) = m(L_1) + m(L_2)$; אז עבור כל אוסף סופי $F_1, \dots, F_N$ של קבוצות קומפקטיות זרות, $m(\bigcup_{i=1}^{N} F_i) = \sum_{i=1}^{N} m(F_i)$. נסמן $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.
$\bigcup_{i=1}^{N} F_i \subseteq E$, אז $m(E) \geq m(\bigcup_{i=1}^{N} F_i) = \sum_1^N m(F_i) \geq \sum_{i=1}^{N} m(E_i) - \varepsilon$.
כאשר $N$ שואף ל־$\infty$, מקבלים $m(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) - \varepsilon$, והיות ש־$\varepsilon > 0$ נבחר שרירותית, $m(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$. תמיד $m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$, ולכן $m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$.

במקרה הכללי של קבוצות $E_i \in \mathcal{L}$ לאו דווקא חסומות, נגדיר $B_0 = \varnothing$, $B_n = B(0, n)$, $R_n = B_n \setminus B_{n-1}$, $E_{i,n} = E_i \cap R_n$. אז $E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{i,n}$, $E = \bigcup E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{i,n}$. הקבוצות $\{E_{i,n}\}_{i,n \in \mathbb{N}}$ זרות, חסומות ומדידות, לכן $m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m(E_{i,n})$ כאשר $m(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_{i,n})$.

## 1.2 מרחבי מידה

**הגדרה.** **מרחב מדיד** הוא קבוצה $X$ עם $\sigma$־אלגברה $\mathcal{M}$ של תת־קבוצות של $X$. איברי $\mathcal{M}$ ייקראו **קבוצות מדידות**. 10.11.2008

מרחב מידה — **מרחב מידה** הוא מרחב מדיד $X$ עם $\sigma$־אלגברה $\mathcal{M}$ ופונקציה $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ (**מידה**) כך ש־$\mu$ $\sigma$־אדיטיבית, כלומר עבור $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ זרות, $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

איפיון קרתאודורי — אם נתון מרחב $X$ עם מידה חיצונית $\mu^* : P(X) \to [0, \infty]$ מוגדרת על כל התת־קבוצות של $X$ (ומקיימת תת־אדיטיביות), אזי אוסף הקבוצות $E \subseteq X$ כך שעבור כל $A \subseteq X$ מתקיים $\mu^*(A) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E^C \cap A)$ מהווה $\sigma$־אלגברה, ועליה $\mu^*$ משרה מידה.

**משפט 14:** (א) אם $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ קבוצות מדידות, אזי גם $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ מדידה, וקיים $\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$.

(ב) אם $E_n \searrow E$, כלומר $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ כאשר כל $E_n$ מדידה, אזי גם $E$ מדידה, ואם $\mu(E_i) < \infty$ אזי $\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$.[3]

[3] התנאי שעבור $E_i$ כלשהי $\mu(E_i) < \infty$ חיוני: למשל, נתבונן ב־$\mathbb{R}$ עם מידת לבג $m$ וניקח $E_n = (n, \infty)$; אז $\mu(E_n) = \infty$ לכל $n$, אך $E = \bigcap E_n = \varnothing$ ו־$m(\varnothing) = 0$.

**הוכחה.** (א) $F_1 = E_1$, ול־$n \geq 2$, $F_n = E_n \setminus E_{n-1} = E_n \cap E_{n-1}^C$. $F_n$ מדידות זרות;
$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(F_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(E_N)$.
(ב) נובע מ־(א) עבור הקבוצות $\tilde{E}_n = E_1 \setminus E_n$.

## 1.3 פונקציות מדידות

יהי $X$ מרחב מידה. פונקציה $f : X \to \mathbb{R}$ תיקרא **מדידה** אם המקור של כל קבוצה פתוחה הוא מדיד. די לבדוק כי עבור כל $(a, \infty)$, $f^{-1}((a, \infty))$ מדידה (תרגיל). באופן כללי יותר:

**הגדרה.** יהי $Y$ מרחב טופולוגי. **$\sigma$־אלגברת בורל** על $Y$ היא ה־$\sigma$־אלגברה הנוצרת על־ידי אוסף הקבוצות הפתוחות של $Y$, כלומר ה־$\sigma$־אלגברה הקטנה ביותר המכילה את התת־קבוצות הפתוחות ב־$Y$. $\sigma$־אלגברת בורל

**הערה.** עבור $Y = \mathbb{R}^d$, נסמן ב־$\mathcal{B}$ את $\sigma$־אלגברת בורל של $\mathbb{R}^d$ וב־$\mathcal{L}$ את $\sigma$־אלגברת הקבוצות המדידות־לבג שהגדרנו. אז $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$: ההכלה נובעת מכך שכל קבוצה פתוחה היא מדידה, ואי־שוויון משיקולי עצמה: $|\mathcal{L}| = 2^{2^{\aleph_0}}$, כי קבטמצ קנטור $\mathcal{C}$ מקיימת $m(C) = 0$, $|C| = 2^{\aleph_0}$ ולפיכך כל תת־קבוצה שלה מדידה; עם זאת, $|\mathcal{B}| = 2^{\aleph_0}$: נבחר בסיס בן מניה $U_n$ לטופולוגיה על $\mathbb{R}$. $\{U_n\}$ יוצרת את $\mathcal{B}$ כ־$\sigma$־אלגברה, ויש $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$ איחודים בני־מניה של איבריה.

**הגדרה.** פונקציה $f : X \to Y$ כאשר $X$ מרחב מדיד, $Y$ מרחב טופולוגי תיקרא **מדידה** אם מתקיים $f^{-1}(U)$ מדידה לכל $U \subseteq Y$ פתוחה, או - באופן שקול - לכל $U \subseteq Y$ מדידת בורל. פונקציה מדידה

הרכבת פונקציות מדידות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינה בהכרח מדידה.

## 1.4 אינטגרל לבג

נשתמש בחשבון ב־$[0, \infty]$: לכל $a \geq 0$, $a + \infty = \infty$ ו־$0 \cdot \infty = 0$, $a \cdot \infty = \infty$ ל־$a > 0$.

**הגדרה.** פונקציה $s : X \to [0, \infty]$ תיקרא **פשוטה** אם הטווח שלה סופי: $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ כאשר $E_i \subseteq X$.[4] פונקציה פשוטה

**הגדרה.** תהא $s : X \to [0, \infty]$ פונקציה פשוטה מדידה. אזי **אינטגרל לבג** של $s$ ביחס ל־$\mu$ על קבוצה מדידה $E$ הוא $\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i)$ כאשר $\alpha_i$ הערכים השונים של $s$, $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$, $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$.[5] אינטגרל לבג

עבור $f : X \to [0, \infty]$ מדידה וקבוצה מדידה $E$, נגדיר $\int_E f d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s d\mu$ (sup על־פני פונקציות פשוטות מדידות) **אינטגרל לבג** של $f$ ביחס ל־$\mu$ על $E$.

**טענה 15:** נניח $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ ($n \in \mathbb{N}$) מדידות. אזי הפונקציות $g(x) = \sup f_n(x)$, $h(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ מדידות אף הן.

[4] $\chi_E(X)$ היא הפונקציה המציינת של $E$.
[5] מדידות $s$ שקולה לכך ש־$A_i$ מדידות, כמובן.

**הוכחה.** $g^{-1}((\alpha,\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$, כי $g(x) > \alpha$ אס"ם קיים $n$ כך ש־$f_n(x) > \alpha$ אס"ם $x \in \bigcup f_n^{-1}((\alpha,\infty])$. כנ"ל עבור inf, לכן גם $\limsup f_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} f_k$ מדידה.

**מסקנה 16:** $f^+ = \max\{f,0\}$, $f^- = -\min\{f,0\}$ מדידות.

**טענה 17:** $|f| = f^+ + f^-$ מדידה.

**תכונות:** עבור פונקציות וקבוצות מדידות,

א. $0 \leq f \leq g$. אז $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.
ב. $A \subseteq B$, $0 \leq f$. אז $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.
ג. $f \geq 0$, $c$ קבוע. אז $\int_A cf d\mu = c\int_A f d\mu$.
ד. $f(x) = 0$ עבור כל $x \in E$. אז $\int_E f d\mu = 0$.
ה. $\mu(E) = 0$, $f \geq 0$. אז $\int_E f d\mu = 0$.
ו. $f \geq 0$. אז $\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu$.

**טענה 18:** תהיינה $s,t \geq 0$ מדידות פשוטות. אזי נגדיר לכל $E$ מדידה $\varphi(E) = \int_E s d\mu$. אזי $\varphi$ מידה, ו־$\int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$.

**הוכחה.** נניח $E = \coprod_{n\geq 1} E_n$ איחוד זר של מדידות. נרשום $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$. אזי

$$\begin{aligned}
\varphi(E) &= \int_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \\
&= \int_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} s d\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n)
\end{aligned}$$

**משפט 19 (ההתכנסות המונוטונית של לבג):** יהיו $f_n \geq 0$ פונקציות מדידות, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. נסמן $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. אזי $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$.

**הוכחה.** נסמן $\alpha_n = \int_X f_n d\mu$. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots$, לכן קיים גבול $\alpha = \lim \alpha_n \in [0,\infty]$. $\alpha_n \leq \int f d\mu$ כי $f_n \leq f$, לכן $\alpha \leq \int f d\mu$. צריך להראות $\int f d\mu \leq \alpha$. נקבע $0 < c < 1$ כלשהו ותהי $0 \leq s \leq f$ פונקציה פשוטה מדידה. נגדיר $E_n = \{x \in X \;:\; f_n(x) \geq cs(x)\}$. $E_n$ תלוי בפונקציה $s$ שקבענו, ו־$E_n$ מדידה, $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\bigcup E_n = X$, ולכן $E_n \nearrow X$. $\int_{E_n} s d\mu \to \int_X s d\mu$. כעת,

$$\alpha_n = \int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} cs d\mu = c\int_{E_n} s d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c\int_X s d\mu$$

לכן $\alpha \geq c\int_X s d\mu$ ולכן $\alpha \geq c\sup_{0\leq s\leq f}\int_X s d\mu = c\int f d\mu$. אם כן, קיבלנו $\alpha \geq c\int f d\mu$. היות ש־$0 < c < 1$ שרירותי, $\alpha \geq \int f d\mu$.

**משפט 20:** $f_n : X \to [0,\infty]$ מדידות, $f(x) = \int_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. אזי $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n d\mu$.

**הוכחה. למה 1.20:** תהי $g:X\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה. אזי קיימת סדרת פונקציות פשוטות $s_n:X\to[0,\infty]$ כך ש־$s_1\le s_2\le\dots$, $s_n(x)\to g(x)\quad\forall x$.

**הוכחה.** ניקח

$$s_n(x)=\begin{cases}\frac{i}{2^n} & \frac{i}{2^n}\le g(x)<\frac{i+1}{2^n}\\ n & n\le g(x)\end{cases}$$

(אם $g$ חסומה, ההתכנסות במ״ש.)

תהא $s_i'$ סדרה כזו המתכנסת ל־$f_1$ ותהא $s_i''$ סדרה כזו המתכנסת ל־$f_2$. אז $s_i=s_i'+s_i''$ פשוטות מדידות, $s_1\le s_2\le\dots$, $s_i\to f_1+f_2$. אז ממשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג, $\int_X(f_1+f_2)d\mu=\int_X f_1d\mu+\int_X f_2d\mu$,[6] ובאינדוקציה, $\int\sum_{i=1}^n f_id\mu=\int_{i=1}^n\int f_id\mu$. אגף שמאל שואף ל־$\int\sum_{i=1}^\infty f_id\mu$ ממשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג, ולכן מתקבל הדרוש.

12.11.2008 **למה 21 (פאטו):** תהיינה $f_n:X\to[0,\infty]$ מדידות. אז $\int(\liminf f_n)d\mu\le\liminf\int f_nd\mu$.

**הוכחה.** נגדיר $g_k=\inf_{i\ge k}f_i(x)$. אז $\lim\inf_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{k\to\infty}g_k(x)$. נשים לב כי $g_k(x)\le g_{k+1}(x)$ וכן $g_k(x)\le f_k(x)$. אז $\int g_kd\mu\le\int f_kd\mu$ ונקבל $\int\liminf_{n\to\infty}f_nd\mu=\int\lim_{k\to\infty}g_kd\mu=\lim_{k\to\infty}\int g_kd\mu\le\liminf_{k\to\infty}\int f_kd\mu$.

(ייתכן אי־שוויון ממש – תרגיל.)

**משפט 22:** תהי $f:X\to[0,\infty]$ מדידה. נגדיר $\varphi(E)=\int_E fd\mu$ לכל קבוצה מדידה $E$. אז $\varphi$ מידה על $\mathcal{M}$, ו־(*) קיים $\int_X gd\varphi=\int_X gfd\mu$ לכל פונקציה מדידה $g$. (אם $\mu(E)=0$ אזי $\varphi(E)=0$.)

**הוכחה.** צריך להראות $\sigma$־אדיטיביות של $\varphi$. יהיו $E_i\in\mathcal{M}$ קבוצות זרות, $\bigcup_{i=1}^\infty E_i=E$, $\chi_Ef=\sum_{i=1}^\infty\chi_{E_i}f$. אז $\varphi(E)=\int_X\chi_Efd\mu=\int_E fd\mu$ ו־$\varphi(E_i)=\int_X\chi_{E_i}fd\mu$. ממשפט 20, $\varphi(E)=\int\chi_Efd\mu=\sum_{i=1}^\infty\int\chi_{E_i}fd\mu=\sum_{i=1}^\infty\varphi(E_i)$.

נשים לב כי (*) מתקיים עבור $g=\chi_A$, שכן $\varphi(A)=\int\chi_Ad\varphi=\int\chi_Afd\mu=\int_A fd\mu$ (הגדרת $\varphi$). לכן (*) מתקיים לפונקציות פשוטות מדידות. לכן עבור $g$ מדידה כלשהי, ניקח סדרה עולה של פונקציות פשוטות $g_n\nearrow g$ ונפעיל את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג בשני האגפים.

## 1.5 מרחבי $L^p$

**הגדרה (לא סופית).** יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה. $L^1(\mu)$ הוא מרחב הפונקציות האינטגרביליות ביחס ל־$\mu$, כלומר מרחב הפונקציות המדידות $f:X\to\mathbb{C}$ כך ש־$\int_X|f|d\mu<\infty$.

עבור $f\in L^1(\mu)$, נרשום $f=u+iv$ כאשר $u:X\to\mathbb{R}$, $v:X\to\mathbb{R}$ מדידות, ונגדיר $\int fd\mu=\int u^+d\mu-\int u^-d\mu+i(\int v^+d\mu-\int v^-d\mu)$.

[6] $\int f_1+f_2d\mu=\lim\int s_id\mu=\lim(\int s_i'd\mu+\int s_i''d\mu)=\lim\int s_i'd\mu+\lim\int s_i''d\mu=\int f_1d\mu+\int f_2d\mu$

**טענה 23:** אם $f \in L^1(\mu)$ ו־$f = u + iv$ כלעיל, אזי $u^+, u^-, v^+, v^-, u, v \in L^1(\mu)$.

**הוכחה.** $|u^-|, |u^+| \le |u| \le |f|$, $|v^-|, |v^+| \le |v| \le |f|$ ולכן הטענה.

**טענה 24:** יהיו $f, g \in L^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. אזי $\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$.

**הוכחה.** תרגיל פשוט, כאשר שמים לב שדי לבדוק ש־$\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ (ועבור כל $0 < a \in \mathbb{R}$, $\int a f d\mu = a \int f d\mu$ ; $\int i f d\mu = i \int f d\mu$; $\int -f d\mu = -\int f d\mu$).

17.11.2008 **משפט 25 (ההתכנסות החסומה של לבג):** תהא $\varphi \in L^1(\mu)$ ותהא $f_n : X \to \mathbb{C}$ סדרת פונקציות מדידות כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \le \varphi$. נניח כי לכמעט כל $x$ קיים הגבול $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. אזי **(1)** $f \in L^1(\mu)$ ; **(2)** $\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0$ ; **(3)** $\lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

**הוכחה.** **(1)** תהא $S' \in \mathcal{M}$ קבוצה כך ש־$\varphi$ מוגדרת לכל $x \in S'$ ו־$\mu(X \setminus S') = 0$, ועבור כל $n$ תהא $S_n$ קבוצה כך ש־$\mu(S_n^C) = 0$ ועבור $x \in S_n$, $|f_n(x)| \le \varphi(x)$. תהא $L$ כך ש־$\mu(L^C) = 0$ ועבור כל $x \in L$, $f_n(x) \to f(x)$. תהא $E = S' \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \cap L$. נשים לב כי $\mu(E^C) = 0$ ועבור $x \in E$ מתקיים שהגבול של $f_n(x)$ קיים ושווה ל־$f(x)$, וכן $|f(x)| \le \varphi(x)$. אז $|f| < \varphi$.

קיים $f \in L^1(\mu)$, $f = u + iv$. אז $v^-, v^+, u^-, u^+ \le |f| \le \varphi$ ולכן פונקציות אלה ב־$L^1(\mu)$.

**(2)** $\int 2\varphi d\mu = \int \liminf(2\pi - |f - f_n|) d\mu \le \liminf \int (2\pi - |f - f_n|) d\mu = \int 2\varphi d\mu + \liminf(-\int |f - f_n| d\mu) = \int 2\varphi d\mu - \limsup \int |f - f_n| d\mu$. היות ש־$\int 2\varphi d\mu < \infty$, $0 \le -\limsup \int |f - f_n| d\mu$ ולפיכך $\limsup \int |f - f_n| d\mu = 0$ (כי $\limsup$ של פונקציה אי־שלילית הוא אי־שלילי). לכן $\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$.

**(3)** $|\int f d\mu - \int f_n d\mu| = |\int (f - f_n) d\mu| \le \int |f - f_n| d\mu \to 0$ ולכן $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

## 1.6 השלמה של מידות

יהי $(X, \mathcal{M}, \mu)$ מרחב מידה. נגדיר $\mathcal{M}^* = \{E \subseteq X \ : \ \exists A, B \in \mathcal{M} \quad A \subseteq E \subseteq B,\ \mu(B \setminus A) = 0\}$. נראה כי $\mathcal{M}^*$ היא $\sigma$־אלגברה, ואם נגדיר $\nu$ על איברי $\mathcal{M}^*$ על־ידי $\nu(E) = \mu(B)$ כאשר $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq E \subseteq B$ ו־$\mu(B \setminus A) = 0$, אזי $\nu$ מוגדרת היטב ובפרט מתלכדת עם $\mu$ על $\mathcal{M}$ ומהווה מידה על $\mathcal{M}^*$.

נראה ש־$\mathcal{M}^*$ סגורה למשלים ולאיחודים בני מניה; ברור שהיא מכילה את $X$.

אם $E \in \mathcal{M}^*$, $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq E \subseteq B$, $\mu(B \setminus A) = 0$, אזי נקבל של־$A^C, B^C \in \mathcal{M}$, $A^C \supseteq E^C \supseteq B^C$ ו־$\mu(A^C \setminus B^C) = 0$.

אם $E_n \in \mathcal{M}^*$, $A_n, B_n \in \mathcal{M}$ כך ש־$A_n \subseteq E \subseteq B_n$ ו־$\mu(B_n \setminus A_n) = 0$, אזי נקבל $\mathcal{M} \ni \bigcup A_n \subseteq \bigcup E_n \subseteq \bigcup B_n \in \mathcal{M}$ ו־$\mu(\bigcup B_n \setminus \bigcup A_n) \le \mu(\bigcup (B_n \setminus A_n)) = 0$.

החלק השני מושאר כתרגיל.

**משפט 26:** תהא $f_n \in L^1(\mu)$ סדרת פונקציות ונניח $\sum_{n=1}^\infty \int |f_n| d\mu < \infty$. אזי מתקיים שהטור $\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = f(x)$ מתכנס כמעט בכל מקום, $f \in L^1(\mu)$, $\int f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n \, d\mu$.

**הוכחה.** תהא $S_n$ קבוצה עליה $f_n$ מוגדרת ו־$\mu(S_n^C) = 0$. $S = \bigcap_{n=1}^\infty S_n$, $\mu(S^C) = 0$. נגדיר עבור $x \in S$ $\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| \in [0, \infty]$. ממשפט ההתכנסות המונוטונית, $\int \varphi d\mu < \infty$. נסמן $\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^N |f_n(x)|$. אז $\varphi_N \leq \varphi_{N+1}$, נקבל $\infty > \lim_{N\to\infty} \sum_1^N \int |f_n| d\mu = \lim \int \sum_1^N |f_n| d\mu = \lim \int \varphi_N d\mu = \int \lim \varphi_N d\mu = \int \varphi d\mu$. המשפט נובע כעת ממשפט ההתכנסות החסומה עבור $g_N = \sum_{n=1}^N f_n$.

**משפט 27:** (א) תהא $f : X \to [0, \infty]$ מדידה. נניח כי עבור $E \in \mathcal{M}$, $\int_E f d\mu = 0$. אז $f(x) = 0$ לכמעט כל $x \in E$.

(ב) נניח $f \in L^1(\mu)$ ו־$\int_E f d\mu = 0$ לכל $E \in \mathcal{M}$. אז $f = 0$ כמעט תמיד.

(ג) נניח $f \in L^1(\mu)$ ו־$|\int_X f d\mu| = \int_X |f| d\mu$. אזי קיים $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, כך ש־$|f(x)| = \alpha f(x)$ לכמעט כל $x \in X$.

**הוכחה.** (א) עבור כל $n$, נגדיר $A_n = \{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. היות ש־$0 = \int_E f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n)$, מתקיים $\mu(A_n) = 0$ ולכן $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \{x \in E : f(x) > 0\} = 0$.

(ב) $f = u + iv$. אז $\int_E u d\mu = 0$ לכל $E \in \mathcal{M}$. ניקח $E_+ = \{x : u \geq 0\} = \{x : u^+ \geq 0\}$. אז כיוון ש־$\int_{E+} u^+ d\mu = 0$, נקבל $u^+(x) = 0$ לכמעט כל $x \in E_+$, ו־$u^+(x) = 0$ לכל $x \in E_+^C$, לכן $u^+ = 0$ כמעט תמיד. כנ"ל עבור $u^-$, $v^+$, $v^-$, ולכן $f = 0$ כמעט תמיד.

(ג) $|\int f d\mu| = \int |f| d\mu$. אז קיים $\alpha \in S^1 = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ כך ש־$\int |f| d\mu = |\int f d\mu| = \alpha \int f d\mu = \int \alpha f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu \in \mathbb{R}$. אם כן, $\int (|f| - u) d\mu = 0$, ו־$u(x) \geq |u(x)| \geq |\alpha f(x)| = |f(x)|$ ולכן $u = |f|$ כמעט תמיד. מכאן נובע גם $v = 0$ כמעט תמיד.

**למה 28 (בורל־קנטלי):** יהי $(X, \mathcal{M}, \mu)$ מרחב מידה. יהיו $A_n$ קבוצות מדידות כך שמתקיים $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$. אזי $\mu(\limsup A_n) = 0$.[7]

**הוכחה.** $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}(x) \in [0, \infty]$. מתקיים $\int g(x) d\mu = \sum \mu(A_n) < \infty$ ולכן $g(x) < \infty$ עבור כמעט כל $x$.

**טענה 29:** נניח $\mu(X) = 1$, כלומר $X$ מרחב הסתברות, ונניח $A_n$ מאורעות (תת־קבוצות מדידות) בלתי־תלויים ($\mu(\bigcap_{i\in\Omega} A_i) = \prod_{i\in\Omega} \mu(A_i)$ לכל $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ סופית; מספיקה אי־תלות בזוגות). נניח כי $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \infty$. אזי בהסתברות 1, אינסוף מהן קורות: $\mu(\limsup A_n) = 1$.

**הוכחה.** נניח שלא. אזי יש הסתברות חיובית שרק מספר סופי של מאורעות התרחשו, כלומר קיים $N$, $u > 0$ כך שבהסתברות $u$ לא קרה אף מאורע $A_n$ ל־$n \geq N + 1$. נתבונן בסדרת המאורעות $A_{N+1}, \ldots, A_{N+k}, A_{N+k+1}, \ldots$. הסיכוי שלא קרה אף אחד מבין $A_{N+i}$ ל־$1 \leq i \leq k$ הוא

[7] $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{k\geq n} A_k$, כלומר $x$־ים ששייכים לאינסוף $A_n$־ים.

$$u \leq \prod_{i=1}^{k}(1-\mu(A_{N+i})) \leq \prod_{i=1}^{k} e^{-\mu(A_{N+i})} = e^{-\sum_{i=1}^{k}\mu(A_{N+i})} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

בסתירה.[8]

## 1.7 משפט ההצגה של ריס

ההעתקה $f \mapsto \int_X f d\mu$ היא פונקציונל לינארי על $L^1(\mu)$. 19.11.2008

נניח ש־$X$ מרחב טופולוגי קומפקטי מקומית האוסדורף ונניח כי ה־$\sigma$־אלגברה מכילה את כל קבוצות בורל. נגדיר את $C_C(X)$ להיות מרחב הפונקציות הרציפות עם תומך קומפקטי ב־$X$ עם ערכים ב־$\mathbb{C}$. אם $\mu$ מידה כך ש־$\mu(K) < \infty$ לכל קבוצה קומפקטית $K$, אזי $C_C(X) \subseteq L^1(\mu)$.
קיבלנו פונקציונל לינארי $\Lambda : C_C(X) \to \mathbb{C}$ כך שמתקיים כי עבור כל $f \in C_C(X)$ כך ש־$f \geq 0$, $\Lambda(f) \geq 0$: כלומר, $\Lambda$ פונקציונל חיובי.

**משפט 30 (ריס):** יהי $X$ מרחב טופולוגי קומפקטי מקומית האוסדורף. יהי $\Lambda : C_C(X) \to \mathbb{C}$ פונקציונל לינארי חיובי. אזי קיימת $\sigma$־אלגברה $\mathcal{M}$ שמכילה את $\sigma$־אלגברת בורל ומידה אי־שלילית יחידה $\mu$ כך ש־(1) $\forall f \in C_C(X) \quad \Lambda(f) = \int_X f d\mu$;

(2) $\mu(K) < \infty$ לכל $K$ קומפקטית;

(3) לכל $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V) \ : \ \text{open } V \supseteq E\}$;

(4) עבור כל קבוצה $E$ כך שאם $E$ פתוחה או $E \in \mathcal{M}$ ו־$\mu(E) < \infty$ מתקיים $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \ : \ \text{compact } K \subseteq E\}$;

(5) אם $E \in \mathcal{M}$, $A \subseteq E$ ו־$\mu(E) = 0$ אזי $A \in \mathcal{M}$ (וכמובן, $\mu(A) = 0$).

**הגדרה.** נניח $V$ פתוחה, $K$ קומפקטית, $K \subseteq V$. נכתוב $K \prec f \prec V$ אם $f \in C_C(X)$, $0 \leq f \leq 1$, $f|_K \equiv 1$, $\text{supp}(f) \subseteq V$.[9]

**למה 31 (אוריסון):** לכל $K \subseteq V \subseteq X$, $K$ קומפקטית, $V$ פתוחה ו־$X$ קומפקטי מקומית האוסדורף, קיימת $f \in C_C(X)$ כך ש־$K \prec f \prec V$.

**משפט 32 (פיצול היחידה):** $X$ קומפקטי מקומית האוסדורף, $V_1, \ldots, V_n \subseteq X$ פתוחות, $K \subseteq X$ קומפקטית, $K \subseteq \bigcup_1^n V_i$. אזי קיימות פונקציות $h_i \in C_C(X)$ כך ש־$h_i \prec V_i$ (כלומר $\text{supp}(h_i) \subseteq V_i$) ולכל $x \in K$, $\sum_{i=1}^n h_i(x) = 1$. ($h_1, \ldots, h_n$) נקראות **פיצול יחידה** ביחס ל־$V_i$.)

**הוכחה.** לכל $x \in K$ יש $x \in W_x$ פתוחה עם סגור קומפקטי כך ש־$\overline{W_x} \subseteq V_i$ ל־$1 \leq i \leq n$ מסוים, $K \subseteq \bigcup_x W_x \subseteq \bigcup_{j=1}^m W_{x_j}$. נסמן $H_i = \bigcup_{W_{x_j} \subseteq V_i} W_{x_j}$ (פתוחה עם סגור קומפקטי). $\overline{H_i} \subseteq V_i$. מהלמה של אוריסון נקבל $\overline{H_i} \prec g_i \prec V_i$. ניקח $h_1 = g_1$, $h_2 = (1-g_1)g_2$ וכו', $h_n = \prod_{i=1}^{n-1}(1-g_i)g_n$. מתקיים $h_i \prec V_i$ כי $g_i \prec V_i$; באינדוקציה על $n$, מוכיחים

[8] השתמשנו בעובדה ש־$1 - x \leq e^{-x}$.
[9] $\text{supp}(f) = \{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}$.

ש־$\prod_{i=1}^n(1-g_i)$ $h_i = 1 - \sum_{i=1}^n$. ל־$x \in K$ קיים $i$ כך ש־$x \in \overline{H_i}$ ולכן $g_i(x) = 1$, ו־$h(x) = 1 - \ldots \cdot 0 \cdot \ldots = 1$.

24.11.2008 **הוכחה (משפט ההצגה של ריס). יחידות $\mu$.** מתכונות (3) ו־(4) נובע כי די להכיר את $\mu$ על קבוצות קומפקטיות. נניח כי $\mu_1$ ו־$\mu_2$ מידות עבורן התכונות מתקיימות ונראה כי לכל $K$ קומפקטית $\mu_1(K) = \mu_2(K)$. נקבע $K \subseteq X$ קומפקטית, ויהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. קיימת $V$ פתוחה, $K \subseteq V$, כך ש־$\mu_i(V) < \mu_i(K) + \varepsilon$ עבור $i = 1,2$. קיימת פונקציה $f \in C_C(X)$ כך ש־$K \prec f \prec V$. אז $\mu_1(K) = \int_X \chi_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \leq \int_X \chi_V d\mu_2 = \mu_2(V) \leq \mu_2(K) + \varepsilon$. היות ש־$\varepsilon > 0$ שרירותי, $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. ניתן לחזור על הטיעון בשינוי תפקידי $\mu_1$ ו־$\mu_2$, לכן מתקבל שיוויון.[10]

**בניית $\mu$ ו־$\mathcal{M}$.** לכל קבוצה פתוחה $V$ נגדיר $\mu(V) = \sup\{\Lambda f : f \prec V\}$. אם $V_1 \subseteq V_2$, $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$, ולכן אם $E$ פתוחה אזי $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : \text{open } V \supseteq E\}$. נגדיר כעת עבור כל קבוצה $E$ ב־$X$ $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : \text{open } V \supseteq E\}$.

נגדיר $\mathcal{M}_f = \{E \subseteq X : \mu(E) = \sup\{\mu(K) : \text{compact } K \subseteq E\},\ \mu(E) < \infty\}$.

ניקח $\mathcal{M} = \{E \subseteq X : E \cap K \in \mathcal{M}_f \text{ for every compact } K \subseteq X\}$.

נראה ש־$\mu$ ו־$\mathcal{M}$ שהגדרנו מקיימות את תכונות המשפט:

**שלב I.** $E_1, E_2, \ldots$ תת־קבוצות של $X$; אזי $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i)$.

**הוכחה.** תהיינה $V_1$ ו־$V_2$ פתוחות. אזי $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$. תהא $g \prec V_1 \cup V_2$. ממשפט פיצול היחידה, קיימות $h_i \prec V_i$ כך ש־$h_1(x) + h_2(x) = 1$ לכל $x \in \operatorname{supp}(g)$. אז $h_i g \prec V_i$. $g = h_1 g + h_2 g$. $\Lambda g = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$. לכן $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$.

אם עבור איזשהו $i$ $\mu(E_i) = \infty$, אזי הטענה מתקיימת. לכן ניתן להניח כי לכל $i$ $\mu(E_i) < \infty$. אז לכל $i$ קיימת פתוחה $V_i$ כך ש־$E_i \subseteq V_i$, $\mu(V_i) \leq \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ כאשר $\varepsilon > 0$ שרירותי. $\bigcup_{i=1}^N E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^N V_i$. נסמן $V = \bigcup_{i=1}^\infty V_i$. תהי $f \prec V$. לכן[11] קיים $n$ כך ש־$f \prec \bigcup_{i=1}^n V_i$. מאינדוקציה, $\Lambda f \leq \mu(\bigcup_{i=1}^n V_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \varepsilon$. לכן לכל $f \prec V$, $\Lambda f \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i) + \varepsilon$ ולכן $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^\infty V_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i) + \varepsilon$ וכנדרש, $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i)$.

**שלב II.** נניח $K$ קומפקטית. אזי $K \in \mathcal{M}_f$ וכן $\mu(K) = \inf\{\Lambda f : K \prec f\}$.

**הוכחה.** נניח $K \prec f$. $f|_K = 1$. ל־$0 < \alpha < 1$ נגדיר $K \subseteq V_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$. עבור כל $g$ כך ש־$g \prec V_\alpha$, $\alpha g < f$ ($g < \alpha^{-1} f$). אז $\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup\{\Lambda g : g \prec V_\alpha\} \leq \alpha^{-1}\Lambda f$, ועל־ידי השאפת $\alpha$ ל־1 נקבל $\mu(K) \leq \Lambda f < \infty$ ולכן $K \in \mathcal{M}_f$.

יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיימת $K \subseteq V$ כך ש־$\mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon$ וקיימת $K \prec f \prec V$, $\Lambda f \leq \mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon \leq \Lambda f + \varepsilon$. בסך הכול, נקבל $\mu(K) = \inf\{\Lambda f : K \prec f\}$.

[10] בעצם הראינו גם (1) $\Longleftarrow$ (2), כי $\Lambda f$ סופי.
[11] $\operatorname{supp}(f)$ קומפקטי.

**שלב III.** כל פתוחה $V$ מקיימת $\mu(V)=\sup\{\mu(K)\ :\ \text{compact } K\subseteq V\}$.

**הוכחה.** תהא $\alpha\in\mathbb{R}$ כך ש-$\mu(V)>\alpha$. קיימת $V\prec f$, $\Lambda f>\alpha$. תהא $W$ פתוחה, $K=\operatorname{supp}(f)\subseteq W$. מכך ש-$W\prec f$, $\Lambda f\le\mu(W)$. אינפימום של $\mu(W)$ כך ש-$K\subseteq W$ הוא $\mu(K)$ ולכן $\mu(K)\ge\Lambda f>\alpha$ לכל $\mu(V)>\alpha$. מצאנו $K\subseteq V$ קומפקטית כך ש-$\mu(K)>\alpha$, ולכן $\mu(V)=\sup\{\mu(K)\ :\ \text{compact } K\subseteq V\}$.

**שלב IV.** נניח $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ קבוצות זרות בזוגות, $E_i\in\mathcal{M}_f$. אז $\mu(E=\bigcup_1^\infty E_i)=\sum_1^\infty\mu(E_i)$. אם $\mu(E)<\infty$ אזי $E\in\mathcal{M}_f$.

**הוכחה.** תהיינה $K_1$ ו-$K_2$ קומפקטיות זרות ונראה $\mu(K_1\cup K_2)=\mu(K_1)+\mu(K_2)$. נבחר $\varepsilon>0$. קיימת $f\in C_C(X)$, $f\ |_{K_1}=1$, $f\ |_{K_2}=0$. משלב II, קיימת $g$ $K_1\cup K_2\prec g$, $\Lambda g\le\mu(K_1\cup K_2)+\varepsilon$, $K_1\prec fg$, $K_2\prec(1-f)g$.

$$\mu(K_1\cup K_2)\le\mu(K_1)+\mu(K_2)\le\Lambda(fg)+\Lambda((1-f)g)=\Lambda(g)=\mu(K_1\cup K_2)+\varepsilon$$

ולכן $\mu(K_1\cup K_2)=\mu(K_1)+\mu(K_2)$.

אם $\mu(E_i)=\infty$ לאיזשהו $i$, ברור. אם $E=\bigcup_1^\infty E_i$ מקיים $\mu(E)=\infty$, ברור. נניח $\mu(E)<\infty$ (ובפרט $\mu(E_i)<\infty$ לכל $i$). נבחר $H_i\subseteq E_i$ קומפקטית כך ש-$\mu(H_i)>\mu(E_i)-\frac{\varepsilon}{2^i}$. נסמן $K_n=H_1\cup H_2\cup\ldots\cup H_n$. $\mu(E)\ge\mu(K_n)=\sum_{i=1}^n\mu(H_i)\ge\sum_{i=1}^n\mu(E_i)-\varepsilon$ ומכאן $\mu(E)\ge\sum_{i=1}^\infty\mu(E_i)-\varepsilon$. לכן $\mu(E)\ge\sum_{i=1}^\infty\mu(E_i)$. כעת, בהינתן $\varepsilon$, קיים $n$ כך ש-$\sum_{i=1}^n\mu(E_i)\ge\mu(E)-\varepsilon$ ולכן $\mu(K_n)\ge\sum_{i=1}^n\mu(E_i)-\varepsilon\ge\mu(E)-2\varepsilon$.

**שלב V.** אם $E\in\mathcal{M}_f$ ו-$\varepsilon>0$, אזי יש קומפקטית $K$ ופתוחה $V$ כך ש-$K\subseteq E\subseteq V$, $\mu(V\setminus K)<\varepsilon$.

**הוכחה.** מההגדרות, קיימות $K$ ו-$V$ כך ש-$K\subseteq E\subseteq V$, $\mu(V)-\frac{\varepsilon}{2}\le\mu(E)\le\mu(K)+\frac{\varepsilon}{2}$. $V\setminus K$ פתוחה, לכן שייכת ל-$\mathcal{M}_f$ ו-$\mu(K)+\mu(V\setminus K)=\mu(V)<\mu(K)+\varepsilon$. לכן בפרט $\mu(V\setminus K)<\varepsilon$.

**שלב VI.** $A,B\in\mathcal{M}_f$ אזי $A\cap B, A\cup B, A\setminus B\in\mathcal{M}_f$.

**שלב VII.** $\mathcal{M}$ היא $\sigma$-אלגברה המכילה את כל קבוצות בורל.

**הוכחה.** תהא $K$ קומפקטית. עבור $A\in\mathcal{M}$, $A^C\cap K=K\setminus(A\cap K)\in\mathcal{M}_f$ ולכן $A^C\in\mathcal{M}$. נניח $A_i\in\mathcal{M}$ ; $A=\bigcup_{i=1}^\infty A_i$. נגדיר $B_1=A_1\cap K$, $B_n=(A_n\cap K)\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}B_i$. $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ סדרת קבוצות זרות בזוגות ב-$\mathcal{M}_f$, $A\cap K=\bigcup_{n=1}^\infty B_n$. $\mu(A\cap K)<\infty$ כי מוכל ב-$K$, לכן לפי השלב הקודם, $A\cap K\in\mathcal{M}_f$. לכן $A\in\mathcal{M}$.

נותר להראות ש-$\mathcal{M}$ מכילה את כל קבוצות בורל. תהא $C\subseteq X$ סגורה. אז $C\cap K$ קומפקטית ולכן ב-$\mathcal{M}_f$. לכן $C\in\mathcal{M}$.

**שלב VIII.** $\mathcal{M}_f$ מכילה בדיוק את הקבוצות $E\in\mathcal{M}$ כך ש-$\mu(E)<\infty$.[12] 26.11.2008

[12] מכאן נובע (4).

**הוכחה.** נניח $E \in \mathcal{M}_f$. אזי $E \in \mathcal{M}$, כי לכל קומפקטית $K$ נתבונן ב־$E \cap K$. צריך להראות $E \cap K \in \mathcal{M}_f$. ברור $\mu(E \cap K) < \infty$. נתבונן בסדרת קבוצות קומפקטיות $L_n \subseteq E$ כך ש־$\mu(E) = \sup \mu(L_n)$, וקל לראות ש־$\mu(E \cap K) = \sup \mu(L_n \cap K)$.

בכיוון השני, נניח $E \in \mathcal{M}$ ו־$\mu(E) < \infty$. נבחר $\varepsilon > 0$. אזי קיימת $V$ פתוחה כך ש־$\mu(V) <$ $\infty$, $E \subseteq V$. קיימת $K \subseteq V$ קומפקטית כך ש־$\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. $E \cap K \in \mathcal{M}_f$ ולכן קיימת קומפקטית $H \subseteq E \cap K$ כך ש־$\mu(E \cap K) \le \mu(H) + \varepsilon$. $E \subseteq (E \cap K) \cup (V \setminus K)$ ולכן $\mu(E) \le \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) \le \mu(H) + 2\varepsilon$. לכן $\mu(E) = \sup\{\mu(H) \ : \ \text{compact } H \subseteq E\}$.

**שלב IX.** $\mu$ מידה $\sigma$־אדיטיבית על $\mathcal{M}$.

**הוכחה.** נובע משלבים IV ו־VIII: $\{A_i\} \subseteq \mathcal{M}$ זרות בזוגות; אז $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$ ברור במקרה בו קיימת $A_i$ כך ש־$\mu(A_i) = \infty$, והמקרה הנותר, בו כל $\mu(A_i) < \infty$, הוא המקרה בו טיפלנו בשלב IV, כי כל $A_i$ ב־$\mathcal{M}_f$.

**שלב X.** לכל $f \in C_C(X)$, $\Lambda f = \int_X f d\mu$.

**הוכחה.** די להראות עבור $f$ ממשית. יתר על כן, די להראות $\Lambda f \le \int_X f d\mu$ עבור כל $f \in C_C(X)$ ממשית. נניח כי אנו יודעים זאת; אז $\Lambda(-f) \le \int_X -f d\mu$ מתקבל כי $\Lambda f = \int_X f d\mu$ ולכן גם $\Lambda f \ge \int_X f d\mu$.

כעת, תהא $f \in C_C(X)$ ממשית. קיים קטע קומפקטי $[a, b] \supseteq \mathrm{Im}(f)$. יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $y_0 = a < y_1 < \ldots < y_n = b$, $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ לכל $1 \le i \le n$. נגדיר $E_i = \{x \in X \ : \ y_{i-1} < f(x) \le y_i\}$. הקבוצות $E_i$ מדידות (בורל) כי $f$ רציפה והן זרות. קיימות קבוצות פתוחות $E_i \subseteq V_i$, $\mu(V_i) \le \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$ ומתקיים $f(x) < y_i + \varepsilon$ עבור $x \in V_i$. יהי $\{h_i\}_{i=1}^n$ פירוק יחידה ביחס ל־$\{V_i\}$, $h_i \prec V_i$, $\sum h_i = 1$ על $K = \mathrm{supp}(f)$. אז $f = \sum_{i=1}^n h_i f$. $\mu(K) \le \Lambda(\sum h_i) = \sum \Lambda(h_i)$, $h_i f \le (y_i + \varepsilon) h_i$ עבור $y_i - \varepsilon < f(x)$, $x \in E_i$. אז

$$\Lambda f = \Lambda(\sum_{i=1}^n h_i f) = \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) \le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Lambda f_i = \sum(|a| + y_i + \varepsilon)\Lambda h_i - |a| \sum \Lambda h_i \le \sum(|a| + y_i + \varepsilon)(\mu(E_i) + \tfrac{\varepsilon}{n}) - |a|\mu(K) = \sum(y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \tfrac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n(|a| + y_i + \varepsilon) \le \int_X f d\mu + \varepsilon[2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon].$$

קיבלנו $\Lambda f \le \int_X f d\mu + \varepsilon_{\text{[משהו חסום]}}$, לכן מכך ש־$0 < \varepsilon$ שרירותי, $\Lambda f \le \int_X f d\mu$.

## 1.8 מידות רגולריות

1.12.2008 **הגדרה.** **מידת בורל** היא מידה המוגדרת על $\sigma$־אלגברה שמכילה את הקבוצות המדידות בורל במרחב טופולוגי האוסדורף קומפקטי מקומית. מידת בורל

**הגדרה.** קבוצה $E$ נקראת **רגולרית חיצונית** אם $\mu(E) = \inf\{\mu(V) \ : \ \text{open } V \supseteq E\}$ **ורגולרית פנימית** אם $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \ : \ \text{compact } K \subseteq E\}$.

מידה רגולרית

**הגדרה.** מידה $\mu$ היא **רגולרית חיצונית** אם כל קבוצה מדידה $E$ היא רגולרית חיצונית. **רגולריות פנימית** מוגדרת באופן דומה. מידה $\mu$ נקראת **רגולרית** אם היא רגולרית פנימית וחיצונית.

משפט ריס "ייצר" עבורנו מידות רגולריות חיצונית.

**הגדרה.** מרחב $X$ ייקרא $\sigma$־קומפקטי אם $X$ הוא איחוד בן מניה של קבוצות קומפקטיות.

**משפט 33:** יהי $X$ קומפקטי מקומית האוסדורף $\sigma$־קומפקטי. אם $\mathcal{M}$ ו־$\mu$ כבמשפט ריס, אזי

(א) אם $E \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$ אזי קיימות $F \subseteq E \subseteq V$, $F$ סגורה ו־$V$ פתוחה, $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$;

(ב) $\mu$ מידת בורל רגולרית;

(ג) אם $E \in \mathcal{M}$ אזי קיימות $A, B \in \mathcal{M}$ כך ש־$A \subseteq E \subseteq B$, $A$ קבוצת $F_\sigma$ (איחוד בן מניה של סגורות), $B$ קבוצת $G_\delta$ (חיתוך בן מניה של פתוחות), $\mu(B \setminus A) = 0$.

**הוכחה.** $X = \bigcup K_n$, $K_n$ קומפקטיות, $E \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$. $\mu(E \cap K_n) < \infty$. קיימות פתוחות $E \cap K_n \subseteq V_n$, $\mu(V \setminus (K_n \cap E)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. נסמן $V = \bigcup V_n$, ואז $\mu(V \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$. עבור המשלים $E^C$ נקבל פתוחה $E^C \subseteq W$ כך ש־$\mu(W \setminus E^C) < \frac{\varepsilon}{2}$; $F = W^C \subseteq E$ סגורה וקיים $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$.

(א) $\Longleftarrow$ (ב): תהא נתונה קבוצה $E$. ל־$0 < \varepsilon$ קיימת $V \subseteq E \subseteq F$, $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$. הקבוצה $F_n = F \cap (\bigcup_{j=1}^n K_j)$ קומפקטית ו־$F_n \nearrow F$; אז ממשפט ההתכנסות המונוטונית, $\mu(F_n) \to \mu(F)$.

(ג) נובע מ־(א) ו־(ב).

**משפט 34:** יהי $X$ קומפקטי מקומית האוסדורף כך שכל פתוחה היא $\sigma$־קומפקטית. תהא $\lambda$ מידת בורל על $X$ כך ש־$\lambda(K) < \infty$ לכל $K$ קומפקטית. אזי $\lambda$ מידה רגולרית.

**הוכחה.** נגדיר $\Lambda f = \int_X f d\lambda$ עבור $f \in C_C(X)$. היות ש־$\lambda(K) < \infty$ לכל קומפקטית, $\Lambda$ פונקציונל לינארי חיובי. ממשפט ריס, קיימת מידה $\mu$ ו־$\sigma$־אלגברה $\mathcal{M}$ המקיימת את המשפט הקודם, וכן $\int_X f d\mu = \int_X f d\lambda \quad \forall f \in C_C(X)$.

תהא $X \supseteq V$ פתוחה. אזי $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ ל־$H_i$ קומפקטיות. $H_1 \subseteq V$; תהא $f_1 \in C_C(X)$, $H_1 \prec f_1 \prec V$. נניח שבחרנו $f_1, \ldots, f_n$; נבחר $f_{n+1} \in C_C(X)$ כך ש־$H_1 \cup \ldots \cup H_{n+1} \cup K_1 \cup \ldots \cup K_n \prec f_{n+1} \prec V$ כאשר $K_i = \operatorname{supp} f_i$.

לכל $x \in X$, $f_n(x) \nearrow \chi_V(x)$: ל־$x \notin V$ הכול $0$, ול־$x \in V$, החל ממקומם מסוים $f_n(x) = 1$. ממשפט ההתכנסות המונוטונית, $\lambda(V) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\lambda = \lim \int_X f_n d\mu = \mu(V)$.

עבור כל קבוצת בורל $E$ ו־$0 < \varepsilon$ קיימים $V \subseteq E \subseteq F$ כך ש־$\mu(V \setminus F) < \varepsilon$, $V \setminus F$ פתוחה ולכן $\lambda(V \setminus F) = \mu(V \setminus F)$; מסיקים רגולריות $\lambda$ באותו אופן שמסיקים רגולריות $\mu$ במשפט הקודם, (ב).

## 1.9 העקרונות של Littlewood

שלושה "עקרונות" שאינם נכונים, אך הם שימושיים:

(1) ב־$\mathbb{R}$, קבוצה מדידה היא בקירוב איחוד סופי של קטעים.

(2) כל פונקציה מדידה היא בקירוב רציפה.

(3) סדרה מתכנסת של פונקציות מדידות מתכנסת במידה שווה ביקרוב.

המשפט הבא מצדיק את עיקרון (2):

**משפט 35 (Lusin):** $\mu$ רגולרית. תהי $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה, $A \in \mathcal{M}$ עם $\mu(A) < \infty$ כך ש־$f(x) = 0$ עבור $x \notin A$. יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיימת פונקציה רציפה עם תומך קומפקטי $g \in C_C(X)$ כך ש־$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$. יתר על כן, ניתן להבטיח $\sup|g(x)| = \sup|f(x)|$.

**הוכחה.** נניח ראשית $0 \le f \le 1$, $A$ קומפקטית. תהא $S_n$ סדרת פונקציות פשוטות אשר מקרבות את $f$ מלמטה עד־כדי $\frac{1}{2^n}$. נסמן $E_i = \{x : f(x) > \frac{i}{2^n}\}$, $\sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\chi_{E_i} = s_n$. אז $s_n(x) < f(x)$, $f(x) - s_n(x) \le \frac{1}{2^n}$, $s_n \le s_{n+1}$. נגדיר $t_n = s_n - s_{n-1}$. $2^n t_n = \chi_{T_n}$ לקבוצה מסוימת $T_n$, שכן $t_n(x) \in \{0, \frac{1}{2^n}\}$. מתקיים $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n(x)$ ($\sum_{n=1}^{m} t_n(x) = s_m(x)$).

נקבע פתוחה $A \subseteq V$, $\overline{V}$ קומפקטית (קיימת בזכות הקומפקטיות המקומית). קיימות פתוחות $V_n$ וקומפקטיות $K_n$ כך ש־$K_n \subseteq T_n \subseteq V_n \subseteq V$, $\mu(V_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. מהלמה של אוריסון, קיימות $h_n \in C_C(X)$, $K_n \prec h_n \prec V_n$. נגדיר $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n(x)$. זהו טור מתכנס במידה שווה של פונקציות רציפות, לכן $g$ רציפה. $\operatorname{supp} g \subseteq \overline{V}$. $g \in C_C(X)$. $\frac{1}{2^n} h_n(x) = t_n(x)$ עבור $x \notin V_n \setminus K_n$, ולכן $g(x) = f(x)$ עבור $x \notin \bigcup(V_n \setminus K_n)$, ו־$\mu(\bigcup(V_n \setminus K_n)) < \varepsilon$.

כעת, הטענה נובעת עבור $A$ קומפקטית ו־$f$ חסומה. ל־$A$ כללית כך ש־$\mu(A) < \infty$, בגלל רגולריות $\mu$ קיימת קומפקטית $K \subseteq A$ כך ש־$\mu(A \setminus K) < \varepsilon$, ולכן הטענה נכונה ל־$f$ חסומה.

כעת, ל־$f$ כללית, נגדיר $B_n = \{x : |f(x)| > n\}$. אז $A \supseteq B_n$, $B_n \searrow \varnothing$, $\mu(B_n) \to 0$. נחליף את $f$ ב־$\tilde{f}_n$ חסומה כך ש־$f(x) = \tilde{f}_n(x)$ לכל $x \notin B_n$ ונקרב את $\tilde{f}_n$.

נותר להבטיח כי $\sup|g(x)| \le \sup|f(x)|$ כאשר $f$ חסומה. נגדיר: $R = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. נגדיר $\varphi(\zeta) = \zeta$ ל־$|\zeta| \le R$, $\varphi(\zeta) = R \cdot \frac{\zeta}{|\zeta|}$ ל־$|\zeta| > R$. אם $g$ היתה קירוב רציף ל־$f$, כך גם $\varphi \circ g$.

3.12.2008 **משפט 36 (Egorov):** $(X, \mathcal{B}, \mu)$ מרחב עם מידה רגולרית. תהא $E$ קבוצה מדידה ממידה סופית ותהא $f_n$ סדרת פונקציות מדידות כך שעבור כמעט כל $x \in E$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. אזי בהינתן $\varepsilon > 0$, ניתן למצוא תת־קבוצה סגורה $A_\varepsilon \subseteq E$ כך שעל $A_\varepsilon$ ההתכנסות $f_n \to f$ היא במידה שווה ו־$\mu(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$.

**הוכחה.** ראשית, נניח לשם הפשטות כי הגבול קיים לכל $x \in E$; אחרת, נשמיט נקודות ב־$E$ בהן $\lim f_n(x)$ אינו קיים. נגדיר $E_k^n = \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \quad \forall j \ge k\}$. נשים לב כי $E_k^n \nearrow E$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אז קיים $k_n$, $\mu(E \setminus E_{k_n}^n) < \frac{1}{2^n}$. לכל $j > k_n$, $x \in E_{k_n}^n$, $|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$.

בהינתן $\varepsilon > 0$, קיים $N$ כך ש־$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. נגדיר $\tilde{A}_\varepsilon = \bigcap_{n \ge N} E_{k_n}^n$. אז $E \setminus \tilde{A}_\varepsilon \subseteq \bigcup_{n=N}^{\infty} (E \setminus E_{k_n}^n)$ ולפיכך $\mu(E \setminus \tilde{A}_\varepsilon) \le \sum_{n=N}^{\infty} \mu(E \setminus E_{k_n}^n) \le \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

נשים לב כי על $\tilde{A}_\varepsilon$ ההתכנסות היא במידה שווה: בהינתן $\delta > 0$, קיים $n > N$ כך ש־$\delta > \frac{1}{n}$. $x \in \tilde{A}_\varepsilon \subseteq E_{k_n}^n$ ולכן עבור $j > k_n$, $|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \delta$. מרגולריות המידה $\mu$ נובע כי קיימת קבוצה סגורה $A_\varepsilon \subseteq \tilde{A}_\varepsilon$ כך ש־$\mu(\tilde{A}_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$.

## 1.10 אי־שוויונים

**הגדרה.** פונקציה $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ תיקרא **קמורה** אם לכל $a < s < t < b$ ולכל $0 < \alpha < 1$, $\varphi(\alpha s + (1-\alpha)t) \le \alpha\varphi(s) + (1-\alpha)\varphi(t)$. (באופן שקול, הקבוצה $\{(x,y) \ : \ a < x < b,\ y \ge f(x)\}$ קמורה. עבור פונקציות גזירות, קמירות שקולה ל־$\varphi''(x) \ge 0$.)

**טענה 37:** פונקציה קמורה על $(a,b)$ היא רציפה.

**משפט 38 (אי־שוויון ינסן):** תהא $\mu$ מידת הסתברות על $(\Omega, \mathcal{M})$ ($\mu(\Omega) = 1$). תהא $f \in L^1(\mu)$ ונניח $a < f(x) < b \quad \forall x \in \Omega$. תהא $\varphi$ פונקציה קמורה על $(a,b)$. אזי $\varphi(\int_\Omega f d\mu) \le \int_\Omega \varphi \circ f d\mu$.

**הוכחה.** נסמן $t = \int_\Omega f d\mu$. $a < t < b$.

נגדיר $\beta = \sup_{a<s<t} \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$. אז $\beta \le \inf_{t<u<b} \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$, לכן לכל $a < s < b$, $\varphi(s) \ge \varphi(t) + \beta(s-t)$. כמו כן, לכל $x \in \Omega$, $a < f(x) < b$, לכן

$$\forall x \in \Omega \quad \varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x) - t) \ge 0$$

$\varphi$ רציפה, לכן $\varphi \circ f$ מדידה. אז $\int_\Omega \varphi(f(x))d\mu - \int_\Omega \varphi(t)d\mu - \beta(\int f(x)d\mu - t) \ge 0$. נציב $t = \int f d\mu$: $\int \varphi \circ f d\mu \ge \varphi(\int f d\mu)$.

**מסקנה 39:** אי־שוויון הממוצעים.

**הוכחה.** ניקח $\Omega = \{1, \ldots, n\}$, $\mu(\{\varepsilon_i\}) = \frac{1}{n}$, $\varphi(x) = e^x$. תהא $f : \Omega \to \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. מאי־שוויון ינסן, $\varphi(\int f d\mu) \le \int \varphi \circ f d\mu$, כלומר $e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(i)} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{f(i)}$. נסמן $a_i = e^{f(i)}$; אז $(\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$.

**משפט 40:** יהיו $1 < p, q < \infty$ כך ש־$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. יהי $(X, \mu)$ מרחב מידה, $f, g : X \to [0, \infty]$ מדידות. אזי 8.12.2008

(1) **אי־שוויון Hölder:** $\int fg d\mu \le (\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int g^q d\mu)^{\frac{1}{q}}$.

(2) **אי־שוויון מינקובסקי:** $(\int (f+g)^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \le (\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int g^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.

**הוכחה.** (1) נסמן $A = (\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$, $B = (\int g^q d\mu)^{\frac{1}{q}}$. אם $A = 0$, $f^p = 0$ כמעט תמיד $\Longleftarrow$ $f = 0$ כמעט תמיד $\Longleftarrow$ $fg = 0$ כמעט תמיד $\Longleftarrow$ $\int fg = 0$, והאי־שוויון מתקיים. כך גם אם $B = 0$. אם $B > 0$ ו־$A = \infty$ (או ההיפך), ברור. לכן אפשר להניח $0 < A, B < \infty$.[13]

[13] אם $A, B < \infty$, מתקיים שוויון אם"ם $\alpha f^p = \beta g^q \quad \exists \alpha, \beta \ne 0$.

נגדיר $F=\frac{f}{A}$, $G=\frac{g}{B}$. מתקיים $\int F^p d\mu=1$, $\int G^q d\mu=1$. אם עבור $0<x\in X$ $F(x),G(x)<\infty$, אזי קיימים $s,t\in\mathbb{R}$ כך ש־$F(x)=e^{\frac{s}{p}}$, $G(x)=e^{\frac{t}{q}}$. מתקיים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ו־$h(r)=e^r$ קמורה, לכן $e^{\frac{s}{p}+\frac{t}{q}}\le\frac{1}{p}e^s+\frac{1}{q}e^t$. כלומר, $F(x)G(x)\le\frac{1}{p}F(x)^p+\frac{1}{q}G(x)^q$ לכל $x\in X$. אם כן,

$$\frac{1}{AB}\int fgd\mu=\int FGd\mu\le\int\frac{1}{p}F(x)^p+\frac{1}{q}G(x)^q d\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

ולפיכך $\int fgd\mu\le AB=(\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}}(\int g^q d\mu)^{\frac{1}{q}}$.

(2) $(f+g)^p=f(f+g)^{p-1}+g(f+g)^{p-1}$. לפי אי־שוויון הלדר, $\int f(f+g)^{p-1}d\mu\le(\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}}(\int(f+g)^{(p-1)q}d\mu)^{\frac{1}{q}}$ ו־$\int g(f+g)^{p-1}d\mu\le(\int g^p d\mu)^{\frac{1}{p}}(\int(f+g)^{(p-1)q}d\mu)^{\frac{1}{q}}$ ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אז $p+q=pq$ ולכן $p=(p-1)q$). אז

$$\int(f+g)^p d\mu\le(\int(f+g)^p d\mu)^{\frac{1}{q}}[(\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}}+(\int g^p d\mu)^{\frac{1}{q}}]\qquad(*)$$

אם אגף שמאל הוא $0$ או אגף ימין הוא $\infty$ באי־שוויון שיש להוכיח, ברור שהוא מתקיים. לכן נניח כי אגף שמאל גדול מ־$0$ ואגף ימין קטן מ־$\infty$. נתבונן בפונקציה $t\mapsto t^p$. היא קמורה, לכן $(\frac{f+g}{2})^p\le\frac{1}{2}(f^p+g^p)$. אז $\int(\frac{f+g}{2})^p)\le\frac{1}{2}(\int f^p d\mu+\int g^p d\mu)<\infty$. לכן ב־(*) ניתן לחלק ב־$(\int(f+g)^p d\mu)^{\frac{1}{q}}$. נקבל $(\int(f+g)^p d\mu)^{1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}}\le(\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}}+(\int g^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.

**הגדרה.** יהי $1\le p<\infty$, $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה. $\|f\|_p=(\int|f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. נורמת־$p$

**הגדרה.** $L'^p(\mu)=\{\text{measurable } f:X\to\mathbb{C}\ :\ \|f\|_p<\infty\}$. אז $L^p(\mu)=L'^p(\mu)/\sim$, כאשר $f\sim g$ לפונקציות $f,g\in L'^p(\mu)$ אם $f(x)=g(x)$ כמעט תמיד. $L^p(\mu)$

**הגדרה.** תהא $g:X\to[0,\infty]$. נגדיר $S=\{\alpha\in[0,\infty)\ :\ \mu(g^{-1}((\alpha,\infty])=0\}$. אם $S=\varnothing$, נגדיר $\beta=\infty$; אחרת, נגדיר $\beta=\inf S$. $\beta$ נקרא **הסופרמום המהותי** של $g$. נגדיר $\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}|f|$. אז $L^\infty(\mu)=\{f:X\to\mathbb{C}\ :\ \|f\|_\infty<\infty\}$. סופרמום מהותי, נורמת־$\infty$, $L^\infty(\mu)$

**משפט 41:** אם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ עבור $1\le p,q\le\infty$, $f\in L^p(\mu)$, $g\in L^q(\mu)$, אזי $fg\in L^1(\mu)$ ומתקיים $\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$.

**הוכחה.** עבור $1<p<\infty$, זה אי־שוויון הלדר, ובפרט $fg\in L^1(\mu)$.

עבור $p=\infty$ (ועבור $p=1$, אותו מקרה), $|f(x)g(x)|\le\|f\|_\infty|g|$ לכמעט כל $x$, ולכן $\|fg\|_1=\int|f(x)g(x)|d\mu\le\|f\|_\infty\int|g(x)|d\mu=\|f\|_\infty\|g\|_1$.

**משפט 42:** עבור $1\le p\le\infty$, $f,g\in L^p(\mu)$, $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$, ובפרט $f+g\in L^p(\mu)$.

**הוכחה.** ל־$1<p<\infty$ זהו אי־שוויון מינקובסקי. עבור $p=1$ או $p=\infty$, נובע מהאי־שוויון $|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$.

נשים לב ש־$L^p(\mu)$ ($1\le p\le\infty$) הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$: ל־$f\in L^p(\mu)$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\|\alpha f\|_p=|a|\|f\|_p$.

**משפט 43:** $L^p(\mu)$ הוא מרחב מטרי שלם עבור כל $1 \le p \le \infty$, כאשר מגדירים $d(f,g) = \|f-g\|_p$.

**הוכחה.** נניח $1 \le p < \infty$. $\{f_n\}$ סדרת קושי ב־$L^p(\mu)$. קיימת תת־סדרה $\{f_{n_i}\}$ ($f_{n_0} := 0$) כך ש־$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i}$. נגדיר $g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$, $g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$. מאי־שוויון מינקובסקי, $g_k \in L^1(\mu)$ ($\|g_k\| \le \sum_1^k \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| \le 1$).

מלמת פאטו עבור $g_k^p$, $\int |g|^p d\mu \le 1$ ולכן $g(x) < \infty$ לכמעט כל $x$, ולכן הטור ב־$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$ מתכנס (בהחלט) כמעט תמיד; עבור כל $x \in X$ בו הטור אינו מתכנס, נגדיר $f(x) = 0$. אם כן, $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$ כמעט תמיד.

נראה כי $f \in L^p(\mu)$ והיא גבול של $\{f_n\}$ ב־$L^p$, כלומר $\|f - f_n\|_p = d(f, f_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. יהי $\varepsilon > 0$; קיים $N$ כך שלכל $n, m > N$ $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. יהי $m > N$ כלשהו. $\|f - f_m\|_p^p = \int |f - f_m|^p d\mu \le \liminf \int |f_{n_i} - f_m|^p d\mu \le \varepsilon^p$ (לפי למת פאטו), ולכן $f - f_m \in L^p(\mu)$. לכן $f \in L^p(\mu)$ וכן $\|f - f_m\|_p \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

עבור $p = \infty$, הטיעון פשוט יותר: תהא $\{f_n\}$ סדרת קושי ב־$L^\infty(\mu)$. נגדיר את הקבוצות $A_k = \{x : |f_n(x)| > \|f_k\|_\infty\}$, $B_{n,m} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$, $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \cup \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{n,m}$. אז $\mu(E) = 0$, ועל המשלים של $E$, $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה חסומה $f$, $f \in L^\infty(\mu)$.

בפרט, הוכחנו כי לכל סדרת קושי ב־$L^p(\mu)$ יש תת־סדרה המתכנסת כמעט בכל מקום.

על המרחב הווקטורי $L^p(\mu)$ מוגדרת פונקציה $\|\cdot\| : L^p(\mu) \to \mathbb{R}^*$ כך שמתקיים לכל $f, g \in L^p(\mu)$ ו־$\alpha \in \mathbb{C}$

1. $\|f\| = 0$ אס"ם $f = 0$;
2. $\|f + g\| \le \|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$;
3. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$;
4. $L^p(\mu)$ מרחב מטרי שלם ביחס למטריקה $d(f,g) = \|f - g\|$.

מרחב בנך **הגדרה.** פונקציה המקיימת את שלוש התכונות הראשונות נקראת **נורמה**; מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ עם נורמה כך שהתכונה הרביעית מתקיימת נקרא **מרחב בנך**.

מרחב הילברט **הגדרה. מרחב הילברט** $H$ מעל $\mathbb{C}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ כך שקיימת $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ המקיימת את התכונות – 10.12.2008

(1) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

(3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ (ומכאן $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$);

(4) $\mathbb{R} \ni \langle x, x\rangle \ge 0$;

(5) $\langle x, x\rangle = 0$ אס"ם $x = 0$.

המכפלה הפנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מגדירה נורמה $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, וממנה מתקבלת מטריקה על $H$; נדרוש ש־$H$ שלם ביחס למטריקה זו.

**הגדרה.** פונקציונל לינארי $\varphi : H \to \mathbb{C}$ ייקרא **חסום** אם קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in H$, $|\varphi(x)| \le M\|x\|$. (מספיק לבדוק את התנאי עבור $x \in H$ כך ש־$\|x\| = 1$.)

**משפט 44:** כל פונקציונל לינארי חסום $\varphi$ הוא מהצורה $\varphi(x) = \langle x, y_0\rangle$ עבור $y_0 \in H$ מסוים.

מתכונות המכפלה הפנימית, לכל $y_0 \in H$ הפונקציה $x \mapsto \langle x, y_0\rangle$ היא פונקציונל לינארי. הוא חסום בגלל אי־שוויון קושי־שוורץ: $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$.[14]

## 1.11 מידות מרוכבות

יהי $(X, \mathcal{M})$ מרחב מידה. מידה $\lambda$ היתה פונקציה $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ כך שעבור כל אוסף בן מניה של קבוצות מדידות זרות $E_i \in \mathcal{M}$, $\mu(\bigcup E_i) = \sum \mu(E_i)$. למידות כאלה נקרא **מידות חיוביות**.

**הגדרה.** **מידה מרוכבת** על $(X, \mathcal{M})$ היא פונקציה $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ כך שמתקיים התנאי (בכל סדר מידה מרוכבת
$E_i$־ים שנבחר, לכן בפרט ההתכנסות של הטור בהחלט).

בהינתן מידה מרוכבת $\mu$ על $(X, \mathcal{M})$, נחפש מידה חיובית $\lambda$ כך שלכל $E \in \mathcal{M}$, $|\mu(E)| \le \lambda(E)$. (לא מספיק לקחת $\lambda = |\mu|$.)

## 1.12 משפט לבג־רדון־ניקודים

15.12.2008 **הגדרה.** מידה $\alpha$ **רציפה בהחלט** ביחס למידה $\mu$ ($\alpha \prec \mu$ או $\alpha \ll \mu$) אם עבור כל קבוצה $E \in \mathcal{M}$ רציפות בהחלט
כך ש־$\mu(E) = 0$, גם $\alpha(E) = 0$.

**הגדרה.** מידות $\alpha, \beta$ **ניצבות** אם יש פירוק של המרחב $X = A \coprod B$, $A, B \in \mathcal{M}$ כך שלכל ניצבות
$E \subseteq A$, $\beta(E) = 0$ ולכל $E \subseteq B$, $\alpha(E) = 0$.

**משפט 45 (לבג־רדון־ניקודים):** תהיינה $\lambda$ ו־$\mu$ מידות חיוביות על $\sigma$־אלגברה $\mathcal{M}$ במרחב $X$. נניח $\lambda(X), \mu(X) < \infty$. אזי

(א) קיימות מידות חיוביות $\lambda_a$, $\lambda_s$ יחידות על $\mathcal{M}$ כך ש־$\lambda_a \prec \mu$, $\lambda_s \perp \mu$, $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \perp \lambda_s$. ($(\lambda_a, \lambda_s)$ הוא **פירוק לבג** של $\lambda$ ביחס ל־$\mu$.)

(ב) קיימת פונקציה יחידה $h \in L^1(\mu)$ כך שלכל $E \in \mathcal{M}$, $\lambda_a(E) = \int_E h d\mu$. ($h$ נקראת **נגזרת רדון־ניקודים** של $\lambda_a$ ביחס ל־$\mu$.)

**הוכחה.** יחידות: (א) נניח $\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda'_a + \lambda'_s$ כאשר $\lambda_a, \lambda'_a \prec \mu$, $\lambda_s, \lambda'_s \perp \mu$. נובע כי $\alpha = \lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s$. אזי $\alpha \prec \mu$ ו־$\alpha \perp \mu$, ולכן $\alpha = 0$.

(ב) נניח $h_1, h_2 \in L^1(\mu)$ פונקציות כך ש־$\lambda_a(E) = \int_E h_1 d\mu = \int_E h_2 d\mu$ לכל $E \in \mathcal{M}$. יהיו $E_n = \{x : h_1(x) > h_2(x) + \frac{1}{n}\}$. ברור ש־$\mu(E_n) = 0$. יהיו $F_n = \{x : h_2(x) >$

[14]**הוכחה:** נניח כי $H$ מרחב הילברט ממשי. $0 \le \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$ ולכן $b^2 - 4ac \le 0$, כאשר $a = \|x\|^2$, $c = \|y\|^2$, $b = 2\langle x, y\rangle$ - כלומר, $4\langle x, y\rangle^2 \le 4\|x\|^2\|y\|^2$.

$h_1(x) + \frac{1}{n}\}$. אז $\{x \ : \ h_1(x) \neq h_2(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. לכן $h_1$ ו־$h_2$ מתלכדות $\mu$־כמעט בכל מקום, ולכן $h_1 = h_2$ כאיברים ב־$L^1(\mu)$.

ניגש להוכחת הקיום.

נגדיר מידה $\varphi = \lambda + \mu$. זו מידה חסומה חיובית על $\mathcal{M}$. אם $f \in L^2(\varphi)$ אזי $|\int f d\lambda| \leq \int |f| d\lambda \leq \int |f| d\varphi \leq (\int |f|^2 d\varphi)^{\frac{1}{2}} (\int 1^2 d\varphi)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\varphi(X)} \|f\|_{L^2(\varphi)}$. נסמן $\Psi(f) = \int f d\lambda \quad \forall f \in L^2(\varphi)$. זהו פונקציונל לינארי. הראינו כי הוא חסום. לכן קיימת פונקציה $g \in L^2(\varphi)$ כך ש־$\Psi(f) = \int fg d\varphi \quad \forall f \in L^2(\varphi)$.

נתייחס ל־$L^2(\varphi)$ מעל $\mathbb{R}$, לשם הנוחות.

**למה 1.45:** תהא $S$ קבוצה סגורה ב־$\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), $g$ פונקציה מדידה. אם לכל קבוצה ממידה חיובית $0 < \varphi(E)$ מתקיים $\frac{1}{\varphi(E)} \int_E g d\varphi \in S$, אזי $g(x) \in S$ $\varphi$־כמעט תמיד.

**הוכחה.** $S^C = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(\alpha_i, r_i)$ (זו קבוצה פתוחה) וניקח $E_i = \{x \ : \ g(x) \in B(\alpha_i, r_i)\}$. מספיק להראות כי $\varphi(E_i) = 0$ לכל $i$. אם $0 < \varphi(E_i)$, נתבונן ב־$\frac{1}{\varphi(E_i)} \int_{E_i} g(x) d\varphi = t$ ונראה כי $t \in B(\alpha_i, r_i)$ ולכן $t \notin S$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\varphi(E_i)} \int_{E_i} g d\varphi - \alpha_i\right| &= \left|\frac{1}{\varphi(E_i)} \int_{E_i} (g(x) - \alpha_i) d\varphi\right| \\ &\leq \frac{1}{\varphi(E_i)} \int_{E_i} |g(x) - \alpha_i| d\varphi \\ &\leq \frac{1}{\varphi(E_i)} \int_{E_i} r_i d\varphi = r_i \end{aligned}$$

כעת, תהא $f = \chi_E$ ל־$E \in \mathcal{M}$. היות ש־$0 \leq \lambda \leq \varphi$,

$$\varphi(E) \geq \lambda(E) = \int \chi_E d\lambda = \Psi(\chi_E) = \int \chi_E g d\varphi = \int_E g d\varphi$$

לכן $0 \leq \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g d\varphi \leq 1 \quad \forall E \in \mathcal{M}$ ולכן $0 \leq g(x) \leq 1$ ל־$\varphi$־כמעט כל $x$.

נזכור ש־$g$ מוגדרת רק כמעט תמיד. ניתן לשנות את $g$ על קבוצה ממידה 0 ביחס ל־$\varphi$ כך שיתקיים $0 \leq g(x) \leq 1$ לכל $x \in X$. נגדיר $A = \{x \ : \ 0 \leq g(x) < 1\}$, $B = \{x \ : \ g(x) = 1\}$. אז $X = A \coprod B$. נגדיר $\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E)$ ו־$\lambda_s(E) = \lambda(B \cap E)$.

ברור ש־$\lambda = \lambda_a + \lambda_s$.

לכל $f \in L^2(\varphi)$ מתקיים $\int (1-g) f d\lambda = \int fg d\mu$.[15] נציב $f = \chi_B$ (מתקיים $B \in \mathcal{M}$). אז $\mu(B) = \int_B g d\mu = \int_B (1-g) d\lambda = 0$, ולכן $\lambda_s \perp \mu$.

$g$ חסומה; לכן השוויון מתקיים בפרט ל־$f = (1 + g + \ldots + g^n)\chi_E$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$E \in \mathcal{M}$. אז $\int_E \sum_{i=1}^{n+1} g^i d\mu = \int \sum_{i=1}^{n+1} g^i \chi_E d\mu = \int (1-g)(\sum_{i=0}^{n} g^i) \chi_E d\lambda = \int_E (1 - g^{n+1}) d\lambda$.

על $B$, $1 - g^{n+1} = 0$; על $A$, $1 - g^{n+1} \nearrow 1$. לכן אגף שמאל שואף (כאשר $n \to \infty$) ל־$\lambda_a(E) = \lambda(E \cap A) = \int_{E \cap A} 1 d\lambda$, ממשפט ההתכנסות המונוטונית. נגדיר $0 \leq h(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n+1} g^i(x)$; אז ממשפט ההתכנסות המונוטונית, אגף ימין שואף ל־$\int_E h d\mu$. קיבלנו כי $\lambda_a(E) = \int_E h d\mu$. בפרט, עבור $E = X$ נקבל $\int_X h d\mu = \lambda_a(X) < \infty$ ומכאן $h \in L^1(\mu)$ ו־$\lambda_a \prec \mu$.

[15] זאת כי $\int f d\lambda = \int fg d\varphi = \int fg d\lambda + \int fg d\mu$ ומכאן $\int (f - fg) d\lambda = \int fg d\mu$.

הוכחנו את המשפט עבור מידות חיוביות וחסומות. ניתן להסיק אותו משפט בהנחה ש־$\lambda$ חיובית חסומה או מרוכבת[16] ו־$\mu$ $\sigma$־סופית וחיובית.

**משפט 46:** תהיינה $\mu$, $\lambda$ מידות חסומות על $\sigma$־אלגברה $\mathcal{M}$, $\mu$ חיובית, $\lambda$ מרוכבת. אזי התנאים הבאים שקולים: (1) $\lambda \prec \mu$; (2) לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שאם $\mu(E) < \delta$ אזי $|\lambda(E)| < \varepsilon$.

**הוכחה.** (2) $\Longleftarrow$ (1) ברור. נניח כי (2) לא מתקיים: קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $n$ קיימת קבוצה $E_n$, $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ אך $|\lambda(E_n)| > \varepsilon$. נגדיר $A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. אז $A_n \searrow A$. $\mu(A) \le \mu(A_n) \le \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$, לכן $\mu(A) = 0$. היות ש־$\lambda$ מרוכבת, נובע $|\lambda|(A_n) < \infty$ ולכן $|\lambda|(A) = \lim |\lambda|(A_n) \ge \varepsilon$. לכן (1) לא מתקיים.

**דוגמה (חשוב לדרוש חסימות).** $d\mu = dx$, $d\lambda = \frac{1}{x}dx$ ($\lambda(A) = \int_A \frac{1}{x}dx$).

17.12.2008 **מסקנה 47:** תהא $\mu$ מידה מרוכבת על $\sigma$־אלגברה $\mathcal{M}$. אזי קיימת פונקציה מדידה $h$ כך ש־$|h(x)| = 1$ לכל $x \in X$ כך ש־ $d\mu = hd|\mu|$ (פירוק פולארי).

**הוכחה.** ממשפט רדון־ניקודים, קיימת $h \in L^1(|\mu|)$ כך ש־$d\mu = hd|\mu|$. נגדיר $A_r = \{x \in X : |h(x)| < r\}$. תהא $E_j$ חלוקה בת־מניה של $A_r$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| &= \sum_{j=1}^{\infty} \left|\int_{E_j} hd|\mu|\right| \\ &\le \sum \int_{E_j} |h|d|\mu| \\ &\le \sum \int_{E_j} rd|\mu|(E_j)\end{aligned}$$

ניקח sup ונקבל $|\mu|(A_r) = \sup \sum |\mu(E_j)| \le \sup \sum r|\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r)$. אז עבור $r < 1$, $|\mu|(A_r) = 0$, ולכן $|h(x)| \ge 1$ לכמעט כל $x$.

מאידך, אם $E \in \mathcal{M}$ ו־$|\mu|(E) > 0$, אזי $1 \ge \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} = \left|\frac{1}{|\mu|(E)} \int_E hd|\mu|\right|$ ולכן $|h(x)| \le 1$ כמעט בכל מקום.

קיבלנו ש־$|h(x)| = 1$ עבור כמעט כל $x \in X$, ואם רוצים, ניתן לשנות כך שיהיה $1$ בכל מקום.

**מסקנה 48:** תהא $\mu$ מידה חיובית על $\mathcal{M}$ ותהא $g \in L^1(\mu)$, $\lambda(E) = \int_E gd\mu$. אזי $|\lambda|(E) = \int_E |g|d\mu$.

**הוכחה.** קיימת פונקציה $h$ כך ש־$|h(x)| = 1$ לכל $x$ כך ש־$hd|\lambda| = d\lambda = gd\mu$. נכפול ב־$\overline{h}$: $d|\lambda| = \overline{h}hd|\lambda| = \overline{h}gd\mu$. היות ש־$|\lambda|(E) \ge 0$ לכל $E \in \mathcal{M}$, $\overline{h}g(x) \ge 0$ לכמעט כל $x$. לכן $\overline{h}(x)g(x) = |g(x)|$.

**משפט 49 (הפירוק של האן):** תהא $\mu$ מידה ממשית על $(X, \mathcal{M})$. אזי קיימות קבוצות $A, B \in \mathcal{M}$ כך ש־$X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, $\mu^+(E) = \mu(A \cap E)$, $\mu^-(E) = -\mu(B \cap E)$.

---

[16] כי אז $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ עבור מידות ממשיות מסומנות כך ש־ $\lambda_i^{\pm} = \frac{|\lambda_i| \pm \lambda_i}{2}$ מידות חיוביות חסומות ומתקיים $\lambda_i = \lambda_i^+ - \lambda_i^-$, ומהמשפט עבור $\mu$ ו־$\lambda_i^{\pm}$ הדרוש נובע.

**הוכחה.** $\mu \prec |\mu|$. לכן $d\mu = hd|\mu|$ ולכן $|h| = 1$. $\mu$ ממשית ולכן $h$ ממשית; $h(x) \in \{\pm 1\}$.
נגדיר $A = \{x \,:\, h(x) = 1\}$, $B = \{x \,:\, h(x) = -1\}$. אז $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$. נשים לב ש-$\mu^+ = \frac{|\mu|+\mu}{2}$ ולכן $d\mu^+ = (\frac{1+h}{2})d|\mu|$. אז $\mu^+(E) = \int_E d\mu^+ = \int_E (\frac{1+h}{2})d|\mu| = \int_{E\cap A}(\frac{1+h}{2})d|\mu| + \int_{E\cap B}(\frac{1+h}{2})d|\mu| = \int_{E\cap A} 1d|\mu| = \int_{E\cap A} hd|\mu| = \mu(E\cap A)$ (שכן $(\frac{1+h}{2})(x) = 1$ ל-$x \in A$, $0$ ל-$x \in B$). כך גם ל-$\mu^-$.

## 1.13 פונקציונלים לינאריים על $L^p(\mu)$

יהיו $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. מאי־שוויון הלדר, $fg \in L^1(\mu)$, $|\int fgd\mu| \le \int |fg|d\mu \le (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int |g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}$. כלומר, ההעתקה $\Psi_g : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int fgd\mu$, היא פונקציונל לינארי חסום, ו־$\|\Psi_g\| \le \|g\|_q$.[17]

נסמן ב־$(L^p(\mu))^*$ את מרחב הפונקציונלים הלינאריים החסומים. קיבלנו $L^q(\mu) \subseteq (L^p(\mu))^*$, כאשר מזהים את $g$ עם הפונקציונל $\Psi_g$.

עבור $p = \infty$, אין שוויון באופן כללי; עבור $p = 1$, דרושים תנאים נוספים; ל־$1 < p < \infty$, מתקיים שוויון.

**משפט 50:** תהא $\mu$ מידה $\sigma$־סופית. יהי $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. אזי לכל פונקציונל לינארי חסום $\Psi$ על $L^p(\mu)$ קיימת פונקציה יחידה $g \in L^q(\mu)$ כך ש־$\Psi(f) = \int fgd\mu \quad \forall f \in L^p(\mu)$.
יתר על כן, $\|\Psi\| = \|g\|_q$. כלומר, $L^q(\mu)$ איזומטרי למרחב הפונקציונלים הלינאריים החסומים על $L^p(\mu)$.

22.12.2008 **הוכחה.** להוכחת היחידות, די להראות כי אם $g \ne 0$ אזי $f \mapsto \int fgd\mu$ אינה העתקת האפס, כי אם היו שתי פונקציות $g_1, g_2 \in L^q(\mu)$ כך ש־$\int fg_1 d\mu = \Phi(f) = \int fg_2 d\mu$ אז $\int f(g_1 - g_2)d\mu = 0$ לכל $f \in L^p(\mu)$.

אם $g \ne 0$, קיים $n$ כך ש־$\mu(\{x \,:\, g(x) > \frac{1}{n}\} = A_n) > 0$ או $\mu(\{x \,:\, g(x) < \frac{1}{n}\} = B_n) > 0$. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\mu(A_n) > 0$. נשים לב כי $\mu(A_n) < \infty$ ולכן $\chi_{A_n} \in L^p(\mu)$. אז $\int \chi_{A_n} gd\mu \ge \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0$ וסתירה.

נוכיח קיום $g$ כנדרש: נניח ראשית $\mu(X) < \infty$. נגדיר $\lambda(E) = \Phi(\chi_E)$. $\lambda$ היא פונקציה אדיטיבית על $\mathcal{M}$, ה־$\sigma$־אלגברה של קבוצות מדידות.

**למה 1.50:** $\lambda$ היא $\sigma$־אדיטיבית.

יהיו $E_i$ קבוצות מדידות זרות, $E = \coprod_{i=1}^{\infty} E_i$, $A_k = \coprod_{i=1}^{k} E_i$. אז $\|\chi_E - \chi_{A_k}\|_p = (\mu(E \setminus A_k))^{\frac{1}{p}} \to 0$. מרציפות $\Phi$, $\lambda(A_k) = \Phi(\chi_{A_k}) \to \Phi(\chi_E) = \lambda(E)$. לכן $\lambda$ מידה מרוכבת, וברור כי אם $\mu(E) = 0$ אזי $\lambda(E) = 0$ (כי $\mu(E) = 0$ אס"ם $\chi_E \equiv 0$ ב־$L^p(\mu)$), כלומר $\lambda \prec \mu$. ממשפט רדון־ניקודים, קיימת פונקציה $g \in L^1(\mu)$ כך ש־$\Phi(\chi_E) = \int_E gd\mu = \int \chi_E gd\mu$ לכל $E$ מדידה. אז $\Phi(f) = \int fgd\mu$ לכל פונקציה פשוטה. לכן גם לכל $f$ ב־$L^\infty(\mu)$,

[17] $\|\Psi\| = \sup_{0 \ne f \in L^p(\mu)} \frac{|\Phi(f)|}{\|f\|_p}$.

$\int fgd\mu = \Phi(f)$, כי כל $f \in L^\infty(\mu)$ היא גבול במידה שווה של פונקציות פשוטות $f_i$: $\Phi(f_i) \to \Phi(f) \Longleftarrow \|f - f_i\|_p \to 0$. צריך להראות כי $g \in L^q(\mu)$ ומתקיימות טענות המשפט.

עבור $p=1$, $|\int_E gd\mu| \le \|\Phi\|\|\chi_E\|_1 = \|\Phi\|\mu(E)$, לכן אם $\mu(E) = 0$, $|\frac{1}{\mu(E)}\int_E gd\mu| \le \|\Phi\|$ ומכאן $g(x) \le \|\Phi\|$ עבור $\mu$-כמעט כל $x$. לכן $g \in L^\infty(\mu)$ ו-$\|g\|_\infty \le \|\Phi\|$. תמיד $\|g\|_q \ge \|\Phi\|$ מאי-שוויון הלדר, ולכן מתקיים $\int fgd\mu = \Phi(f)$ לכל $f \in L^p(\mu)$.

עבור $1 < p < \infty$, קיימת פונקציה מדידה $\alpha$ כך ש-$|\alpha(x)| = 1 \quad \forall x$ ו-$|g| = \alpha g$. נגדיר $E_n = \{x : |g(x)| \le n\}$, $f = \chi_{E_n}|g|^{q-1}\alpha$. על $E_n$ מתקיים $|f|^p = |g|^q$. נשים לב כי $f \in L^\infty(\mu)$.

$$\begin{aligned}\int \chi_{E_n}|g|^q d\mu &= \int \chi_{E_n}|g|^{q-1}\alpha g d\mu \\ &= \int fgd\mu = \Phi(f) \\ &\le \|\Phi\|\|f\|_p \\ &= \|\Phi\|(\int_{E_n}|g|^q d\mu)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

מכאן, $(\int \chi_{E_n}|g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}} \le \|\Phi\|$, כלומר $\int \chi_{E_n}|g|^q d\mu \le \|\Phi\|^q$, וממשפט ההתכנסות המונוטונית,[18] $\int |g|^q d\mu \le \|\Phi\|^q$. לכן $g \in L^q(\mu)$ ו-$\|g\|_q \le \|\Phi\|$. יתר על כן, $\Phi(f) = \int fgd\mu$ על קבוצה צפופה $L^\infty(\mu)$, $\Phi$ ו-$f$ רציפות, ולכן לכל $f \in L^p(\mu)$, $\Phi(f) = \int fgd\mu$.

כעת נניח כי $\mu$ $\sigma$-סופית. אזי $X = \coprod_{n=1}^\infty X_n$ איחוד זר של קבוצות מדידות כך ש-$0 < \mu(X_n) < \infty$. נגדיר $h(x) = \frac{1}{n^2\mu(X_n)}$ עבור $x \in X_n$. נגדיר מידה חדשה $\tilde{\mu}$: $\tilde{\mu}(E) = \int_E hd\mu$, $\tilde{\mu}(X) < \infty$. נגדיר העתקה $L^p(\tilde{\mu}) \to L^p(\mu) : F \mapsto h^{\frac{1}{p}}F$. נשים לב כי $\int |h^{\frac{1}{p}}F|^p d\mu = \int |F|^p d\tilde{\mu} < \infty$. בהינתן פונקציונל לינארי חסום $\Phi$ על $L^p(\mu)$, נגדיר $\Psi : L^p(\tilde{\mu} \to \mathbb{C}$, $\Psi(F) = \Phi(Fh^{\frac{1}{p}})$. $\Psi$ פונקציונל לינארי חסום על $L^p(\tilde{\mu})$ ולכן קיימת $G \in L^q(\tilde{\mu})$ כך ש-$\Psi(F) = \int FGd\tilde{\mu} \quad \forall F \in L^p(\tilde{\mu})$. נגדיר $g = h^{\frac{1}{q}}G$. אזי $\int |g|^p d\mu = \int |G|^q d\tilde{\mu} = \|\Psi\|^q = \|\Phi\|^q$ כאשר $1 < p, q < \infty$, וכאשר $p = 1$ ו-$q = \infty$, $\|g\|_\infty = \|G\|_\infty = \|\Psi\| = \|\Phi\|$ וכן $\Phi(f) = \Psi(h^{-\frac{1}{p}}f) = \int h^{-\frac{1}{p}}fGd\tilde{\mu} = \int fGh^{\frac{-\frac{1}{p}}{h}}d\mu = \int fGh^{\frac{1}{q}}d\mu = \int fgd\mu$, על-פי הגדרתת $g$.

## 1.14 מידות מכפלה

יהיו $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ מרחבי מידה. נניח כי $\mu_i$ $\sigma$-סופיות ושלמות. המטרה היא להגדיר מידת מכפלה $\mu_1 \times \mu_2$ על $X_1 \times X_2$.

**הגדרה.** **מלבן מדיד** הוא קבוצה מהצורה $A \times B$, $A \in \mathcal{M}_1$, $B \in \mathcal{M}_2$.

**טענה 51:** יהי $\mathcal{A}$ האוסף של כל האיחודים הסופיים הזרים של מלבנים מדידים. $\mathcal{A}$ הוא אלגברה של קבוצות.

[18] היות ש-$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$, סדרת הפונקציות עולה.

**הוכחה.** משלים של מלבן מדיד הוא ב-$\mathcal{A}$ ($(A\times B)^C=(A^C\times B^C)\cup(A^C\times B)\cup(A\times B^C)$).
איחודים – באופן דומה (תרגיל).

עבור מלבן $A\times B$ נגדיר $\mu_0(A\times B)=\mu_1(A)\mu_2(B)$. נראה כי עבור איברי $\mathcal{A}$, $\mu_0$ מקיימת $\mu_0(\coprod_{i=1}^m R_i)=\sum_{i=1}^m \mu_0(R_i)$.

**טענה 52:** ל-$\mu_0$ יש הרחבה יחידה לקדם-מידה על $\mathcal{A}$.

**הוכחה.** נראה כי אם $A\times B=\coprod_{i=1}^\infty A_i\times B_i$ אזי $\mu_0(A\times B)=\sum_{i=1}^\infty \mu_0(A_i\times B_i)$. לכל $x_1\in A$ ולכל $x_2\in B$ יש בדיוק $j$ יחיד כך ש-$(x_1,x_2)\in A_j\times B_j$. מכך, בצירוף $\sigma$-אדיטיביות $\mu_2$, נובע כי $\chi_A(x_1)\mu_2(B)=\sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j}(x_1)\mu_2(B_j)$. ממשפט ההתכנסות המונוטונית עבור $\chi_A(x_1)\mu_2(B)=\lim\sum_{j=1}^n \chi_{A_j}(x_1)\mu_2(B_j)$ נובע $\mu_1(A)\mu_2(B)=\sum_{j=1}^\infty \mu_1(A_j)\mu_2(B_j)$.

כעת נובע שהרחבת $\mu_0$ ל-$\mathcal{A}$ על-ידי $\mu_0(\coprod_{i=1}^m R_i)=\sum_{i=1}^m \mu_0(R_i)$ מוגדרת היטב והיא קדם-מידה (תרגיל).

**משפט 53:** בהינתן $\mu_0$ קדם-מידה על אלגברה $\mathcal{A}$, יש הרחבה יחידה $\mu$ של $\mu_0$ למידה על ה-$\sigma$-אלגברה $\mathcal{M}$ הנוצרת על-ידי $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ אלגברה של קבוצות; $\mathcal{A}_\sigma$: איחודים בני מניה של איברי $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$: חיתוך סדרת קבוצות מ-$\mathcal{A}_\sigma$. 24.12.2008
נגדיר $\mu_*(E)=\inf\{\sum \mu_0(E_i)\ :\ E\subseteq\bigcup E_i, E_i\in\mathcal{A}\}$.
עבור $E\in\mathcal{M}$, נסמן $E_{x_1}=\{x_2\ :\ (x_1,x_2)\in E\}$, $E^{x_2}=\{x_1\ :\ (x_1,x_2)\in E\}$.

**טענה 54:** אם $E\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ אזי $E^{x_2}$ היא $\mu_1$-מדידה לכל $x_2$ והפונקציה $x_2\mapsto\mu_1(E^{x_2})$ $\mu_2$-מדידה, $\int_{X_2}\mu_1(E^{x_2})d\mu_2(x_2)=(\mu_1\times\mu_2)(E)$.

**הוכחה.** מתקיים עבור $E=A\times B$ מלבן בדיד. במקרה זה, $\varphi_{A\times B}(x_2)=\mu(A)$ ב-$x_2\in B$, $0$ אחרת – מדידה.

עבור $E\in\mathcal{A}_\sigma$, נרשום $E=\coprod_{i=1}^\infty E_i$, $E_i=A_i\times B_i$. $E^{x_2}=\coprod_{i=1}^\infty E_i^{x_2}$ מדיד; $\varphi_E(x_2)=\sum_{i=1}^\infty \varphi_{E_i}(x_2)$.
נגדיר $^nF^{x_2}=\bigcup_{i=1}^n E_i^{x_2}$, $^nF=\bigcup_{i=1}^n E_i$. לכל $n$, $(\mu_1\times\mu_2)(^nF)=\int_{X_2}\mu_1(^nF^{x_2})d\mu_2(x_2)$, והיות ש-$^nF\nearrow E$, ממשפט ההתכנסות המונוטונית $(\mu_1\times\mu_2)(E)=\int_{X_2}\mu_1(E_i^{x_2})d\mu_2(x_2)$.
כעת, תהא $E\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ ונניח $(\mu_1\times\mu_2)(E)<\infty$. אז קיימת סדרה מונוטונית יורדת $E_1\supseteq E_2\supseteq\dots$, $\bigcap_{i=1}^\infty E_i=E$ כאשר $E_i\in\mathcal{A}_\sigma$ (וזאת מסגירותה לחיתוך סופי של איברים).
ניתן בלי הגבלת הכלליות להניח ש-$(\mu_1\times\mu_2)(E_1)<\infty$. נגדיר $f_j(x_2)=\mu_1(E_j^{x_2})$, $f(x_2)=\mu_1(E^{x_2})$. $E^{x_2}=\bigcap_1^\infty E_i^{x_2}$ מדידה, $E_i\in\mathcal{A}_\sigma$. נניח כי לכל $x_2$, $\mu_1(E_j^{x_2})<\infty$.[19]
אז $f(x_2)=\lim_{j\to\infty}f_j(x_2)$. כל $f_j$ מדידה, ולכן $f$ מדידה.
$f_j(x_2)$ סדרה מונוטונית לא עולה של פונקציות, ולכן קיים $\int_{X_2}f(x_2)d\mu_2(x_2)=\lim\int f_j(x_2)d\mu_2(x_2)$.

[19] זה מתקיים כאשר $\mu_1(X_1),\mu_2(X_2)<\infty$. נזכור כי אלו מידות $\sigma$-סופיות; נכתוב $X_1=\bigcup_{j=1}^\infty F_j$, $X_2=\bigcup_{j=1}^\infty G_j$ ל-$F_j\subseteq F_{j+1}$, $G_j\subseteq G_{j+1}$ ממידות סופיות. הטענה מתקיימת אם $E\subseteq F_j\times G_j$, ובאופן כללי, $\int\mu_1(^jE^{x_2})d\mu_2(x_2)=\mu_1\times\mu_2(^jE)$ כאשר $^jE=E\cap(F_j\times G_j)$. הטענה נובעת ממשפט ההתכנסות המונוטונית.

29.12.2008 **טענה 55:** הטענה לעיל מתקיימת גם עבור כל קבוצה $E \in \mathcal{M}$, בהבדל קטן: תהא $E \in \mathcal{M}$ מדידה. אזי ל־$\mu_2$־כמעט כל $x_2 \in X_2$, $E^{x_2}$ היא $\mu_1$־מדידה ומתקיים $\int_{X_2} \mu_1(E^{x_2}) d\mu_2 = (\mu_1 \times \mu_2)(E)$.

**הוכחה.** נניח ראשית כי $E$ ממידה 0.

**למה 1.55:** קיימת $F \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ כך ש־$E \subseteq F$ ו־$(\mu_1 \times \mu_2)(F) = 0$.

$E^{x_2} \subseteq F^{x_2}$ לכל $x_2 \in X_2$. מ־(*) עבור $F$, $\mu_1(F^{x_2}) = 0$ עבור $\mu_2$־כמעט כל $x_2$, ולכן עבור $\mu_2$־כמעט כל $x_2$, $E^{x_2}$ מדידה ומידתה $\mu_1(E^{x_2}) = 0$, ו־(*) מתקיים.

עבור $E \in \mathcal{M}$ כללית:

**למה 2.55:** קיימת $F \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ $E \subseteq F$ כך ש־$Z = F \setminus E$ מקיימת $(\mu_1 \times \mu_2)(Z) = 0$.

$E^{x_2} \subseteq F^{x_2}$, $F^{x_2} \setminus E^{x_2} = Z^{x_2}$, ולכן $E^{x_2} = F^{x_2} \setminus Z^{x_2}$ $E^{x_2}$ $\mu_1$־מדידה ל־$\mu_2$־כמעט כל $x_2$. $\mu_1(E^{x_2}) = \mu_1(F^{x_2}) - \mu_1(Z^{x_2})$ לכמעט כל $x_2$ ולכן (*) מתקיים.

**משפט 56 (פוביני):** $\mu_1$, $\mu_2$ מידות $\sigma$־סופיות. תהא $f$ פונקציה מדידה על $X_1 \times X_2$, אינטגרבילית. אזי (1) עבור $\mu_2$־כמעט כל $x_2 \in X_2$ הפונקציה $f^{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$ אינטגרבילית על $(X_1, \mu_1)$;

(2) הפונקציה $x_2 \mapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$ אינטגרבילית על $(X_2, \mu_2)$;

(3) $\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_2} \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2)$.

**הוכחה.** היות שטענות המשפט נשמרות תחת צירופים לינאריים, די להוכיח את המשפט עבור פונקציות אי־שליליות. תהא $f$ פונקציה אי־שלילית אינטגרבילית. קיימת סדרה עולה של פונקציות פשוטות השואפות ל־$f$, ומספיק להוכיח עבורן, שכן לאחר מכן ניתן להסיק את טענות המשפט בעזרת משפט ההתכנסות המונוטונית.

עבור פונקציות פשוטות, נובע מהטענה הקודמת ומההערה שהטענות עוברות לצירופים לינאריים.