תורת המידה

1 באפריל 2017

מרצה: פרופ' יורם לסט

מתרגל: אליק עולמי (eluhu.olami@mail.huji.ac.il)

סוכם ע"י: אור שריר

פניות לתיקונים והערות: or@sharir.org

אתר הסיכומים שלי: http://notes.sharir.org

תוכן עניינים

חלק I

הרצאות

1 הקדמה

תורת המידה עוסקת במדידת "גדלים" של קבוצות. הדרך הכי נאיבית לעשות זאת היא באמצעות ספירת האיברים, אבל ברגע שמטפלים בקבוצות אינסופיות השיטה הזאת נהפכית לבעייתית. מעבר למדידה של קבוצות, השימוש העיקרי של מידות הוא לשם הגדרה מחדש של מושג האינטגרל כך שהוא יכול על קבוצת פונקציות רחבה יותר מאינטגרל רימן שנלמד באינפי 1.

נתחיל מהגדרה כללית של מושג האורך עבור קבוצות של מספרים ממשיים. עבור קטע פתוח ההגדרה היא פשוטה $|(a,b)| = b-a$. מה נעשה עבור קבוצה כללית? תהיא $A \subseteq \mathbb{R}$ אז נגדיר

$$|A| = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|I_j| \,|\, (\forall j \exists a,b \in R, I_j = (a,b)) \wedge A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} I_j\right\}$$

נשים לב שהאינפימום תמיד קיים עבור קבוצה של מספרים ממשיים ולכן הביטוי הנ"ל מוגדר היטב (אבל אולי שווה לאינסוף). עבור $A = (a,b)$ מתקבל אורך הקטע כפי שהגדרנו לפניכן. בנוסף נשים לב כי עבור קבוצה בת מנייה אז גודלה הוא אפס. הגודל הזה נקרא המידה החוציונית של לבג על $\mathbb{R}$. כביכול ההגדרה הזאת מספקת, אבל אחת התכונות החשובות של גודל היא עקרון החיבוריות, כלומר שעבור שתי קבוצות זרות $A, B \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $|A \cup B| = |A| + |B|$. עבור הערך הנ"ל העקרון הזה אינו מתקיים, למרות שכן מתקיים אי שוויון במקום $|A \cup B| \geq |A| + |B|$ כאשר הבעיה היא שלפעמים אי השוויון היא ממש. מסתבר שלא קיימת הגדרה עבור אורך שתקיים את העקרון הזה אם כל קבוצה היא מדידה, ולכן נמצא הגדרה חדשה שלא תהיה מוגדרת לכל הקבוצות (אבל עדיין לקבוצה מאוד רחבה), והיא כן תקיים את העקרון הזה. למידה הזאת נקרא מידת לבג ולקבוצות עליהן היא חלה נקרא קבוצות מדידות לבג.

2 מרחבי מידה

2.1 מרחב מדיד

הגדרה 2.1 מרחב טופולוגי הוא זוג (X, τ) כאשר X קבוצה ו־τ אוסף תת־קבוצות של X (שייקראו קבוצות פתוחות) המקיים:

- מתקיים שגם הקבוצה הריקה וגם כל המרחב שייכים ל־τ.
- אם $V_i \in \tau$ לכל $i = 1, \ldots, n$ אזי $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$ – "כל חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה".
- אם $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב־τ (יכולה להיות סופית, בת מנייה או אפילו לא בת־מנייה), אזי $\cup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \tau$.

הערה 2.2 אם (X, τ) מרחב טופולוגי לרוב נדבר פשוט על "X" כמרחב טופולוגי בלי לציין במפורש את τ.

דוגמאות:

1. כל מרחב מטרי הוא מרחב טופולוגי עם ההגדרה הסטדנרטית של קבוצות פתוחות כפי שנלמדה באינפי (עבור כל נקודה בקבוצה קיים רדיוס r כך שהכדור הפתוח סביב הנקודה ברדיוס הזה מוכל בקבוצה).
2. ה"קטע" $[0,\infty] = [0,\infty) \bigcup \{\infty\}$ כאשר קבוצות פתוחות בו הן איחודי קטעים מהצורות (a,b) וגם קטעים מהצורה $(a,\infty]$ או $[0,a)$.

הגדרה 2.3 יהיה X ו־Y מרחבים טופולוגיים, אז הפונקציה $f:X\to Y$ נקראת רציפה אם"ם לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq Y$ המקור שלה תחת $f^{-1}\left(V\right)$ היא קבוצה פתוחה ב־X (כאשר $f^{-1}\left(V\right)=\left\{ x|f\left(x\right)\in V\right\}$).

דוגמא: נסתכל על הפונקציה $f:\left[0,1\right]\to\left[0,\infty\right]$ המוגדרת ע"י $f\left(x\right)=\begin{cases} \infty & x=0\\ \frac{1}{x} & x\neq0 \end{cases}$ וניתן להראות שהפונקציה הנ"ל היא רציפה תחת הטופולוגיה של $\left[0,\infty\right]$ שהוגדרה לעיל, בעוד הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ מעל כל $\mathbb{R}$ אינה רציפה ב־$x=0$.

הגדרה 2.4 תהי X קבוצה, אוסף $\mathcal{M}$ של תת־קבוצות של X ייקרא σ־אלגברה (בדיבור "סיגמה־אלגברה") ב־X אם יש לו את התכונות הבאות:

1. $X\in\mathcal{M}$.
2. לכל $A\in\mathcal{M}$ מתקיים ש־$A^{c}\in\mathcal{M}$ (כאשר A^{c} נקרא המשלים של A ומוגדר ע"י $A^{c}=X\backslash A$).
3. עבור סדרה של קבוצות $\left\{ A_{n}\right\} _{n=1}^{\infty}$ כך ש־$A_{n}\in\mathcal{M}$, אזי $\cup_{n=1}^{\infty}A_{n}\in\mathcal{M}$.

הערה 2.5 ההבדל בין אלגברה ל־σ־אלגברה הוא שתנאי 3 לעיל הוא על סדרות בנות מנייה במקום סדרות סופיות במקרה של אלגברה.

דוגמא: לכל קבוצה X ניתן להגדיר:

- $\mathcal{M}=\left\{ \emptyset,X\right\}$ שהיא ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר.
- $\mathcal{M}=\left\{ A|A\subseteq X\right\}$ (כל תתי הקבוצות של X) שהיא ה־σ־אלגברה הגדולה ביותר.

הגדרה 2.6 מרחב מדיד (measurable space) הוא זוג $\left(X,\mathcal{M}\right)$ כאשר X מרחב כלשהו ו־$\mathcal{M}$ היא σ־אלגברה ב־X. בד"כ נאמר פשוט כי X הוא מרחב מדיד, ואברי $\mathcal{M}$ נקראים קבוצו מדידות ב־X.

הגדרה 2.7 יהי X מרחב מדיד ו־Y מרחב טופולוגי. פונקציה $f:X\to Y$ תיקרא פונקציה מדידה אם לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq Y$, המקור $f^{-1}\left(V\right)$ הוא קבוצה מדידה ב־X.

הערה 2.8 חשוב לשים לב כי Y הוא לאו דווקא מרחב מדיד בעצמו (למרות שבד"כ הוא כן), והסיבה להגדרה של מרחב מדיד דווקא בצורה הזאת היא כי בד"כ נצטרך את מושג הגבול שמוגדר במרחב טופולוגי אבל לא במרחב מדיד (אלא אם הוא מרחב טופולוגי ומדיד כמובן).

טענה 2.9 תהי $\mathcal{M}$ σ־אלגברה ב־X, אזי:

1. $\emptyset\in\mathcal{M}$.
2. עבור כל סדרה סופית $A_{1},\ldots,A_{n}\in\mathcal{M}$, מתקיים ש־ $\cup_{i=1}^{n}A_{i}\in\mathcal{M}$.
3. אם $\left(A_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אינסופית כך ש־$A_{n}\in\mathcal{M}$, אזי $\cap_{n=1}^{\infty}A_{n}\in\mathcal{M}$ (אותו דבר גם עבור סדרה סופית).
4. עבור $A,B\in\mathcal{M}$ מתקיים ש־$A\backslash B\in\mathcal{M}$.

הוכחה: נוכיח את תתי הסעיפים:

1. נובע מכך ש־$X^{c}=\emptyset$ וכי לכל $A\in\mathcal{M}$ מתקיים ש־$A^{c}\in\mathcal{M}$.
2. נובע מלקחת $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\emptyset$ וכך נגדיר סדרה אינסופית $\left(A_{n}\right)$ ולפי ההגדרה האיחוד שלהן שייך ל־$\mathcal{M}$.

3. נובע מהשיוויון $\cap_{n=1}^{\infty}A_n=\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)^c$. עבור המקרה הסופי אז אפשר להוסיף עוד אינסוף עותקים של X כמו בסעיף הקודם.

4. נובע מ־$A\backslash B=B^c\cap A$ ומהסעיף הקודם.

■

משפט 2.10 יהיו Y ו־Z מרחבים טופולוגיים ותהי $g:Y\to Z$ פונקציה רציפה. אזי:

1. אם X מרחב טופולוגי, תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה ונגדיר את ההרכבה $h=g\circ f$, אזי $h:X\to Z$ היא גם כן פונקציה רציפה.

2. אם X מרחב מדיד, תהי $f:X\to Y$ פונקציה מדידה ונגדיר את ההרכבה $h=g\circ f$, אזי $h:X\to Z$ היא גם כן פונקציה מדידה.

הוכחה: נוכיח את תתי הסעיפים:

1. אם V קבוצה פתוחה ב־Z, אז כיוון ש־g רציפה אזי $g^{-1}(Z)$ היא קבוצה פתוחה ב־Y, ולכן $f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$ היא גם כן קבוצה פתוחה כי גם f רציפה, ולכן $h^{-1}(V)=f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$ היא גם כן פתוחה ב־X ולכן h רציפה.

2. באופן דומה, כש־f מדידה נובע שלכל V פתוחה ב־Z אזי $g^{-1}(V)$ פתוחה ב־Y וכיוון ש־f מדידה אז $f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$ היא קבוצה מדידה ב־X, ולכן $h^{-1}(V)$ היא גם כן קבוצה מדידה ולכן h היא פונקציה מדידה.

■

משפט 2.11 יהיו u,v פונקציות מדידות ממשיות על מרחב מדיד X (כלומר $u,v:X\to\mathbb{R}$ כאשר $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית) ותהי $\Phi:\mathbb{R}^2\to Y$ פונקציה רציפה כאשר Y מרחב טופולוגי, ונגדיר $h:X\to Y$ ע"י $h(x)=\Phi(u(x),v(x))$. אזי h היא מדידה.

הוכחה: נגדיר $f(x)=(u(x),v(x))$ אזי f היא פונקציה מ־X ל־$\mathbb{R}^2$ ו־$h=\Phi\circ f$. לכן נובע מהמשפט הקודם שמספיק להוכיח ש־f מדידה. אם R מלבן פתוח במישור $\mathbb{R}^2$, בעל צלעות מקבילות לצירים, כלומר R הוא מהצורה $R=I_1\times I_2$ עבור קטעים פתוחים $I_1,I_2\subset\mathbb{R}$, אזי $f^{-1}(R)=u^{-1}(I_1)\cap v^{-1}(I_2)$. לכן במקרה זה ממדידות u ו־v נובע ש־$f^{-1}(R)$ קבוצה מדידה. עבור קבוצה פתוחה כללית $V\subset\mathbb{R}^2$ ידוע שהיא איחוד בן מנייה של מלבנים כאלו, כלומר $V=\cup_{i=1}^{\infty}R_i$, והיות ש־$f^{-1}(V)=f^{-1}\left(\cup_{i=1}^{\infty}R_i\right)=\cup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(R_i)$ אז נובע ש־$f^{-1}(V)$ היא קבוצה מדידה, ולכן f היא מדידה. ■

מסקנה 2.12 יהי X מרחב מדיד, אזי:

1. אם $f=u+iv$, כאשר u,v פונקציות ממשיות מדידות על X, אזי f פונקציה מרוכבת ומדידה על X (כאשר חושבים על המישור המרוכב כעל מרחב טופולוגי).

2. אם $f=u+iv$ פונקציה מרוכבת ומדידה על X, אזי גם $|u|,|v|$ ו־$|f|$ הן פונקציות ממשיות ומדידות על X.

3. אם f ו־g פונקציות מרוכבות ומדידות על X, אזי גם הסכום $f+g$ וגם $f\cdot g$ הן גם פונקציות מרוכבות ומדידות על X.

4. אם E קבוצה מדידה ב־X ואם $\chi_E(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$ (נקראת הפונקציה המציינת (או האופיינית, באנגלית characteristic) של E), אזי χ_E מדידה על X.

5. אם f פונקציה מרוכבת ומדידה על X, אזי קיימת פונקציה מרוכבת ומדידה α על X, כך ש־$|\alpha| = 1$ ו־$f = \alpha \cdot |f|$ (כאשר α למעשה מציינת את הפאזה של f).

הוכחה: נוכיח את הסעיפים:

1. נובע ממשפט 2.11 עם $\Phi(z) = z$.
2. נובע ממשפט 2.10 עם $g(z) = Re(z), g(z) = Im(z), g(z) = |z|$.
3. עבור f ו־g ממשיות זה נובע ממשפט 2.11 עם $\Phi(s,t) = s + t$ או $\Phi(s,t) = s \cdot t$. המקרה המרוכב נובע לכן מסעיף 1 ו־2 לעיל.
4. נשים לב שמתקיים לכל V (בין אם היא פתוחה או לא):

$$\chi_E^{-1}(V) = \begin{cases} \emptyset & 0 \notin V \wedge 1 \notin V \\ E & 0 \notin V \wedge 1 \in V \\ E^{-c} & 0 \in V \wedge 1 \notin V \\ X & 0 \in V \wedge 1 \in V \end{cases}$$

וכיוון ש־$\emptyset, E, E^{-c}$ ו־X הן קבוצות מדידות אזי χ_E היא פונקציה מדידה.

5. תהיא $E = \{X | f(x) = 0\}$ ויהי $Y = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ ("המישור המנוקב"). נגדיר $\varphi : Y \to \mathbb{C}$ ע"י $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$. בנוסף נגדיר $\alpha(x) = \varphi(f(x) + \chi_E(x))$. אם $x \in E$ אזי $\alpha(x) = 1$, ואם $x \notin E$ אזי $\alpha(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$ ולכן מתקיים ש־$|\alpha(x)| = 1$. היות ו־φ רציפה על Y ו־E מדידה (מושאר כתרגיל להוכיח ש־E אכן מדידה), אזי α היא מדידה בתור חיבור והרכבה של פונקציות מדידות כפי שהוכחנו לפניכן.

■

משפט 2.13 אם F אוסף כלשהו של תת־קבוצות של קבוצה כלשהי X, אזי קיימת σ־אלגברה $\mathcal{M}^*$ של X שהיא ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר המכילה את F. $\mathcal{M}^*$ כנ"ל נקראת ה־σ־אלגברה הנוצרת ע"י F.

הוכחה: תהי Ω משפחת כל ה־σ־אלגבראות של X המכילות את F. היות וה־σ־אלגברה שהיא אוסף כל תתי הקבוצות של X תמיד שייכת ל־Ω, אזי Ω אינה ריקה. תהי $\mathcal{M}^*$ החיתוך של כל אברי Ω ($\mathcal{M}^* = \cap_{\mathcal{M} \in \Omega} \mathcal{M}$). ברור ש־$F \subset \mathcal{M}^*$ וש־$\mathcal{M}^*$ מוכלת בכל σ־אלגברה של X המכילה את F. נותר להראות ש־$\mathcal{M}^*$ עצמה (כפי שהגדרנו) היא σ־אלגברה. אם $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה בת מנייה כך ש־$A_n \in \mathcal{M}^*$ ואם $\mathcal{M} \in \Omega$ אזי $A_n \in \mathcal{M}$ לכל n ולכן גם $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$. היות ו־$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}^*$ לכל $\mathcal{M} \in \Omega$ אזי מתקיים גם כי $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}^*$. באופן דומה ניתן להראות גם שתי התכונות האחרות בהגדרה של σ־אלגברה מתקיימות עבור $\mathcal{M}^*$, ולכן היא בעצמה σ־אלגברה. ■

הגדרה 2.14 יהי X מרחב טופולוגי, קבוצות בורל (Borel) הן אברי ה־σ־אלגברה הנוצרת ע"י הקבוצות הפתוחות ב־X. טיפוסים מוסיימים של קבוצות בורל:

- קבוצה נקראת G_δ אם היא חיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות (δ מייצגת חיתוכים ו־G קבוצות פתוחות).
- קבוצה נקראת F_σ אם היא איחוד בן מנייה של קבוצות סגורות (σ מציינת איחודים ו־F קבוצות סגורות).
- ניתן לדבר גם על קבוצות כמו $G_{\delta\sigma}$ שהוא איחוד בן מנייה של קבוצות G_δ, או למשל $F_{\sigma\delta\sigma}$ שהוא איחוד בן מנייה של קבוצות $F_{\sigma\delta}$ (כלומר איחוד של חתוך של איחודים של קבוצות פתוחות).

דוגמאות:

1. עבור $|a-b|>1$ אפשר לרשום $[a,b)=\cap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},b\right)=\cup_{n=1}^{\infty}\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$, ולכן הקטע $[a,b)$ הוא גם F_σ וגם G_δ. באופן יותר טריוויאלי $\{a\}$ עבור $a\in\mathbb{R}$ היא גם כן G_δ (חיתוך כל הקטעים $\left(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\right)$) וגם F_σ ($\{a\}$ בעצמה סגורה).

2. עבור $p,q\in\mathbb{N}$ נגדיר $I_{p,q}=\left(\frac{p}{q}-\exp\left(-q\right),\frac{p}{q}+\exp\left(-q\right)\right)$ ובנוסף $L=\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{q\geq n}\left(\cup_{\substack{1\leq p\leq q\\(p,q)=1}}I_{p,q}\right)$ (הכוונה של $(p,q)=1$ היא שמדובר בשבר מצומצם) הנקראים גם מספרי Liouville היא קבוצת G_δ. בנוסף L זו בדיוק קבוצת כל המספרים $\alpha\in[0,1]$ שעבורם יש סדרה $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ עם $(p_n,q_n)=1$ כך ש־$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\exp\left(-q_n\right)$. ניתן להראות ש־$L$ קבוצה צפופה, לא בת מנייה והיא בעלת "מידה אפס" (במובן שהמידה החיצונית של לבג מתאפסת עליה). זה נכון כי מתקיים (חסם עליון באמצעות אורכי הקטעים):

$$\left|\cup_{q\geq n}\left(\cup_{\substack{1\leq p\leq q\\(p,q)=1}}I_{p,q}\right)\right|\leq\sum_{q\geq n}q\cdot 2\cdot\exp\left(-q\right)\underset{n\to\infty}{\to}0$$

וכיוון שחיתוך של קטעים שאורכם שואף לאפס אז האורך של כל החיתוך הוא אפס.

הגדרה 2.15 אם X,Y מרחבים טופולוגיים, $f:X\to Y$ נקראת מדידה בורל, או פונקציית בורל, אם היא מדידה ביחס ל־σ־אלגברה של קבוצות בורל ב־X.

תרגיל: כל פונקציה רציפה בין מרחבים טופולוגיים היא פונקציית בורל

משפט 2.16 יהיו $(X,\mathcal{M})$ מרחב מדיד, Y מרחב טופולוגי, ו־$f:X\to Y$, אזי:

1. $\Omega=\left\{E\subseteq Y|f^{-1}\left(E\right)\in\mathcal{M}\right\}$ היא σ־אלגברה ב־Y.
2. אם f מדידה ו־E קבוצת בורל ב־Y, אזי $f^{-1}\left(E\right)\in\mathcal{M}$.
3. אם $Y=[-\infty,\infty]$ (כלומר המרחב $\{-\infty,\infty\}\bigcup(-\infty,\infty)$ עם קבוצות פתוחות $[-\infty,a),(b,\infty],(a,b)$), ו־$f^{-1}\left((a,\infty]\right)\in\mathcal{M}$ לכל $a\in\mathbb{R}$, אזי f מדידה.
4. אם f מדידה, Z מרחב טופולוגי, $g:Y\to Z$ פונקציית בורל ו־$h=g\circ f$, אזי $h:X\to Z$ היא מדידה.

הוכחה: נוכיח את הטענות:

1. נובע מיידית מהקשרים:
   - $f^{-1}\left(Y\right)=X\in\mathcal{M}$.
   - $f^{-1}\left(Y\backslash A\right)=X\backslash f^{-1}\left(A\right)\in\mathcal{M}$
   - $f^{-1}\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\cup_{i=1}^{\infty}f^{-1}\left(A_i\right)$.
2. יהי Ω כמו ב־(1). ממדידות f נובע ש־Ω מכיל את כל הקבוצות הפתוחות ב־Y, ולכן היות ו־Ω היא σ־אלגברה אז נובע ש־Ω מכיל את כל קבוצות הבורל ב־Y.
3. יהי $\Omega=\left\{E\subseteq[-\infty,\infty]\,|f^{-1}\left(E\right)\in\mathcal{M}\right\}$. לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$[-\infty,a)=\cup_{n=1}^{\infty}\left[-\infty,a-\frac{1}{n}\right]=\cup_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n},\infty]^c$$

והיות ש־Ω היא σ־אלגברה (ע"פ (1)), נובע $[-\infty,a)\in\Omega$ לכל $a\in\mathbb{R}$, ולכן גם מתקיים:

$$\forall-\infty<a<b<\infty\to(a,b)=[-\infty,b)\cap(a,\infty]\in\Omega$$

היות וכל קבוצה פתוחה ב־$[-\infty,\infty]$ היא איחוד בן מנייה של קטעים מהצורה $[-\infty,a),(a,b),(b,\infty]$ (תרגיל), אז נובע שכל קבוצה פתוחה היא ב־Ω, ומכאן ש־f מדידה.

4. תהי $V\subseteq Z$ פתוחה, אזי $g^{-1}(V)$ היא קבוצת בורל ב־Y ו־$h^{-1}(V)=f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$. עתה נובע מ־(2) ש־$h^{-1}(V)\in\mathcal{M}$.

■

הגדרה 2.17 תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ממשיות מורחבות, דהיינו $f_n:X\to[-\infty,\infty]$ (ל־$[-\infty,\infty]$ קוראים הישר המורחב המספרים הממשיים המורחבים – extended reals). נגדיר

$$\left(\inf_n f_n\right)(x):=\inf_n\left(f_n(x)\right)$$
$$\left(\sup_n f_n\right)(x):=\sup_n\left(f_n(x)\right)$$
$$\left(\liminf_n f_n\right)(x):=\liminf_n\left(f_n(x)\right)$$
$$\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x):=\limsup_{n\to\infty}\left(f_n(x)\right)$$

אם בכל נקודה x קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(f_n(x)\right)$, אזי מוגדרת גם פונקציית הגבול הנקודתית $\left(\lim_{n\to\infty}f_n\right)(x):=\lim_{n\to\infty}\left(f_n(x)\right)$, ובמקרה כזה אומרים ש־$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית לגבול $\lim_{n\to\infty}f_n$, ונובע ש־$\lim_{n\to\infty}f_n=\limsup_{n\to\infty}f_n=\liminf_{n\to\infty}f_n$.

הערה 2.18 שתי הערות לגבי ההגדרות לעיל:

1. נשים לב שתמיד מתקיים ש־$\inf_n f_n=-\left(\sup_n -f_n\right)$, ובאותו אופן $\liminf_{n\to\infty}f_n=-\left(\limsup_{n\to\infty}-f_n\right)$. לכן מספיק לרוב לדון ב־$\sup$ וב־$\limsup$.
2. על גבול נקודתי אפשר כמובן לדבר גם עבור פונקציות מרוכבות ואז קיום הגבול שקול לקיומו בנפרד עבור החלק הממשי והחלק המדומה.

משפט 2.19 אם קיימת סדרת פונקציות $f_n:X\to[-\infty,\infty]$ הן פונקציות מדידות, אזי $\sup f_n$ ו־$\limsup f_n$ הן פונקציות מדידות.

דוגמא: $g_\alpha(x)=\begin{cases}\infty & x=\alpha\\ \frac{1}{(\alpha-x)^2} & x\neq\alpha\end{cases}$, ויהיו $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידור של הרציונליים ב־$[0,1]$, ונגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}g_{\alpha_n}(x)$. זאת פונקציה שמקבל אינסוף בכל המספרים הרציונליים, אבל היא עדיין מדידה. אבל אפשר לראות שהיא גבול נקודתי של פונקציות רציפות (ולכן מדידות) ולכן לפי המשפט היא אכן מדידה.

הוכחה: לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, מתקיים כי

$$\left(\sup_n f_n\right)^{-1}\left((\alpha,\infty]\right)=\cup_{n=1}^{\infty}f_n^{-1}\left((\alpha,\infty]\right)$$

מכאן, לפי סעיף (3) של המשפט הקודם, $\sup_n f_n$ מדידה, היות ו־$\limsup_n f_n=\inf_n\left(\sup_{k\geq n}f_k\right)$ ומכאן נובע שגם $\limsup_{n\to\infty}f_n$ מדידה. ■

הגדרה 2.20 בהינתן $f,g:X\to[-\infty,\infty]$ נגדיר:

$$\begin{aligned}(\max\{f,g\})(x)&=\max\{f(x),g(x)\}\\(\min\{f,g\})(x)&=\min\{f(x),g(x)\}\end{aligned}$$

כמו כן לכל $f:X\to[-\infty,\infty]$ נגדיר את

$$\begin{aligned}f^{+}&=\max\{f,0\}\\f^{-}&=-\min\{f,0\}\end{aligned}$$

כאשר f^{+} נקראת החלק החיובי של f ו־f^{-} נקראת החלק השלילי של f, והן פונקציות אי־שליליות (מקבלות ערכים ב־$[0,\infty]$), ומתקיים ש־$f=f^{+}-f^{-}$ ו־$|f|=f^{+}+f^{-}$.

טענה 2.21 אם $f=g-h$ כך ש־$g\geq 0$ וגם $h\geq 0$, אזי $f^{+}\leq g$ וגם $f^{-}\leq h$.

הערה 2.22 במובן מסויים הטענה לעיל מראה שהייצוג הנ"ל של פונקציה ע"י הפרש של שתי פונקציות הוא אופטימלי.

הוכחה: $f\leq g$ מחיוביות f ו־g, וכיוון ש־$g\geq 0$ אז $f^{+}=\max\{f,0\}\leq g$, ובדומה ניתן להראות כי $f^{-}\leq h$. ■

מסקנה 2.23 מסקנות מהמשפט האחרון:

1. תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מרוכבות מדידות המתכנסת לגבול נקודתי, אזי הגבול הנ"ל הוא פונקציה מרוכבת מדידה.
2. אם $f,g:X\to[-\infty,\infty]$ מדידות, אזי גם $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, f^{+} ו־f^{-} הן מדידות.

הוכחה: נוכיח את המסקנות:

1. ברור מהמשפט אחרון ומההסתכלו בנפרד על חלק ממשי וחלק מדומה.
2. ניקח $f_1=f,f_2=g$ ועבור שאר הפונקציות $f_3=f_4=\cdots=-\infty$ אזי $\max\{f,g\}=\sup_n f_n$, ובאופן דומה עבור שאר המקרים.

■

הגדרה 2.24 פונקציה מרוכבת s על מרחב מדיד X נקראת פונקציה פשוטה (Simple Function) אם הטווח שלה כולל מספר סופי של נקודות.

הערה 2.25 אם $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ הם הערכים שמקבלת פונקציה פשוטה s ונגדיר $A_i:=\{x|s(x)=\alpha_i\}$ (כלומר $A_i=s^{-1}(\alpha_i)$), אזי $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$. ראינו כי פונקציה אופיינית היא מדידה אס"ם הקבוצה שמגדירה אותה היא קבוצה מדידה, ולכן קל ראות ש־s מדידה אס"ם כל הקבוצות $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ הן מדידות (תרגיל).

משפט 2.26 תהי $f:X\to[0,\infty]$ מדידה, אזי קיימת סדרת פונקציות פשוטות $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ על X כך שמתקיים:

1. $0\leq s_1\leq s_2\leq\cdots\leq f$.
2. $\lim_{n\to\infty}s_n=f$ כגבול נקודתי.

הוכחה: נתחיל בלהראות איך נביע את פונקציית הזהות $f(t)=t$ כסדרת פונקציות פשוטות. נגדיר $\delta_n=2^{-n}$, ולכל $t\in\mathbb{R}$ ו־$n\in\mathbb{N}$ קיים $k=k_n(t)\in\mathbb{N}$ יחיד כך ש־$k\delta_n\leq t<(k+1)\delta_n$. נגדיר עכשיו

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}k_n(t)\,\delta_n & 0\leq t<n\\ n & n\leq t\leq\infty\end{cases}$$

אזי כל φ_n היא פונקציית בורל (פשוטה) על $[0,\infty]$, ומתקיים $t\delta_n\leq\varphi_n(t)<t$ לכל $0\leq t\leq n$ וגם מתקיים ש־$0\leq\varphi_1\leq\varphi_2\leq\cdots\leq t$, וכן $(\lim_{n\to\infty}\varphi_n)(t)=t$ לכל $t\in[0,\infty]$.

תהי f כלשהי פונקציה מדידה ונגדיר כעת את $s_n=\varphi_n\circ f$, וכיוון ש־φ_n פשוטה אז גם ההרכבה s_n פשוטה, ומקיימות את (1) ו־(2) באופן מיידי, וע"פ משפט קודם (סעיף (4) של המשפט האחרון) הן מדידות. ■

2.2 מרחב מידה

הגדרה 2.27 מידה חיובית (Positive Measure) על σ־אלגברה $\mathcal{M}$ היא פונקציה $\mu:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ שיש לה את התכונה הבאה (הנקראת σ־אדיטיביות): לכל משפחה בת מנייה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{M}$ של קבוצות זרות זו לזו (כלומר $n\neq m\Rightarrow A_n\cap A_m=\emptyset$) מתקיים ש־$\mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. כמו כן, נניח שקיימת $A\in\mathcal{M}$ שעבורה $\mu(A)<\infty$ (אנחנו ניראה בהמשך שתנאי זה שקול לכך ש־$\mu(\emptyset)=0$).

הגדרה 2.28 מידה מרוכבת (complex measure) על σ־אלגברה $\mathcal{M}$ היא פונקציה $\mu:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ שיש לה את תוכנת ה־σ־אדיטיביות כפי שהוגדרה עבור מידה חיובית לעיל.

הגדרה 2.29 מידה ממשית (signed measure או לפעמים real measures) היא מקרה פרטי של מידה מרוכבת.

הערה 2.30 רק מידה חיובית יכולה לקבל את הערך "∞". כשאומרים מידה (בד"כ) מתכוונים למידה חיובית.

הגדרה 2.31 מרחב מידה (Measure Space) הוא מרחב מדיד יחד עם מידה **חיובית** המוגדרת על ה־σ־אלגברה המתאימה. דהיינו, זוהי שלשה סגורה $(X,\mathcal{M},\mu)$ כאשר X קבוצה כלשהי, $\mathcal{M}$ σ־אלברה ב־X, ו־μ מידה חיובית על $\mathcal{M}$.

הערה 2.32 מרחב מידה מוגדר רק עבןר מידה חיובית ולא עבור המידות האחרות. אין דבר כזה "מרחב מידה חיובית".

משפט 2.33 תהי μ מידה חיובית על σ־אלגברה $\mathcal{M}$, אזי:

1. $\mu(\emptyset)=0$.
2. $\mu(\cup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$ אם $A_1,\ldots,A_n$ קבוצות זרות זו לזו.
3. אם $A,B\in\mathcal{M}$ ו־$A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\leq\mu(B)$.
4. אם $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\ldots$, $A_n\in\mathcal{M}$ וגם $A=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$, אזי $\mu(A_n)\underset{n\to\infty}{\to}\mu(A)$.
5. אם $A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq\ldots$, $A_n\in\mathcal{M}$, $A=\cap_{n=1}^{\infty}A_n$ וגם $\mu(A_1)<\infty$, אזי $\mu(A_n)\underset{n\to\infty}{\to}\mu(A)$.

הערה 2.34 חוץ מתוכנה (3), הכל נכון גם למידות מרוכבות. תכונה (2) נקראת אדיטיביות (או אדיטיביות סופית). תכונה (ג) נקראת מונוטונית.

הוכחה: נוכיח כל סעיף בנפרד:

1. ניקח $A\in\mathcal{M}$ שעבורה $\mu(A)<\infty$, ונסתכל על הסדרה $A_1=A$ כאשר $\emptyset=A_2=A_3=\ldots$, אזי מתכונת ה־σ־אדיטיביות מתקיים

$$0>\mu(A)=\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\mu(A)+\mu(\emptyset)\sum_{i=1}^{\infty}1$$

והערך היחידי שיקיים את אי השוויון הנ"ל הוא אם $\mu(\emptyset)=0$.

2. ניקח פשוט $A_{n+1}=A_{n+2}=\ldots=\emptyset$ ונשתמש ב־σ־אדיטיביות ותכונה (1) לעיל.

3. נשים לב ש־$B=A\cup(B\backslash A)$ ו־$A\cap(B\backslash A)=\emptyset$ ולכן מ־(2) נובע כי $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\backslash A)\geq\mu(A)$.

4. נסמן $B_1=A_1$ ו־$B_n=A_n\backslash A_{n-1}$ עבור $n=2,3,\ldots$, אזי $B_n\in\mathcal{M}$, $B_n\cap B_m=\emptyset$ אם $n\neq m$, ומתקיים $A_n\cup_{i=1}^{n}B_i$ וכן $A=\cup_{i=1}^{\infty}B_i$. עתה מתקיים

$$\mu(A_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)$$
$$\mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i)$$

ולפי ההגדרה של טור אינסופי $\sum_{i=1}^{\infty}a_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i$ קיבלנו כי $\mu(A_n)\to\mu(A)$.

5. נסמן $C_n=A_1\backslash A_n$, אזי $C_1\subseteq C_2\subseteq\ldots$, $\mu(C_n)=\mu(A_1)-\mu(A_n)$ ו־$A_1\backslash A=\cup_{n=1}^{\infty}C_n$ ולכן

$$\mu(A_1)-\mu(A)=\mu(A_1\backslash A)\overset{(3)}{=}\lim_{n\to\infty}\mu(C_n)=\mu(A_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

שמוכיח את הטענה.

■

דוגמאות:

1. לכל קבוצה X, נגדיר ל־$E\subseteq X$ את המידה $\mu(E)$ בתור מספר הנקודות בקבוצה X (כאשר היא אולי מחזירה ∞). μ הזאת נקראת מידת המנייה על X, וניתן להגדירה לכל σ־אלגברה ב־X.

2. תהי $x_o\in X$ ונגדיר $\mu(E)=\begin{cases}1 & x_0\in E\\ 0 & x_0\notin E\end{cases}$. מידה זאת נקראת "המידה האטומית ב־x_0" או "מידת דירק ב־x_0" או "unit point mass".

3 אינטגרל לבג

הגדרה 3.1 (אינטגרל לבג – Lebesgue) תהי μ מידה חיובית (על σ־אלגברה $\mathcal{M}$ ב־X). עבור פונקציה מדידה פשוטה, $s:X\to[0,\infty]$ מהצורה $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$, מגדירים לכל $E\in\mathcal{M}$:

$$\int_E sd\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E)$$

כאשר ייתכן כי $\alpha_i=0$, ובמידה ו־$\mu(A_i\cap E)=\infty$ אז מתקיים $0\cdot\infty=0$.

עבור $f:X\to[0,\infty]$ מדידה ו־$E\in\mathcal{M}$, מגדירים

$$\int_E fd\mu=\sup\left\{\int_E sd\mu : s \text{ is simple and } 0\le s\le f\right\}$$

כאשר הביטוי הנ"ל נקרא אינטגרל לבג של f על E ביחס למידה μ.

הערה 3.2 במובן מסויים ההגדרה לעיל שקולה לבחירת חלוקה של הטווח של f לחלקים $I_1,\dots,I_n$ כאשר בכל חלק אנחנו בוחרים נקודה מייצגת $\alpha_i\in I_i$, ואז אנו מקרבים את האינטגרל עם הביטוי $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu\left(f^{-1}\left(I_i\right)\right)$. הגדרה זו מזכירה לכן את אינטגרל רימן, כאשר שם חילקנו את ציר ה־x (במקום את ציר ה־y) ומצאנו גובה מלבן מייצג למלבן היושב על כל קטע בחלוקה.

תכונות שקל לבדוק:

1. אם $0\le f\le g$ אזי $\int_E fd\mu\le\int_E gd\mu$.
2. אם $f\ge 0$ ו־$A\subseteq B$ אזי $\int_A fd\mu\le\int_B fd\mu$.
3. אם $f\ge 0$ ו־C קבוע כך ש־$0\le c<\infty$ אזי $\int_E c\cdot fd\mu=c\int_E fd\mu$.
4. אם $f(x)=0$ לכל $x\in X$ אזי $\int_E fd\mu=0$ (אפילו אם $\mu(E)=\infty$).
5. אם $\mu(E)=0$ אזי $\int_E fd\mu=0$ (אפילו אם $f(x)=\infty$ לכל $x\in E$).
6. אם $f\ge 0$ אזי $\int_E fd\mu=\int_X\chi_E fd\mu$.

טענה 3.3 יהיו s ו־t פונקציות פשוטות מדידות אי־שליליות על X. נגדיר לכל $E\in\mathcal{M}$ את הגודל $\varphi(E)=\int_E sd\mu$, אזי $\phi(\cdot)$ היא מידה על $\mathcal{M}$, וכמוכן, מתקיים

$$(*)\qquad \int_X(s+t)\,d\mu=\int_X sd\mu+\int_X td\mu$$

.

הוכחה: S מהצורה $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$. אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{M}$ כאשר $E_n\cap E_m=\emptyset$ ל־$m\neq n$ ו־$E=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$, אזי

$$\begin{aligned}
\varphi(E)=\int_E sd\mu &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu\left(A_i\cap E\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu\left(A_i\cap\left(\cup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty}\left(A_i\cap E_n\right)\right)\\
(i)\qquad &=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_i\cap E_n\right)\\
(ii)\qquad &=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu\left(A_i\cap E_n\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(E_n\right)
\end{aligned}$$

כאשר (i) נובע מה־σ־אדיטיביות של μ, ו־(ii) כי מדובר בסכום אינסופי של איברים אי־שליליים ולכן ניתן לשנות את סדר הסכימה. היות וברור ש־$\varphi(\emptyset)=0$ אז נובע ש־φ היא אכן מידה.

תהי כעת $t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{B_j}$ ונגדיר $E_{ij}=A_i\cap B_j$, אזי

$$\int_{E_{ij}}(s+t)\,d\mu=(\alpha_i+\beta_j)\,\mu(E_{ij})$$

$$\int_{E_{ij}}sd\mu+\int_{E_{ij}}td\mu=\alpha_i\mu(E_{ij})+\beta_j\mu(E_{ij})$$

ולכן השוויון $(*)$ מתקיים עם E_{ij} במקום X. היות ו-X הוא איחוד מהצורה $X=\cup_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}E_{ij}$ והקבוצות E_{ij} הן זרות זו לזו, התוצאה $(*)$ נובעת מיידית מהחלק הראשון של הטענה, כלומר מכך שמתקיים ש-$\varphi(X)=\varphi\left(\cup_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}E_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n,m}\varphi(E_{ij})$. ■

משפט 3.4 (משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג) תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות על X, ונניח ש-(א) $0\le f_1(x)\le f_2(x)\le\ldots\le\infty$ לכל $x\in X$, ו-(ב) $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}f(x)$ לכל $x\in X$. אזי f מדידה ומתקיים ש-$\int_X f_nd\mu\underset{n\to\infty}{\to}\int_X fd\mu$.

הוכחה: היות ו-$\int_X f_nd\mu\le\int_X f_{n+1}d\mu$ אז יש $\alpha\in[0,\infty]$ כך ש-$\int_X f_nd\mu\underset{n\to\infty}{\to}\alpha$ כי לכל סדרה מונוטונית עולה יש גבול במובן הרחב (אולי אינסוף). ע"פ משפט קודם f מדידה, והיות ש-$f_n\le f$ לכל n אז נובע כי $\int_X f_nd\mu\le\int_X fd\mu$ לכל n ולכן $\alpha\le\int_X fd\mu$. תהי כעת s פונקציה מדידה ופשוטה כך ש-$0\le s\le f$, יהי C קבוע כך ש-$0<c<1$, ונגדיר את הקבוצה $E_n=\{x|f_n(x)\ge c\cdot s(x)\}$ וקל לוודא כי $E_n\in\mathcal{M}$, ובנוסף מתקיים $E_1\subseteq E_2\subseteq\ldots$. מהגדרת E_n נובע כי $X=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$ (כי אם $f(x)=0$ אזי $c\cdot s(x)=0$ וכן $f_n(x)=0$ כך ש-$x\in E_1$. אחרת $f(x)>0$, אזי $c\cdot s(x)<f(x)$ ולכן $x\in E_n$ ל-n מספיק גדול), ומתקיים:

$$\int_X f_nd\mu\ge\int_{E_n}f_nd\mu\ge\int_{E_n}c\cdot sd\mu=c\cdot\int_{E_n}sd\mu$$

ומסעיף (4) ממשפט 2.33 נובע ש-$\alpha\ge c\int_X sd\mu$. היות וזה נכון לכל $c<1$ נובע כי $\alpha\ge\int_X sd\mu$. כיוון שזה נכון לכל s כנ"ל, אז בפרט זה נכון עבור ה-$\int_X fd\mu=\sup\left\{\int_X sd\mu:\text{s is simple and }0\le s\le f\right\}$. ■

משפט 3.5 אם $f_n:X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות ל-$n=1,2,\ldots$ וגם $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ לכל x, אזי

$$\int_X fd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_nd\mu$$

דהיינו:

$$\int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right)d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_X f_nd\mu\right)$$

(כלומר למעשה אנו מוכיחים כי ניתן להחליף את סדר הגבולות / הסכימה)

הוכחה: נראה תחילה כי המשפט נכון עבור סכום סופי. יהיו $\{s_i'\}_{i=1}^{\infty}$ וגם $\{s_i''\}_{i=1}^{\infty}$ סדרות מונוטוניות של פונקציות מדידות פשוטות כך ש-$s_i'\to f_1$ ו-$s_i''\to f_2$. נגדיר $s_i=s_i'+s_i''$, אזי $s_i\to f_1+f_2$. על פי טענה 3.3 נובע כי $\int_X s_id\mu=$

$\int_X s_i' d\mu + \int_X s_i'' d\mu$. בנוסף, על פי משפט 3.4 מתקיים כי

$$\begin{aligned}
\int_X s_i d\mu &\to \int_X (f_1+f_2)\, d\mu \\
\int_X s_i' d\mu &\to \int_X f_1 d\mu \\
\int_X s_i'' d\mu &\to \int_X f_2 d\mu
\end{aligned}$$

ולכן מהטענה הקודמת מתקיים כי $\int_X (f_1+f_2)\, d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$.

כעת נגדיר: $g_N = f_1 + \ldots + f_N$, אזי ע"י הפעלת אינדוקציה על מה זה עתה הראינו, נובע: $\int_X g_N d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n d\mu$. הסדרה $\{g_N\}_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת באופן מונוטונית עולה ל־f, ולכן נובע

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X g_N d\mu = \int_X f d\mu$$

כאשר בשוויון הימני השתמשנו במשפט 3.4. ■

מסקנה 3.6 אם $a_{ij} \geq 0$ עבור $i,j \in \mathbb{N}$, אזי

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

הוכחה: נגדיר פונקציות $f_i : \mathbb{N} \to [0,\infty]$ ע"י $f_i(j) = a_{ij}$. תהי μ מידת המנייה על $\mathbb{N}$ עם ה־σ־אלגברה של כל תת־הקבוצות של $\mathbb{N}$. אזי:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i(j)\right) \\
(*) &= \int_{\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) d\mu \\
(**) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_i d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f_i(j) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}
\end{aligned}$$

כאשר ב־$(*)$ השתמשנו בכך שאינטגרל לפי המידה וה־σ־אלגברה שהגדרנו שקול לסכום האינסופי על כל $\mathbb{N}$ ב־$(**)$ הפעלנו את משפט 3.5. ■

הערה 3.7 באופן יותר כללי מתקיים שעבור כל $f : X \to [0,\infty]$, X קבוצה כלשהי, מתקיים

$$\sum_{x\in X} f(x) = \int_X f(x)\, d\mu$$

עבור μ שהיא מידת המנייה על X עם ה־σ־אלגברה של כל תת־הקבוצות של X. כאשר הגדרנו

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \,|\, \exists n\in\mathbb{N}\forall i\in[n], x_i\in X\right\}$$

למה 3.8 (הלמה של Fatou) יהיו $f_n : X\to[0,\infty]$ לכל $n=1,2,\ldots$ פונקציות מדידות, אזי

$$\int_X \left(\lim\inf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \le \lim\inf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

הוכחה: נגדיר $g_k(x) = \inf_{i\ge k} f_i(x)$ לכל $k\in\mathbb{N}$ ו־$x\in X$. אזי $g_k\le f_k$ ולכן $\int_X g_k d\mu \le \int_X f_k d\mu$ לכל $k\in\mathbb{N}$. כמו כן, $0\le g_1\le g_2\le\ldots$, מתקיים ש־g_k מדידה לפי משפט 2.19, וגם $\lim\inf_{n\to\infty} f_n(x) \underset{k\to\infty}{\to} g_k(x)$. ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית מתקיים

$$\int_X g_k d\mu \underset{k\to\infty}{\to} \int_X \left(\lim\inf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$$

עתה התוצאה נובעת מ־$\int_X g_k d\mu \le \int_X f_k d\mu$ כי

$$\begin{aligned}\lim\inf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu &\ge \lim\inf_{k\to\infty}\int_X g_k d\mu\\ &= \lim_{k\to\infty}\int_X g_k d\mu\\ &= \int_X\left(\lim\inf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu\end{aligned}$$

■

משפט 3.9 נניח ש־$f : X\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה, ונגדיר לכל קבוצה מדידה $E\in\mathcal{M}$: $\varphi(E) = \int_E f d\mu$. אזי φ מידה על $\mathcal{M}$, ולכל פונקציה מדידה כלשהי $g : X\to[0,\infty]$ מתקיים:

$$\int_X g d\varphi = \int_X (g\cdot f)\, d\mu$$

הערה 3.10 ניתן לכתוב את מסקנת המשפט באופן הבא $d\varphi = f d\mu$. זה כתיב פורמלי לכך ש־$\int g d\varphi = \int (gf)\, d\mu$ לכל $g\ge 0$ מדידה.

הוכחה: יהיו $E_1, E_2,\ldots$ קבוצות זרות זו לזו ב־$\mathcal{M}$ שאיחודן הוא E. מתקיים $\chi_E f = \sum_{j=1}^{\infty}\chi_{E_j} f$ וכן $\varphi(E) = \int_X \chi_E f d\mu$ ובאופן דומה $\varphi(E_j) = \int_X \chi_{E_j} f$. עתה לפי משפט החלפת סדר סכימה ואינטגרציה (משפט 3.5) מתקבל ש־$\varphi(E) = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi(E_j)$, שמוכיח את תכונת ה־$\sigma$־אדיטיביות. בנוסף נשים לב כי $\varphi(\emptyset) = 0$ ובכך סיימנו להראות כי φ היא אכן מידה. היות ומתקיים

$$\int_X \chi_E d\varphi = \int_E d\varphi = \varphi(E) = \int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu$$

אז נובע כי $\int_X g d\varphi = \int_X (gf)\, d\mu$ עבור $g\equiv\chi_E$ לכל $E\in\mathcal{M}$. מכאן, קל לראות כי השוויון מתקיים גם עבור כל פונקציה חיובית, מדידה ופשוטה g (כי זאת קומבינציה סופית של פונקציות אופייניות). המקרה הכללי נובע לכן מכך שכל $g\ge 0$ מדידה היא גבול של סדרה מונוטונית עולה של פונקציות פשוטות, ומתוך משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג (משפט 3.4). ■

3.1 אינטגרציה של פונקציות מרוכבות

הגדרה 3.11 בהינתן מידה חיובית $\mathcal{M}$ על מרחב מדיד X, נסמן ב־$\mathcal{L}^1\left(\mu\right)$ (או גם $\mathcal{L}^1\left(X,d\mu\right)$ או $\mathcal{L}^1\left(X,\mu\right)$) את אוסף הפונקציות המרוכבות המדידות f על X שעבורן מתקבל $\int_X \left|f\right| d\mu < \infty$. אברי $\mathcal{L}^1\left(\mu\right)$ נקראים "פונקציות אינטגרביליות Lebesgue ביחס ל־μ".

הערה 3.12 נשים לב כי $\mathcal{L}^1 \neq L^1$. כאשר L^1 הוא המרחב הנורמי של קבוצת מחלקות השקילות של פונקציות ממשיות שמקיימות $\int_X \left|f\right|^1 d\mu < \infty$. יש לשים לב שבספר של רודין משתמשים תמיד בסימון L^1 ומשנה לו את ההגדרה תוך כדי הספר.

הגדרה 3.13 אם $f = u + iv$ כך ש־u,v פונקציות ממשיות מדידות על X, ואם $f \in \mathcal{L}^1\left(\mu\right)$, אזי נגדיר את האינטגרל של f ביחס ל־μ על E בתור:

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i\int_E v^+ d\mu - i\int_E v^- d\mu$$

לכל קבוצה מדידה $E \subseteq X$, כאשר נזכיר כי $u^+ = \max\left(u,0\right)$ ו־$u^- = -\min\left(u,0\right)$.

הערה 3.14 מספר הערות:

1. $f = u^+ - u^- + iv^+ - iv^-$
2. מתקיים ש־$\left|f\right| \leq \left|u\right| \leq u^{\pm} \leq 0$ וגם $\left|f\right| \leq \left|u\right| \leq v^{\pm} \leq 0$, ולכן כל ארבעת האינטגרלים שבהגדרה הם סופיים (כי $\int_X \left|f\right| d\mu < \infty$) ולכן $\int_E f d\mu$ מוגדר היטב ומספר מרוכב (ולא תערובת של האובייקט ∞ עם רחיבים סופיים ממשיים / מדומים).

הגדרה 3.15 לעיתים מגדירים גם אינטגרלים עבור פונקציות $f : X \to \left[-\infty,\infty\right]$ ע"י $\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$ בתנאי שלפחות אחד מהאינטגרלים בסכום הוא סופי. במקרה כזה האינטגרל יכול קבל ערכים בכל $\left[-\infty,\infty\right]$.

משפט 3.16 יהיו $f,g \in \mathcal{L}^1\left(\mu\right)$ ו־$\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, אזי $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1\left(\mu\right)$ ומתקיים:

$$\int_X \left(\alpha f + \beta g\right) d\mu = \alpha\int_X f d\mu + \beta\int_X g d\mu$$

כלומר $\mathcal{L}^1\left(\mu\right)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ (ביחס לחיבור וכפל בסקלר נקודתיים) והאינטגרל הוא פונקציונל לינארי מעל המרחב הוקטורי $\mathcal{L}^1\left(\mu\right)$.

הוכחה: ראינו ש־$\alpha f + \beta g$ היא מדידה. נשים לב ש־

$$\int_X \left|\alpha f + \beta g\right| d\mu =\leq \int_X \left(\left|\alpha\right|\left|f\right| + \left|\beta\right|\left|g\right|\right) d\mu = \left|\alpha\right|\underbrace{\int_X \left|f\right| d\mu}_{<\infty} + \left|\beta\right|\underbrace{\int_X \left|g\right| d\mu}_{<\infty} < \infty$$

ולכן $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1\left(\mu\right)$.

עתה נוכיח כי האינטגרל הוא פונקציונל לינארי. די להראות בנפרד כי

$$(1)\quad \int_X \left(f+g\right) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$
$$(2)\quad \int_X \left(\alpha f\right) d\mu = \alpha\int_X f d\mu$$

כדי להראות את (1) די להראות ל־f ו־g ממשיות כי המקרה המרוכב נובע מההגדרה כחיבור וחיסור פונקציות ממשיות. נסמן $h = f + g$, אזי $h^{+} - h^{-} = f^{+} - f^{-} + g^{+} - g^{-}$ ולכן $h^{+} + f^{-} + g^{-} = f^{+} + g^{+} + h^{-}$. עתה ע"פ משפט החלפת סדר סכימה ואינטגרציה על פונקציות חיוביות (משפט 3.5):

$$\begin{aligned}\int_X h^{+} d\mu + \int_X f^{-} d\mu + \int_X g^{-} d\mu &= \int_X f^{+} d\mu + \int_X g^{+} d\mu + \int_X h^{-} d\mu \\ \Rightarrow \int_X h^{+} d\mu - \int_X h^{-} d\mu &= \int_X f^{+} d\mu - \int_X f^{-} d\mu + \int_X g^{+} d\mu - \int_X g^{-} d\mu\end{aligned}$$

ועל כן הראינו כי $\int (f+g) = \int h = \int f + \int g$.

לגבי (2): עבור $0 \le \alpha \in \mathbb{R}$ אז (2) נובע מההגדרה ומהתכונה $\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu$ עבור פונקציות חיוביות. וע"י קשרים מהסוג $(-v)^{+} = v^{-}$ קל לראות כם את המקרה $\alpha = -1$. נותר עתה רק להראות עבור $\alpha = i$, ונסתכל על $f = u + iv$:

$$\begin{aligned}\int_X (if)\, d\mu &= \int_X (iu - v)\, d\mu \\ \text{Definition} \Rightarrow &= \int_X (-v)\, d\mu + i \int_X u d\mu \\ &= -\int_X v d\mu + i \int_X u d\mu \\ \left(i^2 = -1\right) \Rightarrow &= i \left(\int_X u d\mu + i \int_X v d\mu \right) \\ &= i \int f\end{aligned}$$

כך ע"י חיבור המקרים $\alpha = -1$, $\alpha \ge 0$ ו־$\alpha = i$ עם (1) נובע (2) לכל $\alpha \in \mathbb{C}$. ■

משפט 3.17 אם $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, אזי $\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f|\, d\mu$.

הוכחה: נסמן $z = \int_X f d\mu$, אזי קיים מספר מרוכב α שעבורו $|\alpha| = 1$ ו־$\alpha z = |z|$. תהי $u = \mathrm{Re}(\alpha f)$, אזי $u \le |\alpha f| = |f|$ ולכן

$$\begin{aligned}\left|\int_X f d\mu\right| &= \alpha z = \alpha \int_X f d\mu = \int_X (\alpha f)\, d\mu \\ (*) &= \int_X u d\mu \\ &\le \int_X |f|\, d\mu\end{aligned}$$

כאשר $(*)$ כי $\int_X \alpha f d\mu$ חייב להיות ממשי מהשוויון לערך המוחלט. ■

משפט 3.18 (משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג – Dominated Convergence Theorem) תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות ומרוכבות על X כך שהגבול $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ קיים לכל $x \in X$. אם קיימת פונקציה $0 \le g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ כך ש־$|f_n(x)| \le g(x)$ לכל $x \in X$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ (ועל כן f_n אינטגרבילית מהחסימות), אזי $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

וכן

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

הוכחה: היות ו־$|f| \leq g$ ו־f מדידה, אז $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. היות ו־$|f_n - f| \leq 2g$, ניתן להפעיל את הלמה של Fatou (למה 3.8) על הפונקציות החיוביות $2g - |f_n - f|$ ולקבל:

$$\begin{aligned}
\int_X 2g d\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|)\, d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)\, d\mu \\
&= \int_X 2g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_X |f_n - f|\, d\mu\right) \\
&= \int_X 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu
\end{aligned}$$

היות ו־$\int_X 2g d\mu$ סופי, ניתן לחסר אותו משני אגפי אי השוויון לעיל, ולקבל:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu \leq 0$$

ומכאן ש־$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$. על פי משפט 3.17 נובע:

$$\left|\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f)\, d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. ∎

4 קבוצות בעלות מידה אפס

הגדרה 4.1 תהי P תכונה (או עובדה) שעשוייה להתקיים או שלא להתקיים בנקודה $x \in X$. אם μ מידה על σ־אלגברה $\mathcal{M}$ ב־X, ואם קיימת קבוצה $\mathcal{N} \in \mathcal{M}$ כך ש־$\mu(\mathcal{N}) = 0$ וגם התכונה P מתקיימת לכל $x \in X \backslash \mathcal{N}$, אז נאמר ש־$P$ מתקיימת "כמעט בכל מקום ביחס ל־$[\mu]$" (לפעמים נכתב בתור "כ.ב.מ. $[\mu]$". באנגלית כותבים almost everywhere w.r.t. μ או בקצרה רושמים μ a.e. w.r.t. ויותר בקצרה רושמים $[\mu]$ a.e.). במידה וברור מהי μ, אז נאמר פשוט ש־P מתקיימת כ.ב.מ. (a.e.). עבור $E \in \mathcal{M}$, ניתן גם לדבר על כך ש־P מתקיימת "כ.ב.מ. על E $[\mu]$" אם היא מתקיימת בכל $x \in E \backslash \mathcal{N}$.

הערה 4.2 האות $\mathcal{N}$ מסמנת בד"כ קבוצות ממידה אפס כי קבוצות כאלו לעיתים נקראות null sets. בנוסף, יש שאומרים כמעט תמיד (באנגלית almost always), אך שימוש זה פחות נפוץ ופחות מומלץ.

דוגמא: אם f, g פונקציות מדידות, ואם $\mu(\{x | f(x) \neq g(x)\}) = 0$, אז נאמר ש־$f = g$ כ.ב.מ. $[\mu]$. במקרה כזה גם נכתוב כי $f \sim g$ כאשר "$\sim$" מייצג בהקשר הזה את יחס השקילות בין f ל־g. תזכורת: יחס שקילות $\sim$ מקיים שלוש תכונות, רפלקסיביות $f \sim f$, סימטריות $f \sim g \iff g \sim f$ וטרנזיטיביות $f \sim g \wedge g \sim h \Rightarrow f \sim h$.
אם $f \sim g$, אזי לכל $E \in \mathcal{M}$ מתקיים כי $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

הערה 4.3 ניתן להרחיב את המושג של קבוצות בעלות מידה אפס לקבוצות מחוץ ל־$\mathcal{M}$ ולהגדיר ש־$\mu(\mathcal{N}) = 0$ אם"ם $\mathcal{N} \subseteq E \in \mathcal{M}$ ו־$\mu(E) = 0$.

הגדרה 4.4 מידה μ נקראת שלמה (complete) אם לכל קבוצה $\mathcal{N}$ ממידה אפס (כפי שהוגדרה לעיל) מתקיים ש־$\mathcal{N} \in \mathcal{M}$. כלומר אם ה־$\sigma$־אלגברה מכילה את כל הקבוצות שהן בעלות מידה אפס במובן המורחב.

משפט 4.5 יהי $(X, \mathcal{M}, \mu)$ מרחב מידה, ותהי $\mathcal{M}^*$ אוסף כל תת־הקבוצות E של X שעבורן קיימות קבוצות $A, B \in \mathcal{M}$ כך ש־$A \subseteq E \subseteq B$ ו־$\mu(B \backslash A) = 0$, ונגדיר במצב זה $\mu(E) = \mu(A)$. אזי, $\mathcal{M}^*$ היא σ־אלגברה ו־μ היא מידה על $\mathcal{M}^*$.

הערה 4.6 המידה μ על $\mathcal{M}^*$ המתקבלת בדרך זו היא שלמה. בפרט $\mathcal{M}^*$ נקראת "השלמת μ" (μ-completion) של $\mathcal{M}$.

הוכחה: נבדוק תחילה ש־μ מוגדרת היטב לכל $E \in \mathcal{M}^*$. נניח ש־$A \subseteq E \subseteq B$ וגם $A_1 \subseteq E \subseteq B_1$ כך ש־$A_1, A, B_1, B \in \mathcal{M}$ וגם $\mu(B \backslash A) = \mu(B_1 \backslash A_1) = 0$. היות ו־$A \backslash A_1 \subseteq E \backslash A_1 \subseteq B_1 \backslash A_1$, נובע $\mu(A \backslash A_1) = 0$ ולכן $\mu(A) = \mu(A \cap A_1)$. באותו אופן $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A)$ ולכן $\mu(A) = \mu(A_1)$. לכן μ מוגדרת היטב על $\mathcal{M}^*$.

נבדוק ש־$\mathcal{M}^*$ היא σ־אלגברה: (i) $X \in \mathcal{M}^*$ כי $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^*$. (ii) אם $A \subseteq E \subseteq B$ אזי $B^c \subseteq E^c \subseteq A^c$, היות וגם $A^c \backslash B^c = A^c \cap B = B \backslash A$, אז נובע שלכל $E \in \mathcal{M}^*$ אז גם $E^c \in \mathcal{M}^*$. (iii) אם $A_i \subseteq E_i \subseteq B_i$, $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ ו־$B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, אזי $A \subseteq E \subseteq B$ ומתקיים:

$$B \backslash A = \cup_{i=1}^{\infty} (B_i \backslash A) \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} (B_i \backslash A_i)$$

היות ולאיחוד בן מנייה של קבוצות בעלות מידה אפס יש מידה אפס, נובע $\mu(B \backslash A) = 0$, ולכן $E \in \mathcal{M}^*$. במילים אחרות, אם $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}^*$ אזי $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}^*$. לסיכום, ראינו ש־$\mathcal{M}^*$ היא σ־אלגברה.

נותר להראות ש־μ היא מידה על $\mathcal{M}^*$, כלומר ש־μ היא σ־אדיטיבית על $\mathcal{M}^*$: יהי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}^*$ קבוצות זרות זו לזו, ויהיו B, A, E, A_i, B_i כמו קודם, אזי גם $\{A_i\}_{=1}^{\infty}$ קבוצות זרות זו לזו ולכן נובע:

$$\mu(E) \underset{\text{def. of } \mathcal{M}^*}{=} \mu(A) \underset{\sigma\text{- additive}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \underset{\text{def. of } \mathcal{M}^*}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

■

הגדרה 4.7 בהינתן מרחב מידה $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ו־$E \in \mathcal{M}$ שעבור $\mu(E^c) = 0$. נאמר שהפונקציה $f : E \to Y$ היא פונקציה מדידה על X אם מתקיים ש־$f^{-1}(V) \cap E$ קבוצה מדידה לכל V פתוחה. אם למשל $Y = \mathbb{C}$, ניתן להגדיר $f(x) = 0$ לכל $x \in E^c$ ולקבל פונקציה מדידה ל X במובן הישן. בפרט: ניתן לדבר על "פונקציה מדידה המוגדרת כ.ב.מ. $[\mu]$ על X". עבור פונקצייה מרוכבת כזו נאמר גם שהיא ב־$\mathcal{L}^1(\mu)$ אם $\int_E |f(x)| d\mu < \infty$ ובמקרה כזה נגדיר: $\int_X f d\mu = \int_E f d\mu$.

משפט 4.8 תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מרוכבות מדידות המוגדרות כ.ב.מ. $[\mu]$ על X, כך ש־$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty$, אזי הטור $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס כ.ב.מ. $[\mu]$ על X, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ומתקיים גם $\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$.

הערה 4.9 גם אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרות על כל X, עדיין התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ולכן עצם המוגדרות של f מובטחים רק כ.ב.מ. $[\mu]$.

הוכחה: תהי S_n הקבוצה עליה מוגדרת f_n כך ש־$\mu(S_n^c) = 0$. נגדיר $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ כל $x \in S = \cap_{n=1}^{\infty} S_n$, אזי $\mu(S^c) = 0$. ע"פ משפט החלפת סדר סכימה ואינטגרציה לפונקציות חיוביות (משפט 3.5), מתקיים:

$$\int_S \varphi d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S |f_n| d\mu < \infty$$

ולכן אם נגדיר $E = \{x \in S | \varphi(x) < \infty\}$ אז נובע ש־$\mu(E^c) = 0$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מכנס בהחלט לכל $x \in E$, ולכן לכל $x \in E$ מתקיים כי $f(x)$ מוגדרת היטב ומתקיים $|f(x)| \le \varphi(x)$, ולכן $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. עבור $g_N = f_1 + f_2 + \ldots + f_N$, וכמובן מתקיים ש־$|g_N| \le \varphi$ וגם $g_N(x) \underset{N \to \infty}{\to} f(x)$ לכל $x \in E$, ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת (משפט 3.18) נובע:

$$\begin{aligned}
\int_E f d\mu &= \lim_{N \to \infty} \int_E g_N d\mu \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu
\end{aligned}$$

היות ו־$\mu(E^c)=0$, אז ניתן בתחום האינטגרציה להחליף את E ב־X. ■

משפט 4.10 מתקיים הטענות הבאות:

1. אם $f:X\to[0,\infty]$ מדידה, $E\in\mathcal{M}$ ו־$\int_E fd\mu=0$, אזי $f(x)=0$ כ.ב.מ. $[\mu]$ על E.
2. אם $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ ואם $\int_E fd\mu=0$ לכל $E\in\mathcal{M}$, אזי $f(x)=0$ כ.ה.מ. $[\mu]$ על X.
3. אם $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ ואם $\left|\int_X fd\mu\right|=\int_X|f|\,d\mu$, אזי קיים קבוע α כך ש־$\alpha f=|f|$ כ.ב.מ. $[\mu]$ על X.

הוכחה: נוכיח את הטענות:

1. נגדיר $A_n=\left\{x\in E|f(x)>\frac{1}{n}\right\}$ לכל n טבעי, אזי

$$\frac{1}{n}\mu(A_n)\le\int_{A_n}fd\mu\le\int_E fd\mu=0$$

ולכן $\mu(A_n)=0$. היות ו־$\{x\in E|f(x)>0\}=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$, נובע $\mu(\{x\in E|f(x)>0\})=0$.

2. נסמן $f=u+iv$, וגם $E=\{x:u(x)\ge0\}$. החלק הממשי של $\int_E fd\mu$ שקול ממש ל־$\int_E u^+d\mu$ ולכן $\int_E u^+d\mu=0$ ומ־(1) נובע כי $u^+=0$ כ.ב.מ. $[\mu]$. באותו אופן מראים גם ש־$u^-=v^+=v^-=0$ כ.ב.מ. $[\mu]$.

3. נגדיר את α, עם $|\alpha|=1$ להיות שעבורו $\alpha z=|z|$ עבור $z=\int_X fd\mu$, ובנוסף $u=\operatorname{Re}(\alpha f)$. ראינו כי

$$\left|\int_X fd\mu\right|=\alpha\int_X fd\mu=\int_X\alpha fd\mu=\int_X ud\mu$$

ולכן לפי ההנחה נובע כי $\int_X|f|\,d\mu=\int_X ud\mu$, ומכאן גם $\int_X(|f|-u)\,d\mu=0$, היות ו־$|f|-u\ge0$, אז נובע מ־(1) ש־$|f|-u=0$ כ.ב.מ. $[\mu]$, כלומר ש־$|f|=u$ כ.ב.מ. $[\mu]$ ולכן $|\alpha f|=\operatorname{Re}(\alpha f)$ כ.ב.מ. $[\mu]$. מכאן $\alpha f=|\alpha f|=|f|$ כ.ב.מ. $[\mu]$.

■

משפט 4.11 נניח ש־$\mu(X)<\infty$, $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $S\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה סגורה ו־$A_E(f)\equiv\frac{1}{\mu(E)}\int_E fd\mu\in S$ לכל $E\in\mathcal{M}$ עם $\mu(E)>0$. אזי $f(x)\in S$ כ.ב.מ. $[\mu]$.

הוכחה: יהי Δ עיגול סגור בעל מרכז α ורדיוס $r>0$ במשלים של S. היות ו־S^c קבוצה פתוחה ולכן הוא איחוד בן מנייה של עיגולים כאלה, די להראות ש־$\mu(E)=0$ עבור $E=f^{-1}(\Delta)$. נניח בשלילה ש־$\mu(E)>0$, אזי:

$$\begin{aligned}|A_E(f)-\alpha|&=\frac{1}{\mu(E)}\left|\int_E(f-\alpha)\,d\mu\right|\\&\le\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f-\alpha|\,d\mu\le r\end{aligned}$$

וזה לא ייתכן כי $A_E(f)\in E$ ולכן לא בתוך העיגול ולכן $\mu(E)=0$. ■

משפט 4.12 תהי $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות מדידות ב־X שעבורה $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<\infty$, אזי כמעט כל $x\in X$ ביחס ל־μ נמצא לכל היותר במספר סופי מתוך הקבוצות $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$.

הוכחה: תהי A קבוצת ה־x־ים שנמצאים באינסוף קבוצות מתוך $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$. נראה ש־$\mu(A)=0$. נגדיר $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)$ לכל $x\in X$, אזי $x\in A$ אם"ם $g(x)=\infty$. אבל

$$\begin{aligned}\int_X g d\mu &= \int_X \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)\,d\mu\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_X \chi_{E_k}(x)\,d\mu\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<\infty\end{aligned}$$

ולכן $g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ ונובע ש־$g(x)<\infty$ כ.ב.מ. $[\mu]$, ונובע ש־$\mu(A)=0$. ■

הערה 4.13 מספר הערות:

1. אם $\mu(X)<\infty$ אזי קיים גם כיוון שני למשפט (תרגיל). דהיינו, $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<\infty$ אם"ם A לעיל מקיימת $\mu(A)=0$. במקרה כזה המשפט נקרא "הלמה של Borel-Cantelli".
2. את A ניתן לבטא כ־$A=\cap_{k=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty}E_k=\limsup_{k\to\infty}E_k$. קיים גם המושג של קבול תחתון $\liminf_{k\to\infty}E_k=\cup_{n=1}^{\infty}\cap_{k=n}^{\infty}E_k$, זוהי הקבוצה שכל נקודה בה נמצאת בכל ה־E_k־ים פרט אולי למספר סופי.

5 משפט ההצגה של ריס (Riesz)

5.1 מבוא לטופולוגיה

הגדרה 5.1 יהי Y מרחב טופולוגי:

1. $E\subseteq Y$ נקראת סגורה אם E^c פתוחה.
2. הסגור של E, מסומן ע"י $\bar{E}$, הוא הקבוצה הסגורה הקטנה הביותר המכילה את E (קל להראות כי הוא תמיד קיים).
3. $K\subseteq Y$ נקראת קומפקטית אם מכל כיסוי פתוח של K ניתן למצוא תת־כיסוי סופי. בפרט, אם Y קופקטית, אזי Y נקרא מרחב טופולוגי קומפקטי.
4. סביבה של נקודה $p\in Y$ היא קבוצה פתוחה המכילה את p.
5. Y נרא מרחב האוסדורף (Hausdorff) אם לכל $p,q\in Y$ כך ש־$p\neq q$, קיימות סביבות $p\in U$ ו־$q\in V$ כך ש־$U\cap V=\emptyset$.
6. Y נקרא קומפקטי מקומית (locally compact) אם לכל נקודה $p\in Y$ יש סביבה שהסגור שלה קומפקטי.
7. Y נקרא σ־קומפקטי (σ-compact) אם Y היא איחוד בן מנייה של קבוצות קומפקטיות.
8. פונקצייה $f:Y\to\mathbb{C}$ נקראת בעלת תומך קומפקטי אם יש $K\subseteq Y$ קומפקטית כך ש־$f(x)=0$ ל־$x\notin K$.
נסמן ב־$C_c(Y)$ את אוסף הפונקציות הרציפות בעלות תומך קומפקטי על Y (זהו לא סימון אוניברסלי, לפעמים משתמשים גם ב־$C_0(Y)$). קל לראות כי $C_c(Y)$ הוא מרחב וקטורי.
הערה: באופן כללי הסגור של $\{x|f(x)\neq 0\}$ נקרא התומך של f.

הערה 5.2 מספר ההערות על ההגדרות הנ"ל:

1. מרחב טופולוגי קומפקטי הוא קומפקטי מקומית.
2. ב־$\mathbb{R}^n$ הקבוצות הקומפקטיות הן בדיוק אלו שהן סגורות וחסומות (משפט היינה־בורל).
3. $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב האוסדורף שהוא גם קומפקטי מקומית וגם σ־קומפקטי.
4. ברור שכל מרחב מטרי הוא מרחב האוסדורף.

משפט 5.3 אם X מרחב טופולוגי ו־$F \subseteq K \subseteq X$ כאשר K קומפקטית ו־F סגורה, אזי F קומפקטית.

מסקנה 5.4 אם $A \subseteq B$ ול־B יש סגור קומפקטי, אזי גם ל־A יש סגור קומפקטי.

משפט 5.5 אם X מרחב האוסדורף, $K \subseteq X$ קומפקטית ו־$p \in K^c$, אזי יש קבוצות פתוחות $U, W \subseteq X$ כך ש־$p \in U$, $K \subseteq W$ ו־$U \cap W = \emptyset$.

מסקנה 5.6 שתי מסקנות מהמשפט הקודם:

1. קבוצה קומפקטית במרחב האוסדורף היא סגורה.
2. במרחב האוסדורף אם F סגורה ו־K קומפקטית, אזי $F \cap K$ קומפקטית.

משפט 5.7 אם $\{K_\alpha\}$ אוסף קבוצות קומפקטיות במרחב האוסדורף וגם מתקיים כי $\cap_\alpha K_\alpha = \emptyset$, אזי קיים גם תת־אוסף סופי מתוך $\{K_\alpha\}$ שהוא בעל חיתוך ריק.

משפט 5.8 אם U קבוצה פתוחה במרחב האוסדורף קומפקטי מקומית ו־$K \subseteq U$ קומפקטית, אזי יש קבוצה פתוחה V בעלת סגור קומפקטי כך ש־$K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

הגדרה 5.9 יהיו X מרחב טופולוגי ו־$f : X \to [-\infty, \infty]$.

1. f נקראת סמי־רציפה מלרע (lower semi-continuous) אם לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, הקבוצה $\{x | f(x) > \alpha\}$ היא פתוחה.
2. f נקראת סמי־רציפה מלעיל (upper semi-continuous) אם לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, הקבוצה $\{x | f(x) < \alpha\}$ היא פתוחה.

הערה 5.10 הערות:

1. f היא רציפה אם"ם היא גם סמי־רציפה מלעיל וגם סמי־רציפה מלרע.
2. פונקציה אופיינית של קבוצה פתוחה היא סמי־רציפה מלרע.
3. פונקציה אופיינית של קבוצה סגורה היא סמי־רציפה מלעיל.
4. אם $\{f_\alpha\}$ משפחת פונקציות סמי־רציפות מלרע, אזי $\sup_\alpha f_\alpha$ סמי־רציפה מלרע.
אם $\{f_\alpha\}$ משפחת פונקציות סמי־רציפות מלעיל, אזי $\inf_\alpha f_\alpha$ סמי־רציפה מלעיל.

משפט 5.11 יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו־$f : X \to Y$ רציפה, אזי לכל $K \subseteq X$ קומפקטית, $f(K)$ קומפקטית.

מסקנה 5.12 הטווח של כל $f \in C_c(X)$ הוא קבוצה קומפקטית ב־$\mathbb{C}$.

סימונים (עבור מרחב טופולוגי X):

- הסימון $K \prec f$ משמעו ש־K קבוצה קומפקטית, $f \in C_c(X)$, $\forall x \in X, 0 \le f(x) \le 1$ ו־$f(x) = 1$ ל־$x \in K$.
- הסימון $f \prec V$ משמעו ש־V קבוצה פתוחה, $f \in C_c(X)$, $\forall x \in X, 0 \le f(x) \le 1$, והתומך ש־$f$ מוכל ב־V.

- הסימון $K\prec f\prec V$ משמעו שמתקיימים שני התנאים לעיל, כלומר גם $K\prec f$ וגם $f\prec V$.

משפט 5.13 (הלמה של Urysohn) אם X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית, V פתוחה ו־$K\subseteq V$ קומפקטית, אזי קיימת $f\in C_c\left(X\right)$ כך ש־$K\prec f\prec V$.

הערה 5.14 למעשה המשפט הזה מאפשר לנו לקרב פונקציות אופייניות של קבוצות קומפקטיות ע"י פונקציות רציפות.

משפט 5.15 יהיו $V_1,\ldots,V_n$ קבוצות פתוחות במרחב האוסדורף קומפקטי מקומית X ותהי $K\subseteq X$ קבוצה קומפקטית כך ש־$K\subseteq\cup_{i=1}^{n}V_i$, אזי קיימות פונקציות $h_i\prec V_i$ עבור $i=1,\ldots,n$ כך ש־$h_1\left(x\right)+\ldots+h_n\left(x\right)=1$ לכל $x\in K$.

הערה 5.16 אוסף $\left\{h_1,\ldots,h_n\right\}$ כנ"ל נקרא חלוקה של היחידה על K הכפופה לכיסוי $\left\{V_1,\ldots,V_n\right\}$.

5.2 משפט ההצגה

משפט 5.17 (משפט ההצגה של Riesz – ניסוח במרחב שאינו σ־קומפקטי) יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית ויהי Λ פונקצינל לינארי חיובי על $C_c\left(X\right)$. אזי, קיימת σ־אלגברה $\mathcal{M}$ ב־X שמכילה את כל קבוצות בורל ב־X וקיימת מידה חיובית יחידה μ על $\mathcal{M}$, כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. $\Lambda f=\int_X fd\mu$ לכל $f\in C_c\left(X\right)$.
2. $\mu\left(K\right)<\infty$ לכל $K\subseteq X$ קומפקטית.
3. $\mu\left(E\right)=\inf\left\{\mu\left(V\right)|E\subseteq V,\ V\text{ is open}\right\}$ לכל $E\in\mathcal{M}$.
4. $\mu\left(E\right)=\sup\left\{\mu\left(K\right)|K\subseteq E,K\text{ is compact}\right\}$ לכל $E\in\mathcal{M}$ שעבורה $\mu\left(E\right)<\infty$ וכן עבור כל E פתוחה.
5. אם $E\in\mathcal{M}$, $A\subseteq E$ ו־$\mu\left(E\right)=0$ אזי $A\in\mathcal{M}$ (כלומר μ היא מידה שלמה).

הערה 5.18 הערות על המשפט:

1. פונקציונל לינארי על $C_c\left(X\right)$ נקרא חיובי אם $\Lambda\left(f\right)\geq0$ לכל $f\geq0$.
2. תהי μ מידת בורל על מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית, אזי μ נקראת רגולרית אם לכל קבוצה מדידה E:

$$\mu\left(E\right)=\inf\left\{\mu\left(V\right)|E\subseteq V,\ V\text{ is open}\right\}$$

כאשר התכונה הנ"ל בפני עצמה נקראת רגולריות חיצונית. באופן דומה:

$$\mu\left(E\right)=\sup\left\{\mu\left(K\right)|K\subseteq E,\ K\text{ is compact}\right\}$$

נקראת רגולריות פנימית.
במשפט הנ"ל ל־μ יש את תכונת הרגולריות החיצונית, אבל לגמרי את תכונת הרגולריות הפנימית (רק על קבוצות ממידה סופית).

מסקנה 5.19 (משפט ההצגה של Riesz – ניסוח במרחב σ־קומפקטי) יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית ו־σ־קומפקטי, ויהי Λ פונקציונל לינארי חיובי על $C_c\left(X\right)$. אזי, קיימת מידת בורל רגולרית יחידה μ על X, כך ש־$\Lambda f=\int_X fd\mu$ לכל $f\in C_c$.

הערה 5.20 קיים משפט נוסף הנקרא משפט ההצגה של Riesz שמראה שבמרחב מכפלה פנימית V, לכל פונקציונל לינארי $f\left(x\right)$ קיים איבר $w\in V$ כך שלכל $x\in V$ מתקיים כי $f\left(x\right)=\left\langle w,x\right\rangle$. נשים לב כי אם X הוא קבוצה סופית בגודל n עם הטופולוגיה הדיסקרטית, אז כל פונקציה על X היא רציפה, ולכן $C_c\left(X\right)$ איזומורפי ל־$\mathbb{R}^n$, ולכל מידה μ, מתקיים למעשה כי $\int_X fd\mu=\sum_{i=1}^{n}f\left(a_i\right)\mu\left(a_i\right)$ כאשר $X=\left\{a_1,\ldots,a_n\right\}$, כלומר אם נסמן $x_i=f\left(a_i\right)$ ו־$w_i=\mu\left(a_i\right)$ אז נקבל כי לפי המשפט מתקיים כי $\Lambda f=\left\langle x,w\right\rangle$, בדיוק לפי המשפט על מרחבי מכפלה פנימית.

הוכחה: (המשפט) נוכיח תחילה יחידות. דהיינו, נניח שבתנאי המשפט קיימות שתי מידות μ_1, μ_2 המקיימות את תנאים (1) עד (5), ונראה כי $\mu_1 = \mu_2$. מתוך (4) ו־(3) נובע שמספיק להראות כי $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ לכל K קומפקטיות. נקבע K קומפקטית, אזי ע"פ (2) ו־(3) נובע שיש V פתוחה, $K \subseteq V$, כך ש־$\mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon$. ע"פ הלמה של Urylsohn יש $K \prec f \prec V$ ($f \in C_c(X)$) ולכן

$$\mu_1(K) = \int_X \chi_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \leq \int_X X_V d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon$$

כאשר השתמשנו כאן ברציפות f, ובכך ש־$\chi_K \leq f \leq \chi_V$. מכאן $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. היות ובאותו אופן (החלפת 1 ו־2) נובע גם $\mu_2(K) \leq \mu_1(K)$, רואים ש־$\mu_1(K) = \mu_2(K)$ ולכן הוכחנו את היחידות (בדרך אגב, ראינו פה גם ש־(1) גורר את (2)).

כעת נבנה את μ ו־$\mathcal{M}$. לכל קבוצה פתוחה V ב־X נגדיר

$$(*) \qquad \mu(V) = \sup\{\Lambda f | f \prec V\}$$

ולכל $E \subseteq X$ נגדיר לפי תנאי (3):

$$(**) \qquad \mu(E) = \inf\{\mu(V) | E \subseteq V \wedge \ V \text{ is open}\}$$

היות ו־$(*)$ מבטיח $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$ אם $V_1 \subseteq V_2$, ברור ש־$(**)$ מגדיר היטב את $\mu(E)$ כי הוא מתאחד עם $(*)$ ל־E פתוחה. נגדיר כעת את $\mathcal{M}_F$ להיות אוסף תת־הקבוצות E של X שמקיימות את שני התנאים הבאים: $\mu(E) < \infty$ וגם $\mu(E) = \sup\{\mu(K) | K \subseteq E, \ K \text{ is compact}\}$. עתה נגדיר את $\mathcal{M}$ להיות אוסף תת הקבוצות E של X שמקיימות $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ לכל K קומפקטית. נותר כעת להראות של־$\mathcal{M}$ ול־μ (על $\mathcal{M}$) יש את התכונות הדרושות.

ראשית ברור ש־μ מונוטונית (כי אם $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$), וש־$\mu(E) = 0$ גורר כי $E \in \mathcal{M}_F$ ולכן $E \in \mathcal{M}$ ולכן תנאי (5) מתקיים. בנוסף ברור שתנאי (3) מתקיים על פי ההגדרה. ההוכחה מכאן ואלך תתבסס על סדרת טענות:

1. טענה 1: (תת־אדיטיביות) $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ לכל $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ כך ש־$E_i \subseteq X$ לכל i (דהיינו, μ מידה חיצונית על X).

   הוכחה: נראה תחילה $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$ ל־V_1 ו־V_2 פתוחות. נבחר $g \prec V_1 \cup V_2$, אזי יש פונקציות[1] h_1, h_2 כך ש־$h_i \prec V_i$ עבור $i \in \{1,2\}$ ו־$h_1(x) + h_2(x) = 1$ על התומך של g, לכן $h_i g \prec V_i$ ו־$g = h_1 g + h_2 g$, ולכן:

   $$\Lambda g = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$$

   היות וזה נובע לכל $g \prec V_1 \cup V_2$, נובע כי $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$.
   אם $\mu(E_i) = \infty$ לאיזשהו i, הטענה ברורה. אחרת, $\forall i, \mu(E_i) < \infty$, ויהי $\epsilon > 0$, אזי קיימות קבוצות פתוחות $E_i \subseteq V_i$ כך ש־$\mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\epsilon$ לכל i. תהי $V = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$ ונבחר $f \prec V$, היות ו־f בעלת תומך קומפקטי, נובע שיש n סופי כך ש־$f \prec \cup_{i=1}^{n} V_i$. עתה, ע"י הפעלת אינדוקציה על $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$, נובע כי

   $$\Lambda f \leq \mu(\cup_{i=1}^{n} V_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu(E_i) + 2^{-i}\epsilon\right) = \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

   היות וזה נכון לכל $f \prec V$ והיות ש־$\cup_{i=1}^{\infty} \subseteq V$, נובע כי:

   $$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \mu(V) \leq \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

   כיוון ש־ϵ נבחר שרירותית, אז הטענה נובעת מאי השוויון לעיל.

---

[1] מקרה פרטי של טענה שרשמו בעקבות הלמה של Urylsohn

2. טענה 2: אם K קומפקטית, אזי $K \in \mathcal{M}_F$ ו־$\mu(K) = \inf\{\Lambda f : K \prec f\}$ (ולכן בפרט $\mu(K) < \infty$), כך שתנאי (2) של המשפט מתקיים).
הוכחה: אם $K \prec f$ ו־$0 < \alpha < 1$, נגדיר $V_\alpha = \{x | f(x) > \alpha\}$, אזי V_α פתוחה, $K \subseteq V_\alpha$ ו־$\alpha g \leq f$ לכל $g \prec V_\alpha$, ולכן:

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup\{\Lambda g | g \prec V_\alpha\} \leq \alpha^{-1}\Lambda f$$

עתה, ע"י לקיחת הגבול $\alpha \to 1$, נובע $\mu(K) \leq \Lambda f$ ובפרט $\mu(K) < \infty$, וברור שגם

$$\mu(K) = \sup\left\{\mu\left(\tilde{K}\right) | \tilde{K} \subseteq K,\ \tilde{K} \text{ is compact}\right\}$$

כלומר, $K \in \mathcal{M}_F$. אם $\epsilon > 0$, יש V פתוחה $K \subseteq V$, כך ש־$\mu(V) < \mu(K) + \epsilon$ (מהגדרת μ). ע"פ הלמה של Urylsohn יש $K \prec f \prec V$ ולכן $\Lambda f \leq \mu(V) < \mu(K) + \epsilon$ ומכאן נובעת הטענה.

3. טענה 3: לכל קבוצה פתוחה V מתקיים: $\mu(V) = \sup\{\mu(K) | K \subseteq V,\ K \text{ is compact}\}$. בפרט כל קבוצה פתוחה V שעבורה $\mu(V) < \infty$ היא ב־$\mathcal{M}_F$.
הוכחה: יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש־$\alpha < \mu(V)$. קיים $f \prec V$ כך ש־$\alpha < \Lambda f$ ונסמן K בתור התומך של f. אם W קבוצה פתוחה כך ש־$K \subseteq W$, אזי $f \prec W$ ולכן $\Lambda f \leq \mu(W)$ ולכן: $\alpha < \Lambda f \leq \mu(K)$ (כי $\mu(K)$ הוא האינפימום על $\mu(W)$). כלומר, לכל $\alpha < \mu(V)$ יש $K \subseteq V$ קומפקטית כך ש־$\mu(K) \geq \alpha$ ומכאן ברור שנובעת הטענה.

4. טענה 4: נניח ש־$E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ עבור סדרה $E_1, E_2, \ldots$ של קבוצות זרות זו לזו ב־$\mathcal{M}_F$, אזי $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. אם בנוסף $\mu(E) < \infty$ אזי $E \in \mathcal{M}_F$.
הוכחה: נראה תחילה $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$ עבור K_1 ו־K_2 קומפקטיות וזרות זו לזו, ונסמן משווה זו ב־$(*)$. ע"פ הלמה של Urylsohn יש $f \in C_c(X)$ כך ש־$f(x) = 1$ על K_1 ו־$f(x) = 0$ על K_2 וגם $0 \leq f \leq 1$ [2]. ע"פ טענה קודמת, יש $g \in C_c(X)$ כך ש־$K_1 \cup K_2 \prec g$ ו־$\Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2)$, וכמו כן מתקיים $K_1 \prec fg$ ו־$K_2 \prec (1-f)g$, ומלינאריות Λ נובע:

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \Lambda(fg) + \Lambda(g - fg) = \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon$$

וכיוון שהנ"ל נכון לכל ϵ, אזי $\mu(E_1) + \mu(E_2) \leq \mu(K_1 \cup K_2)$. מטענה 1 מתקיים גם אי השוויון בכיוון ההפוך, ומכך נובע השוויון ב־$(*)$.
במקרה ש־$\mu(E) = \infty$, הטענה מתקיימת באופן טריוויאלי ע"פ טענה 1. אחרת $\mu(E) < \infty$, ונבחר $\epsilon > 0$. היות ו־$E_i \in \mathcal{M}_F$, אז קיימות קבוצות קומפקטיות $H_i \subseteq E_i$ כך ש־$\mu(H_i) > \mu(E_i) - 2^{-i}\epsilon$. לכן, ע"י לקיחת $K_n = \cup_{i=1}^{n} H_i$ ואינדוקציה על $(*)$ נובע:

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\right) - \epsilon$$

כיוון שהנ"ל נכון לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $\epsilon > 0$, ולכן: $\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. מטענה 1 ראינו שמתקיים אי השוויון ההפוך, ולכן מתקבל $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. כדי לראות ש־$\mu(E) < \infty$ גורר $E \in \mathcal{M}_F$ נשים לב שאם $\mu(E) < \infty$, אזי לכל $\epsilon > 0$ קיים N שעבורו $\mu(E) \leq \epsilon + \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i)$, ולכן $\mu(E) \leq \mu(K_N) + 2\epsilon$, ומכאן $\mu(E) = \sup\{\mu(K) | K \subseteq E,\ K \text{ is compact}\}$, ולכן $E \in \mathcal{M}_F$.

5. טענה 5: אם $E \in \mathcal{M}_F$ ו־$\epsilon > 0$, אזי יש K קומפקטית ו־V פתוחה כך ש־$K \subseteq E \subseteq V$ ו־$\mu(V \backslash K) < \epsilon$.
הוכחה: ברור שיש $K \subseteq E \subseteq V$ כך ש־$\mu(V) - \frac{\epsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K) + \frac{\epsilon}{2}$, היות ש־$V \backslash K$ פתוחה אז נובע מטענה 3 ש־$V \backslash K \in \mathcal{M}_F$, ולכן לפי טענה 4 מתקיים $\mu(K) + \mu(K \backslash V) = \mu(V) < \mu(K) + \epsilon$ ולכן $\mu(K \backslash V) < \infty$.

6. טענה 6: אם $B, A \in \mathcal{M}_F$ אזי $A \backslash B, A \cup B, A \cap B \in \mathcal{M}_F$.
הוכחה: אם $\epsilon > 0$, נובע מטענה 5 שיש קבוצות קומפקטיות K_i ופתוחות V_i כך ש־$K_1 \subseteq A \subseteq V_1$ ו־$K_2 \subseteq B \subseteq V_2$, כאשר $\mu(V_i \backslash K_i) < \epsilon$ עבור $i = 1, 2$. היות ו־$A \backslash B \subseteq V_1 \backslash K_2 \subseteq (V_1 \backslash K_1) \cup (K_1 \backslash V_2) \cup (V_2 \backslash K_2)$ אז נובע מטענה 1 כי $\mu(A \backslash B) \leq \epsilon + \mu(K_1 \backslash V_2) + \epsilon$. היות ו־$K_1 \backslash V_2$ היא תת קבוצה קומפקטית של $A \backslash B$, נובע מכך ש־$A \backslash B$ מקיימת את התנאי הדרוש להיות ב־$\mathcal{M}_F$. היות ו־$A \cup B = (A \backslash B) \cup B$, אז נובע מטענה 4 ש־$A \cup B \in \mathcal{M}_F$. היות וגם $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$ אז נובע גם כי $A \cap B \in \mathcal{M}_F$.

[2] נובע מכך שמדובר במרחב האוסדורף, ולכן ניתן להפריד קבוצות קומפקטיות זרות ע"י קבוצות פתוחות שמכילות כל אחת מהן

7. טענה 7: $\mathcal{M}$ היא σ־אלגברה ב־X המכילה את כל קבוצות בורל.
הוכחה: תהי K קומפקטית. אם $A \in \mathcal{M}$, אזי $A^c \cap K = K \backslash (A \cap K)$ ולכן $A^c \cap K \in \mathcal{M}_F$ (כהפרש קבוצת ב־$\mathcal{M}_F$), כלומר $A \in \mathcal{M}$ גורר גם $A^c \in \mathcal{M}$.
נניח כעת $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ כאשר $A_i \in \mathcal{M}$. נגדיר $B_1 = A_1 \cap K$ ול־$n > 1$ נגדיר $B_n = (A_n \cap K) \setminus \left(\cup_{i=1}^{n-1} B_i\right)$, אזי $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קבוצות זרות ב־$\mathcal{M}_F$ (אינדוקציה על טענה 6). מתקיים $A \cap K = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, ולכן נובע מטענה 4 ש־$A \cap K \in \mathcal{M}_F$, ולכן $A \in \mathcal{M}$.
לבסוף, אם C סגורה, אזי $C \cap K$ היא קבוצה קומפקטית, ולכן $C \cap K \in \mathcal{M}_F$ ולכן $C \in \mathcal{M}$. בפרט, X בתור קבוצה סגורה מקיים $X \in \mathcal{M}$. על כן הראינו כי $\mathcal{M}$ היא σ־אלגברה המכילה את כל הקבוצות הסגורות, ולכן גם את כל קבוצות בורל.

8. טענה 8: $\mathcal{M}_F$ כוללת בדיוק את אברי $\mathcal{M}$ שעבורם μ סופית (וזה מוכיח את תנאי (4) של המשפט).
הוכחה: אם $E \in \mathcal{M}_F$, אז נובע מטענות 2 ו־6 ש־$E \cap K \in \mathcal{M}_F$ לכל K קומפקטית, ולכן $E \in \mathcal{M}$ (כלומר $\mathcal{M}_F \subseteq \mathcal{M}$).
נניח ש־$E \in \mathcal{M}$ ו־$\mu(E) < \infty$ ונבחר $\epsilon > 0$. קיימת קבוצה פתוחה $E \subseteq V$ עם $\mu(V) < \infty$. ע"פ טענות 3 ו־5 יש קבוצה קומפקטית $K \subseteq V$ עם $\mu(V \backslash K) < \infty$. היות ו־$E \cap K \in \mathcal{M}_F$ אז יש קבוצה קומפקטית $H \subseteq E \cap K$ כך ש־$\mu(E \cap K) < \mu(H) + \epsilon$. היות ו־$E \subseteq (E \cap K) \cup (V \backslash K)$ כאשר $E \cap K$ ו־$V \backslash K$ הן זרות, אז

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \backslash K) < \mu(H) + 2\epsilon$$

וכיוון ש־ϵ שרירותי אז E מקיימת את התכונה הדרושה כך ש־$E \in \mathcal{M}_F$.

9. טענה 9: μ היא מידה על $\mathcal{M}$.
הוכחה: נובע מיידית מטענות 4 ו־8 (כי σ־אדיטיביות מתקיימת באופן טריוויאלי כאשר אחת הקבוצות ממידה אינסופית, והמקרים האחרים נובעים מה־σ־אדיטיביות שהוכחנו עבור $\mathcal{M}_F$ בטענה 4).

10. טענה 10: לכל $f \in C_c(X)$, מתקיים כי $\Lambda f = \int_X f d\mu$ (דהיינו, מתקיים תנאי (1) במשפט).
הוכחה: ראשית, מספיק להראות כי לכל $f \in C_c(X)$ ממשית מתקיים $\Lambda f \leq \int_X f d\mu$: כי אז ל־$f$־ כזאת נובע גם ש־

$$-\Lambda f \leq \int_X (-f)\, d\mu = -\int_X f d\mu$$

ולכן $\Lambda f \geq \int_X f d\mu$, ומכאן $\Lambda f = \int_X f d\mu$, ומהלינאריות של Λ והאינטגרל אז השוויון מתקיים גם לכל $f \in C_c(X)$ מרוכבת.
בהינתן $f \in C_c(X)$ ממשית, תהי K התומך הקומפקטי של f, ויהי $[a,b]$ קטע המכיל את הטווח של f. יהי $\epsilon > 0$ כלשהו, ונבחר $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ כך ש־$y_i - y_{i-1} < \epsilon$ וגם $y_0 < a < y_1 < \ldots < y_n = b$. נגדיר $E_i = \{X | y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K$ עבור $i = 1, \ldots, n$. היות ו־f רציפה היא מדידה בורל ולכן הקבוצות E_i הן קבוצות בורל זרות, שאיחודן הוא K. לכן יש קבוצות פתוחות $E_i \subseteq V_i$ כך ש־$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\epsilon}{n}$ עבור $i = 1, \ldots, n$ וכך ש־$f(x) < y_i + \epsilon$ לכל $x \in V_i$. כמו כן, יש פונקציות $h_i \prec V_i$ כך ש־$\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$ על K ולכן $f = \sum_i h_i f$ ומטענה 2 נובע ש־$\mu(K) \leq \Lambda\left(\sum_i h_i\right) = \sum \Lambda(h_i)$.
היות ו־$h_i f \leq (y_i + \epsilon) h_i$ וכן $y_i - \epsilon < f(x)$ על E_i, נובע:

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \sum_{i=1}^{n} \Lambda(h_i f) \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + \epsilon) \Lambda h_i = \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \epsilon) \Lambda h_i - |a| \sum_{i=1}^{n} \Lambda h_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \epsilon) \left(\mu(E_i) + \frac{\epsilon}{n}\right) - |a| \mu(K) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \epsilon) \mu(E_i) + 2\epsilon\mu(K) + \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \epsilon) \\
&\leq \int_X f d\mu + \epsilon \left[2\mu(K) + |a| + b + \epsilon\right]
\end{aligned}$$

היות ו־ϵ שרירותי אזי $\Lambda f \leq \int_X f d\mu$.

■

עובדה: (משפט שלא נוכיח) יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית שבו כל קבוצה פתוחה היא σ־קומפקטית, ותהי μ מידת בורל על X בעלת התכונה ש־$\mu(K) < \infty$ לכל קבוצה קומפקטית K, אזי μ רגולרית.

5.3 מידת לבג

אינטגרל רימן $\int_{\mathbb{R}^k} fdx$ מוגדר היטב וסופי לכל $f \in C_c\left(\mathbb{R}^k\right)$ ומגדיר פונקציונל לינארי על $C_c\left(\mathbb{R}^k\right)$. ניתן להגדיר את מידת לבג ("dx" או "dm") על $\mathbb{R}^k$ בתורה המידה (מידת הבורל או ההשלמה שלה) המתקבלת ממשפט ההצגה של Riesz עבור הפונקציונל הנ"ל. למידה זו התכונות הבאות:

1. עבור תיבה W ב-$\mathbb{R}^k$ מתקיים כי $m\left(W\right) = \mathrm{vol}\left(W\right)$.
2. אינווריאנטיות להזזות (Translation Invariance): $m\left(E+x\right) = m\left(E\right)$ לכל קבוצה מדידה E ו-$x \in \mathbb{R}^k$.
3. לכל טרנספורמציה לינארית $P : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ מתקיים: $m\left(TE\right) = \left|\det T\right| m\left(E\right)$.

עובדה: (משפט שלא נוכיח) אם μ מידת בורל חיובית על $\mathbb{R}^k$ שהיא אינווריאנטית להזזות ומקיימת $\mu\left(K\right) < \infty$ לכל K קומפקטית, אזי קיים קבוע c כך ש-$\mu\left(E\right) = c \cdot m\left(E\right)$ לכל קבוצת בורל $E \subseteq \mathbb{R}^k$.

עובדה: (נחשוב כאן על מידת לבג כמידה שלמה) לכל קבוצה בעלת מידת לבג חיובית על הישר, קיימות תת־קבוצות שאינן מדידות לבג.

6 מרחבי L^p

6.1 אי שוויונות שימושיים

הגדרה 6.1 פונקציה ממשית $\varphi : \left(a,b\right) \to \mathbb{R}$ (כאשר $-\infty \le a < b \le \infty$, כלומר יכול להיות על כל הישר) נקראת קמורה אם לכל $x,y \in \left(a,b\right)$ ו-$\lambda \in \left[0,1\right]$ מתקיים

$$\varphi\left(\left(1-\lambda\right)x + \lambda y\right) \le \left(1-\lambda\right)\varphi\left(x\right) + \lambda\varphi\left(y\right)$$

זה שקול לכך ש-$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \le \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$ לכל $a < s < t < u < b$. אם φ גזירה אז היא קמורה אס"ם $\forall s < t, \varphi'\left(s\right) \le \varphi'\left(t\right)$.

משפט 6.2 אם φ קמורה על $\left(a,b\right)$ אזי היא רציפה שם (הערה: הכרחי ש-$\left(a,b\right)$ יהיה קטע פתוח לשם כך).

משפט 6.3 (אי־שוויון Jensen) תהי μ מידה חיובית על מרחב מדיד Ω כך ש-$\mu\left(\Omega\right) = 1$, ותהי $f \in \mathcal{L}\left(\Omega, d\mu\right)$ פונקציה ממשית המקיימת $a < f\left(x\right) < b$ לכל $x \in \Omega$. אם $\varphi : \left(a,b\right) \to \mathbb{R}$ פונקציה קמורה על $\left(a,b\right)$, אזי $\varphi\left(\int_\Omega fd\mu\right) \le \int_\Omega \left(\varphi \circ f\right) d\mu$.

הערה 6.4 המשפט נכון גם במקרים בהם $a = -\infty$ או $b = \infty$. ייתכן גם ש-$\varphi \circ f \notin \mathcal{L}^1\left(\mu\right)$ ואז $\int_\Omega \left(\varphi \circ f\right) d\mu$ קיים במובן המוכלל וערכו ∞, ואי השוויון מתקיים באופן טריוויאלי.

הוכחה: נסמן $t = \int_\Omega fd\mu$, אזי $a < t < b$ ונסמן $\beta = \sup_{a<s<t} \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$. מתקיים כי $\beta \ge \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$ לכל $s \in \left(a,t\right)$ וכן לכל $u \in \left(t,b\right)$ מתקיים $\beta \le \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$ ולכן $\varphi\left(s\right) \ge \varphi\left(t\right) + \beta\left(s-t\right)$ לכל $s \in \left(a,b\right)$ (ע"י הצבת s = u באי השוויון השני). נשים לב כלמעשה אי השיוויון האחרון הוא הכללה של המקרה של פונקציה קמורה גזירה, כאשר $\beta \equiv \varphi'\left(t\right)$. מכאן $\varphi\left(s\right) - \varphi\left(t\right) - \beta\left(s-t\right) \ge 0$ וע"י הצבת $s = f\left(x\right)$ ל-$x \in \Omega$:

$$\varphi\left(f\left(x\right)\right) - \varphi\left(t\right) - \beta\left(f\left(x\right) - t\right) \ge 0$$

אינטגרציה של זה על Ω, נותנת:

$$\int_\Omega \left(\varphi \circ f\right) d\mu - \varphi\left(\int_\Omega fd\mu\right) - \beta \cdot 0 \ge 0$$

■

דוגמאות:

1. $\int_0^1 x^2dx \geq \left(\int_0^1 xdx\right)^2$ וקל לחשב ולבדוק כי אי השוויון אכן מתקיים, כאשר $\frac{1}{4} = \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right)^2 = \left(\int_0^1 xdx\right)^2$ ו־$\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2. ניקח $\varphi(x) = \exp(x)$, אזי $\exp\left(\int_\Omega fd\mu\right) \leq \int_\Omega \exp(f)\, d\mu$. עבור למשל $\Omega = \{p_1,\ldots,p_n\}$ (קבוצה סופית) ו־$\mu(\{p_i\}) = \frac{1}{n}$, $f(p_i) = x_i$, מקבלים

$$\exp\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right) \leq \frac{1}{n}\left(\exp(x_1)+\ldots+\exp(x_n)\right)$$

ועל"י הצב של $y_i = \exp(x_i)$ נובע

$$(y_1\cdot y_2\cdots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(y_1+\ldots+y_n)$$

שנקרא גם אי שוויון הממוצעים.

הגדרה 6.5 $p,q \in (0,\infty)$ נקראים "אקספוננטים צמודים" אם $p+q = p\cdot q$ (באופן שקול $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$), כאשר בפועל זה מתקיים כאשר $1 < p < \infty$ ו־$1 < q < \infty$. מקרה מיוחד חשוב הוא $p = q = 2$. אם $p \to 1$ אז $q \to \infty$, ולכן באופן מוכלל גם 1 ו־∞ נחשבים בתור "אקספוננטים צמודים".

משפט 6.6 יהי q ו־q אקספוננטים צמודים, כאשר $1 < p < \infty$. יהי X מרחב מידה עם מידה μ, ויהיו $f,g : X \to [0,\infty]$ מדידות. אזי מתקיימים:

1. אי שוויון Hölder:

$$\int_X fgd\mu \leq \left(\int_X f^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_X g^qd\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

2. אי שוויון Minkowski:

$$\left(\int_X (f+g)^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

הערה 6.7 אי שוויון Hölder למקרה $p = q = 2$ נקרא Cauchy-Schwartz.

הוכחה: נסמן $A = \left(\int_X f^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ ו־$B = \left(\int_X g^qd\mu\right)^{\frac{1}{q}}$. אם A או B שווים לאפס, אזי הפונקציה המתאימה היא אפס כמעט בכל מקום, ולכן גם $\int_X fgd\mu = 0$, ואי השוויון מתקיים באופן טריוויאלי. באופן דומה אם A או B שווים לאינסוף (ואף אחד לא שווה לאפס), אז שוב מתקיים אי השוויון באופן טריוויאלי. על כן, נוכל להצטמצם במקרה ש־$0 < A < \infty$ ו־$0 < B < \infty$.

נגדיר $F = \frac{f}{A}, G = \frac{g}{B}$, אזי

$$\int_X F^pd\mu = \int_X G^qd\mu = 1$$

עבור $x \in X$ שעבורו $0 < F(x) < \infty$ ו־$0 < G(x) < \infty$, יש מספרים ממשיים s,t כך ש־$F(x) = \exp(s/p), G(x) = \exp(t/q)$. היות ו־$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, נובע מקמירות הפונקציה האקספוננציאלית ש־$\exp\left(\frac{s}{p}+\frac{t}{q}\right) \leq \frac{1}{p}\exp(s)+\frac{1}{q}\exp(t)$ (ע"פ אי שוויון Jensen), ולכן לכל $x \in X$ מתקיים:

$$F(x)\,G(x) \leq \frac{1}{p}(F(x))^p + \frac{1}{q}(G(x))^q$$

אינטגרציה על שני האגפים נותנת לכן $\int FGd\mu \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, כלומר $\int_X fgd\mu \le A\cdot B$, ולכן הוכחנו את אי־שוויון Hölder.

להוכחת אי־שוויון Minkowski, נכתוב:

$$(f+g)^p = f\,(f+g)^{p-1}\, g\,(f+g)^{p-1}$$

אזי מאי־שוויון Hölder, כאשר $(p-1)\,q=p$, נובע

$$\int_X f\,(f+g)^{p-1}\,d\mu \le \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

וגם:

$$\int_X g\,(f+g)^{p-1}\,d\mu \le \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

מחיבור שני אי השוויונות הנ"ל מתקבל

$$(*)\qquad \int_X (f+g)^p\,d\mu \le \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_X (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

עתה, די לדון במקרה בו אגף שמאל חיובי ממש (לא אפס), ואגף ימין סופי (כי מקמירות $h(t)=t^p$ (עבור $t\ge 0$) נובע כי $\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}(f^p+g^p)$). היות ומסופיות אגף ימין של $(*)$ נובעת סופיות אגף שמאל, ניתן לחלק את שני אגפי $(*)$ ב־$\left(\int_X (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}}$, ולכן נקבל:

$$\left(\int_X (f+g)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

דהיינו, קיבלנו את אי־שוויון Minkowski. ■

6.2 הגדרת מרחבי L^p

הגדרה 6.8 יהי X מרחב מידה עם מידה (חיובית) μ ו־$0<p<\infty$. לכל $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה, נגדיר את נורמת L^p של f בתור:

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

הגדרה 6.9 נסמן ב־$\mathcal{L}^p(\mu)$ (או $\mathcal{L}^p(X,d\mu)$ או $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k)$ אם $X=\mathbb{R}^k$ ו־μ מידת לבג) את אוסף הפונציות המדידות כנ"ל (המוגדרות על כל X או רק כ.ב.מ. $[\mu]$ על X) שעבורן $||f||_p<\infty$. אם μ מידת המנייה על X נסמן את $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ ב־$l^p(X)$, ובמקרה זה הנורמה שקולה ל:

$$||f||_p = \left(\sum_{x\in X} |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

הגדרה 6.10 עבור $f:X\to[0,\infty]$ מדידה, נגדיר את הסופרמום העיקרי (essential supremum) של g באופן הבא. נגדיר תחילה:

$$S=\left\{M\in\mathbb{R}|\mu\left(g^{-1}\left((M,\infty]\right)\right)=0\right\}$$

ואז:

$$\operatorname{ess\,sup} g=\begin{cases}\inf S & S\neq\emptyset\\ \infty & S=\emptyset\end{cases}$$

ובאופן שקול:

$$\operatorname{ess\,sup} g=\sup\left\{M\in\mathbb{R}|\exists Y\subseteq X,\left(\mu\left(Y\right)>0\right)\wedge\left(x\in Y\to f\left(x\right)\geq M\right)\right\}$$

עבור $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה, נסמן $||f||_{\infty}=\operatorname{ess\,sup}|f|$ בתור "נורמת אינסוף" ונסמן ב־$\mathcal{L}^{\infty}\left(\mu\right)$ ($\mathcal{L}^{\infty}\left(X,d\mu\right)$ וכו') את מרחב הפונקציות המרוכבות המדידות שעבורן $||f||_{\infty}<\infty$. אברי $\mathcal{L}^{\infty}\left(\mu\right)$ נקראים "פונקציות מדידות חסומות עיקרית" (essentially bounded measurable functions).

הערה 6.11 מספר הערות:

1. $|f\left(x\right)|\leq\lambda$ כ.ב.מ. $[\mu]$ אם"ם $||f||_{\infty}\leq\lambda$.
2. כמו עבור p סופי, מסמנים ב־$l^{\infty}\left(X\right)$ את $\mathcal{L}^{\infty}\left(X,d\mu\right)$ במקרה ש־μ מידת המנייה על X.

משפט 6.12 אם p,q אקספוננטים צמודים, $1\leq p\leq\infty$, $f\in\mathcal{L}^{p}\left(\mu\right)$ ו־$g\in\mathcal{L}^{q}\left(\mu\right)$, אזי $fg\in\mathcal{L}^{1}\left(\mu\right)$ ומתקיים:

$$||f\cdot g||_{1}\leq||f||_{p}\cdot||g||_{q}$$

הוכחה: עבור $1<p<\infty$ זה נובע מאי־שוויון Hölder, עבור $|f|$ ו־$|g|$ (כאשר $|fg|=|f|\,|g|$). אם $p=\infty$, אזי

$$|f\left(x\right)g\left(x\right)|=|f\left(x\right)|\cdot|g\left(x\right)|\leq||f||_{\infty}\,|g\left(x\right)|$$

מתקיים כ.ב.מ. $[\mu]$, ולכן

$$||fg||_{1}=\int_{X}|f\cdot g|\,d\mu\leq||f||_{\infty}\int_{X}|g|\,d\mu=||f||_{\infty}\,||g||_{1}$$

ובאותו אופן עבור $p=1$, כאשר $q=\infty$. ■

משפט 6.13 אם $1\leq p\leq\infty$ ו־$f,g\in\mathcal{L}^{p}\left(\mu\right)$, אזי $f+g\in\mathcal{L}^{p}\left(\mu\right)$ ומתקיים $||f+g||_{p}\leq||f||_{p}+||g||_{p}$.

הוכחה: ל־$1<p<\infty$ זה נובע מאי־שוויון מינקובסקי כי

$$\int|f+g|^{p}\,d\mu\leq\int\left(|f|+|h|\right)^{p}d\mu$$

המקרה ש־$p=1$ או $p=\infty$ מושאר כתרגיל. ■

משפט 6.14 אם $1\leq p\leq\infty$, $f\in\mathcal{L}^{p}\left(\mu\right)$ ו־$\alpha\in\mathbb{C}$, אזי $\alpha f\in\mathcal{L}^{p}\left(\mu\right)$ ומתקיים $||\alpha f||_{p}=|\alpha|\,||f||_{p}$.

הוכחה: טריוויאלי (תרגיל). ■

מסקנה 6.15 לכל $1 \le p \le \infty$ מתקיים כי $\mathcal{L}^p(\mu)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

הערה 6.16 נשים לב כי $||\cdot||_p$ איננה נורמה על $\mathcal{L}^p(\mu)$! ייתכן כי $||f-g||_p = 0$ עבור שתי פונקציות שונות. בפועל מתקיים כי $||f-g||_p = 0$ אם"ם $f \sim g$, כלומר $f = g$ כ.ב.מ. $[\mu]$ (וזאת לכל $1 \le p \le \infty$). עתה ננסה "לתקן" מצב זה ולקבל מרחבים.

הגדרה 6.17 $L^p(\mu)$ (או $L^p(X, d\mu)$ וכו') לכל $1 \le p \le \infty$ הוא אוסף מחלקות השקילות של פונקציות ב־$\mathcal{L}^p(\mu)$ תחת יחס השקילות של שוויון כ.ב.מ. $[\mu]$.

איבר האפס ב־$L^p(\mu)$ הוא $\{f \in \mathcal{L}^p | f(x) = 0 \text{ a.e. } [\mu]\}$. באופן דומה עבור $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ כלשהי, האיבר המקביל ב־$L^p(\mu)$ הוא $F = \{g \in \mathcal{L}^p(\mu) | g(x) = f(x) \text{ a.e. } [\mu]\}$. נשים לב שלכל F כנ"ל נוכל להגדיר $||F||_p = ||f||_p$, ונשים לב כי זה מוגדר הייטב כי לכל $g \in F$ מתקיים כי $||g||_p = ||f||_p$. חיבור וכפל בסקלר ב־$L^p(\mu)$ מוגדרים באופן טבעי: אם $F = \{f \in F\}$ ו־$G = \{g \in G\}$, אזי $\alpha F = \{\alpha f : f \in F\}$ ו־$F + G = \{f + g | f \in F, g \in G\}$, ונשים לב כי על אף שהוגדרו כקבוצות ניתן להראות כי הן מחלקות שקילות ו־$\alpha F, F + G \in L^p(\mu)$.

טענה 6.18 $L^p(\mu)$ כפי שהוגדר לעיל הוא מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{C}$. יתר על כן, $||\cdot||_p$ היא נורמה על $L^p(\mu)$, ולכן הוא מרחב נורמי.

הערה 6.19 נשים לב כי $L^p(\mu)$ הוא גם מרחב מטרי עם המטריקה המושרית $d(F,G) = ||F-G||_p$.

הערה 6.20 מוקבל לדבר על $f \in L^p(\mu)$ עבור פונקציות קונקרטיות, אבל יש להבין כי הכוונה בהקשר זה היא $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, כאשר היא מהווה נציג למחלקת שקילות ב־L^p, ו"לעבוד" ישירות עם הפונקציות ולחשוב על אברי $L^p(\mu)$ כפונקציות כאשר מבינים את $f \sim g$ בתור שוויון.

משפט 6.21 לכל $1 \le p \le \infty$ ולכל מידה חיובית μ, $L^p(\mu)$ הוא מרחב מטרי שלם.

הערה 6.22 אם למשל $X = [0,1]$, μ מידה לבג על X, אזי $\{f \in L^1(\mu) | f \text{ is continuous}\}$ הוא תת־מרחב של $L^p(\mu)$ (כאשר הכוונה היא אוסף מחלקות השקילות כך שבכל מחלקה קיימת פונקצייה רציפה), ו־$||f||_1 = \int |f| \, dX$ הוא אינטגרל רימן לפונקציה רציפה. אם היינו מגדירים את הקבוצה הזאת ישירות מאינטגרל רימן ללא מחלקות שקילות, אז מדובר במרחב נורמי לא שלם, וזה לא טריוויאלי לאמר כי ההשלמה שלו הוא מרחב פונקציות או מרחב מחלקות שלמות. למעשה המשפט לעיל מראה שההשלמה של קבוצת הפונקציות הרציפות אם נורמה סופית הוא $L^p(\mu)$ (בשילוב עם צפיפות).

הוכחה: נדון תחילה במקרה ש־$1 \le p < \infty$. תהי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ $L^p(\mu)$ סדרת קושי. קיימת תת־סדרה $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ שעבורה $\forall k \in \mathbb{N}, \left|\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|\right| < 2^{-k}$. נגדיר:

$$g_N = \sum_{k=1}^{N} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$$

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$$

מאי־שוויון מינקובסקי נובע $||g_N||_p < 1$ לכל $N \in \mathbb{N}$, ולכן מהלמה של Fatou מופעלת על g_N^p נובע שגם $||g|| \le 1$, כי

$$\left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int (\liminf g_N)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int \liminf \left(g_N^p\right) d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{Fatuo's lemma} \Rightarrow \le \liminf \left(\int g_N^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \liminf ||g_N^p|| \le 1$$

בפרט, נובע ש־$g(x)<\infty$ כ.ב.מ. $[\mu]$ ולכן הטור: $f=f_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right)$ (כאשר f הוא סימון פורמלי לסכום הטור) מתכנס בהחלט כ.ב.מ. $[\mu]$, ונסמן ב־$f(x)$ את הפונקציה המדידה המוגדרת ע"י סכום הטור הנ"ל (ניתן להגדיר $f(x)=0$ בנקודות בהן הטור לא מתכנס). נשים לב שהיות ו־$f_{n_N}=f_{n_1}+\sum_{k=1}^{N-1}\left(f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right)$, אז מתקיים כי $f_{n_k}(x)\to f(x)$ (גבול נקודתי) כ.ב.מ. $[\mu]$, ולכן גם $f(x)$ היא פונקציה מדידה. עתה נראה ש־f הנ"ל היא גבול ב־$L^p(\mu)$ של $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. יהי $\epsilon>0$, אזי יש $N>0$ כך ש־$||f_n-f_m||_p<\epsilon$ לכל $n,m>N$ (ההגדרה של סדרת קושי). לכן, לכל $m>N$ נובע מהלמה של Fatou ש־

$$\int|f-f_m|^p\,d\mu\leq\liminf_{k\to\infty}\int|f_{n_k}-f_m|^p\,d\mu\leq\epsilon^p$$

ולכן קיבלנו ש־$||f-f_m||_p<\epsilon$, והיות ש־$f=(f-f_m)+f_m$, אז נובע ש־$f\in L^p(\mu)$ וכן $||f-f_m||_p\to 0$, כלומר $f_m\to f$ לפי הנורמה.

נעבור למקרה $p=\infty$. תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^{\infty}(\mu)$ סדרת קושי, ונגדיר:

$$A_k=\{x|\,|f_k(x)|>||f_k||_{\infty}\}$$
$$B_{m,n}=\{x|\,|f_n(x)-f_m(x)|>||f_n-f_m||_{\infty}\}$$

ותהי $E=\cup_{k,m,n}(A_k\cup B_{m,n})$, אזי $\mu(E)=0$ – זה נובע מכך ש־$||\cdot||_{\infty}$ מוגדר לפי הסופרמום העיקרי, שמהווה חסם עליון לכל הנקודות מלבד קבוצה ממידה אפס. בנוסף, על המשלים של E, הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת היא סדרת קושי במידה שווה, ולכן מתכנסת במידה שווה לפונקציה חסומה f (ונגדיר $f(x)=0$ עבור $x\in E$). כעת, $f\in L^{\infty}(\mu)$ ומתקיים $||f-f_n||_{\infty}\to 0$, כלומר $f_n\to f$ לפי הנורמה $||\cdot||_{\infty}$. ■

מסקנה 6.23 אם $1\leq p\leq\infty$ ואם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב־$L^p(\mu)$ בעלת גבול f, אזי ל־$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה שמתכנסת נקודותית ל־$f(x)$ כ.ב.מ. $[\mu]$.

משפט 6.24 תהי S אוסף הפונקציות המרוכבות המדידות הפשוטות על X שעבורן $\mu(\{x:s(x)\neq 0\})<\infty$, אזי לכל $1\leq p<\infty$ מתקיים כי S צפופה ב־$L^p(\mu)$.

הוכחה: ראשית, ברור ש־$S\subseteq L^p(\mu)$. נניח ש־$L^p(\mu)\ni f\geq 0$ (כלומר f ממשית ואי־שלילית) ותהי $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות פשוטות המקרבת את f "מלמטה" כפי שראינו במשפטים קודמים. היות ו־$0\leq s_n\leq f$, אז נובע ש־$s_n\in L^p(\mu)$ (כי $||s_n||_p\leq||f||_p$) ולכן $s_n\in S$. היות ו־$|f-s_n|^p\leq f^p$ אז נובע ממשפט ההתכנסות הנשלטת ש־$||f-s_n||_p\to||f-f||_p=0$, ולכן f היא קבול של $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (לפי הנורמה) ובפרט f בסגור של S ב־$L^p(\mu)$. המקרה המרוכב נובע מכאן ע"י פירוק f לקומבינצייה לינארית של פונקציות אי־שליליות. ■

משפט 6.25 (משפט Lusin) תהי μ מידת בורל רגולרית חיובית על מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית X, בעלת התכונה ש־$\mu(K)<\infty$ לכל K קומפקטית, ותהי f פונקציה מרוכבת מדידה על X, כך ש־$f(x)=0$ ל־$x\notin A$ עבור $A\subseteq X$ בעלת $\mu(A)<\infty$, אזי לכל $\epsilon>0$ יש $g\in C_c(X)$ כך ש־$\mu(\{x|f(x)\neq g(x)\})<\epsilon$ (כמו כן, ניתן לבחור את g כך ש־$\sup_{x\in X}|g(x)|\leq\sup_{x\in X}|f(x)|$).

הוכחה: נניח תחילה ש־$0\leq f<1$ וש־A קומפקטית. תהי $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות פשוטות המקיימת $0\leq s_1\leq s_2\leq\ldots\leq f$ כך ש־$\forall x\in X,s_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}f(x)$, וקל לוודא שקיימת פונקציות כאלו כך ש־$s_n-s_{n-1}=2^{-n}\chi_{T_n}$ לקבוצה מדידה T_n לכל $\mathbb{N}\ni n\geq 2$ (סדרה כנ"ל בנינו במשפט קודם ובתרגיל). נסמן $t_1=s_1$ ו־$t_n=s_n-s_{n-1}$ ל־$n\geq 2$, אזי 2^nt_n הוא בדיוק פונקציה אופיינית של הקבוצה המדידה T_n, ומתקיים: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n(x)$ לכל $x\in X$.

תהי V קבוצה פתוחה כך ש־$A\subseteq V$ וגם $\bar{V}$ קומפקטית (כאשר $\bar{V}$ הוא הסגור של V). מהרגולריות של המידה μ נובע שקיימות קבוצות קומפקטיות $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ וקבוצות פתוחות $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$, כך ש־ $K_n\subseteq T_n\subseteq V_n\subseteq V$ וגם $\mu(V_n\backslash K_n)<2^{-n}\epsilon$ עבור $\epsilon>0$ כלשהו שבחרנו מראש. מהלמה של Urysohn נובע שיש פונקציות $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$K_n\prec h_n\prec V_n$, ונגדיר $\forall x\in X,g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}h_n(x)$, אזי הטור מתכנס במידה שווה על X ולכן $g(x)$ פונקציה רציפה. כמו כן, התומך של g

הוא ב־$\bar{V}$, היות ו־$2^{-n}h_n(x) = t_n(x)$ מתקיים חוץ מאשר על $V_n \backslash K_n$, נובע ש־$g(x) = f(x)$ מחוץ ל־$\cup_{n=1}^{\infty}(V_n \backslash K_n)$. היות ו־

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty}(V_n \backslash K_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n \backslash K_n) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\epsilon = \epsilon$$

נובע המשפט למקרה שבו $0 \leq f < 1$ וש־A קומפקטית.

מכאן, ברור גם שהמשפט מתקיים לכל פונקציה מרוכבת וחסומה (עבור A קומפקטית), כי פונקציה כזאת היא קומבינציה לינארית של ארבע פונקציות המקיימות $0 \leq f < 1$. כדי לעבור לקבוצה A שאיננה בהכרח קומפקטית, אז נשים לב שאם $\mu(A) < \infty$, אזי יש $K \subseteq A$ קומפקטית שעבורה $\mu(A \backslash K)$ קטנה כרצוננו (מהרגולריות של μ), ואז ניתן להשתמש במה שהוכחנו עבור K כנ"ל. אם f פונקציה מדידה שאיננה חסומה, נשים לב שעבור $B_n = \{x | f(x) > n\}$ מתקיים בהכרח ש־$\mu(B_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ומחוץ ל־B_n f שווה לפונקציה החסומה $f(1-\chi_{B_n})$ ואז מהפעלת המשפט עבור $f(1-\chi_{B_n})$ אז הוא נובע גם עבור f כי $f = f(1-\chi_{B_n})$ חוץ מעל קבוצה ממידה קטנה כרצוננו.

להוכחת הטענה בסוגריים, נגדיר $R = \sup\{|f(x)| \,|x \in X\}$ ו־$\varphi(z) = \begin{cases} z & |z| \leq R \\ \frac{Rz}{|z|} & |z| > R \end{cases}$, אזי φ רציפה מ־$\mathbb{C}$ על הדיסק ברדיוס R. אם g מקיימת את המשפט ו־$g_1 = \varphi \circ g$, אזי g_1 מקיימת את המשפט וגם את התנאי המבוקש. ■

מסקנה 6.26 בתנאי משפט Lusin קיימת עבור הפונקציה המדידה f סדרת פונקציות $g_n \in C_c(X)$ כך ש־ $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ כ.ב.מ. $[\mu]$.

הוכחה: לכל n יש $g_n \in C_n(X)$ שעבורה $\mu(E_n) < 2^{-n}$ עבור $E_n = \{x : f(x) \neq g_n(x)\}$. היות ו־$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ נובע שכמעט כל x נמצא לכל היותר במספר סופי מתוך הקבוצות $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$. לכן לכמעט כל x מתקיים $f(x) = g_n(x)$ עבור n מפסיק גדול. ■

משפט 6.27 (מסקנה) אם X מרחב האוסדורף קומקטי מקומית ו־μ מידת בורל רגולרית על X שעבורה $\mu(K) < \infty$ לכל K קומפקטית, אזי לכל $1 \leq p < \infty$ מתקיים כי $C_c(X)$ היא קבוצה צפופה ב־$L^p(\mu)$.

הוכחה: תהי S אוסף הפונקציות המרוכבות המדידות הפשוטות על X שעבורן $\mu(\{x | s(x) \neq 0\}) < \infty$. ראינו ש־$S$ צפופה ב־$L^p(\mu)$. אם $s \in S$, נובע ממשפט Lusin שלכל $\epsilon > 0$ קיימת $g \in C_c(X)$ כך ש־$g(x) = s(x)$ פרט אולי לקבוצה שמידתה קטנה מ־ϵ וכן $|g| \leq ||s||_{\infty}$, לכן:

$$\begin{aligned} ||g-s||_p &= \left(\int |g-s|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\epsilon \cdot (2\,||s||_{\infty})^p\right)^{\frac{1}{p}} = 2\epsilon^{\frac{1}{p}}\,||s||_{\infty} \end{aligned}$$

היות ו־S צפופה ב־$L^p(\mu)$ נובע המשפט. ■

מסקנה 6.28 מרחב ההשלמה בכל נורמת L^p, עבור מידת לבג, של $C_c(\mathbb{R}^k)$ הוא $L^p(\mathbb{R}^k)$ (לכל $1 \leq p < \infty$).

הוכחה: ב־$C_c(\mathbb{R}^k)$ מתקיים כי $||f-g||_p = 0$ אם"ם $f(x) = g(x)$ בכל מקום (כי הפונקציות רציפות), לכן $C_c(\mathbb{R}^k) \subseteq L^p(\mathbb{R}^k)$. היות ו־$L^p(\mathbb{R}^k)$ שלם ו־$C_c(\mathbb{R}^k)$ צפוף (ע"פ המשפט הקודם) נובעת המסקנה. ■

הערה 6.29 המקרה $p = \infty$ הוא שונה. מרחב ההשלמה של $C_c(X)$ בנורמה $||f||_{\infty} = \sup_{x\in X}|f(x)|$ הוא מרחב הפונקציות הרציפות על X שעבורן לכל $\epsilon > 0$ יש K קומפקטית כך ש־$|f(x)| < \epsilon$ מחוץ ל־K ("מרחב הפונקציות הרציפות שמתאפסות באינסוף", ומסומן ב־$C_{\infty}(X)$ או לפעמים ב־$C_0(X)$). זה נכון לכל מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית.

משפט 6.30 (משפט Egoroff) יהי X מרחב מידה ו־$E \subseteq X$ קבוצה בעלת $\mu(E) < \infty$. אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מרוכבות מדידות המתכנסת נקודתית כ.ב.מ. $[\mu]$ על E לפונקציה גבולית f, אזי לכל $\epsilon > 0$ קיימת תת־קבוצה מדידה $F \subseteq E$ כך ש־$\mu(F) < \epsilon$ והסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־f במידה שווה על $E \backslash F$.

הוכחה: ניתן להניח (ע"י הוצאת רכיב בעל מידה אפס מ־E) ש־$f_n(x) \to f(x)$ לכל $x \in E$. נגדיר:

$$E_n^m = \cap_{i=n}^{\infty} \left\{ x \in E \,|\, |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\}$$

אזי $\ldots \subseteq E_2^m \subseteq E_1^m$ והיות ש־$f_n \to f$ על E:

$$\lim_{n\to\infty} E_n^m = \overbrace{\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} E_k^m}^{\liminf} = \overbrace{\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} E_k^m}^{\limsup} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n^m \supset E$$

וזאת לכל m, וכיוון ש־$E_n^m \subset E$ מהגדרה אז מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} E_n^m = E$. לכן $\lim_{n\to\infty} \mu(E \backslash E_n^m) = 0$ (נובע מזה שראינו שבתנאים הנ"ל מתקיים כי $\mu(E_n^m) \underset{n\to\infty}{\to} \mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n^m) = \mu(E)$). ולכן קיים $n(m,\epsilon)$ שעבורו $\mu\left(E \backslash E_{n(m,\epsilon)}^m\right) < \frac{\epsilon}{2^m}$.

עתה נבחר $F = \cup_{m=1}^{\infty} \left(E \backslash E_{n(m)}^m\right)$, אזי F מדידה, $F \subseteq E$, וגם

$$\mu(F) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(E \backslash E_{n(m,\epsilon)}^m\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon$$

היות ו־$E \backslash F = E \cap \left(\cap_{m=1}^{\infty} E_{n(m,\epsilon)}^m\right)$, נובע שלכל $x \in E \backslash F$ ולכל $n \geq n(m,\epsilon)$ מתקיים כי $x \in E_n^m$ ולכן $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$. במילים אחרות עבור $x \in E \backslash F$ ולכל m קיים N כך שאם $n > N$ אזי $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$, כלומר $f_n \to f$ במ"ש על $E \backslash F$. ∎

7 מידות מרוכבות ומשפטי פירוק

7.1 מידות מרוכבות

יהי X מרחב מדיד, $\mathcal{M}$ היא σ־אלגברה על X.

הגדרה 7.1 אוסף בן מנייה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ נקרא חלוקה של קבוצה $E \subseteq \mathcal{M}$ אם $E_i \cap E_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$ ו־$E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$.

הגדרה 7.2 מידה מרוכבת היא פונקציה $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ שמקיימת $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ לכל חלוקה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ של E. הטור חייב להתכנס בהחלט (אחרת $\mu(E)$ לא מוגדר היטב, כי יש תלות בסדר של האיברים בטור ובחלוקה של E).

הגדרה 7.3 בהינתן μ מרוכבת כנ"ל, נגדיר את הפונקציה $|\mu| : \mathcal{M} \to [0,\infty)$ ע"י

$$|\mu|(E) = \sup_{\substack{\text{Over all partitions} \\ \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ of } E}} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

כאשר $|\mu|$ נקראת "Total Variation Measure of μ", או בעברית: "מידת הווריצייה הטוטאלית של המידה μ", או גם "מידת הערך המוחלט של μ", אך יש לשים לב ש־$|\mu|$ איננה פונקציית הערך המוחלט של μ.

הערה 7.4 מתקיים כי $|\mu(X)| < \infty$ כי $X \in \mathcal{M}$, אבל צריך יהיה עוד לעבוד כדי להוכיח את זה.

משפט 7.5 עבור מידה מרוכבת μ, $|\mu|$ היא מידה חיובית על $\mathcal{M}$.

הוכחה: תהי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ חלוקה של $E \in \mathcal{M}$, ותהי $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq [0,\infty]$ סדרת מספרים המקיימת $t_i < |\mu|(E_i)$ לכל i שעבורו $|\mu|(E_i) \neq 0$ ו־$t_i = 0$ אם $|\mu|(E_i) = 0$. אזי, לכל i יש ל־E_i חלוקה $\{A_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ כך ש־$\sum_j |\mu(A_{ij})| \geq t_i$. היות ו־$\{A_{ij}\}_{i=1,j=1}^{\infty}$ זו חלוקה של E, אז נובע:

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i \leq \sum_{i,j} |\mu(A_{ij})| \leq |\mu|(E)$$

ע"י לקיחת סופרמום על כל הבחירות האפשריות של $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ כנ"ל, נובע כי $\sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E)$.

כיוון שני: תהי $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ חלוקה של E, אזי לכל j קבוע $\{A_j \cap E_i\}_{i=1}^{\infty}$ זו חלוקה של A_j ולכל i קבוע $\{A_j \cap E_i\}_{j=1}^{\infty}$ זו חלוקה של E_i. לכן:

$$\begin{aligned}\sum_j |\mu(A_j)| &= \sum_j \left|\sum_i \mu(A_j \cap E_i)\right| \\ &\leq \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| \\ &= \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \\ &\leq \sum_i |\mu|(E_i)\end{aligned}$$

היות וזה נכון לכל חלוקה $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ של E, אז נובע כי זה נכון גם על הסופרמום של כל החלוקות, ולכן $|\mu|(E) \leq \sum_i |\mu|(E_i)$.

לסיכום קיבלנו כי $|\mu|(E) = \sum_i |\mu|(E_i)$, כלומר $|\mu|$ היא σ־אדיטיבית, ולכן היא מידה חיובית. ■

משפט 7.6 לכל מידה מרוכבת μ, $|\mu|(X) < \infty$.

הוכחה: תינתן בתרגיל. ■

הערה 7.7 קל לראות ש־$|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$ לכל $E \in \mathcal{M}$.

הגדרה 7.8 מידה מרוכבת המקבלת רק ערכים ממשיים נקראת מידה ממשית (או "מידה מסומנת", ובאנגלית "signed measure"). בהינתן מידה μ כנ"ל, נגדיר $\mu^{+} = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ ו־$\mu^{-} = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$, אזי μ^{-} ו־μ^{+} הן מידות חיוביות חסומות על $\mathcal{M}$ ומתקיים $\mu = \mu^{+} - \mu^{-}$ ו־$|\mu| = \mu^{+} + \mu^{-}$. μ^{+} נקראת החלק החיובי של μ (או גם Positive Variation), ובדומה, μ^{-} נקראת החלק השלילי של μ (או גם Negative Variation). הפירוק $\mu = \mu^{+} - \mu^{-}$ נקרא פירוק Jordan של μ.

למידה מרוכבת קיים פירוק יחיד לקומבינציה לינארית של שתי מידות ממשיות: $(\mathrm{Re}\mu)(E) = \mathrm{Re}(\mu(E))$, $(\mathrm{Im}\mu)(E) = \mathrm{Im}(\mu(E))$ ו־$\mu = \mathrm{Re}\mu + i\mathrm{Im}\mu$. ולכן למידה מרוכבת μ יש פירוק Jordan לקומבינציה לינארית של ארבע מידות חיוביות (המתקבל מפירוק Jordan של החלק הממשי והחלק המדומה).

הגדרה 7.9 תהי μ מידה חיובית ו־λ מידה (מרוכבת או חיובית) שתיהן באותו מרחב מדיד.

- אומרים ש־λ רציפה לחלוטין ביחס ל־μ (absolutely continuous w.r.t. μ)(או פשוט רציפה ביחס ל־μ) וכותבים $\lambda \ll \mu$ אם מתקיים ש־$\mu(E) = 0$ גורר $\lambda(E) = 0$ לכל $E \in \mathcal{M}$.
- אומרים ש־λ מרוכזת על $A \in \mathcal{M}$ (או נתמכת על A) אם $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ לכל $E \in \mathcal{M}$ (זה שקול לכך ש־$\forall E \in \mathcal{M}, A \cap E = \emptyset \Rightarrow \lambda(E) = 0$).

- אומרים ש־λ סינגולרית ביחס ל־μ אם λ מרוכזת על קבוצה $A \in \mathcal{M}$ שעבורה $\mu(A) = 0$.
- בהגדרות הנ"ל אפשרי גם ש־μ תהיה מידה מרוכבת ואז אומרים ש־λ רציפה לחלוטין / סינגולרית ביחס ל־μ אם היא רציפה לחלוטין / סינגולרית ביחס ל־$|\mu|$.
- אם λ_1, λ_2 מידות, אומרים שהן סינגולריות הדדית (mutually singular), ומסמנים $\lambda_1 \perp \lambda_2$, אם קיימות קבוצות זרות $A, B \in \mathcal{M}$ כך ש־λ_1 מרוכזת על A ו־λ_2 מרוכזת על B. באופן מיידי מתקבל כי אם λ_1 סינגולרית ביחס ל־λ_2 אז גם λ_2 סינגולרית ביחס ל־λ_1.

טענה 7.10 יהיו $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ מידות על $\mathcal{M}$, כך ש־μ חיובית ו־$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ מרוכבות, אזי:

1. אם λ מרוכזת על A, כך גם $|\lambda|$.
2. אם $\lambda_1 \perp \lambda_2$, אזי $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.
3. אם $\lambda_1 \perp \mu$ ו־$\lambda_2 \perp \mu$, אזי $(\lambda_1 + \lambda_2) \perp \mu$.
4. אם $\lambda_1 \ll \mu$ ו־$\lambda_2 \ll \mu$ אזי $(\lambda_1 + \lambda_2) \ll \mu$.
5. אם $\lambda \ll \mu$, אזי $|\lambda| \ll \mu$.
6. אם $\lambda_1 \ll \mu$ ו־$\lambda_2 \perp \mu$, אזי $\lambda_1 \perp \lambda_2$.
7. אם $\lambda \ll \mu$ ו־$\lambda \perp \mu$ אזי $\lambda = 0$.

הוכחה: נוכיח את הטענות:

1. $A \cap E = \emptyset$, $\{E_j\}$ חלוקה של E $\Leftarrow$ $\lambda(E_j) = 0$ לכל j $\Leftarrow$ $|\lambda|(E) = 0$.
2. מיידי מהטענה לעיל.
3. יש קבוצות זרות A_1, B_1 כך ש־λ_1 מרוכזת על A_1 ו־μ מרוכזת על B_1, ויש קבוצות זרות A_2, B_2 כך ש־λ_2 מרוכזת על A_2 ו־μ מרוכזת על B_2. מכאן ש־$\lambda_1 + \lambda_2$ מרוכזת על $A_1 \cup A_2$, ו־μ מרוכזת על $B = B_1 \cap B_2$ ומתקיים: $A \cap B = \emptyset$.
4. ברור מכך ש־$\mu(A) = 0 \Leftarrow \lambda_1(A) = \lambda_2(A) = 0 \Leftarrow (\lambda_1 + \lambda_2)(A) = 0 \Leftarrow (\lambda_1 + \lambda_2) \ll \mu$.
5. אם $\mu(E) = 0$ ו־$\{E_j\}$ חלוקה של E, אזי $\mu(E_j) = 0$ לכל j, והיות ש־$\lambda \ll \mu$, גם $\lambda(E_j) = 0$ לכל j. לכן $\sum |\lambda(E_j)| = 0$ ומכאן ש־$|\lambda|(E) = 0$, כלומר $|\lambda| \ll \mu$.
6. $\lambda_2 \perp \mu$ גורר ש־λ_2 מרוכזת על A עם $\mu(A) = 0$, והיות ש־$\lambda_1 \ll \mu$, אז $\lambda_1(E) = 0$ לכל $E \subseteq A$. לכן λ_1 מרוכזת על המשלים של A.
7. מהטענה הקודמת נובע ש־$\lambda \perp \lambda$, וזה ייתכן רק אם $\lambda = 0$.

■

הגדרה 7.11 מידה חיובית μ על X נקראת סופית אם $\mu(X) < \infty$. היא נקראת σ־סופית אם $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ ו־$\mu(E_n) < \infty$ לכל n.

הערה 7.12 מידה על מרחב σ־קומפקטי שנותנת משקל סופי לקבוצות קומפקטיות היא σ־סופית.

למה 7.13 אם μ מידה חיובית σ־סופית על X, אזי קיימת פונקציה $W \in L^1(\mu)$ כך ש־$0 < W(x) < 1$ לכל x.

הוכחה: $X=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$, $E_n\in\mathcal{M}$, $\mu(E_n)<\infty$,$\forall n$. נגדיר

$$W_n(x)=\begin{cases}\frac{2^{-n}}{1+\mu(E_n)} & x\in E_n\\ 0 & x\in X\backslash E_n\end{cases}$$

ו־$W(x)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n(x)$ (אזי $0<W(x)<1$). הפונקציה הנ"ל ב־L^1 כי $||W_n||_1=\frac{\mu(E_n)}{1+\mu(E_n)}2^{-n}\le 2^{-n}$ ולכן $||W||_1\le 1$, כלומר $W\in L^1(\mu)$. ■

טענה 7.14 אם $\mathcal{H}$ מרחב הילברט, אזי כל פונקציונל לינארי חסום על $\mathcal{H}$ שקול למכפלה פנימית בווקטור כלשהו במרחב, כלומר, אם L פונקציונל כנ"ל, אזי קיים $y\in\mathcal{H}$ יחיד כך ש־$Lx=\langle x,y\rangle$ לכל $x\in\mathcal{H}$.

הערה 7.15 L כנ"ל נקרא חסום (או רציף) אם $\sup_{x\in\mathcal{H},x\neq0}\frac{||Lx||}{||x||}<\infty$.

הוכחה: נסמן: $M=\{x\in\mathcal{H}|Lx=0\}$, $M^{\perp}=\{x\in\mathcal{H}|\forall y\in M,\langle x,y\rangle=0\}$, וקל לראות ש־$M$ ו־$M^{\perp}$ הם תתי־מרחבים סגורים (נובע מהחסימות / רציפות של L). אם $L=0$, ברור שהמשפט מתקיים עם $y=0$. אחרת $M^{\perp}\neq\{0\}$, וקיים $z\in M^{\perp}$ כך ש־$||z||=1$. נגדיר $u:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ ע"י $u(x)=(Lx)z-(Lz)x$ (נזכיר כי Lx ו־Lz הם סקלרים). היות ו־$Lu(x)=(Lx)(Lz)-(Lz)(Lx)=0$, נובע ש־$u(x)\in M$ לכל $x\in\mathcal{H}$. לכן: $\langle u(x),z\rangle=0$ לכל $x\in\mathcal{H}$ ומתקיים

$$\begin{aligned}Lx&=(Lx)\langle z,z\rangle=\langle (Lx)z,z\rangle=\langle (Lx)z,z\rangle-\langle u(x),z\rangle\\&=\langle (Lx)z-u(x),z\rangle=\langle (Lz)x,z\rangle=(Lz)\langle x,z\rangle=\left\langle x,\overline{(Lz)}z\right\rangle\end{aligned}$$

מכאן שלכל $x\in\mathcal{H}$ מתקיים ש־$Lx=\langle x,y\rangle$ עבור $y=\overline{(Lz)}z$.

להוכחת היחידות: אם $\langle x,y\rangle=\langle x,y'\rangle$ לכל x, אזי עבור $z=y-y'$ מתקיים כי $\langle x,z\rangle=0$ לכל x, בפרט זה נכון $x=z$, ולכן $||z||=0$, ולכן $z=0$ כלומר $y=y'$. ■

7.2 משפטי פירוק

משפט 7.16 (משפט הפירוק של לבג) תהי μ מידה חיובית σ־סופית על $\mathcal{M}$ ו־λ מידה מרוכבת על $\mathcal{M}$, אזי קיימות מידות מרוכבות יחידות λ_a,λ_s על $\mathcal{M}$, כך ש־$\lambda_s\perp\mu$, $\lambda_a\ll\mu$ ו־$\lambda=\lambda_a+\lambda_s$. אם λ מידה חיובית סופית, כך גם λ_a ו־λ_s.

הערה 7.17 הזוג (λ_a,λ_s) נקרא פירוק לבג של λ ביחס ל־μ.

משפט 7.18 (משפט Radon-Nikodym) בתנאי המשפט הקודם יש $h\in L^1(\mu)$ יחידה כך ש־$\lambda_a(E)=\int_E hd\mu$ לכל $E\in\mathcal{M}$.

הערה 7.19 פורמלית ניתן ונהוג לכתוב את מסקנת המשפט האחרון כ־$d\lambda_a=hd\mu$ (או אפילו $h=\frac{d\lambda_a}{d\mu}$). h הנ"ל נקראת נגזרת Radon-Nikodym של λ_a ביחס ל־μ.

הוכחה: (הוכחת שני המשפטים) נראה תחילה שהפירוק (λ_a,λ_s), אם קיים, הוא יחיד: ואמנם אם (λ_a',λ_s') פירוק בעל אותן תכונות, אזי

$$\lambda_a+\lambda_s=\lambda_a'+\lambda_s'\Rightarrow\lambda_a'-\lambda_a=\lambda_s-\lambda_s'$$

ועל פי טענה קודמת מתקיים $\lambda_a'-\lambda_a\ll\mu$ ו־$\lambda_s-\lambda_s'\perp\mu$, ולכן גם $\lambda_a'-\lambda_a=\lambda_s-\lambda_s'=0$, ונובע שהפירוק יחיד.

נניח כעת ש־λ מידה חיובית סופית על $\mathcal{M}$ (די להסתכל על מקרה זה, כי מידה מרוכבת בנויה ממידות חיוביות), ותהי $W \in L^1(\mu)$ המקיימת $0 < W(x) < 1$ לכל $x \in X$ (שקיומה הובטח בטענה קודמת שהראינו). הביטוי $d\varphi = d\lambda + W d\mu$ מגדיר מידה חיובית חסומה על $\mathcal{M}$ המקיימת:

$$(\dagger)\ \int_X f d\varphi = \int_X f d\lambda + \int_X f W d\mu$$

לכל f מדידה (אי־שלילית או מרוכבת). אם $f \in L^2(\varphi)$, נובע מאי־שוויון קושי שוורץ:

$$\left|\int_X f d\lambda\right| \leq \int_X |f|\, d\lambda \leq \int_X |f|\, d\varphi \overset{\text{Caushy Shwartz}}{\leq} \left(\int_X |f|^2 d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} (\varphi(X))^{\frac{1}{2}}$$

והיות ש־$\varphi(X) < \infty$, נובע לכן שהמיפוי $f \mapsto \int_X f d\lambda$ מגדיר פונקציונל לינארי חסום על $L^2(\varphi)$, לפיכך, היות ופונקציונל כזה שקול לכפל סקלרי באיבר של $L^2(\varphi)$, קיימת $g \in L^2(\varphi)$ כך ש־$\int_X f d\lambda = \int_X f g d\varphi$, וזאת לכל $f \in L^2(\varphi)$ (הערה: נשים לב ש־g מוגדרת כאיבר של $L^2(\varphi)$, ולכן כפונקציה היא נקבעת רק כ.ב.מ. $[\varphi]$ על X). עבור $f = \chi$ ל־$E \in \mathcal{M}$ בעלת $\varphi(E) > 0$, מקבלים: $\int_E g d\varphi = \lambda(E)$, ולכן:

$$0 \leq \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g d\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \leq 1$$

ומכאן ש־$g(x) \in [0,1]$ כ.ב.מ. $[\varphi]$ (על פי משפט קודם), ולכן ניתן להניח כי $0 \leq g(x) \leq 1$ לכל $x \in X$. כעת נובע (ע"י הצבת fg במקום f ב־$(\dagger)$):

$$(*) \quad \int_X (1-g) f d\lambda = \int_X f g W d\mu$$

נגדיר: $A = \{x : 0 \leq g(x) < 1\}, B = \{x | g(x) = 1\}$ ואת המידות λ_a ו־λ_s לכל קבוצה מדידה $E \in \mathcal{M}$ ע"י

$$\lambda_s(E) = \lambda(B \cap E)$$
$$\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E)$$

עבור $f = \chi_B$ ב־$(*)$ ברור שאגף שמאל מתאפס ואגף ימין הוא $\int_B W d\mu$ (כי $g(x) = 1$ עבור $x \in B$). היות ו־$W(x) > 0$ לכל $x \in X$ אז נובע ש־$\mu(B) = 0$, ולכן $\lambda_s \perp \mu$. היות ו־g חסומה, $(*)$ יתקיים על f מהצורה $\left(1 + g + g^2 + \ldots + g^n\right)\chi_E$ עבור $E \in \mathcal{M}$ ו־$n \in \mathbb{N}$. ל־f כזאת, הביטוי $(*)$ הוא מהצורה:

$$(**) \ \int_E \left(1 - g^{n+1}\right) d\lambda = \int_E g\left(1 + g + \ldots + g^n\right) W d\mu$$

בכל $x \in B$, $g(x) = 1$ ולכן $1 - g^{n+1}(x) = 0$. בכל נקודה $x \in A$, מתקיים כי $g^{n+1}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ מונוטונית. לכן כאשר $n \to \infty$, אגף שמאל של $(**)$ מתכנס ל־$\lambda(A \cap E) = \lambda_a(E)$. בה בעת, האינטגרנדים באגף ימין של $(**)$ עולים מונוטונית ומתכנסים לגבול מדיד אי־שלילי h. ממשפט ההתכנסות המונוטונית נובע שאגף ימין של $(**)$ יתכנס ל־$\int_E h d\mu$, כאשר $n \to \infty$. לכן נובע: $\lambda_a(E) = \int_E h d\mu$ לכל $E \in \mathcal{M}$, ועבור $E = X$, נובע $h \in L^1(\mu)$ (היות ו־$\lambda_a(X) < \infty$). מכאן ברור גם ש־$\lambda_a \ll \mu$, וזה משלים את הוכחת שני המשפטים למקרה שבו λ חיובית.

עבור λ מרוכבת, נציג אותה לפי פירוק ג'ורדן כצירוף לינארי של 4 מידות חיוביות, ונקבל את התוצאה במקרה המרוכב. ■

הערה 7.20 רוב תוכן המשפטים תקף למקרה שגם μ וגם λ חיוביות σ־סופיות (תרגיל).

משפט 7.21 יהיו μ מידה חיובית ו־λ מידה מרוכבת על $\mathcal{M}$, אזי התנאים הבאים שקולים:

1. $\lambda \ll \mu$.

2. לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך ש־$\mu(E) < \delta \Leftarrow |\lambda(E)| < \epsilon$ לכל $E \in \mathcal{M}$.

הוכחה: נניח ש־(2) מתקיים: אם $\mu(E) = 0$, אזי $\mu(E) < \delta$ לכל $\delta > 0$ ונובע ש־$|\lambda(E)| < \epsilon$ לכל $\epsilon > 0$ ולכן $\lambda(E) = 0$, כלומר (2) גורר (1).

נניח ש־(2) איננו מתקיים, אזי קיים $\epsilon > 0$ וקיימות $E_n \in \mathcal{M}$ עבור $n = 1, 2, \ldots$, כך ש־$\mu(E_n) < 2^{-n}$ אבל $|\lambda(E_n)| \geq \epsilon$. נגדיר $A_n = \cup_{i=n}^{\infty} E_i$ ו־$A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, אזי $\mu(A_n) < 2^{-n+1}$ ו־$A_n \supseteq A_{n+1}$ ולכן נובע $\mu(A) = 0$. אבל

$$|\lambda|(A) = \lim_{n \to \infty} |\lambda|(A_n) \geq \epsilon > 0$$

(כי $|\lambda|(A_n) \geq |\lambda|(E_n)$), ומכאן שלא מתקיים ש־$|\lambda| \ll \mu$, ולכן גם $\lambda \ll \mu$ לא מתקיים, ולכן (1) גורר את (2). ■

משפט 7.22 אם μ מידה מרוכבת על $\mathcal{M}$, אזי יש פונקציה מרוכבת מדידה h המקיימת $|h(x)| = 1$ לכל $x \in X$, כך ש־$d\mu = hd|\mu|$.

הערה 7.23 זה נקרא פירוק פולרי (polar) או הצגה פולרית של μ.

הוכחה: ברור ש־$|\mu| \ll \mu$ ולכן ממשפט Radon-Nikodym נובע שיש $h \in L^1(\mu)$ המקיימת את השוויון הנדרש. נראה ש־$|h(x)| = 1$ כ.ב.מ. $[\mu]$ ואז ברור שניתן לקחת h כך ש־$|h(x)| = 1$ לכל $x \in X$. נגדיר $A_r = \{x | |h(x)| < r\}$ לכל $r \geq 0$, ותהי $\{E_j\}$ חלוקה של A_r, אזי

$$\sum_j |\mu(E_j)| = \sum_j \left| \int_{E_j} hd|\mu| \right| \leq \sum_j r|\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r)$$

ומכאן: $|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r)$. עבור $r < 1$ זה אפשרי רק אם $|\mu|(A_r) = 0$, ולכן $|h(x)| \geq 1$ כ.ב.מ. $[\mu]$. מצד שני, אם $|\mu|(E) > 0$, אזי

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E hd|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1$$

ונובע $|h(x)| \leq 1$ כ.ב.מ. $[\mu]$. משני אי השוויונים קיבלנו כי $|h(x)| = 1$ כ.ב.מ. $[\mu]$. ■

משפט 7.24 נניח ש־μ מידה חיובית על $\mathcal{M}$, $g \in L^1(\mu)$ ונגדיר מידה מרוכבת על $\mathcal{M}$ ע"י $\lambda(E) = \int_E gd\mu$ (כלומר $d\lambda = gd\mu$). אזי, $|\lambda|(E) = \int_E |g| d\mu$ (כלומר $d|\lambda| = |g| d\mu$).

הוכחה: בתרגיל. ■

משפט 7.25 (משפט ההצגה של Riesz – גרסה מרוכבת) יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית, אזי לכל פונקציונל לינארי חסום Φ על $C_c(X)$ קיימת מידת בורל מורכבת רגולרית יחידה μ על X כך שלכל $f \in C_c(X)$ מתקיים כי $\Phi f = \int_X fd\mu$.
חסימות Φ: $||\Phi|| = \sup_{f \in C_c(X)} \frac{|\Phi f|}{||f||_\infty} = |\mu|(X) < \infty$.
ניתן לנסח את המשפט גם על מרחב פונקציות גדול יותר מ־$C_c(X)$ כפי שניתן בתרגיל.

8 גזירה

בפרק זה נצטמצם למרחב $\mathbb{R}^k$, כאשר בכל מקום בו נאמר מידה הכוונה היא למידת בורל, ונסמן ב־m את מידת לבג על מרחב זה.

סימונים: $B\left(x,r\right)=\left\{ y\in\mathbb{R}^{k}\left|\left|y-x\right|<r\right.\right\}$ נקרא הכדור הפתוח ברדיוס r סביב x, כאשר נסמן את הנורמה באמצעות הערך המוחלט, כלומר $\left|y-x\right|=\left|\left|y-x\right|\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left|x_{i}-y_{i}\right|^{2}}$. בהינתן מידה מרוכבת μ על $\mathbb{R}^{k}$:

$$\left(Q_{r}\mu\right)\left(x\right)=\frac{\mu\left(B\left(x,r\right)\right)}{m\left(B\left(x,r\right)\right)}$$

ובנוסף נסמן גם:

$$\left(D\mu\right)\left(x\right)=\lim_{r\to0}\left(Q_{r}\mu\right)\left(x\right)$$

$$\left(M\mu\right)\left(x\right)=\sup_{0<r<\infty}\left(Q_{r}\mu\right)\left(x\right)$$

כאשר $\left(D\mu\right)\left(x\right)$ מוגדר רק כאשר הגבול קיים, ונחשוב עליו כסוג של נגזרת, ו־$M\mu$ נקראת הפונקציה המקסימלית ומוגדרת תמיד. קל להראות כי $Q_{r}\mu$ ו־$M\mu$ הן פונקציות מדידות.

למה 8.1 אם W איחוד סופי של כדורים $W=\cup_{i=1}^{N}B\left(x_{i},r_{i}\right)$, אזי קיימת $S\subseteq\left\{ 1,\ldots,N\right\}$ כך שמתקיימות התכונות הבאות:

1. הכדורים $B\left(x_{i},r_{i}\right)$ עבור $i\in S$ הם זרים.
2. $W\subseteq\cup_{i\in S}B\left(x_{i},3r_{i}\right)$.
3. $m\left(W\right)\leq3^{k}\sum_{i\in S}m\left(B\left(x_{i},r_{i}\right)\right)$.

הוכחה: נסדר את הכדורים $B_{i}=B\left(x_{i},r_{i}\right)$ כך ש־$r_{1}\geq r_{2}\geq\ldots$. נגדיר $i_{1}=1$. "נסלק" את כל הכדורים שחותכים את $B_{i_{1}}$ וניקח את $B_{i_{2}}$ להיות הראשון מבין הכדורים הנותרים (שאינם חותכים את $B_{i_{1}}$). דהיינו: $i_{1}=1$, ו־$i_{2}=\min\left\{ j|B_{i_{1}}\cap B_{j}=\emptyset\right\}$. עתה, "נסלק" מתוך הכדורים הנותרים את אלה שחותכים את $B_{i_{2}}$ וניקח את $B_{i_{3}}$ להיות הכדור הראשון מבין הכדורים שלא חותך את $B_{i_{1}}\cup B_{i_{2}}$, ובאותו אופן נמשיך עד אשר לא קיימים כדורים נוספים שלא חותכים את $\cup_{k=1}^{n-1}B_{i_{1}}$. באופן ריקורסיבי נכתוב:

$$i_{1}=1$$

$$i_{n+1}=\min\left\{ j|B_{j}\cap\left(\cup_{k=1}^{n}B_{i_{k}}\right)=\emptyset\right\}$$

כיוון שמדובר באוסף סופי התהליך חייב להיעצר בשלב מסויים. ברור מהבנייה שתכונה (1) מתקיימת. היות וכל B_{j} ש־"סולק" הוא תת־קבוצה של $B\left(x_{i},3r_{i}\right)$ עבור $i\in S$ כלשהוא, ולכן גם תכונה (2) מתקיימת. תכונה (3) נובעת ישירות מ־(2). ■

משפט 8.2 אם μ מידה מרוכבת על $\mathbb{R}^{k}$, אזי לכל מספר חיובי λ מתקיים:

$$m\left(\left\{ x|\left(M\mu\right)\left(x\right)>\lambda\right\} \right)\leq3^{k}\lambda^{-1}\left|\mu\right|\left(\mathbb{R}^{k}\right)$$

הוכחה: תהי K תת־קבוצה קומפקטית של הקבוצה הפתוחה $\left\{ x|\left(M\mu\right)\left(x\right)>\lambda\right\} \equiv\left[M\mu>\lambda\right]$ (סימון מקוצר בו נשתמש גם בהמשך בהקשר אחרים). כל $x\in K$ הוא מרכז של כדור פתוח B שעבורו מתקיים $\left|\mu\right|\left(B\right)>\lambda m\left(B\right)$, ואיחוד הכדורים הנ"ל מכסה את K. היות ו־K קומפקטית, יש תת־כיסוי סופי של K מתוך הכדורים הנ"ל, וממנו ניתן לקבל באמצעות הלמה האחרונה אוסף של כדורים זרים $\left\{ B_{1},\ldots,B_{n}\right\}$, כך ש־

$$m\left(K\right)\leq3^{k}\sum_{i\in S}m\left(B_{i}\right)\overbrace{\leq}^{(*)}3^{k}\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu\right|\left(B_{i}\right)\overbrace{\leq}^{(**)}3^{k}\lambda^{-1}\left|\mu\right|\left(\mathbb{R}^{k}\right)$$

כאשר $(*)$ נובע מבחירת הכדורים, ו־$(**)$ נובע מזרות הכדורים. עתה, כיוון שאי השוויון הנ"ל מתקיים לכל קבוצה קומפקטית $K\subseteq\left[M\mu>\lambda\right]$, אז בפרט מהרגולריות של מידת לבג נובעת תוצאת המשפט (ע"י לקיחת סופרמום על כל הקבוצות הקומפקטיות $K\subseteq\left[M\mu>\lambda\right]$). ■

הגדרה 8.3 אומרים שפונקציה מרוכבת מדידה על $\mathbb{R}^k$ היא "L^1 באופן חלש על $\mathbb{R}^k$" (או שהיא במרחב "$\text{weak } L^1$" על $\mathbb{R}^k$) אם הפונקציה: $\lambda \cdot m\left(\{|f| > \lambda\}\right)$ היא פונקציה חסומה של λ על $(0, \infty)$.

הערה 8.4 עבור $f \in L^1\left(\mathbb{R}^k\right)$ מתקיים: $m\left(\{|f| > \lambda\}\right) \le \lambda^{-1} ||f||_1$, כי אם $E = \{|f| > \lambda\}$ אזי:

$$\lambda \cdot m(E) \le \int_E |f|\, dm \le \int_{\mathbb{R}^k} |f|\, dm = ||f||_1$$

ולכן $L^1 \subseteq \text{weak } L^1$.

הגדרה 8.5 עבור כל $f \in L^1\left(\mathbb{R}^k\right)$ ישנה פונקציה מקסימלית $Mf\mathbb{R}^k \to [0, \infty]$ המוגדרת ע"י

$$(Mf)(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f|\, dm$$

והיא שקולה לפונקציה המקסימלית המתאימה למידה μ הנתונה ע"י $d\mu = f dm$.

מסקנה 8.6 (מהמשפט האחרון) לכל $f \in L^1\left(\mathbb{R}^k\right)$ מתקיים $Mf \in \text{weak } L^1\left(\mathbb{R}^k\right)$, כלומר M "שולח" פונקציות L^1 לפונקציות שהן L^1 באופן חלש. בפרט, לכל $f \in L^1\left(\mathbb{R}^k\right)$ ולכל $\lambda > 0$ מתקיים:

$$m\left(\{Mf > \lambda\}\right) \le 3^k \lambda^{-1} ||f||_1$$

הגדרה 8.7 תהי $f \in L^1\left(\mathbb{R}^k\right)$ ונקודה $x \in \mathbb{R}^k$ שעבורה:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dm(y) = 0$$

נקראת נקודת לבג (Lebesgue Point) של f, כאשר $dm(y)$ פשוט מסמן כי y הוא משתנה האינטגרציה ו־x הוא קבוע באינטגרציה.

הערה 8.8 קל לראות שכל נקודת רציפות של f היא גם נקודת לבג. במובן מסיים, נקודת לבג היא נקודת רציפות כאשר "מתעלמים" ממספר בן מנייה של נקודות אי רציפות.

משפט 8.9 אם $f \in L^1\left(\mathbb{R}^k\right)$, אזי כמעט כל $x \in \mathbb{R}^k$ היא נקודת לבג.

הוכחה: נגדיר לכל $x \in \mathbb{R}^k$ ו־$r > 0$:

$$(T_r f)(x) = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)|\, dm$$

ובנוסף נגדיר:

$$(Tf)(x) = \limsup_{r \to 0} (T_r f)(x)$$

עתה צ"ל ש־$Tf = 0$ כ.ב.מ. $[m]$.

יהיו $y > 0$, $n \in \mathbb{N}$. מצפיפות הפונקציות הרציפות ב־$L^1\left(\mathbb{R}^k\right)$ נובע שיש $g \in C\left(\mathbb{R}^k\right)$ כך ש־$||f - g||_1 < \frac{1}{n}$. נסמן $h = f - g$. היות ו־g רציפה, $Tg = 0$ בכל מקום. היות ו־

$$(T_r h)(x) \le \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |h|\, dm + |h(x)|$$

נובע כי $Th \leq Mh + |h|$. היות ו־$T_r f \leq T_r g + T_r h$, נובע:

$$Tf \leq Th \leq Mh + |h|$$

ולכן:

$$\{Tf > 2y\} \subseteq \{Mh > y\} \cup \{|h| > y\} \equiv E(y,n)$$

היות ו־$||h||_1 < \frac{1}{n}$, נובע:

$$\begin{aligned} m(E(y,n)) &\leq 3^k y^{-1} ||h||_1 + y^{-1} ||h||_1 \\ &\leq \frac{3^k+1}{yn} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

(כאשר הגורם השני באי השוויון הראשון הוא כיוון ש־$h \in L^1(\mathbb{R}^k)$ וראינו מקודם כי אי השוויון הזה תמיד מתקיים – בהערה להגדרה).

כמו כן, היות וההכלה $\{Tf > 2y\} \subseteq E(y,n)$ נכונה לכל n, נובע: $\{Tf > 2y\} \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} E(y,n)$, ולכן $m(\{Tf > 2y\}) = 0$. זה נכון לכל $y > 0$, ולכן $Tf = 0$ כ.ב.מ. $[m]$. ■

משפט 8.10 תהי μ מידת בורל מרוכבת על $\mathbb{R}^k$ המקיימת $\mu \ll m$. תהי f נגזרת Radon-Nikodym של μ ביחס ל־m (ממשפט 7.18), אזי $D\mu = f$ כ.ב.מ. $[m]$ ומתקיים $\mu(E) = \int_E (D\mu)\, dm$, לכל קבוצת בורל $E \subseteq \mathbb{R}^k$.

הערה 8.11 כלומר, ניתן לזהות את $D\mu$ עם נגזרת Radon-Nikodym של μ ביחס ל־m: $D\mu = \frac{d\mu}{dm}$.

הוכחה: ממשפט Radon-Nikodym נובע ש־$\mu(E) = \int_E f dm$ לכל קבוצת בורל E, ולכן בכל נקודת לבג x של f נובע:

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f dm = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))}$$

לכן רואים שבנקודה כזו $D\mu$ קיימת ושווה ל־f. מכאן $D\mu = f$ כ.ב.מ. $[m]$ (נשים לב ש־f ממשפט Radon-Nikodym מוגדרת כ.ב.מ. $[m]$, אבל כיוון שהשוויון פה הוא גם כן כ.ב.מ. $[m]$ אז זאת לא בעיה בפועל). ■

הגדרה 8.12 תהי $x \in \mathbb{R}^k$. אומרים שסדרת קבוצות בורל $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ "מתכווצת יפה ל־x" אם קיימים $\alpha > 0$ וסדרת מספרים חיוביים $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{i\to\infty} r_i = 0$, כל שלכל i: $E_i \subseteq B(x, r_i)$ וגם $m(E_i) > \alpha \cdot m(B(x, r_i))$.

משפט 8.13 תהי $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$, $x \in \mathbb{R}^k$ נקודת לבג של f ו־$\{E_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות בורל המתכווצת יפה ל־x, אזי מתקיים:

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} f dm$$

הוכחה: יהי α ו־$\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ המתאימים ל־$\{E_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ בהגדרת "מתכווצת יפה", אזי:

$$\frac{\alpha}{m(E_i(x))} \int_{E_i(x)} |f - f(x)|\, dm \leq \frac{1}{m(B(x,r_i))} \int_{B(x,r_i)} |f - f(x)|\, dm \underset{i\to\infty}{\to} 0$$

וכיוון שאי השוויון הנ"ל נכון לקבוע α, אז בפרט הוא נכון גם כאשר נחליף אותו ב־1, ומכאן נובע המשפט. ■

משפט 8.14 אם $f\in L^1\left(\mathbb{R}^1\right)$ ו־$F\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}fdm$ ל־$-\infty<x<\infty$, אזי: $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ בכל נקודת לבג של f, ולכן בפרט כ.ב.מ. $[m]$.

הוכחה: תהי $\{\delta_i\}$ סדרת חיוביים ששואפת לאפס. אם ניקח במקפט הקודם $E_i\left(x\right)=\left[x,x+\delta_i\right]$ (עבור x נקודת לבג) נקבל שהנגזרת החד־צדדית של F מימין מקיימת ושווה ל־$f\left(x\right)$. בדומה מראים עבור הנגזרת החד צדדית משמאל , ונובע $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$. ■

הגדרה 8.15 תהי E קבוצה מדידה לבג ב־$\mathbb{R}^k$. הצפיפות המטרית של E בנקודה $x\in\mathbb{R}^k$ מוגדרת להיות $\lim_{r\to0}\frac{m(E\cap B(x,r))}{m(B(x,r))}$ בכל מקום שבו הגבול קיים.

מסקנה 8.16 הצפיפות המטרית של קבוצה מדידה E היא 1 כ.ב.מ. $[m]$ על E ו־0 כ.ב.מ. $[m]$ על E^c. בפרט, לא קיימת קבוצה מדידה $E\subseteq\mathbb{R}$ ו־$0<\epsilon$ כך ש־ $\epsilon<\frac{m(E\cap I)}{m(I)}<1-\epsilon$ לכל קטע I.

הוכחה: כמעט כל נקודה היא נקודות לבג של הפונקציה האופיינית χ_E, ומכך נובעת המסקנה. ■

9 נושאים חשובים שלא עברו בקורס מפאת חוסר זמן

- משפט הפירוק של האן: הפירוק של מידה באיזשהו מובן של מידה ממשית פחות חיובית הוא במובן מסוים "אופטימלי".
- משפט פוביני: מתי השוויונות הבאים מתקיימים:

$$\int\left(\int f\left(x,y\right)d\mu\left(y\right)\right)d\lambda\left(x\right)=\int\left(\int f\left(x,y\right)d\lambda\left(x\right)\right)d\mu\left(y\right)=\int f\left(x,y\right)d\left(\mu\times\lambda\right)\left(x,y\right)$$

למעשה התנאים האלו הם התנאים של שינוי סדר סכימה: עבור פונקציה כללית את מסתכלים על הערכים המוחלטים (כלומר אינטגרל על הערך המוחלט), או לחילופין כאשר מדובר בפונקציה חיובית.

לגבי המבחן: כל ההרצאות והתרגולים הם בחומר לבחינה. יהיה תרגול נוסף. כל המשפטים, כל ההגדרות.

המתכונת תהיה כמו בשנה שעברה (עד כדי משקלי החלקים):

- חלק א': כ־30־20% מהציון – עובדות בסיסיות – 5־6 שאלות קצרות בלי בחירה. להגדיר דברים בסיסיים, לצטט משפטים (משפט לוסין, משפט ההצה של ריס, מה זה מידה, מה זאת σ־אלגברה, מה זה L^p, מה זה L^1 חלש, וכו'...)
- חלק ב': כ־60־50% מהציון – בחירה 2 מתוך 3 – שאלות על משפטים מהחומר. למשל נסח והוכח את משפט לוסין. בכל מקום ניתן להתסמך רק על מה שהוכח עד השלב הזה בקורס. מומלץ להשתמש באותה ההוכחה ורמת הפירוט שהייתה בכיתה. עוד דוגמא: כל מרחב L^p הוא מרחב מטרי שלם. לא יבקש להוכיח את כל משפט ההצגה של ריס, אבל אולי ינתנו חלקים ממנו.
- חלק ג': כ־30־10% מהציון – שאלות כמו שהיו בתרגיל (אולי יהיו דומות לתרגילים ואולי לא יהיו שונות). בחירה 1 מתוך 2, או 2 מתוך 3. שאלות שבודקות הבנה.

חשוב לשים לב כי משקל השאלה לא קשור לאורכה. המרצה ציין כי הרבה מהתשובות שנתנות לחלק ג' בד"כ הן פחות טובות מהתשובות שנתנות בחלק ב'. בחלק א' התשובות הן בד"כ קצרות.

חלק II

תרגולים

10 תרגול 1 – 09.11.2016

10.1 מנהלות

משקל התרגילים בקורס הוא 20% אם ציון התרגילים גדול מציון הבחינה, ואחרת 10%. ציון התרגילים יקבע על פי 80% התרגילים הטובים ביותר (כנראה 8 או 9 תרגילים). תרגילים עודפים יתנו בונוס ישיר לציון הסופי כאשר כל תרגיל תורם $\frac{\text{Grade of Assignment}}{100}$. יום הגשת התרגילים כנראה יהיה בימי רביעי. התרגילים הולכים להיות יותר קשים מרוב הקורסים.

הקורס עוקב אחרי הספר Real and Complex Analysis מאת Walter Rudin.

10.2 מוטיבציה לקורס

1. אינטגרל רימן לא מספיק טוב

   (א) אם מסתכלים על $H([a,b])$, מרחב הפונקציות האינטגרבליות לפי רימן, לא משנה איזה מרחב מטרי ניתן לו הוא לא יהיה שלם.

   (ב) התנהגות לא מספיק טובה ביחס לגבולות. אם יש לנו סדרת פונקציות $f_n \to f$ נקודתית, אם f_n אינטגרבילית אז לא בטוח ש־f תהיה אינטגרבילית, גם תחת תנאים שאמורים לגרום ל־f "להתנהג יפה".

2. לפתח תורת אינטגרציה אבסטרקטית על מרחבים כלליים יותר: במהלך הקורס נראה שאפשר להגדיר אינטגרציה על סדרות (כלומר סכומים), או על חבורות.

3. לדעת להתמודד ולתת גודל לקבוצות "מוזרות"

10.2.1 הרעיון של לבג

נניח כי יש לנו פונקציה על הקטע $[0,1]$. לפי רימן נוכל ע"י חלוקה של השטח מתחת הפונקציה למלבנים כאשר הבסיס שלהם על ציר ה־x, ואם הפונקציה אינטגרבילית אז הסכום של השטחים מתכנס לערך ככל שהחלוקה נהיית יותר ויותר עדינה. לעומת זאת, הרעיון של לבג היה להסתכל על חלוקה של ציר ה־y במקום ציר ה־x, כאשר גבהי המלבנים נקבעים מראש לפי החלוקה, ואנחנו מסתכלים על הקטעים בציר ה־x שמתאימים לכל גובה של מלבן. אם נסתכל על פונקציה m שלוקחת קבוצה ונותנת לה גודל (כלומר מידה), אז נוכל להגדיר את האינטגרל באופן הבא: $S_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{i}{n} m\left(f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right)\right)$. במילים, במקום לחלק את x לקטעים ולכל קטע לתת ערך שמתאים לגובה המלבן, אנחנו מחלקים את הגדלים האפשריים של מלבנים, ולכל מלבנים "סופרים" את מספר ה־x־ים שעבורם $f(x)$ בגובה המלבן. הבעיה בגישה זו שצריך להגדיר את m כך שנוכל לתת גודל גם לקבוצות לא טריוויאליות.

לאור הרעיון של לבג לניסוח מחדש של האינטגרל, מהן הדרישות שנרצה ממידה?

1. פונקציה אי־שלילית המוגדרת על חלק מתתי הקבוצות של $\mathbb{R}$, כלומר $m : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$.
2. σ־אדיטיביות: אם $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות של קבוצות זרות בזוגות, אזי $m(\cup A_n) = \sum_n m(A_n)$.
3. נניח ש־$m(X) < \infty$ אז בהינתן קבוצה $A \in \mathcal{A}$, אם אנחנו יודעים את $m(A)$ אז נרצה להיות מסוגלים לדעת גם את $m(A^c)$, כאשר מתקיים ש־$m(A) + m(A^c) = m(X)$.

11 תרגול 2 – 16.11.2016 – טכניקות של מדידות

יהי $(X,\mathcal{F})$ מרחב מדיד. בהינתן $f:X\to[0,\infty]$, אז היא מדידה אם לכל קבוצה פתוחה $J\subseteq[0,\infty]$ אז $f^{-1}(J)\in\mathcal{F}$.

טענה 11.1 יהי $(X,\mathcal{F})$ מרחב מדיד ונתונה פונקציה מדידה $f_n:X\to\mathbb{R}$ מדידה, אזי הקבוצה $A=\{x\in X|\lim f_n(x)\ \text{exists}\}$ מדידה.

הוכחה: הדרך לתקוף את הבעיה היא ע"י המרת התנאי שבהגדרת הקבוצה לפעולות על קבוצות מדידות, כאשר התנאי "קיים" בד"כ שקול לאיחוד ו"לכל" שקול לחיתוך.

נזכר עתה בתנאי קושי לקיום גבול ב־x: $\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\forall n,m>N,|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon$. נבחר ϵ ספציפי כך ש־$\epsilon=\frac{1}{k}$ ונכתוב את התנאי מחדש: $\forall k\in\mathbb{N}\exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\forall n,m>N,|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{1}{k}$. עתה בעזרת התנאי הזה נוכל לכתוב את A בצורה יותר מפורשת:

$$A=\cap_{k\in\mathbb{N}}\cup_{N\in\mathbb{N}}\cap_{n,m>N}\overbrace{\left\{x|\,|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{1}{k}\right\}}^{A_{nmk}}$$

נותר להראות עתה ש־A_{nmk} מדידה. הפונקציה $g=|f_n(x)-f_m(x)|$ מדידה (בתור חיבור מדידות והרכבה עם ערך מוחלט שהוא מדיד), ולכן מהגדרה $A_{nmk}=g^{-1}\left(-\infty,\frac{1}{k}\right)$ מדידה וסיימנו. ■

ניתן גם להוכיח את המשפט באופן הבא: **הוכחה:** נוכיח ש־A^c מדידה. לצורך הפשטות נניח שקיים $C>0$ כך ש־$\forall n\forall x\,|f_n(x)|<C$. אבחנה: $\lim f_n(x)$ לא קיים אם"ם $\liminf_n f_n(x)<\limsup_n f_n(x)$. כבר הראינו בכיתה כי $\liminf_n f_n$ ו־$\limsup_n f_n$ הן מדידות. נוכל עתה לכתוב כי $A^c=\{x|\liminf f_n<\limsup f_n\}$.

אבחנה: $a<b\in\mathbb{R}\iff\exists q\in\mathbb{Q},a<q<b$, ולכן נוכל לכתוב:

$$\begin{aligned}A^c&=\cup_{q\in\mathbb{Q}}\{x|\liminf f_n(x)<q<\limsup f_n(x)\}\\&=\cup_{q\in\mathbb{Q}}\{x|\liminf f_n(x)<q\}\cap\{x|\limsup f_n(x)>q\}\end{aligned}$$

עתה כל אחת משתי הקבוצות לעיל היא מדידה ושוב הראינו כי A מדידה. ■

11.1 גבולות של קבוצות

הגדרה 11.2 נתונה קבוצה X ו־$A_n\in\mathbb{P}(X)$ (כאשר $\mathbb{P}(X)$ היא קבוצת תתי הקבוצות של X) אזי

$$\liminf_n A_n=\cup_{n\in\mathbb{N}}\cap_{m>n\in\mathbb{N}}A_m$$
$$\limsup_n A_n=\cap_{n\in\mathbb{N}}\cup_{m>n\in\mathbb{N}}A_m$$

כאשר $\liminf$ למעשה מכיל את כל ה־x־ים ששייכים רק למספר סופי של קבוצות בסדרה (A_n), בעוד $\limsup$ מכיל את כל ה־x־ים ששייכים למספר אינסופי של קבוצות בסדרה (A_n), כלומר ה־x־ים השכיחים. אם $\limsup A_n=\liminf A_n$ אז נגדיר $\lim A_n=\limsup A_n$.

דוגמאות:

- נסתכל על $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\ldots$ אזי הגבול קיים ומתקיים $\lim A_n=\cup_n A_n$.
- יהיו $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\ldots$ ואז מתקיים כי $\lim A_n=\cap A_n$.
- (בתרגיל הבית) $\liminf\chi_{A_n}=\chi_{\liminf A_n}$

- אם A_n מדידות אז כך גם $\liminf A_n$ ו־$\limsup A_n$.

דוגמא: תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ מדידה בורל. אזי $A=\{x|f \text{ is continuous at } x\}$ מדידה (להוכיח אותו הדבר על גזירות כתרגיל).

הוכחה: נוכיח ש־A^c מדידה בורל. אבחנה: f לא רציפה ב־x אס"ם קיים $\epsilon>0$ כך שכל $\delta>0$ קיים קטע $[p,q]$ $x\in$ כך ש־$p,q\in\mathbb{Q}$ ו־$q-p<\delta$ וגם $\sup_{[p,q]}f(x)>\inf_{[p,q]}f(x)+\epsilon$.

עתה נגדיר לכל m,n:

$$B_{mn}=\left\{[p,q]\,|p,q\in\mathbb{Q}\wedge|p-q|<\frac{1}{m}\wedge\sup_{[p,q]}f>\inf_{[p,q]}f+\frac{1}{n}\right\}$$

ונשים לב ש־B_{mn} היא מדידה בתור איחוד בן מנייה של קטעים. עתה לפי האבחנה x היא נקודת אי רציפות אס"ם קיים n כך ש־$x\in B_{mn}$ אינסוף פעמיים, ולכן $A=\cup_{n\in\mathbb{N}}\limsup_m B_{mn}$ ולכן מדידה. ■

12 תרגול 3 – 23/11/201 – מידות חיוביות ואינטגרל לבג

הגדרה 12.1 יהי מרחב מידה $(X,\mathcal{F})$. הפונקציה $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ תקרא מידה חיובית אם היא מקיימת את תכונת ה־σ־אדיטיביות, כלומר לכל סדרת קבוצות $A_n\in\mathcal{F}$ זרות זו לזו, מתקיים $\mu(\cup_n A_n)=\sum_n\mu(A_n)$, כאשר נניח כי $\mu(\emptyset)=0$.

תכונות:

1. אם $\ldots\subseteq A_2\subseteq A_1$ אז $\lim\mu(A_n)=\mu(\cup A_n)$
2. אם $\ldots\supset A_3\supset A_2\supset A_1$ וגם $\mu(A_1)<\infty$ אזי $\lim\mu(A_n)=\mu(\cap_n A_n)$.

הערה 12.2 התכונות הנ"ל נובעות מתוך הנחת ה־σ־אדיטיביות. אם היינו דורשים רק אדיטיביות אז הן לא היו מתקיימות.

דוגמאות:

1. תהי X קבוצה לא ריקה. נסתכל על $\mathcal{F}=\mathbb{P}(X)$ (קבוצת כל תתי הקבוצות של X), ותהי $f:X\to[0,\infty]$, אזי f מגדיר מידה $\mu_f:\mathbb{P}(X)\to[0,\infty]$ המוגדרת ע"י $\mu_f(A)=\sum_{x\in A}f(x)$.
   (א) אם $f\equiv1$ אזי μ_f נקראת "מידת המנייה", כלומר $\mu_1(A)=\#A$ (מספר האיברים בקבוצה אם סופית, אחרת אינסוף). בד"כ $X=\mathbb{N}$ או $X=\mathbb{Q}$. נשים לב כי אינטגרל לבג תחת מידה זאת הוא פשוט סכום של סדרה.
   (ב) נניח שקיים $x_0\in X$ כך ש־$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq x_0\\ 1 & x=x_0\end{cases}$, אז המידה המתקבלת נקראת מידת דלתא של דירק (Dirac), כלומר $\delta_{x_0}(A)=\begin{cases}1 & x_0\in A\\ 0 & x_0\notin A\end{cases}$.
   (ג) אם X בת מנייה ו־$\mathcal{F}=\mathbb{P}(X)$, אזי כל מידה חיובית על X היא מהצורה μ_f לעיל (ניתן ללא הוכחה). כלומר $\mu=\mu_f=\sum_{x\in X}f(x)\cdot\delta_x$, כאשר למעשה יש פה טענה חבויה שצירוף לינארי של מידות הוא גם מידה.
2. דחיפה (push-forward) של מידה: יהיו $(X_1,\mathcal{F}_1)$ ו־$(X_2,\mathcal{F}_2)$ מרחבים מדידים, ובנוסף קיימת $\mu:\mathcal{F}_1\to[0,\infty]$. תהי $f:X_1\to X_2$ כך ש־$f^{-1}(A)\in\mathcal{F}_1$ לכל $A\in\mathcal{F}_2$. אזי נגדיר $(f_*\mu):\mathcal{F}_2\to[0,\infty]$ ע"י $(f_*\mu)(A)=\mu\left(f^{-1}(A)\right)$.

(א) משפט חילוף משתנה: יהי $(X,\mathcal{F},\mu)$ מרחב מידה, $(Y,\mathcal{M})$ מרחב מדיד, ו־$f:X\to Y$ כמקודם אזי לכל $g:Y\to[0,\infty]$ מדידה מתקיים

$$\int_Y gd\left(f_*\mu\right)=\int_X g\circ fd\mu$$

במקרה ש־$X=Y=\mathbb{R}^n$, ו־$\mu=m$ תהי מידת לבג (תרם הוגדרה פורמלית), אז ניראה כי $f_*m=\tilde{f}\cdot m$ כאשר $(f\cdot m)(A)=\int_A fdm$. בפועל מתקיים כי $\tilde{f}=\det(Df)$ כאשר Df הוא היעקוביאן של f.

3. יהי $(X,\mathcal{F})$ מרחב מדיד, ותהי $\mathcal{E}\subset\mathcal{F}$ כך ש־$\emptyset,X\in\mathcal{E}$, ותהי $\rho:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ כך ש־$\rho(\emptyset)=0$ (ונחשוב על ρ בתור אורך הקטע). נגדיר מידה חיצונית ע"י

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum\rho(E_i)\,|\,\{E_i\}\subset\mathcal{E}\text{ and it is an open cover of }A\right\}$$

לכל $A\in\mathbb{P}(X)$.

הגדרה 12.3 (אינטגרל לבג) יהי $(X,\mathcal{F})$ מרחב מידה. פונקציה פשוטה s מוגדרת ע"י $s=\sum_{i=1}^n\lambda_i\chi_{A_i}$ עבור $A_i\in\mathcal{F}$ ו־$\lambda_i\geq0$, ונגדיר

$$\int_X sd\mu=\sum_{i=1}^n\lambda_i\mu(A_i)$$

עבור $f:X\to[0,\infty]$ מדידה נגדיר

$$\int_X fd\mu=\sup\left\{\int_X sd\mu|0\leq s\leq f\text{ and }s\text{ is simple}\right\}$$

הערה 12.4 ההגדרה לעילה טובה כי הוכחנו שקיימת סדרת פונקציות פשוטות s_n שמתכנסת נקודתי ל־f.

$$s_n=\left(\sum_{k=1}^{n2^n-1}k2^{-n}\chi_{\{k2^{-n}\leq f\leq(k+1)2^{-n}\}}\right)+n\chi_{\{n\leq f\}}$$

13 תרגול 4 – 30.11.2016 – משפטי התכנסות

שאלה: יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה, ו־$f_n:X\to[0,\infty]$ מדידות כך ש־$f_n\to f$ (נקודתית). האם $\int_X f_nd\mu\to\int_X fd\mu$?

טענה 13.1 אם $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה סופי (כלומר $\mu(X)<\infty$) ו־$f_n:X\to[0,\infty)$ מדידות כאשר $f_n\to f$ (במידה שווה), אזי $\int_X f_nd\mu\to\int_X fd\mu$.

הוכחה: (סקיצה) נתחיל מ־$\left|\int_X f_nd\mu-\int_X fd\mu\right|=\left|\int_X(f_n-f)d\mu\right|$ כאשר השתמשנו פה במובלע במשפט ההתכנסות המונוטונית (כי השתמשנו באדיטיביות של האינטגרל). מכאן $\left|\int_X(f_n-f)d\mu\right|\leq\int_X|f_n-f|d\mu$. בהינתן $\epsilon>0$ נבחר N כך שלכל $n>N$ מתקיים כי $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$ (בגלל הבמ"ש) ולכן $\int_X|f_n-f|d\mu\leq\int_X\epsilon d\mu=\epsilon\mu(X)\to0$. ■

3 מקרים גנריים שאין התכנסות: (ביחס למידה שתגדיר בעתיד אינטגרל שמתלקד עם אינטגרל רימן)

1. בריחה אופקית ל־∞: $f_n=\chi_{[n,n+1]}$ ו־$X=\mathbb{R}$ אזי $f_n\to0$ נקודתית אבל $\int_X f_n=1$.

2. בריחה רוחבית ל־∞: $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$ ו־$X = \mathbb{R}$ אזי $f_n \to 0$ במ"ש אבל $\int_X f_n = 1$.
3. בריחה אנכית ל־∞: $f_n = n\chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$ ו־$X = \mathbb{R}$ אזי $f_n \to 0$ נקודתית אבל $\int_X f_n = 1$.

אם f_n סדרה מונוטונית את מקרים 1־3 לעיל לא יכולים להתרחש. באותו אופן אם קיימת $g \in \mathcal{L}^1(X)$ ו־$|f_n| \le |g|$.

למה 13.2 (הלמה של פאטו Fatuo) יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה ו־$f_n : X \to [0,\infty]$ מדידות אזי

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \le \liminf_n \int_X f_n d\mu$$

הגדרה 13.3 יהי $(X,\mathcal{F},\mu)$ מרחב מידה, $(Y,\mathcal{M})$ (מרחב טופולוגי?) ו־$f : X \to Y$ כך שלכל $A \in \mathcal{M}$ מתקיים כי $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. הגדרנו $(f_*\mu) : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ ע"י $(f_*\mu)(A) = \mu\left(f^{-1}(A)\right)$.

משפט 13.4 (חילוף משתנה) בתנאים לעיל, לכל $g : Y \to [0,\infty]$ מדידה, אזי

$$\int_Y g d(f_*\mu) = \int_X g \circ f d\mu$$

הוכחה: נוכיח את המשפט בשלושה שלבים:

1. נוכיח עבור פונקציה מציינת, כלומר עבור $g = \chi_A$ כך ש־$A \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}\int_Y \chi_A d(f_*\mu) &= (f_*\mu)(A) = \mu\left(f^{-1}(A)\right) = \int_X \chi_{f^{-1}(A)} d\mu \\ &= \int_X (\chi_A \circ f)\, d\mu\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון הוא בגלל ש־$\chi_{f^{-1}(A)} = \chi_A \circ f$ (טענה טריוויאלית וקלה לבדיקה).

2. נוכיח עבור $g = s = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}$ עבור $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ ו־$A_i \in \mathcal{A}$ – נובע ישירות מ־(1) ומלינאריות האינטגרל.
3. נניח $g : Y \to [0,\infty]$ מדידה. ראינו בכיתה שקיימת סדרת פונקציות פשוטות $0 \le s_n \le g$ כך ש־$s_n \to g$ נקודתית.

$$\begin{aligned}\int_Y g d(f_*\mu) &= \int_Y \lim_n s_n d(f_*\mu) \\ (\text{Monotonic convergence}) \Rightarrow &= \lim_n \int_Y s_n d(f_*\mu) \\ (2) \Rightarrow &= \lim_n \int_X (s_n \circ f)\, d\mu \\ (\text{Monotonic convergence}) \Rightarrow &= \int_X \left(\lim_n s_n \circ f\right) d\mu \\ &= \int_X (g \circ f)\, d\mu\end{aligned}$$

■

למה 13.5 (פאטו מהופך) תהי $f_n : X \to [0,\infty]$ מדידות ונניח שקיימת $0 \leq g \in \mathcal{L}^1(X)$ כך ש־$f_n \leq g$ לכל n, אזי

$$\limsup_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup_n f_n d\mu$$

הוכחה: נגדיר $g_n = g - f_n : X \to [0,\infty]$. מהלמה של פאטו אנו יודעים כי $\int_X \liminf g_n \leq \liminf_n \int_X g_n$ אבל $\liminf g_n = g - \limsup f_n$ וגם $\liminf \int_X g_n d\mu = \int_X g d\mu - \limsup \int_X f_n d\mu$ שמוכיח את הטענה. ■

טענה 13.6 $f \in \mathcal{L}^1(X)$. אזי לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $E \in \mathcal{F}$ כך ש־ $\mu(E) < \delta$ מתקיים כי $\int_E f d\mu < \epsilon$.

14 הפסקת סיכום התרגולים

הערה 14.1 לאור מערכי השיעור שמפורסמים על ידי המתרגל, אני לא מסכם יותר את התרגולים.