אלגוריתמים תרגיל 1

א) צריך למצוא האם מתקיים שלכל n_0 מסוים קיים קבוע c עבורו $f(n) \le c \cdot g(n)$, $g(n) = n^2$ תמיד

כלומר ש- $f(n) \le c \cdot (n^2)$, בנוסף הנחה שתמיד חיובית

$g(n)$ עבור

דרך א:

$f(n) = \frac{1}{3}n^2 - 3n \ge 0$ תמיד חיובית $g(n) = n^2$

$n(\frac{1}{3}n - 3) \ge 0$

תמיד עבור: $n \ge 9$

אז $n_0 \ge 9$

$\forall n \ge n_0 : \quad f(n) \le c \cdot g(n)$

$\forall n \ge 9 : \quad \frac{1}{3}n^2 - 3n \le c \cdot n^2$

$\forall n \ge 9 \quad \frac{1}{3} \le c$

$n_0 = 9 \quad c = \frac{1}{3}$

דרך ב

$f(n) = \frac{1}{3}n^2 - 3n < \frac{1}{3}n^2 < \underset{g(n)}{n^2}$

אם ניקח $c=1$ אז זה יהיה נכון עבור מספיק n בשביל שנבחר

ניקח לדוגמא

$c = 1$

$n_0 = 1$

דרך ג (בדיקה עם גבולות)

ג: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}n^2 - 3n}{n^2} = \frac{1}{3} < \infty$

2) א) $n_0 = 1$, $c = 5$

ב) $5\lg n + 3\lg n(\lg n) < 8\lg n$

$8\lg n \le c \cdot g(n)$

$8\lg n \le 8 \cdot \log n$

$n_0 = 1 \quad c = 8$

ג) $n^2 + 100n < n^2 + 100n^2$

$101n^2 \le c \cdot n^2$

$101n^2 \le 101 \cdot n^2$

$n_0 = 1$, $c = 101$

ד) $c = 3$

$n_0 = 2$

ה) $100 \cdot 2^n + 200 \cdot n^{100} + 35 \cdot n^{50} < 335 \cdot 2^n$

$335 \cdot 2^n \le c \cdot g(n)$

$335 \cdot 2^n \le 335 \cdot 2^n$

$c = 335$, $n_0 = 1$

3)

אם $f(n) = O(g(n))$ אז קיימים c_1 ו- n_1 עבורם $f(n) \le c_1 \cdot g(n)$ לכל $n > n_1$ ①

וגם $g(n) = O(h(n))$ אז קיימים c_2, n_2 עבורם $g(n) \le c_2 \cdot h(n)$ לכל $n > n_2$ ②

וצריך להראות שקיימים c_3, n_3 עבורם $f(n) \le c_3 \cdot h(n)$ לכל $n > n_3$

אז $\underbrace{f(n) \le c_1 \cdot g(n)}_{\text{נובע מ ①}} \le \underbrace{c_1 \cdot c_2 \cdot g(n) \le c_1 \cdot c_2 \cdot c_2 \cdot h(n)}_{\text{נובע מ ②}}$

$f(n) \le \underbrace{c_1 \cdot c_2 \cdot c_2}_{c_3} \cdot h(n)$

עבור $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$

4) א) $f(n) = (\lg n)^{\lg n}$

$g(n) = n^{\frac{3}{2}}$

צריך: $f(n) \ge c \cdot g(n)$ עבור $n \ge n_0$ ו- c :

$c \cdot g(n) = c \cdot n^{\frac{3}{2}} = c \cdot (2^{\lg n})^{\frac{3}{2}} = c(2^{\frac{3}{2}})^{\lg n} = c(2.9)^{\lg n}$

$(\lg g(n))^{\lg n} \ge c \cdot (2.9)^{\lg n}$

$\lg n \ge c \cdot 2.9$

ניקח $c = 1$: $\lg n \ge 2.9$

$n \ge 7.1$

$n_0 = 8$ אז נבחר עבור

בדיקה: על $n_0 = 8$, $c = 1$: $0 \le c \cdot g(8) \le f(8)$

$0 \le 1 \cdot 8^{\frac{3}{2}} \le (\lg 8)^{\lg 8}$ ✓

ב)

ג) צריך להוכיח: $\begin{cases} g(n) = o f(n) \\ f(n) \ne O\, g(n) \end{cases}$ → מספיק להראות ש- k

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\lg n)^{\lg n}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\lg n)^{\lg n}}{(2^{\frac{3}{2}})^{\lg n}} = \left(\frac{\lg n}{2^{\frac{3}{2}}}\right)^{\lg n} = (\infty)^{\infty} = \infty \ne \infty$

5) $\log(n!) = \log(1\cdot 2\cdot 3\cdots n) < \log(n\cdot n\cdot n\cdots n) = \log(n^n) = n\log n$

6) א)

$$\underbrace{\tfrac{3}{4}n^2+12n}_{f(n)} < \tfrac{3}{4}n^2+12n^2 < 12\tfrac{3}{4}n^2 \le \underbrace{c\cdot n^2}_{c\cdot g(n)}$$

מתקיים עבור $c=12\frac{3}{4}$ ו $n_0=1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}n^2+12n}{n^2} = \frac{3}{4} < \infty$$

ב) כן, כיוון שקצב הגידול שלהן גדול משל n^2 זה מתקיים עבור
כל c' אלו הן חסם עליון של n^2 והוכחנו גם על $f(n)$.

7)

$f(n) = 3n^2+5$

א) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n^2+5} = 0 < \infty$

מתקיים

ב) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+5} = \frac{1}{3} < \infty$

מתקיים

ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3n^2+5} = \infty \not< \infty$

לא מתקיים

8)

$$f(n) = a_0+a_1 n+a_2 n^2+\dots+a_k n^k < a_0 n^k+a_1 n^k+\dots+a_k n^k = n^k(a_0+a_1+\dots+a_k) \le c\cdot n^k$$

מתקיים עבור $c=(a_0+a_1+\dots+a_k)$ ו $n_0=1$.