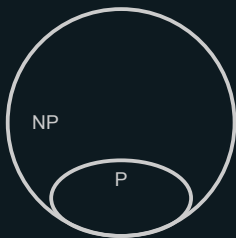


יסודות האלגוריתמים והסיבוכיות

תרגול 12 - בעיות NP-שלמות



יסודות האלגוריתמים והסיבוכיות

תרגול 12 - בעיות NP-שלמות

יסודות האלגוריתמים והסיבוכיות

תרגול 12 - בעיות NP-שלמות





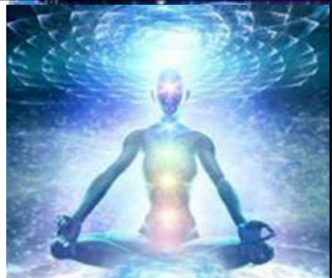
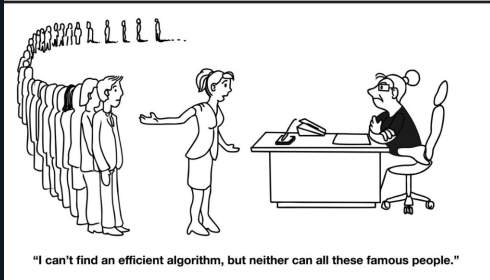
"I can't find an efficient algorithm, I guess I'm just too dumb."





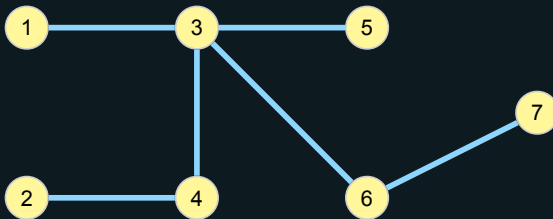
"I can't find an efficient algorithm, because no such algorithm is possible!"







נגדיר שתי בעיות על גרפים לא מכוונים:



בעיית הקבוצה המרוחקת

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שהמרחק בין כל זוג צמתים גדול מ 2 ?

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

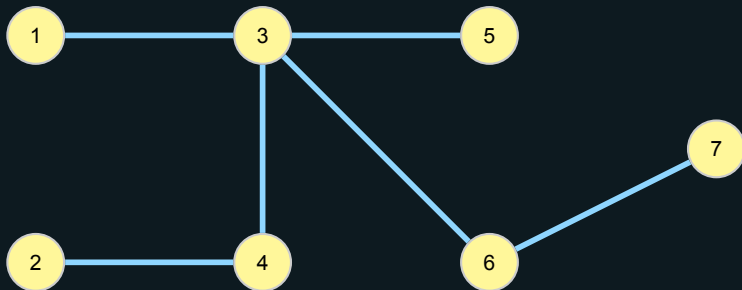
שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שאין זוג צמתים שכנים בקבוצה?

(א) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה המרוחקת לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה.

(ב) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הקבוצה המרוחקת.

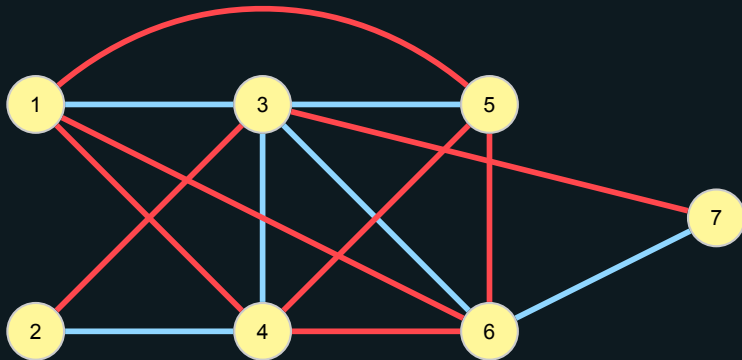


(א) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה המרוחקת לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה.



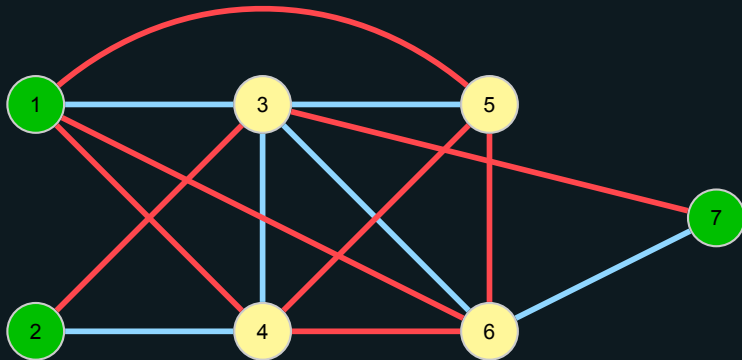


(א) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה המרוחקת לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה.





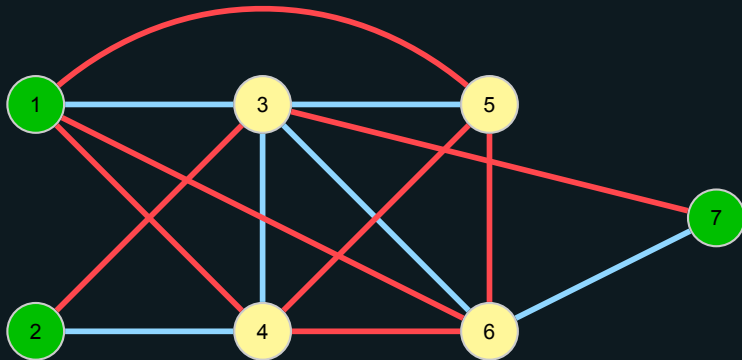
(א) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה המרוחקת לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה.



נוסיף קשת עבור בין כל זוג צמתים במרחק קטן שווה ל-2.



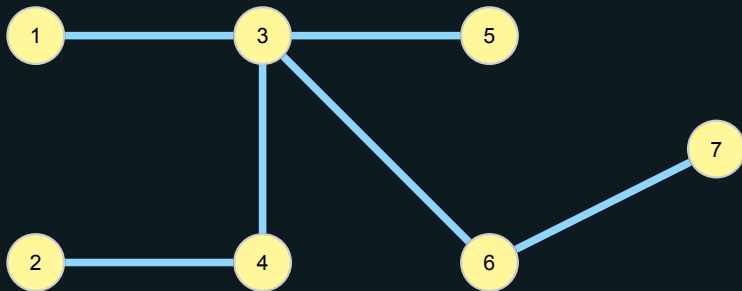
(א) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה המרוחקת לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה.



נוסיף קשת עבור בין כל זוג צמתים במרחק קטן שווה ל2. חישוב הרדוקציה מתבצע בזמן פולינומי.

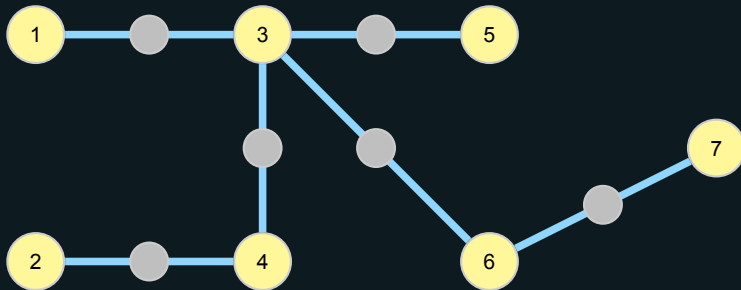


(ב) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הקבוצה המרוחקת.



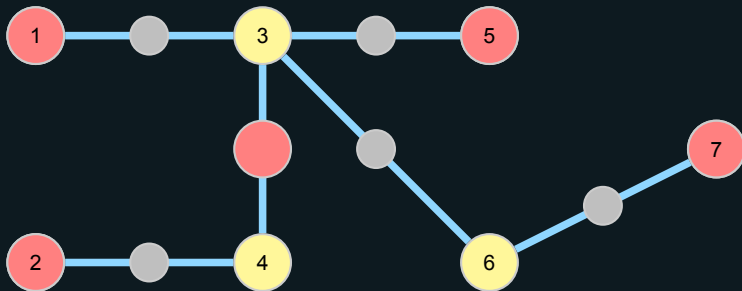


(ב) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הקבוצה המרוחקת.



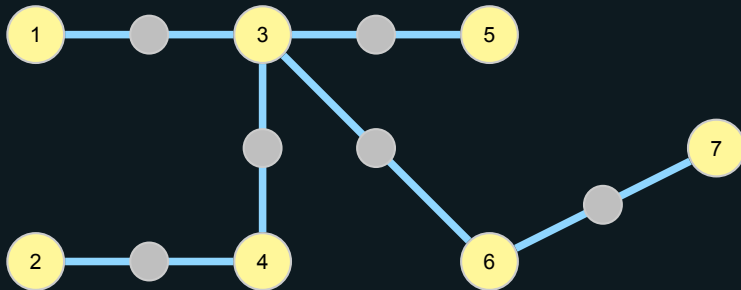


(ב) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הקבוצה המרוחקת.



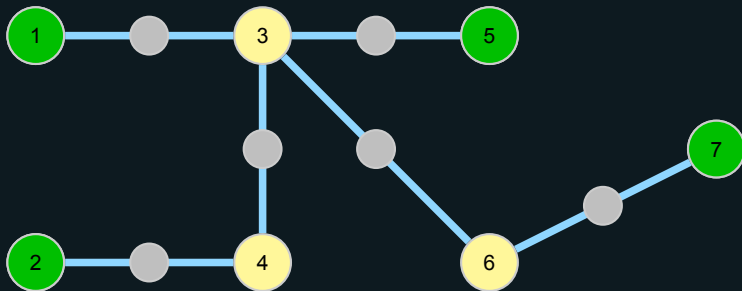


(ב) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הקבוצה המרוחקת.



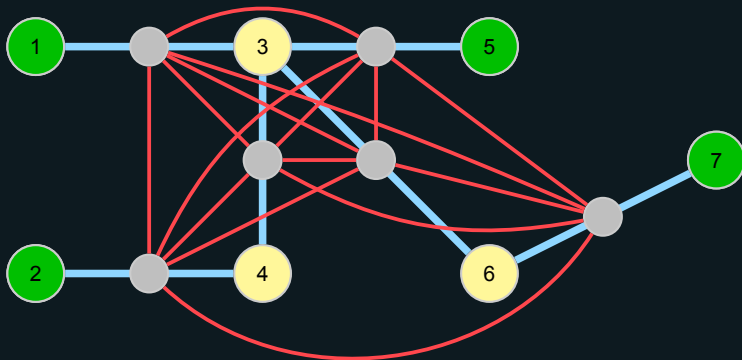


(ב) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הקבוצה המרוחקת.



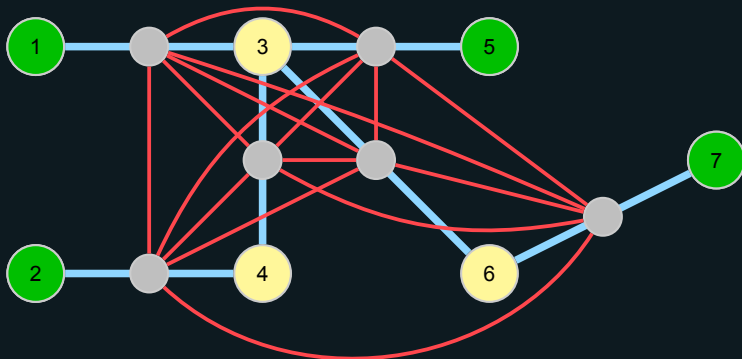


(ב) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הקבוצה המרוחקת.





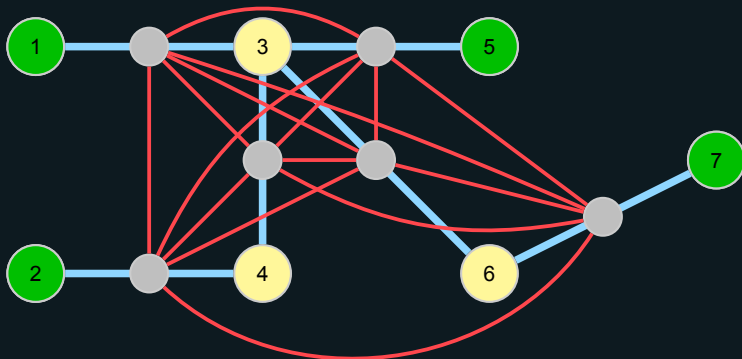
(ב) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הקבוצה המרוחקת.



נחליף כל קשת במסלול בין שתי קשתות, כעת כל קבוצה בלתי תלויה היא קבוצה מרוחקת בגרף החדש.



(ב) בצעו רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הקבוצה המרוחקת.



נחליף כל קשת במסלול בן שתי קשתות, כעת כל קבוצה בלתי תלויה היא קבוצה מרוחקת בגרף החדש.
אבל ייתכן שיצרנו קבוצה מרוחקת באמצעות הצמתים החדשים. כדי לתקן זאת נחבר את כולם להיות
קליקה אחת גדולה.



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

נבחין ש נוסחת SAT היא ספיקה כאשר כל אחת מהפסוקיות בה ספיקות. נתייחס לשלושה מקרים:



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

נבחין ש נוסחת SAT היא ספיקה כאשר כל אחת מהפסוקיות בה ספיקות. נתייחס לשלושה מקרים:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

נבחין ש נוסחת SAT היא ספיקה כאשר כל אחת מהפסוקיות בה ספיקות. נתייחס לשלושה מקרים:

(א) פסוקיות עם שלושה משתנים נשארות ללא שינוי.

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

נבחין ש נוסחת SAT היא ספיקה כאשר כל אחת מהפסוקיות בה ספיקות. נתייחס לשלושה מקרים:

(א) פסוקיות עם שלושה משתנים נשארות ללא שינוי.

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

$$(\neg x_1 \vee x_3)$$



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

נבחין ש נוסחת SAT היא ספיקה כאשר כל אחת מהפסוקיות בה ספיקות. נתייחס לשלושה מקרים:

(א) פסוקיות עם שלושה משתנים נשארות ללא שינוי.

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

(ב) "נרפד" פסוקיות עם פחות משני משתנים באמצעות חזרה על משתנה קיים:

$$(\neg x_1 \vee x_3) \rightarrow (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee x_3)$$



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

נבחין ש נוסחת SAT היא ספיקה כאשר כל אחת מהפסוקיות בה ספיקות. נתייחס לשלושה מקרים:

(א) פסוקיות עם שלושה משתנים נשארות ללא שינוי.

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

(ב) "נרפד" פסוקיות עם פחות משני משתנים באמצעות חזרה על משתנה קיים:

$$(\neg x_1 \vee x_3) \rightarrow (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee x_3)$$

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

נבחין ש נוסחת SAT היא ספיקה כאשר כל אחת מהפסוקיות בה ספיקות. נתייחס לשלושה מקרים:

(א) פסוקיות עם שלושה משתנים נשארות ללא שינוי.

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

(ב) "נרפד" פסוקיות עם פחות משני משתנים באמצעות חזרה על משתנה קיים:

$$(\neg x_1 \vee x_3) \rightarrow (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee x_3)$$

(ג) נחליף כל פסוקית עם יותר משלושה משתנים בשרשרת של פסוקיות "המקושרות" במשתני עזר.

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \rightarrow (\neg x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee \neg x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

נבחין ש נוסחת SAT היא ספיקה כאשר כל אחת מהפסוקיות בה ספיקות. נתייחס לשלושה מקרים:

(א) פסוקיות עם שלושה משתנים נשארות ללא שינוי.

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

(ב) "נרפד" פסוקיות עם פחות משני משתנים באמצעות חזרה על משתנה קיים:

$$(\neg x_1 \vee x_3) \rightarrow (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee x_3)$$

(ג) נחליף כל פסוקית עם יותר משלושה משתנים בשרשרת של פסוקיות "המקושרות" במשתני עזר.

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \rightarrow (\neg x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee \neg x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \rightarrow (\neg x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee \neg x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \rightarrow (\neg x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee \neg x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

קל לראות שכל השמה המספקת פסוקיות בגודל 2 או 3 של SAT יסופקו ע"י אותה השמה בנוסחת SAT3 שבנינו. נשים לב שאם השמה של אחד המשתנים מספקת את פסוקית בגודל 4 ומעלה, ניתן לספק את שרשרת הפסוקיות משום שמשתני העזר "חופשיים" לספק את השרשרת.



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \rightarrow (\neg x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee \neg x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

קל לראות שכל השמה המספקת פסוקיות בגודל 2 או 3 של SAT יסופקו ע"י אותה השמה בנוסחת SAT3 שבנינו. נשים לב שאם השמה של אחד המשתנים מספקת את פסוקית בגודל 4 ומעלה, ניתן לספק את שרשרת הפסוקיות משום שמשתני העזר "חופשיים" לספק את השרשרת.



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \rightarrow (\neg x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee \neg x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

לא ניתן לספק את שרשרת הפסוקיות רק באמצעות השמה של משתני העזר, ניתן לראות זאת באמצעות טבלת האמת של השרשרת, כל השמת אמת של משתנה y_1 תכפה השמת שקר של משתנה y_2 בפסוקית האחרונה.



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית 3SAT.

בעיית 3SAT

קלט: נוסחת Φ CNF כך שבכל פסוקית ב Φ בדיוק שלושה משתנים.

שאלה: האם יש Φ השמה מספקת?

הדגימו את הרדוקציה באמצעות נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \rightarrow (\neg x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee \neg x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

לא ניתן לספק את שרשרת הפסוקיות רק באמצעות השמה של משתני העזר, ניתן לראות זאת באמצעות טבלת האמת של השרשרת, כל השמת אמת של משתנה y_1 תכפה השמת שקר של משתנה y_ℓ בפסוקית האחרונה.

y_1	y_2	$(y_1) \wedge (\neg y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2)$
1	1	F
1	0	F
0	1	F
0	0	F



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית כיסוי הצמתים.

בעיית כיסוי הצמתים

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שמחיקת הקבוצה תותיר את G ללא קשתות?



הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית כיסוי הצמתים.

בעיית כיסוי הצמתים

קלט: גרף לא מכונן G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שמחיקת הקבוצה תותיר את G ללא קשתות?

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \quad \wedge \quad (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \quad \wedge \quad (\neg x_3 \vee x_4 \vee x_5) \quad \wedge \quad (\neg x_4 \vee \neg x_3 \vee \neg x_5)$$

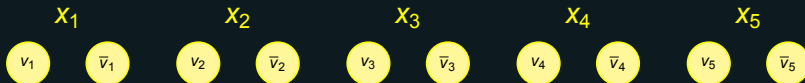


הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית כיסוי הצמתים.

בעיית כיסוי הצמתים

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שמחיקת הקבוצה תותיר את G ללא קשתות?



$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_3 \vee \neg x_5)$$

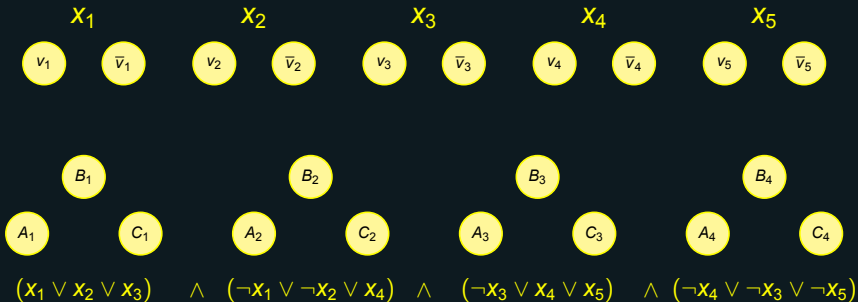


הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית כיסוי הצמתים.

בעיית כיסוי הצמתים

קלט: גרף לא מכונן G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שמחיקת הקבוצה תותיר את G ללא קשתות?



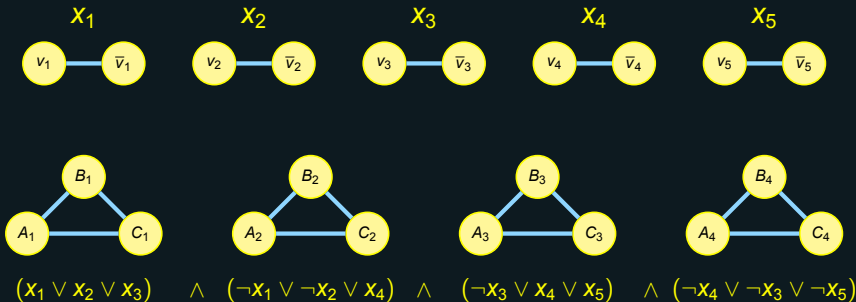


הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית כיסוי הצמתים.

בעיית כיסוי הצמתים

קלט: גרף לא מכונן G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שמחיקת הקבוצה תותיר את G ללא קשתות?



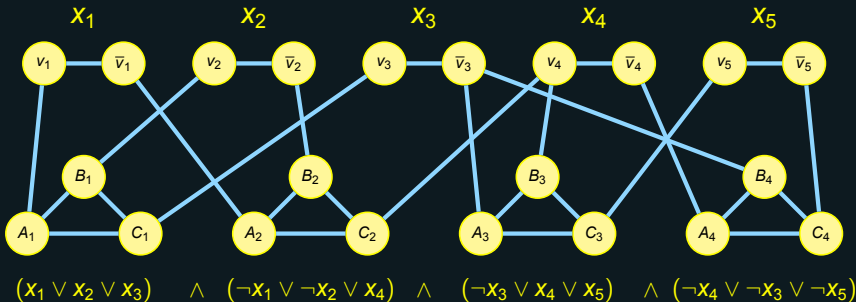


הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית כיסוי הצמתים.

בעיית כיסוי הצמתים

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שמחיקת הקבוצה תותיר את G ללא קשתות?



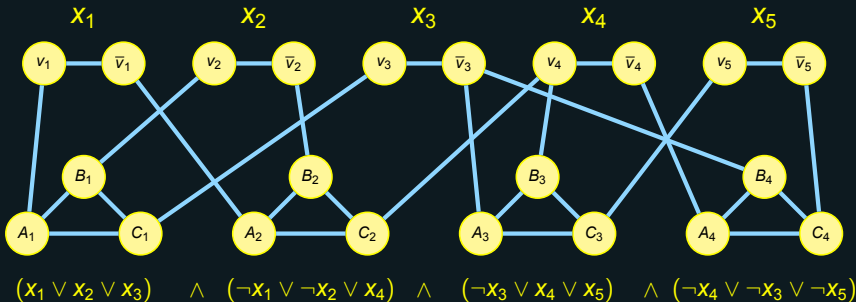


הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית כיסוי הצמתים.

בעיית כיסוי הצמתים

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שמחיקת הקבוצה תותיר את G ללא קשתות?



נגדיר $k = 2m + n$

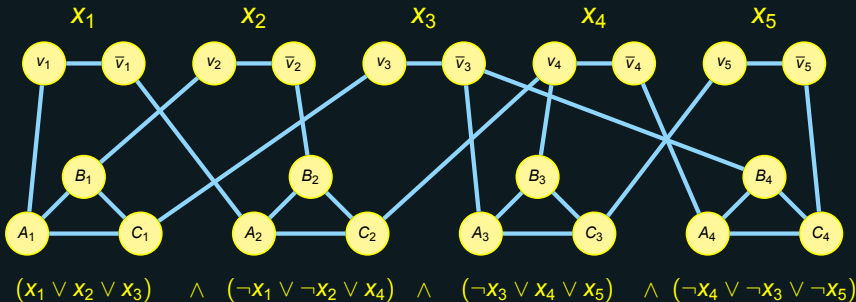


הראו רדוקציה מבעיית SAT לבעיית כיסוי הצמתים.

בעיית כיסוי הצמתים

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שמחיקת הקבוצה תותיר את G ללא קשתות?



נגדיר $k = 2m + n$. יש לנו תקציב של n לכסות את כל הקשתות באגדיט של המשתנים, כמו כן נכסה את הקשתות בפסוקיות באמצעות $2m$ הצמתים הנותרים שנבחר.

שאלה: האם יש ב G קבוצת צמתים בגודל k כך שמחיקת הקבוצה תותיר את G ללא קשתות?

