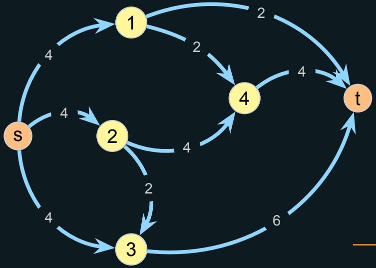


יסודות האלגוריתמים והסיבוכיות

תרגול 10 - בעיית הזרימה המקסימלית

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

זרימה ברשת זרימה בעלת n צמתים היא מיפוי $f : E \to \mathbb{N}$ המקיים שלושה סוגי אילוצים:

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

זרימה ברשת זרימה בעלת n צמתים היא מיפוי $f : E \to \mathbb{N}$ המקיים שלושה סוגי אילוצים:

1. אילוצי אי שליליות - הזרימה בכל קשת אינה שלילית.

$$\forall i, j \in V \;:\; f_{i,j} \geq 0$$

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

זרימה ברשת זרימה בעלת n צמתים היא מיפוי $f : E \to \mathbb{N}$ המקיים שלושה סוגי אילוצים:

1. אילוצי אי שליליות - הזרימה בכל קשת אינה שלילית.

$$\forall i, j \in V \ : \ f_{i,j} \geq 0$$

2. אילוצי קיבולת - הזרימה בכל קשת אינה חורגת מהקיבולת שלה:

$$\forall i, j \in V \ : \ f_{i,j} \leq c_{i,j}$$

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

זרימה ברשת זרימה בעלת n צמתים היא מיפוי $f : E \to \mathbb{N}$ המקיים שלושה סוגי אילוצים:

1. אילוצי אי שליליות - הזרימה בכל קשת אינה שלילית.

$$\forall i, j \in V \;:\; f_{i,j} \geq 0$$

2. אילוצי קיבולת - הזרימה בכל קשת אינה חורגת מהקיבולת שלה:

$$\forall i, j \in V \;:\; f_{i,j} \leq c_{i,j}$$

3. אילוצי שימור זרימה - עבור כל צומת למעט המקור והיעד, סך הזרימה הנכנסת שווה לסך הזרימה היוצאת:

$$\forall i \in V : \sum_{j \in V}^{n} f_{i,j} = \sum_{j \in V}^{n} f_{j,i}$$

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

נגדיר את **ערך הזרימה** $|f|$ כסך הזרימה היוצאת מהמקור:

$$|f| = \sum_{j}^{n} f_{s,j} = \sum_{j}^{n} f_{j,t}$$

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

נגדיר את **ערך הזרימה** $|f|$ כסך הזרימה היוצאת מהמקור:

$$|f| = \sum_{j}^{n} f_{s,j} = \sum_{j}^{n} f_{j,t}$$

נגיד שזרימה f היא **מקסימלית** אם לא קיימת זרימה f^* כך ש $|f| < |f^*|$.

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

נגדיר את **ערך הזרימה** $|f|$ כסך הזרימה היוצאת מהמקור:

$$|f| = \sum_{j}^{n} f_{s,j} = \sum_{j}^{n} f_{j,t}$$

נגיד שזרימה f היא **מקסימלית** אם לא קיימת זרימה f^* כך ש $|f^*| > |f|$.

כמו כן נכיר את המושג **חתך** -

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

נגדיר את **ערך הזרימה** $|f|$ כסך הזרימה היוצאת מהמקור:

$$|f| = \sum_{j}^{n} f_{s,j} = \sum_{j}^{n} f_{j,t}$$

נגיד שזרימה f היא **מקסימלית** אם לא קיימת זרימה f^* כך ש $|f^*| > |f|$.

כמו כן נכיר את המושג **חתך** - חלוקה של צמתי הגרף לשתי קבוצות זרות S ו T כך ש $s \in S$ ו $t \in T$.

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

נגדיר את **ערך הזרימה** $|f|$ כסך הזרימה היוצאת מהמקור:

$$|f| = \sum_{j}^{n} f_{s,j} = \sum_{j}^{n} f_{j,t}$$

נגיד שזרימה f היא **מקסימלית** אם לא קיימת זרימה f^* כך ש $|f| < |f^*|$.

כמו כן נכיר את המושג **חתך** - חלוקה של צמתי הגרף לשתי קבוצות זרות S ו T כך ש $s \in S$ ו $t \in T$.

נגדיר את **ערך החתך** כסכום הקיבולות על הקשתות היוצאות מקבוצה S.

נגיד שחתך D הוא **מינימלי** אם לא קיים חתך D^* כך ש $|D^*| < |D|$

זרימה

רשת זרימה היא גרף מכוון וממושקל (עם פונקציית משקלים c) בעל שני צמתים מיוחדים אותם אנו מכנים מקור s ויעד t.

נגדיר את **ערך הזרימה** $|f|$ כסך הזרימה היוצאת מהמקור:

$$|f| = \sum_{j}^{n} f_{s,j} = \sum_{j}^{n} f_{j,t}$$

נגיד שזרימה f היא **מקסימלית** אם לא קיימת זרימה f^* כך ש $|f| > |f^*|$.

כמו כן נכיר את המושג **חתך** - חלוקה של צמתי הגרף לשתי קבוצות זרות S ו T כך ש $s \in S$ ו $t \in T$.

נגדיר את **ערך החתך** כסכום הקיבולות על הקשתות היוצאות מקבוצה S.

נגיד שחתך D הוא **מינימלי** אם לא קיים חתך D^* כך ש $|D^*| > |D|$

משפט 1: בכל רשת זרימה ערך הזרימה המקסימלית שווה לחתך המינימלי.

האלגוריתם של פורד-פולקרסון

MaximumFlow$(G = (V, E), c : E \to \mathbb{N})$

```
Initialize ∀i, j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```

האלגוריתם של פורד-פולקרסון

MaximumFlow($G=(V,E), c: E \to \mathbb{N}$)

Initialize $\forall i,j \; : \; f_{i,j} = 0$
while True **do**
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if $P = \varnothing$ **then**
        return f
    Update f according to P.

בהנתן רשת זרימה $G=(V,E)$ וזרימה f נבנה את **הרשת השיורית** $G_f=(V_f,E_f)$ ע״פ:

1. $V_f = V$
2. $E_f = \{(i,j),(j,i) | (i,j) \in E\}$
3. הקיבולת של כל קשת ברשת השיורית תחושב ע״פ $c_{i,j} - f_{i,j} + f_{j,i}$

האלגוריתם של פורד-פולקרסון

MaximumFlow$(G=(V,E), c: E \to \mathbb{N})$

Initialize $\forall i,j \ : \ f_{i,j} = 0$
while True **do**
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if $P = \varnothing$ **then**
        return f
    Update f according to P.

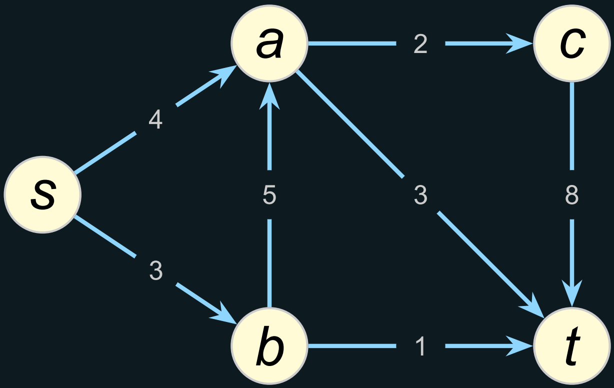
בהנתן רשת זרימה $G=(V,E)$ וזרימה f נבנה את **הרשת השיורית** $G_f=(V_f,E_f)$ ע״פ:

1. $V_f = V$
2. $E_f = \{(i,j),(j,i) | (i,j) \in E\}$
3. הקיבולת של כל קשת ברשת השיורית תחושב ע״פ $c_{i,j} - f_{i,j} + f_{j,i}$

משפט 2: זרימה f היא זרימה מקסימלית אם ורק אם ברשת השיורית של f אין אף מסלול מהמקור ליעד עם צוואר בקבוק גדול מ0.

תרגיל 1

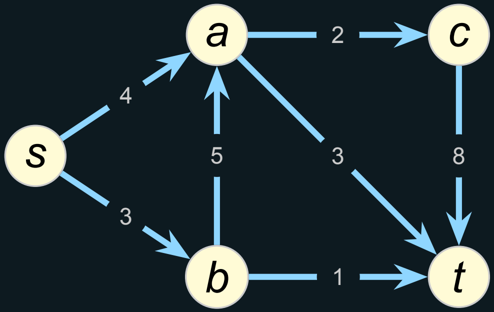
נתון הגרף הבא:



א. בנו את הרשת השיורית בהינתן זרימה $f_{i,j}=0$ לכל $i,j \in V$.

ב. מצאו את הזרימה המקסימלית באמצעות האלגוריתם של פורד-פולקרסון.

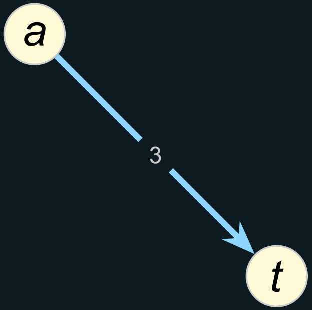
תרגיל 1



תרגיל 1

MaximumFlow$(G = (V, E), c : E \to \mathbb{N})$

1: Initialize $\forall i, j \ : \ f_{i,j} = 0$
2: **while** True **do**
3: Construct G_f
4: Compute path P in G_f from s to t.
5: **if** $P = \emptyset$ **then**
6: **return** f
7: Update f according to P.



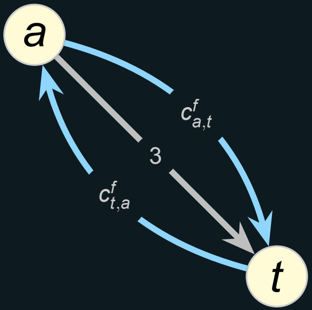
נתמקד בקשת (a, t).

נוסיף לרשת השיורית את הקשתות (a, t) ו (t, a).

תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

```
Initialize ∀i, j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```



נוסיף לרשת השיורית את הקשתות (a, t) ו (t, a).

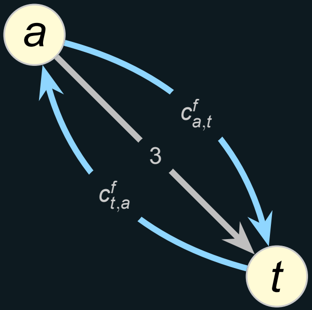
$$c^f_{a,t} := c_{a,t} - f_{a,t} + f_{t,a}$$

$$c^f_{t,a} := c_{t,a} - f_{t,a} + f_{a,t}$$

תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

```
Initialize ∀i,j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```



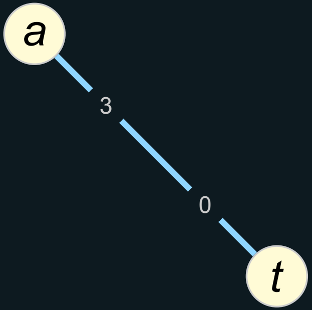
$$c^f_{a,t} := 3 - 0 + 0$$

$$c^f_{t,a} := 0 - 0 + 0$$

תרגיל 1

$\text{MaximumFlow}(G = (V, E), c : E \to \mathbb{N})$

Initialize $\forall i, j \;:\; f_{i,j} = 0$
while True **do**
  Construct G_f
  Compute path P in G_f from s to t.
  if $P = \varnothing$ **then**
    return f
  Update f according to P.

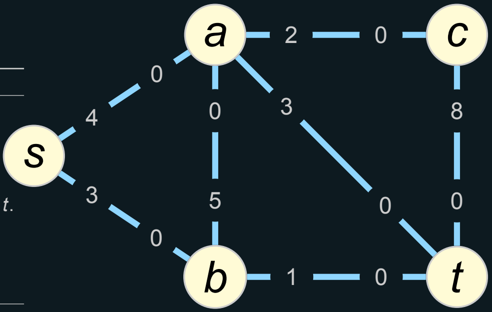


נסמן בקיצור

תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

```
Initialize ∀i,j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```

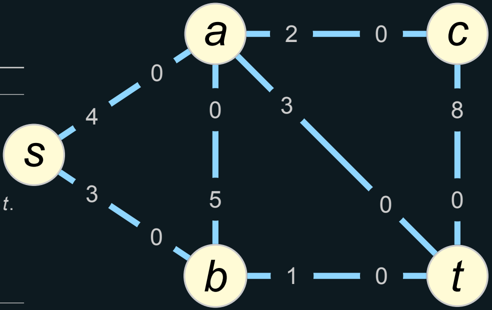


ונחשב באותו אופן את שאר הרשת השיורית.

תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

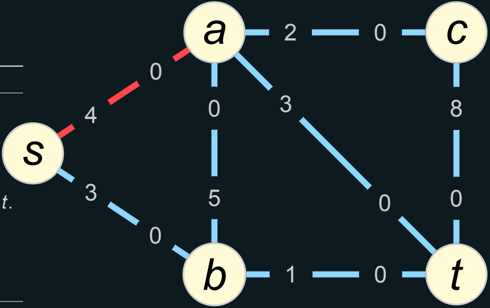
Initialize $\forall i, j \ : \ f_{i,j} = 0$
while True **do**
  Construct G_f
  Compute path P in G_f from s to t.
  if $P = \varnothing$ **then**
    return f
  Update f according to P.



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

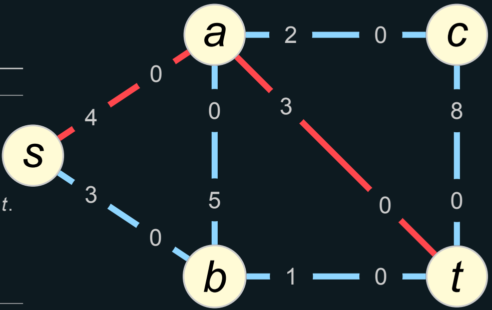
```
Initialize ∀i,j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

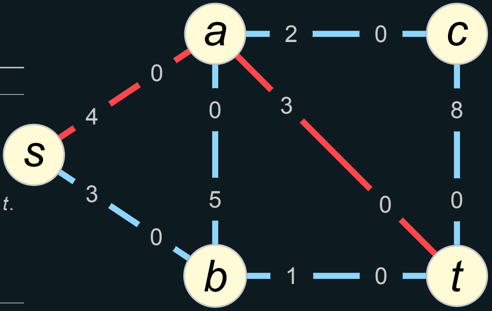
Initialize $\forall i, j \ : \ f_{i,j} = 0$
while True **do**
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if $P = \varnothing$ **then**
        return f
    Update f according to P.



תרגיל 1

MaximumFlow$(G = (V, E), c : E \to \mathbb{N})$

```
Initialize ∀i,j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```



צוואר הבקבוק של המסלול היא הקשת (a, t). נעדכן את הזרימה f.

procedure Update f according to P:

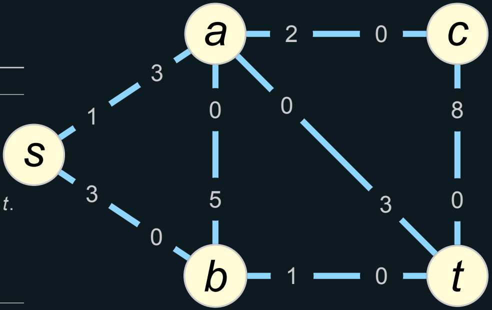
$c' = \min\{c_e | e \in P\}$

for $(i, j) \in P$ **do** $f_{i,j} := f_{i,j} + c'$

תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

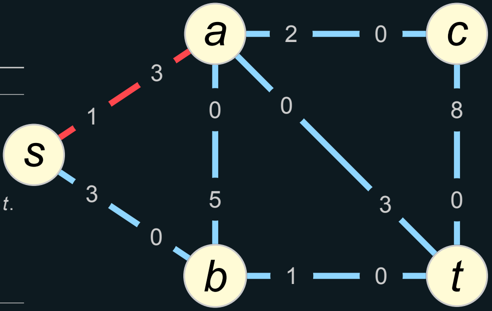
```
Initialize ∀i,j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

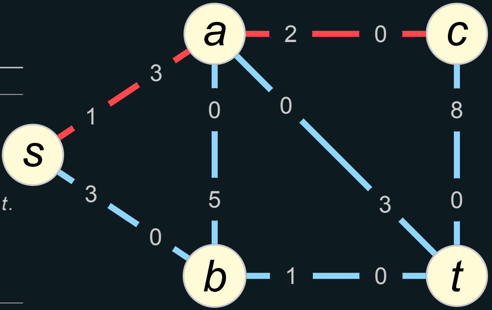
1: Initialize $\forall i, j \;:\; f_{i,j} = 0$
2: **while** True **do**
3: Construct G_f
4: Compute path P in G_f from s to t.
5: **if** $P = \varnothing$ **then**
6: **return** f
7: Update f according to P.



תרגיל 1

MaximumFlow$(G = (V, E), c : E \to \mathbb{N})$

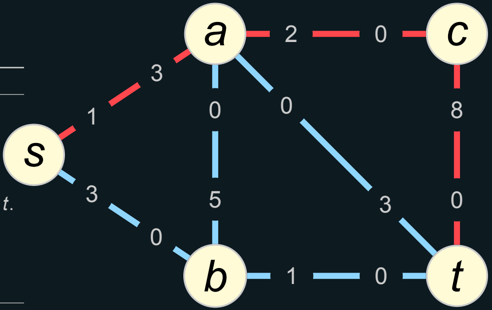
Initialize $\forall i, j \;:\; f_{i,j} = 0$
while True **do**
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if $P = \varnothing$ **then**
        return f
    Update f according to P.



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

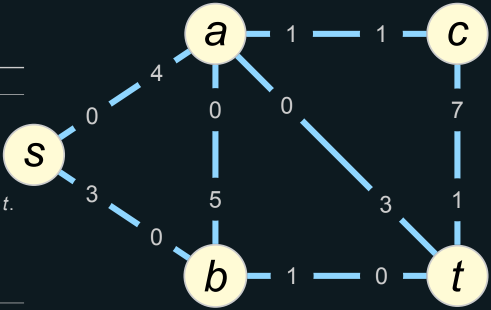
```
Initialize ∀i,j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

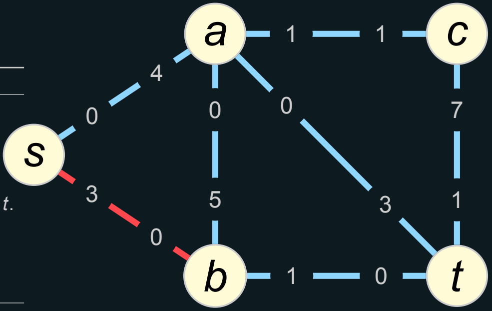
1: Initialize $\forall i, j \; : \; f_{i,j} = 0$
2: **while** True **do**
3: Construct G_f
4: Compute path P in G_f from s to t.
5: **if** $P = \varnothing$ **then**
6: **return** f
7: Update f according to P.



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

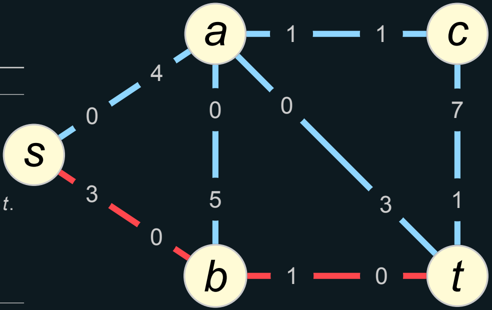
Initialize $\forall i, j \; : \; f_{i,j} = 0$
while True **do**
  Construct G_f
  Compute path P in G_f from s to t.
  if $P = \emptyset$ **then**
    return f
  Update f according to P.



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

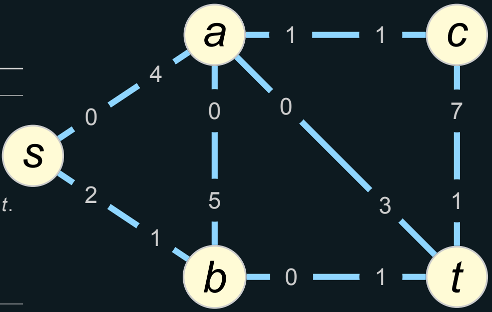
```
Initialize ∀i, j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

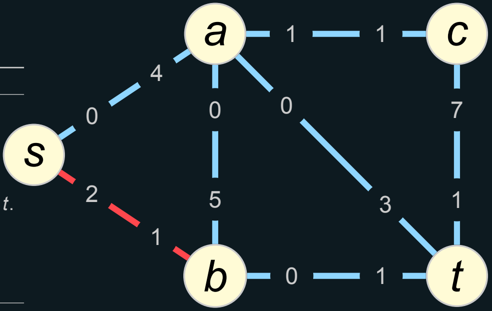
```
Initialize ∀i,j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

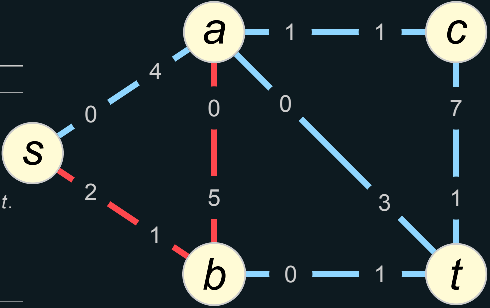
Initialize $\forall i, j \;:\; f_{i,j} = 0$
while True **do**
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if $P = \varnothing$ **then**
        return f
    Update f according to P.



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

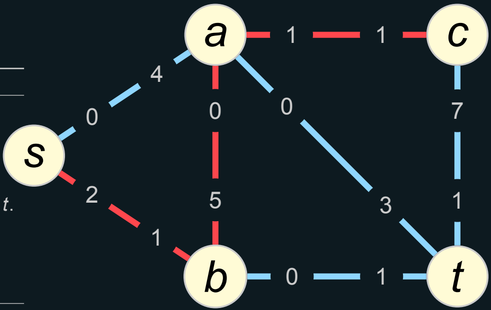
```
Initialize ∀i, j : f_{i,j} = 0
while True do
    Construct G_f
    Compute path P in G_f from s to t.
    if P = ∅ then
        return f
    Update f according to P.
```



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

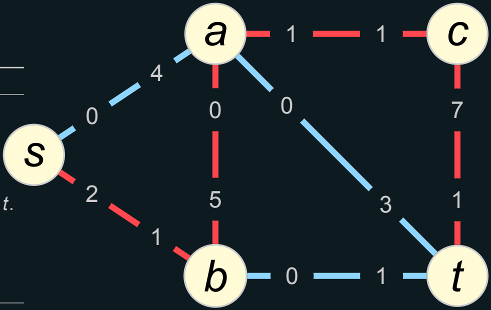
Initialize $\forall i, j \;:\; f_{i,j} = 0$
while True **do**
  Construct G_f
  Compute path P in G_f from s to t.
  if $P = \varnothing$ **then**
    return f
  Update f according to P.



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

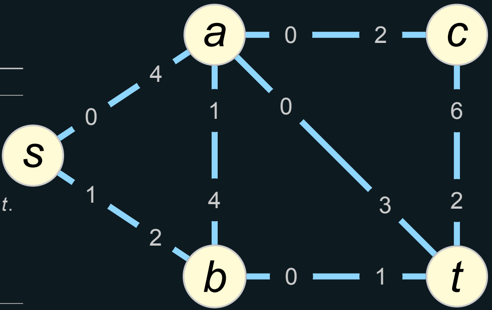
Initialize $\forall i, j \;:\; f_{i,j} = 0$
while True **do**
  Construct G_f
  Compute path P in G_f from s to t.
  if $P = \varnothing$ **then**
    return f
  Update f according to P.



תרגיל 1

MaximumFlow$(G = (V, E), c : E \to \mathbb{N})$

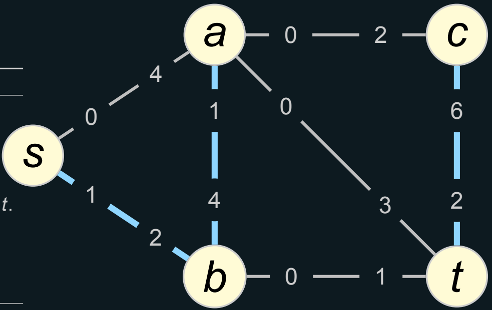
Initialize $\forall i, j \;:\; f_{i,j} = 0$
while True **do**
  Construct G_f
  Compute path P in G_f from s to t.
  if $P = \varnothing$ **then**
    return f
  Update f according to P.



תרגיל 1

MaximumFlow($G = (V, E), c : E \to \mathbb{N}$)

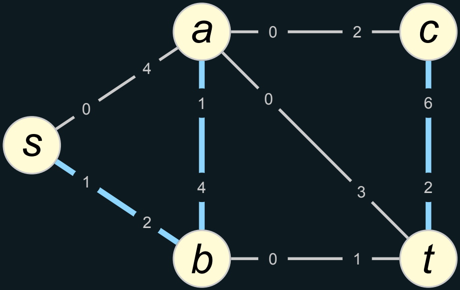
Initialize $\forall i, j \ : \ f_{i,j} = 0$
while True **do**
  Construct G_f
  Compute path P in G_f from s to t.
  if $P = \varnothing$ **then**
    return f
  Update f according to P.



אין מסלול ברשת השיורית בין s ל t.

תרגיל 2

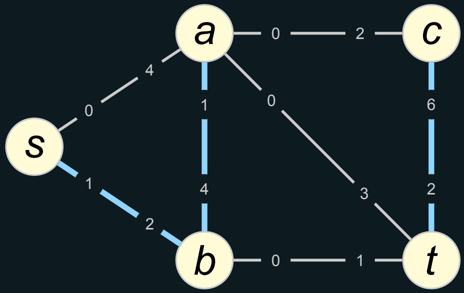
נתונה רשת זרימה G וזרימה מקסימלית f בעבורה. תארו אלגוריתם למציאת חתך מינימלי של הרשת, נתחו את זמן הריצה.



תרגיל 2

נתונה רשת זרימה G וזרימה מקסימלית f בעבורה. תארו אלגוריתם למציאת חתך מינימלי של הרשת, נתחו את זמן הריצה.

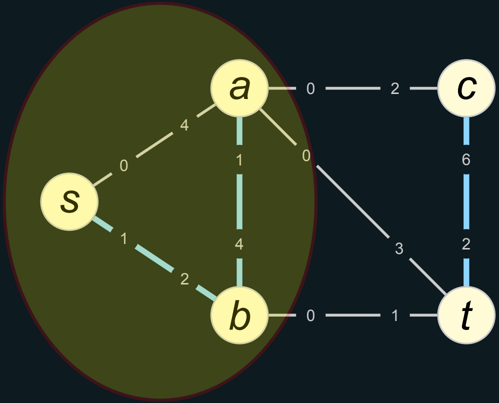
1. נבנה את G_f.



אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

תרגיל 2

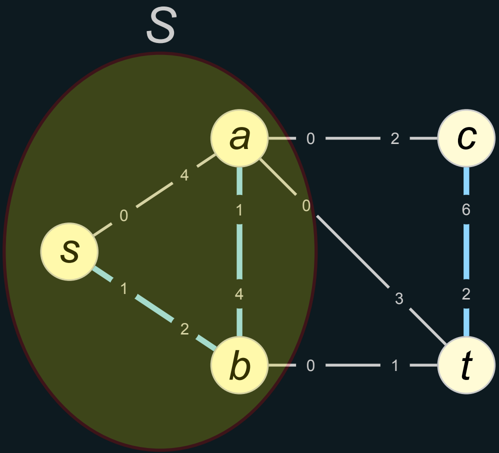
נתונה רשת זרימה G וזרימה מקסימלית f בעבורה. תארו אלגוריתם למציאת חתך מינימלי של הרשת, נתחו את זמן הריצה.



1. נבנה את G_f.
2. נפעיל את אלגוריתם BFS מצומת המקור.

תרגיל 2

נתונה רשת זרימה G וזרימה מקסימלית f בעבורה. תארו אלגוריתם למציאת חתך מינימלי של הרשת, נתחו את זמן הריצה.

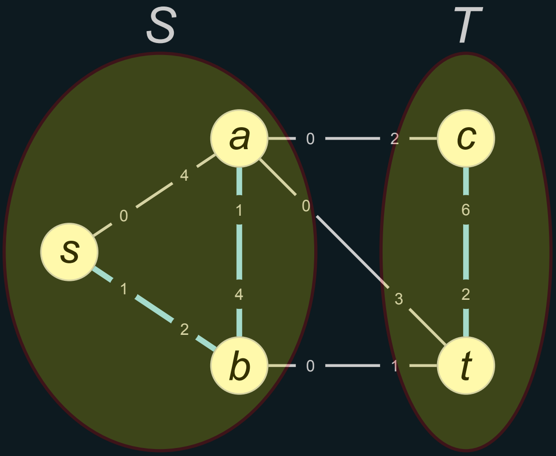


1. נבנה את G_f.
2. נפעיל את אלגוריתם BFS מצומת המקור.

נוסיף לקבוצה S את כל הצמתים שמצא אלגוריתם החיפוש.

תרגיל 2

נתונה רשת זרימה G וזרימה מקסימלית f בעבורה. תארו אלגוריתם למציאת חתך מינימלי של הרשת, נתחו את זמן הריצה.



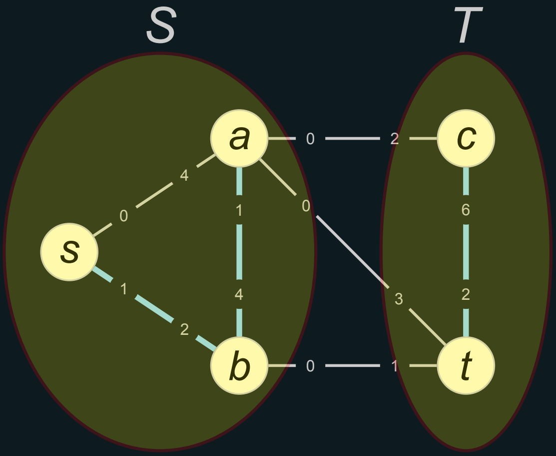
1. נבנה את G_f.
2. נפעיל את אלגוריתם BFS מצומת המקור.

נוסיף לקבוצה S את כל הצמתים שמצא אלגוריתם החיפוש.

שאר הקודקודים יהיו בקבוצה T.

תרגיל 2

נתונה רשת זרימה G וזרימה מקסימלית f בעבורה. תארו אלגוריתם למציאת חתך מינימלי של הרשת, נתחו את זמן הריצה.



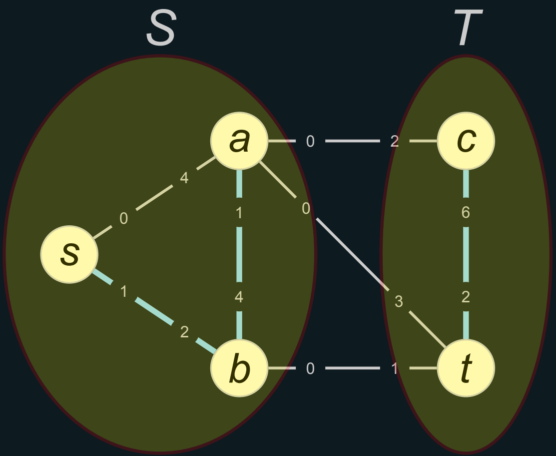
1. נבנה את G_f.
2. נפעיל את אלגוריתם BFS מצומת המקור.

   נוסיף לקבוצה S את כל הצמתים שמצא אלגוריתם החיפוש.

   שאר הקודקודים יהיו בקבוצה T.
3. החלוקה S ו T היא חתך ע״פ ההגדרה.

תרגיל 2

נתונה רשת זרימה G וזרימה מקסימלית f בעבורה. תארו אלגוריתם למציאת חתך מינימלי של הרשת, נתחו את זמן הריצה.



1. נבנה את G_f.
2. נפעיל את אלגוריתם BFS מצומת המקור.

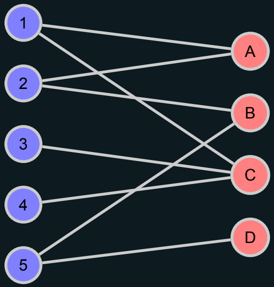
   נוסיף לקבוצה S את כל הצמתים שמצא אלגוריתם החיפוש.

   שאר הקודקודים יהיו בקבוצה T.
3. החלוקה S ו T היא חתך ע״פ ההגדרה.
4. למה החתך מינימלי?

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

תרגיל 3

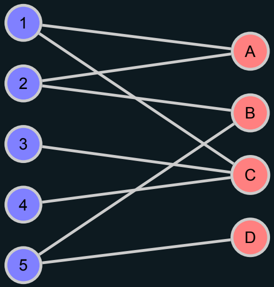
נתון גרף דו צדדי:



תארו אלגוריתם למציאת שידוך מקסימלי המשתמש באלגוריתם של פורד-פולקרסון.

תרגיל 3

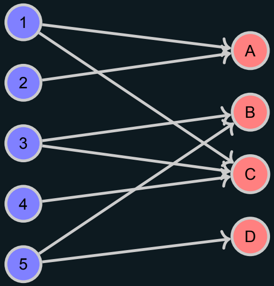
נתון גרף דו צדדי:



נהפוך את הגרף $G = (U \cup W, E)$ לרשת זרימה:

תרגיל 3

נתון גרף דו צדדי:

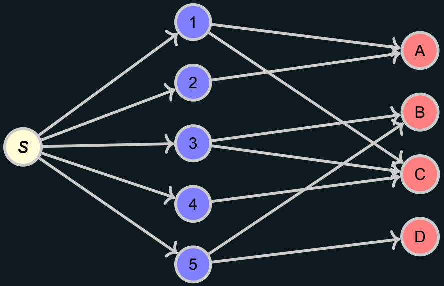


נהפוך את הגרף $G = (U \cup W, E)$ לרשת זרימה:

1. נכוון כל קשת בגרף מקבוצה U לקבוצה W.

תרגיל 3

נתון גרף דו צדדי:

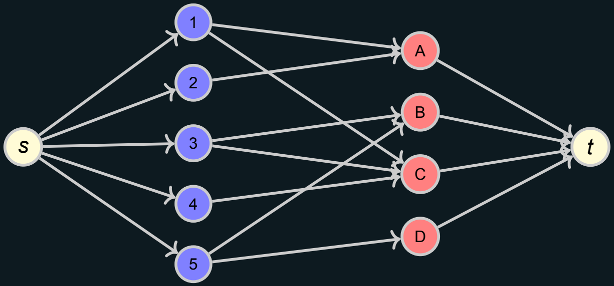


נהפוך את הגרף $G = (U \cup W, E)$ לרשת זרימה:

1. נכוון כל קשת בגרף מקבוצה U לקבוצה W.
2. נוסיף צומת מקור s ונחבר אותה לכל הצמתים של U.

תרגיל 3

נתון גרף דו צדדי:

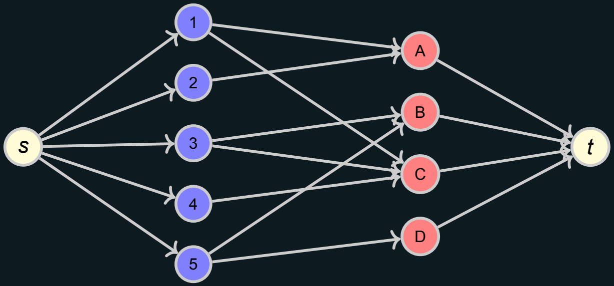


נהפוך את הגרף $G = (U \cup W, E)$ לרשת זרימה:

1. נכוון כל קשת בגרף מקבוצה U לקבוצה W.
2. נוסיף צומת מקור s ונחבר אותה לכל הצמתים של U.
3. נוסיף צומת יעד t ונחבר אותה לכל הצמתים של W.

תרגיל 3

נתון גרף דו צדדי:

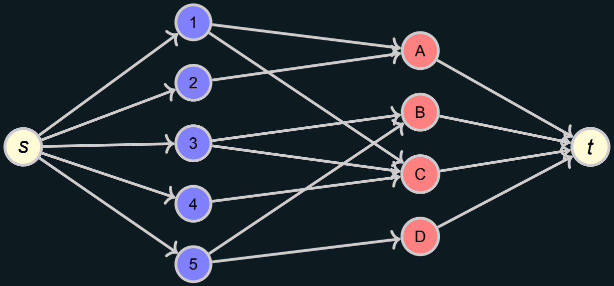


נהפוך את הגרף $G=(U\cup W,E)$ לרשת זרימה:

1. נכוון כל קשת בגרף מקבוצה U לקבוצה W.
2. נוסיף צומת מקור s ונחבר אותה לכל הצמתים של U.
3. נוסיף צומת יעד t ונחבר אותה לכל הצמתים של W.
4. ניתן לכל הקשתות משקל 1.

תרגיל 3

נתון גרף דו צדדי:



נחשב את הזרימה המקסימלית באמצעות האלגוריתם של פורד פולקרסון. הזרימה המקסימלית ברשת הזרימה מתאימה לשידוך מינימלי שכן לכל צומת המחוברת למקור מגיעה יחידת זרימה אחת וצוואר הבקבוק של כל צומת המחוברת ליעד גם הוא בגודל יחידה אחת. כלומר הזרימה המקסימלית בוחרת את המספר המקסימלי של קשתות זרות בין שתי הקבוצות.

זמן הריצה $\mathcal{O}(n(n+m)) = \mathcal{O}(f(n+m))$ משום שהשידוך המקסימלי חסום ב$\mathcal{O}(n)$.