

יסודות האלגוריתמים והסיבוכיות

תרגיל 11 - רדוקציות





אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

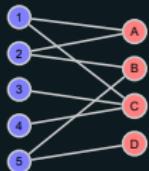
רדוקציות



ראינו שנייתן להשתמש באלגוריתם של פורד-פוקרטון כדי לפתור את בעיית השידור המקסימלי.

בעיית השידור

$k,$



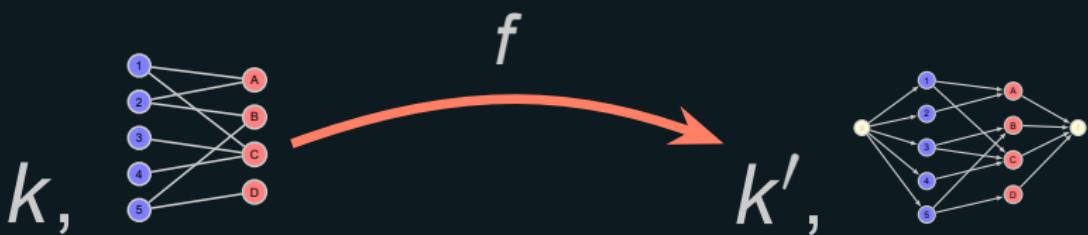


ראינו שניתן להשתמש באלגוריתם של פורד-פוקרטון כדי לפתור את בעיית השידור המקסימלי.

עשינו זאת ע"י בניית רשת זרימה מהגרף של בעיית השידור.

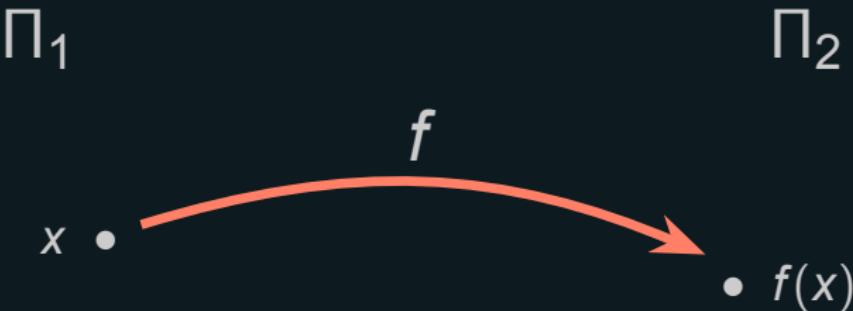
בעיית השידור

בעיית הזרימה





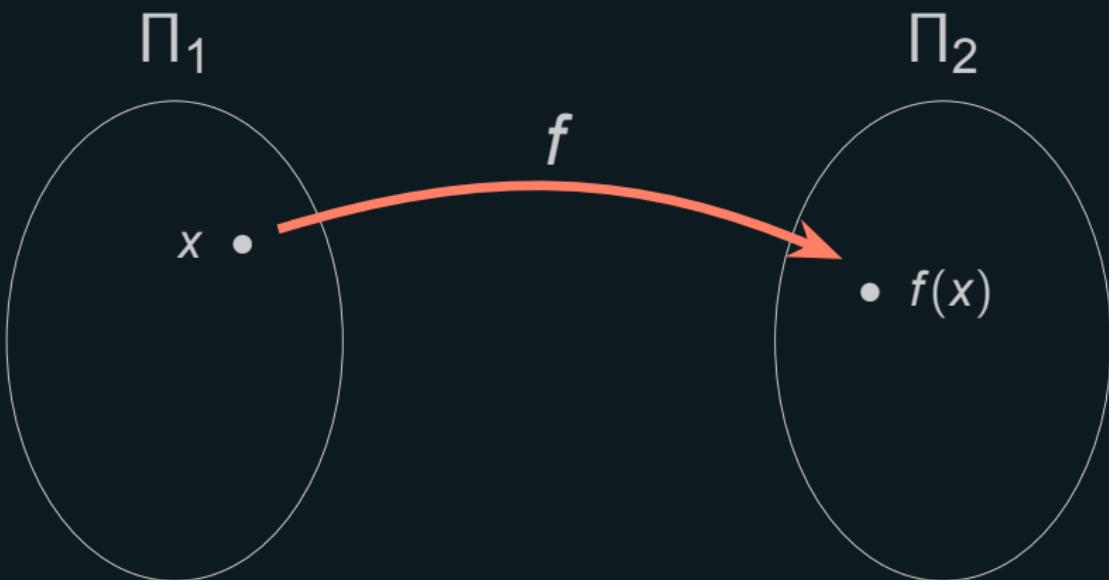
בצם המרנו את הקלט $(G', s, t, k') = f(x)$ של בעיה Π_1 בקלט (G, k) של בעיה Π_2 .

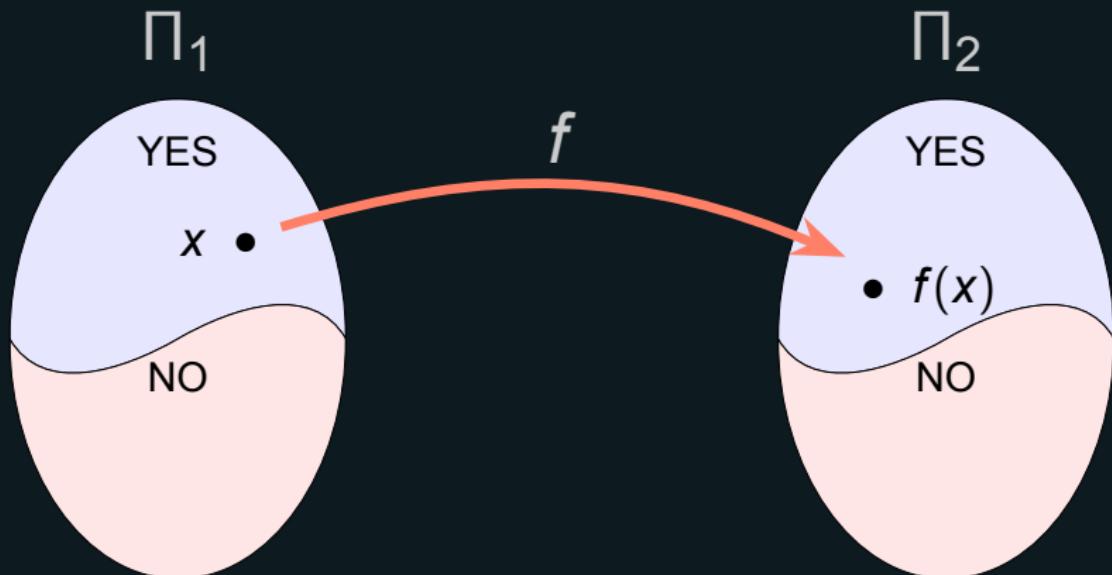


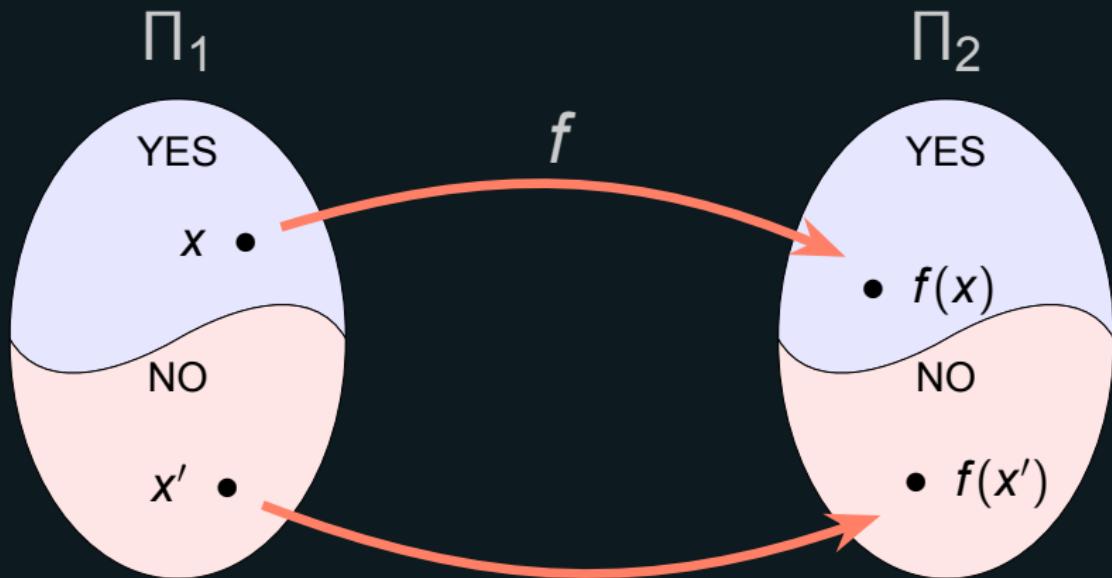


בעצם המרנו את הקלט $(G, k) = (G', s, t, k')$ בקלט Π בטעה x של בעיה Π_2 .

אפשר לחשב על בעיית הכרעה כעל אוסף של קלטים המתחלקים לקלט "כן" וקלט "לא".

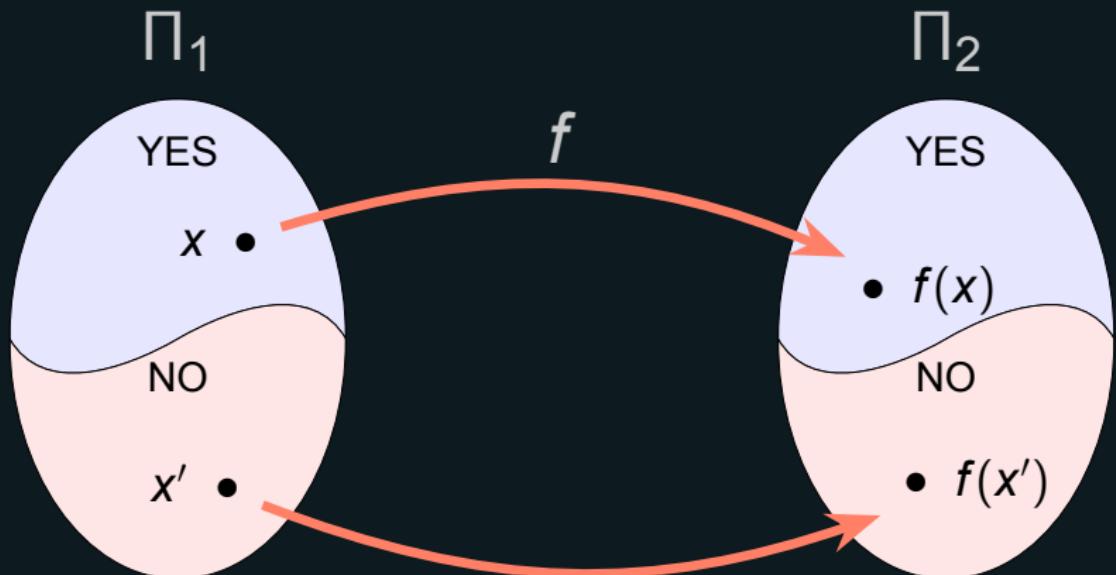








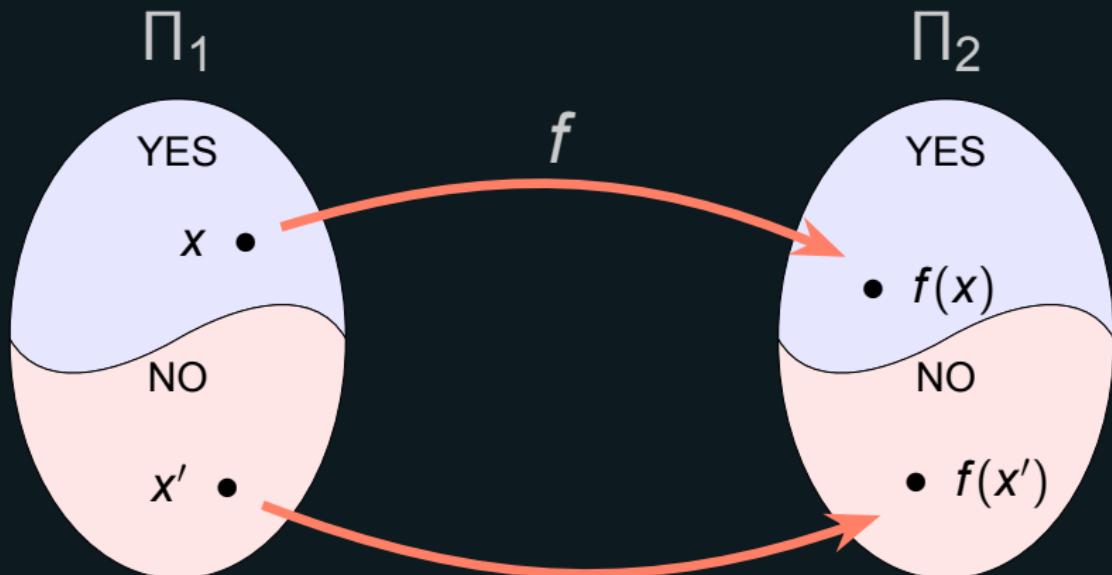
הפונקציה f היא רדוֹקְצִיה מבעיה Π_1 לבעיה Π_2 אם:





הפונקציה f היא רדיוקציה מבעיה Π_1 לבעיה Π_2 אם:

1. אפשר לחשב את f בזמן פולינומי.

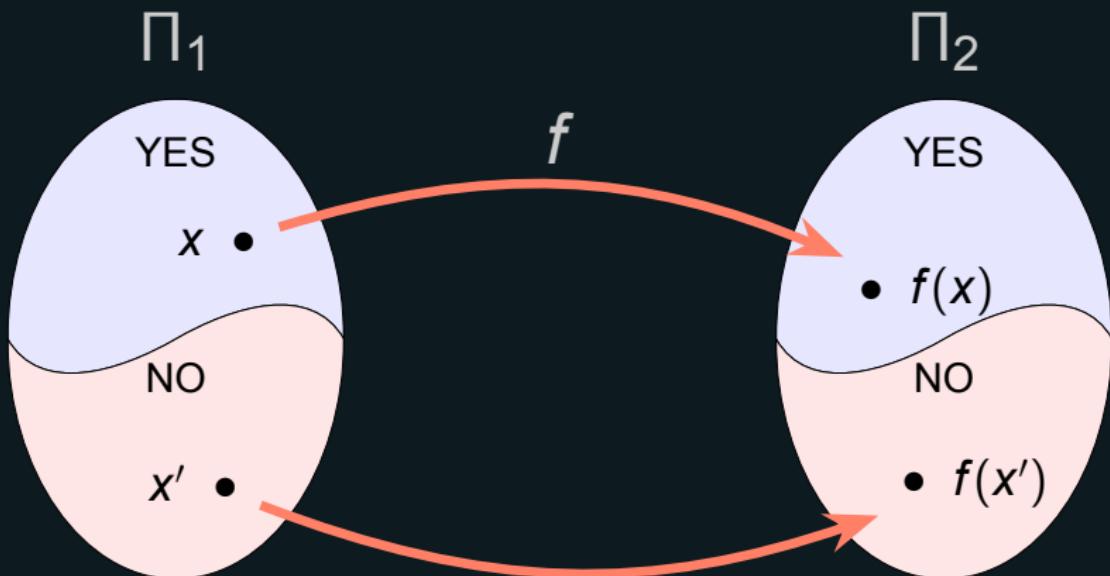




הפונקציה f היא רടקציה מבעיה Π_1 לבעיה Π_2 אם:

1. אפשר לחשב את f בזמן פולינומי.

2. $x \in \text{YES}(\Pi_1) \Leftrightarrow f(x) \in \text{YES}(\Pi_2)$

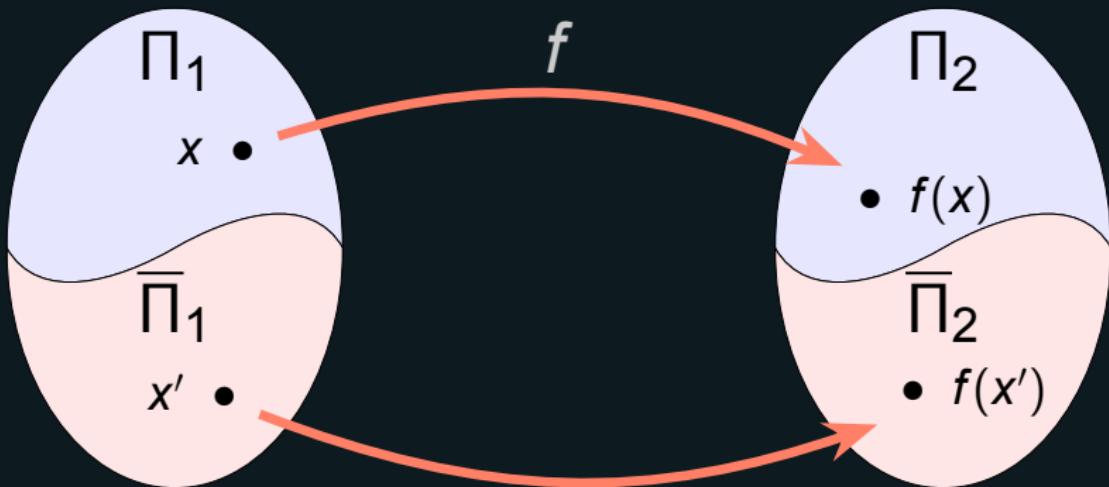




הפונקציה f היא רדיוקציה מבעיה Π_1 לבעיה Π_2 אם:

1. אפשר לחשב את f בזמן פולינומי.

2. $x \in \Pi_1 \Leftrightarrow f(x) \in \Pi_2$





נתונה נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z)$$

כמה השמות שונות מספקות את הנוסחה?



נתונה נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z)$$

כמה השמות שונות מספקות את הנוסחה?

| x | y | z | Φ |
|-----|-----|-----|--------|
| 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 0 | |



נתונה נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z)$$

כמה השמות שונות מספקות את הנוסחה?

| x | y | z | Φ |
|-----|-----|-----|--------|
| 1 | 1 | 1 | T |
| 1 | 1 | 0 | F |
| 1 | 0 | 1 | T |
| 1 | 0 | 0 | F |
| 0 | 1 | 1 | T |
| 0 | 1 | 0 | F |
| 0 | 0 | 1 | F |
| 0 | 0 | 0 | T |



המחלקה P מכילה את כל הבעיות הניתנות להכרעה בזמן פולינומי.

P



מחלקה P מכילה את כל הבעיות הניתנות להכרעה בזמן פולינומי.

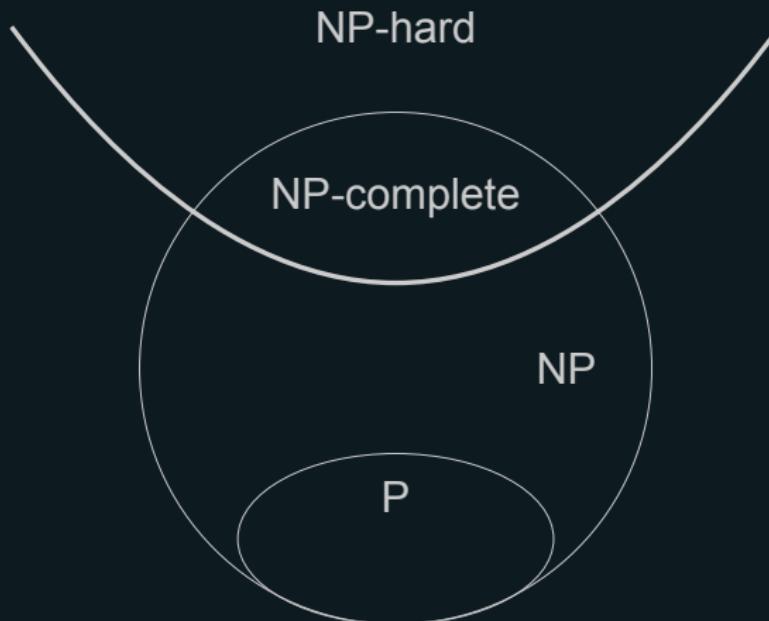
מחלקה NP מכילה את כל הבעיות שניתן לצמצם ל SAT בזמן פולינומי.





מחלקה P מכילה את כל הבעיה הנחוצה להכרעה בזמן פולינומי.

מחלקה NP מכילה את כל הבעיה שניתן לצמצם ל SAT בזמן פולינומי.



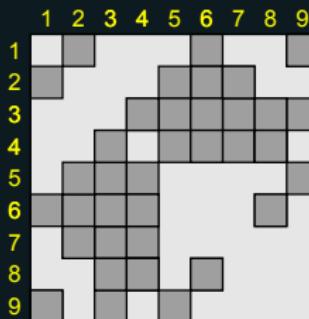
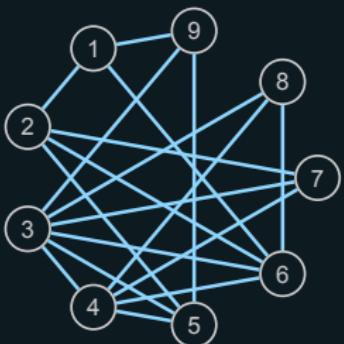


נתון גרף $(V, E) = G$ הממומש במטריצת שכנות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה. מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|, |E|$ -ו- k ? עברו איזה תנאי ירץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G תת-graf מלא בגודל k צמתים?



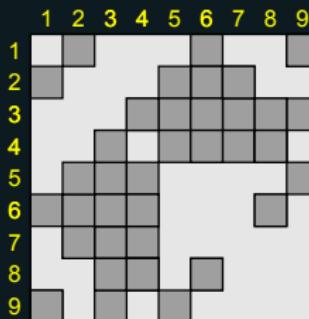
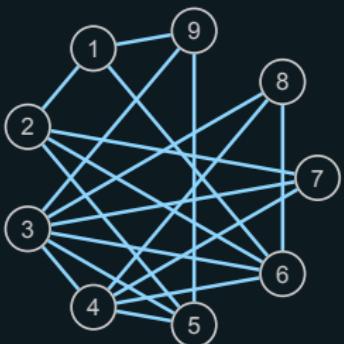


נתון גרף $(V, E) = G$ הממומש במטריצת שכנות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה. מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|, |E|$ -ו- k ? עברו איזה תנאי ירץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G תת-graf מלא בגודל k צמתים?



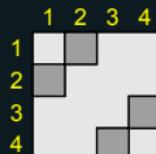
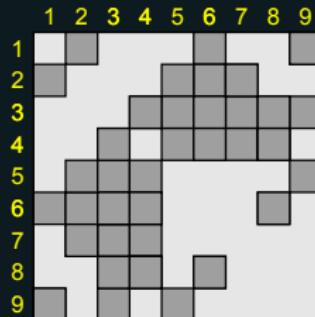
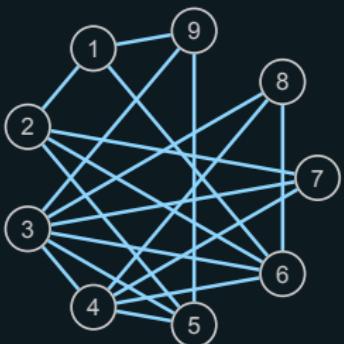


נתון גרף $(V, E) = G$ הממומש במטריצת שכנות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה. מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|, |E|$ -ו- k ? עברו איזה תנאי ירץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G תת-graf מלא בגודל k צמתים?



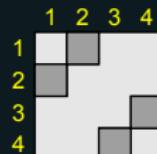
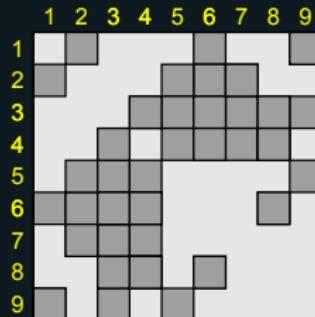
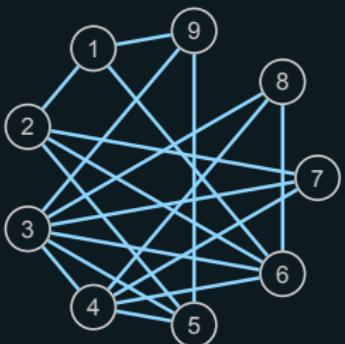


נתון גרף $(V, E) = G$ המומASH במטריצת שכנות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעית הקליקה. מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|, |E|$ -ו- k ? עברו איזה תנאי ירץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G תת-graf מלא בגודל k צמתים?



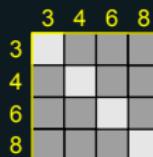
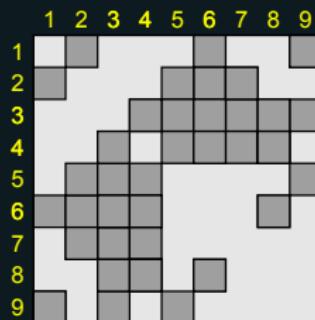
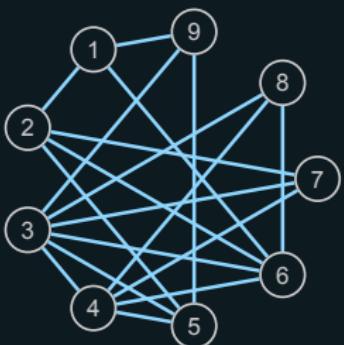


נתון גרף $(V, E) = G$ הממומש במטריצת שכנות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה. מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|, |E|$ -ו- k ? עברו איזה תנאי ירץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G תת-graf מלא בגודל k צמתים?



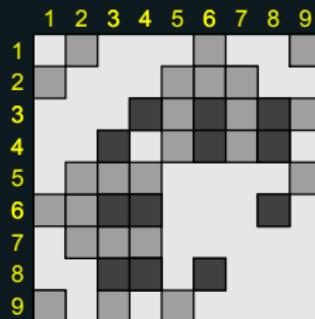
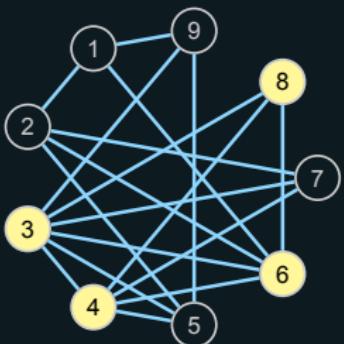


נתון גרף $(V, E) = G$ המומASH במטריצת שכנות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעית הקליקה. מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|, |E|$ -ו- k ? עברו איזה תנאי ירץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G תת-graf מלא בגודל k צמתים?



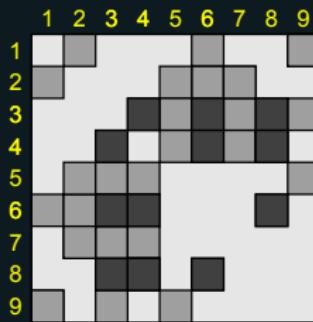
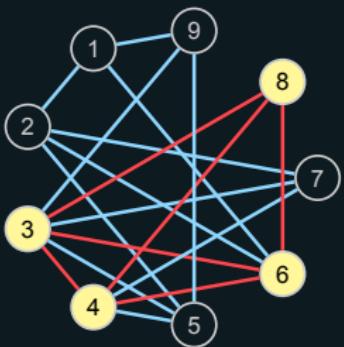


נתון גרף $(V, E) = G$ המומASH במטריצת שכנות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעית הקליקה. מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במנוחי $|V|, |E|, k$? עברו איזה תנאי ירץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G תת-graf מלא בגודל k צמתים?





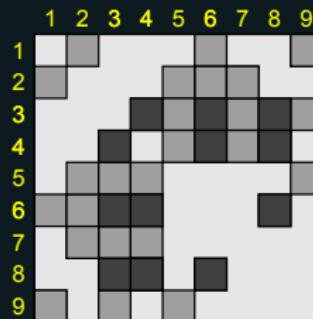
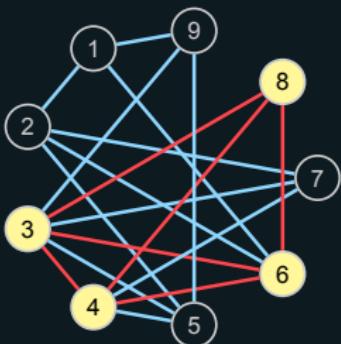
נתון גרף $(V, E) = G$ הממומש במטריצת שכנות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה. מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|, |E|, k$? עברו איזה תנאי ירץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G תת-graf מלא בגודל k צמתים?

ניתן לבדוק $\binom{n}{k}$ קבוצות בזמן $\mathcal{O}(k^2)$ לקבועה لكن האלגוריתם שלנו ירץ בזמן $\mathcal{O}(n^k k^2)$.





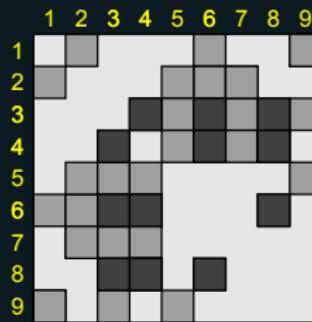
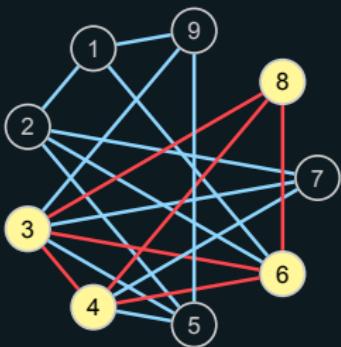
נתון גרף $(V, E) = G$ המומASH במטריצת שכנות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעית הקליקה. מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|, |E|, k$? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G תת-graf מלא בגודל k צמתים?

ניתן לבדוק $(n^k) \mathcal{O}$ קבוצות בזמן $(k^2) \mathcal{O}$ לקבוצה لكن האלגוריתם שלנו ירוץ בזמן $(n^k k^2) \mathcal{O}$.





נתון גרף $(V, E) = G$ הממוסה במטריצת שכנות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה. מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|, |E|, k$? עברו איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

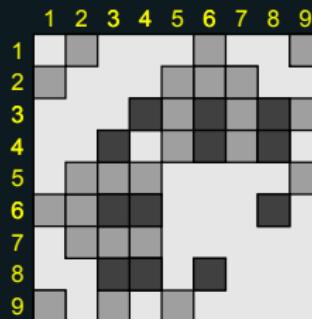
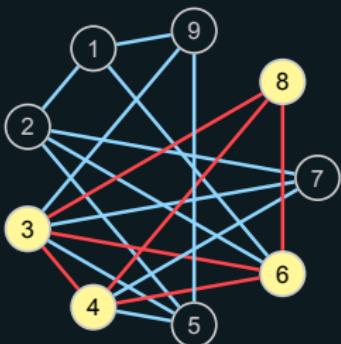
בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G תת-graf מלא בגודל k צמתים?

ניתן לבדוק $(k^k)O$ קבוצות בזמן $(k^2)O$ לקבוצה لكن האלגוריתם שלנו ירוץ בזמן $(n^k k^2)O$.

האלגוריתם ירוץ בזמן פולינומי כש k קבוע.





בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $(V, E) = G$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t ?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגreset ההחלטה של בעיית השידור המקסימלי (בהינתן גרף מצאו שידור לפחות בגודל k)



בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $(V, E) = G$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t ?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגreset ההחלטה של בעיית השידוך המקסימלי (בהינתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעיית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P



בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $(V, E) = G$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t ?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגreset ההחלטה של בעיית השידוך המקסימלי (בהינתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעיית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P בעוד בעיית המסלול הארוך היא בעיה NP -שלמה.



בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $(V, E) = G$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t ?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגreset ההחלטה של בעית השידוך המקסימלי (בהינתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P . בעוד בעית המסלול הארוך היא בעיה NP -שלמה.
רדוקציות כאלה הן מאד פשוטות, לאחר שבעית השידוך ניתנת להכרעה בזמן פולינומי.



בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $(V, E) = G$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t ?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגreset ההחלטה של בעית השידוך המקסימלי (בהינתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P בעוד בעית המסלול הארוך היא בעיה NP -שלמה.
רדווקציות כאלה הן מאד פשוטות, לאחר שבעית השידוך ניתנת להכרעה בזמן פולינומי.

בהינתן גרף G ומספר טבעי k , נחשב את השידוך המקסימלי M ב G באמצעות אלגוריתם הפריחה של אדמננדס בזמן $(m^2n)\mathcal{O}$.



בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $(V, E) = G$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t ?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההחלטה של בעית השידוך המקסימלי (בהינתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P בעוד בעית המסלול הארוך היא בעיה NP -שלמה.
רדווקציות כאלה הן מאד פשוטות, לאחר שבעית השידוך ניתן להכרעה בזמן פולינומי.

בהינתן גרף G ומספר טבעי k , נחשב את השידוך המקסימלי M ב G באמצעות אלגוריתם הפריחה של אדמננדס בזמן $(m^2n)^O$.

אם $|M| \geq k$ נחזיר את הגרף $(\{s, t\}, \emptyset)$ אחרת $G' = (\{s, t\}, \{(s, t)\})$



בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $(V, E) = G$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t ?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגreset ההחלטה של בעית השידוך המקסימלי (בהינתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P . בעוד בעית המסלול הארוך היא בעיה NP -שלמה.
רדווקציות כאלה הן מאד פשוטות, לאחר שבעית השידוך ניתנת להכרעה בזמן פולינומי.

בהינתן גרף G ומספר טבעי k , נחשב את השידוך המקסימלי M ב G באמצעות אלגוריתם הפריחה של אדמננדס בזמן $(m^2n)^O$.

אם $k \geq |M|$ נחזיר את הגרף G' אחריתו $G' = (\{s, t\}, \{(s, t)\})$ אחרת אם $|M| < k$ ($G', s, t, 1$).

הקלט של בעית המסלול הארוך ביותר יהיה אם $|M| < k$ ($G', s, t, 1$).



בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $(V, E) = G$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t ?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההחלטה של בעית השידוך המקסימלי (בהינתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P . בעוד בעית המסלול הארוך היא בעיה NP -שלמה.
רടוקציות כאלה הן מאד פשוטות, לאחר שבעית השידוך ניתן להכרעה בזמן פולינומי.

בהינתן גרף G ומספר טבעי k , נחשב את השידוך המקסימלי M ב G באמצעות אלגוריתם הפריחה של אדמננדס בזמן $(m^2n)\mathcal{O}$.

אם $k \geq |M|$ נחזיר את הגרף $(\{\}, \emptyset)$ $G' = (\{\}, \{(s, t)\})$ אחרת G' יהיה אם כך $(G', s, t, 1)$.

הקלט של בעית המסלול הארוך ביותר יהיה אם כך $(1, G')$.
כל (מאד) לראות שקיים מסלול באורך 1 ב G' אם ורק אם השידוך המקסימלי ב G בגודל לפחות k קשוחות.



בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $(V, E) = G$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k .

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t ?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגreset ההחלטה של בעית השידוך המקסימלי (בהינתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P . בעוד בעית המסלול הארוך היא בעיה NP -שלמה.
רדווקציות כאלה הן ממד פשוטות, לאחר שבעית השידוך ניתנת להכרעה בזמן פולינומי.

בהינתן גרף G ומספר טבעי k , נחשב את השידוך המקסימלי M ב G באמצעות אלגוריתם הפריחה של אדמננדס בזמן $(m^2n)^O$.

אם $k \geq |M|$ נחזיר את הגרף G' אחריתו $G' = (\{s, t\}, \{(s, t)\})$ אחרת אם $|M| < k$ $G' = (G', s, t, 1)$.

הקלט של בעית המסלול הארוך ביותר יהיה אם כר $(G', s, t, 1)$.
קל (מאד) לראות שקיים מסלול באורך 1 ב G' אם ורק אם השידוך המקסימלי ב G בגודל לפחות k קשותות.

כמו כן הקטל $(G', s, t, 1)$ חושב בזמן פולינומי.



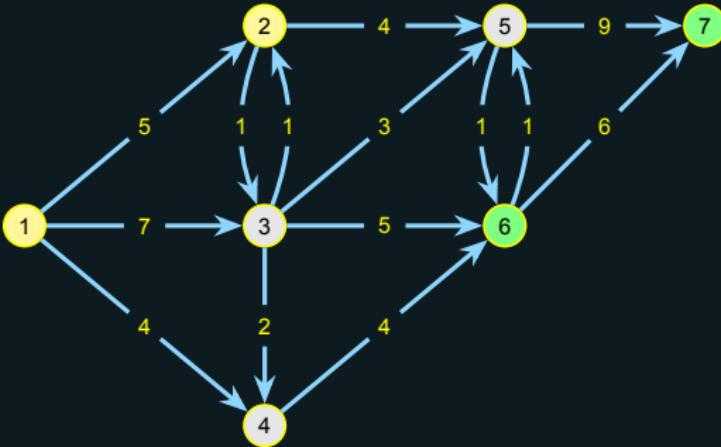
בעיית הזרימה מרובת המקורות והיעדים

קָלַט: רשת זרימה G עם מספר מקורות s_1, \dots, s_ℓ ומספר יעדים $t_1, \dots, t_{\ell'}$.

שאלה: האם קיימת זרימה חוקית f עבור G כך ש $|f| \geq k$?

הראו רדוקציה מבעה זו לבעיית הזרימה.

להלן דוגמא לרשת עם שני מקורות ושני יעדים:



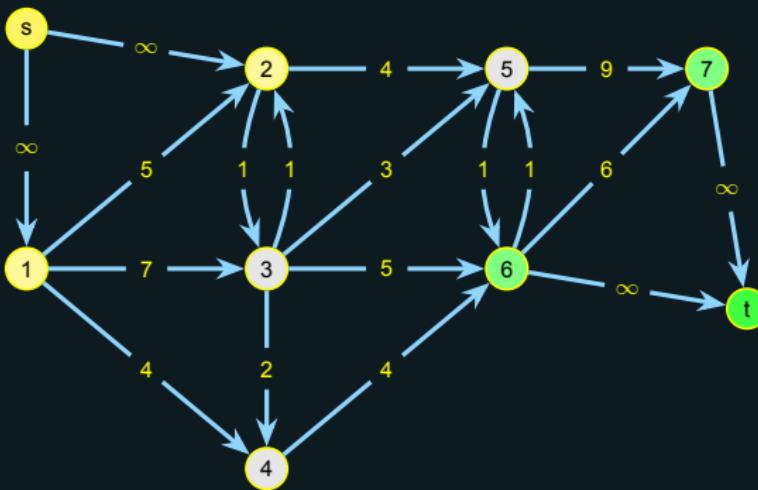
בעיית הזרימה מרובת המקורות והיעדים

קלט: רשת זרימה G עם מספר מקורות s_1, \dots, s_ℓ ומספר יעדים $t_1, \dots, t_{\ell'}$ ומספר יעדים t .

שאלה: האם קיימת זרימה חוקית f עבור G כך ש $|f| \geq k$?

הראו רדוקציה מבעה זו לבעיית הזרימה.

להלן דוגמא לרשת עם שני מקורות ושני יעדים:





בעיית הזרימה מרובת המקורות והיעדים

קלט: רשת זרימה G עם מספר מקורות s_1, \dots, s_ℓ ומספר יעדים $t_1, \dots, t_{\ell'}$.

שאלה: האם קיימת זרימה חוקית f עבור G כך ש $|f| \geq k$?

הראו רדוקציה מבעיה זו לבעיית הזרימה.

להלן דוגמא לרשת עם שני מקורות ושני יעדים:

מוסיף מקור-על ונחבר אותו לכל המקורות בקשתות עם קיבולות ∞ , נוסיף כמו כן צומת יעד המחברת לכל היעדים עם קשתות עם קיבולות ∞ . זמן הבנייה $O(\ell + \ell')$.

