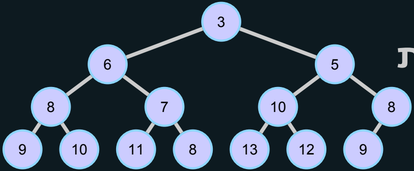


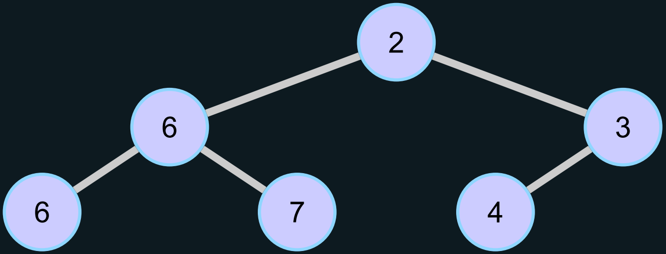
יסודות האלגוריתמים והסיבוכיות

תרגול 05 - ערימות בינאריות

תכונות ערימה בינארית

ערימה בינארית היא עץ בינארי המקיים שתי תכונות נוספות:

1. כל הרמות בערימה מלאות למעט האחרונה.
2. הבנים של כל צומת גדולים ממנו או שווים לו.



תרגיל 1

להלן מערך:

[3, 10, 5, 6, 7, 13, 8, 9, 8, 11, 8, 10, 12, 9]

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.

תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

[3, 10, 5, 6, 7, 13, 8, 9, 8, 11, 8, 10, 12, 9]

תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

נבנה מהאיברים במערך עץ בינארי המקיים את התכונה הראשונה של ערימה בינארית.

[3, 10, 5, 6, 7, 13, 8, 9, 8, 11, 8, 10, 12, 9]

תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

נבנה מהאיברים במערך עץ בינארי המקיים את התכונה הראשונה של ערימה בינארית.

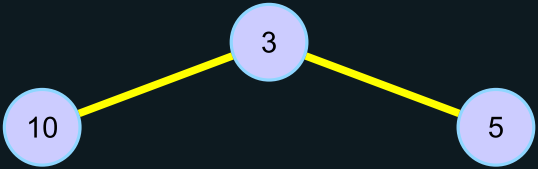
[3, 10, 5, 6, 7, 13, 8, 9, 8, 11, 8, 10, 12, 9]

תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

נבנה מהאיברים במערך עץ בינארי המקיים את התכונה הראשונה של ערימה בינארית.

[3, 10, 5, 6, 7, 13, 8, 9, 8, 11, 8, 10, 12, 9]

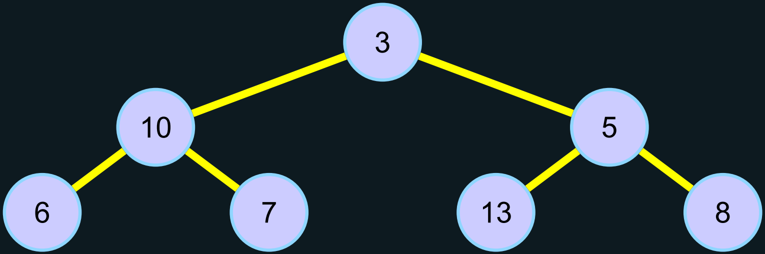


תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

נבנה מהאיברים במערך עץ בינארי המקיים את התכונה הראשונה של ערימה בינארית.

[3, 10, 5, 6, 7, 13, 8, 9, 8, 11, 8, 10, 12, 9]

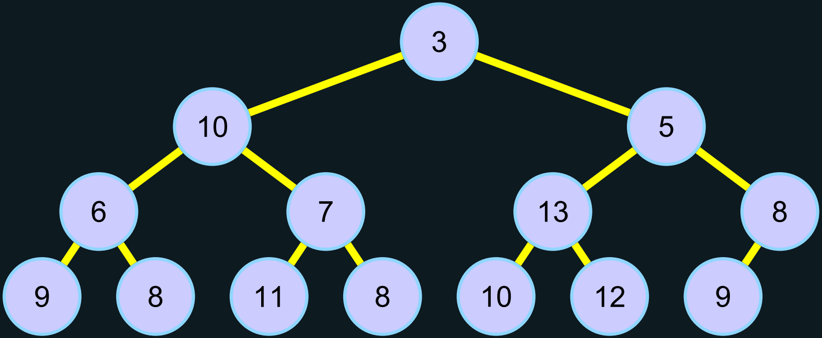


תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

נבנה מהאיברים במערך עץ בינארי המקיים את התכונה הראשונה של ערימה בינארית.

[3, 10, 5, 6, 7, 13, 8, 9, 8, 11, 8, 10, 12, 9]

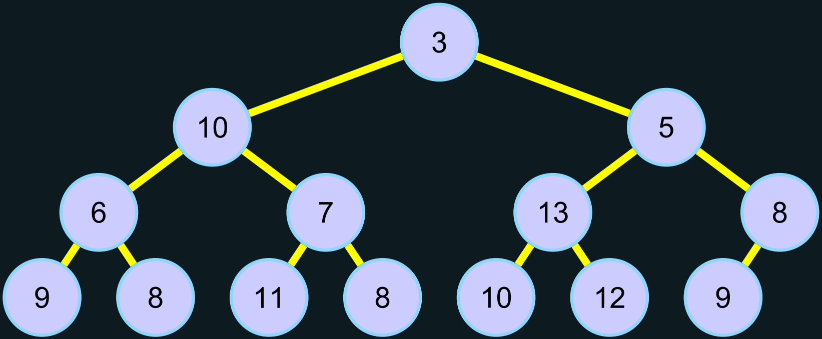


תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

נבנה מהאיברים במערך עץ בינארי המקיים את התכונה הראשונה של ערימה בינארית.

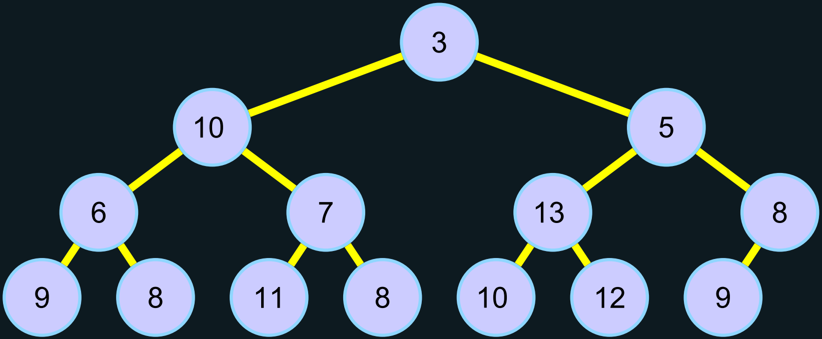
[3, 10, 5, 6, 7, 13, 8, 9, 8, 11, 8, 10, 12, 9]



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

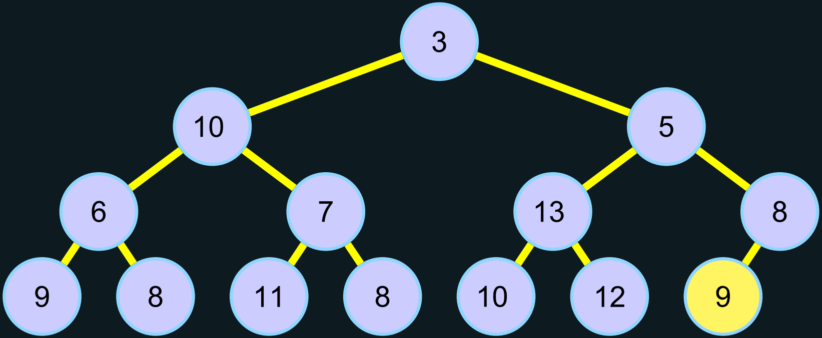
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

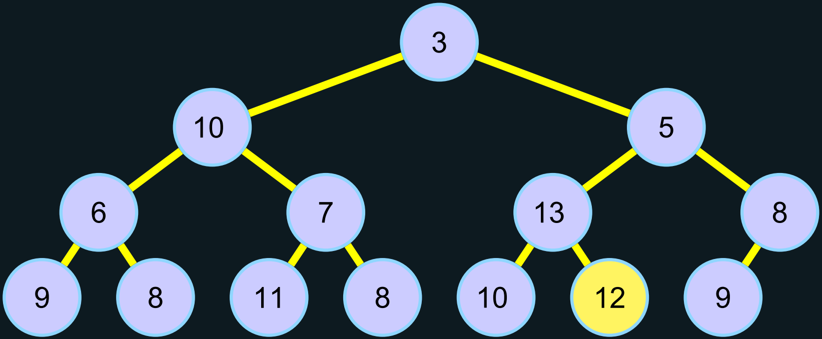
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

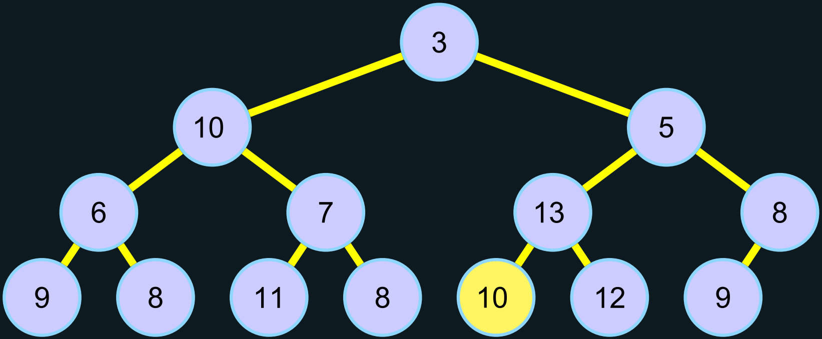
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

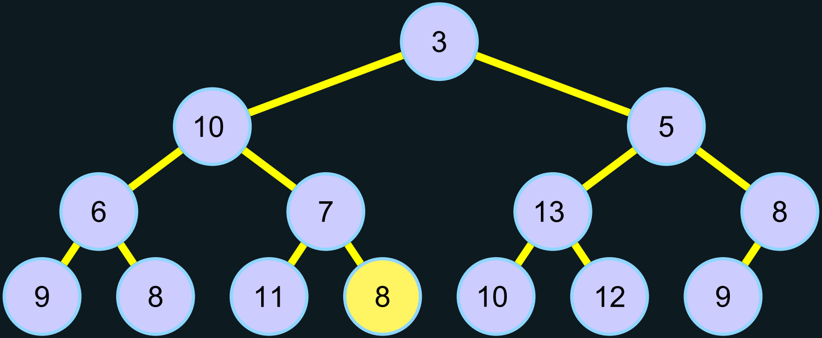
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

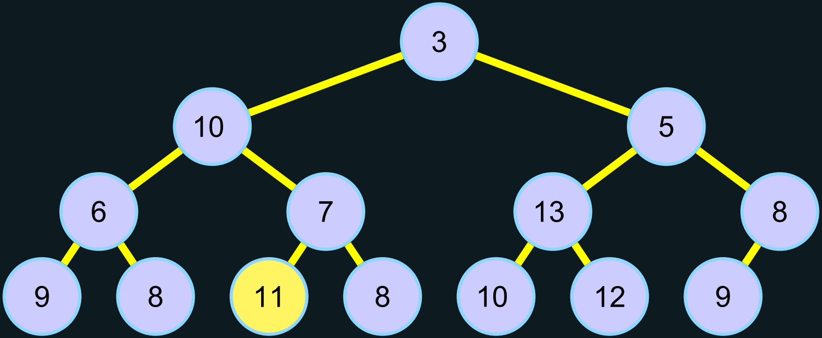
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

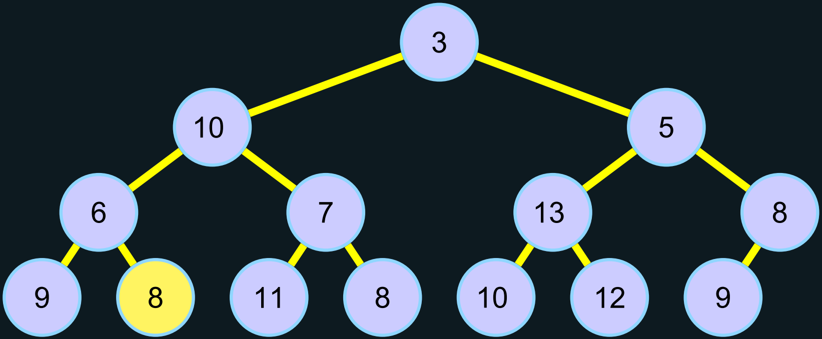
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

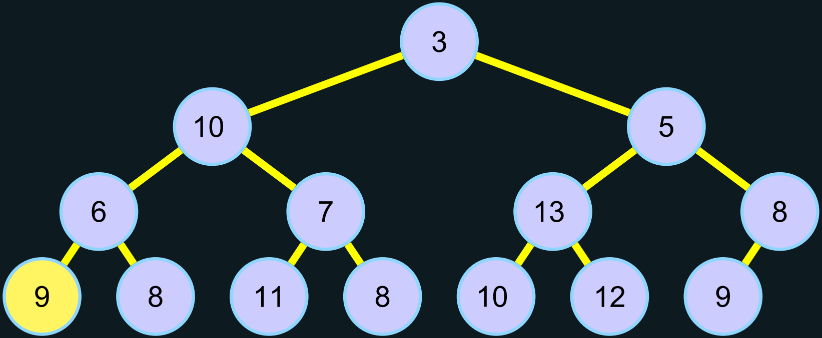
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

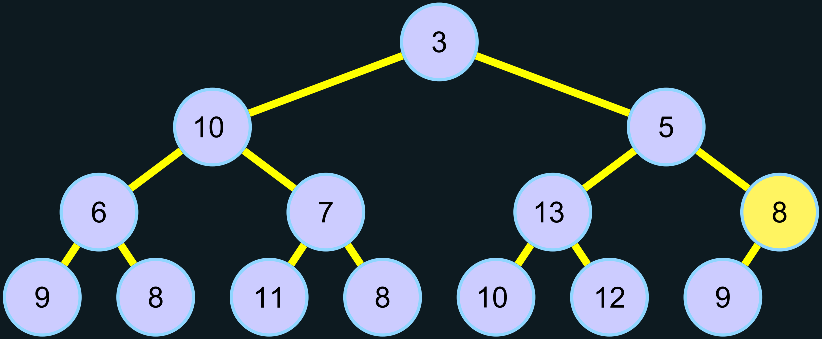
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

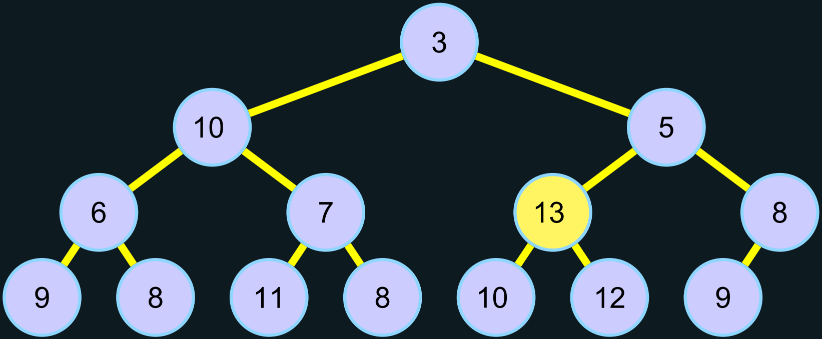
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

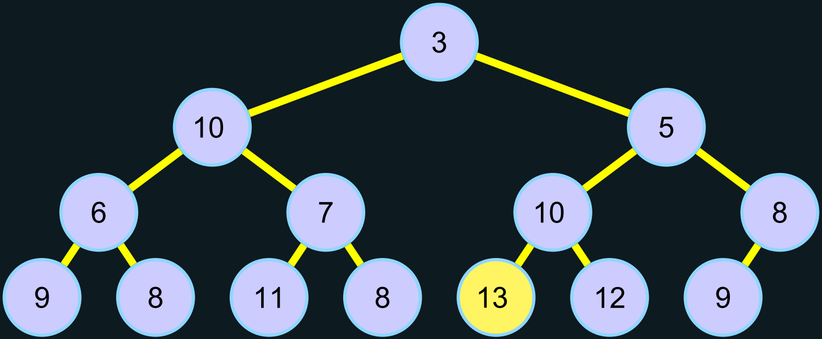
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

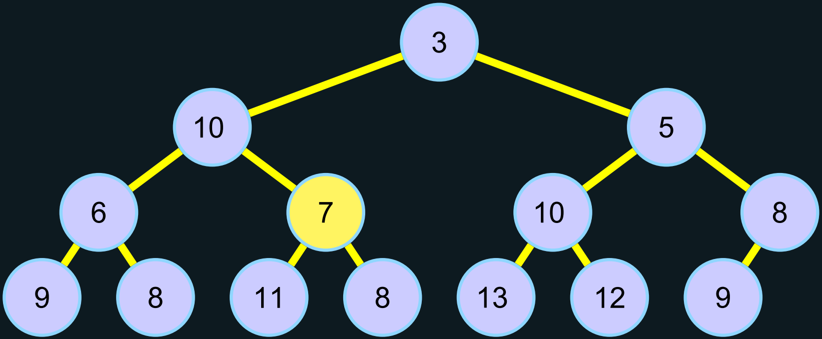
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

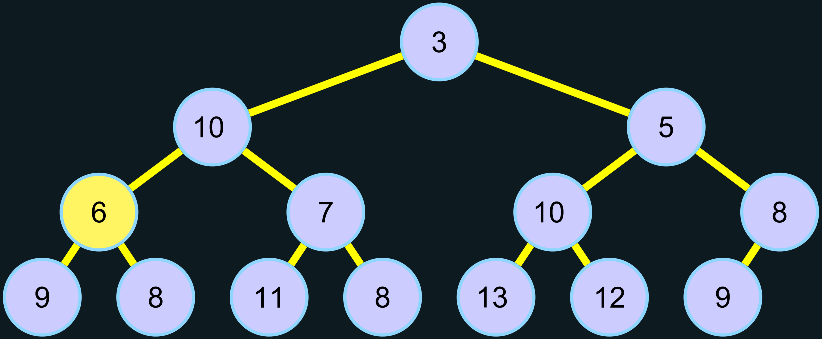
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

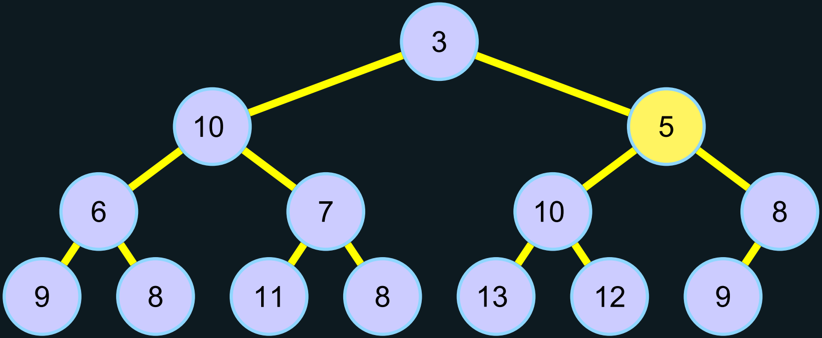
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

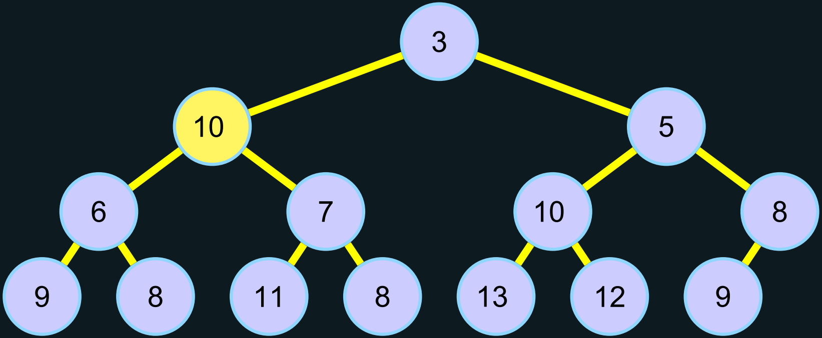
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

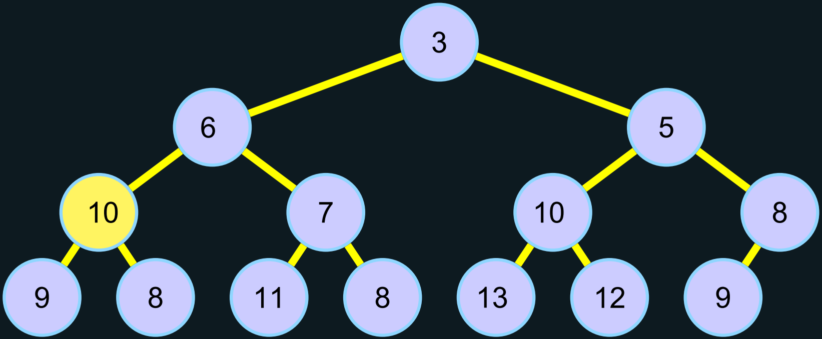
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

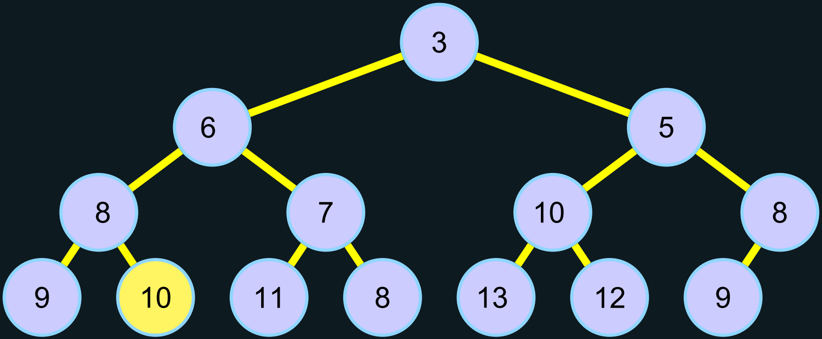
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

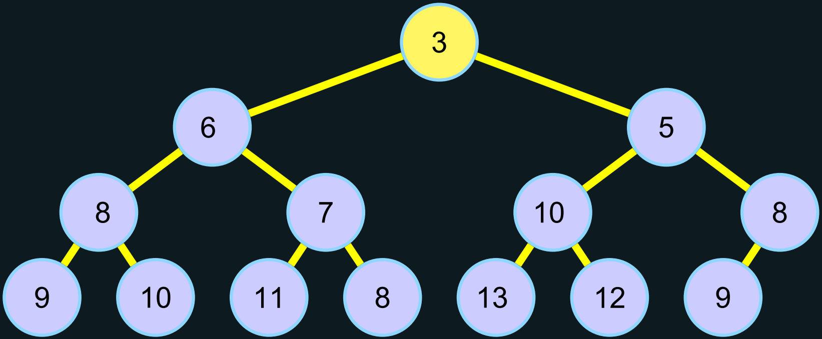
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

א. בנו את הערימה המתאימה ע״פ האלגוריתם של פלויד.

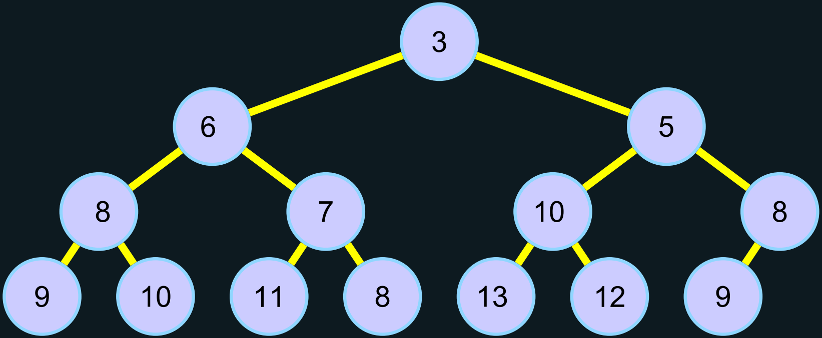
כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

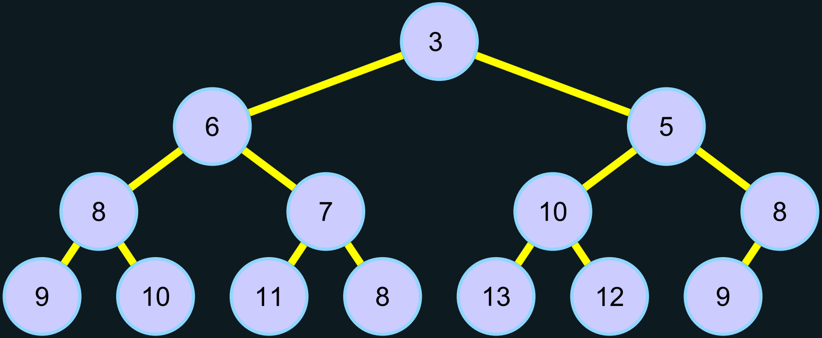
א. בנו את הערימה המתאימה ע"פ האלגוריתם של פלויד.

כעת נפעפע מטה את כל איברי הערימה החל באחרון.



תרגיל 1

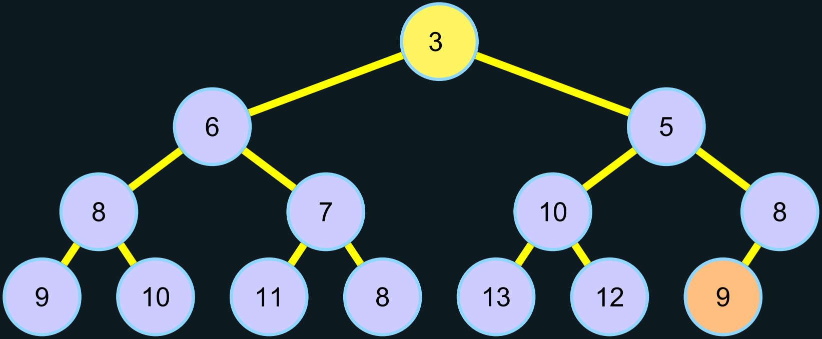
ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.



תרגיל 1

ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.

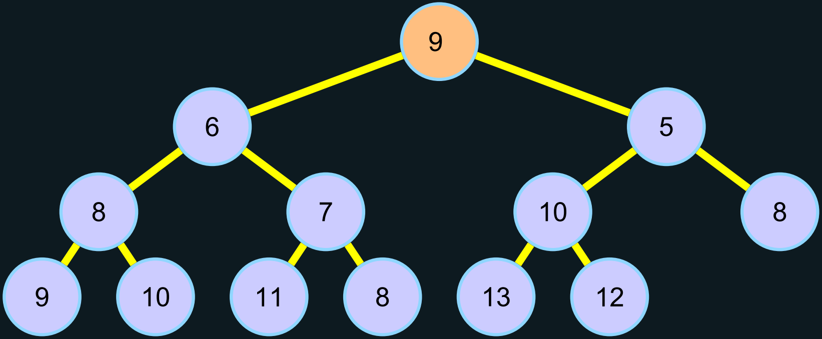
נשלוף מהערימה את המינימום ונשים את האיבר האחרון במקומו.



תרגיל 1

ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.

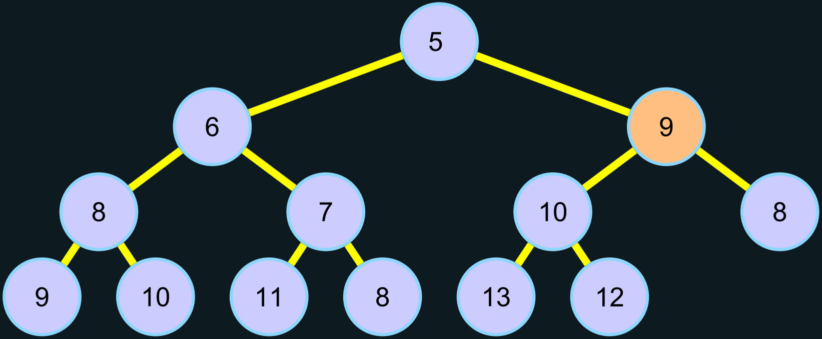
כעת נפעפע את שורש הערימה מטה.



תרגיל 1

ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.

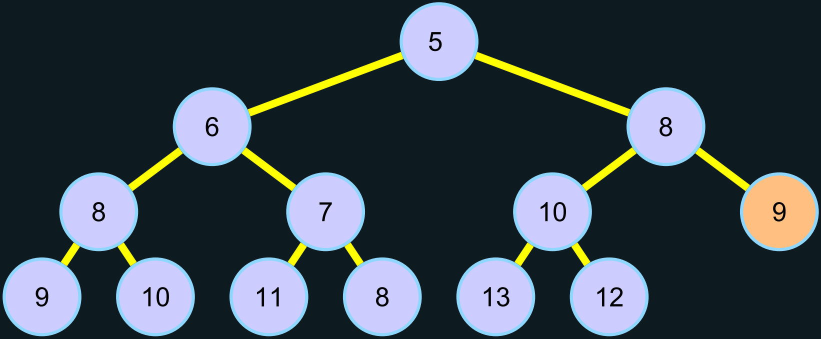
כעת נפעפע את שורש הערימה מטה.



תרגיל 1

ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.

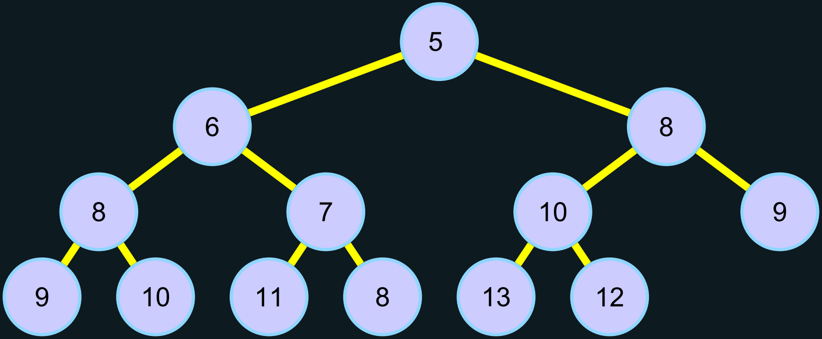
כעת נפעפע את שורש הערימה מטה.



תרגיל 1

ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.

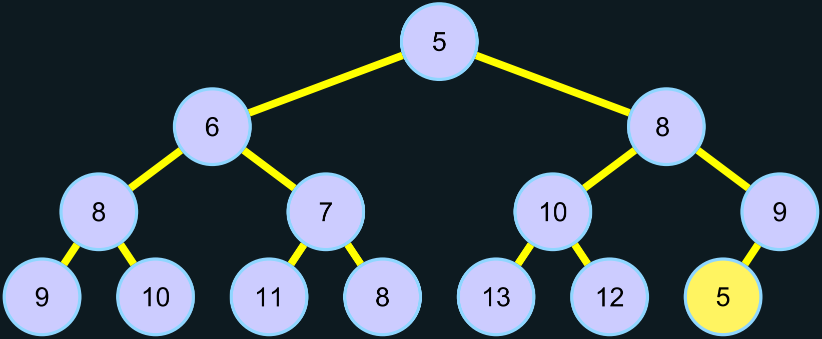
הפעפוע הושלם וכעת הערימה מקיימת את התכונה השנייה.



תרגיל 1

ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.

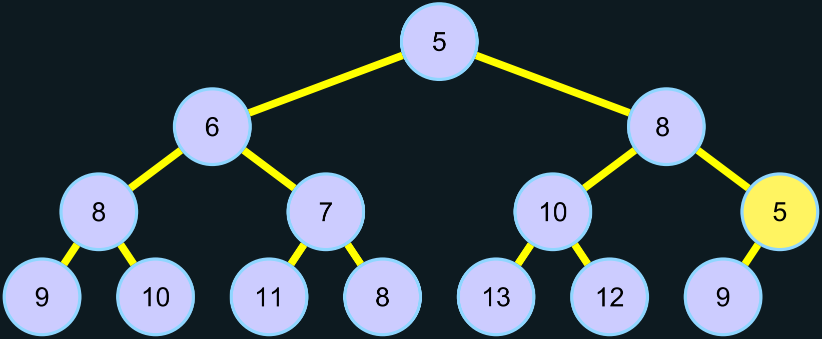
נוסיף את האיבר 5 כאיבר האחרון בערימה.



תרגיל 1

ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.

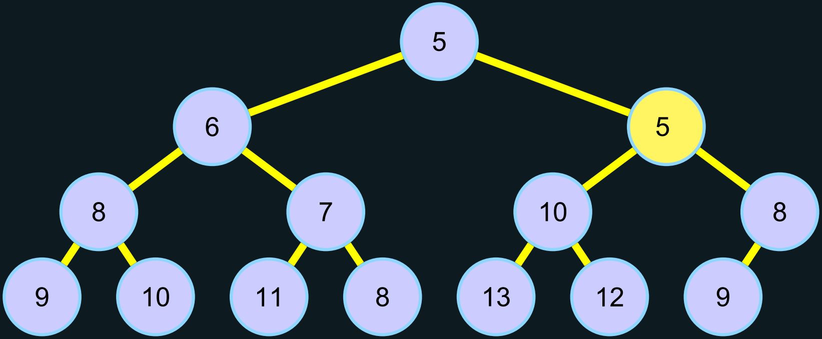
נפעפע את האיבר 5 מעלה.



תרגיל 1

ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.

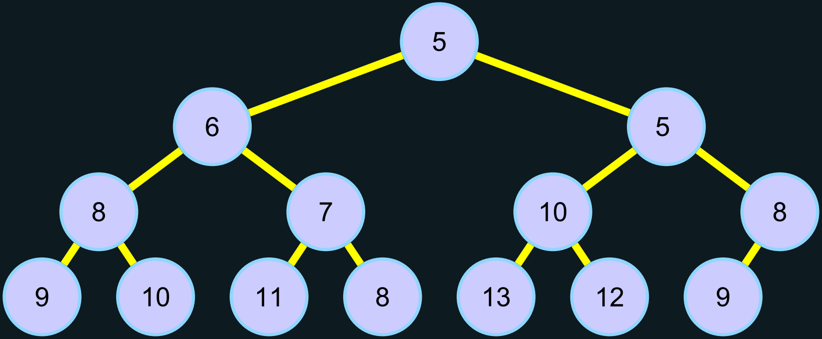
נפעפע את האיבר 5 מעלה.



תרגיל 1

ב. הוציאו את המינימום ולאחר מכן הכניסו את האיבר 5.

הפעפוע הושלם וכעת הערימה מקיימת את התכונה השנייה.



תרגיל 2

נתונות שתי ערימות בינאריות H_1 ו H_2 כל אחת בת n איברים. הציעו אלגוריתם המקבל את שתי הערימות ומחזיר ערימה חדשה עם כל $2n$ האיברים בסיבוכיות $\mathcal{O}(n)$.

תרגיל 2

נתונות שתי ערימות בינאריות H_1 ו H_2 כל אחת בת n איברים. הציעו אלגוריתם המקבל את שתי הערימות ומחזיר ערימה חדשה עם כל $2n$ האיברים בסיבוכיות $\mathcal{O}(n)$.

אם ננסה להכניס את האיברים מערימה אחת לשניה בזה אחר זה, נכניס n איברים בסיבוכיות $\mathcal{O}(\lg n)$ לפעולת הכנסה, סה״כ $\mathcal{O}(n \lg n)$.

תרגיל 2

נתונות שתי ערימות בינאריות H_1 ו H_2 כל אחת בת n איברים. הציעו אלגוריתם המקבל את שתי הערימות ומחזיר ערימה חדשה עם כל $2n$ האיברים בסיבוכיות $\mathcal{O}(n)$.

אם ננסה להכניס את האיברים מערימה אחת לשניה בזה אחר זה, נכניס n איברים בסיבוכיות $\mathcal{O}(\lg n)$ לפעולת הכנסה, סה״כ $\mathcal{O}(n \lg n)$.

יש דרך יותר יעילה:

תרגיל 2

נתונות שתי ערימות בינאריות H_1 ו H_2 כל אחת בת n איברים. הציעו אלגוריתם המקבל את שתי הערימות ומחזיר ערימה חדשה עם כל $2n$ האיברים בסיבוכיות $\mathcal{O}(n)$.

אם ננסה להכניס את האיברים מערימה אחת לשניה בזה אחר זה, נכניס n איברים בסיבוכיות $\mathcal{O}(\lg n)$ לפעולת הכנסה, סה״כ $\mathcal{O}(n \lg n)$.

יש דרך יותר יעילה:

נכניס את כל האיברים בערימות למערך אחד בגודל $2n$ איברים ונבנה ממנו ערימה בעזרת האלגוריתם של פלויד בזמן $\mathcal{O}(2n) = \mathcal{O}(n)$.

תרגיל 3

ידוע כי גובה ערימה מסויימת בת n איברים הוא h.

מהו טווח מספר האיברים של הערימה?

הציעו חסם עליון וחסם תחתון על n המסתמכים על h בלבד.

תרגיל 3

ידוע כי גובה ערימה מסויימת בת n איברים הוא h.

מהו טווח מספר האיברים של הערימה?

הציעו חסם עליון וחסם תחתון על n המסתמכים על h בלבד.

בערימה בעלת גובה h יש h רמות (מהשורש שהוא רמה 0 עד העלים ברמה $h-1$) כאשר מלבד הרמה האחרונה, כל הרמות מלאות, כלומר בעלות 2^i איברים ברמה ה-i.

תרגיל 3

ידוע כי גובה ערימה מסויימת בת n איברים הוא h.

מהו טווח מספר האיברים של הערימה?

הציעו חסם עליון וחסם תחתון על n המסתמכים על h בלבד.

בערימה בעלת גובה h יש h רמות (מהשורש שהוא רמה 0 עד העלים ברמה $h-1$) כאשר מלבד הרמה האחרונה, כל הרמות מלאות, כלומר בעלות 2^i איברים ברמה ה-i.

מכאן שסך האיברים ב-$h-1$ הרמות הראשונות הוא: $\sum_{i\in\{0,1,\ldots,h-2\}} 2^i = 2^{h-1} - 1$

תרגיל 3

ידוע כי גובה ערימה מסויימת בת n איברים הוא h.

מהו טווח מספר האיברים של הערימה?

הציעו חסם עליון וחסם תחתון על n המסתמכים על h בלבד.

בערימה בעלת גובה h יש h רמות (מהשורש שהוא רמה 0 עד העלים ברמה $h-1$) כאשר מלבד הרמה האחרונה, כל הרמות מלאות, כלומר בעלות 2^i איברים ברמה ה-i.

מכאן שסך האיברים ב-$h-1$ הרמות הראשונות הוא: $\sum_{i \in \{0,1,\ldots,h-2\}} 2^i = 2^{h-1} - 1$

תרגיל 3

ידוע כי גובה ערימה מסויימת בת n איברים הוא h.

מהו טווח מספר האיברים של הערימה?

הציעו חסם עליון וחסם תחתון על n המסתמכים על h בלבד.

בערימה בעלת גובה h יש h רמות (מהשורש שהוא רמה 0 עד העלים ברמה $h-1$) כאשר מלבד הרמה האחרונה, כל הרמות מלאות, כלומר בעלות 2^i איברים ברמה הi.

מכאן שסך האיברים ב$h-1$ הרמות הראשונות הוא: $\sum_{i\in\{0,1,\ldots,h-2\}} 2^i = 2^{h-1}-1$

נניח שהרמה האחרונה היא קטנה ככל האפשר, כלומר בעלת איבר אחד. אם כך הרי שסך האיברים בערימה כזו הוא $2^{h-1}-1+1=2^{h-1}$, השגנו איפה חסם תחתון על מספר האיברים $n\in\Omega(2^{h-1})$.

תרגיל 3

ידוע כי גובה ערימה מסויימת בת n איברים הוא h.

מהו טווח מספר האיברים של הערימה?

הציעו חסם עליון וחסם תחתון על n המסתמכים על h בלבד.

בערימה בעלת גובה h יש h רמות (מהשורש שהוא רמה 0 עד העלים ברמה $h-1$) כאשר מלבד הרמה האחרונה, כל הרמות מלאות, כלומר בעלות 2^i איברים ברמה ה-i.

מכאן שסך האיברים ב-$h-1$ הרמות הראשונות הוא: $\sum_{i\in\{0,1,\ldots,h-2\}} 2^i = 2^{h-1}-1$

נניח שהרמה האחרונה היא קטנה ככל האפשר, כלומר בעלת איבר אחד. אם כך הרי שסך האיברים בערימה כזו הוא $2^{h-1}-1+1=2^{h-1}$, השגנו איפה חסם תחתון על מספר האיברים $n\in\Omega(2^{h-1})$.

כדי לחשב את החסם העליון נניח שהרמה האחרונה מלאה. נוכל להשתמש בנוסחה שמצאנו למספר האיברים בערימה עם h רמות מלאות נציב $h-1$ (כי אנחנו מתחילים לספור ב-0) בנוסחה ונקבל $n\in\mathcal{O}(2^h-1)$.

תרגיל 3

ידוע כי גובה ערימה מסויימת בת n איברים הוא h.

מהו טווח מספר האיברים של הערימה?

הציעו חסם עליון וחסם תחתון על n המסתמכים על h בלבד.

בערימה בעלת גובה h יש h רמות (מהשורש שהוא רמה 0 עד העלים ברמה $h-1$) כאשר מלבד הרמה האחרונה, כל הרמות מלאות, כלומר בעלות 2^i איברים ברמה הi.

מכאן שסך האיברים ב$h-1$ הרמות הראשונות הוא: $\sum_{i\in\{0,1,\ldots,h-2\}} 2^i = 2^{h-1}-1$

נניח שהרמה האחרונה היא קטנה ככל האפשר, כלומר בעלת איבר אחד. אם כך הרי שסך האיברים בערימה כזו הוא $2^{h-1}-1+1=2^{h-1}$, השגנו איפה חסם תחתון על מספר האיברים $n \in \Omega(2^{h-1})$.

כדי לחשב את החסם העליון נניח שהרמה האחרונה מלאה. נוכל להשתמש בנוסחה שמצאנו למספר האיברים בערימה עם h רמות מלאות נציב $h-1$ (כי אנחנו מתחילים לספור ב0) בנוסחה ונקבל $n \in \mathcal{O}(2^h-1)$.

לסיכום:

$$2^{h-1} \leq n \leq 2^h - 1$$

תרגיל 3

ידוע כי גובה ערימה מסויימת בת n איברים הוא h.

מהו טווח מספר האיברים של הערימה?

הציעו חסם עליון וחסם תחתון על n המסתמכים על h בלבד.

פירוט של הנוסחה לחישוב סכום של טור הנדסי.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in \{0,1,\ldots h\}} 2^i &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^h \\
&= 1 \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^h) \\
&= (2-1) \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^h) \\
&= 2 \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^h) - 1 \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^h) \\
&= 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^h + 2^{h+1} - 2^0 - 2^1 - 2^2 - \cdots - 2^h) \\
&= 2^{h+1} - 2^0 \\
&= 2^{h+1} - 1
\end{aligned}
$$

תרגיל 4

הראו שהגובה של ערימה בת n איברים הוא $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

תרגיל 4

הראו שהגובה של ערימה בת n איברים הוא $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

נשתמש בחסמים שמצאנו בתרגיל הקודם.

תרגיל 4

הראו שהגובה של ערימה בת n איברים הוא $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

נשתמש בחסמים שמצאנו בתרגיל הקודם. ראינו שבערימה בגובה h מספר האיברים n חסום ב:

$$2^{h-1} \leq n \leq 2^h - 1$$

תרגיל 4

הראו שהגובה של ערימה בת n איברים הוא $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

נשתמש בחסמים שמצאנו בתרגיל הקודם. ראינו שבערימה בגובה h מספר האיברים n חסום ב:

$$2^{h-1} \leq n \leq 2^h - 1$$

נבטא את h באמצעות n. נוציא $\lg$ מאי השוויון התחתון כדי לקבל $h - 1 \leq \lg n$.

תרגיל 4

הראו שהגובה של ערימה בת n איברים הוא $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

נשתמש בחסמים שמצאנו בתרגיל הקודם. ראינו שבערימה בגובה h מספר האיברים n חסום ב:

$$2^{h-1} \leq n \leq 2^h - 1$$

נבטא את h באמצעות n. נוציא $\lg$ מאי השוויון התחתון כדי לקבל $h - 1 \leq \lg n$.

קצת קשה להוציא $\lg$ מאי השוויון העליון, אבל אפשר להחליף אותו בחסם עליון גדול יותר.

תרגיל 4

הראו שהגובה של ערימה בת n איברים הוא $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

נשתמש בחסמים שמצאנו בתרגיל הקודם. ראינו שבערימה בגובה h מספר האיברים n חסום ב:

$$2^{h-1} \leq n \leq 2^h - 1$$

נבטא את h באמצעות n. נוציא lg מאי השוויון התחתון כדי לקבל $h - 1 \leq \lg n$.

קצת קשה להוציא lg מאי השוויון העליון, אבל אפשר להחליף אותו בחסם עליון גדול יותר.

$$2^h - 1 < 2^h \Leftrightarrow \lg n < h$$

תרגיל 4

הראו שהגובה של ערימה בת n איברים הוא $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

נשתמש בחסמים שמצאנו בתרגיל הקודם. ראינו שבערימה בגובה h מספר האיברים n חסום ב:

$$2^{h-1} \leq n \leq 2^h - 1$$

נבטא את h באמצעות n. נוציא lg מאי השוויון התחתון כדי לקבל $h - 1 \leq \lg n$.

קצת קשה להוציא lg מאי השוויון העליון, אבל אפשר להחליף אותו בחסם עליון גדול יותר.

$$2^h - 1 < 2^h \Leftrightarrow \lg n < h$$

כדי להוכיח שהגובה הוא בדיוק $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ נתבונן בתחום שקיבלנו:

$$h - 1 \leq \quad \lg n \quad < \qquad h$$

תרגיל 4

הראו שהגובה של ערימה בת n איברים הוא $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

נשתמש בחסמים שמצאנו בתרגיל הקודם. ראינו שבערימה בגובה h מספר האיברים n חסום ב:

$$2^{h-1} \leq n \leq 2^h - 1$$

נבטא את h באמצעות n. נוציא $\lg$ מאי השוויון התחתון כדי לקבל $h - 1 \leq \lg n$.

קצת קשה להוציא $\lg$ מאי השוויון העליון, אבל אפשר להחליף אותו בחסם עליון גדול יותר.

$$2^h - 1 < 2^h \Leftrightarrow \lg n < h$$

כדי להוכיח שהגובה הוא בדיוק $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ נתבונן בתחום שקיבלנו:

$$\begin{array}{rcccl} h-1 \leq & \lg n & < & h \\ \lg n < & h & \leq & \lg n + 1 \end{array}$$

תרגיל 4

הראו שהגובה של ערימה בת n איברים הוא $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

נשתמש בחסמים שמצאנו בתרגיל הקודם. ראינו שבערימה בגובה h מספר האיברים n חסום ב:

$$2^{h-1} \leq n \leq 2^h - 1$$

נבטא את h באמצעות n. נוציא $\lg$ מאי השוויון התחתון כדי לקבל $h - 1 \leq \lg n$.

קצת קשה להוציא $\lg$ מאי השוויון העליון, אבל אפשר להחליף אותו בחסם עליון גדול יותר.

$$2^h - 1 < 2^h \Leftrightarrow \lg n < h$$

כדי להוכיח שהגובה הוא בדיוק $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ נתבונן בתחום שקיבלנו:

$$\begin{array}{cccc} h - 1 \leq & \lg n & < & h \\ \lg n < & h & \leq & \lg n + 1 \end{array}$$

אנחנו יודעים ש h הוא מספר שלם ומכיוון שבתחום $(\lg n, \lg n + 1]$ קיים רק מספר שלם אחד,

$$h = \lfloor \lg n \rfloor + 1$$