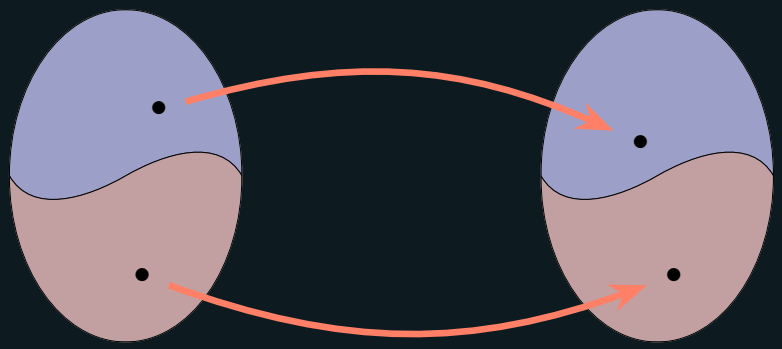


יסודות האלגוריתמים והסיבוכיות

תרגול 11 - רדוקציות

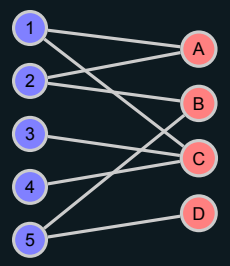
רדוקציות

רדוקציות

ראינו שניתן להשתמש באלגוריתם של פורד-פולקרסון כדי לפתור את בעיית השידוך המקסימלי.

בעיית השידוך

$k,$



רדוקציות

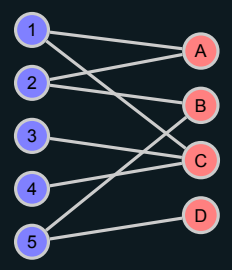
ראינו שניתן להשתמש באלגוריתם של פורד-פולקרסון כדי לפתור את בעיית השידוך המקסימלי.

עשינו זאת ע״י בניית רשת זרימה מהגרף של בעיית השידוך.

בעיית השידוך

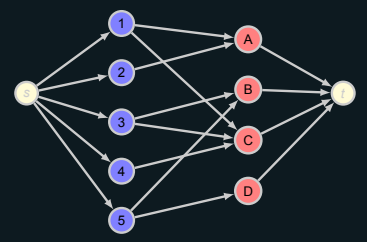
בעיית הזרימה

$k,$



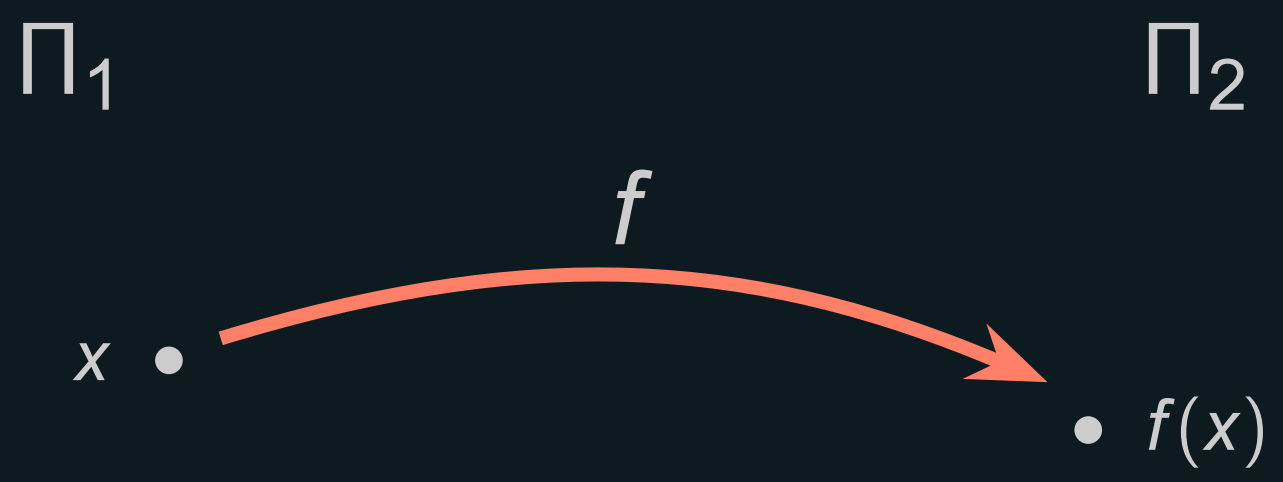
f

$k',$



רדוקציות

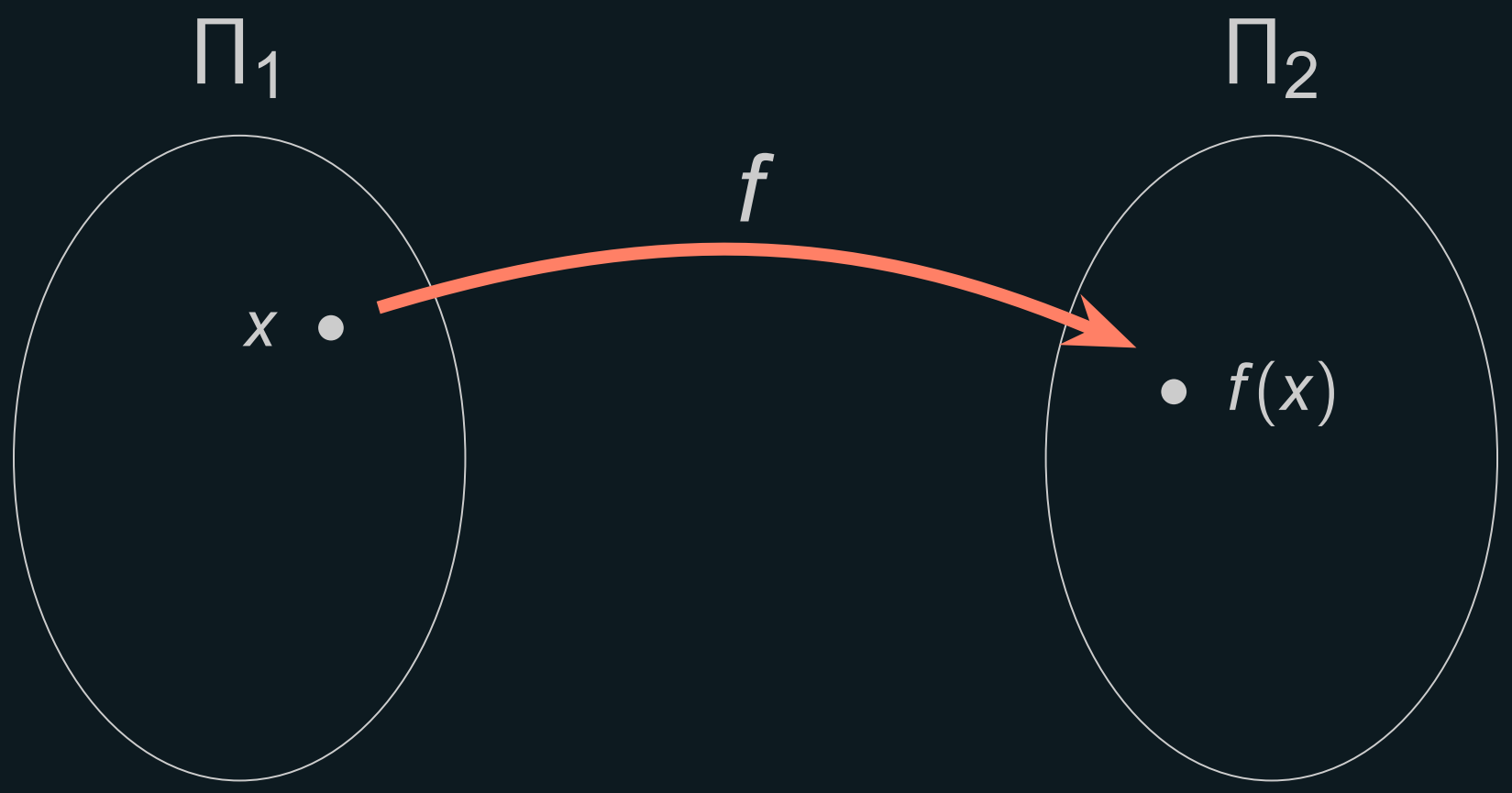
בעצם המרנו את הקלט $x = (G, k)$ של בעיה Π_1 בקלט $f(x) = (G', s, t, k')$ של בעיה Π_2.



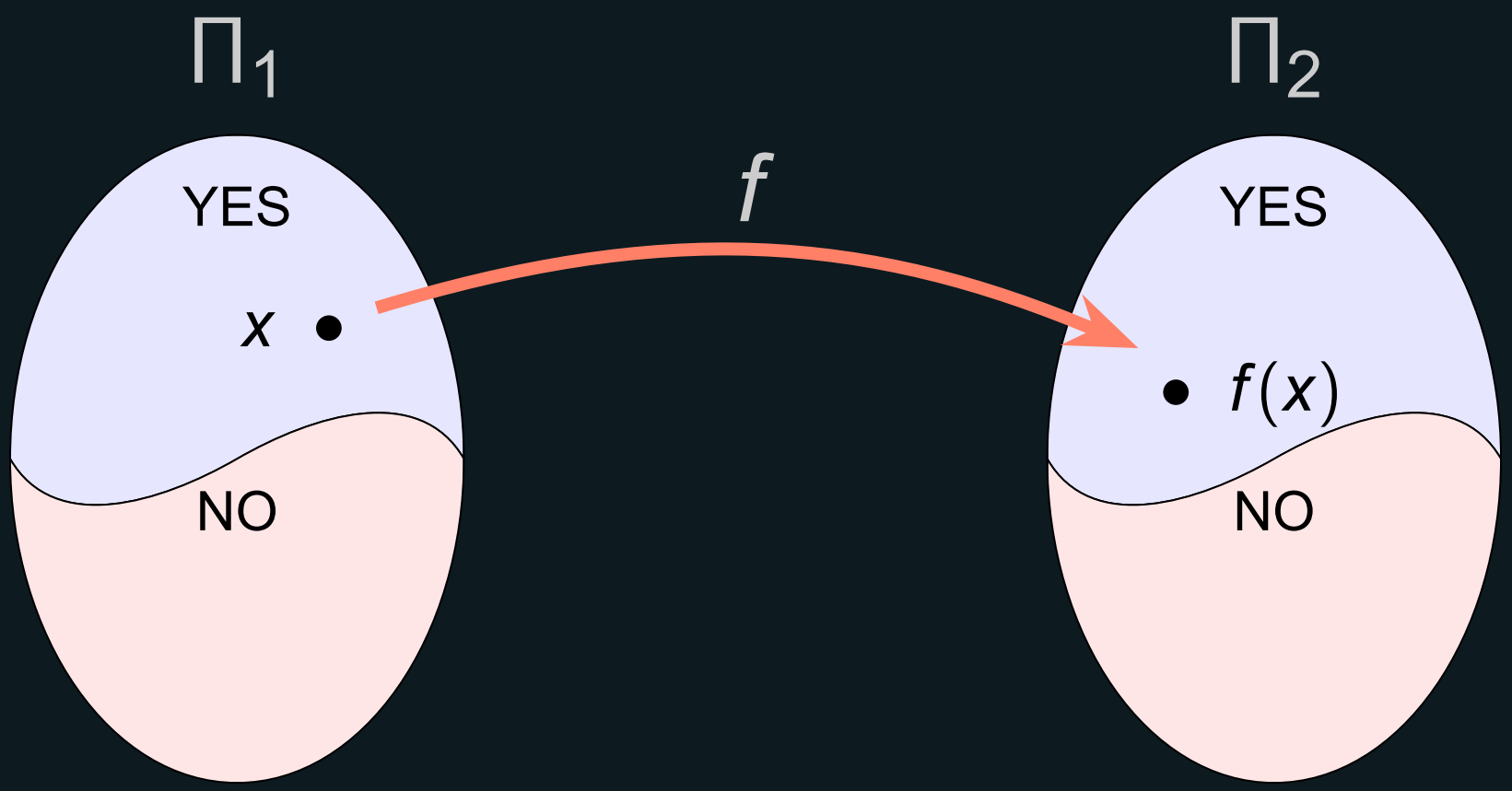
רדוקציות

בעצם המרנו את הקלט $x = (G, k)$ של בעיה Π_1 בקלט $f(x) = (G', s, t, k')$ של בעיה Π_2.

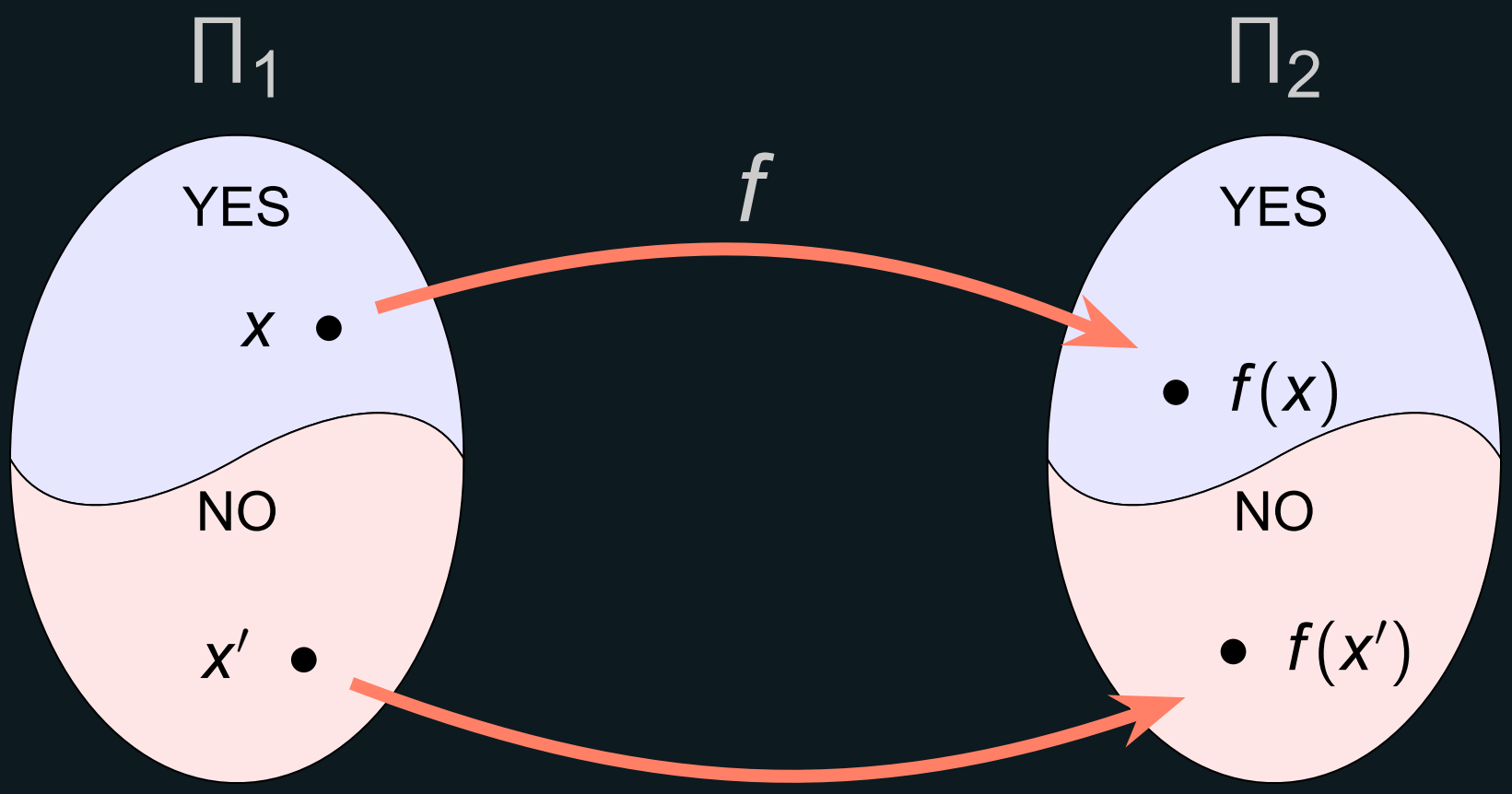
אפשר לחשוב על בעיית הכרעה כעל אוסף של קלטים המתחלק לקלטי "כן" וקלטי "לא".



רדוקציות

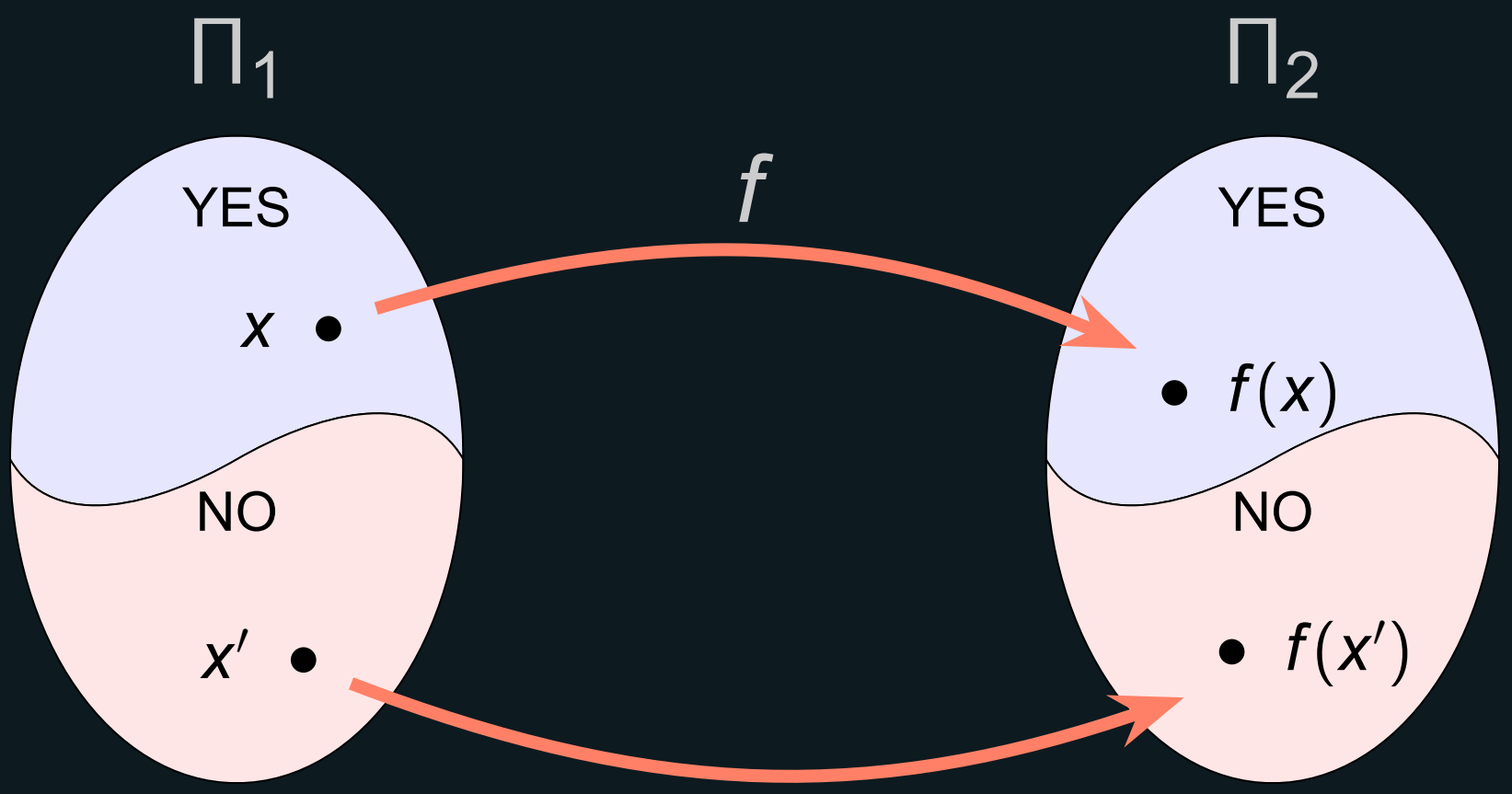


רדוקציות



רדוקציות

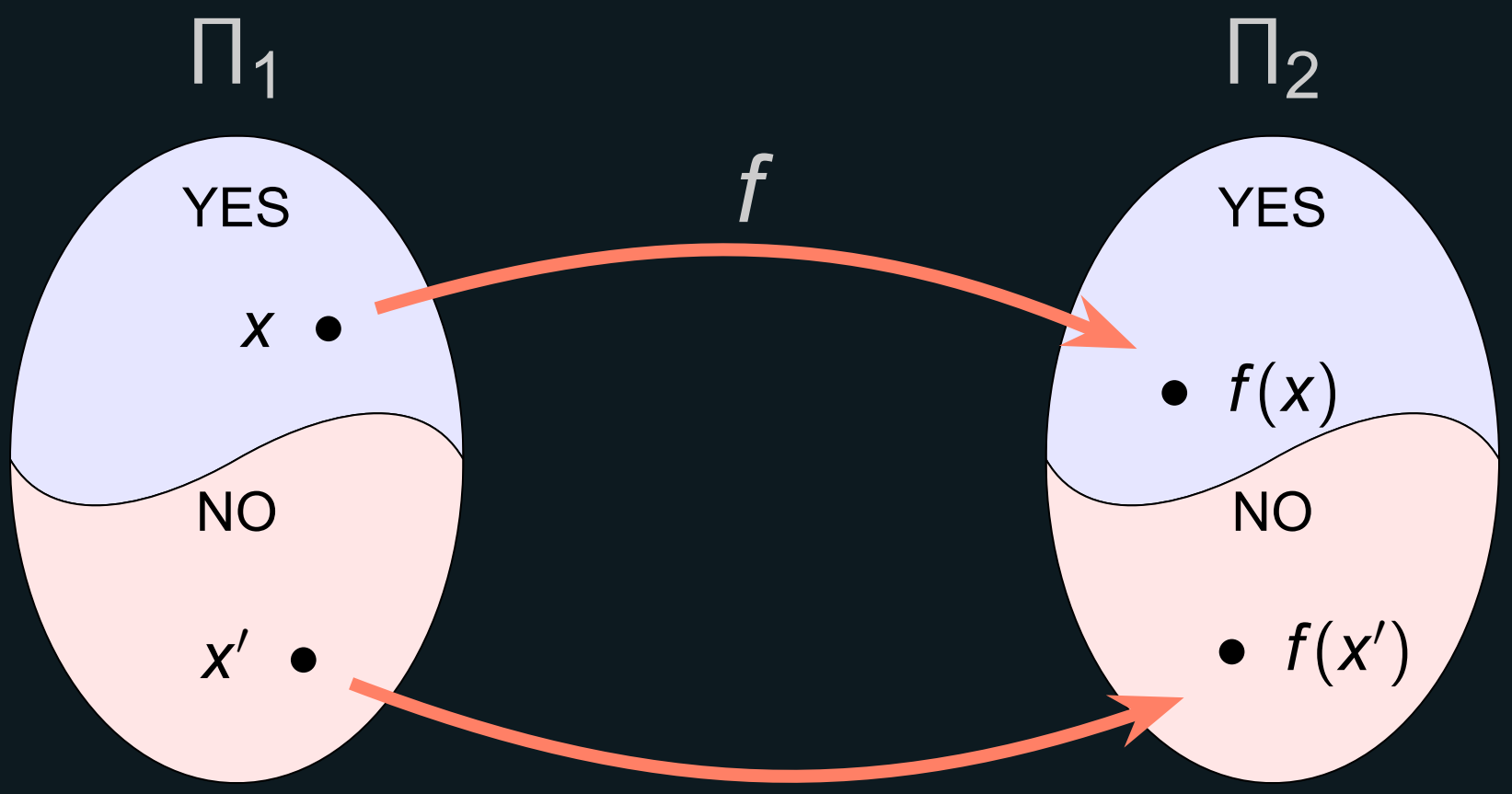
הפונקציה f היא רדוקציה מבעיה Π_1 לבעיה Π_2 אם:



רדוקציות

הפונקציה f היא רדוקציה מבעיה Π_1 לבעיה Π_2 אם:

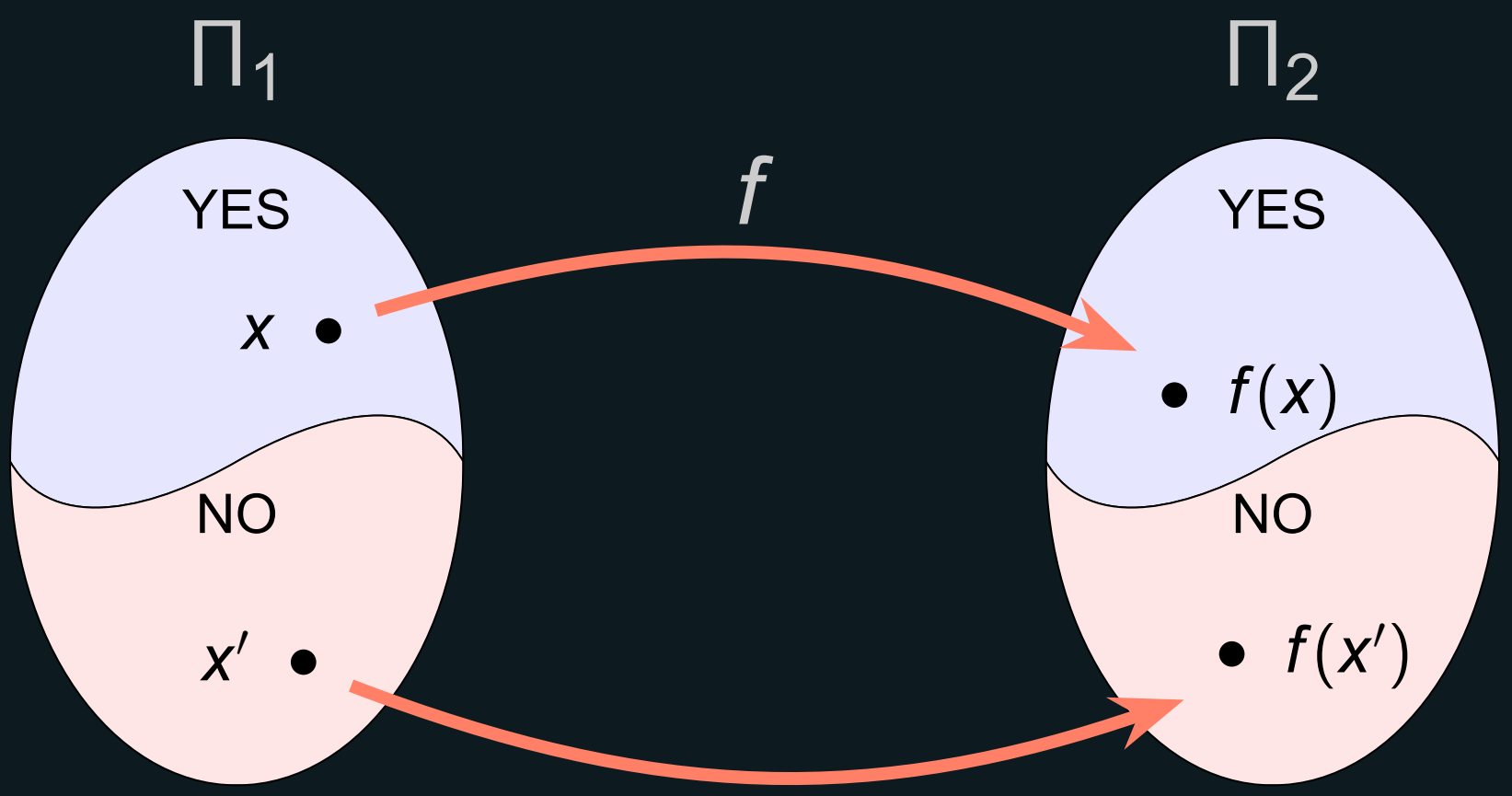
1. אפשר לחשב את f בזמן פולינומי.



רדוקציות

הפונקציה f היא רדוקציה מבעיה Π_1 לבעיה Π_2 אם:

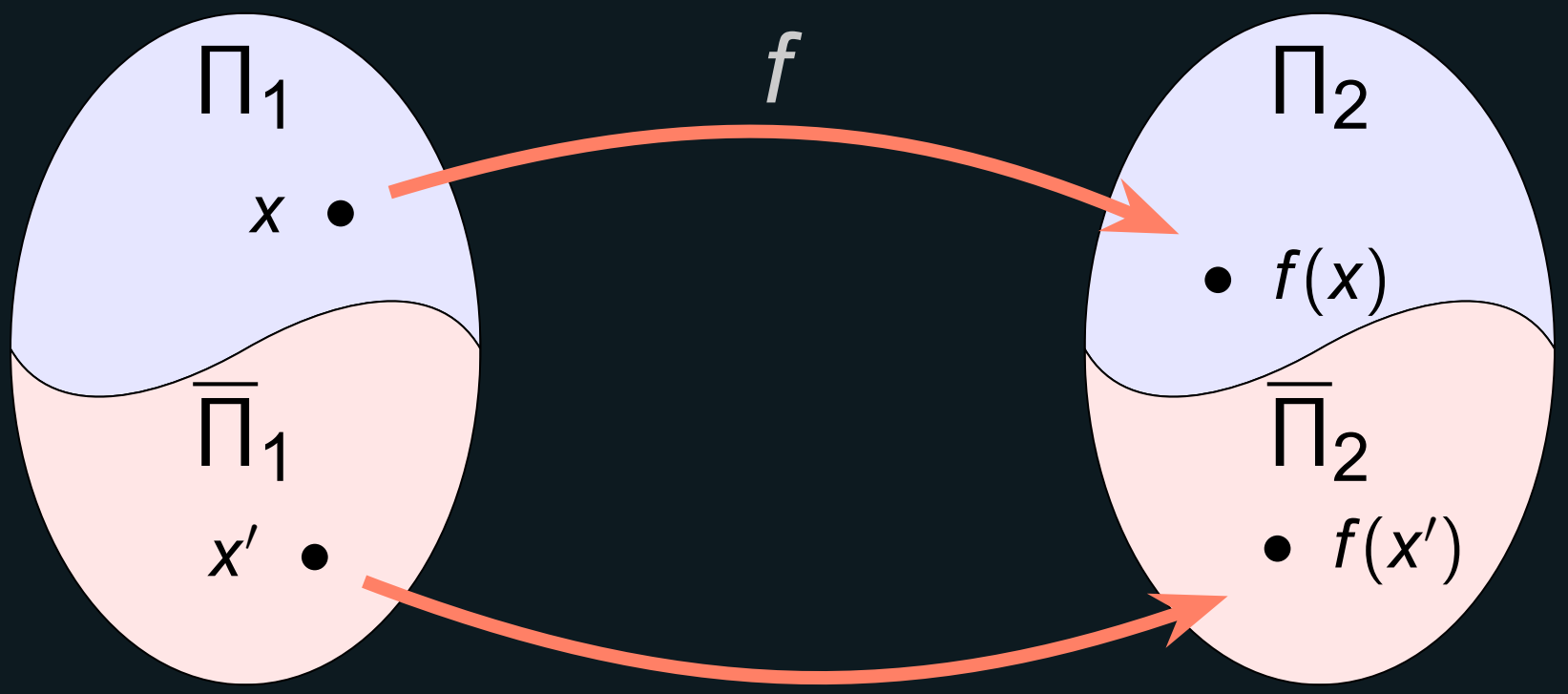
1. אפשר לחשב את f בזמן פולינומי.
2. $x \in \mathrm{YES}(\Pi_1) \Leftrightarrow f(x) \in \mathrm{YES}(\Pi_2)$



רדוקציות

הפונקציה f היא רדוקציה מבעיה Π_1 לבעיה Π_2 אם:

1. אפשר לחשב את f בזמן פולינומי.
2. $x \in \Pi_1 \Leftrightarrow f(x) \in \Pi_2$



תרגיל 1

נתונה נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z)$$

כמה השמות שונות מספקות את הנוסחה?

תרגיל 1

נתונה נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z)$$

כמה השמות שונות מספקות את הנוסחה?

x	y	z	Φ
1	1	1	
1	1	0	
1	0	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	

תרגיל 1

נתונה נוסחת ה-SAT הבאה:

$$\Phi = (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z)$$

כמה השמות שונות מספקות את הנוסחה?

x	y	z	Φ
1	1	1	T
1	1	0	F
1	0	1	T
1	0	0	F
0	1	1	T
0	1	0	F
0	0	1	F
0	0	0	T

מחלקות סיבוכיות

המחלקה P מכילה את כל הבעיות הניתנות להכרעה בזמן פולינומי.

מחלקות סיבוכיות

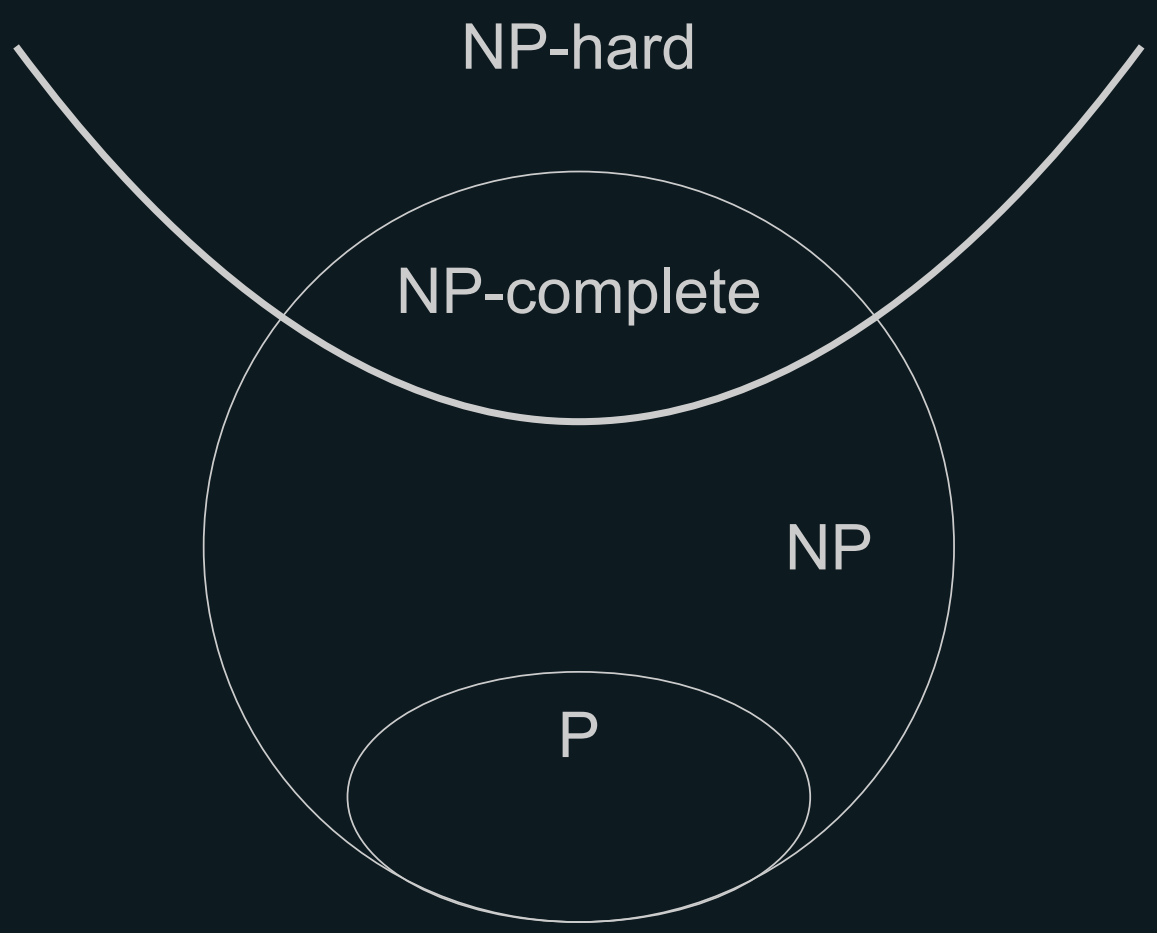
המחלקה P מכילה את כל הבעיות הניתנות להכרעה בזמן פולינומי.

המחלקה NP מכילה את כל הבעיות שניתן לצמצם ל SAT בזמן פולינומי.

מחלקות סיבוכיות

המחלקה P מכילה את כל הבעיות הניתנות להכרעה בזמן פולינומי.

המחלקה NP מכילה את כל הבעיות שניתן לצמצם ל SAT בזמן פולינומי.



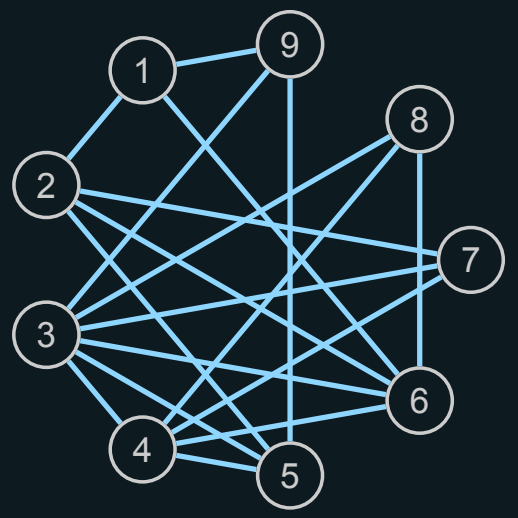
תרגיל 2

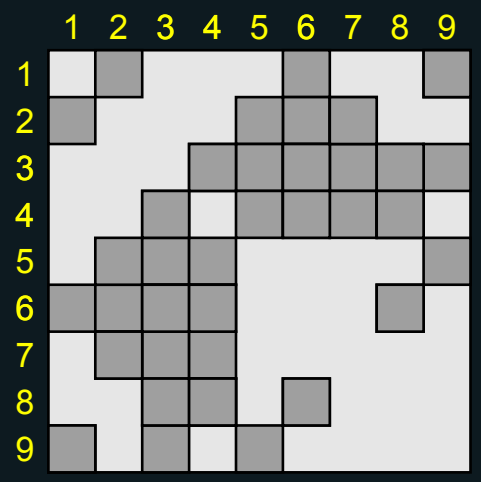
נתון גרף $G = (V, E)$ הממומש במטריצת שכנויות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה.
מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|$, $|E|$ו-k? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G תת גרף מלא בגודל k צמתים?





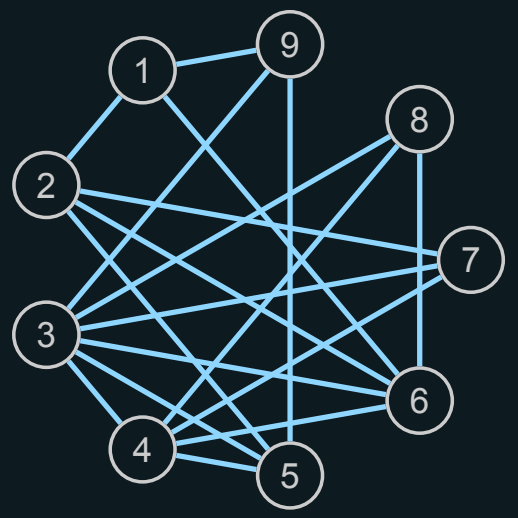
תרגיל 2

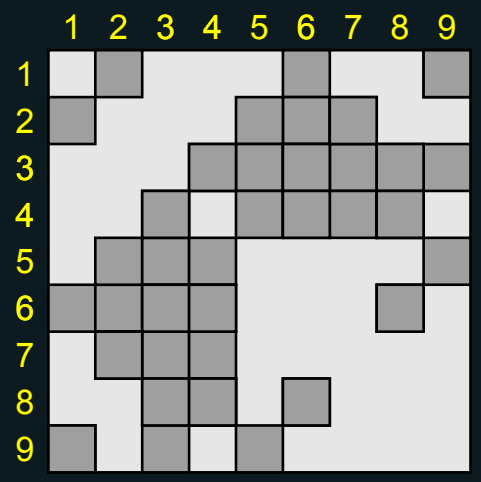
נתון גרף $G = (V, E)$ הממומש במטריצת שכנויות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה.
מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|$, $|E|$ו-k? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G תת גרף מלא בגודל k צמתים?





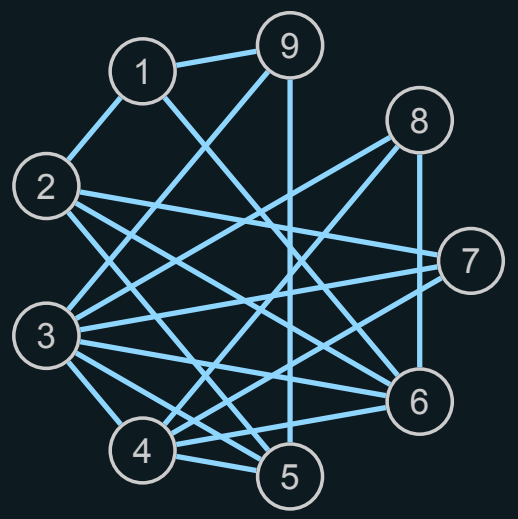
תרגיל 2

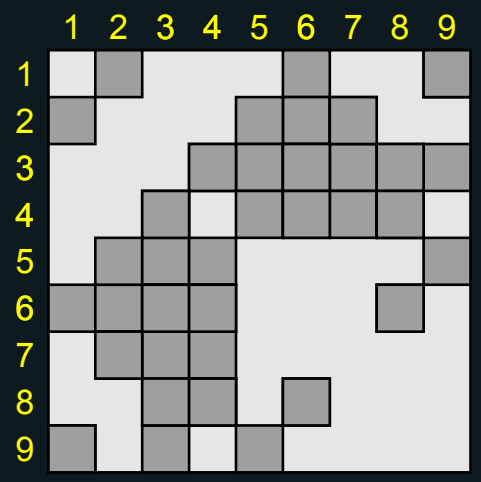
נתון גרף $G = (V, E)$ הממומש במטריצת שכנויות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה.
מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|$, $|E|$ו-k? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

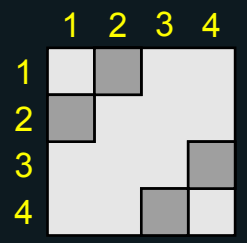
בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G תת גרף מלא בגודל k צמתים?







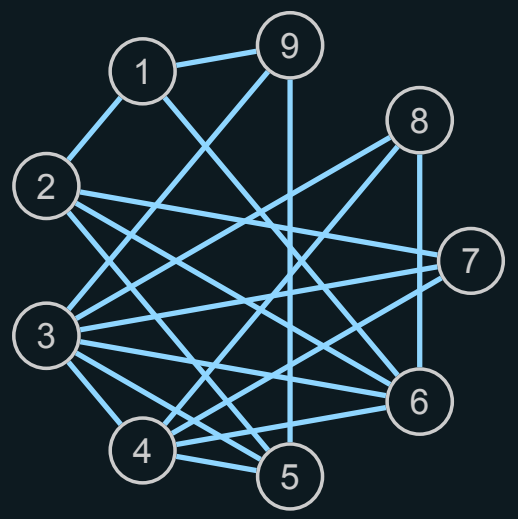
תרגיל 2

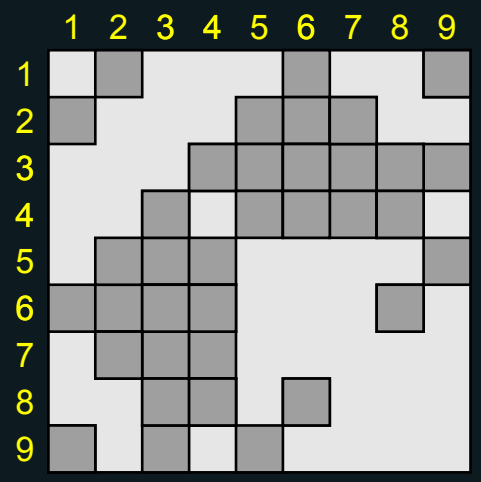
נתון גרף $G = (V, E)$ הממומש במטריצת שכנויות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה.
מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|$, $|E|$ו-k? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

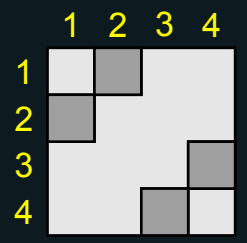
בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G תת גרף מלא בגודל k צמתים?







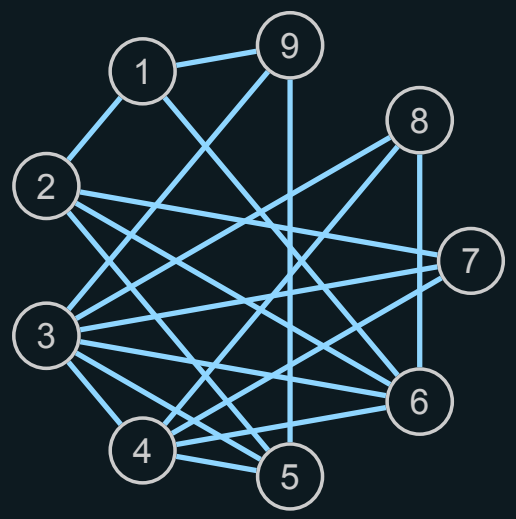
תרגיל 2

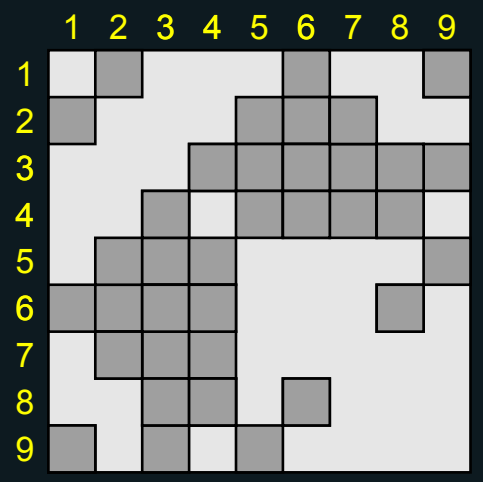
נתון גרף $G = (V, E)$ הממומש במטריצת שכנויות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה.
מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|$, $|E|$ו-k? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

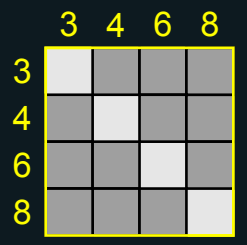
בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G תת גרף מלא בגודל k צמתים?







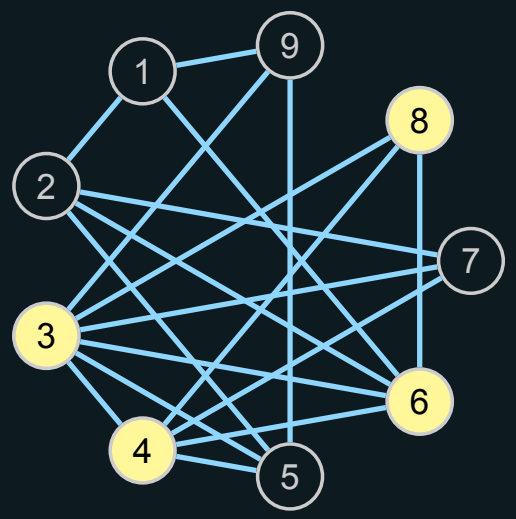
תרגיל 2

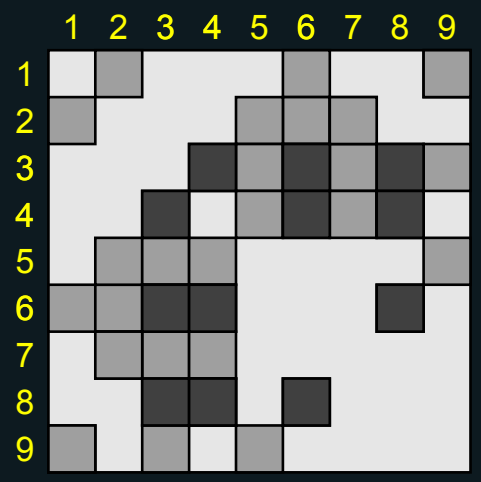
נתון גרף $G = (V, E)$ הממומש במטריצת שכנויות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה.
מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|$, $|E|$ ו-k? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

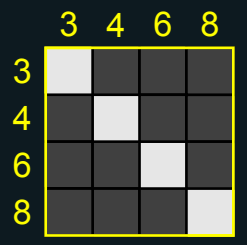
בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G תת גרף מלא בגודל k צמתים?







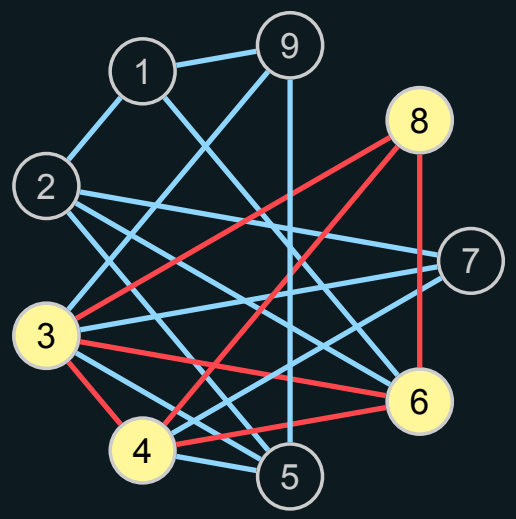
תרגיל 2

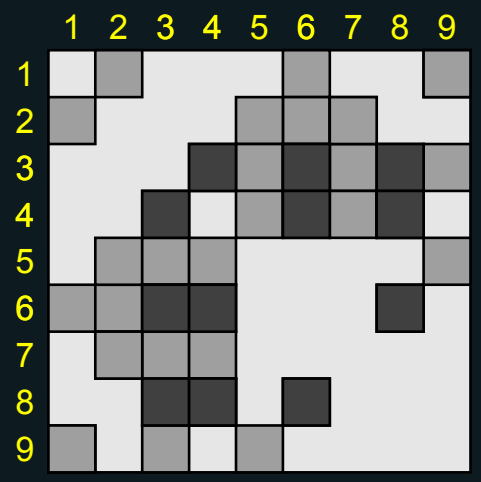
נתון גרף $G = (V, E)$ הממומש במטריצת שכנויות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה.
מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|$, $|E|$ ו-k? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

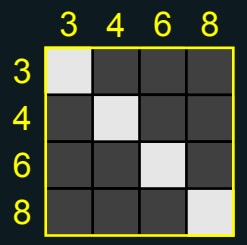
בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G תת גרף מלא בגודל k צמתים?







תרגיל 2

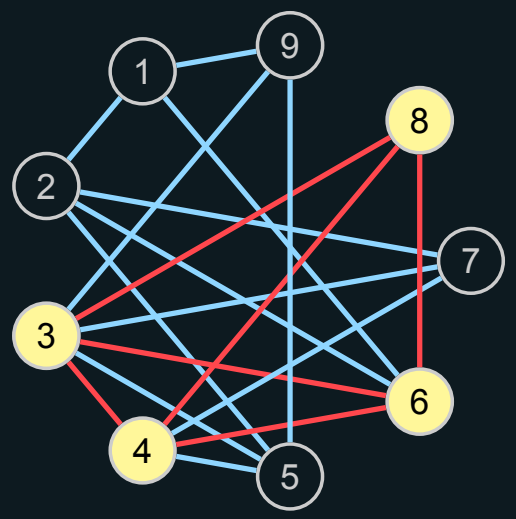
נתון גרף $G = (V, E)$ הממומש במטריצת שכנויות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה.
מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|$, $|E|$ ו-k? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

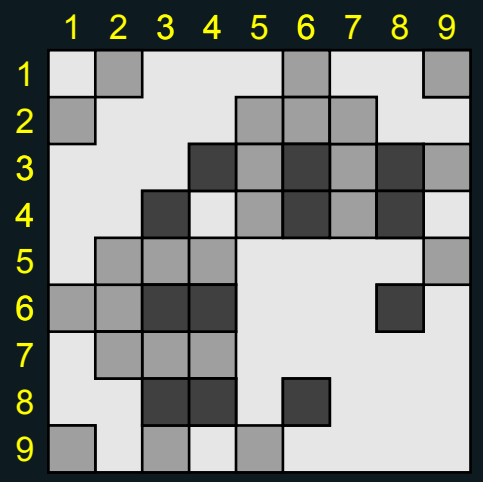
בעיית הקליקה

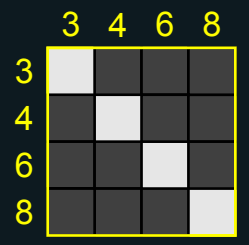
קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G תת גרף מלא בגודל k צמתים?

ניתן לבדוק $\binom{n}{k}$ קבוצות בזמן $\mathcal{O}(k^2)$ לקבוצה לכן האלגוריתם שלנו ירוץ בזמן $\mathcal{O}(n^k k^2)$.







תרגיל 2

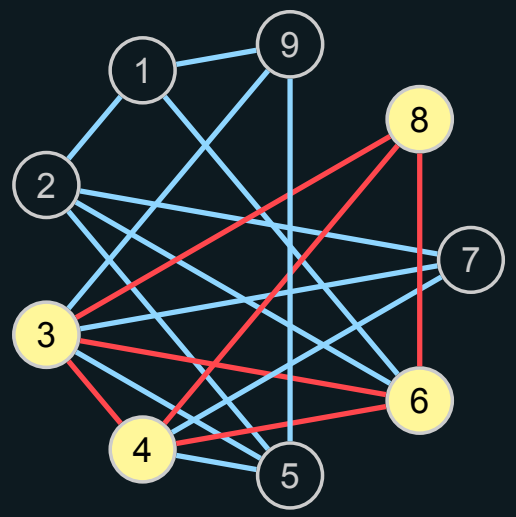
נתון גרף $G = (V, E)$ הממומש במטריצת שכנויות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה.
מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|$, $|E|$ ו-k? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

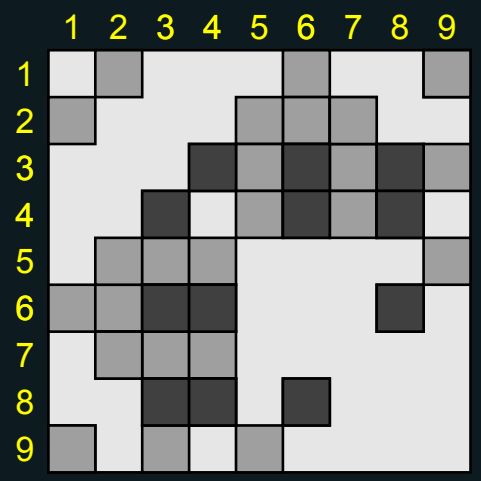
בעיית הקליקה

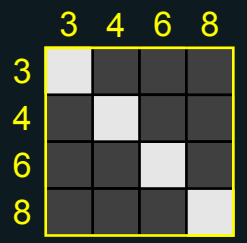
קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G תת גרף מלא בגודל k צמתים?

ניתן לבדוק $\mathcal{O}(n^k)$ קבוצות בזמן $\mathcal{O}(k^2)$ לקבוצה לכן האלגוריתם שלנו ירוץ בזמן $\mathcal{O}(n^k k^2)$.







תרגיל 2

נתון גרף $G = (V, E)$ הממומש במטריצת שכנויות. תארו אלגוריתם נאיבי להכרעת בעיית הקליקה.
מה תהיה סיבוכיות האלגוריתם במונחי $|V|$, $|E|$ ו-k? עבור איזה תנאי ירוץ האלגוריתם בזמן פולינומי?

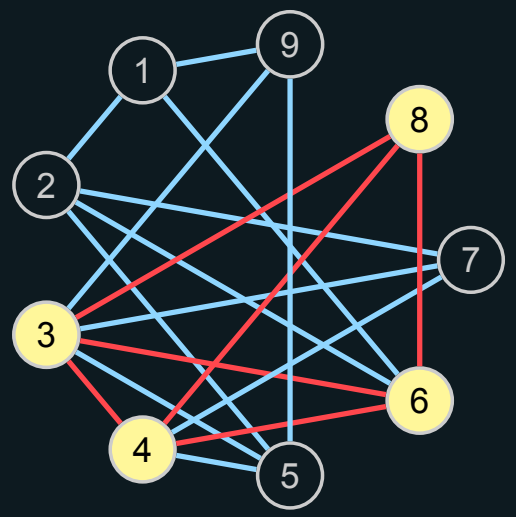
בעיית הקליקה

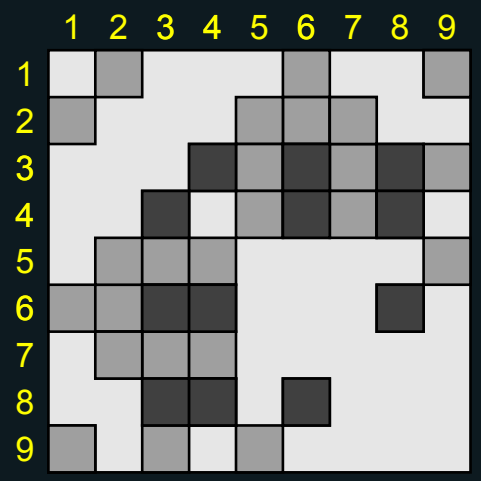
קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

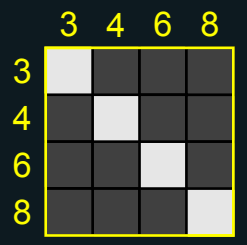
שאלה: האם יש ב G תת גרף מלא בגודל k צמתים?

ניתן לבדוק $\mathcal{O}(n^k)$ קבוצות בזמן $\mathcal{O}(k^2)$ לקבוצה לכן האלגוריתם שלנו ירוץ בזמן $\mathcal{O}(n^k k^2)$.

האלגוריתם ירוץ בזמן פולינומי כש k קבוע.







תרגיל 3

בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $G = (V, E)$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההכרעה של בעיית השידוך המקסימלי (בהנתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

תרגיל 3

בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $G = (V, E)$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההכרעה של בעיית השידוך המקסימלי (בהנתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעיית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P

תרגיל 3

בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $G = (V, E)$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההכרעה של בעיית השידוך המקסימלי (בהנתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעיית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P בעוד בעיית המסלול הארוך היא בעיה NP-שלמה.

תרגיל 3

בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $G = (V, E)$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההכרעה של בעיית השידוך המקסימלי (בהנתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעיית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P בעוד בעיית המסלול הארוך היא בעיה NP-שלמה.
רדוקציות כאלה הן מאד פשוטות, מאחר שבעיית השידוך ניתנת להכרעה בזמן פולינומי.

תרגיל 3

בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $G = (V, E)$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההכרעה של בעיית השידוך המקסימלי (בהנתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעיית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P בעוד בעיית המסלול הארוך היא בעיה NP-שלמה.
רדוקציות כאלה הן מאד פשוטות, מאחר שבעיית השידוך ניתנת להכרעה בזמן פולינומי.

בהינתן גרף G ומספר טבעי k, נחשב את השידוך המקסימלי M ב G באמצעות אלגוריתם הפריחה של אדמונדס בזמן $\mathcal{O}(n^2 m)$.

תרגיל 3

בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $G = (V, E)$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההכרעה של בעיית השידוך המקסימלי (בהנתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעיית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P בעוד בעיית המסלול הארוך היא בעיה NP-שלמה.
רדוקציות כאלה הן מאד פשוטות, מאחר שבעיית השידוך ניתנת להכרעה בזמן פולינומי.

בהינתן גרף G ומספר טבעי k, נחשב את השידוך המקסימלי M ב G באמצעות אלגוריתם הפריחה של אדמונדס בזמן $\mathcal{O}(n^2 m)$.

אם $|M| \geq k$ נחזיר את הגרף $G' = (\{s, t\}, \{(s, t)\})$ אחרת $G' = (\{s, t\}, \varnothing)$

תרגיל 3

בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $G = (V, E)$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההכרעה של בעיית השידוך המקסימלי (בהנתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעיית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P בעוד בעיית המסלול הארוך היא בעיה NP-שלמה.
רדוקציות כאלה הן מאד פשוטות, מאחר שבעיית השידוך ניתנת להכרעה בזמן פולינומי.

בהינתן גרף G ומספר טבעי k, נחשב את השידוך המקסימלי M ב G באמצעות אלגוריתם הפריחה של אדמונדס בזמן $\mathcal{O}(n^2 m)$.

אם $|M| \geq k$ נחזיר את הגרף $G' = (\{s, t\}, \{(s, t)\})$ אחרת $G' = (\{s, t\}, \varnothing)$

הקלט של בעיית המסלול הארוך ביותר יהיה אם כך $(G', s, t, 1)$.

תרגיל 3

בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $G = (V, E)$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההכרעה של בעיית השידוך המקסימלי (בהנתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעיית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P בעוד בעיית המסלול הארוך היא בעיה NP-שלמה.
רדוקציות כאלה הן מאד פשוטות, מאחר שבעיית השידוך ניתנת להכרעה בזמן פולינומי.

בהינתן גרף G ומספר טבעי k, נחשב את השידוך המקסימלי M ב G באמצעות אלגוריתם הפריחה של אדמונדס בזמן $\mathcal{O}(n^2 m)$.

אם $|M| \geq k$ נחזיר את הגרף $G' = (\{s, t\}, \{(s, t)\})$ אחרת $G' = (\{s, t\}, \varnothing)$

הקלט של בעיית המסלול הארוך ביותר יהיה אם כך $(G', s, t, 1)$.

קל (מאד) לראות שקיים מסלול באורך 1 ב G' אם ורק אם השידוך המקסימלי ב G בגודל לפחות k קשתות.

תרגיל 3

בעיית המסלול הארוך

קלט: גרף $G = (V, E)$, שני צמתים $s, t \in V$ ומספר טבעי k.

שאלה: האם יש ב G מסלול באורך לפחות k בין s ל t?

מצאו רדוקציה לבעיית המסלול הארוך מגרסת ההכרעה של בעיית השידוך המקסימלי (בהנתן גרף מצאו שידוך לפחות בגודל k)

בעיית השידוך המקסימלי היא בעיה ב P בעוד בעיית המסלול הארוך היא בעיה NP-שלמה.
רדוקציות כאלה הן מאד פשוטות, מאחר שבעיית השידוך ניתנת להכרעה בזמן פולינומי.

בהינתן גרף G ומספר טבעי k, נחשב את השידוך המקסימלי M ב G באמצעות אלגוריתם הפריחה של אדמונדס בזמן $\mathcal{O}(n^2 m)$.

אם $|M| \geq k$ נחזיר את הגרף $G' = (\{s, t\}, \{(s, t)\})$ אחרת $G' = (\{s, t\}, \varnothing)$

הקלט של בעיית המסלול הארוך ביותר יהיה אם כך $(G', s, t, 1)$.

קל (מאד) לראות שקיים מסלול באורך 1 ב G' אם ורק אם השידוך המקסימלי ב G בגודל לפחות k קשתות.

כמו כן הקלט $(G', s, t, 1)$ חושב בזמן פולינומי.

תרגיל 4

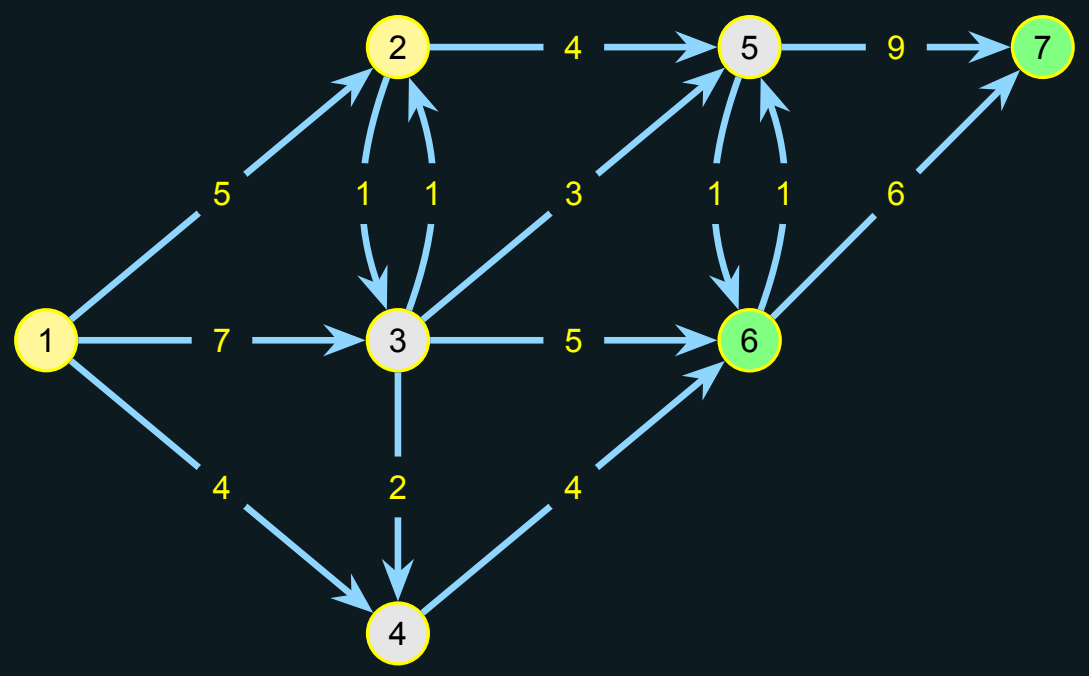
בעיית הזרימה מרובת המקורות והיעדים

קלט: רשת זרימה G עם מספר מקורות $s_1, \ldots, s_\ell$ ומספר יעדים $t_1, \ldots, t_{\ell'}$.

שאלה: האם קיימת זרימה חוקית f עבור G כך ש $|f| \geq k$?

הראו רדוקציה מבעיה זו לבעיית הזרימה.

להלן דוגמא לרשת עם שני מקורות ושני יעדים:



תרגיל 4

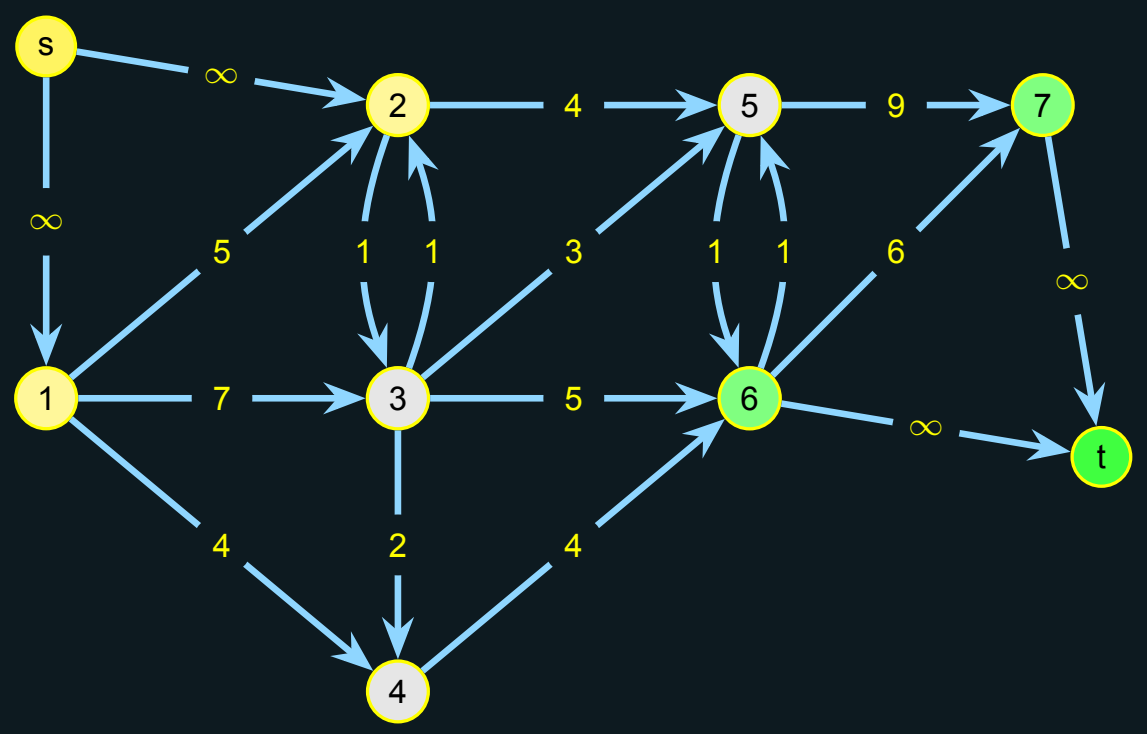
בעיית הזרימה מרובת המקורות והיעדים

קלט: רשת זרימה G עם מספר מקורות $s_1, \ldots, s_\ell$ ומספר יעדים $t_1, \ldots, t_{\ell'}$.

שאלה: האם קיימת זרימה חוקית f עבור G כך ש $|f| \geq k$?

הראו רדוקציה מבעיה זו לבעיית הזרימה.

להלן דוגמא לרשת עם שני מקורות ושני יעדים:



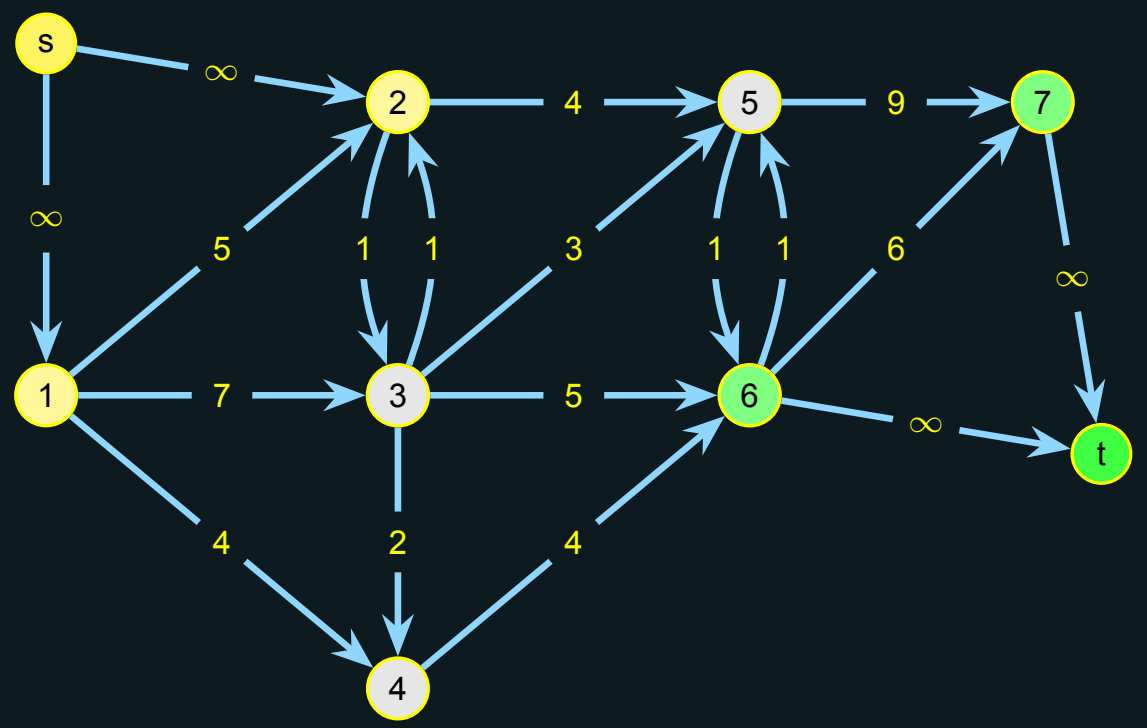
תרגיל 4

בעיית הזרימה מרובת המקורות והיעדים

קלט: רשת זרימה G עם מספר מקורות $s_1, \ldots, s_\ell$ ומספר יעדים $t_1, \ldots, t_{\ell'}$.

שאלה: האם קיימת זרימה חוקית f עבור G כך ש $|f| \geq k$?

הראו רדוקציה מבעיה זו לבעיית הזרימה.

להלן דוגמא לרשת עם שני מקורות ושני יעדים:

נוסיף מקור-על ונחבר אותו לכל המקורות בקשתות עם קיבולת ∞, נוסיף כמו כן צומת יעד המחוברת לכל היעדים עם קשתות עם קיבלות ∞. זמן הבנייה $\mathcal{O}(\ell + \ell')$.