סיכומי הרצאות: מאלגברה לינארית לאיפון - א' (טכנו"צ 1)

1 באפריל 2024

תקציר

הקורס נוצר מצורך שיהיה לאנשי הפיזיקה את ההקשר ההנדסי, וכעת יש לו 3 מטרות עיקריות, לתת כלים בסיסיים בהנדסת חשמל. פיתוח יכולת ניתוח מערכות טכנולוגיות "מורכבות". חיבור הידע מהקורסים בתואר גם זה לזה, וגם לעולם האמיתי.

תוכן העניינים

שיעור פתיחה - תכלס שיעור מוטיבציה

קצת מנהלות:

- 80% חובת הגשה של תרגילי בית
- חלוקת ציון סופי - 90% מבחן סופי, 10% תרגילי בית.
- ניתן לקבל נקודת בונוס על אחד מהדברים הבאים - לשאול שאלה שקשורה לקורס וניר לא יודע לענות עליה. להביא נושא שמעניין ללמוד ולקשר לקורס, למצוא טעות של ניר. ניתן לצבור עד 5 כאלו.
- **<u>מייל של המרצה:</u>** $orik@mail.huji.ac.il$
- בשבוע 4 יהיה לנו שבוע חזרה על החומר (כלומר לא ילמד חומר חדש).

הנדסה - " שימוש במדע לצורכי האנושות "

אז איך תכלס עושים את זה? איך מגשרים בין הטבע - תופעות ודברים שקורים, לבין ההנדסה - השימושים שמשרתים אותנו.

אז השיטה בנויה מכמה שלבים:

1. <u>ניסויים:</u> עורכים ניסויים כדי ליצור מאגר מידע על תופעות שמעניינות אותנו, ומנסים לתאר אותה בצורה הכי טובה. (כמו מדידות של מטח וזרם בחוט ותיעוד בטבלה)
2. <u>תאוריה ומודלים:</u> מנסים לבנות תאוריה או מודל שיתאר את התופעה על פי הניסויים שנערכו. (כמו בניית חוק אוהם, ומשוואות שיתארו את התופעה שנמדדה)
3. <u>סינטזה:</u> מסנטזים את התופעות בצורה שתתאים לצורך אנושי.

שני השלבים הראשונים זה מדעי הטבע, וזה מה שלאנחנו לומדים לאורך כל התואר שלנו.

אז מה חסר? השלב האחרון! וזה **הנדסה**, וזה מה שהקורס הזה ינסה להביא לנו על קצה המזלג.

1 מערכות לינאריות - Linear Systems

1.1 הקדמה

נתחיל את הדרך להבין את כל המערכת כיצד שיחת טלפון עובדת!

אז נתחיל מההתחלה - גלי הקול מגיעים מהפה ופוגעים בממברנה במיקרופון אשר קולטת את גלי הלחץ באוויר.

הממברנה בפועל מזיזה נגד משתנה ובכך משנה את ההתנגדות שלו (או בעזרת קבל ובכך משנה את הקיבול שלו), זה מועבר לנו לפונקציית מטח באמצעות כלי, וכאן נעצור לבנתיים.

מה משותף בין הרכיבים? את כולם בתכלס אפשר לתאר באמצעות מערכות לינאריות.

נסתכל על כמה נקודות על מערכות לינאריות:

1. הרבה מערכות פיזיקליות הן מערכות לינאריות
2. התגובה לאות מורכב מותוארת על ידי סכום תגובות לאותות פשוטים (סכום לינארי)
3. המתמטיקה שלהן אנליטית
4. שירשור של מערכות לינאריות הוא גם לינארי.

1.2 מערכות לינאריות - הגדרות ותכונות

הגדרה 1. אות או $sygnal$ הוא פונקציה מתמטית המעבירה אינפורמציה אודות התנהגות של תופעה מסוימת.

לדוגמה:

- פונקציה של מתח לזמן , טמפרטורה לזמן, וכו...
- שרטון של מצלמה המעביר עוצמה של אור כפונקציה של הזמן והמרחב.

הגדרה 2. מערכת היא תהליך (T) אשר יוצרת טרנספורמציה מאות נתון לאות אחר. היא מסומנת בצורה הבאה:

$$T:\{x(t)\}=y(t)$$

הגדרה 3. מערכת לינארית, T, במרחב האותות, היא מערכת המקבלת אות $x(t)$ בכניסה ומחזירה אות $y(t)$ ביציאה, כאשר T מקיימת את עקרון הסופר פוזיציה \ לינאריות. כלומר T מקיימת -

$$\forall x_1(t), x_2(t)\ \ s.t\ T:\{x_{1,2}\}=y_{1,2}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \ [T:\{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\}=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)]$$

או במילים אחרות: מערכת תיקרא לינארית אם ורק אם הפעלתה על צירוף לינארי של אותות יהיה צירוף לינארי של הפלט שלה על כל אחד בנפרד.

טענה 4. שירשור מערכות לינאריות הוא מערכת לינארית

נוכיח:

יהיו שתי מערכות לינאריות - T,P , ונסתכל על צירוף לינארי של אותות - $x(t)=\alpha x_1+\beta x_2$. נראה ששירשור המערכות הלינאריות שלנו מקיים את התכונה של מערכת לינארית:

$$PT:\{x(t)\}=P:\{T:\{\alpha x_1+\beta x_2\}\}=$$

כעת מלינאריות של - T

$$= P : \{\alpha T : \{x_1\} + \beta T : \{x_2\}\} =$$

ושוב, מלינאריות של - P

$$= \alpha P : \{T : \{x_1\}\} + \beta P : \{T : \{x_1\}\} =$$

$$= \alpha PT : \{x_1\} + \beta PT : \{x_2\}$$

ואכן קיבלנו לינאריות. מ.ש.ל ■

1.2.1 דוגמה - ממברנת מיקרופון

נוכיח שממברנת מיקרופון עם קירובים מסויימים היא מערכת לינארית.

נניח ממברנה עם שטח - A. אנחנו יודעים שלממברנה הזו יש סוג של קשיחות \ מתיחות. כלומר אם לוחצים על הממברנה היא מפעילה כח חזרה. נסמן את ערך זה - k.

עוד תכונה שיש לממברנה שלנו היא ריסון - כלומר אם נתן לה מכה והיא תתחיל לעשות אוסילציות, הם ידעכו עם הזמן. נסמן את הריסון - γ.

נשים לב שהממברנה שלנו כרגע היא **מערכת** המקבלת לחץ, וממנו מוציאה אות שהוא המיקום שלה בזמן.

נסתכל על משוואת הכוחות הפועלים על הממברנה:

$$\sum F(t) = ma = m\ddot{x}$$

הכח הכולל שלנו יהיה -

$$\sum F = Ap(t) - kx(t) - \gamma\dot{x}(t)$$

כלומר אם נעביר אגפים נקבל את הביטוי של המערכת הלוקחת את הלחץ אל המיקום של הממברנה במרחב -

$$Ap(t) = kx(t) + \gamma\dot{x}(t) + k\ddot{x}(t)$$

כלומר אפיינו את המערכת -

$$T : \{Ap(t)\} = kx(t) + \gamma\dot{x}(t) + k\ddot{x}(t)$$

וכעת רק נותר להראות שזה מערכת לינארית, שזה פשוט שכן נגזרת היא גם מערכת לינארית.

וכאן סיימנו.

תזכורת - פונרצית δ פונקציית דלתא היא פונקציה המקיימת -

$$\delta\left(t\neq 0\right)=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t\right)dt=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-t_0\right)x\left(t\right)dt=x\left(t_0\right)$$

1.2.2 פירוק אותות מורכבים

כעת נזכר בדבר השני שרצינו בהקשר של מערכות לינאריות.

"תגובת מערכת לינארית לאות מורכב היא סכום התגובות לאותות פשוטים"

אז מה נוכל לעשות בכדי לנסות לאפיין את המערכת לכל אות? הטריק הוא להביא לו "מכה" כלומר קלט רגעי בתדר מסויים - או במילים אחרות פונקציית דלטה - δ.

ניקח אות כלשהו - $x\left(t\right)$, מתקיים:

$$x\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\tau\right)x\left(\tau\right)d\tau$$

עכשיו מה אנחנו יכולים לעשות עם זה. נשים לב כי לכל τ שנבחר - $x\left(\tau\right)$ הוא סקלר, בעוד - $\delta\left(t-\tau\right)$ הוא גם סוג של אות לכל τ כזה. לבסוף האינטגרל הוא תכלס סכום, כלומר לבסוף יש לנו סכום של אותות פשוטים כפול קבועים.

כלומר מה אנחנו יכולים לעשות? במקום לדעת איך מערכת לינארית עובדת עם כל אות כלשהו, הצלחנו להמיר את האות לסכום של אותות מהצורה - $\delta\left(t-\tau\right)$, כלומר עכשיו רק מעניין אותי לדעת איך המערכת מתנהגת על כל האותות מהצורה - $\delta\left(t-\tau\right)$.

<u>תכלס...</u> פשוט המרנו את מרחב הפונקציות (האותות) לפירוק לפי בסיס של פונקציות דלתא.

הכנסה למערכות לינאריות נרצה עכשיו להשתמש בפירוק לבסיס החדש לתוך מערכת לינארית:

$$T:\left\{x\left(t\right)\right\}=T:\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\tau\right)x\left(\tau\right)d\tau\right\}=$$

מלינאריות של המערכת -

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, T : \{\delta(t-\tau)\}\, d\tau$$

כאשר מסתבר ש$T : \{\delta(t-\tau)\}$זה משהו שמסומן ב $h(t,\tau)$ וזה נקרא "התגובה להלם" - התגובה של המערכת בזמן t להלם שניתן בזמן τ.

1.2.3 תגובה להלם

הגדרה 5. **תגובה להלם** של מערכת בזמן t להלם שניתן בזמן τ, המסומן ב - $h(t,\tau)$ מוגדר באופן הבא בעבור מערכת לינארית T כלשהי -

$$h(t,\tau) = T : \{\delta(t-\tau)\}$$

על פי ההגדרה הזו נקבל כי -

$$T : \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t,\tau)\, d\tau$$

תכונות התגובה להלם - $h(t,\tau)$:

1. **סיבתיות** משהו שאפשר להבין הוא שהתגובה להלם היא סיבתית - כלומר היא תוציא ערכים רק עבור זמנים שלאחר זמן ההלם - $\forall t<\tau \; h(t,\tau)=0$
2. **ממשית:** לא מרוכבת
3. **יחידות:** הן בעלות יחידות של - $\frac{[y]}{[x][sec]}$

דוגמאות לתגובות להלם - $h(t,\tau)$:

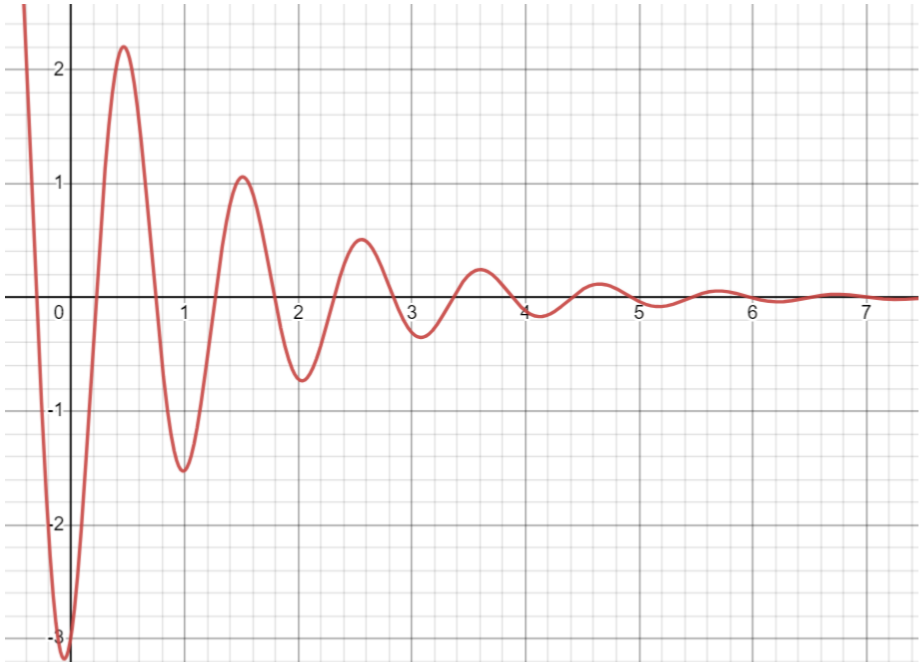
1. **ממברנת מיקרופון (אוסילטור הרמוני מאולץ מאוסן):**

לפני שהגיע ההלם אין לנו שום שינוי בפונקציית הלם. לאחר מכן יתחילו לנו אוסילציות דועכות של הממברנה. כלומר התגובה להלם תראה מהצורה -

$$\Theta(t-\tau)\, e^{-\alpha(t-\tau)} \sin(\omega_0 (t-\tau) + \psi)$$

ואת ההלמים הללו אנחנו סוכמים! כלומר דוגמה מגניבה היא נדנדה, אם נסכום את ההלמים בתזמונים נכונים אזי נגביר את אמפליטודות הגלים הדועכים. ואם נתן הלם (יענו דחיפה של הנדנדה) בזמן הלא נכון אז אנו עלולים ליצור התאבכות ולהקטין את האמפליטודות.

בנוסף נשים לב שזה אינווריאנטי בזמן ולכן נקרא לה - LTI.



2. **התפשטות גלים:**

ברגע שמוציאים גלים (לדוגמה גלי קול) להתפשט בחלל אזי העוצמה שלהן תרד עם הזמן. נסתכל על הקליטה של גלי קול במקודה מסויימת במרחק L ממקור קול.

ברגע שיצא גל יקח לו זמן מסויים - Δt להגיע לנקודה - L, וגם העוצמה של גלי הקול יורדת בפקטור של $\frac{1}{L^2}$ במרחק זה. כלומר נקבל -

$$h\left(t,\tau\right)\propto\frac{1}{L^{2}}\delta\left(t-\tau-\Delta t\right)$$

עכשיו בואו נסבך את העניינים ונוסיף החזרים מקיר. כאן נקבל שפשוט יהיה לנו סכום דועך של כל ההחזרים מהקירות.

נשים לב שללא ההחזרים מהקירות המערכת היא גם - LTI

1.2.4 מערכות LTI

הגדרה 6. מערכות יקראו - LTI או במילים אחרות **מערכת לינארית אינווריאנטית בזמן** אם הן הפיכות בזמן.

עוד דרך להסכל על זה - מערכת LTI - T אשר מקיימת - $T:\left\{x\left(t\right)\right\}=y\left(t\right)$ כאשר -

$$y\left(t\right)=x\left(t\right)*h\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\tau\right)h\left(t,\tau\right)d\tau$$

בעבור $h\left(t\right)$ פונקציית הלם של T.

- קצת אינטואיציה פיזיקלית לקונבולוציה - זה "אינטגרל חפיפה", הוא בגל שלב בודק כמה שטח חופף יש לנו בין 2 הצורות המוצגות בפונקציות (כלומר בגרפים שלהם ביחס לזמן) ומציג זאת בערך שלו.

דוגמאות למערכת LTI עם - $h\left(t\right)$ שונות

1. **חלל חופשי:**

נסתכל על פונקציית הלם - $h\left(t\right)=\delta\left(t-T\right)$. נסתכל על הפלט של המערכת הלינארית -

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,\delta(t-\tau-T)\,d\tau=x(t-T)$$

כלומר קיבלנו שמערכת עם פונקצית הלם - δ היא **פונקציית השהייה** כלומר, היא מקבלת אות ב - $x(t)$ ומחזירה אותו לאחר השהיה של - T שניות.

2. **קונבולוציה עם מלבן:**

נסתכל על המלבן הבא:

$$Rect\left(\frac{t}{T}\right)=\begin{cases}1 & -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\\ 0 & else\end{cases}$$

אזי נגדיר פונקציית הלם באופן הבא -

$$h(t)=\frac{1}{T}Rect\left(\frac{t-{}^{T}\!/_{2}}{T}\right)$$

נחשב את המערכת הלינארית המתקבלת מכך -

$$y(t)=x(t)*h(t)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,Rect\left(\frac{t-\tau-{}^{T}\!/_{2}}{T}\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}x(\tau)\,d\tau$$

ומה קיבלנו כאן? קיבלנו **ממוצע רץ**!

- מתי נשתמש בממוצע רץ? - שימוש אחד הוא כדי להתמודד עם מדידות רועשות. שכן כל ערך יהיה ממוצע של תחום ערכים קרובים אליו ואז יהיה אפשר להחליק את הרעשים.

מסקנה 7. קיבלנו שאם אנחנו יודעים את התגובה להלם של מערכת לינארית, אזי אנחנו יודעים מה האות שהמערכת תוציא על כל אות שנכניס לה.

הרצאה שניה - 8.1

1.3 תזכורת - מערכות לינאריות (L) + אינווריאנטיות בזמן (TI)

אז ראינו שבהנתן מערכת לינארית - T אשר מקבלת אות - $x(t)$, אנחנו יכולים לדעת את ההתנהגות שלה רק באמצעות התגובה של המערכת להלם, כלומר מה יהיה הפלט של המערכת לכל אות מהצורה - $\delta(t-\tau)$.

ואז נדע את הפלט של המערכת.

כלומר...

בהנתן - $T:\{x\}=y$, בגלל שמתקיים - $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$ אזי נקבל - $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,h(t,\tau)\,dt=x*h$.

מה עוד?

למדנו מה זה גם אומר שמערכת היא אינווריאנטית בזמן, שזה בגדול אומר את הדבר הבא:

מערכת היא אינווריאנטית בזמן אם ורק אם מתקיים - $h(t,\tau)=h(t-\tau)$, כלומר היא הפיכה עם הזמן.

2 משפט הקונבולוציה ופונקציית התמסורת

ראינו קודם כי אפשר להציג כל פונקציה בעזרת סכום של פונקציות δ. אז נרצה לשאול, למה רק δ? למה לא כל בסיס כלשהו.

ניזכר שיש דבר שנקרא טור טילור, אשר מאפשר להציג פונצקציה בצורה הבאה:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{d}{dt}\right)^n x(t-t_0)$$

או לדוגמה עוד דבר הוא הפירוק הבא -

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega$$

שזה אולי אנחנו מזהים, אבל נרצה לבנות את זה סוג של לבד עכשיו. כלומר - $e^{i\omega t}$ הוא הבסיס פונציות שלנו, ואנחנו תכלס מחפשים את אוסף המקדמים - $\tilde{x}(\omega)$.

כאן מת"פ עשו לנו כבר את העבודה וחישבו לנו את הפרמטרים הללו שבעזרתם ניתן לפרק את x לבסיס החדש הזה:

$$\tilde{x}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-i\omega t}dt$$

ולפעולה הזו של קבלת המקדמים נתנו שם מיוחד - **טרנספורם פוריה** אשר גם נהוג לסמנו בעזרת $FT[x]$. נסתכל על הגדרה פורמלית:

הגדרה 8. בהנתן אות כלשהו - x, הפירוק שלו בבסיס "התדר" - $e^{i\omega t}$ נתון על ידי - $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega$.

אזי את פונקציית המקדמים נקבל על ידי הפעלת **טרנספורם פורייה** על הפונקציה, אשר מוגדר באופן הבא:

$$FT[x]=\tilde{x}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-i\omega t}dt$$

2.1 משפט הקונבולוציה

עכשיו יהיה אפשר לשאול משהו מעניין, ראינו כי אם אנחנו מייצגים את x בעזרת פירוק לפונקציות δ אזי נקבל שניתן להציג את התוצאה בעזרת קונבולוציה עם התגובה להלם של הפונקציה.

אבל עכשיו ראינו כי אנחנו יכולים לייצג את כל אחד מהאותות באמצעות פונרציית המקדמים שלהם בטור פוריה,

במילים אחרות, אנחנו יודעים שאנחנו יכולים לקבל - $\tilde{x}(\omega) = FT[x]$, אבל אנחנו יכולים לעשות זאת גם ל-y! ונקבל - $\tilde{y}(\omega) = FT(y)$,

אז נשאל - **מה הקשר בין $\tilde{y}(\omega)$ ל-$\tilde{x}(\omega)$?**

אז בואו נעשה את החשבון :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau =$$

נציב את x לפי הפירוק שלו לבסיס התדר במשוואה -

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right) h(t-\tau) d\tau =$$

נהפוך את סדר האינטגרציה

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} h(t-\tau) d\tau \right) d\omega =$$

נגדיר מחדש את המשתנים -

$$= \begin{bmatrix} \hat{t} = t-\tau \\ d\hat{t} = dt = -d\tau \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) \left(-\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\hat{t})} h(\hat{t}) d\hat{t} \right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\hat{t}} h(\hat{t}) d\hat{t}}_{=FT[h(t)]=:H(\omega)} \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} =$$

$$= FT[\tilde{x}(\omega) H(\omega)]$$

ובעצם הוכחנו כאן בלי ששמנו לב משפט חשוב שנקרא...

משפט 9. משפט הקונבולוציה - מתקיים:

$$FT\left[x\left(t\right)*h\left(t\right)\right]=\tilde{x}\left(\omega\right)\cdot H\left(\omega\right)$$

או בכללי לכל פונקציה - g:

$$FT\left[x\left(t\right)*g\left(t\right)\right]=\tilde{x}\left(\omega\right)\cdot\tilde{g}\left(\omega\right)$$

הגדרה 10. תהי מערכת לינארית אינווריאנטית בזמן - T ונסמן את התגובה שלה להלם - $h\left(t\right)$.

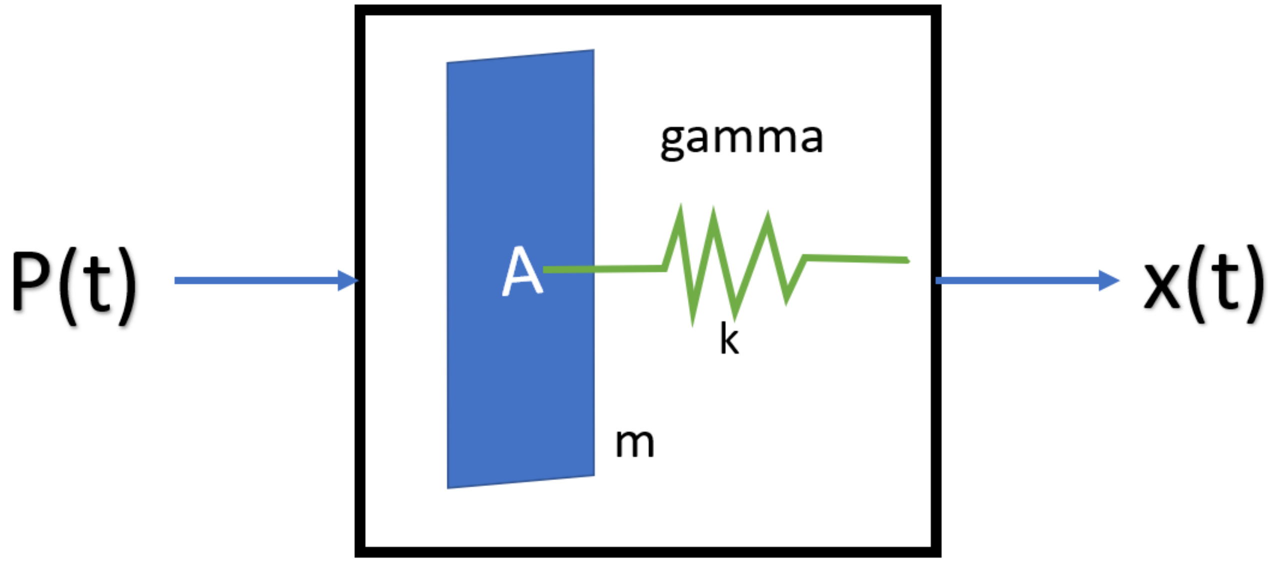
נגדיר את **פונקציית התמסורת** של מערכת לינארית להיות:

$$H\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}h\left(t\right)e^{-i\omega t}dt=FT\left[h\left(t\right)\right]\left(\omega\right)$$

מסכנות \ השלכות חשובות ממשפט הקונבולוציה:

1. כל מערכת LTI היא פילטר בתדר - $\tilde{Y}\left(\omega\right)=\tilde{x}\left(\omega\right)\cdot H\left(\omega\right)$
2. קונבולוציה בכיוון = מכפלה בתדר
3. אין יצירה של תדרים חדשים (אם לא היה לי בס, אז האיקווליזר לא ידע להוציא בסים)
4. ניתן לפתור כל בעיה שמערכת LTI בזמן או בתדר
5. תכונות פונקצה $H\left(\omega\right)$:
   (א) $h\left(t\right)$ ממשי $\Leftarrow H\left(-\omega\right)=H^{*}\left(\omega\right)$
   (ב) $h\left(t<0\right)=0$ $\Leftarrow$יחסי קרמרס קרוילינג

2.2 דוגמה - פונקציית תמסורת של ממברנת מיקרופון (+ תיכנון אופטימלי לממברנה)



ראינו כבר איך ממברנה עובדת בצורה פשוטה. הפעם ננסה להסתכל על המערכת במישור התדר.

נסמן את הלחץ שמגיע לממברנה - $P(t)$, ונסתכל על מקדמים של התדרים שלו - $\tilde{p}(\omega)$. פונקצית המיקום של הממברנה היוצאת מהלחץ - $x(t)$ גם לה נוכל לעשות טרנספורם פורייה - $\tilde{x}(\omega)$ ובהחרך מתקיים :

$$\tilde{x}(\omega) = \tilde{p}(\omega) \cdot H(\omega)$$

נשים לב שבעולם אידאלי - $h(t) = \delta(t)$, שכן התגובה להלם פשוט תהיה ההלם במקרה זה. ואז נקבל כי -

$$H(t) = FT[h(t)] = FT[\delta(t)] = const$$

ולמה זה מעניין, שכן במקרה הזה ניתן לראות בקלות ש- $H(\omega)$ שקול לקבוע כלשהו, כלומר התדרים שנכנסים יהיו התדרים שיצאו, ולכן לא נשנה את האות שנכנס בממברנה האידאלית הזו.

אז עכשיו נרצה למצוא את הערכים ל- m, k, γ, A בעבורם ניצור ממברנה אידאלית. (γ זה הריסון)

מתקיים :

$$Ap(t) - kx(t) - \gamma\ddot{x}(t) = \sum F = ma = m\ddot{x}(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = Ap(t)$$

עכשיו נעשה טרנספורם פורייה על שני צידי המשוואה :

$$-m\omega^2\tilde{x}(\omega)+i\gamma\omega\tilde{x}(\omega)+k\tilde{x}(\omega)=A\tilde{p}(\omega)$$

$$\left[\left(k-m\omega^2\right)+i\gamma\omega\right]\tilde{x}(\omega)=A\tilde{p}(\omega)$$

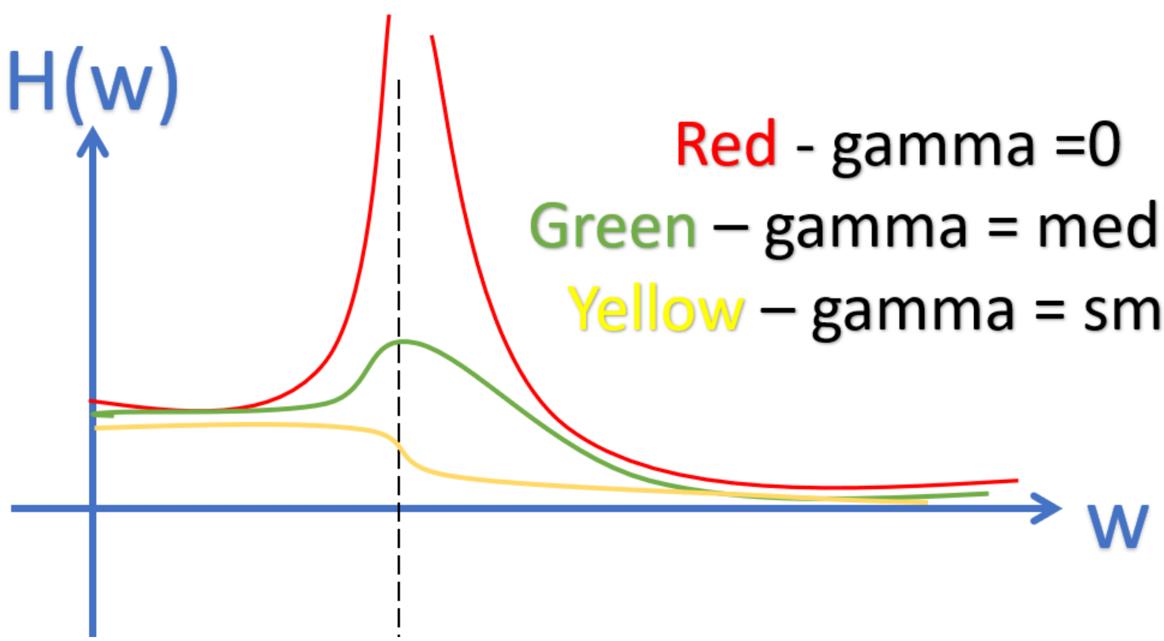
כלומר אנחנו יכולים להביע את תנועת הממברנה בתדר, ומכך נוכל גם למצוא את פונקציית התמסורת שלו -

$$\tilde{x}(\omega)=\underbrace{\left[\frac{A}{(k-m\omega^2)+i\gamma\omega}\right]}_{=H(\omega)}\tilde{p}(\omega)$$

נבחן כמה מקרים מעניינים :

- כאשר - $\omega\to\infty$ אזי נקבל - $H(\omega)\propto-\frac{A}{m\omega^2}$ כלומר נקבל שהיא תשאף ל-0 .
- כאשר $\omega=0$ נקבל $H(\omega)=\frac{A}{k}$, כלומר זרם DC.
- כאשר $\gamma=0$ אזי נקבל $H(\omega)=\frac{A}{k-m\omega^2}$ כלומר נקבל מכאן את התדירות העצמית שלו - $\omega=\sqrt{k/m}$, שכן שם נקבל ש-H תתבדר.

נסתכל על ההתנהגות של - $H(\omega)$ עם ההתנהגויות המיוחדות הללו



אז נחזור למטרה שלנו. איך נהפוך את זה לאידאלי?

נרצה שH ביחס ל- ω יתנהג כמו קו ישר וכמה שיותר גדול, ולכן נקבל שלפחות מבחינת ריסון, נרצה שיהיה לנו - γ , שכן צריך ריסון מסויים כדי להתגבר על רזוננס, אבל לא נרצה שהוא יהיה גדול מדי אחרת נאבד את העוצמה שרצינו.

2.3 איך נמדוד את פונקציית התמסורת - $H\left(\omega\right)$:

ישנם כמה דרכים לעשות זאת:

1. נמדוד את $h\left(t\right)$, כלומר נכניס - δ למערכת ונבצע FT.
2. נכניס אות אחר שמכיל את כל התדרים - $x\left(\omega\right)$, ואם נכניס אותו למערכת נקבל - $\tilde{y}\left(\omega\right)=\tilde{x}\left(\omega\right)H\left(\omega\right)$ וכך נקבל - $H\left(\omega\right)=\frac{\tilde{y}\left(\omega\right)}{\tilde{x}\left(\omega\right)}$
3. נכניס - $e^{i\omega t}$ (או $\cos\left(\omega_{0}t\right)$) ונשתמש בכך שהוא ערך עצמי, ונמדוד בצורה בדידה את - H.

2.4 דוגמה - איך $\cos\left(\omega_{0}t\right)$ עובר במערכת - LTI (מה המשמעות של הפאזה של $H\left(\omega\right)$)

אז נניח שהקלט שמתקבל הוא -

$$x\left(t\right)=\frac{A}{2}\left[e^{i\left(\omega_{0}t+\theta\right)}+e^{-i\left(\omega_{0}t+\theta\right)}\right]$$

נחשב את $\tilde{x}\left(\omega\right)$:

$$\tilde{x}\left(\omega\right)=FT\left[x\right]=\frac{A}{2}\left[e^{i\theta}\delta\left(\omega-\omega_{0}\right)+e^{-i\theta}\delta\left(\omega+\omega_{0}\right)\right]$$

אזי מתקיים:

$$\tilde{y}\left(\omega\right)=\frac{A}{2}\left[e^{i\theta}\delta\left(\omega-\omega_{0}\right)+e^{-i\theta}\delta\left(\omega+\omega_{0}\right)\right]\cdot H\left(\omega_{0}\right)$$

נכתוב - $H\left(\omega_{0}\right)=\left|H\left(\omega_{0}\right)\right|e^{i\phi\left(\omega_{0}\right)}$ ולכן:

$$\tilde{y}\left(\omega\right)=\frac{A}{2}\left|H\left(\omega_{0}\right)\right|\left[e^{i\phi\left(\omega_{0}\right)}e^{i\theta}\delta\left(\omega-\omega_{0}\right)+e^{-i\phi\left(\omega_{0}\right)}e^{-i\theta}\delta\left(\omega+\omega_{0}\right)\right]$$

$$\tilde{y}\left(\omega\right)=\frac{A}{2}\left|H\left(\omega_{0}\right)\right|\left[e^{i\left(\theta+\phi\left(\omega_{0}\right)\right)}\delta\left(\omega-\omega_{0}\right)+e^{-i\left(\theta+\phi\left(\omega_{0}\right)\right)}\delta\left(\omega+\omega_{0}\right)\right]$$

עכשיו נעשה - FT^{-1} לשני הצדדים -

$$y\left(t\right)=\frac{A}{2}\left|H\left(\omega_{0}\right)\right|\left[e^{i\left(\omega_{0}t+\theta+\phi\left(\omega_{0}\right)\right)}+e^{-i\left(\omega_{0}t+\theta+\phi\left(\omega_{0}\right)\right)}\right]=\left|H\left(\omega_{0}\right)\right|A\cos\left(\omega_{0}t+\theta+\phi\left(\omega_{0}\right)\right)$$

2.4.1 מסקנות:

1. אות מצורה של קוסינוס בכל מערכת LTI - מניב אות קוסינוס באותו התדר - ω_0 עם 2 שינויים קטנים:
   (א) האמפליטודה שלו מוכפלת ב-$|H(\omega_0)|$
   (ב) תוספת פאזה של - $arg\{H(\omega_0)\} = \phi(\omega_0)$
2. נוכל להכליל את זה לא רק לקוסינוס אלא ל-$e^{i\omega_0 t}$, ונקבל שהם תכלס **וקטורים עצמיים של מערכות לינאריות אינווריאנטיות בזמן** וזה למה פוריה הוא משמעותי.
3. אז מה זה פונקציית התמסורת? במונחים של ווקטורים עצמיים, זה תכלס ה"מטריצה" עם כל הערכים העצמיים שלהם.

2.5 משוואת הגלים כמערכת לינארית

ניזכר במשוואת הגלים -

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S(x,t)$$

כאשר כאן - $S(x,t)$ הוא העירעור של המשוואה (יענו המקור להפרעה - האילוץ).

נשים לב שהיא מורכבת מאופרטוריל לינארים בלבד (גזירות), כלומר הקשר בין עירור בנקודה אחת לתוצאה בנקודה אחרת היא מערכת לינארית!

מה עוד? היא גם אינווריאנטית בזמן בעבור מרחב סטטי.

כלומר התגובה בין שתי נקודות - $\vec{r}$ ו-$\vec{r'}$ מתוארת על ידי פונקציית תגובה להלם או פונקציית התמסורת.

3 מעגלים חשמליים (RLC) כמערכות ליניאריות

הקדמה

במודל RLC - שלנו כיום אנחנו לוקחים כל רכיב חשמלי - נגיד נורה מסויימת, שיש לה המון תכונות יחודיות, ואנחנו מקרבים אותה לנגד - R. למודל זה קוראים - **מודל האלמנטים המקובצים**, והוא בגדול אומר שכל אלמנט חשמלי אנחנו משייכים לאחת מכמה הקבוצות של הרכיבים החשמליים שהגדרנו.

דרך מגניבה לראות את זה שזה יכול להיות משמעותי שאנחנו עושים את הקירובים הללו הוא לחשוב על תזוזה של עצם גדול - כאשר אנחנו דוחפים עצם גדול מקצה אחד, במודלים שלנו כרגע אנחנו אומרים שכולו זז כגוש במהירות קבועה, אך בפועל אנחנו יודעים שזה מתנהג יותר כמו רכבת... ה"קרון" הראשון, מה שאנחנו דוחפים, דוחף את האחד אחריו וכך הלאה, כלומר לוקח זמן עד שהמידע עובר, ובהגיון הזה אנחנו מבינים שאנחנו כנראה לא רוצים לפשט רכבת גדולה לגוש קשיח, ולכן זה גם החיסרון במודל האלמנטים המקובצים.

נרצה כעת לעשות טרנספורם פורייה על האלמנטים (מתח וזרם) של הרכיבים במודל שלנו. למה? אין סיבה טובה, אנחנו אוהבים פורייה וזה הקורס.

3.1 פוריה על רכיבי - RLC

מתקיים -

$$\tilde{V}(\omega)=H(\omega)\,\tilde{I}(\omega)$$

וכעת נעשה זאת על כל אחד מהרכיבים -

$$\tilde{V}_R(\omega)=R\tilde{I}(\omega)$$

$$\tilde{V}_C(\omega)=\underbrace{\left(\frac{1}{i\omega c}\right)}_{=z_C(\omega)}\tilde{I}(\omega)$$

$$\tilde{V}_L(\omega)=\underbrace{(i\omega L)}_{=z_L(\omega)}\tilde{I}(\omega)$$

בדומה נרצה לחשב את פונקצית התגובה להלם שלהם -

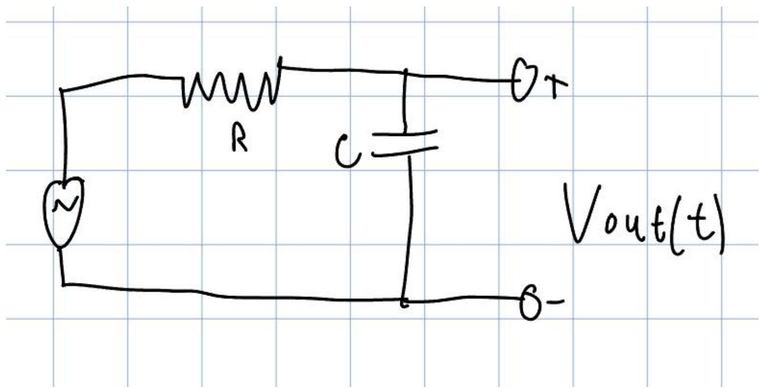
$$h_R(t)=R\delta(t)$$

$$h_C\left(t\right)=\frac{1}{C}\theta\left(t\right)$$

$$h_L\left(t\right)=L\frac{d}{dt}\left(\delta\left(t\right)\right)$$

כעת נרצה לנתח מעגל RC טורי אשר המתח נמדד על הקבל.

3.1.1 ניתוח מעגל RLC טורי:



לפי הנוסחה של מתח בקבל -

$$V_{out}\left(t\right)=\frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}I\left(t\right)dt$$

נעקוב אחרי הזרם במעגל.

נתחיל מהמקור מתח - לפני נגד נסמן את הזרם ב - I.

אחרי נגד בגלל שאנו מניחים שאין צבירת מטען באף צומת או רכיב נקבל שהזרם הוא - I

בצומת בין הקבל לנגד גם אין לנו צבירת מטענים - I

וכו...

עכשיו נגיע לסוף, ובאשר אנו חוזרים למד על הקבל, ונקבל ששוב הזרם צריך להיות זהה. כלומר קיבלנו שבן רגע הזרם צריך להבנות מן רגע יצירת המתח!

נשים לב שבכדי שההתנהגות של המערכת תהיה כמו שתיארנו הרגע, עשינו הרבה הנחות סמויות.

מכל אלו נקבל שיש לנו תנאים לשימוש במודל האלמנטים המקובצים! נכתוב אותם!

3.1.2 תנאים למודל האלמנטים המקובצים -

1. אין צבירת מטען באף צומת או רכיב.
2. אורך הרכיבים (והחוטים) זניח ביחס לאורך הגל - $\tau_{min}=\frac{l}{c}$ >> $t_{relevant}$. בנוסף - $\frac{l}{c}$ >> $\frac{1}{f}$ כלומר נקבל - $\lambda=\frac{c}{f}$ >> l (שזה בדיוק מה שכתבנו במילים)

3. כדי להפעיל - KVL (חוק קירכהוף) למתחים אנחנו מניחים את הקירוב הקוואזי-סטטי, אשר אומר $0 \approx \frac{d\Phi_B}{dt}$, שכן אנחנו רוצים כי - $\oint \varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \approx 0$.

נחזור לשאלה של המעגל RC.

נרשום את משוואת המתחים - חום קירכבוף למתחים (KVL) -

נעקוב לאחר המעגל, ונכתוב את המתחים שאנחנו מקבלים

$$V_{in}(t) - RI(t) - V_c(t) = 0$$

נעיר שוב שזה שווה ל-0 בגלל ההנחה שיש לנו קוואזי-סטטיקה.

נסדר מחדש -

$$V_{in}(t) = RI(t) + V_c(t)$$

נעשה לזה פוריה -

$$\tilde{V}_{in}(\omega) = R\tilde{I}(\omega) + \frac{1}{i\omega c}\tilde{I}(\omega) = \tilde{I}(\omega)\left[R + \frac{1}{i\omega c}\right]$$

ומכאן נקבל את הזרם (בפוריה) !

$$\tilde{I}(\omega) = \tilde{V}_{in}(\omega)\left[\frac{1}{R + \frac{1}{i\omega c}}\right]$$

ניזכר שאנחנו גם יודעים להביע אותו בעזרת המתח הסופי -

$$\tilde{V}_{out}(\omega) = \frac{1}{i\omega c}\tilde{I}(\omega)$$

כלומר לבסוף נקבל -

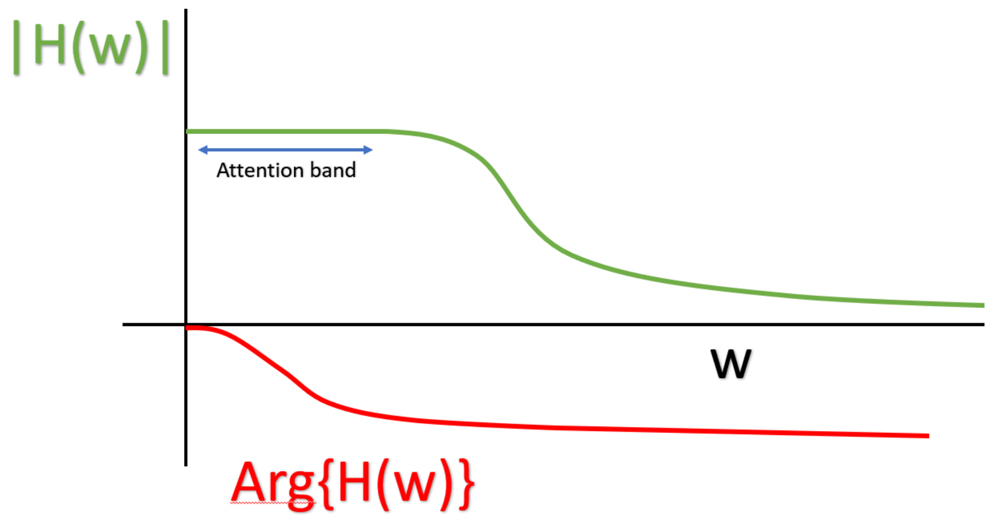
$$\tilde{V}_{out}(\omega) = \underbrace{\left[\frac{1}{i\omega cR + 1}\right]}_{=H_{RC}(\omega)}\tilde{V}_{in}$$

אז מה קיבלנו? תכלס את פונקציית התמסורת של המעגל - $H_{RC}(\omega)$. נרצה לשרטט אותה -

1. כאשר $\omega = 0$ אז היא שווה ל-1

2. ב- $\omega=\frac{1}{\tau}$ הערך יהיה $\frac{1}{1+i}$כלומר בדיוק 45^{o}

3. כאשר $\frac{1}{c}>>\omega$ נקבל כי היא מתנהגת כמו - $\frac{1}{i\omega RC}$, שזה נקרא בתדרים גבוהים בלבד - "מעגל אינטגרציה" (אינטואיציה היא כי $\frac{1}{i\omega}$ הוא מעבר של אינטגרציה בטרנספורם פורייה)



כלומר יש לו סוג של פילטר לתדרים נמוכים - מהנדסים וקראים לאיזור שבו יש לנו מעבר כמעט מושלם של האות (כלומר - $H(\omega)\approx1$ שם) - attention\pass band.

הנקודה שבה יש לנו חצי מההספק היא גם מיוחדת למהנדסים (משום מה...) וגם לה יש שם - ω_{cutoff}. והיא שווה ל- $\frac{1}{\tau}$ או ספציפית במעגל שלנו - $\frac{1}{RC}$.

הערה 11. נשים לב גם כעת שעצם העובדה שיש לנו פונקציית תמסורת כבר הוכיח לנו כי המערכת היא - LTI.

..

כעת ננסה לתכנן LPFלתדרי אודיו - $20Hz\Rightarrow20kHz$.

3.1.3 דוגמה - תיכנון LPF לתדרי אודיו $20Hz\Rightarrow20kHz$ (מה שאנשים שומעים):

ידוע לנו כי -

$$\omega_{cutoff}\left[\frac{rad}{s}\right]\approx2\pi\cdot20\left[kHz\right]$$

בצורה אידאלית היינו רוצים שהגרף יראה כמו 1 לכל התדרים שאנחנו רוצים, ו-0 לכל השאר. ולצערינו אנחנו בחיים האמיתיים, ולכן יש לנו trade of בין 2 דברים:

1. אם נרצה שבאמת ישמעו את התדרים שלנו טוב, אז נקבל שהדעיכה תתחיל בתדרים היותר גבוהים ועדיין יעברו לנו הרבה תדרים גבוהים בהרבה ממה שנרצה.
למה זה בעסה? נניח שיש איזה עטלף שצועק קרוב למיקרופון בתדר קצת יותר גבוהה ממה שאנחנו מסוגלים לשמוע. מן הסתן אנחנו לא נרצה שזה יקלט טוב, שכן זה עלול מספיק להרעיש את הקלט עד שהאות בטווח שאנחנו רוצים יבלע, אבל זה עדיין בטווח תדרים שנקלט טוב, אז אנחנו כן נקלוט את זה טוב.

2. נוכל לבחור שבשלב מאוד מוקדם נתחיל את הדעיכה, בשביל שבתדרים הגבוהים יותר אנחנו לא נקלוט כמעט כלום, אבל אז בתדרים הגבוהים שאנחנו כן רוצים לשמוע - לדוגמה צעקות של ילדים או וואטאבר, אנחנו גם כבר בקושי נשמע!

אז מה כן נרצה לבחור? נלך על האמצע! על ה- ω_{cutoff}.

3.2 אתנחתא - מה זה dB:

נגדיר דציבלים להיות גודל חסר יחידות (תכלס יחידת מידה) -

$$\color{green}{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P}{P_{ref}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{V}{V_{ref}}\right)$$

נסתכל על כמה דוגמאות :

$$dBw = dB - watt = 10\log_{10}\left(\frac{P}{1\,[watt]}\right)$$

$$dBV = dB - Volt = 20\log\left(\frac{V}{1\,[volt]}\right)$$

נעשה טבלה -

dB	P/P_{ref}	V/V_{ref}
10	10	$\sqrt{10}$
20	100	10
60	10^6	1000
~ 3	2	$\sqrt{2}$
-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
0	1	1
-10	0.1	
-13	0.05	

למה שנרצה לעבוד ב-dB ?

- אז בגדול זה סקאלה לוגריתמית, שזה מאפשר לנו לייצג טווח הספקים מאוד גדול, שזה מאוד נוח להרבה דברים בעולם האמיתי.
- מסתבר שהחושים שלנו עובדים בסקאלה לוגריטמית, ולכן זה מאוד טבעי למדוד כך את הדברים.
- הכפלות הופכות לחיבורים, וחילוקים להחסרות (שוב בגלל שזה לוגריתמי) ונראה בהמשך שזה נוח.

משהו שאנחנו עלולים להתקל בו - "שיפוע של $6dB/Octave$ " מה זה אומר? אז מהטבלה אפשר לראות כי $6dB$ זה יחס של $\frac{1}{4}$ בין ההספקים, ואוקטבה זה 20 ביחס של המתחים .

נסדר את זה - 20 ביחס מתחים אומר לנו שזה יהיה מהצורה - $20\log_{10}\left(\frac{1}{|\omega\tau|}\right)$ כלומר אם נביא את זה לצורה קונוונציאונלית - $10\log\left(\frac{1}{(\omega\tau)^2}\right)$.

כלומר לבסוף מה זה אומר - כאשר נגדיל את המתח פי 2 אז היחס הספקים יגדל פי $\frac{1}{4}$.

3.3 ניתוח מעגל RC בזמן

נחזור לדוגמה הקודמת שלנו, ונשים לב שחסר לנו משהו! אמנם השגנו את הניתוח שלו לפי התדר, אבל עוד לא השגנו את הניתוח לפי הזמן.
נחשב -

$$V_{in}\left(t\right)=V_{R}\left(t\right)+V_{c}\left(t\right)$$

$$\delta\left(t\right)=RI\left(t\right)+\frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{t}I\left(u\right)du$$

נזכר כי אנחנו יודעים כי - $I\left(t\right)=C\dot{V}_{c}\left(t\right)$ ולכן

$$\delta\left(t\right)=RC\dot{V}_{c}\left(t\right)+V_{c}\left(t\right)$$

את המדר הזה אפשר לפתור ולקבל -

$$V_{c}\left(t\right)=Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

משיטת "איזון הלמים" שתכלס ראינו במת"פ, אשר תכלס אומר שכמות ה-δ בשני הצדדים צריך להיות שווה. כלומר במקרה שלנו, זה אומר שהנגזרת הכי גבוהה - $\left(\dot{V}_{c}\left(t\right)\right)$ צריכה להתנהג כמו - δ, כלומר - V_{c} צריכה להתנהג כמו - θ. כלומר נסתכל על הערכים קצת אחרי 0 וקצת לפני 0 , ונשווה את מה שאנחנו רואים בשני הצדדים -

$$1=RC\left[V_{c}\left(0^{+}\right)-V_{c}\left(0^{-}\right)\right]+0$$

כלומר מה נקבל -

$$V_{c}\left(0^{+}\right)=\frac{1}{RC}$$

והנא מצאנו תנאי התחלה - פתרנו את המעגל שלנו!

כלומר נקבל את התגובה של המערכת שלנו להלם -

$$h\left(t\right)=\theta\left(t\right)\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

רחב הפס שלנו יהיה טווח התדרים עד לנקודת חצי המתח.

מכאן נקבל שאם אנחנו רוצים לדעת לקלוט פולס קצר מאוד , כלומר תכלס לקלוט תדר גבוהה מאוד, נרצה רוחב פס גדול. ומכאן נקבל משפט מפתח לקורס -

"קצר בזמן $\Leftarrow$ רחב בתדר"

"ארוך בזמן $\Rightarrow$ צר בסרט"

כעת לא תמיד נרצה תדרים נמוכים או גבוהים, אלא לפעמים נרצה לפלטר טווח תדרים מאוד ספציפים. וזה יוביל אותנו לנושא הבא -

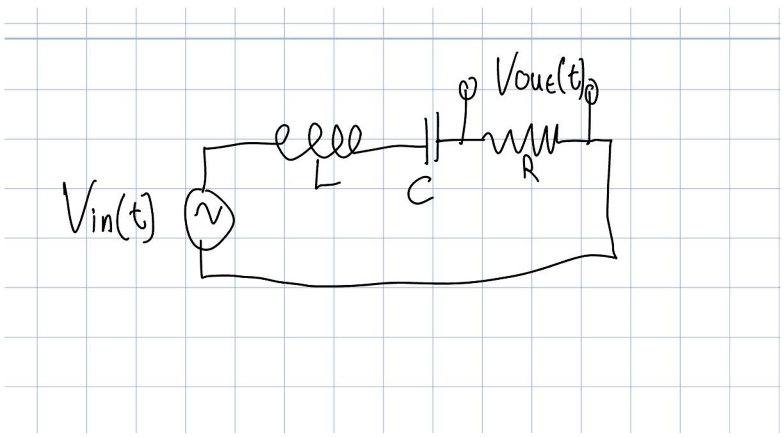
3.4 פילטר טווח תדרים במקום שרירותי - $(BPF - Band\ Pass\ Filter)$:

דרך אחת לעשות את זה היא בעזרת שירשור פילטר על תדרים גבוהים ונמוכים מסויימים. אבל בגלל שזה חומר שאמור לעבור בתרגול, ועוד לא ראינו אותו אז לא נסתמך על הדרך הזה.

אז אנחנו רוצים לתכנן מקלט רדיו לטווח תדר מסויים.

אז נתכנן -

3.4.1 מעגל - RLC טורי -



לפי קירכהוף -

$$V_{in}\left(t\right)=V_{L}\left(t\right)+V_{C}\left(t\right)+V_{R}\left(t\right)=$$

$$=L\dot{I}\left(t\right)+\frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{t}I\left(u\right)du+RI\left(t\right)$$

וכמובן שלא נפתור את זה במימד הזמן, אלא בממד התדר! נעשה פורייה לשני צידי המשוואה -

$$\tilde{V_{in}}\left(\omega\right)=R\tilde{I}\left(\omega\right)+i\omega L\tilde{I}\left(\omega\right)+\frac{1}{i\omega c}\tilde{I}\left(\omega\right)=\tilde{I}\left(\omega\right)\left[R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)\right]$$

אזי -

$$\tilde{I}\left(\omega\right)=\frac{\tilde{V}_{in}\left(\omega\right)}{R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)}$$

אם נמדודו את המתח עם הקבל -

$$\tilde{V}_{out}\left(\omega\right)=\tilde{V}_{R}=R\cdot\tilde{I}\left(\omega\right)$$

נציב זאת ונקבל -

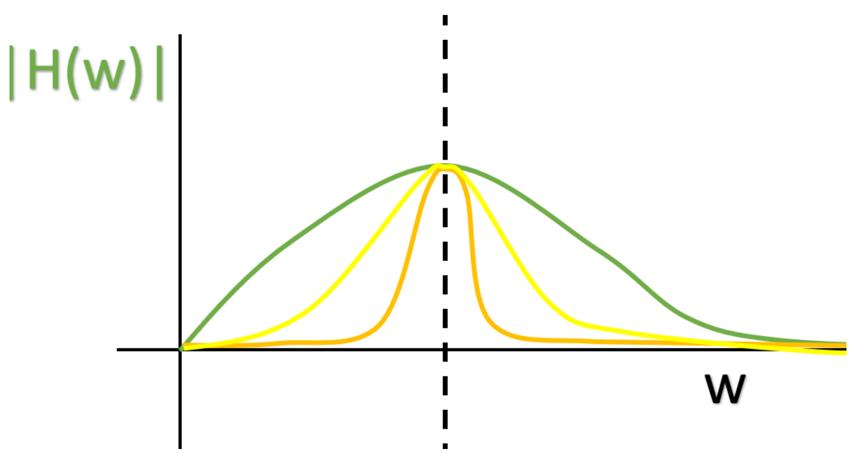
$$\tilde{V}_{out}\left(\omega\right)=\tilde{V}_{in}\left(\omega\right)\underbrace{\left[\frac{R}{R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)}\right]}_{=H_{R}\left(\omega\right)}$$

כלומר קיבלנו את - $H_{R}\left(\omega\right)$ - שהוא פונרציית התמסורת של מתח הנגד במעגל RLC טורי.

ושוב נרצה לשרטט אותו - בפאזה ובאמפליטודה. נראה התנהגות כי לשרטט כאן זה קשה -

1. אם $\omega\rightarrow0$ אז H_{R} מתנהג כמו - $i\omega RC$
2. אם $\omega=\omega_{res}$ כלומר תדר התהודה שלנו אז נקבל $H_{R}=1$.
3. אם $\omega\rightarrow\infty$ אז H_{R} מתנהג כמו - $\frac{R}{i\omega L}$ כלומר ישאף ל-0.

כלומר יש לנו 3 נקודות שאנחנו יודעים בוודאות שהוא יעבור בהם, והצורה הכללית של הגרף תיקבע מהפרמטרים שנבחר (זה הכמה אופציות שיש בגרף)



וכמובן שעושים אותו הדבר עם התדר.

אז איך נמצא רוחב פס מתאים לנו, נגיד - $-3dB$. אז עושים את זה בעזרת השוואת המרחק בין 2 הנקודות בהן - $H\left(\omega\right)=\frac{1}{2}max\left\{ H\left(\omega\right)\right\}$ (כלומר זה ממש רוחב הפס) ל- $-3dB$. ואז נקבל את הערכי - L,C,R שיתאימו לדרישה!

כמה נקודות על הנושא -

- פרמטרים חשובים לתכנון BPF הם ω_0 (כלומר התדר המרכזי שלו) ו-$\Delta\omega_{-3dB}$ (כלומר הפרש התדרים אשר מביאים רוחב פס של $-3dB$)
- נהוג להגדיר גורם טיב - $Q-factor$ באופן הבא - $Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{f_0}{\Delta f}$. והוא מייצג כמה הפילטר שלנו צר. ועוד משהו שהוא מייצג הוא כמה אוסילציות התגובה להלם שלו עושה לפני שהוא דועך

לפני שנעזוב את הנושא, נפתור את המעגל - RLC הטורי בזמן! (ממש כמו במעגל הRC)

כלומר נרצה למצוא את התגובה להלם של המעגל. נכניס $\delta\left(t\right)$ בתור המתח שנכנס ונראה מה יוצא - נזכר כי

$$V_{in}\left(t\right)=L\dot{I}\left(t\right)+\frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{t}I\left(u\right)du+RI\left(t\right)$$

נכנית תגובה להלם וגם נכתוב את המערכת בשפה שמעיפה לנו את האינטגרל -

$$\delta\left(t\right)=L\ddot{Q}\left(t\right)+\frac{1}{c}Q\left(t\right)+R\dot{Q}\left(t\right)$$

ואת המשוואה הזו אנחנו יודעים לפתור בקלות!

עכשיו נקבל את פונקצית התגובה להלם אחרי קצת מתמטיקה -

$$h\left(t\right)=B\cos\left(\omega_0 t+\phi\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\Theta\left(t\right)$$

3.5 מעגלי RLC כ- LTI.

ניזכר בתהליך שעשינו במעגלי - RCL תורי.

ראינו כי מתקיים -

$$H\left(\omega\right)=\frac{V_{out}\left(\omega\right)}{V_{in}\left(\omega\right)}=\frac{R\tilde{I}\left(\omega\right)}{\tilde{V_{in}}\left(\omega\right)}\cdot\frac{\tilde{V_{in}}\left(\omega\right)}{Z_{tot}\left(\omega\right)}=\frac{R}{R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

נבחן את ההתנהגות של זה:

1. כאשר - $\omega\rightarrow0$ אזי הפונקציה הולכת ל-0 כמו ω
2. כאשר - $\omega\rightarrow\frac{1}{\sqrt{LC}}$ אזי הפונקציה הולכת ל-1
3. כאשר $\omega\rightarrow\infty$ אזי הפונקציה הולכת ל-0 גם כן.

כלומר הגודל של זה מתנהג כמו - פילטר $band-pass$.

איך עוד אנחנו יכולים למדוד את פונקציית התמסורת - אנחנו יכולים למדוד את המתח היוצא במקומות אחרים , לדוגמה אפשר למדוד את המתח על הסליל והקבל - $\tilde{V}_{LC}$.

$$H_{LC}(\omega)=\frac{\tilde{V}_{LC}(\omega)}{\tilde{V}_{in}(\omega)}=\frac{\tilde{V}_{in}(\omega)-\tilde{V}_{R}(\omega)}{\tilde{V}_{in}(\omega)}=1-H_{R}(\omega)$$

אז זה יראה כמו אחד פחות פילטר - $band-pass$.

עוד משהו נחמד שאפשר לשאול, הוא מה יקרה אם נמדוד רק על הסליל - $\tilde{V}_L(\omega)$-

$$H_L(\omega)=\frac{\tilde{V}_L(\omega)}{\tilde{V}_{in}(\omega)}=\frac{i\omega L\tilde{I}(\omega)}{\tilde{V}_{in}(\omega)}$$

אך אנחנו יודעים כי היחס בין המתח לזרם במעגל הוא האימפדאנס - $R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$ כלומר נקבל בסוף -

$$H_L(\omega)=\frac{i\omega L}{R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

3.6 הספק על עומס מרוכב

הספק - $p(t)$ הוא גודל בעל יחידות - $watt$, או - $\left[\frac{J}{sec}\right]$, והוא מחושב בצורה הבאה - $p(t)=V(t)\cdot I(t)$.

נתון רכיב עם - $z(\omega)$ עובר דרכו זרם סינוסואידלי -

$$I(t)=I_0\cos(\omega_0 t)$$

נשאל מה ההספק דרכו?

המתח שיעבור דרכו אנו יודעים בגלל - $z(\omega)$, נסמן - $\phi_0=arg\left\{z(\omega_0)\right\}$

$$V(t)=I_0\left|z(\omega_0)\right|\cos(\omega_0 t+\phi_0)$$

אזי ההספק יהיה -

$$p(t)=I_0^2\left|z(\omega_0)\right|\underbrace{\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t+\phi_0)}_{=\frac{1}{2}[\cos(2\omega_0 t+\phi_0)+\cos(\phi_0)]}$$

נסתכל על איך הפונקציה תראה!

נשים לב **שאם -** $\phi_0=0$, אזי $z(\omega_0)$ ממשי!

נגדיר את הדבר הבא -

הגדרה 12. נגדיר **הספק ממוצע בזמן** להיות -

$$\langle p\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}p\left(t\right)dt=\frac{1}{T_{period}}\int\limits_{\frac{T_{p}}{2}}^{\frac{T_{p}}{2}}p\left(t\right)dt$$

נסתכל כעת על הספק ממוצע של עומס מרוכב -

$$\langle p\rangle=\frac{1}{2}I_{0}^{2}\left|z\left(\omega_{0}\right)\right|\cos\left(\phi\right)=\frac{1}{2}I_{o}^{2}Re\left(\omega_{0}\right)$$

מסקנה - הספק מתבזבז בממוצע רק בחלק הממשי (ההתנגדותי) של האימפדנס.

4 תקשורת אנלוגית

הקדמה

המטרה שלנו בפרק הזה תהיה ללמוד איך נוכל לשדר אות אנלוגי כלשהו (מתח או זרם או משהו - $f(t)$) בתווך מסויים כך שהוא יוכל להקלט בצוקה מיטבית וללא הפרעות משידורים אחרים.

אז מה נרצה שהתקשורת תקיים - (דרישות)

1. הפרדה בין ערוצים ($channels$)
2. תכונות העברה של התווך + אמצעי השידור (למשל אנטנה) יהיו מתאימות למכשיר
3. נרצה להקטין את רוחב הסרט האפקטיבי - $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

4.1 תקשורת - $Amplitude\ Modulation\ (AM)$:

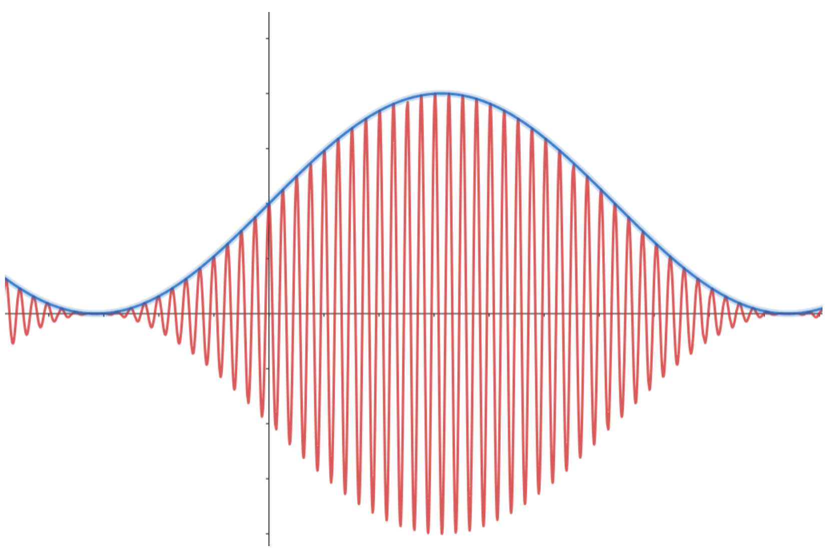
הרעיון כאן הוא שאנחנו רוצים להעביר את האות שלנו דרך מודולציה עם האמפליטודה . נסמן -

1. ω_0 - התדר של הגל הנושא - ולכן $\cos(\omega_0 t)$ הוא הגל הנושא.
2. $A(t)$, אמפליטודת הגל הנושא
3. $mf(t)$ הוא המודולציה, ו-m הוא מקדם המודולציה .

אזי האות שנעביר יהיה -

$$g(t) = \left[\overbrace{1 + mf(t)}^{A(t)}\right]\cos(\omega_0 t)$$

איך זה יראה -



בשרטוט הנחנו כי -

1. $1+mf(t)>0$
2. $\omega_0>>\omega_{max}$

נרצה להסתכל על זה במישור התדר, נעשה פורייה על מה שעשינו -

$$\tilde{G}_{AM}(\omega)=\left[\delta(\omega)+m\tilde{F}(\omega)\right]*\left[\frac{1}{2}\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\delta(\omega+\omega_0)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\delta(\omega+\omega_0)+\frac{m}{2}\tilde{F}(\omega+\omega_0)+\frac{m}{2}\tilde{F}(\omega-\omega_0)$$

עכשיו מגיע החלק המעניין - נניח והתדר שאנחנו מקבלים - $\tilde{F}$ הוא בטווח תדרים עד - $\omega_{max,sygnal}$.

אזי נקבל ש-$\tilde{G}$ יהיה ברוחב סרט של - $\Delta\omega=2\omega_{max}$. שכן הטווח שנקבל יהיה $[\omega_0-\omega_{max},\omega_0+\omega_{max}]$. כלומר -

מסקנות:

1. רוחב הסרט של שידור AM יהיה - $\Delta\omega=2\omega_{max}$ בעבור התדר המקסימלי של מה שקיבלנו
2. לא כל ההספק המשודר מכיל מידע
3. השידור מכיל כפילויות!
4. אם $1+mf(t)$ בשלב מסויים גם חוצה את ה-0 אז הדרך שלנו לדעת להגיד מה הפונקציה ששודרה היא לפי הפאזה.

כלומר אם אנחנו משדרים - $\cos(kx+\omega_0 t)$ בשיטה הזו, מישהו בנקודה מסויימת במרחב יקלוט את האות שלנו כאשר הפאזה תהיה - $\phi(x)=-kx=-\frac{\omega_0}{c}x$. ועכשיו נשאל - מה קורה אם מי שקולט את האות זז - $x=x_0+vt$?

אז תכלס כל מה שמשתנה זה שהפאזה תהיה עכשיו תלויה ב-x תזתנה עם הזמן, כלומר הוא יקלוט - $\cos\left(\left(\omega_0-\frac{\omega_0}{c}v\right)t-\frac{\omega_0}{c}x_0\right)$ שזה תכלס אפקט דופלר!

4.2 מימוש משדר AM:

נסתכל על מערכת אשר מקבלת אות - $f(t)$ ומוציאה $g(t)=(1+mf(t))\cos(\omega_0 t)$. נשאל האם היא LTI?

התשובה היא **לא!** זאת בגלל שהיא לא אינווריאנטית בזמן!

אז בואו נבנה את זה: שלב שלב -

1. דבר ראשון שנרצה הוא מגבר לקלט, שכן אנחנו רוצים להפוך - $f(t)$ ל-$mf(t)$.
2. עכשיו אנחנו רוצים לחבר 1 לקלט, איך נעשה את זה? נוסיף מקור מתח קבוע אל הקלט!
3. עכשיו נרצה להכפיל הכל ב$\cos(\omega_0 t)$, את זה אפשר לעשות על ידי רכיב הנקרה - $local-oscilator$ אשר יודע לייצר את התדר הקוסינוסי הטהור! אז איך נכפיל את האות שלנו בו?

   נשים לב שההכפלה הזו היא לא אינווריאנטית בזמן, **לרכיב המכפיל** קוראים - $mixer$.

4.2.1 איך לממש מכפיל? ($mixer$)

עושים זאת באמצעות רכיב עם תגובה לא לינארית, למשל דיודה! אשר היא רכיב אשר באידאל מעביר זרם לכיוון אחד, ובכיוון השני הוא נתק. עקום ה-V, I שלה מתנהג כמו -

$$I\left(V\right)=I_{0}\left(e^{bV}-1\right)$$

נוכל לעשות קירוב טיילור -

$$I\left(V\right)\approx I\left(V_{0}\right)+\left(V-V_{0}\right)\frac{dI}{dV}\left(V-V_{0}\right)+\frac{1}{2}\left(V-V_{0}\right)^{2}\frac{d^{2}I}{dV^{2}}\left(V-V_{0}\right)$$

אם נפעיל על הדיודה מתח שהוא סכום של שני אותות שלנו (+ מתח V_0-) נקבל -

$$I\left(V_{0}+f\left(t\right)+\cos\left(\omega_{0}t\right)\right)=I\left(V_{0}\right)+\alpha\left[f\left(t\right)+\cos\left(\omega_{0}t\right)\right]+\frac{1}{2}\beta\left[f\left(t\right)+\cos\left(\omega_{0}t\right)\right]^{2}+\left[f^{2}\left(t\right)+2f\left(t\right)\cos\left(\omega_{0}t\right)+\cos^{2}\left(\omega_{0}t\right)\right]$$

נעשה על זה טרנספורם פורייה -

$$\tilde{I}\left(\omega\right)=I\left(V_{0}\right)\delta\left(\omega\right)+\alpha\tilde{F}\left(\omega\right)+\frac{\alpha}{2}\delta\left(\omega\pm\omega_{0}\right)+\frac{1}{2}\beta\left[\frac{1}{2}\delta\left(\omega\pm\omega_{0}\right)+\underbrace{\tilde{F}\left(\omega\right)*\left[\delta\left(\omega\pm\omega_{0}\right)\right]}_{=\tilde{F}\left(\omega\pm\omega_{0}\right)}+\tilde{F}\left(\omega\right)*\tilde{F}\left(\omega\right)\right]$$

ואם זוכרים את השירטוט של אורי קץ מבינים כי החלק הרצוי בביטוי הזה הוא $\tilde{F}\left(\omega\pm\omega_{0}\right)$, ואפשר לשמור אותו עם פילטר - $band-pass$, <u>אם</u> מתקיים -

התנאי לסינון האיבר הרצוי $\Leftarrow$

$$2\omega_{max}<\omega_{0}-\omega_{max}\Rightarrow\omega_{0}>>\omega_{max}$$

כלומר אם התנאי הזה מתקיים, נוכל לשרשר פילטר בטווח המתאים אל התוצאה של הדיודה ונקבל מכפלה!

4.3 מימוש מקלט AM פשוט , ולא קוהרנטי

נעיר ראשית כי "לא קוהרנטי" אומר שהוא לא רגיש לפאזת הגל הנושא, כלומר צריך לדעת רק את - ω_0.

נרצה משהו שיודע לקבל - $\left(1+mf\left(t\right)\right)\cos\left(\omega_{0}t\right)$ ויודע להחזיר - $f\left(t\right)$.

הרעיון הוא לשרשר דיודה עם קבל, אשר בכל פיק של שידור טוען את הקבל בדיוק לערך שרוצים, ואז מתחיל לדעוך, כלומר מה שנקבל הוא סוג של פונקציית מסור אשר עוקבת אחרי המתאר של האות שהתקבל.

אז מה נדרוש על התכנות בשביל שהוא יהיה טוב -

1. ראשית נרצה שתהיה לנו תדירות גבוה של האות, וכך נקבל שה"רזולוציה הרעה" של של המקלט לא תהיה מובחנת בגלל שהוא יעקוב טוב אחרי הפיקים. כלומר $\omega_{0}>>\omega_{max}$.
2. דבר שני שנרצה הוא להסתכל על זמן הפריקה, זמן פריקה מהיר מדי יוביל לכך שמה שנקלוט יהיה בעל קפיצות גדולות מדי ובתכלס לא יתאר טוב את האות ששודר.

לאומת זאת, זמן פריקה ארוך מדי יגרום לזה שנאבד את רגישות המקלט לירידה באות, ותכלס נתאר משהו שנראה יותר כמו קו ישר מאשר האות שהתקבל. אז נתכום את זמן הפריקה - $J = RC$ באמצעות שני חסמים שינסו להשאיר אותו באמצע -

$$\frac{2\pi}{\omega_0} << RC << \frac{2\pi}{\omega_{max}}$$

כלומר עוד יותר נרצה - $\omega_{max} <<<< \omega_0$.

4.3.1 מקלט הטרודיין

היה בתרגול, הרעיון הוא שאנחנו רוצים את האפשרות לשנות את איזה טווח תדרים אנחנו קולטים טוב, וקשה לנו ליצור $band - pass$ אשר אנחנו מזיזים את הטווח שהוא קולט טוב. אז הרעיון של המקלט הזה הוא שבהנתן התדר שאנחנו רוצים דלקלוט טוב = ω_0, אבל הפילטר שלנו מפלטר טוב סביב - ω_1, אז הפילטר הזה מזיז לנו את התדרים לשם.

לא הייתי בתרגול שהסבירו על זה, שווה ספציפית את זה להשלים משם.

4.3.2 מקלט הומודיין

מקלט זה הוא מימוש פשוט ומוכר למקלט קוהורנטי. כלומר מקלט אשר יודע להגיד מה האות שהועבר גר כאשר הוא חוצא את ה-0.

כאן נרצה שהאות המתקבל מהאנטנה - $g_{AM}(t)$ יוכפל ב - $\cos(\omega_0 t + \phi)$ ואז יעבור ל-LPF מתאים בשביל להוציא את האות. מה יקרה לאות?

$$y(t) = [A(t)\cos(\omega_0 t)] \cdot \cos(\omega_0 t) = \underbrace{\frac{1}{2}A(t)}_{what\ we\ want} + \frac{1}{2}A(t)\cos(2\omega_0 t)$$

כלומר יש לנו כאן הנחה סמויה - אנחנו דורשים את ידיעת הפאזה של הגל הנושא $\Leftarrow$ **גלאי קוהרנטי**.

נראה את זה ! ננתח את השגיאה בפאזה -

$$A(t)\cos(\omega_0 t) \Rightarrow \{X \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)\} \Rightarrow LPF$$

נקבל -

$$y(t) = A(t)\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2}A(t)\left[\cos(2\omega_0 t + \phi) + \cos(\phi)\right]$$

אחרי LPF:

$$\frac{1}{2}A(t)\cos(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}A(t) & \phi = 0 \end{cases}$$

כלומר אנחנו מקבלים רק מידע בעל פאזה - $\phi = 0$, בפרט מה זה אומר? זה אומר שאנחנו יכולים לשדר 2 פיסות מידע שונות על הקוסינוס והסינוס, וככה באמצעות שידור יחיד אפשר להעביר פי 2 מידע! ושני מקלטים יכולים כל אחד בצורה לא תלויה לקלוט כל אחד חלק אחר של האות על אותו התדר.

כלומר אם אנחנו יודעים את הפאזה, אנחנו יכולים לעשות **גילוי קוהורנטי**, כלומר להעביר פי-2 מידע בעזרת העברה גם על הסינוס וגם על הקוסינוס.

4.4 איפנון פאזה - (PM):

מה עוד אפשר לעשות? אז איפננו כבר את המידע דרך האמפליטודה, וגם דרך התדר. מה עם דרך הפאזה?

נסתכל על האיפנון הבא -

$$g_{PM}(t) = \cos(\omega_0 t + \phi_0 \beta f(t))$$

איפנון כזה מחייב אותנו **במקלט קוהורנטי** שכן אחרת אנחנו לא נדע אם השינוי בפאזה היה בגללינו או בגלל האות.

4.4.1 מימוש משדר PM:

1. נעביר את האות דרך מעגל גזירה
2. נחבר את זה למשדר - FM

4.5 איפנון תדר (FM)

הגדרה 13. את האיפנון תדר - FM נעשה על ידי **התדר הרגעי** (לא תדר פוריה) שהוא מוגדר באופן הבא -

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt} = phase\ earning\ rate$$

ההבדל בין זה לבין פוריה הוא כלדמן: פוריה זה אינטגרל החפיפה שלנו של הפונקציה עם כל התדרים, כלומר הוא אומר לנו את סך הכמות מכל תדר אשר מרכיב אותו, ובפרט אנחנו לא יכולים לדעת מתי כל תדר כזה הופיע.

לאומת זאת התדר הרגעי מדבר איתנו על השינוי בפאזה, כלומר הוא כן אומר לנו מתי הופיע כל תדר.

אז איך משדרים ב-FM?

נרצה שהתדר הרגעי יהיה מהצורה - $\omega(t) = \omega_0 + \beta f(t)$. כלומר נסתכל על הפאזה שצריכה להיות - $\phi(t) = \int_0^t (\omega_0 + \beta f(t'))\, dt' = \omega_0 t + \beta \int_0^t f(t')\, dt'$.

כלומר -

$$g_{FM}(t) = A(t) \cdot \cos\left(\omega_0 t + \beta \underbrace{\int_0^t f(t')\, dt'}_{=f_t} + \phi\right)$$

כלומר זה ממש יוצא כמו איפנון - PM. אבל מה נגלה, מסתבר שלזה אנחנו לא חייבים גילוי קוהורנטי!

4.5.1 גילוי FM:

נסתכל 2 שורות אחורה באות המועבר, אנחנו רוצים דרך לקבל את $f(t)$, זה המידע שלנו!

נעביר את האות דרך מעגל גזירה -

$$\frac{d}{dt}g_{FM}(t)=-A\left[\omega_0+\beta f(t)\right]\sin\left(\omega_0 t+\beta\int_0^t f(t')\,dt'+\phi\right)$$

וקיבלנו סוג של אות AM! שכן יש לנו אמפליטודה שבה המידע מועבר, ואז גל נושא. ולכן אנחנו יכולים אפילו להשתמש בגלאי לא קוהורנטי!

אבל... בשביל להשתמש בגלאי כזה אנחנו צריכים שיתקיים - $\omega_0+\beta f(t)\geq 0$ כלומר $|\beta f(t)|<\omega_0$ או במילים - אנחנו צריכים שהסחת התדר הרגעי לא תהיה גדולה מהתדר של הגל הנושא.

4.5.2 אנקדוטה - שימוש במקלט AM לקליטה של שידור - FM:

נניח אפילו כי למקלט AM שלנו יש BFT גרוע.

מה אפשר לעשות, ניזכר איך BFT נראה, נשים לב שהחלק הראשון שלו נראה בקירוב (יחסית גרוע) כמו נגזרת, כלומר לפעמים נקבל שכאשר אנחנו משתמשים במקלט AM עם BFT מספיק גרוע, נוכל לקבל קליטה רעה (אבל נקבל קליטה כלשהי!) של שידור FM.

4.5.3 מימוש משדר - FM:

מעבירים את האות - $\beta f(t)$ בתוך רכיב הנקרא - VCO - כלומר $Voltage-control-oscilatot$, אשר פחות או יותר עושה את מה שאנחנו רוצים.

4.5.4 כמה אתנחתאות לנושא -

ראשית נרצה לשאול - מה הפאזה של אות ממשי? לדוגמה - $A\cos(\omega_0 t+\phi)$ זה היה קל -

$$A\cos(\omega_0+\phi)=Re\left\{Ae^{i(\omega_0 t+\phi)}\right\}$$

ולכן נוכל למצוא את הפאזה של זה! אבל מצד שני מתקיים גם -

$$A\cos(\omega_0+\phi)=Re\left\{Ae^{i(\omega_0 t+\phi)}+Bi\right\}$$

והפאזה של זה שונה משל הקודם! כלומר הפאזה שלנו לא מוגדרת היטב... בפרט רק בשביל להכליל , לכל פונקציה ממשית נוכל לכתוב -

$$f(t)=Re\left\{\underbrace{f(t)-ig(t)}_{F_a(t)}\right\}$$

כאשר - F_a יקרא **האות האנליטי** של האות הממשי שלנו.

הגדרה 14. כמו כן נגדיר את **פאזור** להיות - $e^{i\phi}$, בפירוק - $e^{i(\omega_0 t+\phi)} = e^{i\phi}e^{i\omega_0 t}$.

אז תכלס אנחנו רוצים להגדיר את האות האנליטי בצורה חד ערכית -

הגדרה 15. נגדיר את **האות האנליטי** - $F_a(t)$, של אות ממשי - $f(t)$ בתור $f(t) - ig(t)$ כאשר מתקיימים:

$$1.\ f(t) = Re\{F_a(t)\}$$
$$2.\ \tilde{F}_a(\omega < 0) = 0$$

אתנחתא שניה! - תדר פוריה, תדר רגעי ו"תדרים" שאנחנו שומעים

נסתכל על הדברים שהגדרנו:

1. רכיב בטרנספורם פורייה - $\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt$ $\Leftarrow$ אין מידע ישיר על "הזמן" שבו התדר מופיע. כלומר כל ה - $e^{i\omega t}$ "מופיעים" באותו הזמן.
2. תדר רגעי - $\omega(t) = \frac{d\phi}{dt}$
3. $\underline{STFT}\cdot$ - זה הדרך שבה אנחנו שומעים - $x_{STFT}(\omega, t) = \int_{t-T}^{t} f(t')\, e^{-i\omega t'}dt'$, כלומר פורייה על חלון זמן קצר.

4.6 יתרונות חסרונות - $AM\ V.S\ FM$

1. FM/PM חסינים לשינוי באמפליטודה, כאשר לאומת זאת AM חסינה לשינוי בפאזה ובתדר.
2. AM הוא אדיטיבי! האם זה יתרון או חיסרון, לא ברור...
3. ב-FM יש תהליך בשם - $FM - capture$, בגדול "החזק מנצח" כלומר התדר שנקלט הוא התדר היותר דומיננטי באות. כלומר בתופעה הזו אנחנו תמיד נשמע תדר אחד, את הדומיננטי ביותר!
4. רוחב סרט של FM עשוי להיות גדול יותר משל AM. אבל הוא גם יהיה חסין יותר להפרעות

5 תקשורת דיגיטלית

מבוא - למה לשדר ביטים?

אז נתחיל בשאלה הטבעית, למה? למה שנרצה לעבור לתקשורת דיגיטלית, אז יש כמה סיבות:

1. המידע הוא מראש דיגיטלי (כמעט כל מה שנרצה לשדר יהיה דיגיטלי).
2. יש לנו אופציה להצפנה .
3. תיקון שגיאות.
4. נאמנות גבוהה בתנאי רעש - $(High-fidelity)$.
5. אפשרות לדחות את המידע.
6. אי-תלות זמנית.
7. לתקשר עם מחשביסטים.

נניח שאנחנו רוצים לשדר רצף ביטים על פני טווח פיזיקלי כלשהו (בסיבים אופטיים, בטווח RF, וכ"ו...) .

בגלל שאנחנו מעל טווח פיזיקלי כלשהו, אוטומטית יש לנו פונקציית תמסורת כלשהי - $H\left(\omega\right)$, כלומר כל אות שהוא צריך לעבור לפונקציה כלשהי בטווח - $f\left(t\right)$ שנרצה שתהיה ממשית.

כלומר לדוגמה:

$$010101101\Rightarrow f\left(t\right)\Rightarrow\left[FT\right]\Rightarrow\tilde{f}\left(t\right)$$

נסמן את האות הבינארי שלנו בתור -

$$x=a_{1}a_{2}a_{3}...a_{N}$$

נשאל מה יהיה האות הפיזיקלי הכי פשוט שיעזור לנו לאפיין אותו, נבחר פונקציה כזו. נקבע קבוע זמן - T_{s} לכל סמל, אזי הפונקציה תהיה -

$$a\left(t\right)=\begin{cases}1 & \left\lfloor \frac{t}{T_{s}}\right\rfloor =n\Rightarrow a_{n}=1\\0 & \left\lfloor \frac{t}{T_{s}}\right\rfloor =n\Rightarrow a_{n}=0\end{cases}$$

עכשיו נרצה למצוא את הפורייה שלו - $\tilde{A}\left(\omega\right)$. נשים לב שהאות הזה הוא תכלס פשוט סכום של $rect$, נכתוב אותו כך -

$$a\left(t\right)=\sum_{n=1}^{N}a_{n}Rect\left(\frac{t-nT_{s}}{T_{s}}\right)=\left[\sum_{n=1}^{N}a_{n}\delta\left(t-nT_{s}\right)\right]*Rect\left(\frac{t}{T_{s}}\right)$$

נעשה לזה טרנספורם פורייה -

$$\tilde{A}\left(\omega\right)=\left[\sum\sin\left(...\right)\right]\cdot sinc\left(\frac{\omega T_{s}}{2}\right)$$

כלומר איל זה יראה גאפית? יהיה לנו את ה$sinc$ הגדול, שבתוכו יש לנו את כל התדירויות שהיה בסכום - בפועל נקבל $sinc$ עם תדר מאוד צפוף בתוכו.

כלומר מכאן נוכל לקבל כי רוחב הסרט **הנדרש** בשביל שידור בחוטים יהיה -

$$\Delta f\approx\frac{1}{T_{s}}$$

ולכן בפרט קצב הביטים המועברים יהיה -

$$C_{bps}=\frac{1}{T_{s}}$$

כלומר נקבל - **רוחב הסרט יהיה (בערך) קצב הביטים.**

איך נוכל לשדר את זה? אז בואו ננסה להכפיל את הייצוג האנלוגי של הביטים שלנו ב - $\cos\left(\omega_{0}t\right)$ כאשר נדרוש - $\omega_{0}>>\frac{1}{T_{s}}$

כלומר -

$$g\left(t\right)=a\left(n\right)\cdot\cos\left(\omega_{0}t\right)$$

ושיטה זו, שהיא מאוד דומה ל-AM, נקראת -

$$BASK=\boldsymbol{B}inary\boldsymbol{A}mplitude\boldsymbol{S}hift\boldsymbol{K}ying$$

כלומר - $BinaryAmplitudeShiftKying$

נסתכל על הרוחב פס הנדרש בשביל להעביר כך מידע -

$$\Delta f_{BASK}=\frac{2}{T_{s}}=2C_{bps}$$

אז בשביל להעביר x ביטים בשניה, נצתרך פי 2 מכך ברוחב הפס שלנו בשביל התקשורת הזו.

זה תכלס סוג של נובע מהחוק - "קצר בזמן - ארוך בתדר" שכן אנחנו רוצים שהביטים שלנו יהיו פולסים קצרים בזמן.

5.1 שיטת תקשורת - $M-ASK$ (כאשר M יכול להיות כל מספר)

אז מה אפשר לעשות? נעשה יותר סוגים של פולסים! במקום לשדר רק 0 או 1, נרצה לאפשר לשדר מספר סוגים של פולסים כאלה - לדוגמה - $4-ASK$.

כאן אנחנו רוצים שכל "פולס" או ביט, יוכל להיות כל אחד מ-4 אפשרויות שונות! כלומר בשביל להעביר את המידה - 0100101011 , אם קודם לכן היינו צריכים להעביר כל ביט בנפרד, עכשיו אנחנו יכולים להעביר את המידע של 2 ביטים בפולס אחד בתקשורת!

$$0100101011 \Rightarrow T_s = T_{s,0} \qquad \underbrace{01}_{1}\underbrace{00}_{0}\underbrace{10}_{2}\underbrace{10}_{2}\underbrace{11}_{3} \Rightarrow T_s = 2T_{s,0}$$

אז נוכל לתאר את כמות הביטים שעוברים בשניה בצורה הבאה -

$$C_{bps}\left(M-ASK\right) = \left(\frac{\Delta f}{2}\right) \cdot \log_2\left(M\right)$$

כאשר - $\left(\frac{\Delta f}{2}\right)$ הוא מספר הסמלים לשניה, ו-$\log_2\left(M\right)$ הוא כמות הביטים המועברת לסמל.

אז לפי הלוגיקה הזו נרצה לחלק לאינסוף רמות! אבל זה לא באמת מה שקורה... כי בחיים האמיתיים יש לנו רעש! ככול שM גדל כך ההבדל בין האותות נהיה לנו קטן יותר, ולכן יהיה יותר קשה להבדיל בין שינוי באותות לבין הרעש שמתווסף אליהם.

איך נתאר את זה - באמצעות $SNR = \boldsymbol{S}ignal\boldsymbol{N}oise\boldsymbol{R}atio$ -

$$SNR = \frac{p_{data}}{p_{noise}}$$

ומסתבר שהונספט הזה קצת יותר רחב מהשיטת שידור שלנו. ויש על זה משפט -

משפט 16. משפט שאנון לכמות מידה - $shanon-information\ capacity$:

המשפט אומר שלכל שיטת שידור ללא שגיאות מתקיים -

$$\boxed{C_{bps} \leq \Delta f \cdot \log_2\left(SNR\right)}$$

5.2 שיטת תקשורת - $BPSK$:

בשיטה זו אחנו משדרים את הדבר הבא -

$$V_{BPSK}\left(t\right) = a\left(t\right)\cos\left(\omega_0 t\right) + \left(1-a\left(t\right)\right)\cos\left(\omega_0 t + \pi\right)$$

מה זה אומר? נסתכל על מה הוא משדר לכל ערך של - $a\left(t\right)$ = האות שלנו -

1. כאשר - $a\left(t\right) = 1$: אנחנו משדרים אות קוסינוסי רגיל.

2. כאשר - $a(t)=0$: אנחנו משדרים קוסינוס בפאזה גדולה ב-π.

למה זה טוב? אז בגדול זה מאפשר לנו לקלוט אות מבלי שהמקלט נכבה ומופעל כל פעם.

אבל משהו כאן מרגיש מוזר... ננסה לפתח מעט את הביטוי -

$$V_{BPSK}(t)=a(t)\cos(\omega_0 t)+(1-a(t))\cos(\omega_0 t+\pi)=$$

$$=a(t)\cos(\omega_0 t)+(1-a(t))(-\cos(\omega_0 t))=(1+2a(t))\cos(\omega_0 t)$$

כלומר זה בעצם איפנון - $BASK$ באמפליטודה שנעה בין - $1-$ ל-1.

ושוב, כמו פעם קודמת, נרצה להעביר יותר ביטים לכל פולס כזה ובאותו רוחב סרט - לזה קוראים -

5.3 שיטת תקשורת - $M-PSK$ (כאשר M מספר כלשהו):

אז כמו קודם אנחנו פשוט רוצים להעביר כמה סוגי פולסים שונים וכך להעביר יותר מידע בכל פולס . נסתכל לדוגמה על - $4-PSK$.

האותות שלנו יהיו -

$$\begin{aligned}
"00" &= 0 \Rightarrow \cos(\omega_0 t)\\
"01" &= 1 \Rightarrow \cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)\\
"10" &= 2 \Rightarrow \cos(\omega_0 t+\pi)\\
"11" &= 3 \Rightarrow \cos\left(\omega_0 t+\frac{3}{2}\pi\right)
\end{aligned}$$

וכאן -

$$C_{bps}(4-PSK)=2\cdot\frac{\Delta f}{2}=\Delta f$$

ובאופן כללי -

$$C_{bps}(M-PSK)=\frac{\Delta f}{2}\cdot\log_2(M)$$

5.4 איפנוני - QAM ו- $constalation-diagram$:

נסתכל על כל השיטות האלה שעשינו, תכלס כולם מאפננים לי את האות דרך איפנוני פאזה ואמפליטודה.

נשדר את האות הכללי -

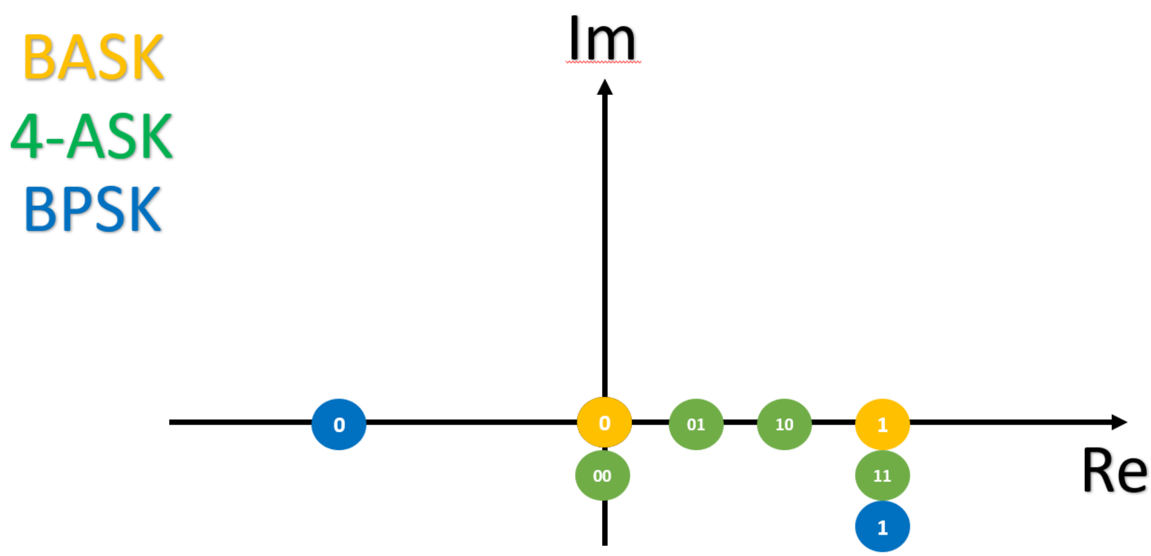
$$V(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \phi(t)) = Re\left\{A(t)\, e^{i\omega_0 t} e^{i\phi(t)}\right\}$$

כלומר נוכל לכתוב אותו בצורה הבאה -

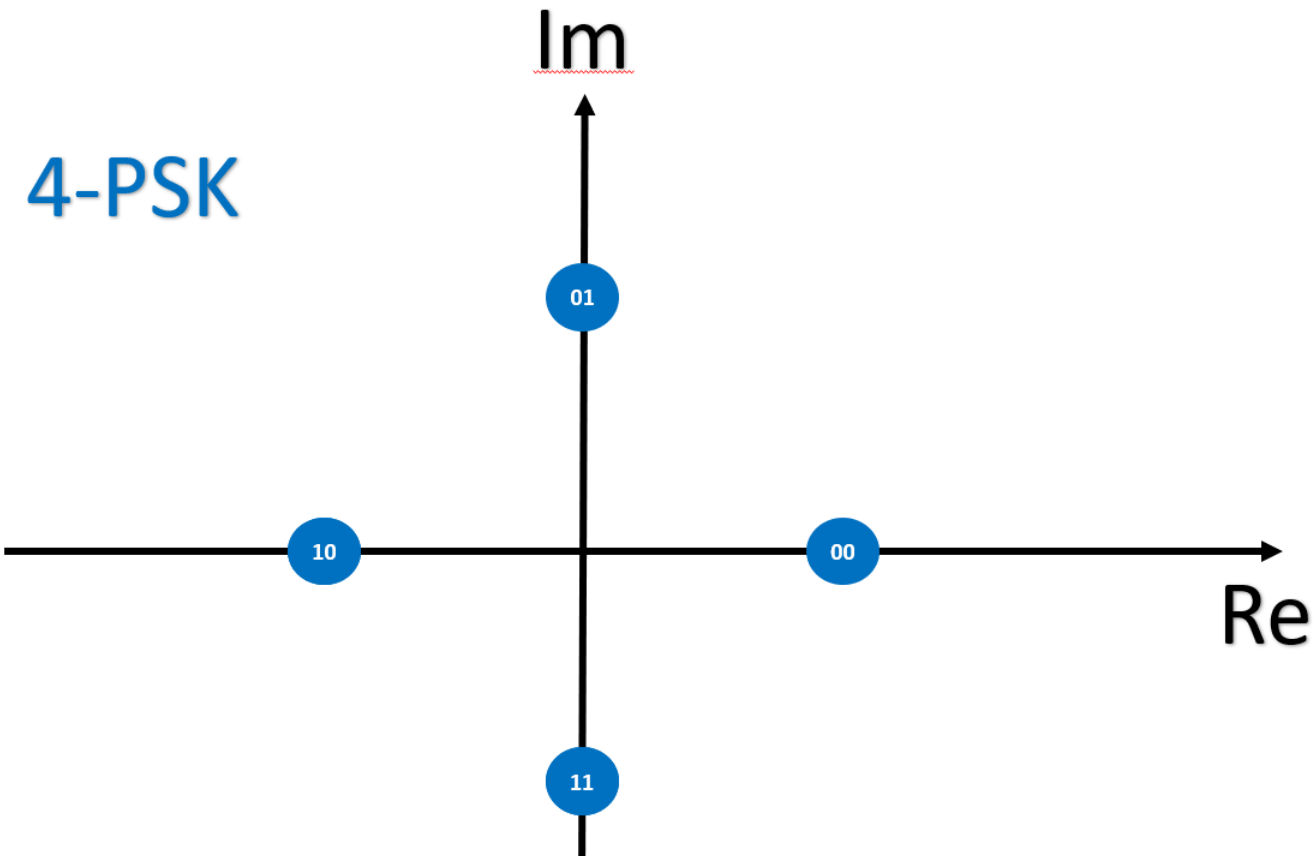
$$E(t) = A(t)\, e^{i\phi(t)} = I(t) + iQ(t)$$

נשים לב שאמפליטודה ופאזה מביאות לי ביחד נקודה במישר המרוכבים, כלומר אנחנו יכולים לשרטט את השיטות איפנון על המישור המרוכב. לזה קוראים - $constalation - diagram$:

נשרטט את כל השיטות איפנון שלמדנו -



או לדוגמה בעבור איפנוני פאזה -



5.5 מקלט לכל אפנון - QAM

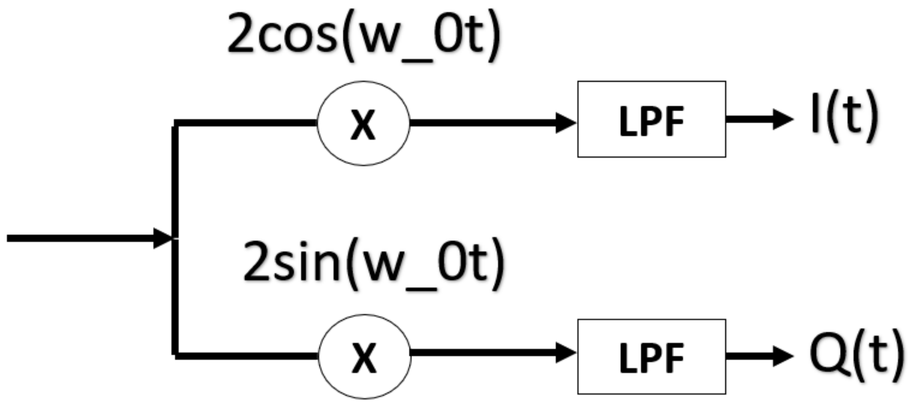
אז מה זה אומר שבכל רגע משודר לי קוסינוס עם אמפליטודה ופאזה? אז נסתכל על הזהות הבאה -

$$\cos\left(x+y\right)=\cos\left(x\right)\cos\left(y\right)+\sin\left(x\right)\sin\left(y\right)$$

כלומר נוכל לכתוב את האות המועבר בצורה הבאה -

$$V\left(t\right)=Re\left\{ \left(I\left(t\right)+iQ\left(t\right)\right)e^{i\omega_{0}t}\right\} =I\left(t\right)\cos\left(\omega_{0}t\right)-Q\left(t\right)\sin\left(\omega_{0}t\right)$$

כלומר אנחנו יכולים לקלוט כל חלק כזה בנפרד ולקבל את האות שלנו!



<u>ננתח מתמטית:</u>

$$V(t) = I(t)\cos(\omega_0 t) - Q(t)\sin(\omega_0 t)$$

אזי התדר הראשון -

$$V_1(t) = V(t)\cdot\cos(\omega_0 t) = I(t)\underbrace{2\cos^2(\omega_0 t)}_{=1-\cos(2\omega_0 t)} - Q(t)\underbrace{\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)}_{=\sin(2\omega_0 t)} =$$

$$= I(t)\left[1-\cos(2\omega_0 t)\right] - Q(t)\left[\sin(2\omega_0 t)\right]$$

נסתכל על הפוריה שלו -

$$\tilde{V}_1(\omega) = \tilde{I}(\omega) * \left[\delta(\omega) + \delta(\omega \pm 2\omega_0)\right] - \tilde{Q}(\omega) * \left[i\delta(\omega \pm 2\omega_0)\right]$$

כלומר - LPF מתאים יעיף לנו את האיברים - $\delta(\omega \pm 2\omega_0)$, ולכן נישאר עם -

$$LPF\left[V_1(t)\right] = I(t)$$

ואכן קיבלנו את מה שרצינו!

תכלס יש לנו 2 מקלטים שונים אשר מאחדים את הקלט שלהם בשביל לקבל את האות השלם. ובכך אנחנו יכולים לקלוט כל תקשורת דיגיטלית אשר משתמשת בפאזה ואמפליטודה.

5.6 סיכום פרק קצר - תכלס בגדול מה ראינו כאן:

אז בגדול רצינו לשדר ביטים במקום פשוט איפנונים של תדרים מסויימים. וראינו מספר שיטות לכך -

1. $BASK$ - השיטה הכי ראש בקיר, "1" = משדרים אות , ו-"0" = לא משדרים אות.

2. $M-ASK$ - נבעה מכך שראינו שיש לנו רוחב פס מאוד גדול בשביל לשדר את האות, והשיטה הזו אומרת שנשדר M רמות של אותו כדי לייצג - M ערכים שונים.

   כאן הרוחב של כל אות גם כן גדל פי - $\log(M)$, אבל בסך הכל באמת הצלחנו להעביר יותר מידע.

   אז למה לא לקחת - $M=\infty$? שכן בשלב מסויים הרעש נהיה יותר גדול מההבדלים בין האותות. ולכן הגודל של - M נקבע על פי היחס אות רעש, או-SNR.

3. $BPSK$ - כאן , כמו בשיטה הראשונה אנחנו משדרים פשוט אותות שונים בעבור 0 ו-1 , אבל השינוי גישה הוא במקום לשחק אם העוצמות, אנחנו משחקים עם הפאזה שלהם בשביל להבדיל בין אותות שונים.

4. $M-PSK$ - שוב, אמרנו "אז למה שלא נוסיף שוב עוד אותות?" ועשינו את זה! במקום לאפיין אותות בינארים על ידי הפאזה בשידור, נתנו - M אותות שונים כאשר בכל אחד מהם שידרנו פאזה שונה.

לסיום קראנו לכל השיטות הללו - QAM, שהן שיטות איפנון באמצעות אמפליטודה ופאזה, וראינו איך לממש מקלט אשר יכול לקלוט את כולם!

6 דיגיטציה - $Digitization$

עד כה ראינו איך לשדר אותות אנלוגים ואותות דיגיטלים, אבל בסוף איך אותות דיגיטלים נולדים? איך ממידע אנלוגי אנחנו יודעים לקבל בסוף מידע דיגיטלי?

המטרה בפרק זה היא להפוך אות אנלוגי - $V(t)$ כלשהו לרצף ביטים.

אז הדבר הראשון שחושבים עליו הוא לדגום את אות האנלוגי. מה הקטע? שנוכיח עכשיו שעם דגימה מתאימה נוכל לשחזר את האות האנלוגי בצורה מושלמת.

6.1 משפט הדגימה של שאנון-נייקווסט

ראשית **ננסח את המשפט**:

יהי אות - $V(t)$, הוא יהיה ניתן לשיחזור במדויק מתוך דגימותיו - $V_n = V(n\cdot\Delta t)$, (כלומר במקרה הזה תדר הדגימה יהיה - $f_s = \frac{1}{\Delta t}$) אם התנאים הבאים מתקיימים:

1. $\tilde{V}(|f| - f_{max}) = 0$ - כלומר התדר המקסימלי ב - FT של - $V(t)$ הוא - f_{max}. (תכלס האות מוגבל רוחב סרט).
2. $f_s > 2f_{max}$ - כלומר תדר הדגימה > מפעמיים התדר המקסימלי באות.

במקרה הנ"ל, האות - $V(t)$ מוגדר מתוך דגימותיו על ידי -

$$V(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \cdot \underbrace{\frac{\sin(\pi f_s(t - n\Delta t))}{\pi f_s(t - n\Delta t)}}_{=sinc(\pi f_s(t-n\Delta t))}$$

ועכשיו **נוכיח אותו:**

נחזור בזריזות על הנתונים - אנחנו יודעים את תדר הדגימה - $f_s = \frac{1}{\Delta t}$, וגם את התדר המקסימלי באות - f_{max}.

עכשיו הייצוג של הדגימה לאות יהיה תכלס - $V_s(t) = V(t)\cdot comb\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$ והוא מכיל רק את המידע של האות הדגום. בנוסף מתקיים - $V_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V(t)\,\delta(n - n\Delta t)$.

נעשה פורייה לאות שלנו -

$$\tilde{V_s}(\omega) = \tilde{V}(\omega) * comb\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)$$

נחלק את הכל ב-2π כדי לעבור מ-ω לשפה של - f (לא באמת מהותי לכלום, אורי קץ עשה אז אני כותב):

$$\tilde{V_s}(f) = \tilde{V}(f) * comb\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

עכשיו נחזוב איך הגרף של זה יראה - אנחנו נקבל שיש לנו את האות - $\tilde{V}(f)$ מסביב לכל מוקד של ה-$comb$. כלומר נקבל סדרה של $\tilde{V}(f)$ לאורך הישר אינסוף פעמים, במרווחים של תדירויות הדגימה.

כלומר מה נעשה כדי לקבל את האות המקורי? נרצה להוריד את החזרות = נבצע -LPF! אז פתרנו לא? אז לא לגמרי... יש עוד דרישות כדי שנוכל לעשות זאת.

בכדי שנוכל לעשות - LPF ולקבל רק את האות שלנו אנחנו רוצים שיתקיים - $f_s > 2f_{max}$, או במילים אחרות, שלא תהיה חפיפה בין החזרות על $\tilde{V}\left(f\right)$ בישר.

אז בהנתן התנאי מתקיים -

$$\tilde{V}\left(t\right)=\tilde{V}_s\left(f\right)\cdot Rect\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

נעשה פוריה הפוך -

$$V\left(t\right)=V_s\left(t\right)*sinc\left(\pi f_s t\right)$$

נכתוב אותו במפורש (יענו נציב את $V_s\left(t\right)$) -

$$V\left(t\right)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{V\left(t\right)\delta\left(n-n\Delta t\right)}_{=V\left(n\Delta t\right)=V_n}\right]*sinc\left(\pi f_s t\right)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}V_n\cdot sinc\left(\pi f_s\left(n-n\Delta t\right)\right)$$

ומשל!

שיעור שלא השלמתי אבל לא כזה נורא

7 רעשים

אז נתחיל בשלאול - מה זה רעש?

אז בגדול רעש הוא אוסף תהליכים מקריים אשר מתווספים לנו לערך של הפונקציה. כלומר אנחנו רוצים למצוא דרך לבטל את התוסף הזה של הרעש, ובפרט לדעת לאפיין אתו.

אבחנה חשובה - רעש $\neq$ הפרעה!

נסתכל על דוגמה חמודה שממחישה את זה - "אוזניות מבטלות רעשים":

אז בגדול מה הן עושות? האוזניות שלנו יודעות בדיוק מה אנחנו רוצים לשמוע, כי זה מה שהן משדרות.

אז מה הן עושות - יש לנו מיקרופון קטן קרוב לרמקול שעל האוזניים שלנו שקולט - $p_{mic}\left(t\right)$.

עכשיו אנחנו יודעים בגדול להגיד כי התהליך שהקול עובר בין המיקרופון לאוזן שלנו הוא LTI, ואנחנו יכולים למדוד במעבדה שמייצרים בה את האוזניות איך הקול עובר דרך האוזיות - ואז יש לנו את התגובה להלם - $h\left(t\right)$.

כלומר דרך האוזניות מתקבל האות -

$$n\left(t\right)=p_{mic}\left(t\right)*h\left(t\right)$$

ועכשיו אנחנו יכולים פשוט להחסיר את זה מהאות הרצוי שלנו, ולשדר -

$$p_{transmit}\left(t\right)=p_{sound}\left(t\right)+n\left(t\right)-p_{mic}\left(t\right)*h\left(t\right)\approx p_{sound}\left(t\right)$$

הגדרה 17. נגדיר **תהליך אקראי** - להיות אוסף כלשהו של משתנים מקריים

עכשיו נחשוב מה כל הדברים שאנחנו רוצים לדעת לאפיין בשביל לדעת לאפיין את התהליך -

1. איפיון כל משתנה מקרי - $x_i\left(t\right)$ בכל זמן לכשלעצמו - $p_{x_i}\left(x\right)$
2. הקשר בין המשתנים המקריים השונים - הקורלציה בין x_i ל-x_j.

אז איפיון תהליך אקראי בזמן יחיד (שזה בדיוק משתני אקראי):

את זה אנחנו יכולי לאפיין באמצעות פונקציית ההסתברות שלו - נסתכל על כל המצבים האפשריים של - x. ידוע כי מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty}p_x\left(x\right)dx=1$$

וגם מתקיים -

$$p_x\left(x>x_t\right)=\int_{x_t}^{\infty}p_x\left(x\right)dx$$

ועכשיו נסתכל על איפיון של - $p_x\left(x\right)$:

אז את זה אפשר לאפיין באמצעות סטיית התקן - $\sigma_x=\sqrt{\left\langle x^2\right\rangle}$.

נוכל לחשב -

$$\mu_x=E\left(x\right)=\left\langle x\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}xp_x\left(x\right)dx$$

אזי -

$$\sigma_x^2=\left\langle\left(x-\left\langle x\right\rangle\right)^2\right\rangle$$

7.1 חיבור רעשים -

אזי נתון לנו שני רעשים - $\langle V_1\rangle = 0$, $\langle V_2\rangle = 0$. נסתכל על הרעש -

$$V = (V_1 + V_2)(t)$$

נחשב את ההספר של הרעש הכולל -

$$P_V = \left\langle \frac{V^2}{R} \right\rangle = \left\langle \frac{(V_1+V_2)^2}{R} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{R}\left\langle V_1^2 + V_1V_2 + V_2^2 \right\rangle = \frac{\left\langle V_1^2\right\rangle}{R} + \frac{\left\langle V_2^2\right\rangle}{R} + \underbrace{\frac{2}{R}\left\langle V_1V_2\right\rangle}_{=\left\langle \left(V_1-\underbrace{\langle V_1\rangle}_{=0}\right)\cdot\left(V_2-\underbrace{\langle V_2\rangle}_{=0}\right)\right\rangle} =$$

$$= P_{V_1} + P_{V_2} + cov\,(V_1, V_2)$$

כלומר קיבלנו מסקנה מגניבה -

מסקנה 18. ההספק הממוצע של סכום רעשים (אותות) כלשהם, יהיה סכום ההספקים של האותות $\Leftarrow\Rightarrow$ הם חסרי קורלציה ($cov\,(X,Y) = 0$).

כלומר בצורה מתמטית - בעבור אותות חסרי קורלציה עם תוכלת - 0 מתקיים : $\left\langle V_{1+2}^2\right\rangle = \left\langle V_1^2\right\rangle + \left\langle V_2^2\right\rangle$ וגם - $\sigma_{1+2}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

7.1.1 דוגמה - שגיאות במעבדה

אז נתון לנו כי מדדנו 2 מדידות במעבדה של גודל פיזיקלי כלשהו - x_1, x_2. כלומר שתיהן בהחרך בעלות אותו המשתנה המקרי המתאר אותן.
כלומר בהחרך מתקיים -

$$\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2 = \sigma^2 \qquad\qquad \langle x_1\rangle = \langle x_2\rangle = \mu$$

נניח ואנחנו לוקחים את הסכום של שתי המדידות הללו - $x = x_1 + x_2$
אזי בסוף נקבל -

$$\langle x\rangle = \langle x_1\rangle + \langle x_2\rangle = 2\mu$$

ובגלל שאנחנו יכולים להניח שהמדידות חסרות קורלציה נקבל -

$$\sigma_x=\sqrt{\sigma_x^2}=\sqrt{\sigma^2+\sigma^2}=\sqrt{2}\sigma$$

אז מה קיבלנו? קיבלנו כי התוכלת גדלה פי 2, אך ה"שגיאה" או סטיית התקן גדלה רק פי - $\sqrt{2}$! כלומר אם נסתכל על **השגיאה היחסית** - $\varepsilon=\frac{\sigma_x}{\langle x\rangle}$ מתקיים שבעבור n מדידות -

$$\varepsilon_{n,x}=\frac{\sigma_{n,x}}{\langle x_n\rangle}=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sigma_x}{\langle x\rangle}$$

כלומר השגיאה היחסית שלנו קטנה עם מספר המדידות! ולכן במעבדה אנחנו ממצעים מדידות!

7.2 הקשר בין זמנים שונים

אז נסתכל עכשיו על הקשר בין זמנים שונים של אותם המאורעות המקריים.

דבר ראשון שאנחנו יודעים הוא **המיצוע המלא** שלהם: $p_x\left\{x_1,x_2,...;t_1,t_2,...\right\}$ אבל זה לא כל כך שימושי וזה קשה מאוד לאפיין

אז בשביל לפשט קצת את המודל נעשה שני הנחות פיזיקליות:

1. סטציונריות:

$$p_x\left(x_1,x_2,...,x_N;t_1,t_2,...,t_N\right)=p_x\left(x_1,x_2,...,x_N;t_1+\tau,t_2+\tau,...,t_N+\tau\right)$$

כלומר הזזה קבועה בזמן לא משתנה את ההתפלגות של המשתנים המקריים שלי

2. ארגודיות:

תהליך אקראי שלנו הוא תהליך שבו ניתן לקבל על מידע סטטיסטי (התפלגות בממוצע) או על ידי ביצוע $N\Rightarrow\infty$ ניסויים, או על ידי ביצוע ניסוי יחיד בזמן ארוך מספיק - $T_{expirement}\Rightarrow\infty$.

בהנחת שני אלו (שתכלס ארגודיות גורר סטציונריות) אנחנו מקבלים את הקשר בין - ממוצע הניסויים לבין ממוצע זמני בניסוי בודד

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty}F\left[x_n\left(t\right)\right]=\lim_{T\Rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}F\left[x_k\left(t\right)\right]dt$$

נגדיר כעת דבר נוסף -

הגדרה 19. נגדיר **אוטוקורלציה** להיות -

$$R_x\left(t_1,t_2\right)=\left\langle x\left(t_1\right)x^*\left(t_2\right)\right\rangle$$

עכשיו בהנחה של סטציונריות אנחנו יכולים לכתוב את האוטוקורלציה בצורה קצת רונה שמאוד תעזור לנו -

$$R_x\left(t_1,t_2\right)=\left\langle x\left(t_1\right)x^*\left(t_2\right)\right\rangle=$$

$$=\left\langle x\left(t_1\right)x^*\left(t_1+\underbrace{\left(t_2-t_1\right)}_{=\tau}\right)\right\rangle=$$

ועכשיו בגלל סטציונריות -

$$=\left\langle x\left(t\right)x^*\left(t+\tau\right)\right\rangle=R_x\left(\tau\right)$$

כלומר קיבלנו כי זה תלוי רק בהפרשי הזמנים! ולכן נקבל -

$$\boxed{R_x\left(\tau\right)=\left\langle x\left(t\right)x^*\left(t+\tau\right)\right\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}x\left(t\right)x^*\left(t+\tau\right)dt}$$

שזה גם נראה מאוד דומה לקונבולוציה .

7.2.1 כמה תכונות חשובות

1. הספק:

$$R_x\left(0\right)=\left\langle x\left(t\right)x\left(t\right)\right\rangle=\left\langle x^2\left(t\right)\right\rangle\overset{\langle x\rangle=0}{=}\sigma_x\propto P$$

וגם מתקבל - $R_x\left(0\right)\geq R_x\left(t\right)$

2. סימטריות:

$$R_x\left(-\tau\right)=\left\langle x^*\left(t\right)x\left(t+\tau\right)\right\rangle=R_x^*\left(\tau\right)=R_x\left(\tau\right)$$

והמעבר האחרון מתקיים כי האות ממשי.

7.3 משפט ווינר קינצ'ין

אז ניזכר כי האוטוקורלציה שקיבלנו מאוד דומה לנו לקונבולוציה -

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T}x(t')\,x(t'+\tau)\,dt'$$

אבל צריך לזכור כי זה האוטורוקלציה שחשישבנו בעבור **אותות להספק**!

האוטוקורלציה בעבור **אותות לאנרגיה** יהיה -

$$R_{x,Energy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\int\limits_{-T}^{T}x(t')\,x(t'+\tau)\,dt'$$

ונשים לב שאנחנו יכוליים לכתוב את זה באמת בשפה של קונבולוציה! נחשב -

$$x(t)*x(-t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t')\,x(t'-t)\,dt=R_x(-t)=R_x(t)$$

ולכן יש לנו סימון מיוחד לקונבולוציה הזו!

סימון: נסמן -

$$x(t)*x(-t)=x(t)\star x(t)=R_x(t)$$

ועכשיו נעשה לזה פורייה!

$$FT[R_x(t)]=\tilde{x}(\omega)\,\tilde{x}(-\omega)=$$

ואם האות - $x(t)$ ממשי מתקיים גם -

$$=\tilde{x}(\omega)\,\tilde{x}^*(\omega)=|\tilde{x}(\omega)|^2$$

אזי מה קיבלנו? ננסח את זה יפה -

משפט 20. משפט ווינר-קינצ'ין:

התמרת הפוריה של האוטוקורלציה של אות אקראי ממשי מביא לנו את "ספקטרום הרעש" שהוא צפיפות ההספק\האנרגיה הספקטרלית

$$FT[R_x(t)]=|\tilde{x}(\omega)|^2$$

לדבר הזה יש שם -

הגדרה 21. נגדיר את *power spectral density* של משתנה מקרי- $x(t)$ להיות - $|\tilde{x}(\omega)|^2$.

נשאל עכשיו -

7.4 כמה רעש "נכנס" למערכת שלנו?

חישוב הספק רעש מתוך - PSD "ספקטרום הרעש" הנתון להיות - $S_x(f)$.

אנחנו יכולים לחשב את הספק הרעש בתחום תדרים - f_{min}, f_{max} -

$$P_{x_0,x}(f_{min}, f_{max}) = \int_{f_{min}}^{f_{max}} S_x(f)\, df = \int_{f_{min}}^{f_{max}} |H(f)|^2 S_x(f)\, df$$

והאמת שלא הבנתי מה הולך כאן ממש, אז נשאיר את זה ככה, כי זה מה שהיה כתוב על הלוח

7.4.1 דוגמה - רעש לבן

נשאל מה ההספק של רעש לבן בתחום התדרים - $f_0 \pm \frac{\Delta f}{2}$?

רעש לבן אומר לנו כי מתקיים - $S_x(f) = S_0$, בעבור - S_0 כלשהו. נכתוב את שרשרת ההסקות שלנו -

רעש לבן $\Longleftrightarrow$ PSD אחיד $\Longleftrightarrow$ מתכנונתי לינארי לאורך הסרט $\Leftarrow$ $P_{\Delta f} = S_0 \cdot \Delta f$

הגדרה 22. נגדיר את יחידות שמשתמשים בהם לרוב אנשי תקשורת - *dBm* להיות -

$$dBm = 10\log_{10}\left(\frac{P_s}{1\,[mWatt]}\right)$$

7.5 מקורות רעש במערכות פיזיקליות

אז יש לנו 2 מקורות רעש בכל מערכת פיזיקלית -

1. **רעש תרמי** (ג'יוסון נייקווסט):

   אז נסתכל על נגד אשר אשר יושב בטמפרטורה - $T\,[K]$ (בקלווין).

   אז אפשר לקבל אנרגיה קינטית מהטמפרטורה הזו (של כל חלקיק) - $k_B \cdot T$, כאשר - $k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \left[\frac{J}{K}\right]$.

   מכך אנחנו יכולים לקבל את המהירות של כל חלקיק הנושא מטען (אלקטרונים)

   ומכך אנחנו יכולים לקבל זרם בנגד שממנו אפשר גם לקבל את המתח (המומוצעים לאורך הנגד) - $\left\langle I_n^2 \right\rangle = \left\langle \frac{V_n^2}{R} \right\rangle$, אזי מתקיים - $\left\langle V_n^2 \right\rangle = 4Rk_BT \cdot \Delta f$

   עכשיו אפשר לחשב את ההספק המומוצע של המתח בנגד -

$$\boxed{P_{johnson} = \frac{\left\langle V_n^2 \right\rangle}{R} = 4k_BT\Delta f}$$

ואפשר לראות שזה מתנהג כמו "רעש לבן". וזה יהיה הספק הרעש הנובע מתופעות תרמיות, שיופיע לנו ברכיב מסויים עם התנגדות.

ועוד משהו שאולי שווה לציין, זה נכון רק בעבור - $f \leq 10^{13}\,[Hz]$, כלומר זה באמת תופעה של תנועות מאוד קטנות (כלומר תדירויות גבוהות מאוד) של חלקיקים.

2. **רעש -** $\underline{Shot}$:

זה רעש הנובע מקוונטיזציה\דיסקרטיזציה של נושאי המטען (אלקטרונים).

ניקח לדוגמה זרם - "קבוע" , אזי אנחנו מצפים שהגרף שלו יהיה קו ישר לאורך הזמן, אבל אם נעשה $zoom-in$ מאוד גדול נראה שיש לנו איזה קפיצות שרוכבן למשך זמן השואף ל-0 ולכן הזרם ה"קבוע" שלנו הוא תכלס מסרק מאוד צפוף.

נחזור רגע צעד אחורה... הזרם שלנו מוגדר ככמות האלקטרונים העוברים בשטח חתך מסויים, וזה גודל שעבר בפרט קוונטיזציה. אזי נסמן את ה"תאים" האלזה בזמן, שאנחנו בודקים אם יש אלקטרון בחתך שלנו בזמן זה או לא, בתור - $\rho\left(n\right)$. אנחנו יודעים שיש הסתברות מסויימת - p שיש לנו אלקטרון שם, אבל אנחנו יודעים מה היא! שכן אנחנו יודעיפ את כמות האלקטרונים במומוצע בתא שטח בעבור רגע זמן השואף ל-0 .

לכן אנחנו יודעים כי מתקיים -

$$\rho\left(n\right)=\begin{cases} 0 & 1-\frac{I_0}{e}\cdot\Delta t\\ 1 & \frac{I_0}{e}\cdot\Delta t \end{cases}$$

כלומר בסך הכל אם נסמן את זמן המדידה - T ולסמן - $N=\frac{T}{\Delta t}$, אנחנו יכולים לחשב את הסיכוי שיעברו n אלקטרונים שם בפרק זמן זה -

$$p_T\left(m\right)=\left(\begin{array}{c} N\\ m \end{array}\right)p^m\left(1-p\right)^{N-m}$$

ומכאן אפשר לקבל גם את שונות הזרם -

$$\sigma_I^2=2eI_0\cdot\Delta f=2e\underbrace{I_{RMS}}_{\sqrt{\left\langle I^2(t)\right\rangle}}\cdot\Delta f$$

ומכאן אפשר לחשב את הספק הרעש של תופעה זו -

$$\boxed{P_{shot}=\left\langle RI^2\right\rangle=R\sigma_I^2=2eRI_{RMS}\Delta f}$$

שגם זה מתנהג כמו "רעש לבן", ורק בשביל להזכיר, זה הרעש הנובע מקוונטיזציה של נושאי מטען (זרם).

אז מה עוד יהיה מעניין לחשב? כמובן את ה - SNR במעבר זרם עם הרעשים הללו! נחשב -

$$SNR_{shot}=\frac{P_{signal}}{P_{noise}}=\frac{RI_{RMS}^2}{2eRI_{RMS}\Delta f}$$

$$\boxed{SNR_{shot} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{RMS}}{e}\right)\frac{1}{\Delta f}}$$

7.6 תרגיל מסכם לפרק - (קלאסי סעיף ב' לשאלה 2 במבחן)

נשאל מהו יחס האות לרעש - SNR המקסימלי הפיזיקלי במקלט $wifi$, הנמצא בטמפרטורת החדר ($300\,[K]$). הוא מכוון לקליטת תדרים סביב גל נושא - $f_0 = 900\,[MHz]$, ברוחב סרט - $\Delta f = B = 54\,[MHz]$.

הספק האות הנקלט - $P = -70dBm$, אשר נמדד על ידי נגד - $R = 70\Omega$, ו-$P_s = 10^{-10}\,[Watt]$.

__פתרון:__

נחשב -

$$SNR = \frac{P_s}{P_n}$$

עכשיו אנחנו מניחים שהרעש התרמי והרעש - $shot$ חסרי קורלציה, ולכן ההספק של הסכום שלהם הוא סכום ההספקים. ולכן -

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} = \frac{10^{-10}\,[Watt]}{P_{shot} + P_{johnson}}$$

נחשב -

$$P_{johnson} = 4 \cdot \underbrace{1.38}_{\left[\frac{J}{K}\right]} \cdot 10^{-23} \cdot \underbrace{300}_{[K]} \cdot \underbrace{54 \cdot 10^6}_{[Hz]} = 2.2 \cdot 10^{-13}\,[Watt]$$

$$P_{shot} = 2 \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19}\right) \cdot \underbrace{70}_{[\Omega]} \cdot \underbrace{54 \cdot 10^6}_{[Hz]} \cdot I_{RMS}$$

וכל שנשאר הוא למצוא את - I_{RMS}, אז איך נעשה את זה? אנחנו יודעים כי $I_{RMS} = \sqrt{\langle I^2(t) \rangle}$ או במילים אחרות הוא הזרם הממוצע.

כלומר אפשר לחשבו על ידי ההספק הממוצע חלקי ההנגדות - $I_{RMS} = \sqrt{\frac{P_s}{R}} = \sqrt{\frac{10^{-10}}{70}}$. נציב -

$$P_{shot} = 1.4 \cdot 10^{-15}\,[Watt]$$

כלומר סה"כ קיבלנו - $SNR \approx 500$ ולכן בדציבלים -

$$SNR_{dB} \approx 10\log_{10}(500) \approx 27dB$$

וכאן סיימנו את השאלה!

7.7 סיכום קצר - מה עשינו עד כה...

1. **הגדרת רעש:** אז התחלנו את הפרק בלנסות לתאר **מה זה רעש**, ונכנסנו להמון שטויות של הסתברות - משתנים מקריים, התפלגויות, תוכלת וסטיות תקן (וכו וכו...).

2. **הספק רעשים:** אחרי שהבנו מה זה רעש, הסתכלנו על הספק של רעש ברכיבים אלקטרונים, וראינו כי אם שני **רעשים הם חסרי קורלציה** $(cov(x,y)=0) \Longleftrightarrow$ אזי **ההספק של סכומם הוא סכום ההספקים שלהם**.
זה הראה לנו דוגמה מגניבה - אם עושים הרבה ניסויים חסרי קורלציה במעבדה מקבלים שסטיית התקן של הממוצע קטנה לאורך כמות הניסויים.

3. **אוטוקורלציה:** הגדרנו משהו חשוב בשם - **אוטוקורלציה**, אשר אומר כמה יש התאמה של האות עם עצמו בזמנים קודמים.

4. **משפט ווינר קינצ'ין:** ראינו את **משפט ווינר קינצ'ין** - אשר אומר שהפוריה של האוטוקורציה של אות אקראי שווה לספקטרום הרעש שלו שמוגדר להיות - $|\tilde{x}(\omega)|^2$.

5. **מקורות רעש:** ראינו 2 מקורות רעש במערכות פיזיקליות :

   (א) **רעש תרמי** - הנובע מהמהירות של החלקיקים נושאי המטען הנעים במוליך עם התנגדות , כלומר הם יוצרים הספק אקראי $\Leftarrow$ רעש!
   ראינו כי הספק הרעש הזה הוא - $P_{johnson} = 4k_BT\Delta f$.

   (ב) **רעש** $shot$ - אשר נובע מכך שזרם הוא תכלס אפקט בדיד של כמות אלקטרונים בחתך מסויים, שעבר קוונטיזציה.
   ראינו כי הספק הרעש הזה הוא - $P_{shot} = R\sigma_I^2 = 2eRI_{RMS}\Delta f$.
   ראינו כי ה-SNR של אפקט זה הוא - $SNR_{shot} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{RMS}}{e}\right)\frac{1}{\Delta f}$.

7.8 סינון וגילוי אופטימלים פשוטים בנוכחות של רעש

אז אנחנו רוצים לבנות מערכת אשר נכנס האות הרצוי שלנו - $S(t)$ ורעש מסויים - $n(t)$, והיא תדע להוציא לנו את האות שלנו.

בנוסף נרצה כי המערכת שלנו תהיה - LTI, שנסמן את התגובה להלם ופונקציית התמסורת שלה - $H(\omega)$ ו$h(t)$ בהתאמה.

עכשיו נרצה לשאול איך נבחר את ה-LTI שלנו בצורה "אופטימלית".

אבל זה לא נגמר כאן!

לאחר מכל נרצה להכניס את האות הזה לאיזה מערכת שתחליט אם האות הוא - 1 או - 0. כלומר במילים אחרות אנחנו **רוצים לעשות את 3 השלבים הבאים**:

1. קליטה של אות רועש (כבר ראינו איך עושים)

2. סינון "אופטימלי" של רעש (משימה ראשונה - בחירה של מסנן אופטימלי)

3. החלטה אם האות הנקלט הוא - 0 או - 1 (משימה שניה - מערכת החלטה אופטימלית)

7.8.1 סינון אופטימלי בנוכחות רעש

בהנתן אות ידוע - $S(t)$, ורעש בעל צפיפות הספק ידועה. כלומר אנחנו יודעים כי - $S_n(\omega) = \left|\tilde{N}(\omega)\right|^2$. אז איזה מסנן - $H(\omega)$ נרצה לבחור?
נסמן - $S_{signal}(\omega) = \left|\tilde{S}(\omega)\right|^2$. הפילטר שלנו מביא לנו בסוף -

$$\tilde{V}_1(\omega) = H(\omega)\left[\underbrace{\tilde{S}(\omega)}_{signal-spectrum} + \underbrace{\tilde{N}(\omega)}_{noise-spectrum}\right]$$

אז נסתכל על כמה מקרים פשוטים -

1. אם $S_n(\omega)$ מתאפיין בתדירויות שונות מהותית מהתדירויות של האות שלנו (לדוגמה רעש בתדר נמוך מהותית מהאות) , אז זה קל פשוט להרכיב BPF סביב האות, ואפשר לבחור מסנן - $H(\omega)$ מתאים.
2. אם $S_n(\omega)$ הוא איזה צורה לא ברורה במרחב התדר, אז (לא נראה למה...) אנחנו כנראה נרצה לבחור - $H(\omega)$ הפרופרציאונלי ל - SNR וזה נקרא **מסנן** $wiener$.

7.8.2 מסנן ווינר - $weiner$

נחזור שניה אחורה לתהליך שאנחנו רוצים לעשות בעזרת המסנן הזה -

$$\underbrace{S(t)}_{signal} \Rightarrow \underbrace{\oplus}_{\substack{addative\ noise \\ n(t),\ S_n = \left|\tilde{N}(\omega)\right|^2}} \Rightarrow \underbrace{\boxed{LTI}}_{H(\omega)\underbrace{\Rightarrow}_{FT} h(t)} \Rightarrow \underbrace{y(t)}_{S(t)*h(t)+n(t)*h(t)}$$

אז כמו שאמרנו קודם, נרצה לבחור אותו כאשר הרעש לא בעל צורה ברורה.

מסנן ווינר הוא יהיה אופטימלי במובן שנותן לנו את האות ה"קרוב ביותר" ל-$S(t)$, והוא -

$$H_{wiener}(\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_N(\omega)} = \frac{1}{1 + (SNR(\omega))^{-1}} = \begin{cases} SNR(\omega) & SNR(\omega) << 1 \\ 1 & SNR(\omega) >> 1 \end{cases}$$

מסנן ווינר מביא לנו את השגיאה ביחס לאות המקורי (שזה - $(\star)$) למינימום -

$$(\star) = \int_{-\infty}^{\infty} (y(t) - S(t))^2\, dt$$

וזה אמור לתת לנו את האות הכי דומה לאות המקורי. חיסרון: מסנן זה דורש לדעת את ה-SNR.

7.8.3 מסנן - $Matched\ filter$:

אבל בחיים האמיתיים לא באמת אכפת לנו להחזיר את האות הכי קרוב לאות המקורי, כמו במסנן ווינר. לרוב אנחנו פשוט רוצים לדעת להחזיר בצורה טובה האם האות היה שם.

לדוגמה האם אמרנו לטלפון - $"hey\ siri"$, או האם מכם קיבל אות מסויים בזמן מסויים.

לזה יש מסנן מיוחד בשם - מסנן $matched\ filter$ אשר נקרא גם לפעמים - $correlation\ filter$. והמבנה שלו יהיה קצת שונה משל פילטר ווינר:

$$\underbrace{S(t)}_{signal} \Rightarrow \underset{n(t),\ S_n=\left|\tilde{N}(\omega)\right|^2}{\underbrace{\oplus}_{addative\ noise}} \Rightarrow \underbrace{\boxed{LTI}}_{H(\omega)\underbrace{\Rightarrow}_{FT}h(t)} \Rightarrow \underbrace{y(t)}_{S(t)*h(t)+n(t)*h(t)} \Rightarrow \boxed{signal\ ditection} \Rightarrow \begin{cases} "1" \\ "0" \end{cases}$$

אז איך נדע להחזיר הספק גדול כאשר אנחנו קולטים את האות שלנו, והספק קטן כשלא? בגדול - קונבולוציה עם האות שמחפשים, הפוך.

כאן תחת רעש לבן נבחר - $H(\omega)=\tilde{S}^*(\omega)$ או באופן שקול - $h(t)=S(-t)$.

ועל מה אנחנו ממקסמים - על ה-SNR ברגע אחד ספציפי - $max\left\{\frac{S^2_{filter}(t_0)}{\langle n^2_{filter}(t_0)\rangle}\right\}$ - וזה רק בעבור רעש לבן.

נשים לב שמתקיים -

$$S_{filter}(t)=h(t)*S(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(t')\,h(t-t')\,dt'$$

נציב את - h של הפילטר הזה -

$$S_{filter}(t)=\underbrace{S(-t)*S(t)}_{=R_S(t)}=$$

כלומר התוצאה שלנו בעבור האות היא פשוט האוטוקורלציה של האות! וזה נפטר טוב מהרעש הלבן.