

分类号: TP242.6

单位代码: 10335

密 级: 公开

学 号: 11732029

浙江大学

博士学位论文



中文论文题目: 多旋翼无人机

运动规划的几何方法

英文论文题目: A Geometrical Approach to

Multicopter Motion Planning

申请人姓名: 汪哲培

指导教师: 高飞 特聘副研究员

合作导师: 许超 教授

学科(专业): 控制科学与工程

研究方向: 自主导航与运动规划

所在学院: 控制科学与工程学院

论文递交日期 二〇二二年四月

多旋翼无人机
运动规划的几何方法



论文作者签名: _____

指导教师签名: _____

论文评阅人 1: _____ 隐名评阅

评阅人 2: _____ 隐名评阅

评阅人 3: _____ 隐名评阅

评阅人 4: _____ 隐名评阅

评阅人 5: _____ 隐名评阅

答辩委员会主席: _____

委员 1: _____

委员 2: _____

委员 3: _____

委员 4: _____

答辩日期 2022 年 05 月 30 日

A Geometrical Approach to

Multicopter Motion Planning



Author's signature: _____

Supervisor's signature: _____

External reviewers: Anonymous _____

Anonymous _____

Anonymous _____

Anonymous _____

Anonymous _____

Examining Committee Chairperson:

Examining Committee Members:

Date of oral defence: May 30th, 2022

浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 浙江大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名： 签字日期： 年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 浙江大学 有权保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 浙江大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名： 导师签名：
签字日期： 年 月 日 签字日期： 年 月 日

致谢

摘要

多旋翼无人机由于其简单的动力结构和灵活的三维空间机动能力被越来越多地应用于搜索救援、空中摄影、工业勘测、科学研究等场景中。但与此同时，受到自主任务能力的限制，多旋翼在人类生产生活中发挥的作用更多的是作为人的感知能力的延伸。绝大部分多旋翼无人机的安全导航与飞行作业依赖于人类飞手的远程操作。导致这种情况的物理事实在于，多旋翼飞行器自身所能携带的传感、算力和动力资源相对受限。因此，实现高度自主的安全导航和任务飞行对于现有的多旋翼无人机而言依然是一个不小的挑战。

多旋翼的全自主导航离不开可靠的在线感知与规划算法。随着各种传感器的小型化和定位建图算法的发展，制约多旋翼智能自主导航与作业的瓶颈在于缺乏高效而灵活的运动规划求解器。针对一般无人系统的运动规划方法通常包括基于随机采样和图搜索的路径规划算法以及基于优化的轨迹规划算法。现有的通用运动规划算法无法满足多旋翼飞行所需的在算力约束下进行实时求解的能力，而针对多旋翼无人机的专门设计的运动规划算法通常牺牲了动力学的精细度、规划的质量、多任务的适配性和实际计算效率这几个方面中的一个甚至多个。现有的多旋翼运动规划算法在理论和实际性能方面的脱节主要来源于三个关键问题：其一，运动规划需要频繁引入的环境地图信息具有高度的离散性和不连续性，对规划效率产生巨大的影响；其二，多旋翼的欠驱动特性使其飞行轨迹在用传统离散或者参数化方法表征时会引入不必要的自由度，增大问题求解的复杂度；其三，多旋翼规划中各种约束具有清晰的低维几何结构，缺乏对该结构的利用会造成不必要的算力浪费。

因此，为了解决多旋翼无人机运动规划的实用性问题，有必要研究适用于多旋翼精细动力学的高质量全状态轨迹规划求解器。本文审视了现有多旋翼规划方法的不足之处，重新构建环境信息与轨迹规划之间的接口以及轨迹稀疏参数化的方法，借助该问题本身的几何结构，提出平坦输出轨迹时空形变的规划框架。本文的主要内容和研究成果简要概括如下：

1. 由于移动机器人的安全导航需要引入环境地图信息，本文针对常见地图数据格式和移动机器人外形抽象出了可行域计算问题的严格数学描述。针对该问题，提出了快速

迭代区域膨胀的求解框架和其子问题利用几何特性的快速求解算法，实现了对移动机器人周围安全区域的高质量凸多面体近似。该框架可以作为多旋翼无人机、无人车等机器人导航问题中将环境信息引入轨迹优化约束的高效组件。

2. 由于多旋翼无人机的欠驱动特性和微分平坦特性使其平坦输出轨迹可以被稀疏地参数化，本文研究了平坦空间中积分链系统的多阶段无约束最小控制问题，给出该问题的最优性条件并证明了该条件的充分必要性和存在唯一性。本文利用该条件设计了一种轨迹时空参数化方法，实现对轨迹的降维参数化同时保证其空间和时间形变的灵活性。此外，本文设计了该参数化轨迹的两种线性复杂度操作，保证其能够有效而灵活地支持进一步的优化。

3. 由于多旋翼无人机的导航需要满足的微分约束和几何约束均具有清晰的几何结构，本文对非线性风阻效应下的高速多旋翼动力学进行了建模并通过给出其微分平坦变换的代数过程，从而证明了该模型的平坦特性。利用其平坦输出空间与规划参数空间高度重合的事实，本文直接进行平坦输出的轨迹规划，对时间域和空间域的安全几何约束再次进行非线性变换获得平直空间中的无约束代理变量。针对各种任务需求，本文设计了利用惩罚泛函实现轨迹时空形变以获得高质量可行轨迹的优化框架。

4. 本工作设计并进行了广泛的基准测试对比、仿真实验和实飞实验，将本方法同现有的多旋翼运动规划方案在各方面进行了详尽的性能对比，显示了本方法在求解质量和约束精细度上有着显著的提升，并且在求解效率方面有着数量级上的提高。同时，本文的实飞实验验证了多旋翼借助本方法完成各种高速度大姿态极限飞行的切实可靠性。

随着多旋翼无人机在传感、通讯和动力模块的硬件提升以及感知算法的日渐成熟，运动规划模块的巨大潜力已经被重视了起来，成为了提高多旋翼自主智能的关键一环。本文从几何的视角出发，结合最优控制、运动规划、计算几何和数学规划等领域中的实用技术，设计并给出了有效解决现有多旋翼运动规划中难点的一个完整的解决方案，对未来多旋翼自主导航和运动规划领域中高质量导航规划模块的发展提供一个新的思路。

关键词：多旋翼无人机，自主导航，运动规划，最优控制，非线性规划

Abstract

With simple structures and three-dimensional maneuverability, multicopters have been introduced in many applications such as search and rescue, aerial videography, and industrial inspection. However, multicopters have always been used as tools that expand the boundaries of human sensation rather than as unmanned systems for autonomous missions. The safe navigation and aerial operations of multicopters are still accomplished by human pilots. Since the onboard resources for sensing, computing, and actuating are quite limited, fully autonomous navigation and mission are still challenging for existing multicopters.

The full autonomy of multicopters cannot be achieved without reliable perception and planning algorithms. With the miniaturization of sensors and the development of localization and mapping, the bottleneck now becomes the lack of high-performance motion planners. A variety of general-purpose planning algorithms for robots, including sampling-based and optimization-based ones, demand unrealistic resources so as to meet the needs of multicopters. Some tailored methods, albeit lightweight, sacrifice either the model fidelity, planning quality, or multi-mission adaptability. There are reasons for their unsatisfactory performance: 1. Nonsmooth and discretized environment data are directly incorporated into planning, making the iteration cumbersome. 2. Existing trajectory representation still introduces redundant parameters even if most multicopters are underactuated. 3. Low-dimensional geometrical structures of constraints are not well exploited in multicopter planning, resulting in the waste of computing power.

To overcome the practical challenges in multicopter motion planning, studying the computationally efficient full-state trajectory planning for high-fidelity multicopter dynamics is necessary. After examining the inadequacies in existing approaches, this research redesigns the interface between environment and planners, and also the sparse parameterization of trajectories. By exploiting problem structures, the spatial-temporal deformation of flat-output trajectories is proposed to solve planning problems. The research contents are listed as follows:

1. Since environment data are necessary to ensure the safety of mobile robots, our research proposes the formulation of feasible region extraction, which applies to commonly used kinds

of mapping data. The fast iterative region inflation algorithm efficiently generates high-quality polyhedral approximations of feasible regions, which serves as a reliable interface between environment information and planning modules of mobile robots.

2. The under-actuation and differential flatness of multicopter make it possible to sparsely parameterize the flat-output trajectory instead of the entire state-input one. Therefore, our research studies the multi-stage minimum control effort problem for integrator chains in flat-output spaces and provides the necessary and sufficient conditions along with proof. A spatial-temporal parameterization scheme is proposed to reduce trajectory dimension while retaining flexibility in both space and time domains. Two linear-time operations are further designed such that the trajectory can be directly incorporated into optimization.

3. Since differential and geometrical constraints of multicopter possess well-studied structures, we formulate the multicopter dynamics subject to nonlinear drag effects and validates its differential flatness. Flatness transformations and coordinate transformations are utilized to eliminate both the differential and geometrical constraints such that trajectories and variables to be optimized are all in flat spaces. To meet various mission requirements, smoothing penalty functionals are adopted to deform the trajectory in the space-time domain, thus producing high-quality solutions to motion planning.

4. Extensive benchmarks and simulations are conducted to show that the proposed framework can generate high-quality solutions while retaining the computation speedup over existing schemes by orders of magnitude. Furthermore, this framework also enables aggressive high-speed maneuvers of multicopters in complex environments in extreme flight experiments, demonstrating its practical performance.

The motion planning module has shown great potential in the navigation of multicopters as the development of sensation, communication, and actuation hardware and perception software. This research proposes a geometrical approach to multicopter motion planning by combining practical techniques from different aspects. It aims to provide a reference for the development of planning modules in the future of autonomous multicopters.

Keywords: multicopter, autonomous navigation, motion planning, optimal control, nonlinear programming

目录

致谢	I
摘要	III
Abstract	V
目录	VII
图目录	XI
表目录	XIII
1 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 多旋翼无人机运动规划的研究现状	3
1.2.1 动力学微分平坦的多旋翼无人机	4
1.2.2 运动规划可行域的计算	4
1.2.3 基于采样的运动规划	6
1.2.4 基于优化的运动规划	8
1.3 论文研究内容和主要贡献	10
1.4 论文结构安排	12
2 基于低维数学规划的凸可行域计算	15
2.1 引言	15
2.2 凸可行域求解的数学表述	15
2.3 快速区域迭代膨胀算法	17
2.4 最大内接椭球的二阶锥表述及其锥增广拉格朗日求解	20
2.5 受约束膨胀的线性复杂度随机化算法求解	24
2.6 地图可行域的离线和在线提取算法	29
2.7 本章小结	32
3 多旋翼无人机轨迹的时空参数化方法	33
3.1 引言	33
3.2 微分平坦特性和平坦输出轨迹的直接优化	33
3.3 多旋翼全状态轨迹优化的数学表述	36

3.4 多阶段无约束最小化控制量轨迹	38
3.5 最优性充要条件	39
3.6 不借助代价泛函的无约束最优轨迹求解.....	47
3.7 单阶段边值问题的显式解	49
3.8 MINCO 轨迹及其时空形变	50
3.9 时间均匀 MINCO 轨迹	54
3.10 MINCO 轨迹的能量函数	55
3.11 MINCO 轨迹和传统参数化方法的对比	56
3.12 本章小结	57
4 几何约束下的轨迹优化	59
4.1 引言	59
4.2 非线性风阻效应的多旋翼动力学及其微分平坦	60
4.3 时域流形约束的处理	63
4.4 球形几何约束的处理	66
4.5 凸多面体几何约束的处理	69
4.6 连续时间约束优化的惩罚泛函光滑化方法	71
4.7 连续时间约束的惩罚泛函数值估计	73
4.8 轨迹规划的时间-空间形变方法.....	76
4.9 连续时间多项式约束验证	77
4.10 本章小结	80
5 应用	83
5.1 引言	83
5.2 大规模无约束多航点轨迹生成	83
5.3 基于航点航时近似调整的光滑轨迹生成.....	84
5.4 基于安全飞行走廊的全状态轨迹时空优化	88
5.5 动态障碍物环境中的鲁棒轨迹规划	96
5.6 基于商空间分解的 SE(3) 运动规划	101
5.7 多任务适用的运动规划	106
5.8 本章小结	107

6 总结与展望	109
6.1 论文总结	109
6.2 后继研究工作展望	109
参考文献	113

图目录

图 1.1 具备各种功能的商用多旋翼无人机	1
图 2.1 移动机器人外形的点集凸包近似	16
图 2.2 快速区域迭代膨胀算法二维示意图	17
图 2.3 可行域离线提取算法对两种地图处理结果	29
图 2.4 可行路径同拓扑的安全飞行走廊	31
图 3.1 动力系统的平坦变换对微分约束和不等式约束的作用	35
图 3.2 二维三阶积分链系统最小控制量的状态轨迹	46
图 3.3 二维三阶积分链系统最小控制量的输入及其导数轨迹	47
图 3.4 以航点向量和时间向量为参数的轨迹示意图	51
图 4.1 传统无风阻模型和本文模型在多旋翼大速度匀速飞行时的受力情况	60
图 4.2 固定总时间的代价函数定义域和三段轨迹代价函数的对数值曲面	64
图 4.3 \mathbb{R}^{n+1} 中球极投影的逆和正投影将 \mathbb{R}^n 映射到 \mathcal{B}^n	67
图 4.4 凸函数及其约束局部极小和变换后非凸函数及其无约束局部极小	68
图 4.5 将有 $\hat{n} + 1$ 个顶点的凸多面体 \mathcal{P}^H 映射到 \hat{n} 维球的过程	70
图 4.6 $\max(x, 0)$ 的 C^2 光滑化函数及其高阶导	72
图 4.7 具有不同形状和连续性阶的四种被积函数	74
图 4.8 不同等距积分方法在四种函数上的误差曲线	75
图 4.9 常用多元多项式连续时间约束	78
图 4.10 不同约束验证方法随时间分辨率和多项式次数的效率曲线	80
图 5.1 大规模无约束多航点轨迹生成的效率基准测试结果	84
图 5.2 多种启发式航点航时调整方法在代价函数和计算效率上的对比	85
图 5.3 多旋翼无人机竞速飞行实验的障碍物环境和实际飞行轨迹	86
图 5.4 基于航点航时启发式调整方法的全局竞速轨迹生成和实验结果	88
图 5.5 \mathbb{R}^n 中不同安全飞行走廊的段数分配示意图	89
图 5.6 不同类型的 3 维安全飞行走廊中的轨迹求解结果	90
图 5.7 随机环境中各种方法的轨迹在空间和时间域上的对比	91
图 5.8 各种基于安全飞行走廊的轨迹优化方法的计算效率对比	92

图 5.9 各种轨迹优化方法在成功率、轨迹能量和飞行时间上的对比	93
图 5.10 大权重时间正则项下四种方法生成的轨迹的空间和时间曲线	94
图 5.11 搭载激光雷达的多旋翼无人机及其安全自主高速飞行实验	95
图 5.12 多旋翼轨迹规划的时空胶囊约束及其求解仿真快照	98
图 5.13 动态障碍物环境中增量式规划的结果和约束函数曲线	99
图 5.14 不同动态障碍物避让约束在不同跟踪误差下的平均最小距离	100
图 5.15 狹窄通道的安全走廊、不同宽度下的 SE(3) 轨迹以及约束函数曲线	103
图 5.16 多旋翼无人机和狭窄通道的示意图及其实际尺寸	104
图 5.17 多旋翼大姿态掠过多个连续狭窄通道的实验结果	105
图 5.18 多旋翼在线持续 SE(3) 轨迹规划并大姿态掠过狭窄通道的实验	106

表目录

表 3.1 不同连续时间轨迹参数化方法的比较	56
表 5.1 不同宽度狭窄通道、最小通过滚转角及计算时间	103

1 绪论

1.1 研究背景及意义

无人飞行器 (Unmanned Aerial Vehicle, UAV)，简称无人机，专指通过远程操控或者机载程控的不载人飞行器。根据气动原理的不同，传统无人机可以分为固定翼无人机、旋翼无人机、扑翼无人机和复合翼无人机四大类。近年来，作为商业应用最为广泛的多旋翼无人机，其结构一般比固定翼和扑翼更简单，容易建立较为精确的动力学模型，且应用更为方便，正因为这些特点，多旋翼受到国内外无人机研究领域的极大关注。



图 1.1 具备各种功能的商用多旋翼无人机

多旋翼无人机的动力来源于多个电机驱动的螺旋桨，除了动力装置之外，多旋翼还可以搭载不同的作业机构，例如并联机械臂、云台、雷达等等，以代替人来完成较为特殊的空中作业。多旋翼在搜索救援、资源监测、航测航拍、货物运输以及农业辅助等方面都有极大的应用需求：在搜救领域，大疆创新 (DJI) 公司发布的 M300 无人机搭载高

清红外摄像头和长距离图传，既可用于复杂环境搜索救援，又可用于工业巡检，实现对大坝、桥梁等大型土建设施的监测；在检测领域，Skydio 发布的多旋翼无人机能够利用机载的 7 个摄像头完成对工厂环境全自主覆盖三维重建；在航测航拍领域，Sony 发布的 Airpeak 无人机可实现高速跟踪空中拍摄，对传统的升降机摄影方式带来了巨大的革新；在农业领域，大疆创新（DJI）发布的植保无人机 MG-1S 可用于自主定点药剂喷洒，一次飞行可以实现 20 亩地的喷洒任务；特别是在物流领域，近年来基于多旋翼的中等规模城市环境中进行千米级短距离空中物品运输的需求越来越多，已知相关的产业产品包括 Amazon Prime Air 无人机空中物流系统和 FedEx 的快件混合翼运输系统。正是旋翼无人机在复杂环境下的广阔应用需求使得人们对它的要求越来越高。上个世纪对其应用的研究主要局限于高空领域，然而随着无人机在低空场景乃至复杂场景下应用的扩展，无人机在复杂环境下的自主导航和运动规划在各行各业中越来越显现出其重要性。

传统的无人机应用场景往往在高空领域，在这种场景下，无人机的自主导航过程中只涉及到任务导向的航迹规划，规划的约束至多只会考虑可行的空域，一般不会遇到避障的问题，因此基于 GPS（Global Positioning System）和 IMU（Inertial Measurement Unit）的组合导航定位系统足以令无人机顺利完成预设的任务。随着现代无人机应用场景的变化，无人机更多是在建筑群、森林甚至室内这种飞行空间极大受限的环境中进行作业。这直接导致传统的固定翼无人机由于机动速度过高而不适于承担这种任务。旋翼无人机，尤其是多旋翼，其灵活性决定了它适用于这些作业任务。GPS/IMU 组合导航定位系统在复杂环境中会受到多种遮蔽物的影响，这使得其定位的稳定性和准确性大幅度下降。其次，相对于高空障碍物极度稀疏的情况，低空飞行的多旋翼更需要对稠密的障碍物环境进行感知和规划，从而保证其航行的安全和时间效率。因此，具备完全自主导航能力的多旋翼无人机通常能够借助各种各样的传感器才能实现在三维环境的实时感知、定位、建图和规划。由此，运动规划算法在多旋翼的导航中扮演着越来越重要的角色。

多旋翼无人机在复杂环境中实现安全且快捷的自主导航离不开鲁棒和高效的轨迹规划^[1-6]。对于一般的机器人而言，高质量的运动规划需要精准地考虑动力学的微分约束、控制输入的光滑性和整个系统状态的安全。多旋翼无人机，作为一种轻量级的移动机器人，更需要满足实际导航需求中的 SWaP 限制^[7]，即尺寸（Size）、重量（Weight）和功率（Power）限制。这些限制要求多旋翼无人机利用极其有限的机载计算资源来完成

飞行轨迹实时高效地求解计算。目前学术界大部分运动规划求解器，或基于采样类方法，或基于最优控制类方法，以支持对一般机器人的动力学-运动学规划（Kinodynamic Planning）。尽管如此，这些通用求解器缺乏在线求解复杂大规模规划问题的能力。为了能满足时间敏感的计算任务需求，一些专用的运动规划方法过度简化多旋翼无人机的动力学模型以及动力学约束，使在线轨迹规划求解成为可能。这些专用方法通常会给出较为保守的解，从而难以充分发挥出多旋翼无人机自身的高机动性。

高效率高质量的多旋翼运动规划存着四个理论层面的挑战：第一，为保证机体安全，规划器需要频繁访问存取三维精细地图的大量离散数据；第二，动力学的高度非线性使无人机极限飞行时难以有效地保障全状态层面的安全；第三，运动规划的高质量求解在传统意义上需要对动态过程做精细化时间离散，不可避免地提高数学规划的求解复杂度；第四，传统的飞行轨迹参数化方法缺乏连续时间约束下在时间域进行直接调整优化的自由度。

本文为解决这些理论层面的挑战提出了一种多旋翼运动规划的几何方法。该方法从运动规划可行域的显式构建、多旋翼飞行轨迹的时间-空间稀疏参数化方法、轻量级多任务通用的多旋翼轨迹优化框架到各种具体任务下的应用仿真实验验证均给出了详尽的描述。本文提出的方法旨在解决多旋翼无人机高质量高效率的轨迹规划，并使得复杂的安全性约束、受限的动力学可行性和各种任务需求都能得到满足。为了验证本框架的性能，本文给出了同学术界现有最前沿的多旋翼轨迹规划方法的测试对比。与此同时，本文利用受限环境下的多旋翼自主极限飞行验证了本方法的规划质量和计算效率。

1.2 多旋翼无人机运动规划的研究现状

尽管在已有文献中存在着各种各样的规划方法，对多旋翼无人机的高效大规模全状态轨迹规划仍然没有被解决。本文综合了基于采样和基于最优控制这两类运动规划方法的优点，显式进行了可行域的提取计算，而后利用多旋翼无人机的微分平坦特性，给出了一个兼具效率、质量和灵活度的多旋翼无人机轨迹规划的方案。本方案审视了现有技术思路的先进之处以及不足，利用各个领域的实用技术克服了各个关键难点。

1.2.1 动力学微分平坦的多旋翼无人机

微分平坦 (Differential Flatness) 的概念自其首次被 Fliess 等人^[8] 提出就在机器人轨迹规划领域被广泛地关注^[9-11]。一个动力系统具有微分平坦的特性说明该系统的全状态和控制输入可以被其平坦输出及其有限阶导数所唯一确定。Mellinger 和 Kumar^[12] 验证了平行轴向四旋翼无人机的微分平坦特性。该机体动力学以三维位置和 Euler 偏航角为四维平坦输出。Watterson 和 Kumar^[13] 采用 Hopf 纤维化 (Hopf Fibration) 将多旋翼无人机的姿态四元数分解为偏航角和倾斜角组成的两个旋转，避免了由 Euler 偏航角导致的多个奇异点的问题，并达到了理论上最少的奇异点个数。Ferrin 等人^[14] 给出了六旋翼无人机在以期望姿态和总推力为控制输入时的微分平坦特性，并以平坦变换得到的状态和控制量作为线性二次控制器 (Linear Quadratic Regulator) 的线性化工作点。Faessler 等人^[15] 进一步考虑了一阶空气阻尼效应对机体产生的线性加速度和角加速度。他们证明了多旋翼无人机动力学在引入线性空气阻尼耦合项之后仍然具有微分平坦特性。更一般地，Mu 和 Chirattananon^[16] 考虑了欠驱动多旋翼无人机的螺旋桨具有固定倾斜角的情况，并从理论上证明了在仿射控制输入矩阵的秩满足一定条件时，一些三旋翼、四旋翼和六旋翼等多旋翼动力学等均满足微分平坦特性。

多旋翼无人机的微分平坦特性给轨迹规划和跟踪控制带来了极大的便利，这是因为系统的参考状态以及参考输入可以被平坦输出轨迹的瞬态信息直接决定，而不需要对动力系统的微分方程进行积分。上述的文献均采用平坦特性在控制或规划中隐式地满足系统动力学微分方程。尽管如此，多旋翼动力学仅仅是合理状态集合和容许控制下对机体物理特性的近似。为了使得运动规划的结果更加真实合理，除了系统的微分约束以外，其状态-控制层面上的约束也是不可或缺的。尽管本文同样利用了平坦特性来实施动力学-运动学的微分约束，本文的框架区别于已有文献的特点在于其支持了更一般形式的状态和控制层面的约束。

1.2.2 运动规划可行域的计算

基于优化的轨迹规划方法需要有效地将环境中可行域的信息引入到数学规划问题的约束之中。为了使得约束既能够保持紧凑的参数描述，又能够对可行域的近似程度较高，一个典型的做法是采用一系列凸多面体集合构成的并集来近似所关心的可行域空

间。然而，即便在二维的情况下，对可行域进行凸覆盖并且保证凸几何体的数量最小已经是一个 NP 困难的问题^[17]。因此，许多轨迹规划算法均依赖于前置可行域的近似计算模块来实现可靠的轨迹优化。

Sarmiento 等人^[18]提出了一种基于采样的方法，通过对可行空间进行批采样、检查对关键点的可视性并逐渐增长可见点的凸包体积来完成以多个凸多面体对可行域环境的近似。然而该算法需要对整个参数空间进行采样，并且需要多次求解凸包问题。在实际的轨迹规划中，优化所关心的是某一拓扑下的局部可行空间，因此该方案不适合用在实时轨迹优化中进行约束构建。Deits 等人则提出 IRIS 算法^[19]（Iterative Region Inflation by Semidefinite Programming），通过以椭球为种子不断地膨胀该椭球以获得由接触平面构成的凸多面体，并在下一次迭代过程中以该凸多面体的最大体积内接椭球为新的种子重新进行椭球膨胀。该方法可以在由顶点描述的凸障碍物的集合构成的环境中计算出以局部极大椭球为最大体积内接椭球的凸多面体。然而该算法需要在每一轮迭代中对每个障碍物数值求解二次规划，且对每一个新生成的凸多面体计算半正定规划。这使得该方法的计算效率在多次调用求解可行域并集的时候差强人意。此外该方法不能保证凸多面体一定包含最初的种子点，因此不具有局域可控性。为了解决该算法的效率和局域可控性，Liu 等人提出了 RILS 算法^[20]（Regional Inflation by Line Search），以线段为种子不断地计算包含该线段且排除所有障碍物的最大椭球，最后以该椭球膨胀与障碍物的接触平面构成最后的凸多面体。该算法具有较高的计算速度，然而该椭球始终以线段为主轴，因此会使得最后的凸多面体体积较为保守。Gao 等人则针对三维占据体素地图（Voxel Map）设计了计算凸可行域的 PCCI 算法^[21]（Parallel Convex Cluster Inflation），该算法以某一不被占据的体素为种子，逐层增长并检查新体素到已有体素集合的可视性，从而保证在增长过程中始终维持体素集合的凸性，最终以体素点的凸包作为可行域的凸多面体近似。尽管该算法可以保证凸多面体在离散度量下体积局部极大，然而该算法具有较高的复杂度，因此其采用并行计算资源实现可行域计算的加速。即便如此，该算法仅仅在地图分辨率不大的时候才能达到近实时的计算。Savin 则提出了一种空间翻转算法^[22]，该算法以种子点为中心，对所有的障碍物点集作球极映射变换，将该种子点周围的可行区域翻转到外部，再对翻转的障碍物点集计算凸包，由此该凸包外部区域对应的翻转前的区域则可以作为该种子附近的可行域的近似。由于该区域的边界为曲面，因此需要进一步对其启发式地计算内接凸多面体，才能保证最终多面体区域不包含任何障碍物。该

方法提供了一个新的思路，即采用空间翻转的思想，将临近可行域近似转化为凸包问题。该方法最大的缺陷在于，球极映射的非线性极强，致使翻转空间中任何的体积损失都可能令最终凸多面体和可行域直接产生巨大的间隙，造成最终结果极度保守。为了解决该缺陷，Zhong 等人^[23]提出了采用球面翻转（Sphere Flipping）映射来代替球极映射的思路，由于球面翻转映射具有不可见点消除算子^[24]（Hidden Point Remove Operator）的性质，对应翻转空间障碍物点的凸包外部对应着种子点的可视星凸区域。为获得凸多面体，他们进一步设计了启发式的方法将星凸区域切割成凸多面体。该方法虽然简洁直观，但仍具有效率问题和保守性问题。其效率问题在于需要对球面翻转之后近似分布在球面附近的点集计算凸包，而凸包计算本身的复杂度加上快速凸包算法在球面分布点集上的性能退化，一起导致该方案的计算实时性不高。此外，由于切割生成的最终凸多面体采用的是启发式方法，该过程在一些常见的情况下会丢失掉许多可行域的体积，造成最终近似程度较低。

现有的方法始终会受到效率问题、保守性问题和缺乏局域可控性这三个问题之中的至少两个的影响，极大地降低了可行域计算的实用性。我们利用问题的低维度几何结构，给出一种高效、具有强局域可控性以及低保守性的凸可行域计算的方法。该方法利用了计算几何和数学规划各自的特点，对几何的低维度结构加以利用，实现凸可行域计算的实用性算法。

1.2.3 基于采样的运动规划

基于采样的规划算法对环境信息进行不断地探索和利用（Exploration and Exploitation）以寻求运动规划的全局最优解。这类方法主要解决的是来源于环境的复杂度。

PRM 算法^[25]（Probabilistic Roadmap）利用随机采样得到的可行顶点构建静态环境中的无碰撞图，以满足最短路的多次查询需求（Multiple Query）。RRT 算法^[26]（Rapidly-Exploring Random Tree）则利用在线采样增量式地构建可行顶点和边构成的树，以满足最短路的单次查询需求（Single Query）。PRM 算法和 RRT 算法均具有概率完备特性，即无法找到一个可行解的概率，在采样个数趋于无限时指数收敛到零概率^[27]。作为全局方法的里程碑，Karaman 和 Frazzoli^[28]分析了基于采样算法的渐进最优性的条件。他们给出了渐进最优版本的 PRM 算法和 RRT 算法，即 PRM* 算法和 RRT* 算法。这两种渐进最优的变体能够当采样个数趋于无限时确保当前最优解收敛到全局最优解。Karaman^[29]

等人随后给出了 RRT* 算法的在线即时扩展版本。该扩展可以在实现执行轨迹的同时进行规划以提升未执行部分轨迹的最优性。Jordan 等人^[30] 提出了双向 RRT*，通过从初末点同时执行树的增长，可以在狭窄区域或者障碍物密集的高维参数空间中很快的获得可行解。Janson 等人^[31] 提出了 FMT* 算法 (Fast Maching Tree) 通过将图搜索类算法扩展到基于采样的算法中，有效地提升了最优路径搜索的效率，并同时达到了渐进意义上的分辨率最优。然而，对已有解的进一步提升需要以更高的分辨率重启整个算法的计算流程。Alterovitz 等人^[32] 提出了快速探索随机路线图算法，实现对可行域进行探索和对解的质量进行提升二者之间的权衡。他们验证了在该权衡参数取值合理时可以显著加快找到最优路径的速度。

渐进最优的采样方法收敛到最优解的代价往往是更大的算力消耗。因此，不同的启发式方法相继被提出，以提高这些基于采样的运动规划算法的收敛于最优解的速度。Nasir 等人^[33] 提出了 RRT*-Smart 算法，采用了和可视图 (Visibility Graph) 相同的原理。为了加快算法收敛速率，该算法尽可能地产生和障碍物顶点相近的节点，而不是采用纯粹的随机探索。尽管该方法能够很快地降低路径的代价函数，然而这样做会降低其他同拓扑路径解被发现的概率。Otte 等人^[34] 提出了 C-FOREST 算法实现并行最优运动规划。该算法利用并行计算资源同时计算多个参数空间树，并将每个树各自对当前解的提升传播到每棵树上。通过这种信息交换的策略，被采样到的参数空间可以被多个计算资源协作式地处理并显著提升当前解的质量。Informed-RRT* 算法则由 Gammell 等^[35] 提出。该算法采用类似的策略，将已有可行解的长度作为主轴长度，以初末两点为椭球焦点，构建一个轴对称椭球作为采样的区域，可以很大程度上避免进行无法提高当前解的采样，该方法可显著地提高算法从已有可行路径向最优路径收敛的速率。然而，采样类算法的时间消耗主要在于寻找到一条可行路径上。为了克服这个问题，BIT* 算法^[36] (Batch Informed RRT*) 反向地将该椭球逐步膨胀并批量式地对参数空间进行采样，而后将批样本用于更新搜索图。除了提高对最优解的收敛效率之外，Li 等人则提出了 SST* 算法^[37] (Stable Sparse RRT*)，以解决将 RRT* 算法推广到运动学-动力学规划 (Kinodynamic Planning) 中时过度依赖于对非平凡的两点边值问题 (Boundary Value Problem) 的求解调用。

本文的方法利用基于采样的方法以克服来自环境的复杂度。由于采样类运动规划方法并不能高效地处理机器人动力学的微分约束，本方法仅根据采样方法生成的低维度可

行路径规划出与该路径同拓扑的飞行轨迹。利用这种架构，本文的方法可以针对性地有效处理来源于环境和动力系统方面的复杂度。

1.2.4 基于优化的运动规划

基于优化的规划算法通过利用问题的高阶信息实现对高质量局部运动轨迹的快速收敛。这类算法通常依赖于特定的环境预处理方法使得空间中的障碍物信息可以被引入到优化问题之中。

针对一般动力系统的轨迹优化在控制领域有着悠久的研究历史^[38]。现有的许多求解器能够处理具有一般结构的轨迹优化问题并获得高质量的解，例如基于伪谱法（Pseudo-Spectral Method）的 GPOPS-II^[39] 和基于打靶法（Shooting Method）的 ACADO^[40]。这些求解器通常将轨迹优化问题通过直接或间接法离散成具有大量优化变量和等式约束的非线性规划问题（Nonlinear Programming），而后诉诸于一些性能优异的通用非线性规划求解器，例如 SNOPT^[41] 和 IPOPT^[42]。尽管如此，在机器学习领域中的轨迹规划通常具有难以被显式描述的约束，非光滑的约束以及整数变量等等。此外，通用求解器一般受到计算效率的影响，无法适用于时间敏感型的导航任务。例如，Bry 等人^[43] 提到，在 12 维状态的飞机于圆柱形障碍物中导航的任务中，SNOPT 非线性规划求解器和直接配点法（Direct Collocation）需要计算几分钟才能得到一个 4.5 米的飞行轨迹。因此，只有针对动力系统特化的轨迹规划方法才能满足实时导航规划的需求。

为了获得平滑的机器人导航轨迹，Quinlan 等人的 Elastic Band 方法^[44] 迭代地最小化样条轨迹应力，同时保证样条轨迹始终处于圆形可行区域构成的约束之中。这些圆形区域是基于初始可行路径构建的，它们可以近似地逼近该路径周围的可行区域。该方法可以保证轨迹的光滑性，并使轨迹始终处于由一系列圆形构成的安全区域之中。然而，该方法仅仅保证了轨迹在几何意义上的平滑特性，这样生成的轨迹并不一定满足机器人的动力学约束。Zucker 等人的 CHOMP 算法^[45]（Covariant Hamiltonian Optimization for Motion Planning）则针对多关节机器人这种极高自由度的系统构建了一种参数无关的代价泛函，并利用带预处理的梯度下降算法来完成轨迹优化。CHOMP 采用符号欧氏距离场^[46]（Euclidean Signed Distance Field）及其差分信息来构建碰撞惩罚函数。然而，由于欧氏距离场本身的非光滑特性以及进一步的空间离散，该优化问题在理论上的收敛速率^[47] 和实际迭代的计算效率均会进一步地劣化。一些 CHOMP 的变体，例如 STOMP 算法^[48]

(Stochastic Trajectory Optimization for Motion Planning) 和 ITOMP 算法^[49] (Incremental Trajectory Optimization) 对原算法在随机优化方面和处理动态障碍物方面做了一定的增强。Shulman 等人^[50] 将多刚体机器人的轨迹规划构建成一个带 L_1 惩罚项的序列凸规划 (Sequential Convex Programming)。其中所有的障碍物均以凸的几何单元表示。他们利用 GJK^[51]-EPA^[52] 碰撞检测流程获得的最小接触距离和最小穿透深度作为机器人和障碍物碰撞的 L_1 惩罚项。该方法的显式利用几何单元之间碰撞的高阶信息，极大地提升了多自由度机器人轨迹规划的成功率和计算效率。

对于微分平坦的多旋翼无人机，运动规划可以被转换为低维平坦输出轨迹的优化问题。Mellinger 和 Kumar^[12] 采用固定时长的样条来表征四旋翼的平坦轨迹。他们将轨迹四阶时间导数的平方范数积分作为二次规划 (Quadratic Programming) 的代价函数来保证轨迹的平滑性，并以线性不等式来保证轨迹的安全性。尽管如此，该方案缺乏样条各段时间的有效优化。为了获得代价函数对时间变量的梯度，该二次规划的摄动问题需要被多次求解以获得对时间变量的灵敏度，这极大地提高的问题求解的计算复杂度。此外，该方案仅支持过度简化的动力学约束。Bry 等人^[43] 随后给出了该二次规划在仅有高阶连续性约束和航点约束时候的闭式解。他们采用 RRT* 算法作为可行路径生成的前端，并不断地在后端无约束轨迹发生碰撞的时候，从该可行路径上取出路径点作为后端轨迹生成的航点。这种方法固然高效，但是难以在障碍物稠密的环境中生成高质量的轨迹。此外，无人机的飞行速度等动力学约束无法被显式地纳入到轨迹生成中。更重要的是，该闭式解中待求逆矩阵的奇异性并没有被很好地讨论清楚。Deits 和 Tedrake^[53] 首先用凸多面体来近似可行空间，这样将多项式轨迹约束在该多面体的线性不等式中可以完全被一组多项式平方和 (Sum of Squares) 条件等价地描述。他们采用混合整数二阶锥规划 (Mixed Integer Second-Order Conic Programming) 来求解轨迹各段的分配与优化问题。该方法可以得到固定段数分辨率下的全局最优轨迹，然而其计算效率仅适用于离线计算。Gao 等人^[21] 同样采用凸多面体来描述可行区域。他们交替地对轨迹的几何形状以及时域特性进行优化。轨迹的安全性通过 Bézier 曲线控制点上的线性约束得到保障。轨迹的时域信息则利用时间最优路径重参数化^[54] (Time-Optimal Path Parameterization) 来完成。此外，许多现有方法可以归结为以上方法的变体。例如，Tordesillas 等人^[55] 将 Deits 等人的方法中的多项式平方和条件替换成了 Bézier 控制点的线性约束，从而避免了二阶锥约束，对应的混合整数二次规划 (Mixed Integer Quadratic Programming) 通过牺

牲了约束的零间隙特性提高了计算求解的效率。Sun 等人^[56]则采用双层规划（Bi-level Programming）的灵敏度分析来获得轨迹各段时间关于底层约束二次规划最优值的解析灵敏度，进而做到直接时域优化，然而该灵敏度的存在性、光滑性及其导致的数值问题没有被很好地解决。

上述针对多旋翼无人机专门设计的方法通常采用基于样条的连续时间轨迹参数化方法来避免因为精细时间离散带来的巨量变量、约束和算力需求。尽管如此，这些方法不能直接且有效地对轨迹的时间和空间域信息进行直接联合优化。此外，连续时间约束在时域上的精细程度没有和轨迹的参数规模直接解耦。除了高阶导数的范数约束之外，这些方法均不支持高精度的无人机动力学的全状态和控制输入层面的约束。本文的框架旨在于解决这些现有的问题，实现求解效率、质量和灵活性的显著提升。

1.3 论文研究内容和主要贡献

多旋翼无人机的运动规划涉及到可行域的表示和计算、多旋翼高速动力学微分和代数约束建模、轨迹的时间-空间稀疏参数化的设计以及全状态约束下的轨迹优化求解和验证等多个方面，是一个结合几何计算、动力学控制、连续时间参数化方法和数学规划数值求解相结合的综合性问题。该运动规划问题不仅要求高质量的解，更注重运动规划的计算复杂度和实际运行效率。

针对多旋翼无人机的运动规划问题，我们利用问题本身的结构给出一个轻量级且足够灵活的框架，它采用一种低复杂度的轨迹参数化方法，同时可以支持不同飞行任务对规划提出的需求。在运动规划可行域计算求解方面，本文利用多旋翼无人机参数空间维度较低的特性，针对性地将该问题采用低维度二阶锥规划和低维度计算几何 LP 型问题^[57]（LP-Type Problem）分解求解。本文针对性地对二阶锥规划实现了维护常量积极集的对称锥增广拉格朗日方法，另一方面在 LP 型子问题上设计了新的线性复杂度随机化精确算法。利用这种方式，我们可以利用凸几何单元高效地完成对可行域的高质量逼近。

针对连续飞行轨迹的时间-空间参数化，本文给出并证明了平坦空间的积分链系统多阶段无约束最小控制量轨迹的充分必要条件。这些条件不仅简单易用，并且确保了最优轨迹能够以线性的计算复杂度从时间参数和空间参数中得到。同时，这些条件

的解的存在唯一性进一步保证问题最小代价泛函关于时间-空间参数（Spatial-Temporal Parameters）灵敏度的存在性和光滑性。本文将该最优化条件对应的无约束问题本身视为一种轨迹参数化方法。由于最优化条件的良好性质，积分链系统的无约束最优控制轨迹的求解本身即可作为从时间-空间参数中决定唯一光滑轨迹的正向生成过程。该问题自身的时间和空间参数规模仅是常数倍于问题的阶段数。这一特点使得仅利用少数几个参数即可完全表征决定一个很长但运动模式单一的轨迹。本文用 MINCO（Minimum Control Effort）指代以该最优化充要条件为依据进行时空参数化的轨迹的集合。MINCO 轨迹不同于传统的以 B-样条（Basis Spline）和 Bézier 曲线（Bézier Curve）为代表的几何样条曲线。它的稀疏参数可以直接来控制一个轨迹的空间形变和时间形变，这两方面的自由度对于多旋翼无人机的动力学特性而言是同等重要的。此外，本文给出了 MINCO 轨迹在用户自定义的代价函数或者约束函数下，进行时空形变（Spatial-Temporal Deformation）的线性复杂度梯度求解方案。

为了满足运动规划的动力学可行性，我们建立了多旋翼无人机在高速飞行下受到非线性风阻效应影响的动力学，并给出了其具有理论最小奇异点个数的微分平坦的代数变换。利用该变换，动力学的微分约束通过直接规划平坦输出空间的轨迹得以满足。为了满足运动规划的安全性，我们利用全局采样或搜索方法得到的低维度可行路径，以凸几何子单元的并集对同拓扑的可飞行区域进行近似。这些几何子单元构成的安全飞行走廊（Safe Flight Corridors）具有简单的描述参数，可被直接用作轨迹优化中的解析约束。为了使得 MINCO 轨迹可以在安全飞行走廊中自由地形变，本文采用低维几何单元的结构，给出了精确非线性变换，使得 MINCO 的空间控制点参数可以被一组无约束变量替代。这些非线性变换既隐式地完成了轨迹优化问题中的梯度投影计算，又使得安全约束的高阶信息可以被有效地利用在轨迹时空形变的优化之中。更重要的是，MINCO 轨迹参数在非线性变换中不会引入额外的局部极小值。除了安全性之外，一个可靠的运动规划需要考虑机器人全状态和控制输入的可行性。然而，现有对多旋翼无人机的在线运动规划大部分基于其动力学的微分平坦（Differential Flatness）特性。这些方法仅仅借助微分平坦变换（Flatness Transformation）来保证机体动力学的微分约束的满足，而无法支持状态和控制输入层面的约束。为了保证高精细度动力学下的可行性，本章给出了一个系统的方法来保证 MINCO 轨迹采用稀疏参数化的同时支持用户自定义的连续时间状态-输入约束（State-Input Constraints）。利用 MINCO 轨迹的线性复杂度形变特性以及

微分平坦变换的逆向微分，状态-输入约束函数关于轨迹时空参数的梯度可以被精确且高效地计算得到。在此基础上，本文直接采用惩罚泛函光滑化方法（Smoothing Penalty Functional Method）来处理任意时间分辨率下的连续时间约束，并采用无约束优化问题实现轨迹的时间-空间形变以得到轨迹优化的高质量解。

1.4 论文结构安排

本文的结构安排如下：

第1章是绪论，给出了本文的研究背景和意义，详细介绍了当前学术界在多旋翼运动规划中进行参数空间可行域计算，各种动力学模型及其微分平坦特性，基于采样的运动规划方法和基于优化的轨迹规划方法的现有工作，并进一步指明了本文的研究内容和方法。

第2章针对运动规划参数空间的可行域计算问题，提出了快速区域迭代膨胀算法框架。针对最大体积内接椭球子问题，给出一种二阶锥约束规划描述并利用对称锥增广拉格朗日和半光滑牛顿法实现快速求解。针对受约束膨胀的非凸子问题，给出极对偶变换后的等价低维度正定凸二次规划，并将随机化线性复杂度线性规划算法推广到该二次规划中。该算法框架结合两个高效的子问题求解，可实现在线可行域计算。

第3章考虑了多旋翼无人机飞行轨迹的稀疏参数化问题。针对平坦空间积分链系统多阶段无约束最小控制给出了充分必要条件及其证明。设计了基于最优性条件的时间-空间轨迹参数化方法，并给出了不依赖于代价泛函且具有线性复杂度最优解构造过程。对任何用户定义的需求函数，给出了该参数化轨迹继续时空形变所需梯度的线性复杂度求解算法。

第4章考虑了多旋翼无人机运动规划的动力学微分约束、安全几何约束和全状态连续时间约束。设计了非线性风阻效应下的多旋翼动力学并给出包含最少奇异点的微分平坦变换。对几何约束利用显式微分同胚和解析光滑非线性变换处理轨迹航点变量的安全约束。对全状态连续时间约束利用约束转换法和微分平坦变换的反向微分实现稀疏参数化的轨迹在约束违背惩罚泛函下的时空形变优化。对连续时间多元多项式约束验证给出了完备的快速解析方法。

第5章对多旋翼运动规划的几何方法在大规模无约束多航点轨迹生成、基于航点航

时近似调整的轨迹生成、基于安全飞行走廊的全状态时空轨迹优化、动态障碍物环境中的鲁棒轨迹规划以及基于商空间分解的 SE(3) 轨迹规划这五个应用上做了同已有方法的详尽对比仿真，以及多旋翼障碍物环境下自主竞速、大尺度环境中高速自主导航和极度狭窄环境中大姿态机动求解这三个场景做了极限飞行实验。

第 6 章对全文的主要工作做了总结概括，并基于现有方法架构和实际性能，在计算效率、求解精度以及应用场景方面对下一代多旋翼运动规划方法提出了一些工作展望。

2 基于低维数学规划的凸可行域计算

2.1 引言

精细三维地图通常含有海量的离散数据，直接将离散数据引入多旋翼无人机的轨迹规划是一种缺乏效率的方式。这是因为大尺度场景的地图数据通常以吉字节 (Gigabyte) 为单位，频繁访取海量数据会极大地降低轨迹优化求解的效率。此外，地图离散数据本身具有极大的非光滑性乃至不连续性，直接将这些高度离散的数据引入轨迹优化，会在理论上降低数学规划的求解效率。基于这些原因，高效的多旋翼无人机轨迹规划需要避免直接在原始的点云地图、体素地图或者低多边形网格地图等离散数据上进行计算求解。我们可以直接对原始离散数据进行低算力消耗的预处理，将地图中的可行域以凸多面体的并集来表征。这种方法的好处是，凸多面体这种几何体可以凭借极为精简的参数，表达动辄几平方公里的安全空间。

本章将多旋翼无人机等移动机器人的几何外形以及常规数据地图中的障碍物表示抽象为点集的凸包，将地图中的不可行区域抽象为障碍物凸包构成的并集合。这样，不论是点云地图中的障碍物点、体素地图中的体素以及低多边形网格地图中的多边形表面，均可以被相应地描述。为了在给定机器人的位姿下，计算出能够尽可能逼近邻近可行域的，包含机器人自身外形且排除所有障碍物的凸多面体，本章给出了以求解最大内接椭球和受约束膨胀为子模块的快速区域迭代膨胀算法，并对相应的子问题提出了高效的求解方案。该算法可用于求解与给定可行路径同拓扑的安全可行域，即一系列凸多面体所描述的近似集合。在该集合中进行轨迹规划可以利用凸多面体自身的解析形式，实现高效的优化求解。

2.2 凸可行域求解的数学表述

考虑一个机器人在 n -维环境中导航的问题。正如图2.1所示的，移动机器人一般可以将该其几何外形由凸多面体的 \mathcal{V} -表示^[57] 描述，即点集的凸组合形式，

$$\mathcal{Q} = \text{conv}\{v_1, \dots, v_s\}, \quad (2-1)$$

其中 $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^n$ 并不一定处于 \mathcal{Q} 的凸位置 (Convex Position)。规定环境中的非凸不可行区域由凸的障碍物的并集构成 $\mathcal{O} = \cup_{i=1}^M \mathcal{O}_i$, 其中第 i 个障碍物由其 s_i 个点集的凸组合描述

$$\mathcal{O}_i = \text{conv}\{u_{i,1}, \dots, u_{i,s_i}\}. \quad (2-2)$$

规定该机器人和任何障碍物均没有发生碰撞, 即 $\mathcal{Q} \cap \mathcal{O} = \emptyset$ 。

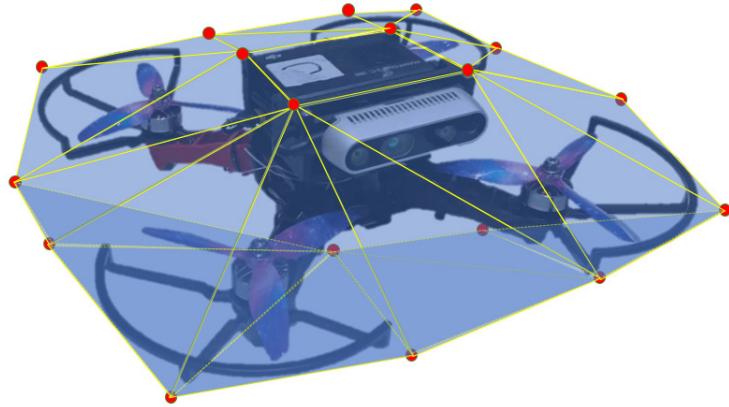


图 2.1 移动机器人外形的点集凸包近似

求解凸可行域的问题在于计算一个 \mathcal{H} 表示^[57] 下的凸多面体, 即 m 个半空间的交

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_{\mathcal{P}}x \leq b_{\mathcal{P}}\}, \quad (2-3)$$

其中 $A_{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 且 $b_{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}^m$ 。作为约束, \mathcal{P} 应该包含机器人 \mathcal{Q} 并与任何障碍物 \mathcal{O}_i 均不发生重叠。此外, \mathcal{P} 应该在预先确定的兴趣区域内具有尽可能大的体积。为了问题表述的便捷性, 我们规定该区域的边界已经以障碍物的形式作为了 \mathcal{O} 的一部分, 因此机器人 \mathcal{Q} 周围的可行区域体积是有界的。综上即可得如下的规划问题

$$\max_{A_{\mathcal{P}}, b_{\mathcal{P}}} \text{vol}(\mathcal{P}), \text{ s.t. } \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}, \mathcal{O} \subseteq \text{coint}(\mathcal{P}), \quad (2-4)$$

其中 $\text{coint}(\cdot)$ 代表一个集合的内部的补集。

问题 (2-4) 以非凸集合关系作为约束的求解是高度困难的。例如, 任何 2-维的凸骨架^[58] (Convex Skull) 问题即是 (2-4) 的一个特例, 然而对应的求解算法需要 $O(M^7)$ 的时间复杂度。对于 $n \geq 3$ 维度的情况目前为止没有已知的多项式复杂度算法被给出。因此, 我们仅仅要求对 (2-4) 给出一个高质量的严格可行解, 而非全局最优解。值得一提的是, 问题 (2-4) 永远可行, 这是因为凸机器人 \mathcal{Q} 自身的 \mathcal{H} 本身即为一个可行解。

2.3 快速区域迭代膨胀算法

由于对 \mathcal{P} 的体积计算本身即是一个非平凡的事情，一个合理的代理目标函数则是选取 $\text{vol}(\mathcal{P})$ 更容易计算的下界。正如已有方法^[19] 所推荐的，我们采用 \mathcal{P} 的最大体积内接椭球（Maximum Volume Inscribed Ellipsoid）的体积作为下界。我们设计了快速区域迭代膨胀算法，采用原问题的低维几何结构有效且单调地提升该椭球的体积，与此同时保证问题的约束 (2-4) 始终被严格满足。

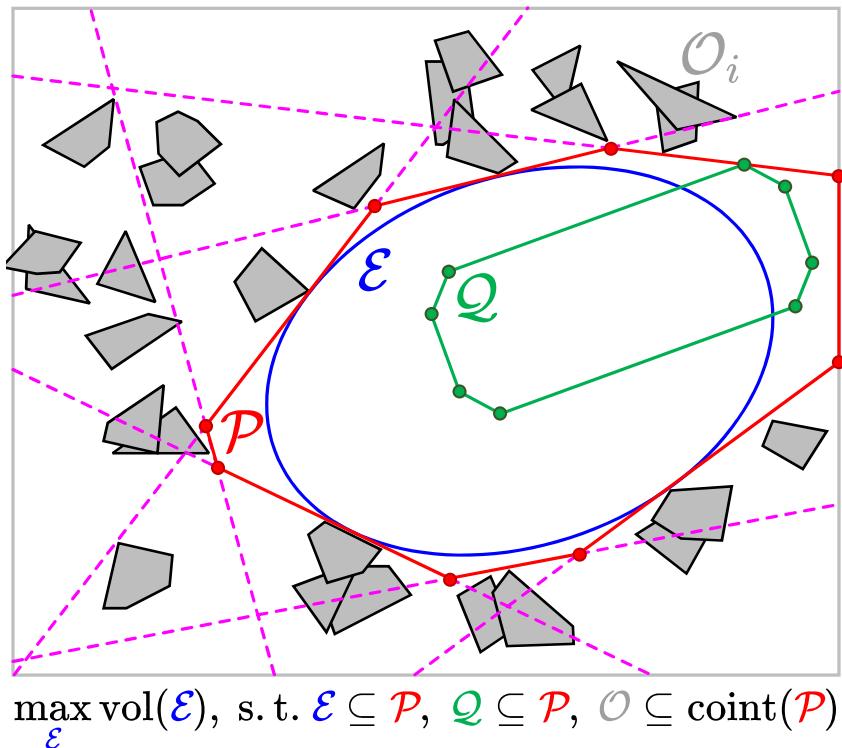


图 2.2 快速区域迭代膨胀算法二维示意图

一个 n 维空间中的椭球定义为

$$\mathcal{E} = \{A_{\mathcal{E}} D_{\mathcal{E}} x + b_{\mathcal{E}} \mid \|x\| \leq 1\}, \quad (2-5)$$

其中 $A_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为正交矩阵， $D_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个非负对角矩阵且 $b_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^n$ 。当 \mathcal{P} 有界并且具有非零体积时，其最大体积内接椭球 $\mathcal{E}^*(\mathcal{P})$ 唯一存在，并满足如下定义

$$\max_{A_{\mathcal{E}}, D_{\mathcal{E}}, b_{\mathcal{E}}} \text{vol}(\mathcal{E}), \text{s.t. } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}. \quad (2-6)$$

对应的最大体积内接椭球满足 $\text{vol}(\mathcal{E}^*(\mathcal{P})) < \text{vol}(\mathcal{P})$ ，且 $D_{\mathcal{E}}$ 的对角元素代表该椭球严格

正的半轴长。

如图2.2所示，快速区域迭代膨胀算法持续地优化原问题(2-4)的体积下界，既能够保证该椭球体积作为凸多面体体积下界的单调性，又能够保证生成的凸多面体满足可行性约束，即包含凸机器人且排除所有障碍物。我们的算法可以被任意包含于 \mathcal{Q} 的椭球 \mathcal{E}_0 初始化。一个重要的步骤在于，本算法通过受约束膨胀基于上一次迭代中的 \mathcal{E}_k 生成一个新的凸多面体 \mathcal{P}_{k+1} 。该步骤不仅仅保证了 \mathcal{P}_{k+1} 的可行性，即

$$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_{k+1}, \mathcal{O} \subseteq \text{coint}(\mathcal{P}_{k+1}), \quad (2-7)$$

同时还保证了 $\text{vol}(\mathcal{E}_{k+1})$ 的单调性，即

$$\text{vol}(\mathcal{E}_{k+1}) \geq \text{vol}(\mathcal{E}_k), \mathcal{E}_{k+1} := \mathcal{E}^*(\mathcal{P}_{k+1}). \quad (2-8)$$

本算法可以迭代地生成一个序列 $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{P}_k, \mathcal{E}_k, \dots\}$ 。既然 $\text{vol}(\mathcal{E}_k)$ 单调非降序，且有界，那么该椭球的体积一定收敛于一个有限的值。当椭球的体积，作为 $\text{vol}(\mathcal{P}_k)$ 的一个下界无法被有效地提升时，本算法返回对应的凸多面体。

正如算法1所描述的，该算法以机器人的凸外形 \mathcal{Q} 、各障碍物 \mathcal{O} 、初始椭球 \mathcal{E}_0 和一个精度参数 $\delta \in (0, 1)$ 为输入。在每一轮外层迭代中， \mathcal{Q} 和每一个 \mathcal{O}_i 均被上一轮迭代椭球所定义的仿射变换的逆变换到单位球空间中（行7和10）。由于 \mathcal{Q} 和 \mathcal{O}_i 均为 \mathcal{V} -表示，其变换后的像仍然为点的凸组合表示，即

$$\bar{\mathcal{Q}} = \text{conv}\{D_{\mathcal{E}}^{-1}A_{\mathcal{E}}^T(v_j - b_{\mathcal{E}}), 1 \leq j \leq s\}, \quad (2-9)$$

$$\bar{\mathcal{O}}_i = \text{conv}\{D_{\mathcal{E}}^{-1}A_{\mathcal{E}}^T(u_{i,j} - b_{\mathcal{E}}), 1 \leq j \leq s_i\}. \quad (2-10)$$

计算所有点集的仿射逆变换可以大规模并行化地完成。在该逆变换的处理下，椭球 \mathcal{E} 被转换为了一个单位球，因而具有相比椭球而言更容易求解计算的碰撞检测和接触向量。

在第一个内层循环之中（行11到12），每个障碍物所容许的最大膨胀比例被预先计算出来。正如已有方法^[19, 20]所显示的，直接通过膨胀椭球 \mathcal{E} 并采用接触向量的支撑平面来构建新 \mathcal{H} -多面体完全无法保证该多面体能够始终满足对凸机器人的包含约束。相比之下，本算法计算接触向量时采用低维度数学规划针对每个障碍物单独计算严格保证可行性的最大膨胀比例，即半空间须包含 $\bar{\mathcal{Q}}$ 排除 $\bar{\mathcal{O}}_i$ 同时最大化膨胀裕度 $\text{dist}(\text{coint}(\mathcal{H}(a)), \mathbf{0})$ 。第二个内层循环则迭代地选取最紧的半空间将其加入新的凸多面

算法 1: 快速区域迭代膨胀算法 (Fast Iterative Region Inflation)

```

Input:  $\mathcal{Q}, \mathcal{O}, \mathcal{E}_0, \delta$ 
Output:  $\mathcal{P}$ 

1 begin
2    $k \leftarrow 0$ 
3   repeat
4      $k \leftarrow k + 1$ 
5      $\mathcal{I} \leftarrow \{1, \dots, M\}$ 
6      $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}_{k-1}, \mathcal{P} \leftarrow \mathbb{R}^n$ 
7      $\bar{\mathcal{Q}} \leftarrow D_{\mathcal{E}}^{-1} A_{\mathcal{E}}^T (\mathcal{Q} - b_{\mathcal{E}})$ 
8      $\mathcal{H}(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq a^T a\}$ 
9     foreach  $i \in \mathcal{I}$  do
10     $\bar{\mathcal{O}}_i \leftarrow D_{\mathcal{E}}^{-1} A_{\mathcal{E}}^T (\mathcal{O}_i - b_{\mathcal{E}})$ 
11     $a_i \leftarrow \arg \max_{a \in \mathbb{R}^n} \text{dist}(\text{coint}(\mathcal{H}(a)), \mathbf{0}),$ 
12    s.t.  $\bar{\mathcal{Q}} \subseteq \mathcal{H}(a), \bar{\mathcal{O}}_i \subseteq \text{coint}(\mathcal{H}(a))$ 
13  end
14  repeat
15   $j \leftarrow \arg \min_{i \in \mathcal{I}} a_i^T a_i$ 
16   $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{H}(a_j)$ 
17   $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \setminus \{i \in \mathcal{I} \mid \bar{\mathcal{O}}_i \subseteq \text{coint}(\mathcal{H}(a_j))\}$ 
18  until  $\mathcal{I} = \emptyset$ 
19   $\mathcal{P}_k \leftarrow A_{\mathcal{E}} D_{\mathcal{E}} \mathcal{P} + b_{\mathcal{E}}$ 
20   $\mathcal{E}_k \leftarrow \mathcal{E}^*(\mathcal{P}_k)$ 
21  until  $\text{vol}(\mathcal{E}_k) \leq (1 + \delta) \text{vol}(\mathcal{E}_{k-1})$ 
22  return  $\mathcal{P}_k$ 
23 end

```

体 \mathcal{P} 之中，并将该半空间之外的障碍物标记为已处理。最终，在内层循环结束后，一个新的凸多面体 \mathcal{P}_k 在原空间中被相应地还原出来（行19），其最大内接椭球 \mathcal{E}_k 被相应地求解。由于每个椭球 \mathcal{E} 均是非退化的，所有的几何关系在对应的非退化的仿射线性变换及其逆变换过程中保持不变性。

\mathcal{P}_k 的可行性和 $\text{vol}(\mathcal{E}_k)$ 的单调性均可通过上述算法过程得以验证。对于可行性而言，如果在每一轮迭代中，存在一个凸多面体能够包含 $\mathcal{Q} \cup \mathcal{E}_{k-1}$ 同时排除 \mathcal{O} ，那么对应生成的 \mathcal{P}_k 一定满足 (2-4) 中的约束。这是因为该条件保证了第一个内层循环（行11到12）中的规划问题的可行性。事实上，在每一轮外层迭代的过程中，该凸多面体可以在 $k = 1$

时候被选为 \mathcal{Q} , 并在 $k \geq 2$ 时被选为 \mathcal{P}_{k-1} 。对于单调性而言, $\mathcal{O} \subset \text{coint}(\mathcal{E}_k)$ 关于 $k \geq 0$ 永远保证了 $\|a_j\| \geq 1$ (行16) 的成立。因此, \mathcal{P} 在最后 (line 19) 的最大内接椭球永远不会比单位球更小。而后, 由于非退化有限凸多面体及其最大内接椭球具有仿射不变性, 那么我们知道 $\text{vol}(\mathcal{E}^*(\mathcal{P}_k)) \geq \text{vol}(\mathcal{E}_{k-1})$, 这同时说明的椭球体积的单调性。

算法1的功能和效率涉及到两个低维数学规划 (行11和20)。因此, 我们针对性地设计了两个子算法以求解对应的数学规划问题的全局最优解。这两个子算法均利用了问题本身的低维度几何结构, 因此在问题维度 n 较小时具有极高的计算效率和可靠性。

2.4 最大内接椭球的二阶锥表述及其锥增广拉格朗日求解

最大内接椭球作为极值椭球问题中最难的一种^[59] 被广泛地研究^[60-63]。现有的算法多采用该问题的半正定规划 (Semidefinite Program) 表述^[64], 并给出了各种基于内点法 (Interior Point Method) 的变体对该问题进行求解。然而, 半正定规划不可避免地提高了问题已有的维度。同时, 内点法要求每轮迭代求解一个规模较大的原-对偶线性方程组系统。

本节给出对维度 n 较小时最大体积内接椭球算法, 能够高效地处理问题具有海量约束的情况。通过对椭球矩阵 Cholesky 分解的直接优化, 我们给出了最大体积内接椭球问题等价的二阶锥规划 (Second-Order Conic Program) 表述。

在问题 (2-6) 中, 目标函数 $\text{vol}(\mathcal{E})$ 正比于椭球矩阵的行列式 $\det(D_{\mathcal{E}})$ 。其中半无穷约束 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}$ 等价^[64] 于 $[[A_{\mathcal{P}}A_{\mathcal{E}}D_{\mathcal{E}}]^2\mathbf{1}]^{\frac{1}{2}} \leq b_{\mathcal{P}} - A_{\mathcal{P}}b_{\mathcal{E}}$, 其中 $[\cdot]$ 代表逐元素操作。因此, 问题 (2-6) 等价于

$$\max_{A_{\mathcal{E}}, D_{\mathcal{E}}, b_{\mathcal{E}}} \det(D_{\mathcal{E}}), \quad (2-11a)$$

$$\text{s.t. } [[A_{\mathcal{P}}A_{\mathcal{E}}D_{\mathcal{E}}]^2\mathbf{1}]^{\frac{1}{2}} \leq b_{\mathcal{P}} - A_{\mathcal{P}}b_{\mathcal{E}}, \quad (2-11b)$$

$$D_{\mathcal{E}} = \text{Diag}(d_{\mathcal{E}}), d_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n, \quad (2-11c)$$

$$A_{\mathcal{E}}^T A_{\mathcal{E}} = I_n, \quad (2-11d)$$

其中 $\text{Diag}(\cdot)$ 既代表从向量构建对角矩阵也可以代表取矩阵的对角向量。可以看出, 该问题仍然需要对矩阵 $A_{\mathcal{E}}$ 施加正交约束。

注意到 $A_{\mathcal{E}}D_{\mathcal{E}}^2A_{\mathcal{E}}^T$ 对于非退化问题 (2-11) 的最优解而言始终是正定的。因此最优解

的矩阵具有唯一存在的 Cholesky 分解^[65], 即 $A_{\mathcal{E}} D_{\mathcal{E}}^2 A_{\mathcal{E}}^T = L_{\mathcal{E}} L_{\mathcal{E}}^T$, 其中 $L_{\mathcal{E}}$ 是一个具有全正对角元素的下三角矩阵。我们直接以 $L_{\mathcal{E}}$ 为优化变量, 那么目标函数和约束相应地有

$$\det(D_{\mathcal{E}}) = \sqrt{\det(A_{\mathcal{E}} D_{\mathcal{E}}^2 A_{\mathcal{E}}^T)} = \det(L_{\mathcal{E}}), \quad (2-12)$$

$$[[A_{\mathcal{P}} A_{\mathcal{E}} D_{\mathcal{E}}]^2 \mathbf{1}]^{\frac{1}{2}} = [[A_{\mathcal{P}} L_{\mathcal{E}}]^2 \mathbf{1}]^{\frac{1}{2}}. \quad (2-13)$$

由此, 我们可以直接避免对 $A_{\mathcal{E}}$ 正交约束的处理。同时, 目标函数 $\det(L_{\mathcal{E}})$ 仅仅是 $L_{\mathcal{E}}$ 对角元素的乘积。我们将几何均值的亚图 (Hypograph) 表示为

$$\mathcal{K}_{1/n} = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \times \mathbb{R} \mid (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \geq t \right\}, \quad (2-14)$$

那么最大化该椭球的体积等价于最大化 t 同时满足约束 $(\text{Diag}(L_{\mathcal{E}}), t) \in \mathcal{K}_{1/n}$ 。我们规定 \mathcal{K}_n^m 表示 m 个二阶锥的 Cartesian 积:

$$\mathcal{K}_n^m = \mathcal{K}_n \times \cdots \times \mathcal{K}_n \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (2-15)$$

$$\mathcal{K}_n = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1 \geq \|x_2\| \right\}. \quad (2-16)$$

那么最大体积内接椭球问题等价于

$$\max_{t, L_{\mathcal{E}}, b_{\mathcal{E}}} t, \quad (2-17a)$$

$$\text{s.t. } (\text{Diag}(L_{\mathcal{E}}), t) \in \mathcal{K}_{1/n}, \quad (2-17b)$$

$$L_{\mathcal{E}} \text{ is lower triangular,} \quad (2-17c)$$

$$(b_{\mathcal{P}} - A_{\mathcal{P}} b_{\mathcal{E}}, A_{\mathcal{P}} L_{\mathcal{E}}) \in \mathcal{K}_{n+1}^m. \quad (2-17d)$$

值得注意的是, $\mathcal{K}_{1/n}$ 也是二阶锥规划可表示的^[64]。具体地, 我们引入额外 $O(n)$ 个变量将 $\mathcal{K}_{1/n}$ 分解为 $O(n)$ 个 \mathcal{K}_3 。

至此, 我们将问题 (2-11) 重新表述为了一个纯粹的二阶锥规划, 记为

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}} c_{\mathcal{K}}^T x, \text{ s.t. } A_{\mathcal{K}} x + b_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}, \quad (2-18)$$

其中 $A_{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}^{\bar{m} \times \bar{n}}$, $b_{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ 和 $c_{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ 均为常量矩阵, 且 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{K}_{n_r}$ 。问题 (2-18) 有着很重要的几何结构可以被有效地利用。首先, 由于 n 维的椭球仅有 $n(n+3)/2$ 个自由变量, 那么该问题的维度 $\bar{n} = O(n^2)$ 。其次, $\mathcal{K}_{1/n}$ 的二阶锥规划表示保证了 $\bar{m} = O(m+n)$, $r = O(m+n)$ 和 $n_i \in \{3, n+1\}$ 。最后, 由于 n 维椭球的组合复杂度^[66] 仅仅是 $O(n^2)$,

最优解可以被 $O(n^2)$ 个积极约束唯一确定。

这些结构在我们所考虑的应用场景中是极其有用的，因为常见的机器人工作环境的维度 n 一般是 2、3 或 4 维，因此这使得问题的维度 (2-18) 可以被认为是一个很小的常量。即便在约束个数 m 巨大的时候，求解 (2-18) 也需要维护一个很小的积极约束的工作集。为了有效地求解问题 (2-18)，我们采用对称锥增广拉格朗日^[67] (Conic Augmented Lagrangian) 对二阶锥约束给出具体的优化求解算法。由于增广拉格朗日算法在对称锥上具有超线性的渐进收敛速率，其相较于一阶算法^[68] 而言具有更高的收敛效率。更重要的，其不需要像内点法^[69] 中对 $O(\bar{n} + \bar{m})$ 维的原-对偶线性方程组进行求解。这极大地提高了问题在 $\bar{m} >> \bar{n}$ 情况下的效率。我们将给出的算法仅仅需要求解一个维度很小的线性方程组系统，对应的计算可以被认为常数时间的操作。

问题 (2-18) 的增广拉格朗日为

$$\mathcal{L}(x, \mu, \rho) = c_{\mathcal{K}}^T x + \frac{1}{2\rho} \|\Pi_{\mathcal{K}}(\mu - \rho(A_{\mathcal{K}}x + b_{\mathcal{K}}))\|^2, \quad (2-19)$$

其中 $\Pi_{\mathcal{K}}(\cdot)$ 为对任意向量实现关于 \mathcal{K} 的投影操作。该投影是通过对子向量调用对应二阶锥 \mathcal{K}_{n_i} 的投影操作 $\Pi(\cdot)$ 来实现的。基于 (2-16) 中的 \mathcal{K}_n 的定义，二阶锥的投影计算为

$$\Pi(x) = \begin{cases} x & \text{if } \|x_2\| \leq x_1, \\ \mathbf{0} & \text{if } \|x_2\| \leq -x_1, \\ \frac{1}{2}(x_1 + \|x_2\|)(1, x_2/\|x_2\|) & \text{if } \|x_2\| > |x_1|. \end{cases} \quad (2-20)$$

增广拉格朗日框架下的锥规划通过无约束优化迭代地更新原-对偶变量。对原变量有

$$x \leftarrow \arg \min_x \mathcal{L}(x, \mu, \rho), \quad (2-21)$$

对偶变量的更新则采用解析形式更新实现对偶上升

$$\mu \leftarrow \Pi_{\mathcal{K}}(\mu - \rho(A_{\mathcal{K}}x + b_{\mathcal{K}})). \quad (2-22)$$

此外， ρ 在每轮更新中维持一个严格正的非递减序列。那么 x 和 μ 则收敛至 (2-18) 的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 解。

由于 \bar{n} 是一个小常量，子问题 (2-21) 本质上是一个低维度的无约束凸优化问题。其中， \mathcal{L} 关于 x 的解析梯度和广义 Hessian 均可以被直接用于有效地求解 (2-21)。对 \mathcal{L} 的

直接微分可以得到

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \mu, \rho) = c_{\mathcal{K}} - A_{\mathcal{K}}^T \Pi_{\mathcal{K}} (\mu - \rho(A_{\mathcal{K}} x + b_{\mathcal{K}})), \quad (2-23)$$

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x, \mu, \rho) = \rho A_{\mathcal{K}}^T \partial \Pi_{\mathcal{K}} (\mu - \rho(A_{\mathcal{K}} x + b_{\mathcal{K}})) A_{\mathcal{K}}, \quad (2-24)$$

其中 $\partial \Pi_{\mathcal{K}}$ 指代 $\Pi_{\mathcal{K}}$ 广义 Jacobian 的任意元素。由于 $\partial \Pi_{\mathcal{K}}$ 是块对角矩阵, 那么对 $\nabla_x^2 \mathcal{L}(x, \mu, \rho)$ 的计算关于 \bar{m} 仅仅是线性复杂度。 $\partial \Pi_{\mathcal{K}}(\cdot)$ 的对角子矩阵实质上是关于每个 \mathcal{K}_n 的 $\partial \Pi_{\mathcal{K}}(\cdot)$, 其具有半正定^[70] 的解析表达式如下

$$\partial \Pi(x) = \begin{cases} I_n & \|x_2\| \leq x_1, \\ \mathbf{0} & \|x_2\| \leq -x_1, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{x_2^T}{2\|x_2\|} \\ \frac{x_2}{2\|x_2\|} & \partial \Pi_{22}(x) \end{pmatrix} & \|x_2\| > |x_1|, \end{cases} \quad (2-25)$$

其中

$$\partial \Pi_{22}(x) = \frac{x_1 + \|x_2\|}{2\|x_2\|} I_{n-1} - \frac{x_1 x_2 x_2^T}{2\|x_2\|^3}. \quad (2-26)$$

我们采用半光滑 Newton 法 (Semi-Smooth Newton Method) 直接利用高阶信息 $\nabla_x \mathcal{L} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ 和 $\nabla_x^2 \mathcal{L} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$ 对子问题 (2-21) 进行求解。具体地, 半光滑 Newton 步长 Δx 按照如下的常数规模线性方程组直接求解

$$(\nabla_x^2 \mathcal{L} + \epsilon I_{\bar{n}}) \Delta x = -\nabla_x \mathcal{L}, \quad (2-27)$$

其中 $\epsilon = \min(1, \|\nabla_x \mathcal{L}\|_{\infty})/16$ 。由于 $(\nabla_x^2 \mathcal{L} + \epsilon I_{\bar{n}})$ 一定是正定的常数规模矩阵, 我们直接计算其 Cholesky 分解。此外, 采用回溯线搜索方法来寻找满足 Armijo 条件的可接受步长。通常, 子问题 (2-21) 仅需要通过几步半光滑 Newton 步长即可收敛到高精度。

我们的子算法以 $x = \mathbf{0}$ 、 $\mu = \mathbf{0}$ 和 $\rho = 1$ 为初值, 并迭代执行 (2-21), (2-22) 和 $\rho \leftarrow 2\rho$ 直到该问题的 KKT 条件残差 δ_{kkt} 小于预定的精度,

$$\delta_{\text{kkt}} = \max(\|\nabla_x \mathcal{L}\|_{\infty}, \|\delta_{\text{fea}}\|_{\infty}). \quad (2-28)$$

具体地, $\delta_{\text{fea}} \in \mathbb{R}^r$ 对每个锥 \mathcal{K}_{n_i} 直接度量其约束误差。我们记 (2-21) 中第 i 个约束为 $A_i x_i + b_i \in \mathcal{K}_{n_i}$, 即该部分在 x 和 μ 中对应的子向量为 x_i 和 μ_i 。那么 δ_{fea} 中的第 i 个元

素考虑该子向量到锥的距离和对偶变量的范数，计算为

$$\min(\|\Pi(-A_i x_i - b_i)\|_\infty, \|\mu_i\|_\infty), \forall 1 \leq i \leq r. \quad (2-29)$$

值得注意的是，我们的子算法选择性地仅对积极的锥约束计算投影及其广义 Jacobian。如果 $A_i x_i + b_i \in \mathcal{K}_{n_i}$ 成立，那么在对偶变量更新之后有 $\|\mu_i\| = 0$ 。我们的子算法会在该轮迭代直接将投影距离和广义 Jacobian 记为 0。当 δ_{kkt} 很小时，最大体积内接椭球的几何结构使得积极约束的工作集合大小趋近于 $O(\bar{n})$ ，因此每次迭代在 x 和 μ 演进收敛到问题最优解时，其复杂度仅仅被 \bar{n} 而非 \bar{m} 决定。

2.5 受约束膨胀的线性复杂度随机化算法求解

给定一个椭球，受约束膨胀步骤需要同时保证椭球体积的单调性和约束可行性。该步骤首先为每个障碍物 $\bar{\mathcal{O}}_i$ 计算最优的半空间 $\mathcal{H}(a_i)$ ，使其既能够包含 \bar{Q} ，排除 $\bar{\mathcal{O}}_i$ 并最大化膨胀比例。其次，该步骤直接选取在所有障碍物中最紧的半空间。

由于 $\mathcal{H}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq a^T a\}$ 永远和球心处于原点的球相切于 $a \in \mathbb{R}^n$ 。该球的半径则可计算为

$$\text{dist}(\text{coint}(\mathcal{H}(a)), \mathbf{0}) = \|a\|. \quad (2-30)$$

因此，仅仅考虑 \bar{Q} 和障碍物 $\bar{\mathcal{O}}_i$ 时的受约束膨胀可以描述为以下的数学规划问题，

$$\max_{a \in \mathbb{R}^n} a^T a, \quad (2-31a)$$

$$\text{s.t. } v^T a \leq a^T a, \forall v \in \bar{\mathcal{Q}}, \quad (2-31b)$$

$$u^T a \geq a^T a, \forall u \in \bar{\mathcal{O}}_i. \quad (2-31c)$$

尽管该半径最大化问题是非凸的，我们可以通过几何问题的极对偶（Polar Duality）来获得其等价的凸的二次规划。算法1保证了该问题的最优解 $a^T a > 0$ ，即该原点始终处于最优解对应的半空间的内部。我们直接优化该平面最小范数点关于原点的极对偶平面向

量 b , 即将 $a = b/(b^T b)$ 带入到原问题中, 可以获得如下等价的凸二次规划问题

$$\min_{b \in \mathbb{R}^n} b^T b, \quad (2-32a)$$

$$\text{s.t. } v^T b \leq 1, \forall v \in \bar{\mathcal{Q}}, \quad (2-32b)$$

$$u^T b \geq 1, \forall u \in \bar{\mathcal{O}}_i, \quad (2-32c)$$

其中 b 的物理含义是各个平面关于原点的对偶表示。值得说明的是, 该凸二次规划中的线性约束仅需要在 $\bar{\mathcal{Q}}$ 和 $\bar{\mathcal{O}}_i$ 的顶点上施加。至此, 我们获得了关于受约束膨胀的凸二次规划表示。为了高效地求解该问题, 我们的受约束膨胀子算法需要以低计算复杂度直接得到该二次规划的精确解, 而不是简单地借助通用二次规划算法进行数值迭代求解。

问题的维度 n 和约束的个数 $(s + s_i)$ 同时决定了二次规划 (2-32) 的求解复杂度。由于 n 可被认为是常数, 我们将 Seidel 的线性复杂度线性规划算法^[71] 推广到严格凸二次规划上, 从而给出关于 (2-32) 在低维情况下的期望线性复杂度随机化算法。值得一提的是, (2-32) 是一个在算法 1 仿射变换后的最小二范数问题, 而它在变换前则具有一般的严格凸二次规划的形式, 且二次目标函数的正定矩阵被当前迭代的椭球矩阵唯一决定。换言之, 算法 1 的第一个内层循环实质上是在隐式地将一个严格凸的二次规划转换为对应的最小二范数等价形式, 并且关于每个转换后的障碍物的最小二范数解并不需要回代为二次规划的解。在这里我们则显式地给出针对一般低维度严格凸二次规划问题到最小范数问题的等价转换, 而后再给出最小范数问题的线性复杂度随机化算法。

考虑的二次规划问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T M_Q x + c_Q^T x, \text{s.t. } A_Q x \leq b_Q, \quad (2-33)$$

其中 $c_Q \in \mathbb{R}^n, A_Q \in \mathbb{R}^{m \times n}, b_Q \in \mathbb{R}^m$ 且 $M_Q \in \mathcal{S}_{>0}^n$ 是一个正定矩阵。那么 M_Q 的 Cholesky 分解存在且唯一, 记为 $M_Q = L_Q L_Q^T$ 。我们引入一个新变量 $y \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$y = L_Q^T x + L_Q^{-1} c_Q, \quad (2-34)$$

即有代换

$$x = L_Q^{-T} y - (L_Q L_Q^T)^{-1} c_Q. \quad (2-35)$$

此时，原二次规划 (2-33) 等价于以下最小二范数问题

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} y^T y, \text{ s.t. } E y \leq f, \quad (2-36)$$

其中 $E = A_Q L_Q^{-T}$ 且 $f = A_Q (L_Q L_Q^T)^{-1} c_Q + b_Q$ 。显然，对最小二范数问题 (2-36) 的求解可以直接获得对应的严格凸二次规划问题 (2-33) 的解，而该转换过程已经在算法1中被隐式地执行了。下面我们给出低维度最小二范数问题 (2-36) 的线性复杂度随机化算法。

最小二范数问题 (2-36) 的随机化算法首先生成关于 1 到 m 序列的一个随机置换，并将 m 个约束按照随机置换的顺序排列。我们记随机置换后的第 j 个约束为 $E_j y \leq f_j$ ，其中 E_j 为 E 按随机置换对应的第 j 个行向量， f_j 对应随机置换后的 f 的第 j 个元素。随机化算法的思想是，从无约束最小化二范数问题的解为 $y = \mathbf{0}$ 开始，逐个加入第 j 个约束，并检查加入该约束之前的最优值是否违反该约束。如若第 j 个约束没有被违反，则继续加入下一个约束。如若违反，则在加入第 j 个约束之后关于第 1 到 j 约束下的最小二范数问题的最优解必定以第 j 个约束本身为积极约束。即当前第 j 步的最优解必定在约束平面 $E_j y = f_j$ 上。显然，由于约束平面的引入，第 j 步的最优解求解可以归结为一个约束平面上的最小二范数问题。利用该问题的几何结构可以知道，该问题等价于一个 $n - 1$ 维的最小二范数子问题，且该子问题具有和 (2-36) 同样的形式。我们假设该子问题可以被成功求解，那么当前的第 j 步的最优解也可以计算得出，则可以继续加入下一个约束。

以上过程即为随机化算法的框架，由于原问题的维度 n 是较小的常数，因此在每一轮计算当前最优解时有一定几率会涉及到 $n - 1$ 维子问题的递归调用。那么当 $n = 1$ 的时候，问题 (2-36) 等价于维护区间内最小绝对值的平凡问题，该问题的可行性判定和解可以被直接计算出来。任何时候子问题不可行时，表明整个问题同样不具备可行解。因此，由该递归过程可知，上述框架中的递归调用层数不会超过问题的维度 n 。该随机化算法的思想在于问题维度 n 很小而约束规模 m 巨大时，每次加入新的约束时，该约束成为积极约束的概率很小，因此递归调用的概率也很小。该算法框架的期望复杂度是 $O(n!m)$ ，因此在常用维度 $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ 时候，该期望复杂度关于约束规模仅仅成线性增长^[71]。此外，由于该算法采用随机置换对约束的顺序进行预处理，因此其实际性能不依赖于输入顺序，而几乎总是在期望线性复杂度上。上述框架的一个重要之处在于将约束平面 $E_j y = f_j$ 上最小二范数子问题的转换为与问题 (2-36) 相同的形式。该过程的

效率和数值稳定性会对算法整体的效率和稳定性产生极大的影响。

假定有一个 n 维的等式/不等式约束最小二范数问题

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} y^T y, \text{ s.t. } E y \leq f, g^T y = h, \quad (2-37)$$

其中 $E \in \mathbb{R}^{\bar{m} \times n}$, $f \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$, $g \in \mathbb{R}^n$ 且 $h \in \mathbb{R}$ 。易知, 令 $\bar{m} = j - 1$, $g = E_j^T$ 以及 $h = f_j$ 即为随机化算法中新加入约束为积极约束的情况。我们通过 Householder 反射来获得该问题在 $n - 1$ 维超平面上对应的不等式约束最小范数问题。由于二范数在正交矩阵变换下具有不变性, 因此我们在约束平面 $g^T y = h$ 上建立新的标准坐标系。我们采取约束平面 $g^T y = h$ 以 g 上的最小范数点作为标准坐标系的原点, 即

$$v = \frac{hg}{g^T g}, \quad (2-38)$$

那么易验证在约束平面 $g^T y = h$ 上任意一点均满足

$$\frac{1}{2} y^T y = \frac{1}{2} (y - v)^T (y - v) + \frac{1}{2} v^T v, \quad (2-39)$$

此时在该平面上的 $n - 1$ 维空间上最小化二范数等价于在约束平面上最小化二范数。同时 v 也是和问题几何尺度成比例的平面法向量, 具有直观的数值稳定性, 因此我们利用法向量 v 计算 Householder 反射。取 v 具有最大绝对值的元素

$$i = \arg \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |v_k|. \quad (2-40)$$

那么将向量 v 变换到和 e_i 平行的钝角反射向量 u 为

$$u = v + \operatorname{sgn}(v_i) \|v\| e_i, \quad (2-41)$$

对应的 Householder 反射变换为

$$H = \mathbf{I}_n - \frac{2uu^T}{u^T u}. \quad (2-42)$$

采用最大绝对值元素所在维度对应的钝角反射向量可以令 Householder 变换避免由于反射角过小引起条件数过大的问题。该过程隐式地等价于行变换下的 Householder QR 分解的单步操作。该过程建立向量 v 的补空间的标准坐标系可以比 Schmidt 正交化 (即三

维几何中基于叉积的方法) 具有更高的数值稳定性。容易验证

$$Hv = -\text{sgn}(v_i)\|v\|e_i, \quad (2-43)$$

由于 H 为正交矩阵, 上式表明 H 除第 i 行之外的所有行向量构成了 v 的补空间的一组标准正交基。对于该标准正交基, 我们引入对应的坐标 $z \in \mathbb{R}^{n-1}$, 并记 $\bar{H}_i \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ 为 H^T 除去第 i 个列向量之后的矩阵。那么坐标 z 对应的向量为

$$y = \bar{H}_i z + v. \quad (2-44)$$

根据分解 (2-39) 可知, 在约束平面上最小化向量 x 的平方二范数等价于最小化

$$\frac{1}{2}\|\bar{H}_i z\|^2 = \frac{1}{2}z^T \bar{H}_i^T \bar{H}_i z = \frac{1}{2}z^T z, \quad (2-45)$$

于是我们在约束平面上构造出了相应的线性不等式约束的最小范数问题。对应 z 的线性约束可通过将 (2-44) 代入到 $Ey \leq f$ 得到。最终, 我们可以得到子问题 (2-37) 如下的 $n-1$ 维最小范数子问题

$$\min_{z \in \mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{2}z^T z, \text{ s.t. } E\bar{H}_i z \leq f - Ev. \quad (2-46)$$

显然, 该子问题具有和问题 (2-36) 同样的结构, 且维度更低, 因此可以直接在线性复杂度随机化算法中被递归调用求解。

至此, 我们完成了对 Seidel 算法^[71] 从线性规划到严格正定不等式约束二次规划的推广。该随机化算法的期望复杂度 $O(n!m)$ 使得它适用于低维几何计算过程中同类型问题的高效精确求解。借助该随机化算法, 本方案中的受约束膨胀处理所有障碍物的计算复杂度仅和障碍物的顶点个数总和成线性增长。其效率在常用的低维度几何问题上相较于著名的 Goldfarb-Idnani 对偶积极集二次规划精确算法^[72]、基于算子分裂的二次规划一阶近似算法 OSQP^[73] 以及基于内点法的二次规划近似算法 HPIPM^[74] 在 $n \leq 7$ 且约束个数 m 巨大时具有更高的计算效率和简洁性。

本文提出的快速区域迭代膨胀算法相比于现有的凸可行域计算方法具有高质量、高效率且强可控性的特点。高质量意味着算法生成的凸多面体的体积应尽可能大以保证对环境中安全区域充分地近似。高效率则意味着算法复杂度应该尽可能地低, 使得该模块可以实时高频率处理大规模的数据。最重要的一点在于可控性, 即算法必须严格满足所生成的凸多面体包含给定的点集凸包。这一点保证了算法可以实现对可行路径的有限覆

盖、对稀疏体素地图在有限步内完成处理以及生成与凸机器人机身无碰撞的区域线性近似。传统的算法无法同时满足质量、效率和可控性这三个方面，本文提出的算法则能够在三个方面兼顾，并均强于现有的可行域提取算法。

2.6 地图可行域的离线和在线提取算法

基于凸多面体的可行域可以直接被轨迹规划算法用以构建解析形式的安全约束。它使得轨迹规划免于频繁访问存取海量的三维离散数据。我们基于快速区域迭代膨胀算法设计离散数据地图中的可行域空间提取算法，该算法既可以离线进行，以完成对通用格式地图的预处理，也可以在线进行，作为轨迹规划算法的前置模块。同常见的地图表示不同的是，利用该算法完成的可行域提取结果可以在大规模场景下可以利用紧凑的参数表示出平方公里级的大范围可行域，从而可以在资源受限的多旋翼无人机机载平台上灵活地配置与维护。可行域提取算法可以适用于诸如稀疏占据体素地图（Sparse Occupancy Voxel Map）、点云地图（Point Cloud Map）或者低多边形网格地图（Low Poly Mesh Map），具有极高的灵活度。

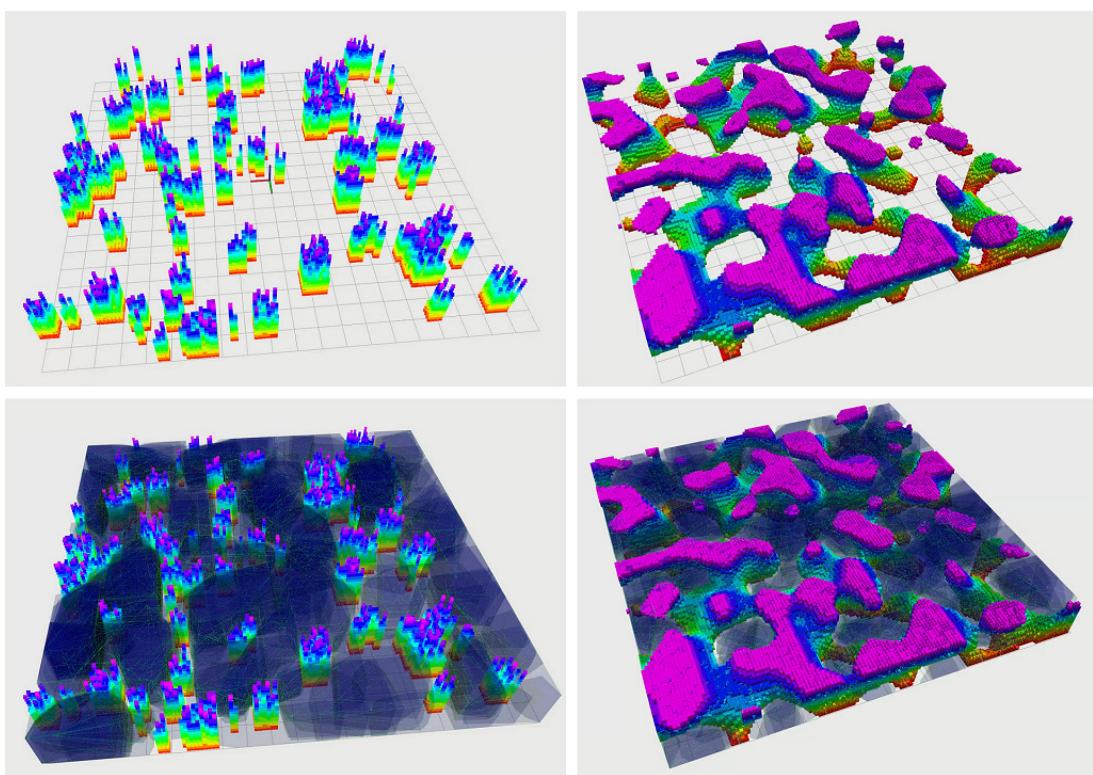


图 2.3 可行域离线提取算法对两种地图处理结果

我们令 \mathcal{F} 表示给定地图中关于运动规划参数空间的可行域。地图可行域的提取即需要寻找到一系列凸多面体 $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{F}$ 使得所有凸多面体的集合能够以合理的填充率近似 \mathcal{F} , 即

$$\text{vol} \left(\bigcup_{i=1}^{M_{\mathcal{P}}} \mathcal{P}_i \right) > (1 - \epsilon) \text{vol} (\mathcal{F}), \quad (2-47)$$

其中 $\text{vol}(\cdot)$ 代表集合的体积且

$$\mathcal{P}_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid A_i x \preceq b_i \right\}. \quad (2-48)$$

对于地图的离线处理, 我们首先按分辨率对地图所在的尺度计算离散坐标。例如, 当地图的尺度为 $L \times W \times H$ 且分辨率为 Δ 时, 地图的离散坐标由 Cartesian 积

$$\{1, 2, \dots, \lfloor L/\Delta \rfloor\} \times \{1, 2, \dots, \lfloor W/\Delta \rfloor\} \times \{1, 2, \dots, \lfloor H/\Delta \rfloor\} \quad (2-49)$$

构成。在第 j 轮迭代过程中我们采用拒绝采样法随机采样出体素完全属于 $\mathcal{F} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}_i$ 的离散坐标位置点, 并以对应体素的 8 个顶点为凸机器人的顶点, 采用快速区域迭代膨胀算法 (算法1) 计算出包含这些顶点且体积尽可能大的凸多面体 \mathcal{P}_{j+1} 。然后将该凸多面体加入已有凸多面体的并集。该过程由 $j \leftarrow j + 1$ 不断迭代, 直到所有的离散坐标均被采样完毕, 或者由于采样点处于被凸多面体覆盖过的区域导致拒绝比率超过 $1 - \epsilon$ 。我们采用多层次线段树^[75] (Multi-Level Segment Tree) 对凸多面体的轴向包围盒 (Axis-Aligned Bounding Boxes) 进行管理并完成对任意空间位置所处包围盒的重叠查询 (Stabbing Queries)。对地图离线处理的结果如图2.3所示, 其中可行域均被蓝色凸多面体紧密填充。在处理后的地图中, 任意空间位置均能通过管理凸多面体的数据结构高效地查询到该位置邻近自由空间的近似。

轨迹规划经常要求从一条由多个线段顺序连接构成的可行路径计算出与其同拓扑的可行域。这种由凸多面体连通序列构成的集合在多旋翼无人机运动规划领域也称为安全飞行走廊 (Safe Flight Corridor)。我们同样可以借助快速区域迭代膨胀算法 (算法1) 或者已经离线处理好的地图来完成对该路径拓扑下可行域的在线计算。我们以 $\bar{r}(l) : [0, L] \mapsto \mathbb{R}^3$ 表示一个由长度参数化的路径。由于不论是算法1还是完成处理的离线地图均可从三维可行点 x 返回一个包含该点体素且体积尽可能大的凸多面体, 我们以 $\mathcal{P}(x)$ 来表示该算法1或者地图数据结构的调用接口。基于该无碰撞的路径, 我们利用如下的算法来生成一条同拓扑的安全飞行走廊 \mathcal{S} 。算法2可以在有限步内完成迭代, 这

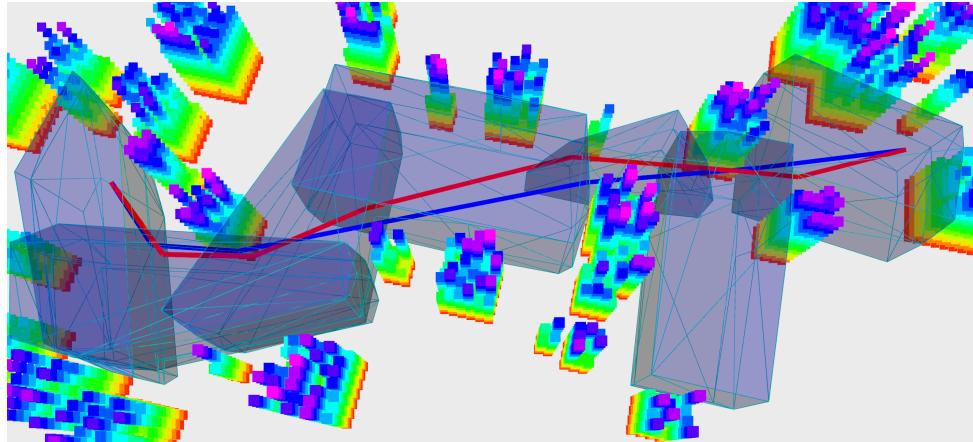


图 2.4 可行路径同拓扑的安全飞行走廊

算法 2: 同拓扑安全走廊生成算法 (Homotopic Corridor Generation)

Input: 可行路径 $\bar{r}(l)$ 和调用接口 $\mathcal{P}(x)$

Output: 安全走廊 \mathcal{S}

```

1 begin
2    $\mathcal{S} \leftarrow \{\}, l \leftarrow 0$ 
3   while  $l \leq L$  do
4      $x \leftarrow \bar{r}(l)$ 
5      $\bar{\mathcal{P}} \leftarrow \mathcal{P}(x)$ 
6      $\mathcal{S}.\text{append } (\bar{\mathcal{P}})$ 
7      $l \leftarrow \max_{\theta \in [l, L]} \theta, s.t. \bar{r}(\vartheta) \in \bar{\mathcal{P}}, \forall \vartheta \in [l, \theta]$ 
8   end
9   return  $\mathcal{S};$ 
10 end

```

是因为由于每个调用接口 $\mathcal{P}(x)$ 得到的凸多面体均能够覆盖至少一个体素，因此平均下来每次新生成的多面体所覆盖的路径长度至少为体素宽度的一半，同时整个路径长度有限，因此该算法可以在有限步骤内退出。该算法实质上寻找了路径 $\bar{r}(l)$ 的一个凸覆盖。它既可以基于已处理好的离线地图，也可以调用在线可行域生成算法，因此该框架可以适用于多种格式的地图和多种需求场景。生成的 \mathcal{S} 可以为后续的和可行路径同拓扑的轨迹规划提供解析的可行域描述，而不需要令轨迹规划算法再次面对庞大的地图数据。图2.4中给出了该算法根据红色可行路径生成安全飞行走廊的实例。我们以凸多面体的序列 $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_M\}$ 来表示对应的安全飞行走廊 \mathcal{S} 。算法2生成的安全飞行走廊通常可以进一步简化。该序列能保证相邻的 \mathcal{P}_k 和 \mathcal{P}_{k+1} 连通，而一旦任意两个不相邻凸多面

体的重叠区域足够大，我们可以采样短路操作，即删除这两个多面体的中间序列。尽管短路操作不能保证处理后的安全走廊和原可行路径处于同一拓扑，但是可以大大简化飞行走廊的凸多面体个数，从而加快轨迹规划的效率。为了计算任意两个凸多面体 \mathcal{P}_i 和 \mathcal{P}_j 是否重叠以及重叠深度是否足够大。我们记 \mathcal{P}_i 的不等式为 $A_i x \leq b_i$, \mathcal{P}_j 的不等式为 $A_j x \leq b_j$, 并规定 A_i 和 A_j 所有行向量均为单位长度向量。那么令

$$A_{(i,j)} := (A_i^T, A_j^T)^T, \quad b_{(i,j)} := (b_i^T, b_j^T)^T, \quad (2-50)$$

则两个凸多面体的相交部分为 $A_{(i,j)}x \leq b_{(i,j)}$ 。为了判断该集合是否为空集，我们利用 Seidel 算法^[71] 以最低的复杂度求解该不等式的最大阈值问题对应的线性规划，

$$\max_{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}} \bar{x}^T e_{n+1}, \text{ s.t. } (A_{(i,j)}, \mathbf{1}) \bar{x} \leq b_{(i,j)}. \quad (2-51)$$

该线性规划始终是可行的，并且其最优解 \bar{x} 的第 $n+1$ 个元素代表满足所有不等式同时可以具有的最大阈值。如果该阈值为正，则表明 \mathcal{P}_i 和 \mathcal{P}_j 相互重叠，且在重叠区域内具有最大深度的位置向量由 \bar{x} 的前 n 个元素构成。一旦阈值 $\bar{x}(n+1)$ 足够大，则可以认为两个凸多面体充分重叠。利用这种方式，可以进一步利用短路法简化多面体序列 $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_M\}$ 来获得一个更短但仍然保持连通的简化序列。

2.7 本章小结

本章提出了可行域计算的几何问题以及对应的求解算法，为各种各样数据类型描述下的三维地图和多旋翼无人机轨迹规划模块之间构建了一条高速且可靠的接口。针对该问题，本章提出了快速区域迭代膨胀算法，通过不断地求解两个低维的数学规划实现凸多面体体积的提升的同时严格保证可行性约束。本章利用两个数学规划的低维几何结构给出了子问题的快速求解过程，使得可行域求解算法在障碍物密集和无人机外形参数精细的情况下仍能保证子问题以低复杂度的完成求解。该算法能够对任意处于非碰撞位姿下的多旋翼无人机提供一个体积足够大的凸多面体，以表征对邻近可行域约束的线性化近似。调用该算法可以生成与低维可行路径同拓扑的安全飞行走廊，并且该安全走廊由凸多面体的并集构成，可直接充当轨迹优化中解析的线性不等式约束。由此，多旋翼的轨迹优化在安全性方面可以仅仅借助由紧凑参数描述的安全走廊来完成，从而专注于对多旋翼动力学方面的约束。

3 多旋翼无人机轨迹的时空参数化方法

3.1 引言

对轨迹规划算法而言，轨迹本身的参数化形式在很大程度上会影响规划求解的质量与效率。为适用于具有任意形式运动学-动力学微分方程的移动机器人系统，大部分通用求解方法采用系统状态和控制输入的离散时间序列来表征运动轨迹。相应地，微分方程进行离散形成的等式约束可以很容易地被施加在状态和控制序列上。这样的方法具有高度的灵活性，同时也不可避免地引入了时间离散分辨率直接相关的决策变量和等式约束个数。对通用的数值优化求解器而言，决策变量和约束个数的提升会使得相应的问题求解变得更为耗时。

本章利用多旋翼无人机动力学的特点，针对连续时间轨迹设计稀疏参数化方法。由于多旋翼具有微分平坦特性，动力学微分约束可通过平坦输出空间轨迹足够的连续性阶数来严格保证。对多旋翼而言，并不需要通过精细的时间离散来实现动力学微分约束，因此我们直接对平坦输出轨迹进行参数化。为保证足够阶的连续性，本章考察并给出了积分链系统在多阶段无约束最小控制问题的最优性充要条件。该条件本身可以实现对给定时间参数和空间参数生成唯一确定且足够光滑的轨迹。因此，本章以该最优性充要条件来定义平坦输出轨迹的时间-空间参数化方法。为满足状态和控制上具有一般形式的连续时间约束，对轨迹进行时间采样不可避免。因此本章将轨迹优化的决策变量维度和连续时间约束采样的分辨率解耦。由于多旋翼飞行的许多任务需求均可以通过飞行轨迹在时间和空间上的调整来满足。本章对任意需求函数设计了线性复杂度的轨迹时空形变梯度的计算，使得该形式的轨迹可借助常见优化过程完成满足任务需求的形变。本章进一步对该时空参数化方法同传统方法在各个方面进行了详尽的比较和讨论。

3.2 微分平坦特性和平坦输出轨迹的直接优化

考虑如下的仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3-1)$$

其中 $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, 满秩输入映射矩阵 $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$, 系统状态为 $x \in \mathbb{R}^n$, 控制输入为 $u \in \mathbb{R}^m$ 。一个微分平坦的动力系统必定存在一组由状态 x 和控制 u 的有限阶导数唯一决定的平坦输出 (Flat Output) $z \in \mathbb{R}^m$, 同时 x 和 u 也可以被该平坦输出及其有限阶导数参数化:

$$x = \Psi_x(z, \dot{z}, \dots, z^{(s-1)}), \quad (3-2)$$

$$u = \Psi_u(z, \dot{z}, \dots, z^{(s)}), \quad (3-3)$$

其中平坦变换 $\Psi_x : (\mathbb{R}^m)^s \mapsto \mathbb{R}^n$ 和 $\Psi_u : (\mathbb{R}^m)^{s+1} \mapsto \mathbb{R}^m$ 均被系统方程 f 和 g 唯一决定。形象地说, 该动力系统的状态和控制可以从 z 的瞬态信息中直接计算出来, 而不需要像一般动力系统对微分方程做依赖于初值的积分。

利用动力系统的微分平坦特性, 系统的微分约束 (3-1) 可以在轨迹生成中很轻易地得到满足。通过引入一组新的控制变量 $v = z^{(s)}$ 并约定 $z^{[s-1]} \in \mathbb{R}^{ms}$ 如下

$$z^{[s-1]} = (z^T, \dot{z}^T, \dots, z^{(s-1)T})^T, \quad (3-4)$$

那么控制量 $u = \Psi_u(z^{[s-1]}, v)$ 可以直接将原微分平坦的动力系统精确线性化为 m 个解耦的 s 阶积分链。规定 z_i 表示 z 的第 i 个元素, v_i 表示 v 的第 i 个元素, 并且 $z_i^{[s-1]} = (z_i, \dot{z}_i, \dots, z_i^{(s-1)})^T$ 。那么第 i 个积分链可以表示为

$$\dot{z}_i^{[s-1]} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{s-1} \\ 0 & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} z_i^{[s-1]} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} v_i, \quad (3-5)$$

其中 $\mathbf{0}$ 和 \mathbf{I} 分别是合适大小的全零矩阵和单位矩阵。对于任意给定的初始和末尾状态, 积分链 (3-5) 的边界条件可以被代数解析地计算出来。因此, 任何从这 m 个积分链积分得到的平坦输出轨迹均可以被平坦变换 (3-2) 和 (3-3) 唯一地转换得到严格满足原动力系统微分约束的全状态轨迹和控制输入^[9]。

如图3.1所示, 动力系统的平坦变换 Ψ_u 和 Ψ_x 消去了状态-输入空间 (左图) 的微分约束 (蓝色曲面)。状态-输入集合约束 \mathcal{G}_D (红色区域) 也相应地被变换为平坦输出空间 (右图) 的集合约束 (蓝色区域)。对 m 较小的欠驱动系统而言, 微分平坦变换 Ψ_x 和 Ψ_u 可以进一步降低所需要规划的轨迹维度, 并隐式地消除系统微分约束 (3-1)。作为一个副作用, 映射 Ψ_x 和 Ψ_u 给原系统 (3-1) 的状态-输入约束引入了额外的非线性。一般而言, 这种非线性会令原本状态集合上的凸约束在平坦空间里变得非凸。对于平坦输出空

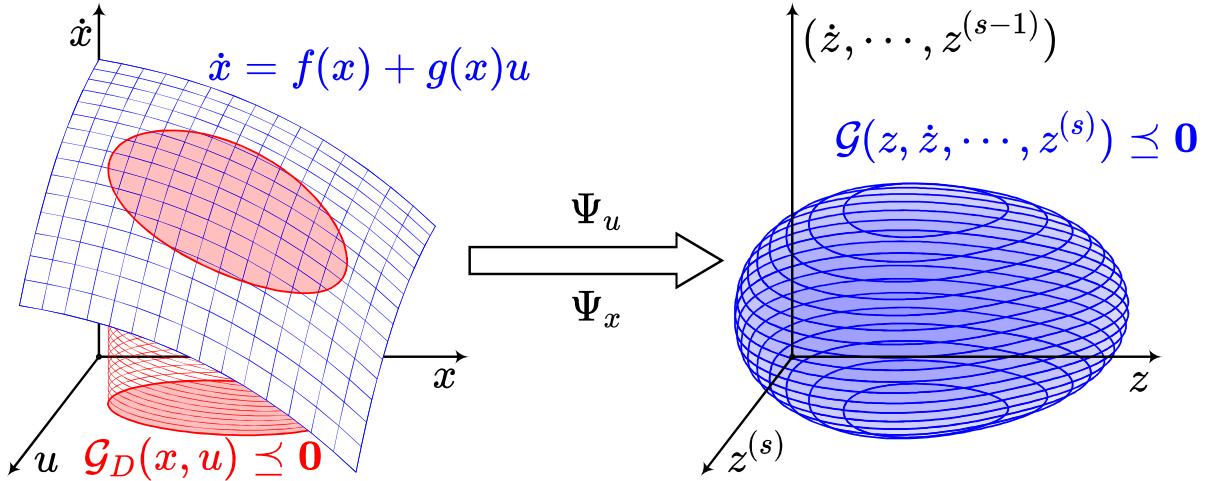


图 3.1 动力系统的平坦变换对微分约束和不等式约束的作用

间和运动规划的参数空间高度一致的动力系统而言，非线性的副作用被大大地缓解，这是因为由安全性导致的可行性约束往往是直接定义在参数空间中的。

多旋翼无人机的微分平坦特性已经有很多广泛的研究，同时其平坦输出被证明具有显著的物理意义，且和一般运动规划所考虑的参数空间高度地重合。对各种各样的欠驱动多旋翼而言，平坦变换 Ψ_x 和 Ψ_u 的解析形式已经被许多工作给出^[12-15]。更重要的是，这些多旋翼的平坦输出一般具有类似的形式：

$$z = (p_x, p_y, p_z, \psi)^T \quad (3-6)$$

其中 $(p_x, p_y, p_z)^T$ 是无人机的重心的位移， ψ 是无人机的偏航角度。值得一提的是，该偏航角度并不仅限于 Euler 角中狭义的偏航角定义。该平坦输出 z ，特别是其位移部分，为多旋翼无人机在负载的空间环境中安全导航规划带来了极大的便捷性。

为了实现可行的运动规划，我们首先直接在平坦输出空间中优化对应的轨迹 $z(t)$ ： $[0, T] \mapsto \mathbb{R}^m$ 并直接施加对应的空间约束。而后，平坦映射 Ψ_x 和 Ψ_u 作用于 $z(t)$ 和其高阶信息上，可以直接得到多旋翼的状态-输入轨迹 $x(t)$ 和 $u(t)$ 。

为了实现飞行轨迹的平滑性，我们采用带时间正则项的二次控制代价泛函^[76] 来优化 $z(t)$ 。在状态-输入上的约束可以被归为参数空间安全约束和用户自定义的动态约束。一般而言，在参数空间中无碰撞的运动要求

$$z(t) \in \mathcal{F}, \forall t \in [0, T], \quad (3-7)$$

其中 \mathcal{F} 是运动规划参数空间内的无障碍物区域。其次，用户自定义的动态约束，例如驱

动器限位约束或者具体飞行任务的需求约束可以表征为

$$\mathcal{G}_{\mathcal{D}}(x(t), u(t), t) \preceq \mathbf{0}, \forall t \in [0, T]. \quad (3-8)$$

利用 Ψ_x 和 Ψ_u , 在平坦输出 $z(t)$ 上的约束函数即为

$$\mathcal{G}_{\mathcal{D}}(\Psi_x(z^{[s-1]}(t)), \Psi_u(z^{[s]}(t)), t) \preceq \mathbf{0}, \forall t \in [0, T]. \quad (3-9)$$

显然, 借助平坦变换, 任何在 x 和 u 上的约束均在平坦输出 $z(t)$ 及其有限阶导数上有着对应的等价形式。我们统一规定 (3-9) 被表示为

$$\mathcal{G}(z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(s)}(t)) \preceq \mathbf{0}, \forall t \in [0, T], \quad (3-10)$$

其中 \mathcal{G} 是一个 n_g 维的向量函数。

值得一提的是, 除了多旋翼力学的微分平坦特性及其平坦输出, 我们没有做出更多的假设。换言之, 本章的轨迹优化框架支持多种多样的多旋翼无人机, 包括但不局限于现有文献所考虑的类型^[12-16]。

3.3 多旋翼全状态轨迹优化的数学表述

多旋翼轨迹优化问题可以归结为如下的形式:

$$\min_{z(t), T} \int_0^T v(t)^T \mathbf{W} v(t) dt + \rho(T), \quad (3-11a)$$

$$s.t. \quad z^{(s)}(t) = v(t), \forall t \in [0, T], \quad (3-11b)$$

$$\mathcal{G}(z(t), \dots, z^{(s)}(t), t) \preceq \mathbf{0}, \forall t \in [0, T], \quad (3-11c)$$

$$z(t) \in \mathcal{F}, \forall t \in [0, T], \quad (3-11d)$$

$$z^{[s-1]}(0) = \bar{z}_o, z^{[s-1]}(T) = \bar{z}_f, \quad (3-11e)$$

其中 $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是一个全正对角矩阵, $\rho : [0, \infty) \mapsto [0, \infty]$ 代表代价泛函的时间正则项, $\bar{z}_o \in \mathbb{R}^{ms}$ 和 $\bar{z}_f \in \mathbb{R}^{ms}$ 分别是平坦输出轨迹的初始和终末边界条件。此外, 正如现有文献中广泛假设的^[76], 我们允许控制输入 v 允许存在有限个间断点。

该轨迹优化问题 (3-11) 是一个非平凡的问题, 因为连续时间约束 \mathcal{G} 和非凸集合约束 \mathcal{F} 完全取决于外部定义的任务需求和环境信息。为了使得该问题定义良好, 我们对该表

述中的约束做进一步假设。对于时间正则项，我们假设其可以权衡控制代价泛函和轨迹总耗时，使得运动轨迹既足够平滑又能符合任务的时间要求。一般的，假设该正则项具有如下形式，

$$\rho_s(T) = \sum_{i=0}^{M_T} b_i T^i, \quad (3-12)$$

其中最高项系数 b_{M_T} 为严格正实数。一般可以取 $\rho_s(T) = k_\rho T$ 以防止飞行时间过久，或者取 $\rho_s(T) = k_\rho(T - T_\Sigma)^2$ 并指定 T_Σ 为一个期望飞行时间的常量。除此之外，许多飞行任务需要严格执行飞行总时间，那么时间正则项同样也可作为一个指示函数来约束飞行时长为期望值：

$$\rho_f(T) = \begin{cases} 0 & \text{if } T = T_\Sigma, \\ \infty & \text{if } T \neq T_\Sigma. \end{cases} \quad (3-13)$$

对于非线性约束 \mathcal{G} ，我们要求其至少是 C^2 的，即二阶连续可微。参数空间中的可行区域 \mathcal{F} 由 M_P 个闭且凸的几何子单元的并集近似构成，即

$$\mathcal{F} \simeq \tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{i=1}^{M_P} \mathcal{P}_i. \quad (3-14)$$

此外，我们假定这些几何单元的并集和可行路径同拓扑，因此规定这些凸单元之间具有局部顺序连接的形式：

$$\begin{cases} \mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset & \text{if } |i - j| = 2, \\ \text{Int}(\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j) \neq \emptyset & \text{if } |i - j| \leq 1. \end{cases} \quad (3-15)$$

其中 $\text{Int}(\cdot)$ 代表集合的内部。轨迹首尾的位置 \bar{z}_o 和 \bar{z}_f 分别在该并集的首尾子单元 \mathcal{P}_1 和 \mathcal{P}_{M_P} 之中。我们考虑 $\tilde{\mathcal{F}}$ 之中的几何子单元分别是 m 维闭球

$$\mathcal{P}_i^B = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - o_i\|_2 \leq r_i \right\}, \quad (3-16)$$

或者更一般的 \mathcal{H} -表示^[57] 下的有限凸多面体

$$\mathcal{P}_i^H = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}_i x \preceq b_i \right\}, \quad (3-17)$$

其中 $\mathbf{A}_i x \preceq b_i$ 可以包含冗余的线性不等式。关于 (3-11) 中的轨迹优化问题，本章并不对 (3-8) 中不同任务需求的约束 \mathcal{G}_D 做具体形式的假设。

3.4 多阶段无约束最小化控制量轨迹

为了满足几何约束 \mathcal{F} , 调节轨迹的航点^[43] 或是控制点^[55] 有助于保证轨迹的安全。为了满足连续时间约束 \mathcal{G} , 调节轨迹的时间分配也有助于满足飞行的物理限制^[20]。因此, 时间和空间参数对于一个灵活的轨迹表征而言都是极其重要的。在这些参数给定的前提下生成一条尽可能顺滑的飞行轨迹是无人机轨迹规划的一个基本问题。

我们通过求解线性二次最优时间 (Linear Quadratic Minimum Time) 问题来从确定的时间和空间参数中生成尽可能光滑的轨迹。尽管线性二次最优时间已经有着很广泛的研究和应用, 已有工作通常将该问题局限于一个阶段, 即仅仅考虑一组边界条件和各种代价泛函下的轨迹生成问题^[77-79]。我们着手于多阶段的线性二次最优时间的问题, 其中每个阶段均有各自的边界条件。此外, 我们假定时间分配也已经被作为问题的常量参数固定下来。考虑如下 M 阶段无约束控制量最小化问题:

$$\min_{z(t)} \int_{t_0}^{t_M} v(t)^T \mathbf{W} v(t) dt, \quad (3-18a)$$

$$s.t. \quad z^{(s)}(t) = v(t), \quad \forall t \in [t_0, t_M], \quad (3-18b)$$

$$z^{[s-1]}(t_0) = \bar{z}_o, \quad z^{[s-1]}(t_M) = \bar{z}_f, \quad (3-18c)$$

$$z^{[d_i-1]}(t_i) = \bar{z}_i, \quad 1 \leq i < M, \quad (3-18d)$$

$$t_{i-1} < t_i, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (3-18e)$$

其中时间区间 $[t_0, t_M]$ 被 $M + 1$ 个固定时间戳分隔为 M 阶段。 $\bar{z}_o, \bar{z}_f \in \mathbb{R}^{ms}$ 分别为整条轨迹初始和终末的边界条件。中间条件 $\bar{z}_i \in \mathbb{R}^{md_i}$ 须满足 $d_i \leq s$ 。该条件规定了 t_i 时刻轨迹直至 d_i 阶导数 $z(t_i), \dot{z}(t_i), \dots, z^{(d_i-1)}(t_i)$ 的具体值。例如, 如果 $z(t)$ 仅仅被要求在 t_i 时刻经过一个固定的航点, 那么 $d_i = 1$, 这是因为 \bar{z}_i 仅仅规定了轨迹的 0-阶导数。

目前关于无约束控制量最小化的工作更多地关注在问题 (3-18) 一些特例的最优性必要条件上。在空中机器人领域, 基于二次规划的求解^[12] 和闭式解^[43] 均显式或隐式地优化未知的节点导数, 并将参数化方式作为先验已知。然而, 这种求解方式实际上是不必要的并且低效率的。在控制领域, $d_i = 1$ 的情况也被作为一个基本问题^[80, 81], 最优解的必要性条件则是通过可控性 Gramian 矩阵来获得的。这些必要性条件适用于更一般的线性系统和非多项式解的情况, 然而这些条件缺乏计算上的直观性。我们需要将无约束最

优轨迹的生成过程作为一种参数化的方法来使用，因此仅有必要性条件的保证难以避免潜在的多解甚至退化解的最坏可能性。在这些最坏情况下，进行参数优化所需要的参数灵敏度可能不连续或者根本不存在。

3.5 最优性充要条件

我们在本节中给出无约束轨迹优化问题(3-18)在所有可能的 d_i, \bar{z}_i 和 t_i 的设定下最优解的充分必要条件，因此，唯一最优的轨迹可以依据这些条件直接从时间和空间参数中构造出来。此外，问题(3-18)的解的存在唯一性也得到了保证。

我们首先利用状态增广将问题(3-18)从Lagrangian形式转化为Mayer形式^[38]。引入一个新的状态 $y \in \mathbb{R}^{ms+1}$ ，由原状态 z 和一个标量 $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ 增广得到，

$$y = \begin{pmatrix} z^{[s-1]} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (3-19)$$

对应的增广系统 $\dot{y} = \hat{f}(y, v)$ 具有以下结构

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ v \\ v^T \mathbf{W} v \end{pmatrix}, \quad (3-20)$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m(s-1)} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{ms \times ms}. \quad (3-21)$$

我们设计一个针对该增广系统的 M 阶段运行过程，其中第 i 阶段为 $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$ 。值得注意的是，在这个新的运行过程中，系统的状态在每个阶段开始的时候均会发生跳变。具体地，状态跳变仅仅发生在 \tilde{y} 上。规定增广系统第 i 阶段的轨迹为 $y_{[i]} : \Delta_i \mapsto \mathbb{R}^{ms+1}$ 。 $y_{[i]}$ 由 $z_{[i]}^{[s-1]}$ 和 $\tilde{y}_{[i]}$ 两个部分组成。在每个阶段的初始时刻 t_i ，状态从 $y_{[i]}$ 转移到 $y_{[i+1]}$ ，对应的 \tilde{y} 也相应地置零

$$\tilde{y}_{[i+1]}(t_i) = 0, \quad 0 \leq i < M, \quad (3-22)$$

因此产生一个从 $\tilde{y}_{[i]}(t_i)$ 到0的跳变。 $z^{[s-1]}$ 部分则在任意阶段之间自始至终保持连续

$$z_{[i]}^{[s-1]}(t_i) = z_{[i+1]}^{[s-1]}(t_i), \quad 1 \leq i < M. \quad (3-23)$$

当然, (3-18c) 和 (3-18d) 中的边界条件和中间条件也必须被满足, 即

$$z_{[1]}^{[s-1]}(t_0) = \bar{z}_o, z_{[M]}^{[s-1]}(t_M) = \bar{z}_f, \quad (3-24)$$

$$z_{[i]}^{[d_i-1]}(t_i) = \bar{z}_i, 1 \leq i < M. \quad (3-25)$$

在这个新的运行过程中, 问题 (3-18) 中的代价泛函被转换成了增广系统在每个阶段终端时刻的代价之和 $\sum_{i=1}^M \tilde{y}_{[i]}(t_i)$ 。因此, 增广系统的最优轨迹和原问题的最优轨迹在 $z^{[s-1]}$ 部分始终保持一致。

我们利用混合最大值原理^[82] 来获得在上述运行过程和代价下的最优化必要条件。

定理 1 (混合最大值原理). 令实数 $t_0 < \dots < t_M$ 并且 $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ 。对于任意绝对连续函数的组合 $x_k : \Delta_k \mapsto \mathbb{R}^{n_k}$, 定义一个向量 $x_\Sigma \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ 如下

$$x_\Sigma = (x_1^\top(t_0), x_1^\top(t_1), \dots, x_M^\top(t_{M-1}), x_M^\top(t_M))^\top. \quad (3-26)$$

其中 $\bar{n} = 2 \sum_{k=1}^M n_k$ 。在区间 $\Delta = [t_0, t_M]$ 上考虑如下问题

$$\min_{u_k, x_k} J(x_\Sigma), \quad (3-27a)$$

$$s.t. \dot{x}_k(t) = f_k(x_k(t), u_k(t)), \quad (3-27b)$$

$$u_k(t) \in U_k \subseteq \mathbb{R}^{r_k}, \quad (3-27c)$$

$$\forall t \in \Delta_k, k = 1, \dots, M, \quad (3-27d)$$

$$\eta(x_\Sigma) = \mathbf{0}, \quad (3-27e)$$

其中 $f_k : \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^{r_k} \mapsto \mathbb{R}^{n_k}$, $J : \mathbb{R}^{\bar{n}} \mapsto \mathbb{R}$ 以及 $\eta : \mathbb{R}^{\bar{n}} \mapsto \mathbb{R}^q$ 均连续可微, $u_k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{r_k}$ 可测并在 Δ_k 上有界。

将问题 (3-27) 的最优过程表示为 $(x^*(t), u^*(t))$ 。那么, 存在组合 $(\alpha, \gamma, \psi_1, \dots, \psi_M)$ 满足 $\alpha \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}^q$ 且 $\psi_k : \Delta_k \mapsto \mathbb{R}^{n_k}$ 满足 Lipschitz 连续, 并对应 M 个 Pontryagin 函数

$$H_k(\psi_k, x_k, u_k) = \psi_k^\top f_k(x_k, u_k), t \in \Delta_k, \quad (3-28)$$

和一个 Lagrange 函数

$$L(x_\Sigma) = \alpha J(x_\Sigma) + \gamma^\top \eta(x_\Sigma). \quad (3-29)$$

以下条件对 $k = 1, \dots, M$ 均成立:

- 非平凡条件:

$$(\alpha, \gamma^T) \neq \mathbf{0}; \quad (3-30)$$

- 协态方程: 对几乎所有 $t \in \Delta_k$,

$$\dot{\psi}_k(t) = -\frac{\partial H_k}{\partial x_k}(\psi_k(t), x_k^*(t), u_k^*(t)); \quad (3-31)$$

- 横截条件:

$$\begin{cases} \psi_k(t_{k-1}) = L_{x_k(t_{k-1})}(x_\Sigma^*), \\ \psi_k(t_k) = -L_{x_k(t_k)}(x_\Sigma^*); \end{cases} \quad (3-32)$$

- 最大值条件: 对所有 $t \in \Delta_k$,

$$H_k(\psi_k(t), x_k^*(t), u_k^*(t)) = \sup_{u_k \in U_k} H_k(\psi_k(t), x_k^*(t), u_k) = 0. \quad (3-33)$$

证明. 本定理的证明可直接从 Dmitruk 和 Kaganovich 的定理四^[82] 得到。这里仅仅考虑每一个阶段的系统 f_k 是时不变的, 且所有区间 Δ_k 是常量。此外, x_Σ 仅受等式约束。□

根据定理1, 第 i 阶段的协态 $\psi_{[i]} : \Delta_i \mapsto \mathbb{R}^{ms+1}$ 定义为

$$\psi_{[i]} = \begin{pmatrix} \lambda_{[i]} \\ \mu_{[i]} \end{pmatrix} = (\lambda_{[i]1}, \lambda_{[i]2}, \dots, \lambda_{[i]s}, \mu_{[i]})^T, \quad (3-34)$$

其中 $\mu_{[i]} : \Delta_i \mapsto \mathbb{R}$ 。我们规定 $\lambda_{[i]j} : \Delta_i \mapsto \mathbb{R}^m$ 是 $\lambda_{[i]} : \Delta_i \mapsto \mathbb{R}^{ms}$ 中的第 j 个映射。那么增广系统 (3-20) 的第 i 个 Pontryagin 函数为

$$\begin{aligned} H_i(\psi_{[i]}, y_{[i]}, v_{[i]}) &= \psi_{[i]}^T \hat{f}(y_{[i]}, v_{[i]}) \\ &= \lambda_{[i]}^T \bar{\mathbf{A}} z_{[i]}^{[s-1]} + \lambda_{[i]s}^T v_{[i]} + \mu_{[i]} v_{[i]}^T \mathbf{W} v_{[i]}. \end{aligned} \quad (3-35)$$

由关于 $\mu_{[i]}$ 的协态方程 (3-31) 可以得到 $\dot{\mu}_{[i]} = 0$, 这表明 $\mu_{[i]}(t) = \bar{\mu}_i \in \mathbb{R}$ 在区间 Δ_i 上是一个常值。因此 H_i 是一个关于 $v_{[i]}$ 的二次函数, 即

$$H_i(\psi_{[i]}, y_{[i]}, v_{[i]}) = \lambda_{[i]}^T \bar{\mathbf{A}} z_{[i]}^{[s-1]} + \lambda_{[i]s}^T v_{[i]} + \bar{\mu}_i v_{[i]}^T \mathbf{W} v_{[i]}. \quad (3-36)$$

通过关于 $\lambda_{[i]}$ 的协态方程, 可以得到

$$\dot{\lambda}_{[i]} = -\bar{\mathbf{A}}^T \lambda_{[i]}. \quad (3-37)$$

将该系数矩阵展开并写成递归形式，则有

$$\dot{\lambda}_{[i]j} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{if } j = 1, \\ -\lambda_{[i]j-1} & \text{if } 2 \leq j \leq s. \end{cases} \quad (3-38)$$

显然 $\lambda_{[i]s}(t)$ 是一个 $s-1$ 次多项式。

根据最大值条件 (3-33)，在区间 Δ_i 上 H_i 的上确界恒为 0。那么 \mathbf{W} 的半正定特性保证了 $\bar{\mu}_i \leq 0$ 。如果 $\bar{\mu}_i = 0$ 会令 (3-36) 成为关于 $v_{[i]}$ 的线性函数。这种情况下，在区间 Δ_i 上的恒零上确界必须由 $\lambda_{[i]s}(t) = \mathbf{0}$ 来保证。由此，协态方程 (3-37) 保证了 $\psi_{[i]}(t) = \mathbf{0}$ 对区间 Δ_i 内的所有 t 均成立。矛盾的是，此时非平凡条件 (3-30) 和横截条件 (3-32) 无法同时成立。因此， $\bar{\mu}_i \neq 0$ 恒成立。综上， $\bar{\mu}_i < 0$ 在整个 Δ_i 区间上恒成立。此时最优控制 $v_{[i]}^*$ 满足

$$\frac{\partial H_i}{\partial v_{[i]}}(\psi_{[i]}, y_{[i]}^*, v_{[i]}^*) = \lambda_{[i]s} + 2\bar{\mu}_i \mathbf{W} v_{[i]}^* = \mathbf{0}, \quad (3-39)$$

即

$$v_{[i]}^*(t) = -\frac{1}{2\bar{\mu}_i} \mathbf{W}^{-1} \lambda_{[i]s}(t), \quad \forall t \in \Delta_i. \quad (3-40)$$

因此， $z_{[i]}^*$ 是一个由 s 阶积分链以 $\lambda_{[i]s}(t)$ 为输入产生的 $2s-1$ 次多项式。

为了进一步探索最优解的结构，我们用约束 (3-23)，(3-24) 和 (3-25) 以及增广系统的代价函数生成对应的 Lagrange 函数，即

$$\begin{aligned} L(y_\Sigma) = & \alpha \sum_{i=1}^M \tilde{y}_{[i]}(t_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \gamma_i \tilde{y}_{[i+1]}(t_i) \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} (\zeta_i^T, \sigma_i^T)(z_{[i]}^{[s-1]}(t_i) - z_{[i+1]}^{[s-1]}(t_i)) \\ & + \theta_o^T(z_{[1]}^{[s-1]}(t_0) - \bar{z}_o) + \theta_f^T(z_{[M]}^{[s-1]}(t_M) - \bar{z}_f) \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} \theta_i^T(z_{[i]}^{[d_i-1]}(t_i) - \bar{z}_i), \end{aligned} \quad (3-41)$$

其中 $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $\zeta_i \in \mathbb{R}^{md_i}$, $\sigma_i \in \mathbb{R}^{m(s-d_i)}$, $\theta_o \in \mathbb{R}^{ms}$, $\theta_f \in \mathbb{R}^{ms}$ 和 $\theta_i \in \mathbb{R}^{md_i}$ 均为对应约束的常量系数， y_Σ 的定义同 (3-26)。根据横截条件 (3-32)，将 L 关于 y_Σ 求导可以直接给

出 $\psi_{[i]}$ 和 $\psi_{[i+1]}$ 的边界值，即

$$\lambda_{[i]}(t_i) = - \begin{pmatrix} \zeta_i + \theta_i \\ \sigma_i \end{pmatrix}, \quad \lambda_{[i+1]}(t_i) = - \begin{pmatrix} \zeta_i \\ \sigma_i \end{pmatrix}, \quad (3-42)$$

$$\mu_{[i]}(t_i) = \mu_{[i+1]}(t_{i+1}) = -\alpha. \quad (3-43)$$

由于 $\mu_{[i+1]}(t) = \bar{\mu}_{i+1}$ 在区间 Δ_{i+1} 上恒成立，我们有

$$\bar{\mu}_i = -\alpha, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (3-44)$$

最后，将 (3-37), (3-42) 和 (3-44) 带入 (3-40) 中，可得任意相邻两阶段的最优控制满足

$$v^{*(j)}_{[i]}(t_i) = v^{*(j)}_{[i+1]}(t_i), \quad 0 \leq j < (s - d_i). \quad (3-45)$$

至此，我们知道问题 (3-18) 的最优控制在 t_i 时刻是 $s - d_i - 1$ 阶连续可微的。相应地，最优状态轨迹必定由 M 个 $2s - 1$ 次多项式构成，并且该轨迹在 t_i 时刻是 $2s - d_i - 1$ 阶连续可微的。

综上从 (3-40) 到 (3-45) 的所有条件，我们可以给出问题 (3-18) 的最优性条件。更重要的是，该最优性条件不仅仅是一个必要条件，其充分性也被如下的定理给出。

定理 2 (最优性充要条件). 轨迹 $z^*(t) : [t_0, t_M] \mapsto \mathbb{R}^m$ 是问题 (3-18) 的最优解，当且仅当以下条件均成立：

- 对所有 $1 \leq i \leq M$ 而言，映射 $z^*(t) : [t_{i-1}, t_i] \mapsto \mathbb{R}^m$ 是一个 $2s - 1$ 次多项式；
- 边界条件 (3-18c) 和中间条件 (3-18d) 均被满足；
- 对所有 $1 \leq i < M$ 而言，映射 $z^*(t)$ 在 t_i 时刻 $\bar{d}_i - 1$ 阶连续可微，其中 $\bar{d}_i = 2s - d_i$ 。

此外，同时满足上述所有条件的轨迹存在且唯一。

证明. 作为定理1的推论，上述条件关于必要性的证明已经从 (3-34) 到 (3-45) 的分析中给出。下面给出上述条件的充分性。

我们考虑定义在区间 $[t_0, t_M]$ 上的 M 段 $2s$ 阶多项式样条空间（多项式样条的阶即多项式次数加一）。对于该空间中任一样条 $x : [t_0, t_M] \mapsto \mathbb{R}$ ，条件 $x_{i-1}^{(j)}(t_i) = x_i^{(j)}(t_i)$ 须对所有 $0 \leq j < \bar{d}_i$ 和 $1 \leq i < M$ 均成立。此外，规定 $\bar{d}_i = 2s - d_i$, $d_i \leq s$ 以及

$D_{i,j} = i \cdot s + \sum_{k=1}^j d_k$ 。根据 Schumaker 的定理 4.4^[83], 该样条空间实质上是一个维度为 $\bar{D} = D_{2,M-1}$ 的线性空间。

更重要的是, 该线性空间存在一组显式的基。根据原区间的分割 $t_0 < t_1 < \dots < t_M$, 我们定义 $\bar{t}_1 \leq \bar{t}_2 \leq \dots \leq \bar{t}_{\bar{M}}$ 为一组长度为 $\bar{M} = D_{4,M-1}$ 的扩展分割^[83] 如下

$$\bar{t}_i = \begin{cases} t_0 & \text{if } 1 \leq i \leq D_{2,0}, \\ t_j & \text{if } D_{2,j-1} < i \leq D_{2,j}, \\ t_M & \text{if } D_{2,M-1} < i \leq \bar{M}. \end{cases} \quad (3-46)$$

基于这组扩展分割, Schumaker 的定理 4.9^[83] 显式地构建了 \bar{D} 个函数构成了该样条空间的一组基 $\{B_i(t) : [t_0, t_M] \mapsto \mathbb{R}\}_{i=1}^{\bar{D}}$ 。

我们在这组基张成的线性空间中考虑条件 (3-18c) 和 (3-18d)。这些边界条件和中间条件确定了原分割中各个节点时间截的有限阶导数值。这些导数值对于基函数 $\{B_i(t)\}_{i=1}^{\bar{D}}$ 而言则是待拟合的目标值。我们仅仅需要各个分割节点上需要拟合的导数阶数, 而不需要具体值, 因为我们仅仅探讨该拟合所构成的线性矩阵的奇异性, 这和待拟合的目标值无关。我们以 τ_i 表示第 i 个待拟合值对应的时间截, 其中

$$\tau_i = \begin{cases} t_0 & \text{if } 1 \leq i \leq D_{1,0}, \\ t_j & \text{if } D_{1,j-1} < i \leq D_{1,j}, \\ t_M & \text{if } D_{1,M-1} < i \leq \bar{D}. \end{cases} \quad (3-47)$$

此外, 我们以 ν_i 表示在 τ_i 时刻的待拟合阶数, 即

$$\nu_i = \begin{cases} i-1 & \text{if } 1 \leq i \leq D_{1,0}, \\ i-1-D_{1,j-1} & \text{if } D_{1,j-1} < i \leq D_{1,j}, \\ i-1-D_{1,M-1} & \text{if } D_{1,M-1} < i \leq \bar{D}. \end{cases} \quad (3-48)$$

那么, 条件 (3-18c) 和 (3-18d) 在这组基上生成了一组线性方程组, 对应的系数矩阵为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1^{(\nu_1)}(\tau_1) & B_2^{(\nu_1)}(\tau_1) & \cdots & B_{\bar{D}}^{(\nu_1)}(\tau_1) \\ B_1^{(\nu_2)}(\tau_2) & B_2^{(\nu_2)}(\tau_2) & \cdots & B_{\bar{D}}^{(\nu_2)}(\tau_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1^{(\nu_{\bar{D}})}(\tau_{\bar{D}}) & B_2^{(\nu_{\bar{D}})}(\tau_{\bar{D}}) & \cdots & B_{\bar{D}}^{(\nu_{\bar{D}})}(\tau_{\bar{D}}) \end{pmatrix}. \quad (3-49)$$

显然, 定理2的最优化条件在每个维度上关于解在基上的系数矩阵 \mathbf{B} 均是一个方阵。

根据 Schumaker 的定理 4.67^[83], 矩阵 \mathbf{B} 是非奇异的, 当且仅当

$$\tau_i \in \delta_i = \begin{cases} [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+2s}) & \text{if } \nu_i + \alpha_i - 2s \geq 0, \\ (\bar{t}_i, \bar{t}_{i+2s}) & \text{if } \nu_i + \alpha_i - 2s < 0, \end{cases} \quad (3-50)$$

对所有的 $i = 1, \dots, \bar{D}$ 均成立, 其中 α_i 定义为

$$\alpha_i = \{ \max j : \bar{t}_i = \dots = \bar{t}_{i+j-1} \}. \quad (3-51)$$

我们在下面论证条件 (3-50) 在这里是成立的。

显然 α_i 满足

$$\alpha_i = \begin{cases} D_{2,0} - i + 1 & \text{if } 1 \leq i \leq D_{2,0}, \\ D_{2,j} - i + 1 & \text{if } D_{2,j-1} < i \leq D_{2,j}. \end{cases} \quad (3-52)$$

通过 (3-48) 和 (3-52), 我们可以看出 $\nu_i < s$ 和 $\alpha_i \leq s$ 对所有的 $i > s$ 均成立, 这表明

$$\begin{cases} \nu_i + \alpha_i - 2s = 0 & \text{if } 1 \leq i \leq s, \\ \nu_i + \alpha_i - 2s < 0 & \text{if } s < i \leq \bar{D}. \end{cases} \quad (3-53)$$

因此, δ_i 可计算为

$$\delta_i = \begin{cases} [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+2s}) & \text{if } 1 \leq i \leq s, \\ (\bar{t}_i, \bar{t}_{i+2s}) & \text{if } s < i \leq \bar{D}. \end{cases} \quad (3-54)$$

那么, 我们有

$$\tau_i = t_0 \in [t_0, t_1) \subseteq [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+2s}) = \delta_i, \quad 1 \leq i \leq s. \quad (3-55)$$

当 $i > s$ 的时候, 令 $\bar{t}_i = t_k$, $\bar{t}_{i+2s} = t_l$ 并且 $\tau_i = t_j$ 。正如 (3-46) 和 (3-47) 所保证的, 我们有

$$D_{2,k-1} < i, \quad (i+2s) \leq D_{2,l}, \quad D_{1,j-1} < i \leq D_{1,j}. \quad (3-56)$$

由于 $d_i \leq s$ 对所有 $1 \leq i < M$ 而言均成立, 那么以下两组不等式也成立

$$D_{2,k-1} < i \leq D_{1,j} = (D_{2,j} - s) \leq D_{2,j-1}, \quad (3-57)$$

$$D_{2,j} = (D_{1,j} + s) \leq (D_{1,j-1} + 2s) < (i+2s) \leq D_{2,l}. \quad (3-58)$$

不等式(3-57)和(3-58)保证了 $k < j$ 以及 $j < l$, 那么我们有

$$\tau_i = t_j \in (t_k, t_l) = (\bar{t}_i, \bar{t}_{i+2s}) = \delta_i, s < i \leq \bar{D}. \quad (3-59)$$

此时, 结合条件(3-55)和(3-59), 我们可以知道保证矩阵 \mathbf{B} 非奇异的条件(3-50)永远成立。因此, 以 \mathbf{B} 为系数矩阵的拟合方程不仅存在解, 而且具有唯一解。

综上, 我们知道最优化条件保证在每一个维度上均存在唯一解。该最优化条件的必要性, 存在性和唯一性可得出其充分性。换言之, 该条件为最优化充要条件。 \square

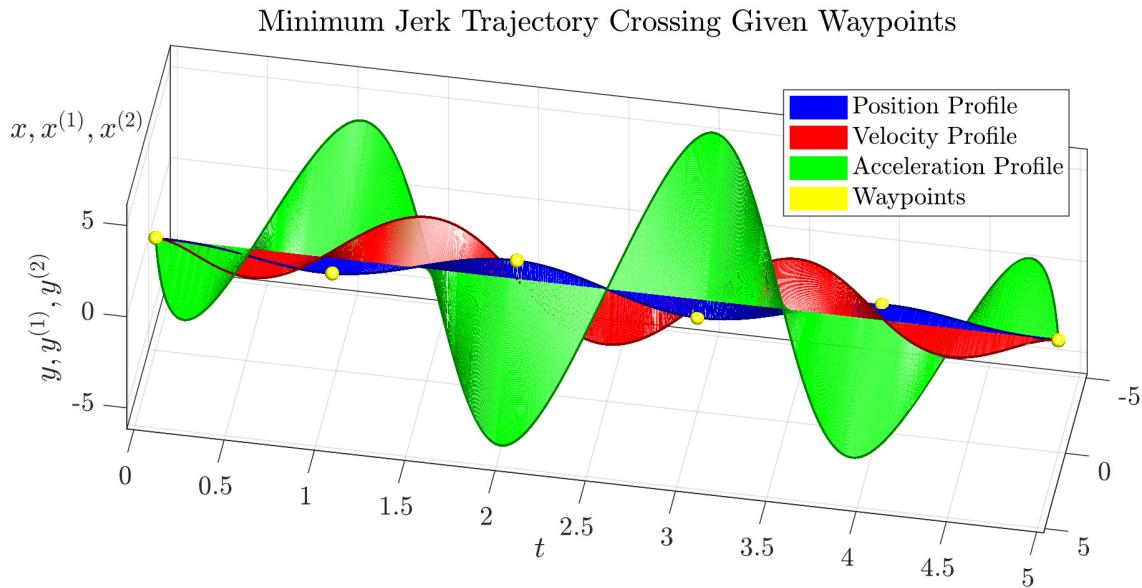


图 3.2 二维三阶积分链系统最小控制量的状态轨迹

为了直观地阐述该最优化充要条件, 我们以多阶段最小化三阶导数的平方积分(Minimum Jerk)为例子。在这个例子中, 位置、速度和加速度均为 3 阶积分链的状态, 也即 $s = 3$ 。正如图3.2, 我们仅仅要求其位置轨迹在预先固定的时刻穿过一些预定的位置航点, 即 $d_i = 1$ 。在该图中, 黄色的球所在的位置即为这些航点的二维坐标。积分链的状态连续性保证了该位置轨迹至 2 阶连续可微, 因此在该图中, 位置、速度和加速度所构成的状态轨迹在航点上依然是连续的。然而定理2保证了该例子的最优轨迹是 4 阶连续可微的, 因此如图3.3所示, 该系统的最优输入轨迹及其一阶梯导数均存在且连续, 即加速度的一阶导(Jerk)和二阶导数(Snap)均是处处连续的。不仅如此, 该轨迹的多项式系数关于节点上的 4 阶连续可微的条件和边界/中间条件一起构成了唯一存在的最优轨迹的充要条件。

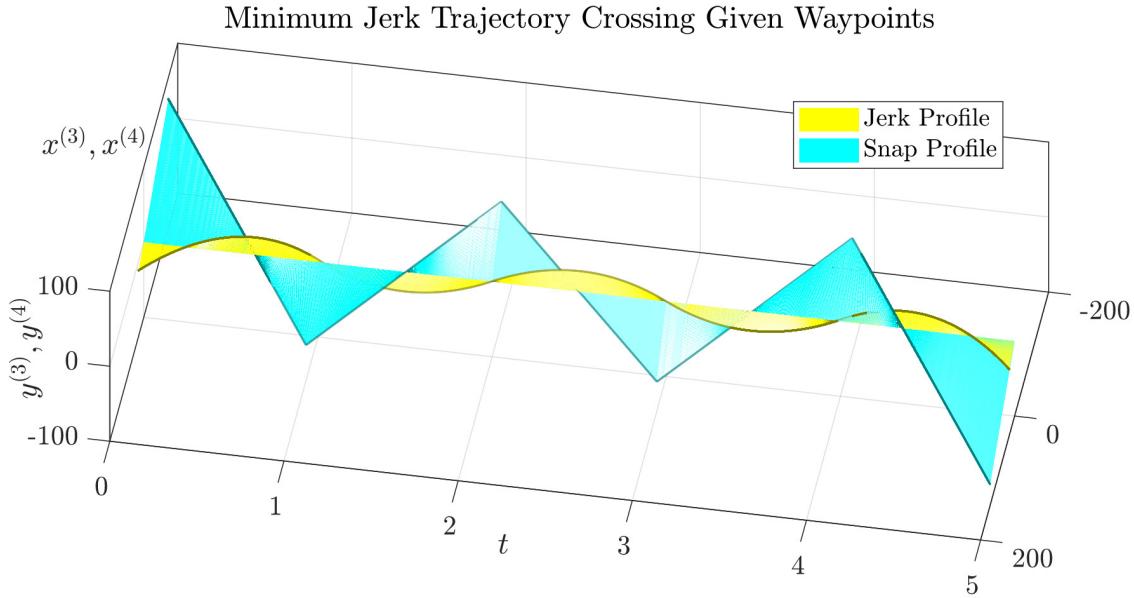


图 3.3 二维三阶积分链系统最小控制量的输入及其导数轨迹

3.6 不借助代价泛函的无约束最优轨迹求解

定理2给出了一个直接构造唯一解的方法。该方法具有线性时间和空间复杂度。为了求解最小化代价泛函对应的最优轨迹，该方法甚至不需要任何涉及到代价泛函本身或其梯度的计算。

考虑一个 m 维的轨迹，其第 i 段是一个 $N = 2s - 1$ 次的多项式：

$$p_i(t) = \mathbf{c}_i^T \beta(t - t_{i-1}), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (3-60)$$

其中 $\beta(x) = (1, x, \dots, x^N)^T$ 为多项式的基， $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{2s \times m}$ 为多项式系数矩阵。我们在多项式内采用相对时间，即规定 $t_0 = 0$ 。一个轨迹可以被多段多项式的系数矩阵 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{2Ms \times m}$ 和时间向量 $\mathbf{T} \in \mathbb{R}_{>0}^M$ 唯一决定，即

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1^T, \dots, \mathbf{c}_M^T)^T, \quad \mathbf{T} = (T_1, \dots, T_M)^T, \quad (3-61)$$

其中， T_i 表示第 i 段多项式的时长。第 i 个时间戳和轨迹总时间则分别为 $t_i = \sum_{j=1}^i T_j$ 和 $T = \|\mathbf{T}\|_1$ 。一个 M 段多项式样条轨迹 $p : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^m$ 定义为

$$p(t) = p_i(t), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad \forall i \in \{1, \dots, M\}. \quad (3-62)$$

为了计算问题 (3-18) 的唯一最优解，我们直接将最优化充要条件施加在对应的系

数矩阵 \mathbf{c} 上。规定 $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_M \in \mathbb{R}^{s \times m}$ 和 $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{\bar{d}_i \times m}$ 分别是边界条件和中间条件给定的具体导数值。其中 \mathbf{D}_i 的每个列向量都对应于一个维度。那么在 t_i 时刻的条件可以被 $\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ 作为系数矩阵表达：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_i & \mathbf{F}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_i \\ \mathbf{0}_{\bar{d}_i \times m} \end{pmatrix}, \quad (3-63)$$

其中

$$\mathbf{E}_i = (\beta(T_i), \dots, \beta^{(d_i-1)}(T_i), \beta(T_i), \dots, \beta^{(\bar{d}_i-1)}(T_i))^T, \quad (3-64)$$

$$\mathbf{F}_i = (\mathbf{0}, -\beta(0), \dots, -\beta^{(\bar{d}_i-1)}(0))^T. \quad (3-65)$$

对于初始和末尾的边界条件，我们定义 $\mathbf{F}_0, \mathbf{E}_M \in \mathbb{R}^{s \times 2s}$ 如下

$$\mathbf{F}_0 = (\beta(0), \dots, \beta^{(s-1)}(0))^T, \quad (3-66)$$

$$\mathbf{E}_M = (\beta(T_M), \dots, \beta^{(s-1)}(T_M))^T. \quad (3-67)$$

那么定理2的最优性充要条件在系数矩阵上构成了一个线性方程组

$$\mathbf{M}\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (3-68)$$

其中 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2Ms \times 2Ms}$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2Ms \times m}$ 分别为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_1 & \mathbf{F}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 & \mathbf{F}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{F}_{M-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{E}_M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{0}_{\bar{d}_1 \times m} \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{M-1} \\ \mathbf{0}_{\bar{d}_{M-1} \times m} \\ \mathbf{D}_M \end{pmatrix}. \quad (3-69)$$

定理2中的唯一性保证了 \mathbf{M} 对任意全正时间分配向量 $\mathbf{T} \succ \mathbf{0}$ 而言均是非奇异矩阵。因此，该线性方程组最优解 \mathbf{c} 可以通过对线性方程组系统 (3-68) 直接求解获得。一个和计算效率至关重要的事实是，系数矩阵 \mathbf{M} 是一个带状矩阵 (Banded Matrix)。该矩阵的非奇异性进一步保证了其永远存在一个带状 PLU 分解^[65] (Banded PLU Factorization)。

那么，对应的带状系统（Banded System）(3-68)则可以通过该分解，以 $O(M)$ 的时间和空间复杂度直接求解^[84]。借助这种方式，不需要对代价泛函进行值或者梯度的计算，无约束轨迹优化问题 (3-18) 可以被最优性充要条件以理论最低的计算复杂度求解出来。

3.7 单阶段边值问题的显式解

上节考虑的是多阶段情况下仅仅具有边值条件和中间值条件的无约束最优轨迹的求解。在轨迹仅具有边值条件的时候，无约束最优轨迹仍然为 $2s - 1$ 次多项式，其系数矩阵 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{2s \times m}$ 和边值 $\mathbf{b} = (\bar{z}_o^T, \bar{z}_f^T)^T$ 满足如下关系

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}_f(T)\mathbf{c} \quad (3-70)$$

其中 T 为轨迹的时长。由系数矩阵到边界条件的映射矩阵为

$$\mathbf{A}_f(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}(t) & \mathbf{G}(t) \end{pmatrix}, \quad (3-71)$$

其中子矩阵均为 $\mathbb{R}^{s \times s}$ 的常量矩阵或矩阵值函数，

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{cases} (i-1)! & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i \neq j, \end{cases} \quad (3-72)$$

$$\mathbf{F}_{ij}(t) = \begin{cases} (j-1)!/(j-i)! \cdot t^{j-i} & \text{if } i \leq j, \\ 0 & \text{if } i > j, \end{cases} \quad (3-73)$$

$$\mathbf{G}_{ij}(t) = \frac{(s+j-1)!}{(s+j-i)!} \cdot t^{s-i+j}. \quad (3-74)$$

为了从边界条件中求得对应的系数矩阵，我们需要知道 $\mathbf{A}_f(t)$ 的可逆性。实际上， $\mathbf{A}_f(t)$ 是一个由两个变量 $\lambda_0 = 0$ 和 $\lambda_1 = t$ 定义的广义多分支 Vandermonde 矩阵（General Confluent Vandermonde Matrix）。根据 Spitzbart 定理^[85]，该矩阵的逆在 $\lambda_0 \neq \lambda_1$ 时永远存在，且其元素均为一系列由 λ_0 和 λ_1 构成的基础多项式的系数。利用该定理的结论，我们推导了该矩阵的解析逆 $\mathbf{A}_b(t) := \mathbf{A}_f^{-1}(t)$ ，因而系数矩阵可以直接如下计算

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}_b(T)\mathbf{b}. \quad (3-75)$$

逆映射矩阵 $\mathbf{A}_b(t)$ 为

$$\mathbf{A}_b(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}(t) & \mathbf{W}(t) \end{pmatrix}, \quad (3-76)$$

其中子矩阵均为 $\mathbb{R}^{s \times s}$ 的常量矩阵或矩阵值函数,

$$\mathbf{U}_{ij} = \begin{cases} 1/(i-1)! & \text{if } i=j, \\ 0 & \text{if } i \neq j, \end{cases} \quad (3-77)$$

$$\mathbf{V}_{ij}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{s-\max(i,j)} (-1)^k \binom{s}{i+k} \binom{2s-j-k-1}{s-1}}{(j-1)! (-1)^i} \cdot \frac{1}{t^{s+i-j}}, \quad (3-78)$$

$$\mathbf{W}_{ij}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{s-\max(i,j)} \binom{s-k-1}{i-1} \binom{2s-j-k-1}{s-1}}{(j-1)! (-1)^{i+j}} \cdot \frac{1}{t^{s+i-j}}. \quad (3-79)$$

其中, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 代表二项式系数。由此, 单阶段两点边值问题可以通过直接计算该解析形式来完成求解。

3.8 MINCO 轨迹及其时空形变

对于多旋翼无人机而言, 轨迹规划经常要考虑除可行性以外各种各样依赖于具体任务的需求, 例如主动建图与同步定位 (Active SLAM) 中的传感器感知质量^[86], 又或者空中摄影 (Aerial Videography) 中的低遮挡拍摄效果^[87]。这些用户自定义的任务约束基本上要求多旋翼无人机自适应地同时调整飞行轨迹在空间域和时间域的特性。因此, 我们选择轨迹的航点位置以及航点之间的时间作为无约束轨迹优化子问题 (3-18) 中的两类显著的参数。另一个重要的原因在于, 该问题的最优化条件保证了子问题解的存在性和唯一性, 可以知道子问题的最优代价泛函关于这两类参数的灵敏度是良定义的。不仅如此, 本节也会进一步给出该灵敏度的光滑性, 从而直接获得任何需求函数或者约束函数关于它们的解析梯度。在这种完备性的保证下, 我们可以采用迭代的方法, 通过直接操纵这两类参数, 对运动轨迹在时间上和空间上进行形变, 并且每一个迭代的计算过程同样具有线性的计算复杂度。

我们规定飞行轨迹的航点向量为 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{M-1})$, 其中 $q_i \in \mathbb{R}^m$ 是 t_i 时刻预定的 0 阶导数 (即位置)。同时规定 $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_M)^\top$ 为无人机在各个航点间的时间向量, 其中每个元素满足 $T_i \in \mathbb{R}_{>0}$ 以保证物理含义合理性。如图3.4 中所示, 对于任意给定的 \mathbf{q} 和 \mathbf{T} , 定理2的最优化充要条件可以被认为是一类轨迹的降维度参数化的过程。其中

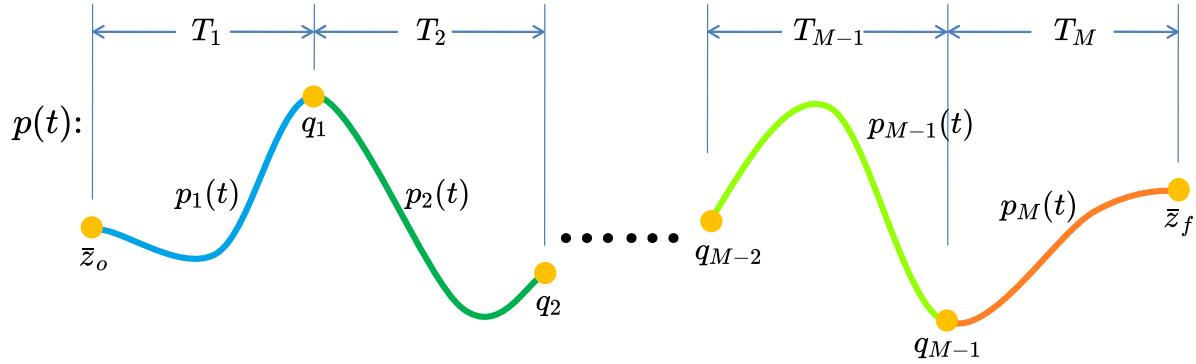


图 3.4 以航点向量和时间向量为参数的轨迹示意图

每一个被参数化的轨迹均是无约束轨迹优化子问题对应的最小控制量轨迹，因而规定此类轨迹由 MINCO 指代，而对应的轨迹集合也表示为 $\mathfrak{T}_{\text{MINCO}}$ ，定义为

$$\mathfrak{T}_{\text{MINCO}} = \left\{ p(t) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^m \mid \mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbf{T}) \text{ 即定理2, } \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{m \times (M-1)}, \mathbf{T} \in \mathbb{R}_{>0}^M \right\}. \quad (3-80)$$

该定义中的维度 m ，积分链的阶数 s 以及初末边界条件均为任意常量，因此在定义中略去不表。直观地看，集合 $\mathfrak{T}_{\text{MINCO}}$ 中的任一轨迹均仅以 \mathbf{q} 和 \mathbf{T} 为参数。从任意的参数获得 $\mathfrak{T}_{\text{MINCO}}$ 中的轨迹可以直接采用上一节的线性复杂度方法。

由于多项式样条轨迹的代价泛函或者约束泛函是其系数矩阵和时间向量的函数。我们将任意用户定义的代价函数或者约束函数表示为 $\mathcal{K}(\mathbf{c}, \mathbf{T})$ 。此外，规定函数 \mathcal{K} 是 C^2 的，即二阶连续可微，并且其梯度也是可获得的。该函数关于 $\mathfrak{T}_{\text{MINCO}}$ 中的轨迹可如下计算，

$$\mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{T}) = \mathcal{K}(\mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbf{T}), \mathbf{T}). \quad (3-81)$$

为使 MINCO 轨迹进行时空形变来最优化需求函数，我们需要 \mathcal{W} 及其关于时间和空间参数的梯度，即 $\partial \mathcal{W} / \partial \mathbf{q}$ 和 $\partial \mathcal{W} / \partial \mathbf{T}$ 。显然，计算 \mathcal{W} 的值即为 MINCO 轨迹的正向生成过程。关键步骤在于梯度的求解。我们给出一种线性复杂度的方案，从任意给定的 $\partial \mathcal{K} / \partial \mathbf{c}$ 和 $\partial \mathcal{K} / \partial \mathbf{T}$ 计算出需求函数关于 MINCO 轨迹参数的梯度 $\partial \mathcal{W} / \partial \mathbf{q}$ 和 $\partial \mathcal{W} / \partial \mathbf{T}$ 。我们将最优化条件导出的线性方程组 (3-68) 重写为参数依赖的形式

$$\mathbf{M}(\mathbf{T})\mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbf{T}) = \mathbf{b}(\mathbf{q}). \quad (3-82)$$

为了便捷性，下面的求解过程暂时省略 $\mathbf{M}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathcal{K}$ 和 \mathcal{W} 中的参数。任何系数矩阵 \mathbf{c} 默认满足最有性条件，即为 $\mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbf{T})$ ，并规定 $q_{i,j}$ 表示 q_i 向量中的第 j 个元素。

关于需求函数 \mathcal{W} 对 \mathbf{q} 的梯度，我们首先对等式 (3-82) 两边关于 $q_{i,j}$ 作微分，即

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial q_{i,j}} = \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_{i,j}}. \quad (3-83)$$

而后，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_{i,j}} &= \text{Tr} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial q_{i,j}} \right)^T \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{c}} \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \left(\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_{i,j}} \right)^T \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{c}} \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_{i,j}} \right)^T \left(\mathbf{M}^{-T} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{c}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3-84)$$

其中 $\text{Tr}(\cdot)$ 代表矩阵的迹。 $\mathbf{b}(\mathbf{q})$ 在 (3-69) 中的定义表明 $\partial \mathbf{b} / \partial q_{i,j}$ 仅仅在第 $(2i-1)s+1$ 行 j 列有一个非零元素 1。因此，将所有对应的标量叠加在一起，即

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i} = \left(\mathbf{M}^{-T} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T e_{(2i-1)s+1}, \quad (3-85)$$

其中 e_j 代表单位阵 \mathbf{I}_{2Ms} 的第 j 个列向量。既然在计算 \mathbf{c} 的时候已经对 \mathbf{M} 做过带状 PLU 分解，我们可以重用该分解结果来避免对 \mathbf{M}^T 的求逆。定义 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{2Ms \times m}$ 如下

$$\mathbf{M}^T \mathbf{G} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{c}}. \quad (3-86)$$

为了对所有 $1 \leq i < M$ 获得对应的 $\partial \mathcal{W} / \partial q_i$ ，我们仅仅需要计算出 \mathbf{G} 即可。规定 \mathbf{M} 的分解表示为 $\mathbf{M} = \mathbf{PLU}$ 。值得注意的是， \mathbf{L} 是一个具有零上带宽^[84] 的带状矩阵，且其对角元素均为 1。 \mathbf{U} 则是一个具有零下带宽^[84] 的带状矩阵，且由于 \mathbf{M} 的非奇异性， \mathbf{U} 对角元素严格非零。行置换矩阵 \mathbf{P} 仅仅改变被操作数的行顺序，并满足 $\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}$ ，其不需要被显式地储存，而仅仅隐式地蕴含在被记录的行交换序列中。至此，我们可以获得 \mathbf{M}^T 的一个带状 LUP 分解^[65] (Banded LUP Factorization)，即 $\mathbf{M}^T = \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{U}} \mathbf{P}^T$ ，其中

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{U}^T (\mathbf{U} \circ \mathbf{I})^{-1}, \quad \bar{\mathbf{U}} = (\mathbf{I} \circ \mathbf{U}) \mathbf{L}^T. \quad (3-87)$$

而 \circ 代表 Hadamard 积。该 LUP 分解中的求逆的操作是对一个对角矩阵完成的，因此， \mathbf{G} 可以利用该分解在线性时间和空间复杂度内求解出来。我们将求得的 \mathbf{G} 以下方式划分

$$\mathbf{G} = (\mathbf{G}_0^T, \mathbf{G}_1^T, \dots, \mathbf{G}_{M-1}^T, \mathbf{G}_M^T)^T \quad (3-88)$$

其中子矩阵的大小定为 $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_M \in \mathbb{R}^{s \times m}$ 以及对所有 $1 \leq i < M$ 均有 $\mathbf{G}_i \in \mathbb{R}^{2s \times m}$ 。至此, \mathcal{W} 关于 \mathbf{q} 的梯度即

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{G}_1^T e_1, \dots, \mathbf{G}_{M-1}^T e_1), \quad (3-89)$$

其中 e_1 代表单位阵 \mathbf{I}_{2s} 的第一个列向量。 $(3-89)$ 中的计算仅仅需要取出 \mathbf{G}^T 中特定的 $M - 1$ 个列向量。

关于需求函数 \mathcal{W} 对 \mathbf{T} 的梯度, 我们首先对 $(3-82)$ 两端关于 T_i 作微分, 即

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T_i} \mathbf{c} + \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial T_i} = \mathbf{0}. \quad (3-90)$$

那么

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T_i} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial T_i} + \text{Tr} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial T_i} \right)^T \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{c}} \right\} \\ &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial T_i} - \text{Tr} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T_i} \mathbf{c} \right)^T \mathbf{M}^{-T} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{c}} \right\} \\ &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial T_i} - \text{Tr} \left\{ \mathbf{G}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T_i} \mathbf{c} \right\}. \end{aligned} \quad (3-91)$$

矩阵 \mathbf{M} 的带状结构保证了

$$\mathbf{G}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T_i} \mathbf{c} = \mathbf{G}_i^T \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial T_i} \mathbf{c}_i. \quad (3-92)$$

至此, 我们可以获得 \mathcal{W} 关于 \mathbf{T} 的梯度, 即

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T_i} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial T_i} - \text{Tr} \left\{ \mathbf{G}_i^T \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial T_i} \mathbf{c}_i \right\}, \quad (3-93)$$

其中 $\partial \mathbf{E}_i / \partial T_i$ 可以从 $(3-64)$ 中解析地计算出来。而后, 对所有 $1 \leq i \leq M$ 计算 $(3-93)$ 可得到 $\partial \mathcal{W} / \partial \mathbf{T}$ 。

至此, 我们完成了对 $\partial \mathcal{W} / \partial \mathbf{q}$ 和 $\partial \mathcal{W} / \partial \mathbf{T}$ 的求解。从 $(3-89)$ 到 $(3-93)$ 的每一步计算, 构成了 $O(M)$ 线性复杂度的梯度计算。对于 \mathcal{K} , 我们不需要任何关于其具体形式的假设。事实上, \mathcal{K} 的二阶连续可微并不是必要的, 因为 \mathcal{K} 的 C^2 性质仅仅是 \mathcal{W} 的 C^2 性质的充分非必要条件。我们仅仅要求最后的 \mathcal{W} 二阶连续可微。一个简单的例子即是, 最小化轨迹 $t = (t_0 + t_M)/2$ 时刻的速度幅值的平方, 由于该时刻并不能保证在优化过程中确定在轨迹的第几段上, 因此其关于 \mathbf{c} 和 \mathbf{T} 是一个间断函数。然而, 容易验证的是, 该需求函数关于 MINCO 轨迹在 $s = 3$ 时的轨迹参数却是二阶连续可微的。那么我们可以

知道，本节给出的线性复杂度梯度求解同时具有高效性和灵活性。通过将其引入到标准的优化求解器中，我们可以完成 MINCO 轨迹满足各种各样任务需求的时空形变，并且保证轨迹的局部光滑性。

3.9 时间均匀 MINCO 轨迹

MINCO 轨迹的参数具有空间和时间上的自由度，这使得它可以被用于需要显式调整时间分配的优化问题中，这对全局轨迹规划而言是一个提高轨迹时间和空间质量的有效手段。在局部规划中，通常会将 MINCO 轨迹在一个局部地图所构成的势场中进行优化，此时在 MINCO 的航点参数上没有任何约束，因此这类应用中可以相对采用更少的时间自由度来换取更高的求解效率。我们将具有时间向量 $\mathbf{T} = (T/M)\mathbf{1}$ 的 MINCO 轨迹称为时间均匀 MINCO 轨迹 (Time-Uniform MINCO Trajectory)，这是因为该轨迹的每段时间均相同。时间均匀 MINCO 轨迹依旧具有时空形变的能力：轨迹可以通过空间点的自由度完成空间形变，并通过总时间的自由度满足各种时间调整的需求。

时间均匀 MINCO 在轨迹的生成和形变上完全具有和非均匀版本相同的线性复杂度操作，而在实际使用中可以具有更低的复杂度常数因子。考虑一个时间均匀 MINCO 轨迹 $p(t) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^m$ 。该轨迹总时长为 T ，且以 $\bar{z}_o, \bar{z}_f \in \mathbb{R}^{ms}$ 为边界条件，同时以航点序列 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{M-1}) \in \mathbb{R}^{m \times (M-1)}$ 为空间参数。规定时间均匀 MINCO 轨迹 $p^\circ(t) : [0, M] \mapsto \mathbb{R}^m$ 以 M 为总时长，以 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{M-1}) \in \mathbb{R}^{m \times (M-1)}$ 为空间参数，以 $\mathcal{S}(T/M)\bar{z}_o, \mathcal{S}(T/M)\bar{z}_f \in \mathbb{R}^{ms}$ 为初末条件，其中 $\mathcal{S}(x) := \text{Diag}(1, x, \dots, x^{(s-1)})$ 。我们定义 p° 为时间均匀 MINCO 轨迹 p 的归一化轨迹。

显然，任意一个时间均匀 MINCO 轨迹 p 可以完全被其归一化轨迹所决定。即通过归一化轨迹的时间缩放可以获得对应的原轨迹，

$$p(t) = p^\circ \left(\frac{M}{T} \cdot t \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3-94)$$

形象地来说，归一化轨迹永远以 1 为每个轨迹段的时间长度。由于原轨迹已经是时间均匀的，因而轨迹整体时间缩放之后的空间形状不发生任何改变，其经过的航点也不发生任何改变。对于初末条件而言，由于轨迹时间压缩到了原来的 M/T ，因此边界条件相较于原轨迹在第 i 阶导数上线下性变化了 $(T/M)^i$ 倍。

利用原轨迹和归一化轨迹的时间缩放性质可以完全避免 MINCO 轨迹生成和优化过

程中的在线 PLU 分解。对于均匀 MINCO 轨迹的生成过程，我们首先计算其归一化轨迹，再经过时间缩放获得原轨迹。对于归一化轨迹而言，其最优充要条件对应的线性方程组为

$$\mathbf{M}(\mathbf{1})\mathbf{c}^\circ(\mathbf{q}, T) = \mathbf{b}^\circ(\mathbf{q}, T). \quad (3-95)$$

可以看出，带状矩阵变成了常量矩阵，而原来的 $\mathbf{b}(\mathbf{q})$ 由于时间的缩放导致其中的边界条件被原轨迹总时间 T 所决定，因此对归一化轨迹而言该矩阵相应地被替换为 $\mathbf{b}^\circ(\mathbf{q}, T)$ 。显然，常量带状矩阵 $\mathbf{M}(\mathbf{1})$ 的 PLU 分解可以被离线计算，相应的在线计算系数矩阵仅仅只需要做回代即可。那么原轨迹每一段的系数矩阵可以通过归一化轨迹相应缩放得到，即

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{q}, T) = \mathcal{S}(M/T)\mathbf{c}_i^\circ(\mathbf{q}, T). \quad (3-96)$$

同样地，在时间均匀 MINCO 轨迹时空形变的梯度计算上面，可以利用归一化轨迹的缩放来完成复杂度常数因子更小的计算，完全避免在线计算带状 PLU 分解。

3.10 MINCO 轨迹的能量函数

我们考虑 MINCO 轨迹的第 i 段 $p_i(t) : [0, T_i] \mapsto \mathbb{R}^m$ ，其中时间采用相对于该段的初始时刻为 0 的时间线。该轨迹的系数矩阵 $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{2s \times m}$ 已经通过最优充要条件获得，则该轨迹满足 $p_i(t) = \mathbf{c}_i^T \beta(t)$ 。定义其能量函数 $J_c(\mathbf{c}_i, T_i)$ 为

$$J_c(\mathbf{c}_i, T_i) = \int_0^{T_i} p_i^{(s)}(t)^T p_i^{(s)}(t) dt \quad (3-97)$$

$$= \int_0^{T_i} \beta^{(s)}(t)^T \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^T \beta^{(s)}(t) dt \quad (3-98)$$

$$= \int_0^{T_i} \text{Tr} (\mathbf{c}_i^T \beta^{(s)}(t) \beta^{(s)}(t)^T \mathbf{c}_i) dt \quad (3-99)$$

$$= \text{Tr} \left\{ \mathbf{c}_i^T \left(\int_0^{T_i} \beta^{(s)}(t) \beta^{(s)}(t)^T dt \right) \mathbf{c}_i \right\}, \quad (3-100)$$

其中 $\beta(t) = (1, t, \dots, t^{2s-1})^T$ 。规定

$$\mathbf{R}(\tau) := \beta^{(s)}(\tau) \beta^{(s)}(\tau)^T, \quad \mathbf{Q}(\tau) := \int_0^\tau \mathbf{R}(t) dt, \quad (3-101)$$

那么

$$J_c = \text{Tr} \left\{ \mathbf{c}_i^T \mathbf{Q}(T_i) \mathbf{c}_i \right\}, \quad (3-102)$$

且有

$$\frac{\partial J_c}{\partial \mathbf{c}_i} = 2\mathbf{Q}(T_i)\mathbf{c}_i, \quad \frac{\partial J_c}{\partial T_i} = \text{Tr}\left\{\mathbf{c}_i^T \mathbf{R}(T_i) \mathbf{c}_i\right\}. \quad (3-103)$$

其中矩阵函数 $\mathbf{R}(\tau)$ 和 $\mathbf{Q}(\tau)$ 均可以从其定义式中直接计算出来。记 $\mathbf{R}_{ij}(\tau)$ 和 $\mathbf{Q}_{ij}(\tau)$ 分别为该矩阵函数的第 i 行第 j 列的元素，那么

$$\mathbf{R}_{ij}(\tau) = \begin{cases} \frac{(i-1)!(j-1)! \tau^{i+j-2s-2}}{(i-s-1)!(j-s-1)!} & \text{if } i > s \text{ and } j > s, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3-104)$$

$$\mathbf{Q}_{ij}(\tau) = \begin{cases} \frac{(i-1)!(j-1)! \tau^{i+j-2s-1}}{(i-s-1)!(j-s-1)!(i+j-2s-1)} & \text{if } i > s \text{ and } j > s, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3-105)$$

这样，我们即获得了 MINCO 轨迹的能量函数关于系数矩阵和时间向量梯度的解析表达式。该能量函数可以应用于轨迹的进一步时间-空间形变，以保证轨迹能够在依据不同任务需求优化航点向量和时间向量过程中同时考虑度量轨迹光滑性的能量函数。

3.11 MINCO 轨迹和传统参数化方法的对比

在表3.1中，我们在各个方面对比了 MINCO 和常用的三种轨迹参数化方法。其中多项式样条和 Bézier 曲线完全等价可以相互转换，B-样条和 MINCO 轨迹也完全等价可以相互转换。这四种参数化方法的区别在于其参数化的形式及提供的功能不同。其中多项式样条以多项式系数和每一段多项式的时间长度参数化，Bézier 曲线则以 Bézier 控制点和每一段时间长度参数化，B-样条以基函数控制点和每一个虚拟段的时间长度参数化，MINCO 轨迹则以每一段轨迹之间连接的位置点以及每段的时间长度参数化。

表 3.1 不同连续时间轨迹参数化方法的比较

方法/功能	连续性	连续时间约束	维度	时域优化	经过控制点	实现难度
多项式样条	等式约束	凸包/采样	高	耦合	无	较低
Bézier 曲线	等式约束	凸包	高	耦合	否	中等
B-样条	默认满足	凸包（保守）	低	高度耦合	否	中等
MINCO	默认满足	凸包/采样	低	独立参数	是	中等

在连续性方面，为了实现位置、速度、加速度等轨迹的高阶连续性，多项式样条和

Bézier 曲线需要引入额外的等式约束。该等式约束是关于多项式系数或者 Bézier 控制点的线性约束，然而关于每段的时间长度则是非线性等式约束。在 B-样条和 MINCO 表示的轨迹上，这种连续性可以被默认的参数化形式满足。在实现连续时间约束方面，多项式样条和 MINCO 中的每一段均可以通过采样约束点的方式近似实现，也可通过将一段分为几个等时间间隔的子段而后采用每个子段的 Bézier 凸包实现解析的连续实现约束。Bézier 曲线的控制点则归属于一整段，通过对其凸包约束来实现凸的连续时间约束较为方便，然而一段凸包存在着不可忽略的保守性，因此需要进一步对该段进行分解，而不能直接采用其控制点参数。B-样条则具有和 Bézier 曲线相同的控制点凸包性质，然而该凸包的保守度比 Bézier 更大。在参数维度上而言，多项式样条和 Bézier 具有相同的维度，而 B-样条和 MINCO 平均下来一段仅仅有一个控制点和时间长度标量的自由度，因此后两者具有更低的参数化维度。在时间域优化方面，由于多项式样条和 Bézier 曲线调整时间需要进一步满足连续性约束，因此该约束和时间域的调整是耦合在一起的，B-样条的时间则由于其特殊的局部基底的构造高度耦合在轨迹点的正向计算过程中，MINCO 则直接以真实时间向量作为参数。在是否经过控制点方面，多项式样条不具备控制点的概念，而 Bézier 曲线和 B-样条的控制点是游离于轨迹之外的非实体点，MINCO 直接以每段直接相接的实体点作为参数因而其必然经过控制点。在实现难度方面，多项式样条由于其广泛的支持和简单的定义，参数化轨迹的过程更为直观，其它三种方法则需要一定对参数化过程的了解。

3.12 本章小结

本章利用多旋翼无人机可以在平坦输出空间中直接进行无微分约束的轨迹优化的特点，针对性地设计了保留轨迹在空间和时间上的自由度同时实现降维稀疏参数化的方法。由于需要足够阶的连续性，本章给出了积分链系统的多阶段无约束最小化控制的最优充要条件，并给出了不依赖于代价泛函计算的线性复杂度轨迹生成算法。本章提出以最优充要条件的时间和空间参数作为决定轨迹本身的自由参数的方法，并给出了对任意需求函数进行梯度求解的线性复杂度过程。利用该时空参数化的轨迹，具有同传统多项式样条、Bézier 曲线或者 B-样条更灵活的轨迹表征特性，可以有效地用于各种任务需求下的轨迹优化算法之中，并保证轨迹规划的自由度可以按需调节。

4 几何约束下的轨迹优化

4.1 引言

多旋翼无人机的高速飞行与自主导航要求轨迹规划在时间域和空间域与动力学特性高度匹配，并保证复杂环境中的安全。传统基于微分平坦特性的轨迹规划仅仅考虑简单的无风阻的动力学微分约束，这种方法在高速情况下会由于动力学限制造成轨迹跟踪上的巨大误差，严重威胁到安全性。此外，高速轨迹必须对飞行动态的时域特性进行直接优化，而现有的方法经常将飞行时间固定下来，造成在飞行时间过于保守时多旋翼的进度过于缓慢，而飞行时间过于激进时对轨迹的执行会超出多旋翼的驱动能力。因此，现有方法经常会在计算效率、轨迹质量和约束精细度三个方面做出权衡和取舍。

本章旨在实现高效地求解出满足精细动力学约束的高质量轨迹。本章从几何的视角对轨迹规划的约束进行处理。关于微分约束，对受到非线性风阻效应影响的高速多旋翼动力学进行建模，分析并给出了其微分平坦变换的代数过程，同时达到理论上最少的奇异点个数。利用微分平坦变换，我们直接在多旋翼动力学的平坦输出空间进行轨迹优化，相应的平坦空间中的连续性阶数可以保证动力学微分约束被精确满足。对于时间域和空间域的几何约束，我们分别基于解析的微分同胚映射和非线性光滑变换，使得被优化的代理变量在平直的无约束空间中，而原变量则默认满足简单的几何约束。这类方法基于动力学或者几何学上的坐标变换，对受约束的待优化轨迹或者变量寻找平直空间中的代理轨迹或者变量，从而消除绝大部分原问题上的约束。此外，为了使得不同任务需求下在状态和输入上的连续时间约束得到满足，我们利用惩罚泛函光滑化的方法，结合微分平坦变换的逆向微分，将任何时刻轨迹上的约束违背反映到稀疏的时间和空间参数上，以此完成整个轨迹优化。此外，本章进一步提出了一种针对多元多项式连续约束的验证的解析方法，以严格有效地检验轨迹优化结果的可行性。本章提出的框架，加上 MINCO 轨迹时空形变的功能，可生成满足精细动力学的高质量轨迹，并避免传统方法引入的性能问题。

4.2 非线性风阻效应的多旋翼动力学及其微分平坦

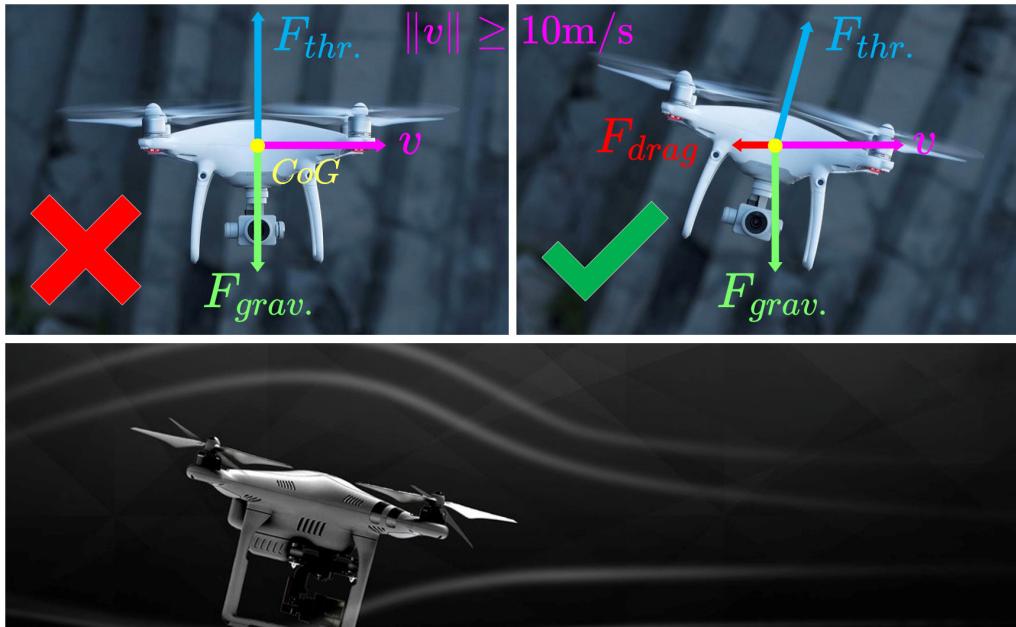


图 4.1 传统无风阻模型和本文模型在多旋翼大速度匀速飞行时的受力情况

如图4.1所示，传统的多旋翼动力学模型^[12] 经常假定机体不受风阻产生的力和力矩的影响。在多旋翼无人机高速匀速机动的情况下，传统模型会严重失真从而低估所需要的机身推力以及机体倾斜角。这往往会使轨迹规划的结果在机体驱动限制下变得不可行或者处于失控的边缘。另一方面，传统的动力学模型的微分平坦变换通常以 Euler 角来定义偏航角，因而在平坦变换中引入过多的奇异点，使得变换的数值稳定性劣化。也有文献^[15]为解决风阻问题，采用机体轴的投影角定义偏航角并考虑线性的风阻，而这一做法引入了更多的奇异点。因此对多旋翼而言，如何引入高保真度的集总参数多旋翼模型，并给出奇异点尽可能少的微分平坦变换，是现有方法均为解决的问题。我们在本节同时解决这两方面的问题，在此之上才能更加高效地处理考虑复杂风阻约束下的精细动力学全状态轨迹规划。

我们考虑多旋翼无人机的状态为 $x = \{r, v, R, \omega\}$ 其中 $r \in \mathbb{R}^3$ 为重心位置， $v \in \mathbb{R}^3$ 为平动速度， $R \in \text{SO}(3)$ 为机身姿态以及 $\omega \in \mathbb{R}^3$ 为机身角速率。机身动力和力矩层面的输入为 $u = \{f, \tau\}$ ，其中 $f \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为总推力， $\tau \in \mathbb{R}^3$ 为三轴力矩。那么多旋翼无人机

的动力学由如下微分方程描述

$$\begin{cases} \dot{r} = v, \\ m\dot{v} = -mge_3 - RDR^T\sigma(\|v\|)v + Rfe_3, \end{cases} \quad (4-1a)$$

$$\begin{cases} \dot{R} = R\hat{\omega}, \\ M\dot{\omega} = \tau - \omega \times M\omega - A(\omega) - B(R^Tv). \end{cases} \quad (4-1b)$$

$$\begin{cases} \dot{R} = R\hat{\omega}, \\ M\dot{\omega} = \tau - \omega \times M\omega - A(\omega) - B(R^Tv). \end{cases} \quad (4-1c)$$

$$\begin{cases} \dot{R} = R\hat{\omega}, \\ M\dot{\omega} = \tau - \omega \times M\omega - A(\omega) - B(R^Tv). \end{cases} \quad (4-1d)$$

其中 $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 代表机身质量, $e_3 = (0, 0, 1)^T$, $g \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为重力加速度, M 为机体以重心为原点关于机体坐标轴的惯量张量矩阵。我们规定多旋翼具有水平对称的几何外形, 其中 $D = \text{Diag}(d_h, d_h, d_v)$ 为水平对称的风阻加速度系数矩阵且 $d_v \geq d_h$, $\sigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为非线性项, $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ 为自身滚转造成的风阻力矩, $B : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ 为相对风速产生的不平衡力矩。

多旋翼无人机由于自身外形受风阻影响的项 D 、 $\sigma(\cdot)$ 、 $A(\cdot)$ 和 $B(\cdot)$ 可以通过经验公式或者风洞测试获得并具有任意自定义的形式, 我们并不对这些阻尼特性有除连续可微性质之外的任何假设。其中对风阻加速度系数水平方向旋转对称的假设可以有效地将机身偏航角度从非线性风阻效应中解耦出来, 且该假设被广泛用于各种多旋翼模型^[88, 89]。一般而言, 平移加速度的非线性项一般由比较显著的线性阻尼^[15] 和寄生阻尼^[90] 构成, 那么可令 $\sigma(x) = 1 + C_p x$ 来满足该模型。

在这里我们以该无人机的位置和偏航角作为系统的平坦输出 $z = \{r, \psi\}$, 并规定 $r^{[s]}$ 代表 r 直到 s 阶导数的堆叠 $(r, \dot{r}, \dots, r^{(s)})$ 。那么微分平坦变换即为从平坦输出有限阶导数唯一决定系统状态和控制的映射,

$$(x, u) = \Psi(r^{[s]}, \psi^{[s]}). \quad (4-2)$$

一般而言, Ψ 由一个代数过程定义, 我们接下来给出关于上述多旋翼高速飞行动力学的微分平坦变换。

首先将式 (4-1b) 同机体坐标系 $x_b = Re_1$ 和 $y_b = Re_2$ 分别点积, 则有

$$(Re_i)^T (\dot{v} + \frac{d_h}{m} \sigma(\|v\|)v + ge_3) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2\}. \quad (4-3)$$

由总推力 f 的非负性及其方向同 $z_b = Re_3$ 在任何情况下的一致性有

$$z_b = \mathcal{N}(\dot{v} + \frac{d_h}{m} \sigma(\|v\|)v + ge_3), \quad (4-4)$$

其中 $\mathcal{N}(x) := x/\|x\|_2$ 。将 (4-1b) 同 z_b 点积有

$$f = z_b^T (m\dot{v} + d_v \sigma(\|v\|)v + mge_3). \quad (4-5)$$

为了恢复出整个机身姿态，我们采用 Hopf 纤维化^[13] 定义下的偏航角和倾斜角旋转的分解。现有机身 z_b 如式 (4-4) 给出，且偏航角已知，对应的偏航四元数为

$$q_\psi = (\cos(\psi/2), 0, 0, \sin(\psi/2))^T, \quad (4-6)$$

而将机身 z 轴从 e_3 旋转到 z_b 的倾斜四元数有

$$q_z = \frac{1}{\sqrt{2(1+z_b(3))}} (1+z_b(3), -z_b(2), z_b(1), 0)^T \quad (4-7)$$

易验证 q_z 中不包含任何沿机体 z 轴自身的旋转分量。那么整个机身的姿态四元数 q 为

$$q = q_z \otimes q_\psi = \frac{1}{\sqrt{2(1+z_b(3))}} \begin{pmatrix} (1+z_b(3)) \cos(\psi/2) \\ -z_b(2) \cos(\psi/2) + z_b(1) \sin(\psi/2) \\ z_b(1) \cos(\psi/2) + z_b(2) \sin(\psi/2) \\ (1+z_b(3)) \sin(\psi/2), \end{pmatrix} \quad (4-8)$$

相应的姿态矩阵为

$$R = \mathcal{R}_{quat}(q), \quad (4-9)$$

其中四元数对应的旋转矩阵 $\mathcal{R}_{quat}(\cdot)$ 初等表达式详见 Vince 的文献^[91]。将式 (4-9) 代入到式 (4-1c) 中，可得机体角速率

$$\omega = 2(q_z \otimes q_\psi)^{-1} \otimes (\dot{q}_z \otimes q_\psi + q_z \otimes \dot{q}_\psi), \quad (4-10)$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{z}_b(1) \sin(\psi) - \dot{z}_b(2) \cos(\psi) - \dot{z}_b(3)(z_b(1) \sin(\psi) - z_b(2) \cos(\psi))/(1+z_b(3)) \\ \dot{z}_b(1) \cos(\psi) + \dot{z}_b(2) \sin(\psi) - \dot{z}_b(3)(z_b(1) \cos(\psi) + z_b(2) \sin(\psi))/(1+z_b(3)) \\ (z_b(2)\dot{z}_b(1) - z_b(1)\dot{z}_b(2))/(1+z_b(3)) + \dot{\psi}, \end{pmatrix}$$

其中

$$\dot{z}_b = \frac{d_h}{m} \mathcal{D}\mathcal{N}(\dot{v} + \frac{d_h}{m} \sigma(\|v\|)v + ge_3)^T \left(\frac{m}{d_h} \ddot{v} + \sigma(\|v\|) \dot{v} + \dot{\sigma}(\|v\|) \frac{v^T \dot{v}}{\|v\|} v \right), \quad (4-11)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{N}(x) := \frac{1}{\|x\|} \left(\mathbf{I} - \frac{xx^T}{x^Tx} \right). \quad (4-12)$$

最后，我们从 $r, \dot{r}, r^{(2)}, r^{(3)}$ 以及 $\psi, \dot{\psi}$ 中计算出所有状态 $x = \{r, v, R, \omega\}$ 和控制 $u = \{f, \tau\}$ 中的 f 。为了获得机身的力矩，我们直接将式 (4-10) 对时间做微分，进一步利用 $r^{(4)}$ 和 $\psi^{(2)}$ 的信息可以直接计算出 $\dot{\omega}$ ，那么结合已得到的 v, R 和 ω ，相应的力矩可以计算为

$$\tau = M\dot{\omega} + \omega \times M\omega + A(\omega) + B(R^T v). \quad (4-13)$$

至此，我们给出了多旋翼动力学 (4-1) 的微分平坦的证明和平坦变换 Ψ 的代数过程。值得一提的是，变换 Ψ 仅有两个奇点。其一在于当无人机机体的 z 轴和重力同向即 $z_b = -e_3$ 时，由公式 (4-8) 可知 Hopf 纤维化定义的偏航角所获得的姿态关于平坦输出轨迹的 Jacobian 不存在。该奇点是由于微分平坦变换需要将二维球面的单位向量映射到 $SO(3)$ 上，而根据 Hirsch 的 1.6 定理^[92] 可知，不存在球面上连续且可微的非零向量场，因此该奇点是理论上不可避免的固有奇点。其二在于当总推力 $f = (d_v - d_h)e_3^T R^T \sigma(\|v\|)v$ 时，由公式 (4-1b) 可知，机体的运动等价于一个质量为 m 且具有各向同性阻尼 $Diag(d_h, d_h, d_h)$ 的球体的无动力下落运动，此时机身姿态不能被确定。这两个固有奇点均来源于动力学本身的理论特性。在一般情况下，可以通过令 $f > (d_v - d_h)\sigma(\|v\|)\|v\|$ 来避免机身的推力过小，同时保证机身倾角小于 180° 来规避微分平坦变换的奇异点。

值得一提的是，本文给出的动力学模型及其微分平坦变换相较于已有文献^[12-15] 采用的动力学及其平坦变换具有更多的优势。其一在于本文的方案采用四元数及其 Hopf 纤维化来定义偏航角和倾斜角的分解，相比直接采用欧拉角^[12] 或者是以体系 x 轴投影角^[15] 定义偏航角的方法，本方案分别少了 2 个和 4 个奇异点。其二在于本文的方案考虑了非线性空气阻尼效应带来的加速度和角加速度层面的影响，并允许自定义集总参数模型，因此比无阻尼^[12-14] 或者线性阻尼^[15] 的情况更加灵活和精细。该模型可以直接引入不同轴距、不同动力和机动特性的无人机对应的转矩、推力、机体质量和转动惯量等动力学特性，使得轨迹规划能够直接考虑和真实多旋翼更为接近的动力学约束。

4.3 时域流形约束的处理

MINCO 轨迹的时空形变需要借助标准的优化器来完成。现有的优化方法大部分是针对定义在欧氏空间上的函数设计的。然而，MINCO 轨迹及其代价泛函 (3-11) 将时间向量 \mathbf{T} 限制在了简单的流形上，而在流形上优化需要频繁地采取收缩操作。为了避免该操作，我们对 \mathbf{T} 在不同正则项下的定义域的简单流形给出其和欧氏空间的显式微分

同胚。如此，我们直接对欧氏空间的无约束代理变量进行优化，这样专门针对欧氏空间设计的高效优化器直接被用于轨迹的时空形变。

对于多项式样条而言，(3-11) 中的代价泛函是 \mathbf{c} 和 \mathbf{T} 的函数，记为 $J_c(\mathbf{c}, \mathbf{T})$ ，而 J_c 及其梯度 $\partial J_c / \partial \mathbf{c}$ 与 $\partial J_c / \partial \mathbf{T}$ 的解析表达式已经在前文中给出。由于 MINCO 轨迹也是多项式样条的一个子集，因此 (3-11) 中的代价泛函可以表示为

$$J(\mathbf{q}, \mathbf{T}) = J_q(\mathbf{q}, \mathbf{T}) + \rho(\|\mathbf{T}\|_1), \quad (4-14)$$

其中 J_q 定义为 $J_q(\mathbf{q}, \mathbf{T}) = J_c(\mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbf{T}), \mathbf{T})$ 。易知，从 J_c 、 $\partial J_c / \partial \mathbf{c}$ 和 $\partial J_c / \partial \mathbf{T}$ 中计算出 J_q 、 $\partial J_q / \partial \mathbf{q}$ 和 $\partial J_q / \partial \mathbf{T}$ 可通过 MINCO 轨迹的线性复杂度梯度求解来完成。

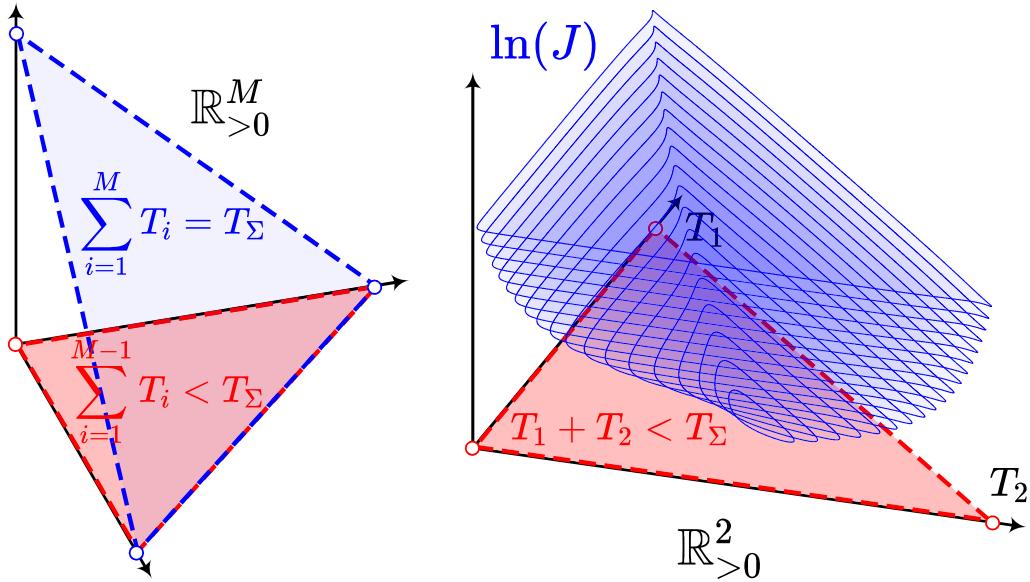


图 4.2 固定总时间的代价函数定义域和三段轨迹代价函数的对数值曲面

为了直接优化轨迹的时间， $\partial J / \partial \mathbf{T}$ 的精确值可以被直接用于优化器。然而， $J_q(\mathbf{q}, \mathbf{T})$ 和 MINCO 轨迹本身均仅仅在 $\mathbf{T} \in \mathbb{R}_{>0}^M$ 上有定义。当 \mathbf{q} 中的两个航点距离非零时，代价函数会在对应的 T_i 趋于 0 的时候没有上界。此外，如图 4.2 所示，其中左图给出了 M 段轨迹在总时间严格固定为 T_Σ 时其代价函数 J 的定义域，该定义域实质上是一个 $(M - 1)$ -单纯形在 $\mathbb{R}_{>0}^M$ 上的相对内部。而其中的右图给出了 $M = 3$ 时代价函数的对数值曲面及等值线。该代价函数在临近开集合定义域边缘时无上界。当时间正则项采用 (3-13) 中的指示函数 ρ_f 时，整个轨迹优化求解的定义域被进一步限制在 $\sum_{i=1}^{M-1} T_i < T_\Sigma$ 上，即一个单纯形的相对内部。

我们利用解析的微分同胚变换来避免这个 $M - 1$ 维的简单流形约束。考虑 (3-13) 中

$\rho = \rho_f$ 时候时间向量的定义域,

$$\mathcal{T}_f = \left\{ \mathbf{T} \in \mathbb{R}^M \mid \|\mathbf{T}\|_1 = T_\Sigma, \mathbf{T} \succ \mathbf{0} \right\}. \quad (4-15)$$

显然在 $\mathbf{T} \in \text{RelInt}(\mathcal{T}_f)$, 即在 \mathcal{T}_f 的相对内部时, $J(\mathbf{q}, \cdot)$ 对于非平凡的 \mathbf{q} 而言是有界的。

命题 1. 在 (4-15) 中定义的 \mathcal{T}_f 与 \mathbb{R}^{M-1} 微分同胚。规定 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_{M-1})$ 表示 \mathbb{R}^{M-1} 中的任一元素。以下对所有 $1 \leq i < M$ 的映射给出了 C^∞ 的微分同胚变换:

$$T_i = \frac{e^{\tau_i}}{1 + \sum_{j=1}^{M-1} e^{\tau_j}} T_\Sigma, \quad T_M = T_\Sigma - \sum_{j=1}^{M-1} T_j. \quad (4-16)$$

上述显式的微分同胚 (4-16) 给出了一组代理变量 $\boldsymbol{\tau}$ 。通过直接在 $\boldsymbol{\tau}$ 的定义域 \mathbb{R}^{M-1} 上优化代价函数 J , 可以使得时间向量上的简单流形约束被隐式地满足。

对代理变量 $\boldsymbol{\tau}$ 的优化要求代价函数关于该变量的梯度。我们将 $\partial J_q / \partial \mathbf{T} = (g_a^T, g_b)^T$ 按照 $g_a \in \mathbb{R}^{M-1}$ 和 $g_b \in \mathbb{R}$ 划分。对微分同胚变换 (4-16) 的 Jacobian 进行直接计算, 可以得到 J 关于 $\boldsymbol{\tau}$ 的梯度为

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{(g_a - g_b \mathbf{1}) \circ e^{[\boldsymbol{\tau}]} - (g_a^T e^{[\boldsymbol{\tau}]} - g_b \|e^{[\boldsymbol{\tau}]\|_1}) e^{[\boldsymbol{\tau}]}}{(1 + \|e^{[\boldsymbol{\tau}]\|_1})^2}, \quad (4-17)$$

其中 $e^{[.]}$ 代表逐元素的自然指数操作, $\mathbf{1}$ 代表合适大小的全 1 向量。在优化中往往需要合理利用时间向量 \mathbf{T} 的初值, 那么对应的代理变量可以通过该微分同胚的逆变换来获得, 即对所有 $1 \leq i < M$, 均有 $\tau_i = \ln(T_i/T_M)$ 。当时间正则项采用 (3-12) 中的 ρ_s 时, 时间向量的定义域为简单的 $\mathbf{T} \succ \mathbf{0}$, 因此我们采用 $\mathbf{T} = e^{[\boldsymbol{\tau}]}$ 作为代理变量定义域 \mathbb{R}^M 和时间向量定义域 $\mathbb{R}_{>0}^M$ 之间的微分同胚变换。

对于时间正则项 ρ_f 和 ρ_s , 我们均将对应的微分同胚变换以 $\mathbf{T}(\boldsymbol{\tau})$ 表示。最小化原问题的代价函数可以借由对 $J(\mathbf{q}, \mathbf{T}(\boldsymbol{\tau}))$ 在代理变量 $\boldsymbol{\tau}$ 上的无约束优化完成。尽管 $\mathbf{T}(\boldsymbol{\tau})$ 并不能保持代价函数的凸性, 但是 (3-82) 中原代价函数 $J(\mathbf{q}, \mathbf{T})$ 已经是关于时间向量的非凸函数。因此, 我们需要明确 $\mathbf{T}(\boldsymbol{\tau})$ 是否会在 $\boldsymbol{\tau}$ 的空间中引入新的局部极小值, 或者将原本在 \mathbf{T} 空间的所期望的局部极小值消去。

命题 2. 假设 $F : \mathbb{D}_F \mapsto \mathbb{R}$ 为任一定义在凸开集 $\mathbb{D}_F \in \mathbb{R}^N$ 上的 C^2 函数, 且 $\mathbf{G} : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{D}_F$ 为任一 \mathbb{R}^N 和 \mathbb{D}_F 之间的 C^2 微分同胚变换。定义 $H : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ 使得对任何 $y \in \mathbb{R}^N$ 均满足 $H(y) = F(\mathbf{G}(y))$ 。那么, 对任何 $x \in \mathbb{D}_F$ 和 $y \in \mathbb{R}^N$, 如果 $x = \mathbf{G}(y)$ 或者 $y = \mathbf{G}^{-1}(x)$, 那么如下的表述成立:

- $\nabla F(x) = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\nabla H(y) = \mathbf{0}$;
- $\nabla^2 F(x)$ 正定（或半正定）并且 $\nabla F(x) = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\nabla^2 H(y)$ 正定（或半正定）并且 $\nabla H(y) = \mathbf{0}$ 。

证明. 以 \mathbf{J} 指代 \mathbf{G} 的 Jacobian 矩阵。对任何 $x \in \mathbb{D}_F$ 以及 $y \in \mathbb{R}^N$, 如果 $x = \mathbf{G}(y)$ 或者 $y = \mathbf{G}^{-1}(x)$, 我们有

$$\nabla H(y) = \mathbf{J}(y)^T \nabla F(x). \quad (4-18)$$

那么, \mathbf{J} 的非奇异性保证了第一条表述成立。

以 \mathbf{K}_i 指代 \mathbf{G} 中第 i 个元素的 Hessian 矩阵。如果 x 和 y 是驻点, 那么 H 的 Hessian 矩阵满足

$$\begin{aligned} \nabla^2 H(y) &= \mathbf{J}(y)^T \nabla^2 F(x) \mathbf{J}(y) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \mathbf{K}_i(y) \\ &= \mathbf{J}(y)^T \nabla^2 F(x) \mathbf{J}(y). \end{aligned} \quad (4-19)$$

因此 \mathbf{J} 的非奇异性保证 $\nabla^2 F(x)$ 和 $\nabla^2 H(y)$ 互为合同矩阵^[65], 从而第二条表述也成立。

□

命题2表明, 变换 $\mathbf{T}(\tau)$ 维持了满足一阶/二阶必要性条件以及二阶充分性条件^[93] 的局部极小值集合的不变性。此外, 由于该命题仅仅考虑了变换的二阶信息, 因此本节的自然指数映射均可以替换成任何从 \mathbb{R} 到 $\mathbb{R}_{>0}$ 的 C^2 微分同胚映射。综上, 在常见的最优化条件下面, 本节利用微分同胚映射消去时域上的简单流形约束不会产生额外的局部极小值或者消除先前存在的极小值。

4.4 球形几何约束的处理

运动规划的安全性可以通过将轨迹约束在可行域 $\tilde{\mathcal{F}}$ 之中得以保证。尽管 $\tilde{\mathcal{F}}$ 是一个非凸的集合, 它是由凸的几何子单元序列的并集构成。如果每一个轨迹段仅仅被要求处于单个几何单元之中, 那么对于轨迹的任意位置而言, 安全性约束即变成了关于该位置点的凸约束。由于 MINCO 直接以轨迹各段的时间向量作为自由参数, 每一个几何子单元内的飞行时间可以被直接优化。因此我们直接将轨迹各段预先分配到各个凸的几何单

元之中，而不是将轨迹段的分配问题作为整数变量来优化^[55]。具体地，我们将轨迹的航点约束在相邻几何单元的重叠区域内，形成凸的不等式约束。

为了保证 MINCO 轨迹非平凡的参数，其待优化时间段的边界航点之间的距离必须有严格正的下界。因此，需要严格保证这些航点始终处于几何单元同其前后单元的重叠区域中。基于梯度投影的一阶算法和基于内点法的二阶算法均可以保证在优化过程中的航点始终处于几何单元的交叠区域内。我们针对安全约束的几何结构设计非线性光滑映射，使得在严格保证可行性的前提下，既能够具有投影算法的轻量级特点，也能够有效地利用优化问题及约束的高阶信息。

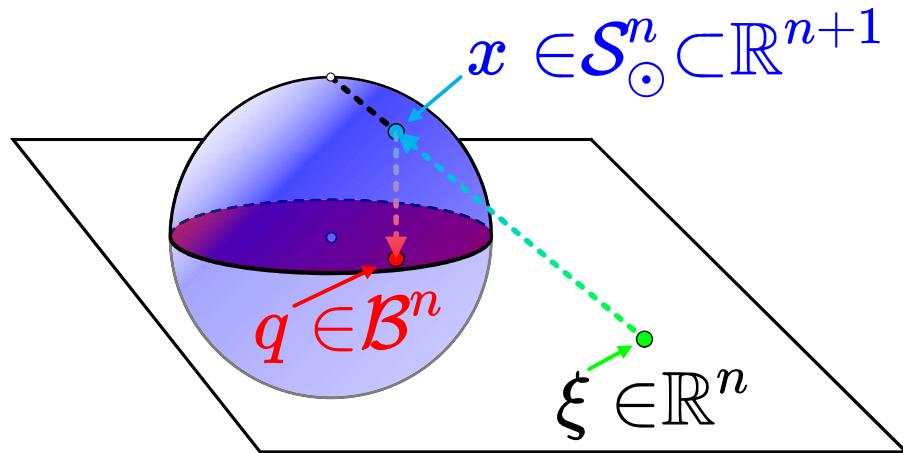


图 4.3 \mathbb{R}^{n+1} 中球极投影的逆和正投影将 \mathbb{R}^n 映射到 \mathcal{B}^n

考虑约束 $q \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ 其中 \mathcal{P} 是一个闭球。其维度应该满足 $n \leq m$ ，因此任何 m 维空间里的低维球约束均具有该形式。规定 \mathcal{P} 是一个以 o 为中心 r 为半径的闭球 \mathcal{P}^B ，

$$\mathcal{P}^B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - o\|_2 \leq r \right\}, \quad (4-20)$$

我们利用光滑的满射将 \mathbb{R}^n 映射到 \mathcal{P}^B ，使得在 \mathbb{R}^n 的代理变量上进行优化隐式地满足 \mathcal{P}^B 的可行性约束。如图4.3所示，在 $(n + 1)$ 维欧氏空间里，球极映射的逆 f_s 将欧氏空间 \mathbb{R}^n 映射到无北极点的球面 S^n_0 上。正交投影 f_o 则将 S^n_0 映射成一个 n 维球上。代理变量 ξ 在整个 \mathbb{R}^n 中无约束移动可以保证变换后的 q 变量始终处于球形约束 \mathcal{B}^n 中。因此，该映射由球极投影的逆和正交投影复合而成。首先，球极投影的逆将欧氏空间 \mathbb{R}^n 映射到无北极点的球面 S^n_0 上，即

$$S^n_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1, x_{n+1} < 1 \right\}. \quad (4-21)$$

球极投影的逆映射 f_s 定义为

$$f_s(x) = \frac{(2x^T, x^T x - 1)^T}{x^T x + 1} \in \mathcal{S}_\odot^n, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4-22)$$

显然 f_s 是 \mathbb{R}^n 和 \mathcal{S}_\odot^n 之间的微分同胚变换^[94]。我们直接将高维球面 \mathcal{S}_\odot^n 从 \mathbb{R}^{n+1} 投影成 \mathbb{R}^n 中的球

$$\mathcal{B}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1 \right\}. \quad (4-23)$$

该映射

$$f_o(x) = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{B}^n, \forall x \in \mathcal{S}_\odot^n, \quad (4-24)$$

是一个到 \mathcal{B}^n 上的光滑满射。并且球 \mathcal{B}^n 中除中心之外的每个位置点均由两个 \mathcal{S}_\odot^n 中的点映射而来。由此, f_s 、 f_o 和线性映射的复合映射 f_B 同样也是一个光滑的满射, 即

$$f_B(x) = o + \frac{2rx}{x^T x + 1} \in \mathcal{P}^B, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4-25)$$

映射 f_B 引入了一个新的代理变量 ξ , 使得任意 \mathbb{R}^n 中的 ξ 变换得到的 q 始终处于 \mathcal{P}^B 中。相应地, 我们以 ξ 指代 q 的无约束代理变量。优化 ξ 需要对 $\partial J / \partial q$ 进行求解。我们以 g_i 代表 $\partial J / \partial q$ 中的第 i 个元素 $\partial J / \partial q_i$ 。直接计算 f_B 的 Jacobian 可以得到如下的梯度

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_i} = \frac{2r_i g_i}{\xi_i^T \xi_i + 1} - \frac{4r_i (\xi_i^T g_i) \xi_i}{(\xi_i^T \xi_i + 1)^2}. \quad (4-26)$$

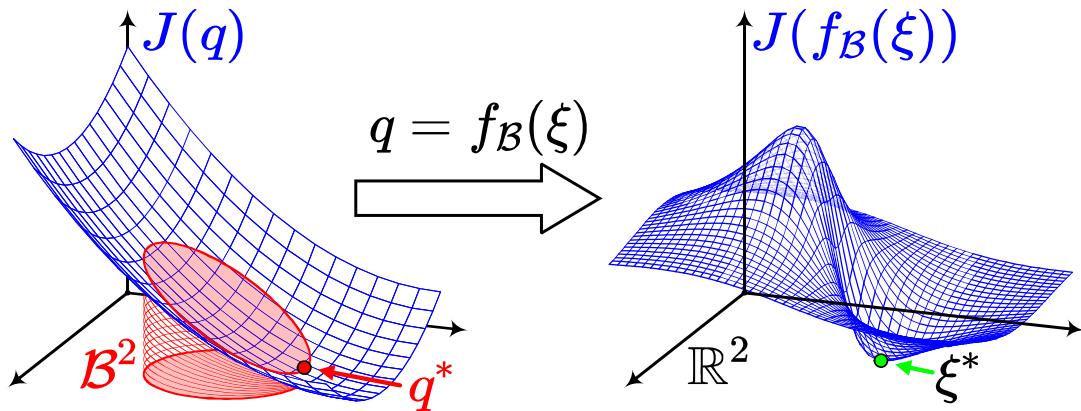


图 4.4 凸函数及其约束局部极小和变换后非凸函数及其无约束局部极小

为了使得该优化可以从 q 的合理初值热启动, 对 ξ 的反向计算可以通过 f_B 的局部

解析逆映射得到，其中每一个 $1 \leq i < M$ 对应的 ξ_i 均有

$$\xi_i = \frac{r_i - \sqrt{r_i^2 - \|q_i - o_i\|_2^2}}{\|q_i - o_i\|_2^2} (q_i - o_i). \quad (4-27)$$

同样地，我们可以分析 f_B 对 \mathcal{P}^B 中受约束的局部极小值的影响。尽管 f_B 缺乏微分同胚良好的性质，其仍然能保证局部极小值在一阶必要条件下的不变性。首先， f_o 仅仅是将一个 $n+1$ 维点的前 n 个元素取出，因此是一个线性变换，变换前后的驻点保持不变。其次， f_s 是一个微分同胚，因此该环节满足命题2。综上，在局部极小值的一阶必要条件下， f_B 不会产生额外的局部极小值或者掩盖原先存在的局部极小值。正如图4.4 所示，其给出了一个凸函数 $J(q)$ 在 2 维球中的受约束局部极小值 q^* 在经过非线性变换 f_B 之后变成了非凸函数 $J(f_B(\xi))$ 的无约束局部极小值 ξ^* ，其中 $q^* = f_B(\xi^*)$ 。

4.5 凸多面体几何约束的处理

我们考虑另一种几何约束的类型，即 \mathcal{P} 是一个闭的凸多面体 \mathcal{P}^H ，定义为

$$\mathcal{P}^H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x \preceq b \right\}. \quad (4-28)$$

其中 (3-15) 保证了 $\text{Int}(\mathcal{P}^H) \neq \emptyset$ 。常用的优化算法通常采用 \mathcal{P}^H 的 H -表示以作为优化中的线性不等式约束。然而，凸多面体几何的投影操作涉及到一个二次规划子问题的求解，因此梯度投影通常会牺牲效率。我们在这里利用该 \mathcal{P}^H 的低维度特性及其几何结构设计非线性变换以及对应的代理变量，将该几何约束转换到欧式空间上。我们采用 \mathcal{P}^H 的 V -表示，其中每一个 $q \in \mathcal{P}^H$ 均对应存在一组（广义）中心坐标（Barycentric Coordinate），即顶点的凸组合表示。为了获得 \mathcal{P}^H 的顶点，首先利用 Seidel 算法^[71] 求解低维度线性复杂度线性规划来获得 \mathcal{P}^H 具有最大深度的内点。其次，针对 \mathcal{P}^H 关于该内点的极对偶（Polarity）多面体采用快速凸包（QuickHull）算法^[95] 得到对偶面的表示。这些对偶面相应的极对偶点即为 \mathcal{P}^H 的所有顶点。由于维度较低 ($n \leq 4$)，该顶点求解的计算时间可忽略不计。

利用非线性变换消去凸多面体几何约束的步骤如图4.5所示，具有 $\hat{n}+1$ 个顶点的凸多面体 \mathcal{P}^H 在重心坐标下等价于一个标准的 \hat{n} -单纯形 \mathcal{P}_w^H 。在平方变量代换下， \mathcal{P}_w^H 等价于一个 \hat{n} 维球。至此，该约束可相应地被图4.3中针对球的非线性变换处理。我们

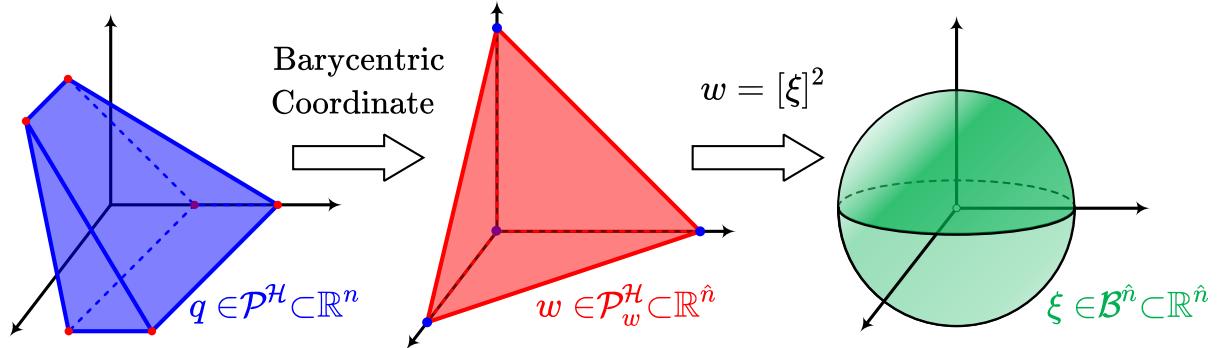


图 4.5 将有 $\hat{n} + 1$ 个顶点的凸多面体 P^H 映射到 \hat{n} 维球的过程

以 $(v_0, \dots, v_{\hat{n}})$ 表示 P^H 的 $\hat{n} + 1$ 个顶点，其中 $v_i \in \mathbb{R}^n$ 。任何 $q \in P^H$ 均具有对应于各个顶点权重的重心坐标。为了使重心坐标的表示更紧凑，我们令 $\hat{v}_i = v_i - v_0$ 并且 $\hat{\mathbf{V}} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{\hat{n}})$ ，而后 q 及凸多面体顶点的关系有

$$q = v_0 + \hat{\mathbf{V}}w, \quad (4-29)$$

其中 $w = (w_1, \dots, w_{\hat{n}})^T \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ 是 q 的重心坐标最后 \hat{n} 项。将凸多面体集合在 w 的坐标表示为

$$\mathcal{P}_w^H = \left\{ w \in \mathbb{R}^{\hat{n}} \mid w \succeq \mathbf{0}, \|w\|_1 \leq 1 \right\}. \quad (4-30)$$

根据凸多面体理论的主定理^[57]，集合 \mathcal{P}_w^H 和 P^H 在 (4-29) 的关系式下是完全等价的。原凸多面体被确切地变换成一个标准的 $(\hat{n} + 1)$ -单纯形，且该变换是一个线性的映射，因此不会对原优化问题带来额外的非线性。

单纯形 (4-30) 在平方变量代换后实质上等价于球的约束。我们将逐元素平方操作表示为 $[\cdot]^2 : \mathbb{R}^{\hat{n}} \mapsto \mathbb{R}^{\hat{n}}$ 。利用变量代换 $w = [x]^2$ ， \mathcal{P}_w^H 中的非负约束可以被消去^[96]，而后 w 所对应的集合 \mathcal{P}_w^H 在 x 上等价于一个闭的单位球，即

$$\mathcal{B}^{\hat{n}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\hat{n}} \mid \|x\|_2 \leq 1 \right\}. \quad (4-31)$$

自然而然地，再次采用 (4-25) 中的光滑满射 f_B ，该球约束可以被映射到一个欧氏空间上。通过对 (4-29)、 $[\cdot]^2$ 以及 f_B 的复合操作，可以得到针对凸多面体的非线性光滑满射 f_H ，将欧式空间映射到 P^H 上。该映射定义为

$$f_H(x) = v_0 + \frac{4\hat{\mathbf{V}}[x]^2}{(x^T x + 1)^2} \in P^H, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\hat{n}}. \quad (4-32)$$

同样地, $f_{\mathcal{H}}$ 引入了一个新的代理变量 ξ , 使得任意的 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 均能保证与之对应的 $q \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}$ 。此外, $\mathcal{P}^{\mathcal{H}}$ 的边界也是可以达到的。相应地我们记 ξ 为 \mathbf{q} 在优化中的无约束代理变量。为了求解关于该代理变量的梯度, 将 g_i 表示 $\partial J / \partial \mathbf{q}$ 的第 i 个元素 $\partial J / \partial q_i$ 。对 $f_{\mathcal{H}}$ 直接计算 Jacobian 可以得到

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_i} = \frac{8\xi_i \circ \hat{\mathbf{V}}^T g_i}{(\xi_i^T \xi_i + 1)^2} - \frac{16g_i^T \hat{\mathbf{V}} [\xi_i]^2}{(\xi_i^T \xi_i + 1)^3} \xi_i. \quad (4-33)$$

为了使优化从 \mathbf{q} 的合理初值热启动, 我们利用 $f_{\mathcal{H}}$ 的局部逆来计算相应的 ξ 。其中, q_i 的重心坐标可以通过 Warren 等人的解析法^[97] 获得, 而后直接采用 $[.]^2$ 和 $f_{\mathcal{B}}(\cdot)$ 的解析逆来完成对 ξ 的计算。另外一种做法是直接最小化 $f_{\mathcal{H}}(\xi)$ 和给定 q_i 之间欧氏距离的平方, 相应的小规模非线性最小二乘问题可以被快速有效地求解至足够的精度。

映射 $f_{\mathcal{H}}$ 中的平方变量代换 $[.]^2$ 是一个非线性的环节。然而, 平方变量代换是优化中不等式-等式约束转换^[98] 的一个特例。具体地, 该变量代换是将不等式 $-w \preceq \mathbf{0}$ 通过引入新的变量 x 转换为相应的等式约束 $-w + [x]^2 = \mathbf{0}$, 即 $w = [x]^2$ 。这种不等式-等式约束转换被 Bertsekas 证明是保留约束优化的一阶/二阶必要条件和二阶充分条件的^[98]。因此, 该环节的非线性不会对变换前后的局部极小值产生负面影响。

至此, 在 MINCO 轨迹的航点向量 \mathbf{q} 上的直接几何约束, 不论是 $\mathcal{P}^{\mathcal{B}}$ 还是 $\mathcal{P}^{\mathcal{H}}$, 均可以被光滑非线性变换 $\mathbf{q}(\xi)$ 直接消除掉。我们可以对任意的代价函数 $J(\mathbf{q}(\xi), \mathbf{T}(\tau))$ 直接对时间域和空间域无约束代理变量进行优化, 并保证定义域约束、段数分配约束以及非平凡航点约束始终严格成立。

4.6 连续时间约束优化的惩罚泛函光滑化方法

连续时间约束 \mathcal{G} 要求轨迹上的无穷多个时刻均满足对应的不等式, 而常见的优化算法是难以处理这种泛函约束的。为了解决这个问题, 通常采用时间域上的精细离散来保证连续时间约束在一定分辨率下得到满足。借由 $\mathfrak{T}_{\text{MINCO}}$ 轨迹的特性, 我们可以将约束的分辨率和优化变量的维度直接解耦。值得一提的是, 这种解耦能够从两方面提高轨迹规划的计算效率: 其一, 优化算法的理论迭代复杂度是固定的, 通过 $\mathfrak{T}_{\text{MINCO}}$ 的稀疏参数化, 我们可以控制轨迹的参数自由度和实际飞行所需的自由度一致, 而不受到离散约束个数的影响, 从而降低总体的串行迭代次数; 其二, 轨迹的连续时间约束函数在时域上的值和梯度求解在各个时刻是相对独立的, 因此提高约束的时间分辨率可以有效地

借助并行的算力大幅度降低单次迭代的耗时。因此， $\mathfrak{T}_{\text{MINCO}}$ 的特性使得轨迹优化问题可以从串行计算和并行计算两方面得到求解效率的提升。

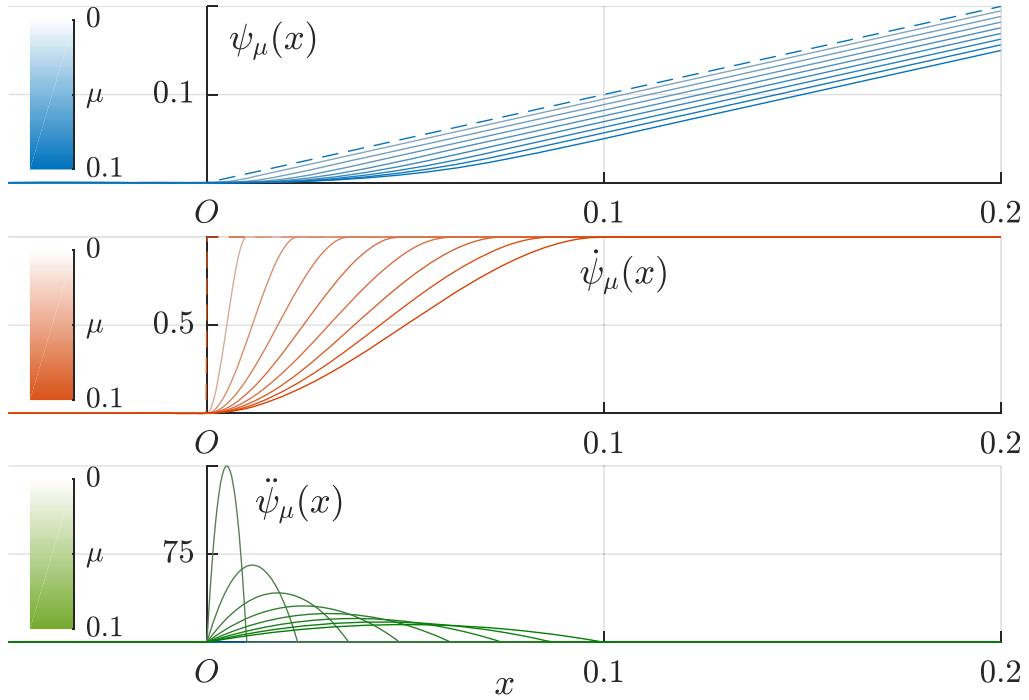


图 4.6 $\max(x, 0)$ 的 C^2 光滑化函数及其高阶导

借助约束转换法^[99] (Constraint Transcription) 的形式，我们直接对 \mathcal{G} 的约束违反函数进行时域积分来获得有限维的约束。对于轨迹 $p : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^m$ ，我们定义

$$I_{\mathcal{G}}^k[p] = \int_0^T \max [\mathcal{G}(p(t), \dots, p^{(s)}(t)), \mathbf{0}]^k dt, \quad (4-34)$$

其中 $k \in \mathbb{R}_{>0}$ 并且 $\max [\cdot, \mathbf{0}]^k$ 代表逐元素最大操作和逐元素幂函数的复合操作。利用该积分，连续时间约束 \mathcal{G} 等价于 $I_{\mathcal{G}}^k[p] = \mathbf{0}$ 。易知， $I_{\mathcal{G}}^k[p]$ 是轨迹参数的函数，因此我们将其作为惩罚泛函来施加连续性约束。当参数 $k = 1$ 时， $I_{\mathcal{G}}^k[p]$ 是非光滑但精确的惩罚泛函 (Exact Penalty Functional)。当参数 $k > 1$ 时， $I_{\mathcal{G}}^k[p]$ 可微并且 $\max [\cdot, \mathbf{0}]^k$ 在 $\mathbb{R}_{>0}^{n_g}$ 部分强凸。因此， $I_{\mathcal{G}}^1[p]$ 的 C^2 光滑化近似或者 $I_{\mathcal{G}}^3[p]$ 均可以用于惩罚泛函。当 $k = 1$ 的时候，我们对 $\max(x, 0)$ 采用如下构造的光滑化近似，

$$\psi_{\mu}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0, \\ (\mu - x/2)(x/\mu)^3 & \text{if } 0 < x < \mu, \\ x - \mu/2 & \text{if } x \geq \mu. \end{cases} \quad (4-35)$$

其中图 (4.6) 给出了函数 ψ_{μ} 在不同的磨光因子 μ 时的函数、导数和二阶导数的形状。可

以看出，当 μ 趋于 0 时， ψ_μ 收敛于 $\max(x, 0)$ ，因此仅仅需要有限的惩罚权重即可将令约束违反程度固定在任意期望的精度 μ 上。

在轨迹优化的约束 \mathcal{G} 具有清晰的物理含义且约束精度要求不高时，惩罚泛函方法是一种简单且有效手段。我们对 $p(t)$ 定义关于时间积分的惩罚泛函

$$I_{\mathcal{G}}[p] = \chi^T I_{\mathcal{G}}^k[p]. \quad (4-36)$$

其中 $\chi \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_g}$ 是惩罚权重向量。一般情况下， χ 应该由较大的正常数组成。这样，如果一旦 $p(t)$ 上的任何部分违反约束，惩罚泛函 $I_{\mathcal{G}}[p]$ 即会迅速增长，而如果 $p(t)$ 没有违反约束，惩罚泛函则保持为 0。通过将 $I_{\mathcal{G}}[p]$ 引入到代价泛函之中，连续时间约束可以被有效地保证。

从计算层面上来说， $I_{\mathcal{G}}[p]$ 仅能通过数值积分进行计算。我们定义一个采样函数 $\mathcal{G}_\tau : \mathbb{R}^{2s \times m} \times \mathbb{R}_{>0} \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^{n_g}$ 如下

$$\mathcal{G}_\tau(\mathbf{c}_i, T_i, \tau) = \mathcal{G}(\mathbf{c}_i^T \beta(T_i \cdot \tau), \dots, \mathbf{c}_i^T \beta^{(s)}(T_i \cdot \tau)), \quad (4-37)$$

其中 $\tau \in [0, 1]$ 代表归一化的时间。那么对 $I_{\mathcal{G}}[p]$ 的数值积分 $I : \mathbb{R}^{2Ms \times m} \times \mathbb{R}_{>0}^M \mapsto \mathbb{R}_{>0}$ 可以通过采样函数的加权和来计算，即

$$I(\mathbf{c}, \mathbf{T}) = \sum_{i=1}^M \frac{T_i}{\kappa_i} \sum_{j=0}^{\kappa_i} \bar{\omega}_j \chi^T \max[\mathcal{G}_\tau(\mathbf{c}_i, T_i, \frac{j}{\kappa_i}), \mathbf{0}]^k, \quad (4-38)$$

其中 κ_i 直接控制该数值积分的精度。考虑到对该数值估计微分的便捷性，我们采用等距积分规则选取权重 $(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{\kappa_i-1}, \bar{\omega}_{\kappa_i})$ 。直观上来说， $I(\mathbf{c}, \mathbf{T})$ 是 $I_{\mathcal{G}}[p]$ 的可微分的近似，且近似程度可通过分辨率 κ_i 直接调节。该数值积分在各个时刻的值和梯度相互独立，因此其计算高度可并行化。

4.7 连续时间约束的惩罚泛函数值估计

为了更高效地对惩罚泛函进行有效的数值估计，我们在具有不同形状和不同连续阶的函数上考察不同阶的等距积分方法的估计精度，而后以实际的效果来选取综合性能更

好的方法。定义函数 $f_\infty : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}$ 和 $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}$ 如下：

$$f_\infty(x, h) := \frac{h}{x^2 + h}, \quad (4-39)$$

$$f_2(x, h) := (1 + \max(0, \cos(x)/4)^3) \frac{h}{x^2 + h}. \quad (4-40)$$

容易验证 $f_\infty(x, h)$ 是光滑的 (C^∞) 而 $f_2(x, h)$ 仅二阶连续可微 (C^2)。其中变量 h 为控制函数形状的参数。我们在以下四个不同的函数上进行相应的数值积分：

$$f_{\infty, flat}(x) := f_\infty(x, 1024), \quad f_{\infty, peak}(x) := f_\infty(x, 1), \quad (4-41)$$

$$f_{2, flat}(x) := f_2(x, 1024), \quad f_{2, peak}(x) := f_2(x, 1). \quad (4-42)$$

这四个被积函数的图像在图4.7中给出，可以看出它们具有不同的形状，从其定义可知，这四个函数同时也具有不同阶的连续性。

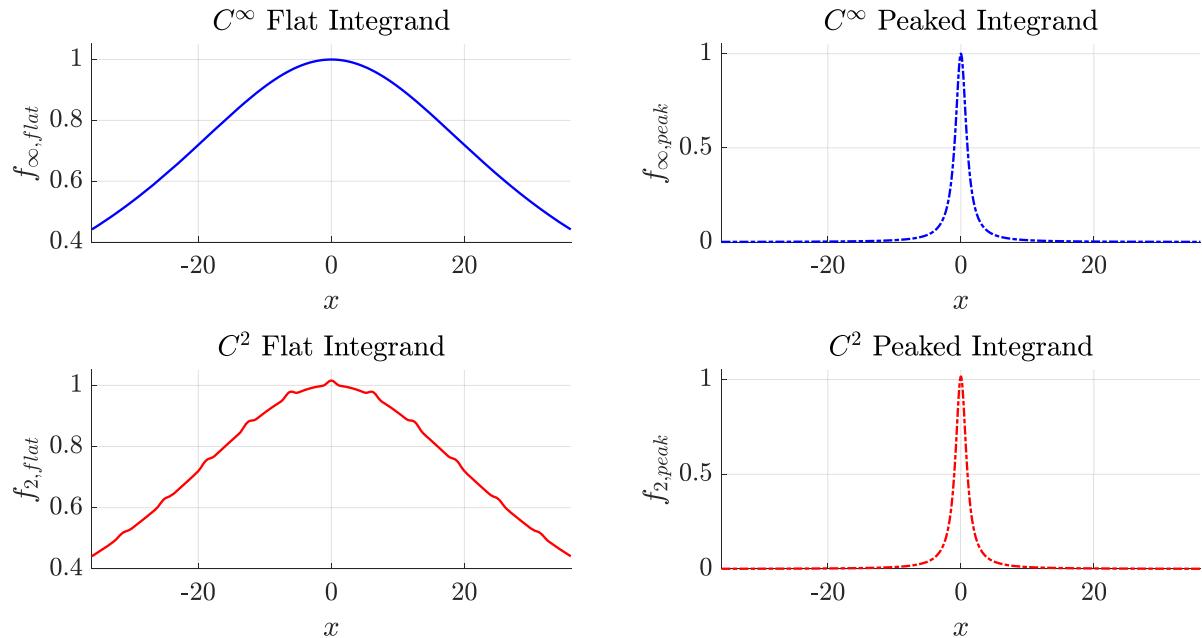


图 4.7 具有不同形状和连续性阶的四种被积函数

我们分别将等距数值积分中的（复合）梯形规则、Simpson 规则以及 Boole 规则^[100]应用到对这些被积函数在区间 $[-32.0, +32.0]$ 上的积分数值估计中。我们通过任意精度

数值库 MPMATH^[101] 计算这些积分得到其超过浮点数双精度的估计作为真值，即

$$\int_{-32}^{32} f_{\infty, flat}(x) dx = 16\pi \approx 50.26548245743669182, \quad (4-43)$$

$$\int_{-32}^{32} f_{\infty, peak}(x) dx = 2 \arctan(32) \approx 3.07911298672925669, \quad (4-44)$$

$$\int_{-32}^{32} f_{2, flat}(x) dx \approx 50.43778855911533126, \quad (4-45)$$

$$\int_{-32}^{32} f_{2, peak}(x) dx \approx 3.09813439859358481. \quad (4-46)$$

我们将数值积分精度以 $\log_{10} |Q/Q^* - 1|$ 来衡量，其中 Q^* 代表任意精度库所获得的真值， Q 代表任意方法获得的数值积分。规定等距积分的区间数 N 为 4 的整数倍，这是因为 Boole 规则要求以 4 个区间为一组的采样构成对原函数的高阶逼近。这三种规则在四个不同函数上的数值积分精度由图4.8给出。可以看出梯形规则等距积分在仅具有二阶连续可微性质的峰状被积函数上具有形式简单且性能稳定的优势。根据该实验结果，我们在惩罚泛函中选用 $(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{\kappa_i-1}, \bar{\omega}_{\kappa_i}) = (1/2, 1, \dots, 1, 1/2)$ 。

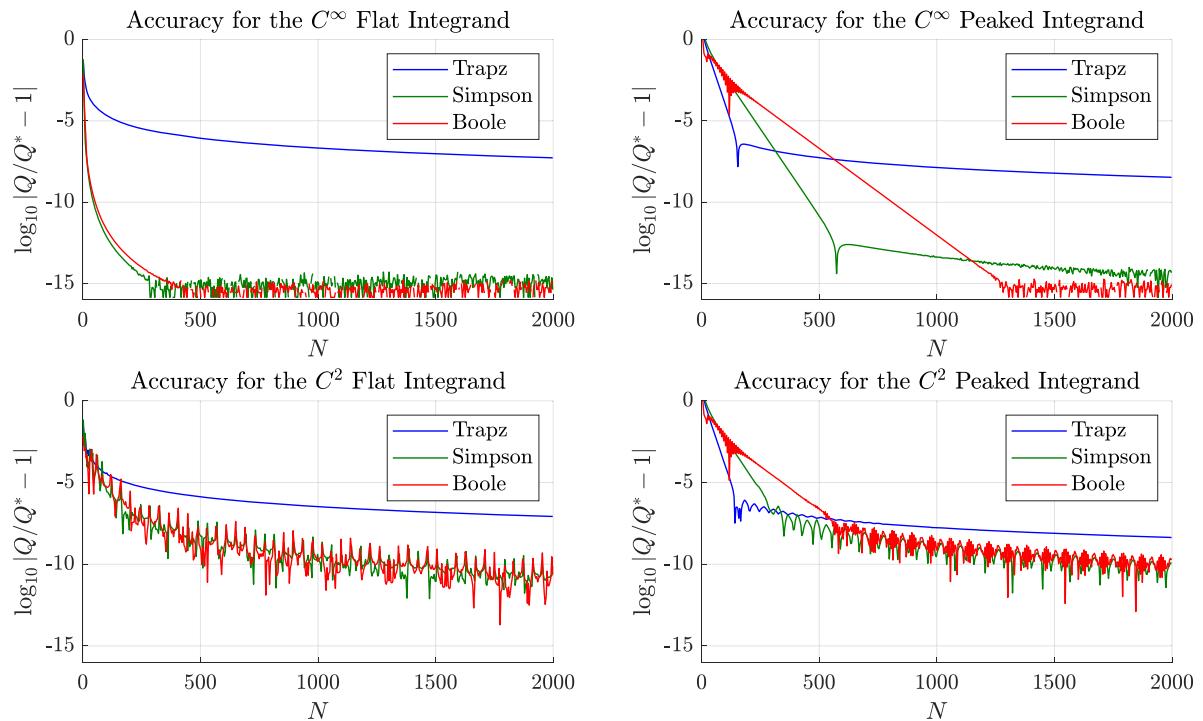


图 4.8 不同样等距积分方法在四种函数上的误差曲线

采用低阶的梯形规则的原因之一在于高阶规则往往需要在被积函数存在相应的高阶连续性才能达到更高的收敛速率。根据 Davis 等人著作^[100] 的第二章节可知，梯形规

则仅仅要求函数具有二阶连续可微 (C^2) 性质，而 Simpson 和 Boole 规则分别要求函数具有四阶连续可微 (C^4) 和六阶连续可微 (C^6) 的性质。通过对比图4.8 中左侧两个图表，可以看出，当被积函数是光滑的 (C^∞) 时，高阶法很快地收敛到了机器精度 10^{-16} 。然而，当高阶法应用于二阶连续可微 (C^2) 但三阶导数不连续的函数时，高阶法快速收敛的优势变得并不显著了，正如图4.8左下侧的图标中显示的一样。根据 Davis 等人著作^[100] 章节 4.8 的第二个定理可知，不论是等距积分还是非等距积分，高阶法应用在与之不匹配的低阶函数上确实会使得其相对于低阶法的收敛速率优势被大大削弱。

原因之二在于，高阶法在被积函数具有山峰形状时会在实际精度上发生显著劣化。通过对比图4.8 的上侧两个图表可知，即便被积函数都是光滑的 (C^∞)，当积分区间数规模中等的时候 ($N < 250$)，Simpson 规则和 Boole 规则在峰状函数上的精度大大低于梯形规则。当然，该现象和理论并不冲突，因为高阶法的渐进收敛速率只有在 N 足够大的时候才会表现出来，这也同图4.8右上侧图表中所显示的一样。值得一提的是，在 MPMATH^[101] 的手册中同样对高阶法在峰状函数上发生性能退化的工程现象有相关的描述。当被积函数是仅 C^2 的峰状函数时，高阶法基本上不具备对低阶法的优势，正如图4.8右下侧图表所示。然而，在惩罚泛函中，被积函数基本上仅具有 C^2 的连续性阶数。此外，由于轨迹经常会在某一个小小的区间上产生约束违背，因此造成该泛函经常需要对峰状函数进行积分的数值估计。

原因之三在于梯形规则在系数的确定上远远比高阶方法简单。这种简单的系数规则对惩罚泛函数值积分的并行计算更加友好。

基于上述三个原因，低阶规则在实际的问题求解中具有高度稳定的性能，同时在工程实现上规则简单切实可行，因此我们规定在轨迹优化的框架中惩罚泛函的数值估计仅采用梯形规则等距积分，以得最佳的工程实践效果。

4.8 轨迹规划的时间-空间形变方法

因为问题 (3-11) 中约束 \mathcal{G} 和 \mathcal{F} 的存在，最优轨迹的参数形式一般是以获得的。不同于传统方法需要采用大量决策变量对最优轨迹进行近似^[38]，我们直接利用 $\mathfrak{T}_{\text{MINCO}}$ 的时空形变来获得满足原轨迹优化问题的高质量解，即通过一个轻量级的无约束优化

$$\min_{\xi, \tau} J(\mathbf{q}(\xi), \mathbf{T}(\tau)) + I(\mathbf{c}(\mathbf{q}(\xi), \mathbf{T}(\tau)), \mathbf{T}(\tau)), \quad (4-47)$$

其中 J 是带时间正则项的代价泛函 (4-14) 而 I 是惩罚泛函 (4-38) 的积分近似。值得一提的是，任何依赖于具体任务的需求，不论是代价泛函还是约束泛函，均可以在 (4-47) 的结构中得到支持。

针对微分平坦的多旋翼无人机的轨迹优化，我们首先将其平坦输出以 $\mathfrak{T}_{\text{MINCO}}$ 参数化。而后将对应的轨迹段按顺序预先分配到各个 \mathcal{P}_i 之中，并利用非线性光滑映射来保证航点向量的几何约束。用户自定义的状态-控制输入 \mathcal{G}_D 通过微分平坦变换 Ψ_x 和 Ψ_u 来获得对应平坦空间中的约束 \mathcal{G} 。最后我们直接通过优化 (4-47) 来进行轨迹优化。优化所需要的梯度涉及到对 Ψ_x 和 Ψ_u 的 Jacobian 矩阵的计算可以通过对该变换的自动微分^[102] (Automatic Differentiation) 来完成，或者解析地推导出来。整个优化的正向过程和反向梯度求解过程的复杂度受到 Baur-Strassen 定理^[103] 的保证。此外，由于微分平坦变换是被无人机动力学唯一决定的，因此对该变换的微分仅仅需要做一次求解计算即可。借助该优化问题的二阶连续可微特性，我们采用 L-BFGS 算法^[104] 作为高效的拟牛顿法来利用优化问题的二阶信息求解无约束优化 (4-47)。

4.9 连续时间多项式约束验证

对于多旋翼轨迹优化而言，飞行轨迹的可行性通常由连续时间约束函数来保证。由于数值优化仅能在一定的约束函数分辨率和时间分辨率上保证轨迹的可行性，因此在轨迹规划之后，对连续时间约束可行性的严格验证是一个很重要的后处理过程。我们针对多项式轨迹上的多元多项式约束给出理论完备计算高效的约束验证方法。

考虑一段定义在 $[0, T]$ 上的三维轨迹，

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))^T \quad (4-48)$$

以多项式参数化。对于给定精度 ϵ 下，要求验证该段轨迹是否在任意时刻 $t \in [0, T]$ 均满足 $\mathcal{H}(p_1^{(i)}(t), p_2^{(i)}(t), p_3^{(i)}(t)) < \epsilon$ 。规定 \mathcal{H} 是一个多元多项式函数

$$\mathcal{H}(a, b, c) := \sum_{\substack{d_c \in \mathbb{R}, e_j \in \mathbb{N} \\ e_1 + e_2 + e_3 \leq d_g}} d_c \cdot a^{e_1} b^{e_2} c^{e_3}, \quad (4-49)$$

其中 d_g 是该多元多项式的最高次数。如图4.9中所给出的，许多形式约束验证均具有上述的多元多项式形式，其中包括轨迹推力、速度的幅值约束、轨迹同多项式函数水平集

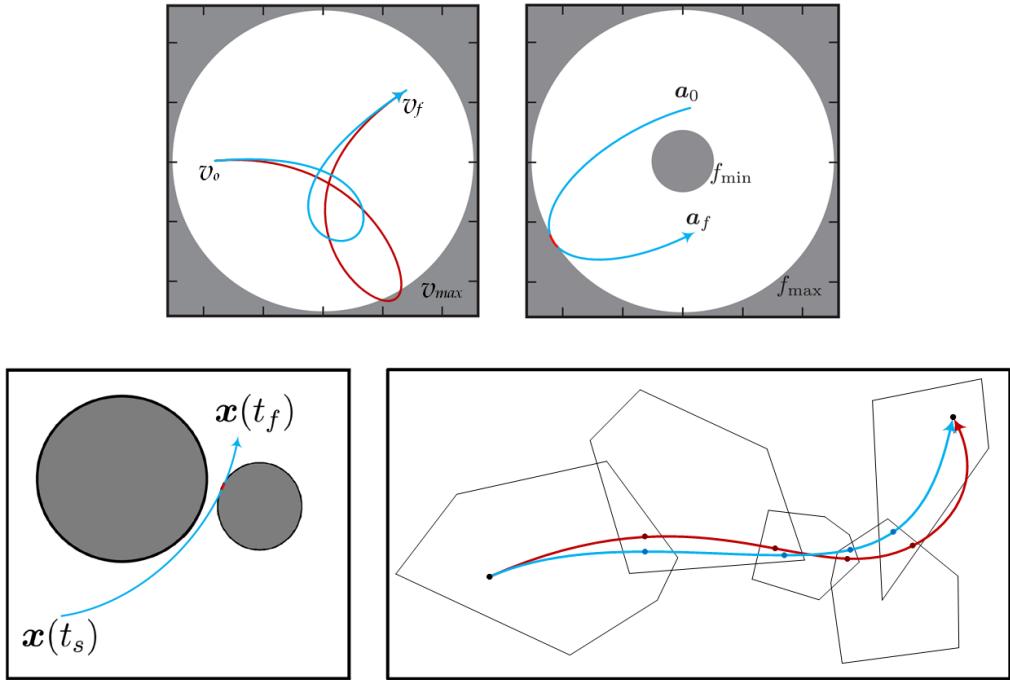


图 4.9 常用多元多项式连续时间约束

定义的障碍物的碰撞检测、安全飞行走廊的包含约束检测，等等。具体地，例如安全约束需要使得轨迹同原点 $\mathbf{0}$ 处的障碍物保持安全距离 r_{safe} ：

$$\mathcal{H}(p_1(t), p_2(t), p_3(t)) < \epsilon, \forall t \in [0, T], \quad (4-50)$$

$$\mathcal{H}(a, b, c) := r_{safe}^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \quad (4-51)$$

又或者是速度的幅值约束

$$\mathcal{H}(\dot{p}_1(t), \dot{p}_2(t), \dot{p}_3(t)) < \epsilon, \forall t \in [0, T], \quad (4-52)$$

$$\mathcal{H}(a, b, c) := a^2 + b^2 + c^2 - v_{max}^2. \quad (4-53)$$

许多基于轨迹时间离散采样逐个检查的方法往往会遗漏很微小但违背了连续时间约束的轨迹片段，因此其缺乏完备性。很多时候需要利用解析的方法完备地确定每段多项式轨迹是否在任何时刻均满足既定的约束。

任意的多项式轨迹 $p(t)$ 和多元多项式约束函数 \mathcal{H} 所构成的连续时间约束

$$\mathcal{G}(t) := \mathcal{H}(p_1^{(i)}(t), p_2^{(i)}(t), p_3^{(i)}(t)) - \epsilon \quad (4-54)$$

实质上仅仅是 t 的一个多项式。为了保证 $\mathcal{G}(t) < 0$ 对 $t \in [0, T]$ 均成立，我们首先检查

$\mathcal{G}(0)$ 和 $\mathcal{G}(T)$ 的符号，如果任一符号非负，那么表明约束在时间段初始或者末尾时刻不满足，则该连续时间约束并没有被闭区间上所有时刻满足。否则，在两个端点处该约束严格满足，那么我们需要确保该约束在区间内部 $(0, T)$ 不被违背。为了确保这一点，我们并不需要显式地计算并检查 $\mathcal{G}(t)$ 在区间内的所有极值，而是仅仅需要判定 $\mathcal{G}(t) = 0$ 在区间内解的存在性即可。如果该多项式方程在区间 $(0, T)$ 内有任何根，那么该连续时间约束一定被违背。这样做的一个好处在于不要求解无闭式解的高次多项式方程。

我们接触 Sturm 定理^[105] 来判定 $\mathcal{G}(t) = 0$ 在区间 $(0, T)$ 内根的存在性。由于已知 0 和 T 均不是 $\mathcal{G}(t) = 0$ 的根，那么可以直接计算其 Sturm 序列 $g_0(t), g_1(t), g_2(t), \dots$ 如下

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \mathcal{G}(t), \\ g_1(t) &= \dot{\mathcal{G}}(t), \\ -g_{k+1}(t) &= \text{Rem}(g_{k-1}(t), g_k(t)), \end{aligned} \tag{4-55}$$

其中 $\text{Rem}(g_{k-1}(t), g_k(t))$ 代表借助多项式 Euclidean 除法^[105] 计算 $g_{k-1}(t)$ 除以 $g_k(t)$ 所得的余项。该序列计算到 $g_k(t)$ 变成常数即停止。我们以 $V_{sign}(\tau)$ 代表 Sturm 序列在 $t = \tau$ 时非零值的符号反向次数，其中零值项直接被忽略即可。那么在将重根仅计数一次的情况下， $\mathcal{G}(t) = 0$ 在区间 $(0, T)$ 内的实数根的个数为 $V_{sign}(0) - V_{sign}(T)$ 。至此，我们可以利用纯代数运算实现对多项式轨迹的多元多项式连续时间约束进行严格的验证。对于非多元多项式的约束，我们可以对其做近似的 Taylor 级数展开至可接受的误差许可度，再对级数形成的多元多项式约束进行验证即可。

为了保证该验证方法的效率，我们同连续时间轨迹约束验证的常用方法相比较。其中包括 Mueller 的递归验证法^[78]，Burri 的显式验证法^[106]。Mueller 的方法利用三维速度/加速度轨迹逐轴无穷范数的幅值作为幅值轨迹无穷范数的上界，递归地验证二分区间的二范数约束。且由于该上界在轨迹区间长度趋于 0 时越来越紧，该方法可以在几次递归便获得轨迹可行判定，否则，该方法在一定的分辨率停止递归。此外，由于逐轴无穷范数的验证对于 < 5 次多项式而言均具有解析解，因此该方法无需数值迭代。Burri 的方法则直接计算对应多项式的极值并计算最大的约束违背，因此在轨迹的次数很高时需要数值迭代求根。更一般的基于离散点采样的方法则对轨迹在时间上进行精细分辨率离散采样，并逐次对离散点的约束函数进行计算，当所有离散点均满足约束时认定该轨迹通过了连续时间约束验证。

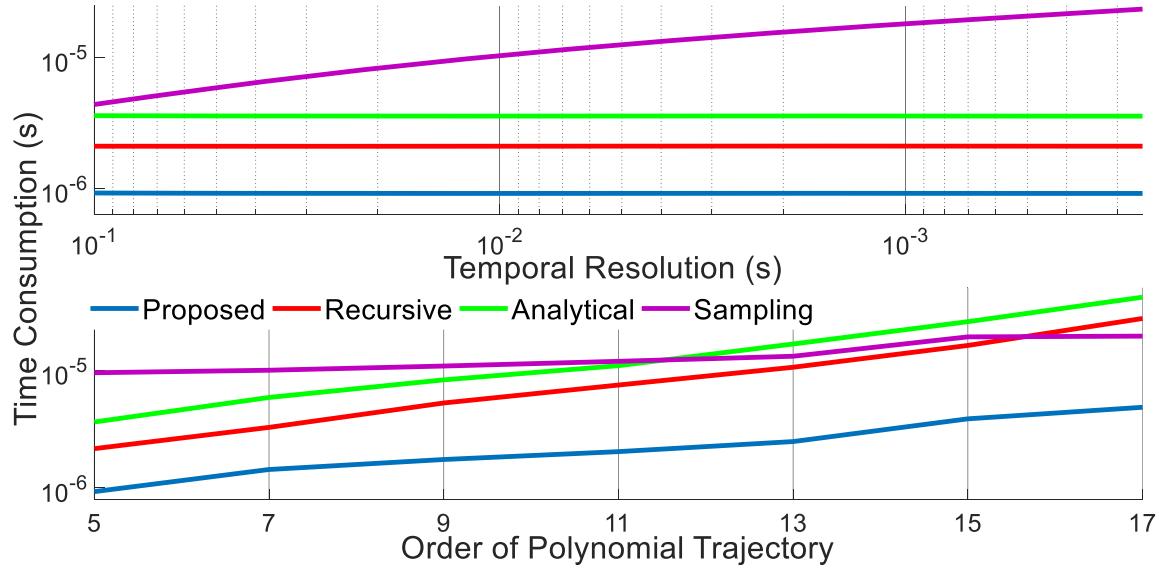


图 4.10 不同约束验证方法随时间分辨率和多项式次数的效率曲线

我们考察轨迹的速度约束，对每种情况随机生成了 1000 条轨迹段，相应地利用上述方法进行约束验证并统计各个方法的平均计算时间。正如图4.10所示，我们的验证方法由纯粹的代数计算过程完成，不依赖于时间分辨率以及轨迹的阶数，因此在所有方法中具有最高的效率。递归验证法和离散点采样法在分辨率较低时会产生错判。此外，当分辨率太高时，离散点采样验证的代价会随着分辨率线性增长，而对轨迹的阶数不敏感。递归验证法和显式验证法均依赖于轨迹次数较低时候的显式求根，因此当轨迹阶数增大时，其需要数值迭代来计算相应的极值，因此其计算效率逐渐劣化。相比之下，我们的验证方法则更为通用、理论更为完备且效率优势巨大。

4.10 本章小结

本章给出了非线性风阻效应下多旋翼无人机的动力学模型以及其微分平坦变换的代数过程。利用微分平坦变换，轨迹规划的动力学微分约束可以被平坦输出空间中具有足够阶连续性的轨迹直接满足。随后对 MINCO 轨迹及代价函数的定义域导致的时域流形约束给出了显式的微分同胚变换，对航点上的球形和凸多面体形几何约束直接利用光滑的非线性变换完成解析的投影操作。这样，对动力学微分约束、时间和空间的简单几何约束均可以通过优化相应平直空间中的轨迹或变量直接完成。针对不同任务需求下的连续时间状态-输入约束，本章利用微分平坦变换代数过程的逆向微分以及惩罚泛函光滑化方法，以无约束优化方法完成 MINCO 轨迹在规划问题的各种约束泛函和代价泛

函下的时间-空间形变，同时保证了约束函数在不同时间分辨率下均可以被并行地计算。最终采用微分平坦变换直接获得在原状态和控制空间上高质量的轨迹。最后，本章给出了对轨迹的连续时间约束的严格验证的解析方法，以判断轨迹是严格符合规划问题的约束。

5 应用

5.1 引言

作为多旋翼机器人自主导航的关键模块，本文基于几何方法的多旋翼运动规划框架需要在各种各样的导航任务和求解任务中进行大量的仿真、对比、实验和测试才能获得该方法由于理论创新带来的实际性能的提升。本章旨在同各种已有文献中的同类型轨迹规划方法进行基准测试和仿真对比，以获得本文的方法在效率和质量的实际表现，也在于借助极限飞行实验来证明本文方法能够切切实实解决高难度的运动规划问题，并能充分利用多旋翼的动力学性能完成现有方案难以做到的实时求解和高质量机动。

5.2 大规模无约束多航点轨迹生成

关于无约束多航点轨迹生成的问题(3-18)，我们和现有的方案进行了性能基准测试，其中包括 Mellinger 和 Kumar 的二次规划方法^[12]、Bry 等人的闭式解方法^[43]以及 Burke 等人的线性复杂度方法^[107]。为了效率上的公平，我们对所有的方法利用了 C++11 进行了实现。其中对 Mellinger 的方法采用 OSQP^[73] 来求解对应的等式约束二次规划问题，对 Bry 的闭式解涉及到的线性方程组采用稠密矩阵分解以及稀疏矩阵分解^[108] 来计算。对 Burke 的方法，我们的实现比原来的版本在求解效率上要高至少 1 个数量级^[107]。对以上方法的性能基准测试均在 Intel Core i7-8700 处理器的 Linux 系统上进行。

图5.1中给出了不同轨迹段数 M 下平均计算时间 t_{comp} 。其中上图和中图分别给出对于问题(3-18)中 $s = 3$ 和 $s = 4$ 时最小化高阶导数范数平方积分的计算时间。下图则给出两个线性复杂度算法在超大规模问题上的求解效率。Mellinger^[12] 的方法仅仅在中等规模问题 ($10^1 < M < 10^3$) 上的计算效率高于 Bry 的闭式解的稠密矩阵版本^[43]。Burke 的方法^[107] 得益于其线性复杂度的优势，能够处理求解超大规模问题 ($10^4 < M < 10^6$)。我们的方法则既能够具有最优的 $O(M)$ 计算复杂度，又可以在所有问题规模上比所有现有方法在计算效率上高出至少 1 个数量级。

得益于问题(3-18)的最优化充要条件，我们的方法直接对问题的最优解进行构造，从而避免了冗余的计算。本方法具有简洁、高效、稳定和可规模化的特点，能够作为利

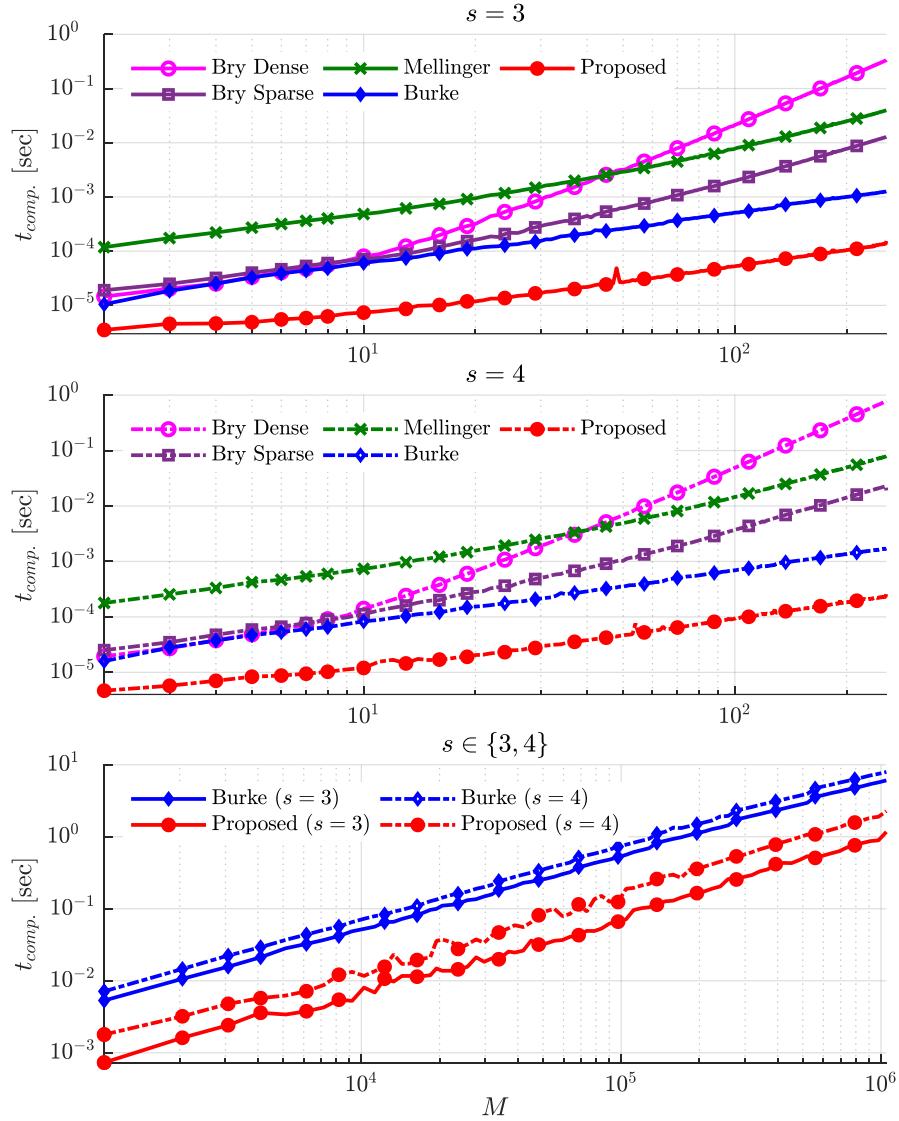


图 5.1 大规模无约束多航点轨迹生成的效率基准测试结果

用稀疏参数化进行高效轨迹规划的一个可靠的模块。

5.3 基于航点航时近似调整的光滑轨迹生成

由于 MINCO 自身可以支持多航点轨迹的快速生成，我们在本节不借助 MINCO 的时间-空间形变，直接采用 Bry 等人^[43]的传统方法利用 RRT* 作为路径点的选取依据。在已知的障碍物地图环境中，我们预先设定需要经过的关键航点。采用 RRT* 算法依次计算出从初始点穿过这些关键航点的近似最短可行路径。我们首先利用 Douglas-Peucker 路径简化算法^[109]得到该可行路径的简化路径。该简化路径不一定可行，但是具有较少的航点并且保证在航点上的可行性。而后，我们利用 MINCO 轨迹和等比于航点之间距

离的时间向量生成对应的光滑轨迹。当轨迹的某一段发生碰撞时，我们将原路径上处于该段轨迹两段航点的弧长中间点作为新的轨迹航点参数，再次生成新的 MINCO 轨迹。该过程持续递归地往已有轨迹添加新的航点，直到整条轨迹和可行路径在空间上贴合得较近以至于没有任何碰撞发生为止。

对于最大速度和加速度的可行性约束而言，Bry 的方法^[43] 借助具有静态初末条件的轨迹（Rest-To-Rest Trajectory）在时间缩放下的空间不变性，在利用数值梯度求解无约束最优时间分配之后，不断地缩短保守的总时间并保持时间分配比例，直到轨迹的可行性约束被刚好满足。我们在这里借助 MINCO 以每段轨迹时间长度为独立参数的特点，直接利用 MINCO 能量函数关于时间向量的解析梯度获得无约束最优时间分配。该过程由于采用了解析梯度，因此具有更高的数值稳定性，并且能够利用高阶信息达到更快的收敛。在此之后，采用相同的时间缩放满足可行性约束，我们的调整方法会继续对没有达到可行性约束上限的轨迹段缩短时间，直到轨迹的时间向量中任一元素均不能被继续调整时停止迭代。这种启发式的调整方案能够更充分地利用各个轨迹段上的可行性约束，使得无人机的平均飞行速度更快。

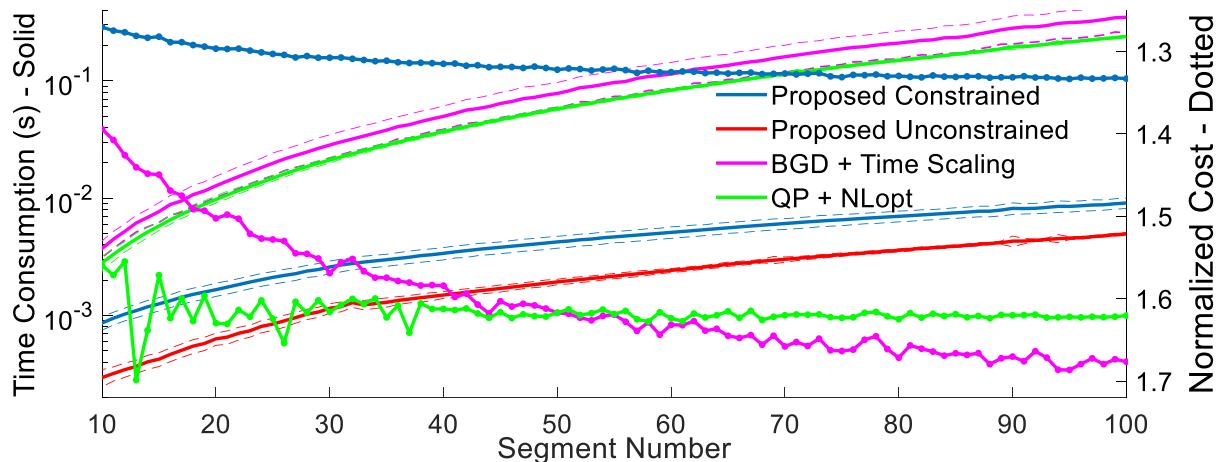


图 5.2 多种启发式航点航时调整方法在代价函数和计算效率上的对比

我们将这种启发式调整轨迹航点航时的方法和现有基于航点的轨迹生成方法进行对比。其中包括 Mellinger^[12] 等人的方法利用数值差分获取梯度信息，然后回溯法进行数值梯度下降（Backtracking Gradient Descent），最后采用轨迹总时长缩放一次性得到满足最大速度和加速度约束的轨迹。我们同样和 Bry 等人的方法^[43] 做了对比，并且通过轨迹能量关于时间向量的数值梯度以 NLOpt^[110] 进行调整获得无约束最优的时间分配，而后维持每段的时间比例，仅仅调整总时间直到整个轨迹触碰到约束。我们在一个

$50 \times 50 \text{ m}^2$ 大小的随机障碍物地图通过随机生成长度超过 120 m 的轨迹来对比三种方法的计算效率和轨迹能量函数，相应的结果如图5.2中所示。在这三类启发式调整的方法中，本方法达到了最高的计算速度和带约束时最低的轨迹代价泛函。我们的方法可以在 5 毫秒内生成规模为 60 段的轨迹，并对其完成航点和时间向量的调整。相比之下其余两种方法则难以对段数超过 60 的轨迹完成实时计算。本方法的效率来源于 MINCO 轨迹自身具有的线性复杂度、直接对解析梯度计算的支持以及时间-空间变量直接解耦这三个方面。本方法生成的轨迹也具有相对较低的代价函数，这是因为在进行启发式时间向量调整时，我们不仅对整体轨迹的时间进行缩放，并且进一步借助连续时间约束验证的高效性，直接对每一段轨迹的时间各自进行进一步调整，从而保证整个轨迹在带时间正则项下的总代价函数更低。



图 5.3 多旋翼无人机竞速飞行实验的障碍物环境和实际飞行轨迹

为了验证基于启发式航点航时调整的方法在真实飞行过程中的实用性，我们将该方法应用在多旋翼无人机自主竞速之中。我们采用一个自行搭建的四旋翼无人机，并利用机载的计算平台借助 Intel i7-8550U 处理器完成整个定位、规划和控制回路。我们采用带回环的 VINS-Mono^[111] 作为视觉里程计对竞速无人机进行实时的位姿估计。并采用 SE(3) 轨迹跟踪几何控制器^[112] 完成定位、规划和控制的闭环。此外，竞速飞行中没有用到任何外部定位和计算资源。该实验在如图5.3所示的一个具有障碍物分布的室内环境中进行。为了实现全局轨迹生成的验证，我们首先建立了该环境中全局一致的体素地图，而后根据竞速的规则将必须要穿过的障碍物选为关键航点。在每次竞速飞行的开始

阶段，该飞机均会根据随机选取的飞行规则完成全局轨迹的在线生成并随机执行飞行任务。我们令飞行的最大速度和最大加速度分别为 $v_{max} = 4.0 \text{ m s}^{-1}$ 和 $a_{max} = 4.5 \text{ m s}^{-2}$ ，并将代价函数中的时间正则项设置为 $\rho_k = 1024.0$ 。整个竞速轨迹的空间形状、真实的飞行轨迹、速度和加速度曲线均在图5.4中给出。从该图的规划轨迹和实际轨迹中可以看出，即便是在有着许多障碍物的竞速环境，我们的航点航时启发式调整方法也能够生成安全可行的飞行轨迹。此外，飞行的最大速度达到了 4.0 m s^{-1} 这表明了本方法能够既保证约束可行性，又能够充分利用约束的裕度尽可能地降低轨迹的代价函数。更重要的是，该轨迹在时间 $t \in \{0.5, 1.5, 6.0, 6.7, 8.7, 9.5, 10.0, 11.6\} \text{ s}$ 的时候均达到了速度或者加速度在幅值上的最大限制，这说明了本方法在调整时间上充分利用了各段轨迹的自由度，从而实现相较于传统整体时间缩放仅仅能在单个时间点达到约束限制的轨迹具有更低的保守性。

本节采用传统固定航点的轨迹生成方法，比较了当传统的轨迹表征在换成 MINCO 时在计算效率、轨迹质量和调整灵活度上带来的显著提高。然而，值得注意的是，这些传统的框架终究是启发式的调整方法，它们不能充分利用 MINCO 轨迹的特性。该类传统的调整方法缺陷具体表现在几点上：其一，启发式调整法仅仅能够使得简单的连续时间约束在可数个瞬间时刻上达到饱和；其二，启发式调整法不支持多旋翼动力学的通用的约束；其三，启发式调整法难以应对可行空间极度受限的情况；其四，启发式调整法仅仅适用于静止初末条件的轨迹生成。第一个缺陷源自于该方法仅仅利用了连续时间约束的布尔信息，即给定一段轨迹仅仅只有该轨迹是否满足约束的 1 比特信息，而没有利用约束的高阶信息进行显式地优化。第二个缺陷是因为多旋翼动力学具有高度非线性非凸且多元多项式不可表的形式，难以高效地进行连续时间验证。第三个缺陷是因为该方法仅仅通过递归地加入航点来保证安全，而极度受限的环境中，频繁加入固定航点使得生成的轨迹会在平滑度上劣化。第四个缺陷是因为多旋翼无人机只有在处于准静态运动时才能保证和可行路径在空间上贴合得足够紧密并且依旧保证动力学可行性，而非静止的初末条件会破坏准静态运动假设。为了避免启发式航点航时调整的缺陷，我们需要充分利用 MINCO 轨迹自身的特性实现直接的受约束的轨迹时空形变，实现时间域变量和空间域变量的联合优化。

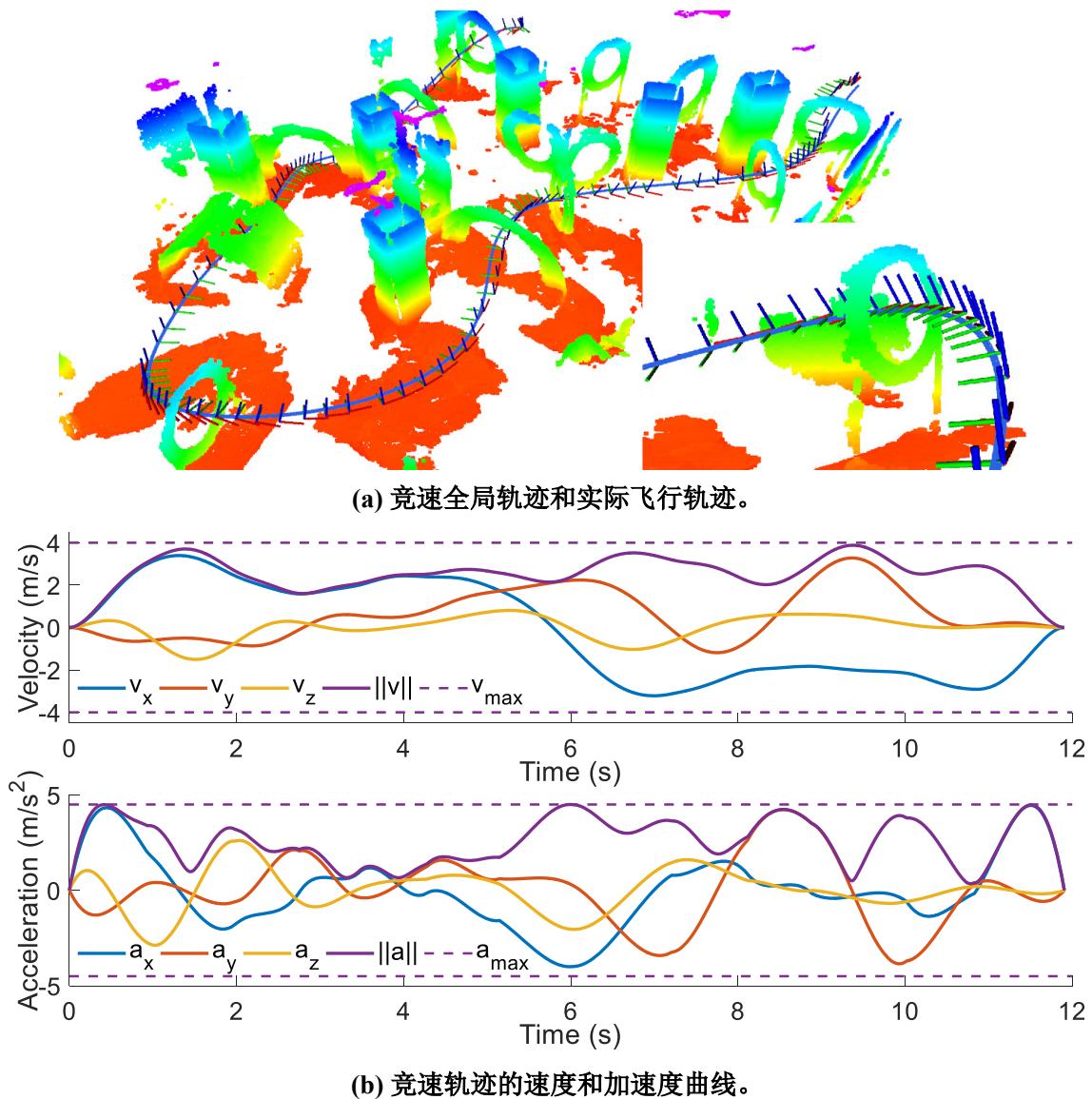
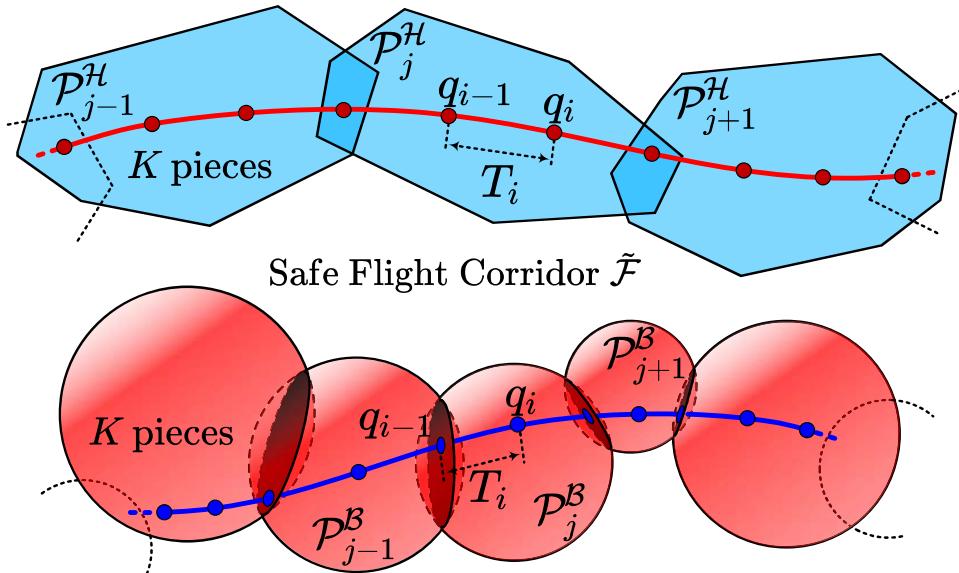


图 5.4 基于航点航时启发式调整方法的全局竞速轨迹生成和实验结果

5.4 基于安全飞行走廊的全状态轨迹时空优化

作为问题(3-11)的一个特例，3维安全飞行走廊(Safe Flight Corridor)中的轨迹优化有着广泛的研究和应用^[21, 113, 114]。安全飞行走廊作为所考虑的拓扑下可行空间的抽象，通常由轨迹规划框架的前端生成，例如本文提出的快速区域迭代膨胀算法(Fast Iterative Region Inflation)，或者是已有文献中的并行凸聚类膨胀算法^[21] (Parallel Convex Cluster Inflation)，区域膨胀线搜索算法^[20] (Regional Inflation by Line Search)、安全区域RRT*扩张算法^[114] (Safe-Region RRT* Expansion) 又或者是基于半定规划的迭代区域膨胀算

图 5.5 \mathbb{R}^n 中不同安全飞行走廊的段数分配示意图

法^[19] (Iterative Regional Inflation by Semidefinite Programming)。正如 (3-14) 和 (3-15) 所描述的，我们假设一个子单元为凸多面体或者球的安全飞行走廊已经被前端算法生成。安全飞行走廊中动力学可行的轨迹优化通常是作为此类轨迹规划框架的后端。

我们考虑两种类型的安全飞行走廊，正如图5.5所示。该图同时也是 \mathbb{R}^n 中不同安全飞行走廊的段数分配示意。每个凸几何子单元被分配了 K 个轨迹段，并且航点 q_i 被分配到 $\mathcal{P}_{[i/K]} \cap \mathcal{P}_{[(i+1)/K]}$ 之中，因此 $M = M_P K$ 且第 i 个轨迹段 $p_i(t) : [0, T_i] \mapsto \mathbb{R}^3$ 处于 $\mathcal{P}_{[i/K]}$ 之中。对球形的走廊而言，处于两球相交区域的点进一步被约束到图中所示的 $(n-1)$ 维圆盘上。此外，处于同一子单元中各个轨迹段时长保持一致。通过采用光滑非线性变换，参数 \mathbf{T} 和 \mathbf{q} 上的直接约束被精确地满足，例如 $\rho_s(T) = k_\rho T$ 时的 $\mathbf{T} \in \mathbb{R}_{>0}$ ， ρ_f 中的 $\|\mathbf{T}\|_1 < T_\Sigma$ 以及航点的安全约束 $q_i \in \mathcal{P}_{[i/K]} \cap \mathcal{P}_{[(i+1)/K]}$ 。连续时间约束 \mathcal{G} 被用于实施轨迹任意时刻的安全约束以及动态可行性约束：

$$\begin{cases} p_i(t) \in \mathcal{P}_{[i/K]}, & \forall t \in [0, T_i], \forall 1 \leq i \leq M, \\ \|p_i^{(1)}(t)\|^2 \leq v_{max}^2, & \forall t \in [0, T_i], \forall 1 \leq i \leq M, \\ \|p_i^{(2)}(t)\|^2 \leq a_{max}^2, & \forall t \in [0, T_i], \forall 1 \leq i \leq M, \end{cases} \quad (5-1)$$

其中 v_{max} 和 a_{max} 均为简单的动态可行限制。而后， $\tilde{\mathcal{F}}$ 中的轨迹优化则通过求解优化问题 (4-47) 来完成。对于一些随机生成的安全飞行走廊，我们在图5.6中给出了一些相应的求解结果和速度情况的可视化，并且对凸多面体或者球构成的走廊均能处理。其中轨

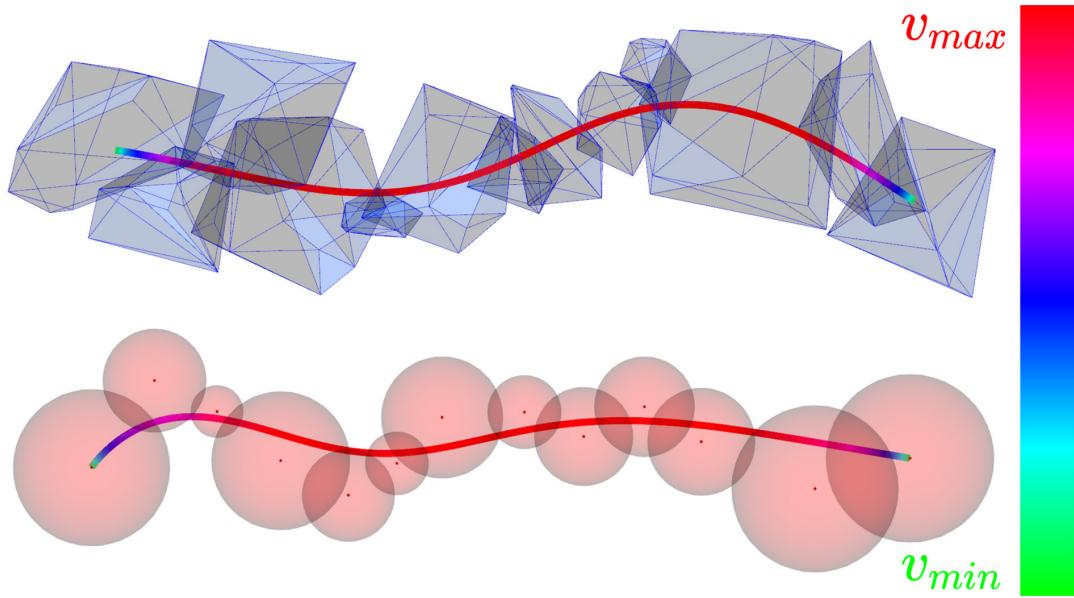
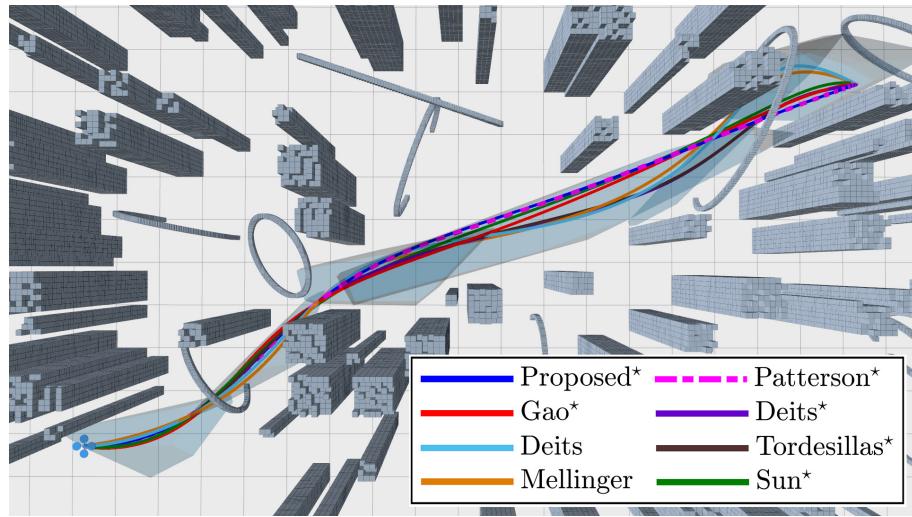


图 5.6 不同类型的 3 维安全飞行走廊中的轨迹求解结果

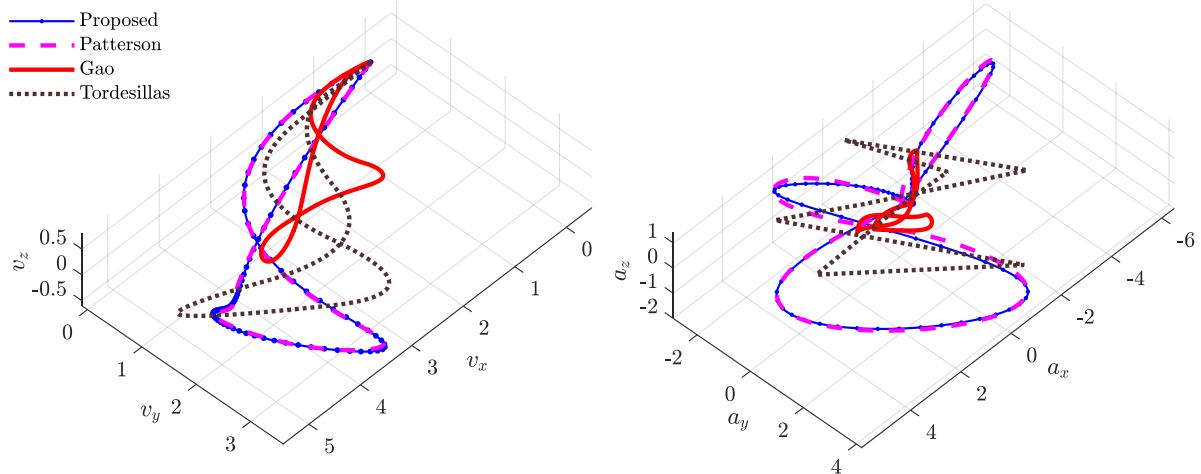
迹上的颜色按照对应的速度幅值相应变化。这两个安全飞行走廊是随机生成的。可以看到即便飞行走廊具有扭曲交错且狭窄的可行区域，对应的轨迹仍然光滑且能持续到达最大飞行速度。

为了进一步评估本文方法的性能，我们和现有的方法在凸多面体构成的安全飞行走廊中进行轨迹优化的方法做了详尽的对比测试。所有被比较的方法的技术细节如下：

- Proposed*: 在 (5-1) 中约束下最小化以线性或指示函数为正则项的三阶导数平方范数的积分泛函；
- Patterson*[39]: 以 Gauss 伪谱法求解 3 阶积分链的线性二次最短时间问题，每一个轨迹阶段均利用路径约束保证 (5-1) 成立；
- Gao*[21]: 利用以三阶导数范数平方积分为二次代价函数，以 Bézier 控制点构建线性约束，通过二次规划求解一条安全的几何曲线。随后利用二阶锥规划在 (5-1) 约束下求解时间最优路径重参数化后的轨迹；
- Deits*[53]: 三阶导数的能量函数以及轨迹段的分配问题利用混合整数二阶锥规划求解。其中轨迹速度和加速度的 L_1 范数以及安全性均通过多项式平方和条件精确实施。轨迹的每段均采用 3 次多项式；
- Deits: 除轨迹段的分配是通过启发式方法完成之外，具体方法同 Deits*[53] 中求解



(a) 不同方法求解轨迹的几何外形对比



(b) 不同方法求解的速度和加速度对比

图 5.7 随机环境中各种方法的轨迹在空间和时间域上的对比

二阶锥规划完成；

- Tordesillas^{*[55]}: 将 Deits^{*} 方法中的多项式平方和条件替换为 Bézier 控制点的线性条件，通过混合整数二次规划求解对应的段分配问题，并且轨迹总时间是启发式确定的；
- Mellinger^[12]: 轨迹由线性不等式约束的二次规划求解得到，其代价函数同样由三阶导的能量项构成，安全性由采样点的线性约束构成。时间分配是利用梯形速度曲线计算得到。⁽⁵⁻¹⁾ 中的动态约束通过合理地缩放时间因子^[20] 来完成；
- Sun^{*[56]}: 轨迹通过一个双层规划框架（Bi-Level Programming）完成。底层的不等

式约束二次规划除轨迹采用 6 次多项式之外，其余和 Tordesillas* 保持一致。时间分配通过双层规划的解析灵敏度直接在上层进行次梯度优化。

以上带有星标 * 的方法表明其支持对时间分配亦或是区间分配的直接优化。在轨迹高阶导数上的范数约束对 L_1 和 L_2 范数均采用同样的最大值。因此，该约束对于 Proposed*、Patterson*、Gao* 和 Mellinger 的这四种约束 L_2 范数的方法而言是更紧的。对于轨迹的总时间，Deits* 和 Sun* 的这两种方法需要预先给定该值，因此我们采用梯形速度曲线来计算对应的轨迹总时间。Patterson* 则直接将原问题离散，并用全局配点法的指数收敛来获得高质量的解^[39]。因此我们采用该方法的轨迹作为问题最优解真值。

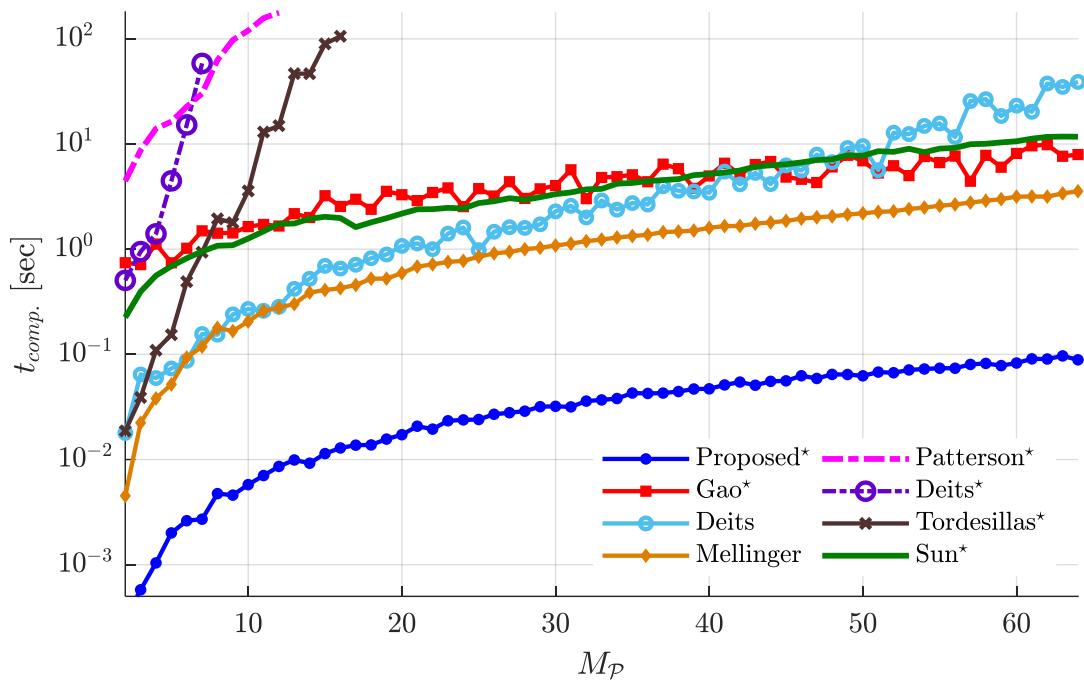


图 5.8 各种基于安全飞行走廊的轨迹优化方法的计算效率对比

本对比测试在一个如图 5.7 所示随机生成的环境中进行，安全飞行走廊的几何单元个数 M_P 从 2 到 64 个不等，并且每一种规模下均随机生成 10 个不同的安全飞行走廊。凸多面体子单元 \mathcal{P}_i^H 的面数从 8 到 30 个不等。我们进一步设置 $K = 1$, $k_\rho = 1024.0$, $v_{max} = 5.0 \text{ m s}^{-1}$, $a_{max} = 7.0 \text{ m s}^{-2}$ 以及 $\kappa_i = 16$ 。各个方法求解的时间限制为 3 分钟，并且相对的精度为 10^{-4} 。所有方法均采用全零的初始和末端状态。对于具体的程序而言，Proposed* 和 Mellinger 的方法均采用 C++11 的单线程串行计算实现。Patterson* 的方法则直接采用 GPOPS-II 通用求解器软件^[39]。对 Deits* 和 Deits 的方法，我们参考原来的 MATLAB 版本^[53]作了 C++11 的实现。Gao*、Tordesillas* 和 Sun* 的程序则直接采用其

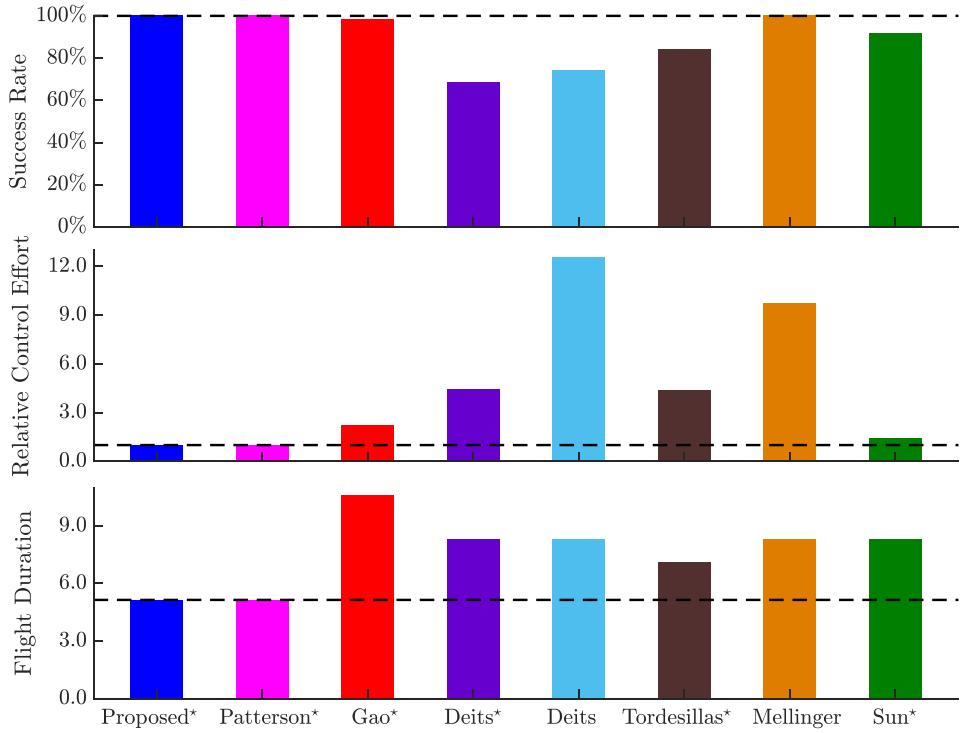


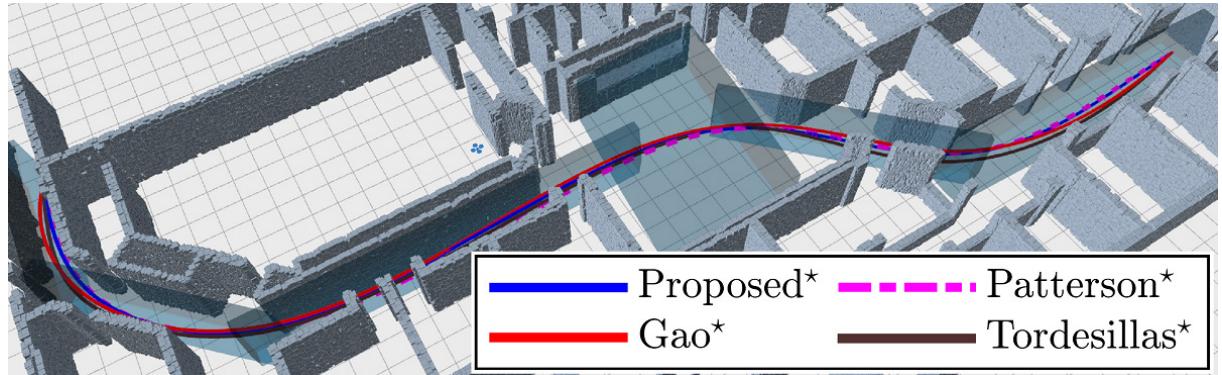
图 5.9 各中轨迹优化方法在成功率、轨迹能量和飞行时间上的对比

对应的开源代码。此外，Deits*、Deits 和 Tordesillas* 均采用商用求解器 Gurobi^[115] 并以 6 线程进行并行优化。Gao* 和 Sun* 均采用商用求解器 Mosek^[116] 处理对应的优化问题。

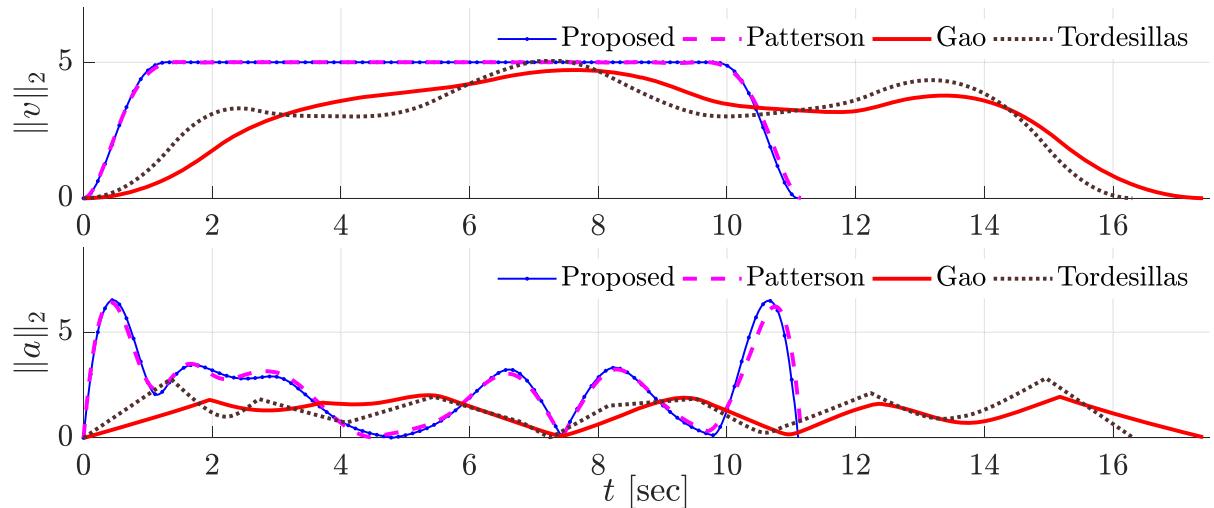
图5.8中给出了各个方法的计算效率。可以清楚地看出，Deits* 和 Tordesillas* 的方法由于需要处理整数优化变量，其计算时间随着问题规模 M_P 近似成指数增长。尽管如此，Tordesillas* 仍旧通过利用保守约束来保证了其在 M_P 较小时相较于 Deits* 更高的计算效率。Deits 和 Mellinger 的方法均通过启发式的时间分配或区间分配方案，实现了更低的计算时间。Gao* 和 Sun* 的方法可规模化的能力更强，但是其在小规模问题上的时间常数更大因而不适合有实时计算需求的任务。Patterson* 的方法更注重求解的质量而非效率，因此只适用于离线计算的场景。Proposed* 方法则能够在计算效率上领先其他方法至少一个数量级，同时支持时间分配的直接优化。

不同方法求解的轨迹形状在图5.7给出了对应的案例，其中 Proposed* 所生成的轨迹和 Patterson* 的真值在空间域和时间域上比其他所有特化的方法更为接近。不支持时间分配和区间分配优化的方法更容易在空间和时间域上偏离真值。Deits* 和 Tordesillas* 的方法和真值偏离较大是因为这两类方法所支持的区间优化采用了的区间个数不够充足。在图5.9中，我们给出了不同方法的成功率、相对能量大小以及飞行时间。其中，利用整

数变量进行区间优化的方法有着较低的成功率。由于不同方法优化得到的轨迹总时间不一样，其能量项的量级也不同。因此我们对所有方法均采用本方法的固定总时间版本进行同等飞行时间下的轨迹优化，而后将各方法的能量项以本方法得到的轨迹能量归一化。可以清楚地看到，采用启发式方法来决定时间分配或者区间分配的方法具有较高的轨迹能量项，这说明其轨迹并没有比其他方法更平滑。此外，在总时间上，Proposed^{*} 方法和真值最为接近。



(a) 室内环境中不同方法在安全行走走廊中的不同轨迹



(b) 不同轨迹的速度和加速度幅值曲线

图 5.10 大权重时间正则项下四种方法生成的轨迹的空间和时间曲线

为进一步考量各个方法所求解轨迹的时域特性，我们在图5.10所示的环境中将四种完备的方法在长距离飞行轨迹优化中进行测试。其中 Gao^{*} 的轨迹在飞行速率上较为平缓。由于 Tordesillas^{*} 的方法仅仅采用了 3 次多项式，因而其轨迹的三阶导数不连续。Proposed^{*} 方法的解具有和真值相同的轨迹质量。得益于惩罚泛函的有效性，我们的方法和真值一样能够充分利用连续时间约束的裕度来尽可能地降低时间正则化后的二次

能量代价函数。

在上述的仿真和测试中，我们的方法能利用稀疏参数化方法达到和伪谱法^[39] 在空间和时间上具有同等质量的轨迹，并且其计算效率远胜于所比较的所有方法。



图 5.11 搭载激光雷达的多旋翼无人机及其安全自主高速飞行实验

如图5.11所示，为进一步验证本文轨迹优化框架的切实可行性，我们在有障碍物的地下车库进行了多旋翼无人机高速自主飞行实验。所有的计算均由一个搭载 Intel Core i7-8550U 处理器的机载电脑上进行。我们采用 FAST-LIO2^[117] 作为高度鲁棒的基于三维激光雷达的同步定位和建图系统，在该系统中，我们实现了利用重力将里程计初始惯性系和重力水平面对齐的初始化操作，并进一步利用实时估计的重力方向不断更新全局点云的重力方向，使得整个地图和定位在高度方向上一致性更高。整个三维激光雷达里程计在百米距离尺度下重复定位精度在十厘米量级。此外在 20 Hz 的里程计信息基础上，我们利用定位系统估计的惯性测量元件（Inertial Measurement Unit）的偏置和方差对测量的加速度和角速度去偏，并利用异步的增量式积分来获得和惯性测量频率同频的

200 Hz 实时位姿信息，从而完成高速飞行控制所需的高频反馈。整个里程计在多旋翼高速机动时的定位误差满足其安全飞行的要求。于点云地图上进行在线安全飞行走廊和飞行轨迹规划，我们的方法在 0.29 s 内完成了 343.57 m 的全局轨迹生成。规划的结果如图 5.11d 所示。该实验显示了本文方法在长距离轨迹规划上的计算效率。在该实验中，多旋翼无人机在障碍物环境中高速导航的速度达到了 12.0 m s^{-1} ，并同时保证轨迹的安全性和动态可行性，此外整个过程中的推重比始终保持低于 2.0 的低水平。

5.5 动态障碍物环境中的鲁棒轨迹规划

多旋翼无人机的许多应用场景中存在着动态障碍物，比如在已有多个航线的场景中规划新的航线。为在各种静态和动态障碍物环境中保证严格的安全，多旋翼的飞行任务需要离线或在线地进行长距离的航行轨迹规划，并尽可能地考虑多方面威胁航行安全的因素。我们考虑多旋翼在有着多个动态飞行器的公里级可飞行区域 \mathcal{F} 内进行长距离轨迹规划的问题。其轨迹需要满足三个安全准则，即保证对静态障碍物的规避、考虑不确定性动态障碍物的避让飞行以及高速航行的动力学可行性。

我们规定已有飞行器的近似航行轨迹为 $r_i(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ ，其中 t 为绝对时间。在 t_o 时刻，一架多旋翼无人机需要执行从 $p_o \in \mathbb{R}^3$ 到 $p_f \in \mathbb{R}^3$ 的安全飞行任务，其对应的航行轨迹为 $r(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ 。为保证多旋翼对静态障碍物的规避， $r(t)$ 需要满足以下条件

$$r(t) \in \tilde{\mathcal{F}}, \forall t \in [t_o, t_f], \quad (5-2)$$

其中 $T_\Sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ 为该次航行总时间，因而最终到达时刻为 $t_f = t_o + T_\Sigma$ 。由于已知处于航行轨迹上的飞行器受到起飞延时、风阻等等其它外部扰动因素的影响，其真实位置和 $r_i(t)$ 并不一致，因此为保证该多旋翼对其它不确定位置飞行器的规避。我们假定这些飞行器能保证在时间误差和空间误差内满足对应的预定航行轨迹。因此，为了在这些动态障碍物不确定性条件下实现依然鲁棒的避让策略，我们采用如下的时间-空间胶囊约束

(Space-Time Capsule Constraint) 来保证时间和空间尺度上的安全裕度，即

$$\|r(\alpha) - r_i(\beta)\|_W \geq 2M_r, \quad (5-3a)$$

$$\forall \alpha \in [t - M_d, t + M_d] \cap [t_o, t_f], \quad (5-3b)$$

$$\forall \beta \in [t - M_d, t + M_d], \quad (5-3c)$$

$$\forall t \in [t_o, t_f], \quad (5-3d)$$

其中 $W = \text{Diag}(1, 1, w)$ 和 $w < 1$ 将安全半径在竖直方向上进一步拉伸，以保证各个飞行器之间的不会受到对方的下洗气流的影响。 $M_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $M_d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 分别为时间和空间域上各个飞行器的不确定性上界。为保证无人机在高速飞行时高保真度的动力学可行性，我们以考虑非线性风阻效应的多旋翼动力学对应的微分平坦变换作为的 Ψ_x 和 Ψ_u 。

对静态障碍物的规避，我们利用 RRT* 算法计算出较短的可行路径，而后利用本文给出的在线安全飞行走廊生成方法得到一系列由凸多面体构成的安全约束。对不确定动态障碍物的规避，由于鲁棒安全条件 (5-3) 对应的连续时间约束 \mathcal{G} 涉及到关于两个飞行器时间不确定尺度和整条轨迹飞行时间上的三重积分，直接采用该条件难以满足实时优化求解的效率。我们对该条件进行分析并给出计算效率更高的等价条件。

条件 (5-3) 将每个飞行器视为一个时间-空间胶囊。每一个胶囊均是一个球扫描体 (Swept Sphere Volume)，即利用半径为 M_r 的空间位置不确定性球在时间不确定的轨迹段 $[t - M_d, t + M_d]$ 上扫出的体积。鲁棒安全的动态障碍物飞行避让条件即要求多旋翼自身和任意一个已有飞行器的胶囊对在任意时刻 t 均不发生重叠。该条件涉及到两个时变非凸三维集合在任何时刻的交集判定问题，即便是对其时间离散，那么任意时刻的交集判定也涉及到平方复杂度的计算量。我们给出如下的等价条件，其对任意时刻的交集判定在同精度的时间离散下仅仅具有线性复杂度计算量：

$$\|r(t) - r_i(\gamma)\|_W \geq 2M_r, \quad (5-4a)$$

$$\forall \gamma \in [t - 2M_d, t + 2M_d], \quad (5-4b)$$

$$\forall t \in [t_o, t_f]. \quad (5-4c)$$

事实上，条件 (5-4) 和原条件 (5-3) 是完全等价的。下面我们利用反证法说明该等价性。假定对应任意给定的 $r_i(t)$ ，条件 (5-3) 成立但是条件 (5-4) 不成立。那么存在 $\zeta \in [t_o, t_f]$ 和 $\gamma \in [\zeta - 2M_d, \zeta + 2M_d]$ 使得 $\|r(\zeta) - r_i(\gamma)\|_W < 2M_r$ 。此时，令条件 (5-3) 中的 $\alpha = \zeta$ ，

$\beta = \gamma$ 且 $t = (\zeta + \gamma)/2$ 即可产生矛盾。这说明条件 (5-3) 的成立保证了条件 (5-4) 的成立。反过来，假定对应任意给定的 $r_i(t)$ ，条件 (5-4) 成立但是条件 (5-3) 不成立。那么存在 $\alpha \in [\zeta - M_d, \zeta + M_d] \cap [t_o, t_f]$ 和 $\beta \in [\zeta - M_d, \zeta + M_d]$ 使得 $\|r(\alpha) - r_i(\beta)\|_W < 2M_r$ 。此时，令条件 (5-4) 中的 $t = \alpha$ 和 $\gamma = \beta$ 即可产生矛盾。这说明条件 (5-4) 的成立保证了条件 (5-3) 的成立。由此，我们可以确定两个条件之间的完全等价性。

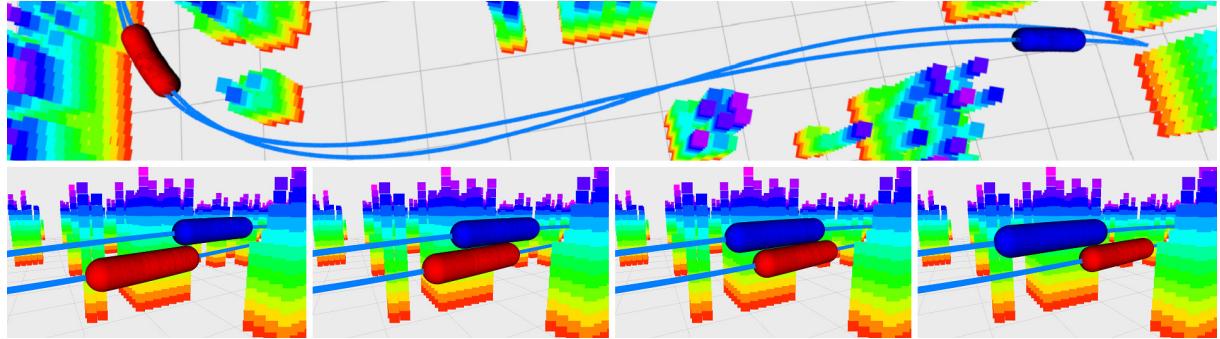


图 5.12 多旋翼轨迹规划的时空胶囊约束及其求解仿真快照

至此，条件 (5-4) 给出了更简洁的方式以实现连续时间约束 \mathcal{G} 中的鲁棒安全避让条件，因为该条件在任意时刻仅仅需要判定一个无体积点和一个时变集合的交集判定问题。那么我们通过如下的方式来实现 $r(t)$ 和 $r_i(t)$ 之间的时间-空间胶囊安全约束，

$$\int_{-2M_d}^{2M_d} \psi_\mu (4M_r^2 - \|r(t) - r_i(t+v)\|_W^2) dv \leq 0, \quad \forall t \in [0, T_\Sigma], \quad (5-5)$$

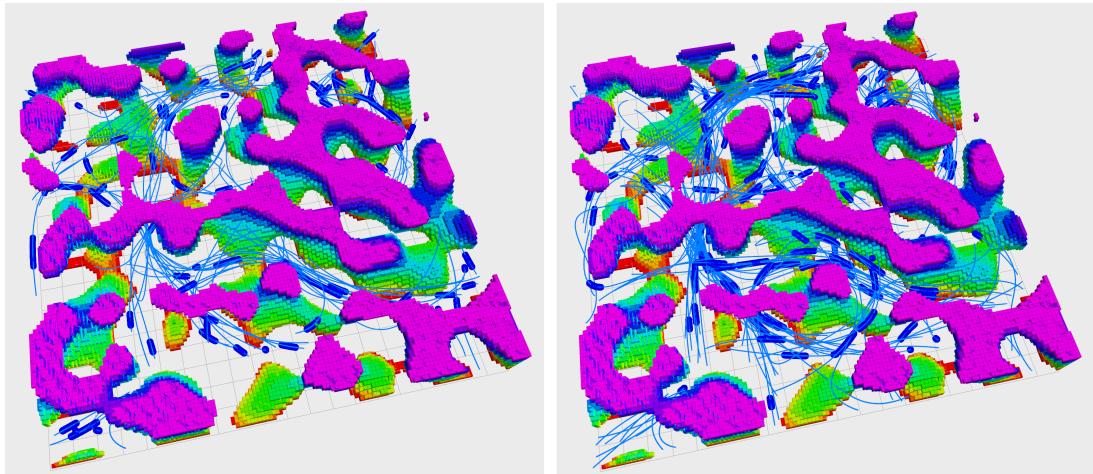
其中 ψ_μ 为 $\max(x, 0)$ 的光滑化函数。

在长距离高速飞行时，通常需要保证航行速度、角速率、倾斜角度以及总推力均处于合理范围内，我们采用如下的连续时间约束来保证动力学可行性

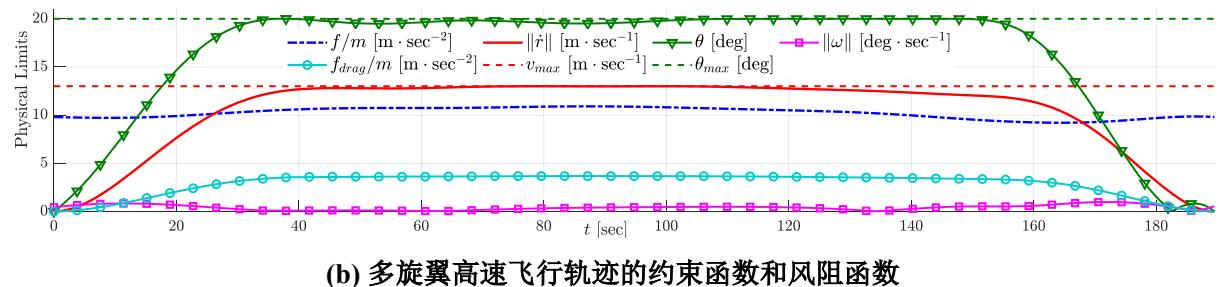
$$\begin{cases} \|\dot{r}\|^2 \leq v_{max}^2, & \forall t \in [0, T_\Sigma], \\ \|\omega\|^2 \leq \omega_{max}^2, & \forall t \in [0, T_\Sigma], \\ \arccos(e_3^T R e_3) \leq \theta_{max}, & \forall t \in [0, T_\Sigma], \\ (f - f_m)^2 \leq f_r^2, & \forall t \in [0, T_\Sigma], \end{cases} \quad (5-6)$$

其中 $f_m = (f_{max} + f_{min})/2$ 和 $f_r = (f_{max} - f_{min})/2$ 均为常量。最大飞行速率、最大角速率、机体最大倾角和最大总推力分别为 v_{max} 、 ω_{max} 、 θ_{max} 和 f_{max} 。此外，限制机体的最大倾角可以避免相对不安全的大姿态机动。限制多旋翼的最小推力 f_{min} 也有助于实现飞行过程中外部扰动下的姿态自稳和抗干扰特性。

我们在 $2000 \times 2000 \times 200\text{m}^3$ 尺度的空间中进行仿真，其中障碍物以 Perlin 噪声随机分布。在安全准则参数上，时间和空间安全距离分别设置为 $M_d = 4\text{s}$ 和 $M_r = 15\text{m}$ 。多旋翼物理参数设置为 $m = 1.9\text{kg}$ 、 $d_h = d_v = 0.475\text{s}^{-1}$ 以及 $C_p = 0.01\text{m}^{-1}\text{s}$ 。机身动力限制设置为 $v_{max} = 13\text{m s}^{-1}$ 、 $\omega_{max} = 2\pi/3\text{rad s}^{-1}$ 、 $\theta_{max} = \pi/9\text{rad}$ 、 $f_{min} = 9.5\text{N}$ 以及 $f_{max} = 28.5\text{N}$ 。换言之，该多旋翼的推重比仅 1.53。在优化过程中，我们采用 $k_\rho = 10^{-3}$ 作为线性时间正则项权重， $\mu = 10^{-2}$ 作为光滑化函数的光滑参数。



(a) 对 80 架和 160 架多旋翼无人机在动态障碍物环境中的增量式轨迹规划结果



(b) 多旋翼高速飞行轨迹的约束函数和风阻函数

图 5.13 动态障碍物环境中增量式规划的结果和约束函数曲线

在本仿真中，我们首先测试了一个极端情况，即待规划多旋翼的航线和作为动态障碍物的飞行器航线完全处于同一拓扑，且其起始终末点分别为该已有航线的终末起始点完全重合。其规划结果如图5.12 所显示，蓝色体积为代表已有飞行器作为动态障碍物的时空胶囊，红色体积则代表待规划多旋翼的时空胶囊。在该轨迹优化中，我们采用条件(5-4)作为效率更高的约束保证鲁棒安全，该图的四帧连续快照显示了多旋翼和障碍物在交会时各自时空胶囊的接触情况。可以看出，只要多旋翼的飞行不确定性和障碍物的不确定性始终处于时空胶囊之中，两者就会保持绝对安全。

为了在仿真中验证本方法的可扩展性和动力学约束。我们分别对 80 架和 160 架多

旋翼进行增量式地轨迹规划求解，其中每一次求解得到的轨迹作为下一次轨迹规划中的动态障碍物。对应的规划结果如图5.13所示。在存在上百个动态障碍物的环境中，本方法依旧可以保证多旋翼轨迹规划的鲁棒安全。此外，根据该图的约束函数所示，在该架多旋翼整个3 min飞行过程中，该机体的动力学限制始终处于约束范围内。当多旋翼由于受到载荷特性，使得其匀速飞行时需要满足一定的最大倾角约束时，本方法可以满足这类精细约束下的全状态轨迹规划。由图5.13中的约束函数曲线可知，多旋翼的倾角 θ 在整个飞行过程中始终不超过 θ_{max} 。此外，该图显示高速飞行过程中的风阻产生的加速度没有超过 4 m s^{-2} ，这也是其它基于无风阻效应动力学的方法无法做到的。

为了进一步测试本方法规划的结果针对在动态障碍物的运动不确定性的鲁棒程度，我们在仿真中模拟了20架多旋翼同时双向通过一个宽60 m高200 m的狭窄通道，并对其轨迹跟踪随机生成最大为 Δt_{max} 的时域跟踪误差。针对 Δt_{max} 从0 s到8 s的每一种情况，我们均进行了20次仿真，并统计不同飞行器在整个航行过程中彼此之间的最小距离。对该误差扰动仿真实验，我们比较了时间-空间胶囊安全约束和传统的距离安全约束在不同程度的跟踪误差下的鲁棒程度。从图5.14中可以看出，传统基于距离的安全约束

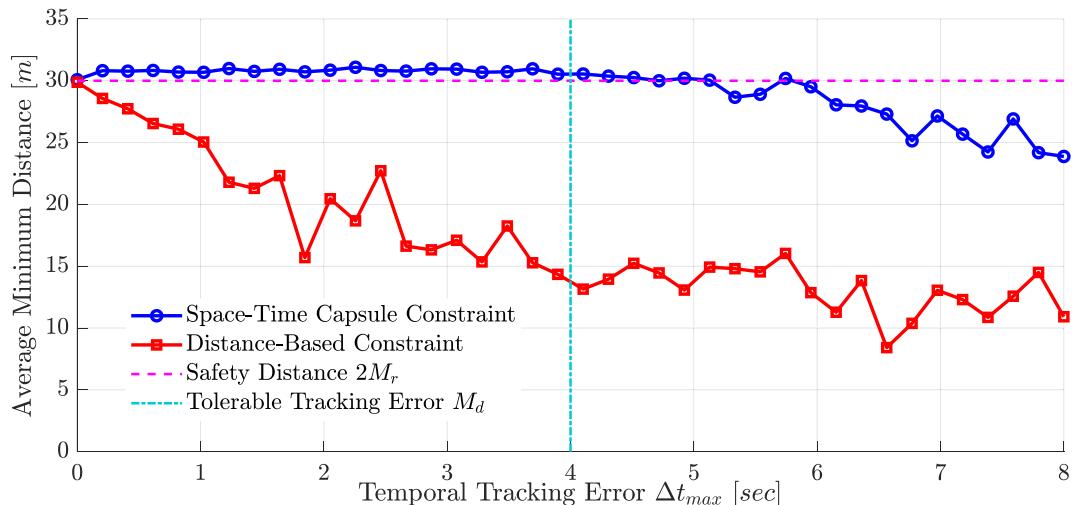


图 5.14 不同动态障碍物避让约束在不同跟踪误差下的平均最小距离

在时域误差为正的时候，各个运动物体之间的最小距离立即衰减以致低于 $2M_r = 30 \text{ m}$ 。这表明该安全约束虽然形式简单，但是难以保证轨迹在动态物体实际飞行轨迹具有不确定性时依然实现安全避让的鲁棒性。相比而言，时间-空间胶囊约束由于显式地考虑了跟踪误差在时间和空间上的特性，它在最大时域跟踪误差 $\Delta t_{max} \leq M_d$ 的时候能在理论上保证对动态障碍物避让的绝对安全。不仅如此，当时域跟踪误差高于规划安全阈值，

即 $4\text{s} < \Delta t_{max} < 5\text{s}$ 时，对应的规划结果仍然可以满足 $2M_r$ 的空间安全距离，这表明了本方法对于动态障碍物在预估航行轨迹具有时间和空间误差时的鲁棒性。

5.6 基于商空间分解的 SE(3) 运动规划

在障碍物稠密的环境中，多旋翼无人机往往需要通过调节整个机体的姿态来保证狭窄空间中的安全飞行。因此，我们考虑本框架在 SE(3) 参数空间中运动规划的应用。尽管多旋翼无人机的微分平坦输出仅仅覆盖了 SE(3) 空间中的四个自由度，我们可以利用该参数空间的特性完成对应的轨迹优化。该参数空间中运动规划的一个很重要的性质在于 SE(3) 是一个具有 $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ 结构的流形。一个刚体处于无碰撞位姿的必要条件在于其对应的 \mathbb{R}^3 部分的位置是无碰撞的。因此， \mathbb{R}^3 可以被认为是 SE(3) 关于运动规划的商空间^[118]。利用该商空间分解的特性^[119]，我们可以在保证一条位置轨迹的安全性条件之后再考虑其姿态层面的安全性条件。基于商空间分解的安全性必要条件相对于直接考虑 SE(3) 层面六个自由度的安全性条件而言，免去了对许多平凡的不可行参数在碰撞约束上的考虑。更重要的，得益于该分解，本文的平坦输出轨迹优化的框架可以利用这种思路，在轨迹的形状层面实施质心位置的可行空间安全约束，而后利用微分平坦变换恢复机体姿态，在质心位置安全的前提下考虑姿态层面更严格的安全约束。因此，我们将 (3-14) 中的假设放松为 $\tilde{\mathcal{F}}$ 仅仅是商空间中不考虑多旋翼机体尺寸的可行区域。

为了显示本方法对动力学模型的通用性，我们在这里采用传统方法中广泛使用的多旋翼简化动力学-运动学方程，即

$$\begin{cases} \dot{p} = v, \\ \bar{m}\dot{v} = -\bar{m}\bar{g}e_3 + \mathbf{R}\tilde{f}e_3, \\ \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\hat{\omega}. \end{cases} \quad (5-7)$$

其中 e_i 是单位矩阵 \mathbf{I}_3 的第 i 个列向量， \bar{g} 代表重力加速度， \tilde{f} 为净推力， ω 为机体的体系角速率而 \bar{m} 则是机体的质量。映射 $\cdot : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 定义为对所有 $a, b \in \mathbb{R}^3$ 均满足 $\hat{ab} = a \times b$ 。此外，我们将机体的几何外形以其最小外接椭球^[57] (Löwner-John Ellipsoid) 来表示，

$$\mathcal{E}(t) = \left\{ \mathbf{R}(t)\mathbf{Q}x + p(t) \mid \|x\|_2 \leq 1 \right\} \quad (5-8)$$

其中 $\mathbf{Q} = \text{Diag}(r_e, r_e, h_e)$, r_e 和 h_e 分别代表多旋翼无人机的半径和高度。

一个可行的运动轨迹需要同时满足安全和动力学可行性。安全性意味着

$$\mathcal{E}(t) \subset \tilde{\mathcal{F}}, \forall t \in [0, T]. \quad (5-9)$$

其中 T 是飞行总时长。由于 \mathcal{F} 是非凸的，该问题等价于一个钢琴搬运工问题^[120]。我们需要对 \mathcal{F} 作进一步的假设使得所有 $\mathcal{P}_i^{\mathcal{H}}$ 至少能包含住一个机体的最小外接椭球。这个假设可以在前端增量式地构建飞行走廊 $\tilde{\mathcal{F}}$ 时得到满足。那么机体的安全则有

$$\forall t \in [0, T], \exists 1 \leq i \leq M_p, s.t. \mathcal{E}(t) \subset \mathcal{P}_i^{\mathcal{H}}. \quad (5-10)$$

动力学可行性意味着多旋翼飞行的速度、推力和角速率有着合理的幅值，

$$\begin{cases} \|p^{(1)}(t)\|^2 \leq v_{max}^2, & \forall t \in [0, T], \\ f_{min} \leq \tilde{f}(t) \leq f_{max}, & \forall t \in [0, T], \\ \|\omega(t)\|_2^2 \leq \omega_{max}^2, & \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (5-11)$$

对任意一个商空间的轨迹 $p(t) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^3$ 而言，其包含 p 、 v 、 \mathbf{R} 和 ω 的状态-输入轨迹可以通过动力学 (5-7) 的 Ψ_x 和 Ψ_u 计算出来。其具体的代数映射的形式被 Mellinger 和 Kumar^[12] 给出（相应的角速度层面的错误被 Faessler 等人修复^[15]）。由此，整个 SE(3) 可以从对应的商空间轨迹中恢复出来。我们规定 $\mathbf{R}(t)$ 是该轨迹对应的旋转部分。为了在 $\tilde{\mathcal{F}}$ 中生成 $p(t)$ ，我们利用前一个实验中的方式构建对应的优化问题，并采用不同的安全性和动态可行性约束。

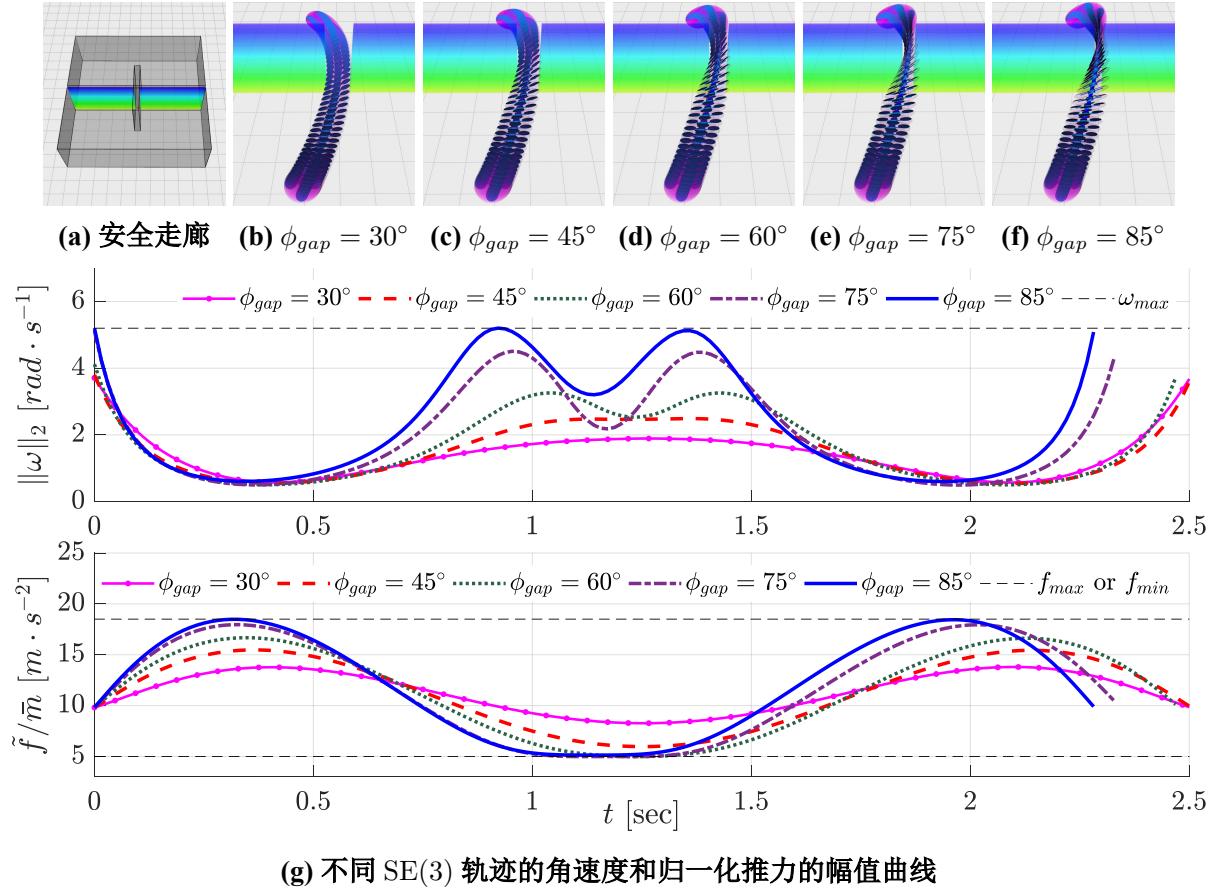
规定第 i 个轨迹段 $p_i(t) : [0, T_i] \mapsto \mathbb{R}^3$ 被分配到符合 (3-17) 定义的凸多面体 $\mathcal{P}_j^{\mathcal{H}}$ 中，并且 $j = \lceil i/K \rceil$ 。我们以 $\mathcal{E}_i(t)$ 代表 $p_i(t)$ 轨迹对应的机体椭球轨迹，并按 (5-8) 相应地定义 $\mathbf{R}_i(t)$ 。正如 Wu 等人^[121] 采用的形式，保证机体椭球在凸多面体中具有简单的解析形式，即

$$\mathcal{E}_i(t) \in \mathcal{P}_j^{\mathcal{H}}, j = \lceil i/K \rceil, \forall t \in [0, T_i], \quad (5-12)$$

等价于

$$[(\mathbf{A}_j \mathbf{R}_i(t) \mathbf{Q})^2 \mathbf{1}]^{\frac{1}{2}} + \mathbf{A}_j p_i(t) - b_j \preceq \mathbf{0}, j = \lceil i/K \rceil, \forall t \in [0, T_i], \quad (5-13)$$

其中 $\mathbf{1}$ 是合适长度的全 1 向量， $[\cdot]^2$ 和 $[\cdot]^{\frac{1}{2}}$ 分别是逐元素平方和逐元素平方根操作。此时，关于 (5-7) 的连续时间约束 \mathcal{G}_D 被全部给出。为了使得多旋翼机体角速率更加平缓，

图 5.15 狹窄通道的安全走廊、不同宽度下的 $SE(3)$ 轨迹以及約束函数曲线

我们采用 $s = 3$ 作为轨迹优化的积分链阶数。

表 5.1 不同宽度狭窄通道、最小通过滚转角及计算时间

d_{gap}	0.88 m	0.76 m	0.60 m	0.40 m	0.25 m
ϕ_{gap}	30°	45°	60°	75°	85°
$t_{comp.}$	4.7 ms	4.4 ms	6.0 ms	6.6 ms	7.4 ms

如图5.15所示，我们在仿真中验证了本框架在 $SE(3)$ 轨迹规划上的可行性。在该仿真中，一个具有较大惯性的多旋翼需要安全地掠过一个狭窄通道。该通道的宽度比无人机本身的水平尺寸要小。我们将物理参数设置为 $r_e = 0.5\text{m}$, $h_e = 0.1\text{m}$, $f_{min}/\bar{m} = 5.0 \text{ m s}^{-2}$, $f_{max}/\bar{m} = 18.5 \text{ m s}^{-2}$, $v_{max} = 6.5 \text{ m s}^{-1}$ 并且 $\omega_{max} = 5.2 \text{ rad s}^{-1}$ 。直观上来说，该多旋翼的最大滚转速率不能超过每秒钟 1 转，因此和一般能达到每秒钟 5 转的穿越机^[122]相比，它在动力学层面的限制要苛刻得多。这也进一步增加了问题求解的难度。该仿真的轨迹求解时间，需要的最小滚转角度以及对应不同宽度的规划分别在表5.1 以及图5.15b-

5.15f中给出。当狭窄通道的宽度变小时，安全通过的最小滚转角度变得越来越大，而在固定的动态可行性约束下，对应的可行空间也变得越来越小。即便如此，本文的方法仍然能够对所有这些情况计算出可行的运动轨迹。其优异的计算效率使得 SE(3) 轨迹规划可以在一个很高的频率进行（至少 100 Hz）。图5.15g 进一步给出了约束函数的曲线。可以看出，关于 f_{min} 的连续时间约束在 $\phi_{gap} \in \{60^\circ, 75^\circ, 85^\circ\}$ 这三个情况下裕度被充分利用，显示了惩罚泛函方法的有效性。

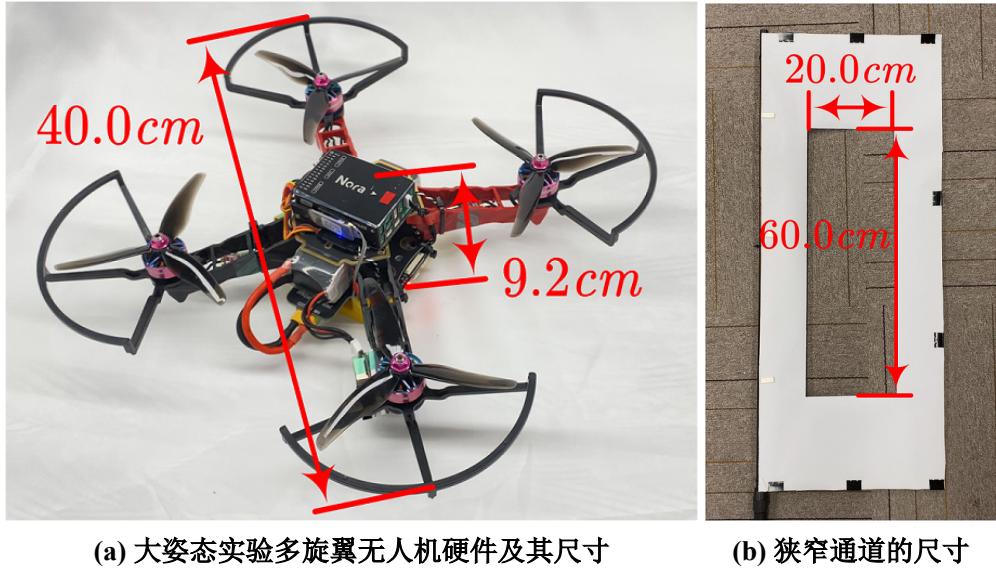


图 5.16 多旋翼无人机和狭窄通道的示意图及其实际尺寸

我们通过大姿态机动飞行实验来验证本框架下 SE(3) 轨迹规划的实用性和可靠性。该实验要求多旋翼安全地飞行穿过几个窗户形状的狭窄通道。机身和通道的尺寸如图5.16所示。其中机身质量为 794.2 g。狭窄通道宽度的安全裕度仅有 5.4 cm，因此多旋翼无人机必须以大姿态掠过该通道。具体参数为 $r_e = 20.0 \text{ cm}$, $h_e = 4.6 \text{ cm}$, $v_{max} = 4.0 \text{ m s}^{-1}$, $f_{min}/\bar{m} = 3.0 \text{ m s}^{-2}$, $f_{max}/\bar{m} = 18.0 \text{ m s}^{-2}$, $\omega_{max} = 6.0 \text{ rad s}^{-1}$ 以及 $K = 2$ 。整个飞行空间是一个极度受限的区域，其尺寸仅有 $6.5 \times 6.0 \times 2.0 \text{ m}^3$ 。狭窄通道和多旋翼无人机的实时位姿全部由动作捕捉系统提供，反馈的频率为 100 Hz。该空间中的安全飞行走廊 $\tilde{\mathcal{F}}$ 是利用各个狭窄通道位姿的测量数据实时几何计算得到的。运动规划算法在地面站电脑上运行，以方便人工随机地选取轨迹规划的末端位置。我们采用 Faessler 等人^[15] 的控制算法，在机载控制器上实现在线 SE(3) 轨迹跟踪。

第一个实验场景中包含了多个偏转角度从 30° 到 90° 的狭窄通道。多旋翼必须飞跃这些通道并到达一个随机指定的位置。该实验场景用于测试本文的方法在 SE(3) 轨迹规

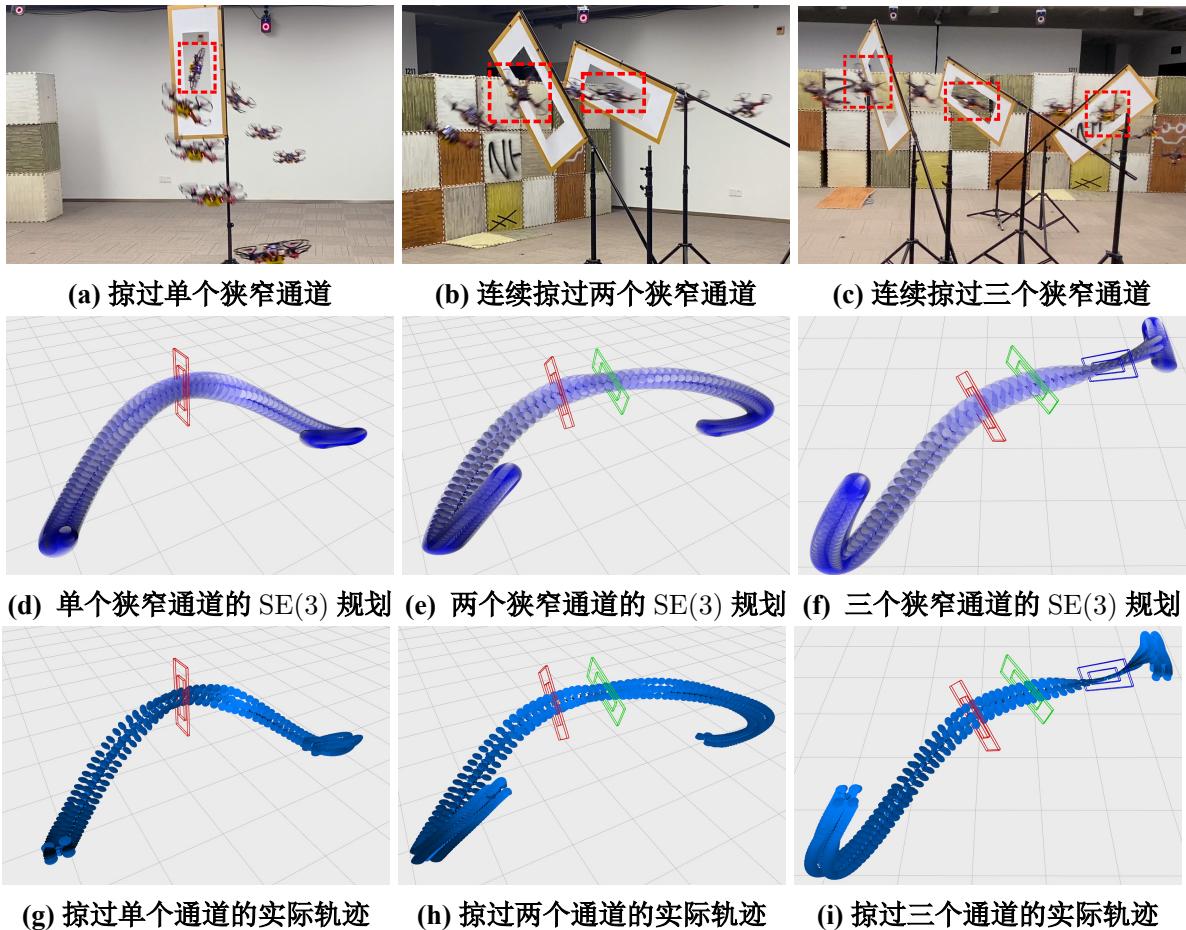


图 5.17 多旋翼大姿态掠过多个连续狭窄通道的实验结果

划上的有效性。图5.17中也给出了该实验的部分结果。在该场景中，有多个因素给我们的轨迹规划带来了挑战，其一是狭窄通道大幅度的倾角，其二是连续两个狭窄通道之间的距离极度有限，其三是受限飞行场地进一步压缩了大姿态机动所需的加减速空间，其四是该多旋翼仅能使用有限的机动能力来完成该飞行。我们的轨迹规划器仍然能够实时地生成出可行且顺滑的位姿轨迹，保证多旋翼无人机可以凭借其有限的推力的滚转速率安全地通过多个连续的狭窄通道。该场景中求解得到的 SE(3) 轨迹如图5.17d-5.17f所示。实际飞行的测量姿态也相应地在图5.17g-5.17i 中给出。测量得到机体最大速率和角速率分别是 4.1 m s^{-1} 和 8.4 rad s^{-1} 。从这些结果可以看出，我们的方法生成的轨迹对于真实多旋翼动力学而言均是切实可行的。

第二个实验场景要求多旋翼无人机持续长时间地完成掠过狭窄通道的机动。该场景用于测试我们的轨迹规划器的鲁棒性，对应的实验结果在图5.18中给出。我们的规划器使得多旋翼能够不断地来回大姿态掠过狭窄的通道长达 20s，并始终保证安全和动力学

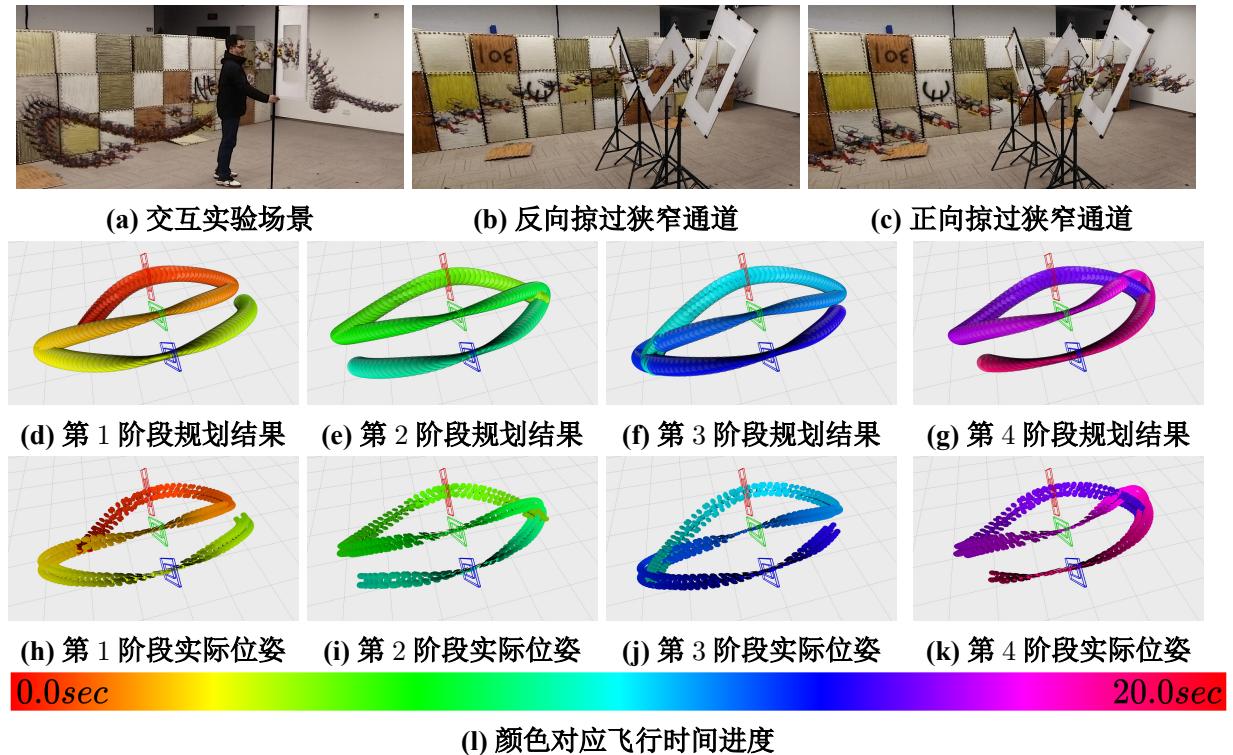


图 5.18 多旋翼在线持续 $\text{SE}(3)$ 轨迹规划并大姿态掠过狭窄通道的实验

可行性。此外，我们也增加了一个交互实验，其中由实验员随机持握狭窄通道然后令多旋翼持续不断钻过该通道到达随机的位置。该交互实验验证了我们的求解器能够处理不同位姿的狭窄通道，使得多旋翼无人机的在极限环境里完成安全飞行。

在本实验中，我们仅仅需要提供运动规划求解器对应的飞机动力学参数、几何外形参数和存在可行解的安全飞行走廊，所有的 $\text{SE}(3)$ 轨迹均由规划器据此求解计算得到。值得强调的是，我们的轨迹规划器比传统专门针对狭窄通道设计轨迹的方法^[123, 124] 更加灵活、高效和精细。其灵活性在于安全飞行走廊可以通过前端直接生成，不依赖于任何狭窄通道的形状先验假设。其效率在于能够在毫秒级别内求解完整的全状态飞行轨迹。其精细度在于能够直接精确地处理状态-输入上的连续时间约束和位姿安全约束。

5.7 多任务适用的运动规划

本文所提出的轨迹规划方法可以被应用于各种各样的多旋翼无人机飞行任务之中，以满足不同任务的具体需求。例如整机安全约束下长距离竞速飞行轨迹的大规模并行求解^[125]、基于视觉遥操作的多旋翼辅助飞行^[126]、考虑视觉约束的目标持续稳定追

踪^[127, 128]、未知障碍物环境下的高速穿越飞行^[129]、动态平台实时规划与飞落^[130] (Perching), 障碍物环境中的多旋翼无人机编队飞行^[131] 以及微小型智能多旋翼无人机集群^[132]。这些具体的飞行任务无一不要求多旋翼凭借有限的资源完成复杂运动模式的在线实时规划。本工作正因为能兼顾计算效率、求解质量和灵活性, 才可以在这些多样性的任务中发挥作用, 从运动规划层面充分发掘出小型乃至微型多旋翼的运动能力, 探索多旋翼无人机单机和集群在目前学界和工业界各种可能性的边界。

5.8 本章小结

本章对多旋翼运动规划的几何方法在大规模无约束多航点轨迹生成、基于航点航时近似调整的轨迹生成、基于安全飞行走廊的全状态时空轨迹优化、动态障碍物环境中的鲁棒轨迹规划以及基于商空间分解的 SE(3) 轨迹规划这五个应用上实现同已有方法的进行对比仿真或者实飞行实验。对比测试的结果体现了本方法可以显著地提高多旋翼轨迹规划的效率、质量和动力学精细度。此外, 本章将该方法应用在多旋翼障碍物环境下自主竞速、大尺度环境中高速自主导航和极度狭窄环境中大姿态机动求解中, 并对三个场景做了广泛极限飞行实验验证。这些实验的实际性能体现了本文基于几何方法的轨迹规划能够切实提升机载资源受限的多旋翼无人机的飞行运动表现, 并令多旋翼具有更加智能的任务自适应运动规划能力。

6 总结与展望

6.1 论文总结

本文针对多旋翼无人机在复杂环境中高速飞行的运动规划问题展开研究，专注于复杂环境可行域的提取、轨迹的时空稀疏参数化、高速多旋翼动力学及其平坦特性和几何约束下的多旋翼轨迹规划这四个研究方面，实现了高计算效率、高求解质量的基于几何的运动规划方法。本文的贡献体现在以下几个方面：

其一，提出了同时具有高效率、高质量和高局部可控性的可行域提取算法，解决了传统方法难以在线使用或无法保证严格可行性或无法对可行空间充分逼近的问题。

第二，给出了一种既能够保持时间和空间上的形变灵活度，又能够具备降维度稀疏参数化能力的连续时间轨迹表征方法。该方法基于所给出的积分链系统最小控制量的充分必要条件，保证了轨迹的存在唯一性及其参数灵敏度的存在性和光滑性。

第三，提出了以几何方法完成多旋翼轨迹优化的框架，包括将非线性风阻效应下的多旋翼动力学微分约束平坦化的代数变换、将时域和空间域几何约束平直化的非线性变换、惩罚泛函下的轨迹时空形变方法以及多项式轨迹连续时间多项式约束的解析验证方法。该框架可高效地求解大规模轨迹优化并支持各种安全飞行走廊和自定义任务需求函数。

第四，设计并展开了大量仿真对比和实验验证，验证了本文针对多旋翼运动规划的几何方法相比于已有方法具有数量级上的效率提升、顶级的求解质量以及支持各种自定义约束的灵活性，同时在实验上保证了本文的方法可以使得资源受限的多旋翼无人机凭借实时高质量运动规划实现各种极限飞行。

6.2 后继研究工作展望

本文针对多旋翼无人机运动规划的几何方法具有高度的灵活性和计算效率，其具有许多应用上和算法上的可行扩展。

在可行域的计算方面，我们可以进一步提高快速区域迭代膨胀算法的效率。其一是对环境障碍物的处理上面，不同的障碍物互相独立，因此可以从目前的线性复杂度处理

过程提升为并行处理，以提高算法框架的实现效率。其二是对子问题的求解计算上，可以完全避免数值迭代过程。截止到目前，笔者已经解决了二维情况下对所有子问题的线性复杂度精确求解，而三维情况下由于其几何结构较为复杂，因此需要进一步地探索研究。从这两方面，对复杂环境中的可行域提取可以变得越来越完备和高效。

在轨迹求解效率方面，我们的框架从一开始就被设计为从两个方面提高其计算速度。其一是轨迹的稀疏参数化，使得最后的优化问题具有较低的维度，这样可以在优化问题理论上的串行迭代复杂度无法改变也难以通过增加算力来有效缩短计算时间的前提下降低问题求解的串行迭代次数。其二是单次迭代中高度可并行的计算结构，允许通过增加并行算力压缩单次迭代的时间。由于每次迭代的算力消耗主要来源于对惩罚泛函 $I_G[p]$ 中采样时刻的值和梯度计算，而不同时刻的采样相互独立，因此对惩罚泛函的计算可采用并行处理，进一步提高轨迹优化效率。

在求解精度方面，惩罚泛函方法在常用的具有物理意义的约束上可以满足大部分的约束精度需求。为了进一步提高受约束轨迹优化的求解精度，可采用增广拉格朗日乘子法，构建对偶变量的离散时间序列。由于对偶变量和轨迹参数优化变量在该方法中是分别更新的，因此原变量的更新仍然是具有和轨迹参数维度等同的无约束优化问题。对偶变量仅仅在对偶上升中以解析的方式直接更新，因此不会提高无约束优化问题的维度。此外，不同时刻的约束和梯度求解以及对偶变量更新均相互独立，因此该求解方式仍然可以采用并行加速。

在方法的扩展性上，我们的框架具有被拓展到其他微分平坦移动机器人上的潜力，特别是当该机器人的运动规划所考虑的参数空间和平坦输出空间具有较大重合度的时候。一个具体的例子则是 Bry 等人^[43] 考虑的固定翼无人机，其飞行主要受到轨迹曲率的限制。为了解决该问题，他们采用多项式修正的 Dubins 轨迹^[43] 使得曲率约束能更为方便地施加。然而，曲率约束对于本文的 MINCO 轨迹而言仅仅是 \mathcal{G} 的一个特例，因此本文的轨迹通过形变可以很容易地满足该曲率约束。

在具体的应用方面，由于本文仅考虑多旋翼无人机的运动规划的几何方法的框架和关键理论和技术，我们的方法可以满足多旋翼利用局部更新地图进行局部轨迹规划乃至多旋翼集群互相避障和编队飞行等等方面。这些具体任务所需的运动规划功能基本上可以在本文的框架中得到实现。比如，多旋翼无人机经常用于对目标的持续跟踪任务。随着目前深度视觉的发展，在图像上对被跟踪目标的精准识别和高速追踪已经趋于完善，

本文的框架可以通过进一步在三维感知建立的地图中引入运动规划的可视性约束，使飞行器在物理层面的运动得以配合处理视觉信息这种更上层模块的运行期望，实现从感知、决策、规划到实际飞行的智能行为。

在理论完备性方面，本框架类似于目前大部分轨迹规划方法，其通过对基于采样-图搜索的全局方法和基于优化的局部方法在前端相结合，使得在复杂环境下仍然能够得到高质量的运动轨迹。尽管如此，这种方法在完备性上仍然是具有缺陷的。为了效率，本框架在前端仅仅采用了无动力学的全局方法，而后端则在优化中忽略了多拓扑的可行域。为了提高本框架的理论完备性，仍有必要在后端部分对环境以及动力学上可能存在 的多拓扑结构加以探索和利用。正如已有将探索策略引入轨迹优化的方法^[45, 133, 134] 所显示的，合理利用随机的策略或者维护必要的全局信息，既能够保证方法在迭代次数趋于无限时收敛到全局最优，又能够保证对高质量局部解的快速收敛，从而提高运动规划框架的理论完备性，且不牺牲其实用性。另一方面，本框架仅关注了实时性高的任务场景，然而很多任务场景是高度重复的。对重复场景和单一动力学的规划，可以有效利用数据驱动的方法来提升当前求解质量和全局最优解之间的间隙。如何在传统方法中有效利用历史数据，同样也是一个值得深入探讨和研究的方向。

参考文献

- [1] Ryll M, Ware J, Carter J, et al. Efficient trajectory planning for high speed flight in unknown environments[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. Montreal, Canada, 2019: 732-738.
- [2] Oleynikova H, Lanegger C, Taylor Z, et al. An open-source system for vision-based micro-aerial vehicle mapping, planning, and flight in cluttered environments[J]. Journal of Field Robotics, 2020, 37(4): 642-666.
- [3] Zhang J, Hu C, Chadha R G, et al. Falco: Fast likelihood-based collision avoidance with extension to human-guided navigation[J]. Journal of Field Robotics, 2020, 37(8): 1300-1313.
- [4] Campos-Macías L, Aldana-López R, de la Guardia R, et al. Autonomous navigation of MAVs in unknown cluttered environments[J]. Journal of Field Robotics, 2021, 38(2): 307-326.
- [5] Zhou X, Wang Z, Ye H, et al. EGO-Planner: An ESDF-free gradient-based local planner for quadrotors[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2021, 6(2): 478-485.
- [6] Foehn P, Brescianini D, Kaufmann E, et al. AlphaPilot: Autonomous drone racing[J]. Autonomous Robots, 2021: 1-14.
- [7] 全权. 多旋翼飞行器设计与控制[M]. 电子工业出版社, 2018.
- [8] Fliess M, Lévine J, Martin P, et al. Flatness and defect of non-linear systems: Introductory theory and examples[J]. International Journal of Control, 1995, 61(6): 1327-1361.
- [9] Van Nieuwstadt M J, Murray R M. Real-time trajectory generation for differentially flat systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8(11): 995-1020.
- [10] Martin P, Murray R M, Rouchon P. Flat systems, equivalence and trajectory generation[R]. CDS 2003-008. Pasadena, Calif, USA: California Institute of Technology, 2003.
- [11] Ryu J C, Agrawal S K. Differential flatness-based robust control of mobile robots in the presence of slip[J]. The International Journal of Robotics Research, 2011, 30(4): 463-475.
- [12] Mellinger D, Kumar V. Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. Shanghai, China, 2011: 2520-2525.
- [13] Watterson M, Kumar V. Control of quadrotors using the Hopf fibration on $\text{SO}(3)$ [C]//International Symposium on Robotics Research. Hanoi, Vietnam, 2019.
- [14] Ferrin J, Leishman R, Beard R, et al. Differential flatness based control of a rotorcraft for aggressive maneuvers[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. San Francisco, USA, 2011: 2688-2693.

- [15] Faessler M, Franchi A, Scaramuzza D. Differential flatness of quadrotor dynamics subject to rotor drag for accurate tracking of high-speed trajectories[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2018, 3(2): 620-626.
- [16] Mu B, Chirarattananon P. Trajectory generation for underactuated multirotor vehicles with tilted propellers via a flatness-based method[C]//IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. 2019: 1365-1370.
- [17] O'Rourke J. The complexity of computing minimum convex covers for polygons[C]//Proc. 20th Annu. Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing, Allerton, IL, 1982. 1982: 75-84.
- [18] Sarmientoy A, Murrieta-Cidz R, Hutchinson S. A sample-based convex cover for rapidly finding an object in a 3-D environment[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2005: 3486-3491.
- [19] Deits R, Tedrake R. Computing large convex regions of obstacle-free space through semidefinite programming[C]//Algorithmic Foundations of Robotics XI. Springer, 2015: 109-124.
- [20] Liu S, Watterson M, Mohta K, et al. Planning dynamically feasible trajectories for quadrotors using safe flight corridors in 3-D complex environments[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2017: 1688-1695.
- [21] Gao F, Wang L, Zhou B, et al. Teach-Repeat-Replan: A complete and robust system for aggressive flight in complex environments[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2020, 36(5): 1526-1545.
- [22] Savin S. An algorithm for generating convex obstacle-free regions based on stereographic projection[C]//International Siberian Conference on Control and Communications. 2017: 1-6.
- [23] Zhong X, Wu Y, Wang D, et al. Generating large convex polytopes directly on point clouds[J]. ArXiv:2010.08744, 2020.
- [24] Katz S, Tal A, Basri R. Direct Visibility of Point Sets[J]. ACM Transactions on Graphics, 2007, 26(3): 24-es.
- [25] Kavraki L E, Svestka P, Latombe J C, et al. Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1996, 12(4): 566-580.
- [26] LaValle S M. Rapidly-exploring random trees: A new tool for path planning[R]. TR 98-11. Iowa State University, 1998.
- [27] Kavraki L E, Kolountzakis M N, Latombe J C. Analysis of probabilistic roadmaps for path planning[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1998, 14(1): 166-171.
- [28] Karaman S, Frazzoli E. Sampling-based algorithms for optimal motion planning[J]. The International Journal of Robotics Research, 2011, 30: 846-894.

- [29] Karaman S, Walter M R, Perez A, et al. Anytime motion planning using the RRT*[C]//2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2011: 1478-1483.
- [30] Jordan M, Perez A. Optimal bidirectional rapidly-exploring random trees[R]. MIT-CSAIL-TR-2013-021. MIT, 2013.
- [31] Janson L, Schmerling E, Clark A, et al. Fast Marching Tree: A fast marching sampling-based method for optimal motion planning in many dimensions[J]. The International Journal of Robotics Research, 2015, 34(7): 883-921.
- [32] Alterovitz R, Patil S, Derbakova A. Rapidly-exploring roadmaps: Weighing exploration vs. refinement in optimal motion planning[C]//2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2011: 3706-3712.
- [33] Nasir J, Islam F, Malik U, et al. RRT*-Smart: A rapid convergence implementation of RRT[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2013, 10(7): 299.
- [34] Otte M, Correll N. C-FOREST: Parallel shortest path planning with superlinear speedup[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2013, 29(3): 798-806.
- [35] Gammell J D, Barfoot T D, Srinivasa S S. Informed sampling for asymptotically optimal path planning[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2018, 34(4): 966-984.
- [36] Gammell J D, Srinivasa S S, Barfoot T D. Batch Informed Trees (BIT*): Sampling-based optimal planning via the heuristically guided search of implicit random geometric graphs[C]//IEEE international Conference on Robotics and Automation. 2015: 3067-3074.
- [37] Li Y, Littlefield Z, Bekris K E. Asymptotically optimal sampling-based kinodynamic planning[J]. The International Journal of Robotics Research, 2016, 35(5): 528-564.
- [38] Betts J T. Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming[M]. SIAM, 2010.
- [39] Patterson M A, Rao A V. GPOPS-II: A MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using hp-adaptive Gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2014, 41(1): 1-37.
- [40] Houska B, Ferreau H J, Diehl M. ACADO toolkit—An open-source framework for automatic control and dynamic optimization[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2011, 32(3): 298-312.
- [41] Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization[J]. SIAM Review, 2005, 47(1): 99-131.
- [42] Wächter A, Biegler L T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming[J]. Mathematical Programming, 2006, 106(1): 25-57.

- [43] Bry A, Richter C, Bachrach A, et al. Aggressive flight of fixed-wing and quadrotor aircraft in dense indoor environments[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2015, 34(7): 969-1002.
- [44] Quinlan S, Khatib O. Elastic bands: Connecting path planning and control[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. Atlanta, USA, 1993: 802-807.
- [45] Zucker M, Ratliff N, Dragan A D, et al. CHOMP: Covariant hamiltonian optimization for motion planning[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2013, 32(9): 1164-1193.
- [46] Felzenszwalb P F, Huttenlocher D P. Distance transforms of sampled functions[J]. *Theory of Computing*, 2012, 8(1): 415-428.
- [47] Nesterov Y. *Lectures on Convex Optimization*[M]. Springer, 2018.
- [48] Kalakrishnan M, Chitta S, Theodorou E, et al. STOMP: Stochastic trajectory optimization for motion planning[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. Shanghai, China, 2011: 4569-4574.
- [49] Park C, Pan J, Manocha D. ITOMP: Incremental trajectory optimization for real-time replanning in dynamic environments[C]//International Conference on Automated Planning and Scheduling. 2012: 207-215.
- [50] Schulman J, Duan Y, Ho J, et al. Motion planning with sequential convex optimization and convex collision checking[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2014, 33(9): 1251-1270.
- [51] Gilbert E G, Johnson D W, Keerthi S S. A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space[J]. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 1988, 4(2): 193-203.
- [52] Van Den Bergen G. Proximity queries and penetration depth computation on 3d game objects[C]// Game Developers Conference: vol. 170. 2001.
- [53] Deits R, Tedrake R. Efficient mixed-integer planning for UAVs in cluttered environments[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. Seattle, USA, 2015: 42-49.
- [54] Verschueren D, Demeulenaere B, Swevers J, et al. Time-optimal path tracking for robots: A convex optimization approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(10): 2318-2327.
- [55] Tordesillas J, Lopez B T, Everett M, et al. FASTER: Fast and safe trajectory planner for navigation in unknown environments[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2022, 38(2): 922-938.
- [56] Sun W, Tang G, Hauser K. Fast UAV trajectory optimization using bilevel optimization with analytical gradients[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2021, 37(6): 2010-2024.
- [57] Toth C D, O'Rourke J, Goodman J E. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*[M]. CRC Press, 2017.

- [58] Chang J S, Yap C K. A polynomial solution for the potato-peeling problem[J]. *Discrete & Computational Geometry*, 1986, 1(2): 155-182.
- [59] Khachiyan L G, Todd M J. On the complexity of approximating the maximal inscribed ellipsoid for a polytope[J]. *Mathematical Programming*, 1993, 61(1): 137-159.
- [60] Nesterov Y, Nemirovskii A. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*[M]. SIAM, 1994.
- [61] Anstreicher K M. Improved complexity for maximum volume inscribed ellipsoids[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2002, 13(2): 309-320.
- [62] Zhang Y, Gao L. On numerical solution of the maximum volume ellipsoid problem[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2003, 14(1): 53-76.
- [63] Gürtuna F. Duality of ellipsoidal approximations via semi-infinite programming[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, 20(3): 1421-1438.
- [64] Ben-Tal A, Nemirovski A. *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*[M]. SIAM, 2001.
- [65] Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*[M]. Cambridge University Press, 2012.
- [66] Chazelle B, Matoušek J. On linear-time deterministic algorithms for optimization problems in fixed dimension[J]. *Journal of Algorithms*, 1996, 21(3): 579-597.
- [67] Cui Y, Sun D, Toh K C. On the R-superlinear convergence of the KKT residuals generated by the augmented Lagrangian method for convex composite conic programming[J]. *Mathematical Programming*, 2019, 178(1): 381-415.
- [68] O’donoghue B, Chu E, Parikh N, et al. Conic optimization via operator splitting and homogeneous self-dual embedding[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, 169(3): 1042-1068.
- [69] Andersen E D, Roos C, Terlaky T. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization[J]. *Mathematical Programming*, 2003, 95(2): 249-277.
- [70] Fukushima M, Luo Z Q, Tseng P. Smoothing functions for second-order-cone complementarity problems[J]. *SIAM Journal on optimization*, 2002, 12(2): 436-460.
- [71] Seidel R. Small-dimensional linear programming and convex hulls made easy[J]. *Discrete & Computational Geometry*, 1991, 6(3): 423-434.
- [72] Goldfarb D, Idnani A. A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs[J]. *Mathematical Programming*, 1983, 27(1): 1-33.
- [73] Stellato B, Banjac G, Goulart P, et al. OSQP: An operator splitting solver for quadratic programs[J]. *Mathematical Programming Computation*, 2020: 1-36.

- [74] Frison G, Diehl M. HPIPM: A high-performance quadratic programming framework for model predictive control[J]. IFAC-PapersOnLine, 2020, 53(2): 6563-6569.
- [75] De Berg M, Cheong O, van Kreveld M, et al. Computational Geometry: Algorithms and Applications[M]. Springer, 2008.
- [76] Bertsekas D P. Dynamic Programming and Optimal Control[M]. Athena-Scientific, 1995.
- [77] Verriest E, Lewis F. On the linear quadratic minimum-time problem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, 36(7): 859-863.
- [78] Mueller M W, Hehn M, D' Andrea R. A computationally efficient motion primitive for quadrocopter trajectory generation[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2015, 31(6): 1294-1310.
- [79] Liu S, Atanasov N, Mohta K, et al. Search-based motion planning for quadrotors using linear quadratic minimum time control[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Vancouver, Canada, 2017: 2872-2879.
- [80] Zhang Z, Tomlinson J, Martin C. Splines and linear control theory[J]. Acta Applicandae Mathematica, 1997, 49(1): 1-34.
- [81] Egerstedt M, Martin C. Control Theoretic Splines: Optimal Control, Statistics, and Path planning[M]. Princeton University Press, 2009.
- [82] Dmitruk A V, Kaganovich A M. The hybrid maximum principle is a consequence of Pontryagin maximum principle[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(11): 964-970.
- [83] Schumaker L. Spline Functions: Basic Theory[M]. Cambridge University Press, 2007.
- [84] Golub G H, Loan F V. Matrix Computations[M]. The Johns Hopkins University Press, 2013.
- [85] Schappelle R. The inverse of the confluent Vandermonde matrix[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1972, 17(5): 724-725.
- [86] Zhang Z, Scaramuzza D. Perception-aware receding horizon navigation for MAVs[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. Brisbane, Australia, 2018: 2534-2541.
- [87] Nägeli T, Alonso-Mora J, Domahidi A, et al. Real-time motion planning for aerial videography with dynamic obstacle avoidance and viewpoint optimization[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2017, 2(3): 1696-1703.
- [88] Omari S, Hua M D, Ducard G, et al. Nonlinear control of VTOL UAVs incorporating flapping dynamics[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Tokyo, Japan, 2013: 2419-2425.
- [89] Kai J M, Allibert G, Hua M D, et al. Nonlinear feedback control of quadrotors exploiting first-order drag effects[C]//IFAC World Congress: vol. 50: 1. Elsevier, 2017: 8189-8195.

- [90] Bangura M, Mahony R, et al. Nonlinear dynamic modeling for high performance control of a quadrotor[C]//Australasian Conference on Robotics and Automation. Wellington, New Zealand, 2012.
- [91] Vince J. Quaternions for Computer Graphics[M]. Springer, 2011.
- [92] Hirsch M W. Differential Topology[M]. Springer, 2012.
- [93] Nocedal J, Wright S. Numerical Optimization[M]. Springer, 2006.
- [94] Lee J. Introduction to Smooth Manifolds[M]. Springer, 2012.
- [95] Barber C B, Dobkin D P, Huhdanpaa H. The quickhull algorithm for convex hulls[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1996, 22(4): 469-483.
- [96] Sisser F S. Elimination of bounds in optimization problems by transforming variables[J]. Mathematical Programming, 1981, 20(1): 110-121.
- [97] Warren J, Schaefer S, Hirani A N, et al. Barycentric coordinates for convex sets[J]. Advances in Computational Mathematics, 2007, 27(3): 319-338.
- [98] Bertsekas D P. Nonlinear Programming[M]. Athena-Scientific, 2016.
- [99] Jennings L S, Teo K L. A computational algorithm for functional inequality constrained optimization problems[J]. Automatica, 1990, 26(2): 371-375.
- [100] Davis P J, Rabinowitz P. Methods of Numerical Integration[M]. Courier Corporation, 2007.
- [101] Johansson F, et al. MPMATH: A Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic[A/OL]. 2013. <https://mpmath.org/>.
- [102] Griewank A, Walther A. Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation[M]. SIAM, 2008.
- [103] Baur W, Strassen V. The complexity of partial derivatives[J]. Theoretical Computer Science, 1983, 22(3): 317-330.
- [104] Liu D C, Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization[J]. Mathematical Programming, 1989, 45(1-3): 503-528.
- [105] Basu S, Pollack R, Roy M F. Algorithms in Real Algebraic Geometry[M]//. Springer, 2003: 62.
- [106] Burri M, Oleynikova H, Achtelik M, et al. Real-time visual-inertial mapping, re-localization and planning onboard MAVs in unknown environments[C]//. Hamburg, Germany, 2015.
- [107] Burke D, Chapman A, Shames I. Generating minimum-snap quadrotor trajectories really fast[C]// IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Las Vegas, USA, 2020: 1487-1492.
- [108] Demmel J W, Eisenstat S C, Gilbert J R, et al. A supernodal approach to sparse partial pivoting[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1999, 20(3): 720-755.

- [109] Douglas D H, Peucker T K. Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature[J]. *Cartographica: the international journal for geographic information and geovisualization*, 1973, 10(2): 112-122.
- [110] Johnson S G. The NLOpt nonlinear-optimization package[A/OL]. 2020. <https://github.com/stevengj/nlopt>.
- [111] Qin T, Li P, Shen S. VINS-Mono: A robust and versatile monocular visual-inertial state estimator[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2018, 34(4): 1004-1020.
- [112] Lee T, Leok M, McClamroch N H. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3)[C]// IEEE Control and Decision Conference. Atlanta, Georgia, USA, 2010.
- [113] Höning W, Preiss J A, Kumar T S, et al. Trajectory planning for quadrotor swarms[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2018, 34(4): 856-869.
- [114] Gao F, Wu W, Gao W, et al. Flying on Point Clouds: Online trajectory generation and autonomous navigation for quadrotors in cluttered environments[J]. *Journal of Field Robotics*, 2019, 36(4): 710-733.
- [115] Gurobi Optimization, LLC. Gurobi Optimizer Reference Manual[A/OL]. 2020. <https://www.gurobi.com>.
- [116] MOSEK Aps. MOSEK Optimizer API for C[A/OL]. 2020. <https://www.mosek.com>.
- [117] Xu W, Cai Y, He D, et al. FAST-LIO2: Fast direct LiDAR-inertial odometry[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2022: 1-21. DOI: 10.1109/TRO.2022.3141876.
- [118] Orthey A, Toussaint M. Rapidly-exploring Quotient-Space Trees: Motion planning using sequential simplifications[C]//International Symposium on Robotics Research. Hanoi, Vietnam, 2019.
- [119] Orthey A, Escande A, Yoshida E. Quotient-space motion planning[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Madrid, Spain, 2018: 8089-8096.
- [120] Reif J H. Complexity of the mover's problem and generalizations[C]//20th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1979). 1979: 421-427.
- [121] Wu Y, Ding Z, Xu C, et al. External forces resilient safe motion planning for quadrotor[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2021, 6(4): 8506-8513.
- [122] Kushleyev A, Mellinger D, Powers C, et al. Towards a swarm of agile micro quadrotors[J]. *Autonomous Robots*, 2013, 35(4): 287-300.
- [123] Falanga D, Mueggler E, Faessler M, et al. Aggressive quadrotor flight through narrow gaps with onboard sensing and computing using active vision[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. Singapore, Singapore, 2017: 5774-5781.

- [124] Loianno G, Brunner C, McGrath G, et al. Estimation, control, and planning for aggressive flight with a small quadrotor with a single camera and IMU[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2016, 2(2): 404-411.
- [125] Han Z, Wang Z, Pan N, et al. Fast-Racing: An open-source strong baseline for SE(3) planning in autonomous drone racing[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2021, 6(4): 8631-8638.
- [126] Wang Q, He B, Xun Z, et al. GPA-Teleoperation: Gaze enhanced perception-aware safe assistive aerial teleoperation[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2022, 7(2): 5631-5638.
- [127] Han Z, Zhang R, Pan N, et al. Fast-Tracker: A robust aerial system for tracking agile target in cluttered environments[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2021: 328-334.
- [128] Ji J, Pan N, Xu C, et al. Elastic Tracker: A spatio-temporal trajectory planner flexible aerial tracking[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2022: 1-7.
- [129] Ren Y, Zhu F, Liu W, et al. Bubble Planner: Planning high-speed smooth quadrotor trajectories using receding corridors[J]. ArXiv:2202.12177, 2022.
- [130] Ji J, Yang T, Xu C, et al. Real-time trajectory planning for aerial perching[J]. ArXiv:2203.01061, 2022.
- [131] Quan L, Yin L, Xu C, et al. Distributed swarm trajectory optimization for formation flight in dense environments[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2022: 1-7.
- [132] Zhou X, Wen X, Wang Z, et al. Swarm of micro flying robots in the wild[J]. Science Robotics, 2022, 7(66): eabm5954.
- [133] Campos-Macías L, Gómez-Gutiérrez D, Aldana-López R, et al. A hybrid method for online trajectory planning of mobile robots in cluttered environments[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2017, 2(2): 935-942.
- [134] Natarajan R, Choset H, Likhachev M. Interleaving graph search and trajectory optimization for aggressive quadrotor flight[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2021, 6(3): 5357-5364.

