第二章　线性规划

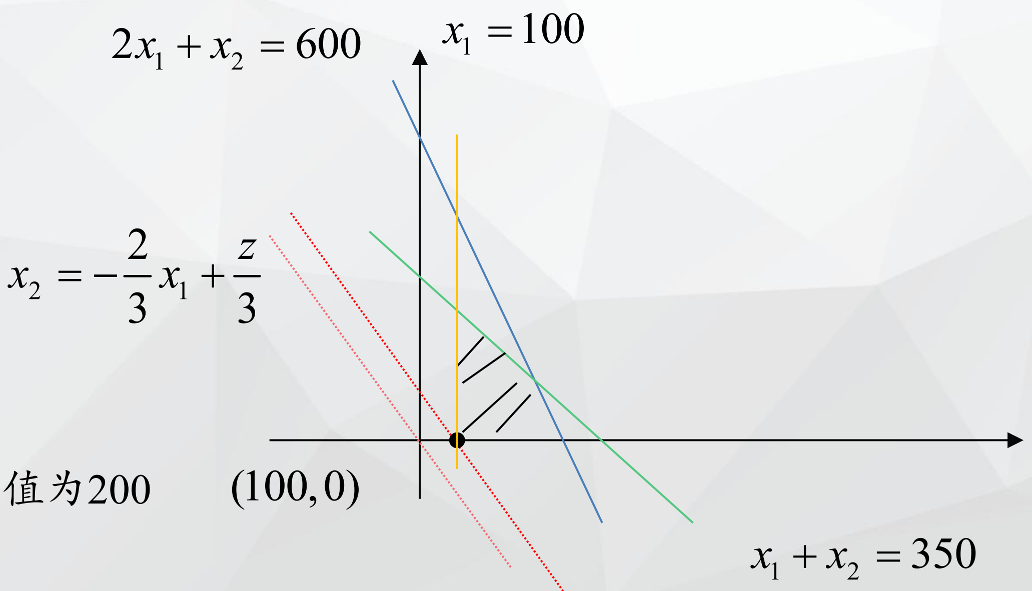
§ 2.1 线性规划的基本性质

某公司在生产中共需要A、B两种材料不超过350kg，其中A种材料至少需要100kg。加工每千克A种材料需要2小时，加工每千克B种材料需要1小时，而公司共有600个加工小时。另外，已知每千克A种材料的价格为2千元，每千克B种材料的价格为3千元。试问在满足生产需要的条件下，在公司加工能力范围内，如何购买A、B两种材料，使购进成本最低？

§ 2.1 线性规划的基本性质

$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + x_2 \le 350 \\ x_1 \ge 100 \\ 2x_1 + x_2 \le 600 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



z 的最小值为200

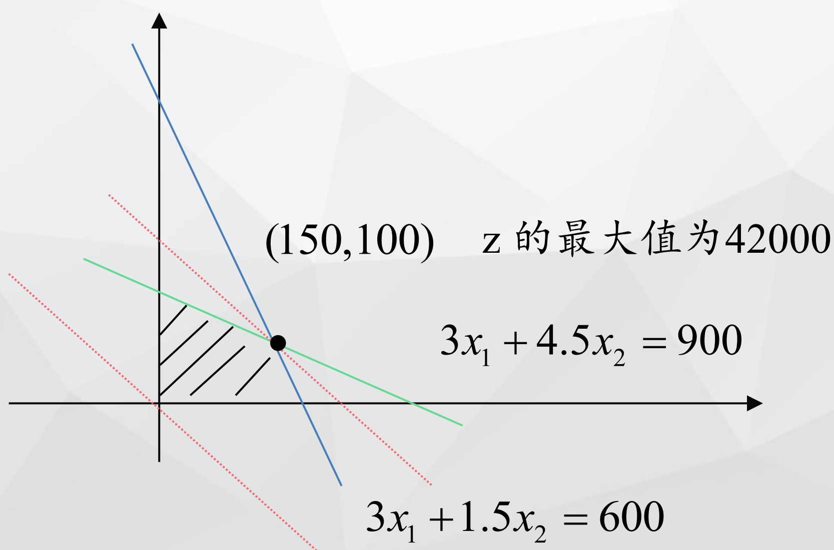
§ 2.1 线性规划的基本性质

如上一节中的例1，所建立的模型如下：

$$\max\ z = 180x_1 + 150x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 3x_1 + 4.5x_2 \le 900 \\ 3x_1 + 1.5x_2 \le 600 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_2 = -\frac{6}{5}x_1 + \frac{z}{150}$$

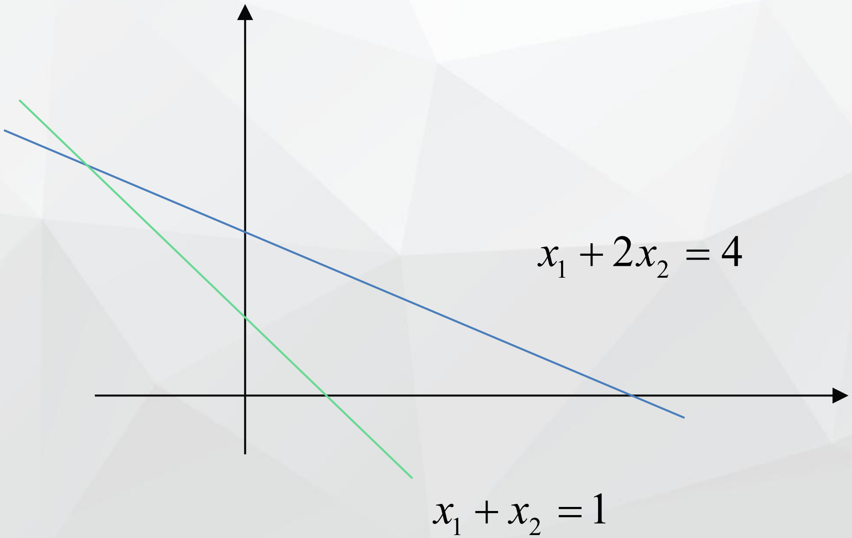


§ 2.1 线性规划的基本性质

线性规划模型：

$$\max\ z = 3x_1 - 2x_2$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



无可行解

§ 2.1 线性规划的基本性质

基本性质：

(i) 线性规划的可行域如果非空，则是一个凸集。

(ii) 如果可行域有界，且有有限个顶点，则线性规划存在最优解，且最优解一定在可行域的顶点。

(iii) 最优解可由最优顶点处的约束条件组成的方程组的解确定。

§ 2.1 线性规划的基本性质

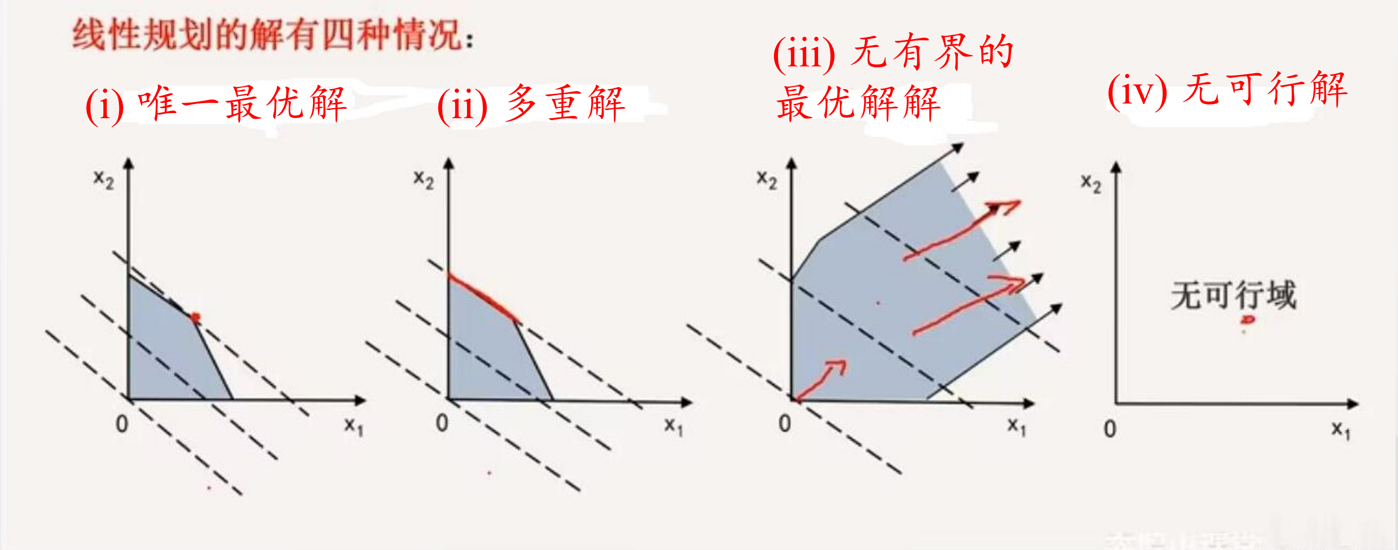
根据图解法，可以得知线性规划解的几种情况：

(i) 唯一最优解：等值线与可行域的交点

(ii) 多重解：等值线与可行域的某条边重合

(iii) 无有界的最优解：可行域发散，无法找到极值

(iv) 无可行解：无可行域/可行域为空集



§ 2.2 线性规划的标准形

为了研究方便，将如下形式的模型称为线性规划的标准形：

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(i) 目标函数求极小值

(ii) 约束条件均为等式

(iii) 常数b_i是非负的

(iv) 变量x_j非负

§ 2.2 线性规划的标准形

为了研究方便，将如下形式的模型称为线性规划的标准形：

$$\min\ z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$s.t.\ \ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ \ i=1,\ldots,m$$

$$x_j\geq 0,\ \ j=1,\ldots,n.$$

(i) 目标函数求极小值

(ii) 约束条件均为等式

(iii) 常数b_i是非负的

(iv) 变量x_j非负

- 若目标函数为求极大值，那么令$f = -z$即可。
- 如果约束条件具有不等式，可引入松弛变量x_i'，使其变成等式。
- 如果约束条件$x_j \geq h_j\ (h_j \neq 0)$，可引入新的变量$y_j = x_j - h_j$，$(y_j \geq 0)$.
- 如果x_j无符合约束，可引入两个变量$y_j' \geq 0$和$y_j'' \geq 0$，并令$x_j = y_j' - y_j''$，代入目标函数和约束条件，消去x_j。

§ 2.2 线性规划的标准形

例：将线性规划化为标准形

$$\max\ z = -x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$s.t.\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \le -5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_3\text{无符号约束} \end{cases}$$

§ 2.3 线性规划的基本可行解

线性规划的标准形还可写成如下矩阵形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & z = cx \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$c=(c_1,\ldots,c_n)$ $\quad A=(a_{ij})_{m\times n}$

$x=(x_1,\ldots,x_n)^T$ $\quad b=(b_1,\ldots,b_m)^T$

其中，$n>m$，$r(A)=m$.

设B是矩阵A中的一个可逆子矩阵，则B为线性规划的一个基矩阵。基矩阵对应的列向量为基向量，其余列为非基向量。基向量对应的变量为基变量，其余的变量为非基变量。

例：
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 12 \end{cases}$$

§ 2.3 线性规划的基本可行解

线性规划的标准形：

$$\begin{aligned} \min \quad & z = cx \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$c=(c_1,\ldots,c_n)$ $\quad A=(a_{ij})_{m\times n}$

$x=(x_1,\ldots,x_n)^T$ $\quad b=(b_1,\ldots,b_m)^T$

其中，$n > m$，$r(A)=m$.

$$A = (B, N), \quad x=(x_B, x_N)^T$$

$$Bx_B+Nx_N=b$$

B可由A中的m个列向量组成，因此矩阵B最多有C_n^m种情况。

因B可逆，可得到$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$

特别地，取$x_N = 0$，得到的解$x =(B^{-1}b, 0)$称为$\boxed{\text{基本解}}$。若得到的基本解非负，则称为$\boxed{\text{基本可行解}}$。

§ 2.3 线性规划的基本可行解

对于线性规划问题：

结论1：满足所有约束条件的解为可行解；

满足目标函数的可行解为最优解。

结论2：若有可行解，则一定有基本可行解。

若有最优解，则一定有最优基本可行解。

课堂练习

1. 利用图解法画出下列线性规划的可行域，求出顶点坐标，画出目标函数的等值线，并找出最优解。

$$\max\ z = 3x_1 - x_2$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

课堂练习

2. 将下列线性规划化为标准形，并求出所有的基本解和基本可行解。

$$\max\ z = -x_1 + x_2$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

课堂练习

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad b=\begin{pmatrix}18\\12\end{pmatrix}$$

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix},B_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix},\qquad B_4=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix},B_5=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix},B_6=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$B_1^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{30}{7}\\ \frac{48}{7}\end{pmatrix}\geq 0,\quad B_2^{-1}b=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix},$$

$$B_3^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\48\end{pmatrix}\geq 0,\quad B_4^{-1}b=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix}\geq 0,$$

$$B_5^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-15\end{pmatrix},\quad B_6^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}\geq 0,$$

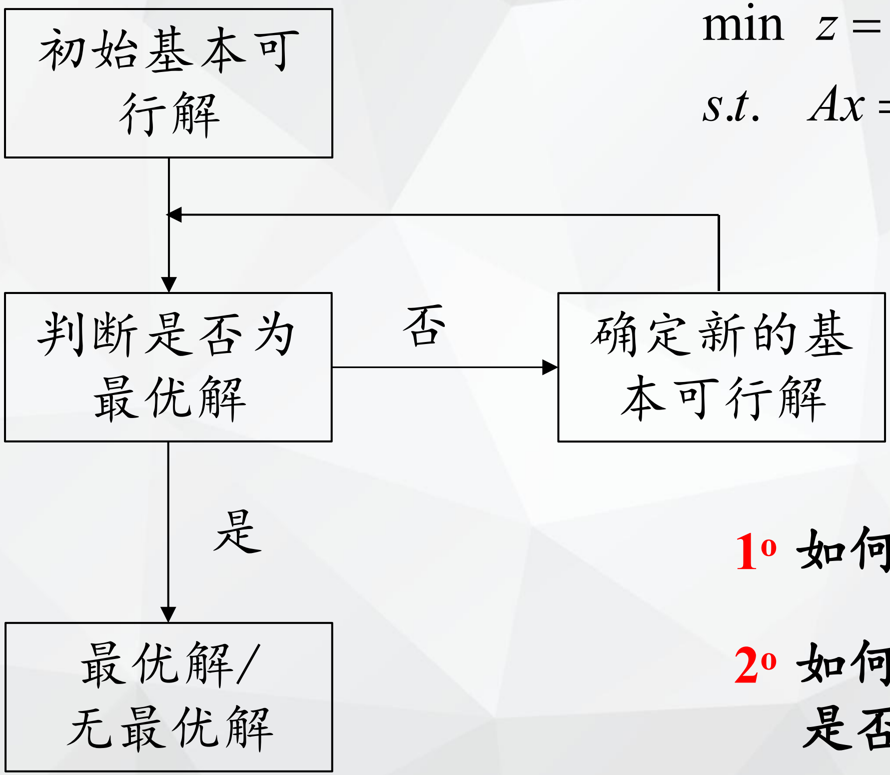
$$x^{(1)}=(\frac{30}{7},\frac{48}{7},0,0,0)^T;\quad x^{(2)}=(-6,0,8,0)^T;\quad x^{(3)}=(18,0,0,48)^T,$$

$$x^{(4)}=(0,4,\frac{10}{3},0)^T;\quad x^{(5)}=(0,9,0,-15)^T;\quad x^{(6)}=(0,4,0,6,12)^T.$$

§ 2.4 单纯形法

对于大规模的线性规划问题，单纯形法一经提出就得到广泛使用。

$$\min \quad z = cx$$
$$s.t. \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$



单纯形法流程图

1° 如何求初始基本可行解

2° 如何判断基本可行解是否为最优解

3° 如何确定新的基本可行解

§ 2.4 单纯形法

$$\min \quad z = cx$$
$$s.t. \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

如何确定初始基本可行解

设B为一个基矩阵，则$A=(B, N)$，相应地，向量x和c可以表示为$x=(x_B, x_N)^T$，$c=(c_B, c_N)$.

基变量　非基变量

则$Ax=b$可以写成$Bx_B+Nx_N=b$

由B可逆，可得到$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$

而目标函数可写成

令$x_N=0$, $x=(B^{-1}b, 0)$为一个基本可行解，且其对应的目标函数值为$z=c_BB^{-1}b$.

$$z = cx = (c_B, c_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_Bx_B + c_Nx_N$$

将x_B代入上式，得到用非基变量表示的目标函数：

$$\begin{aligned} z &= c_BB^{-1}b - c_BB^{-1}Nx_N + c_Nx_N \\ &= c_BB^{-1}b + (c_N - c_BB^{-1}N)x_N \end{aligned} \quad (1)$$

§ 2.4 单纯形法

判断基本可行解是否为最优解

$$
\begin{aligned}
z &= c_B B^{-1} b - c_B B^{-1} N x_N + c_N x_N \\
&= c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N
\end{aligned}
$$

根据可行性的要求(即$x \geq 0$), 考虑非基变量增大时，目标函数的变化情况：

(1) 当$c_j \geq 0, j \in \mathcal{N}$时, 增大非基变量$x_N$, 目标函数z也会增大, 说明$x$是模型的最优解。

(2) 当$c_j < 0, j \in \mathcal{N}$时, 增大非基变量$x_N$, 目标函数z会减小, 说明$x$不是模型的最优解。

因此，将非基变量的系数用于检验基本可行解的最优性。
所有的c_j都大于等于0，此时的基本可行解为最优解，否则不是最优解。

特别地，若所有的c_j都大于0，则有唯一最优解；若存在$c_j = 0$，则有多重解。

§ 2.4 单纯形法

确定新的基本可行解

确定一组新的基矩阵和非基矩阵，可以通过交换A中的一组基向量和非基向量得到。

首先，考虑从非基变量中选择一个变量作为新的基变量，即入基变量。

由于如果非基变量的系数c_j小于0，则增大对应的非基变量，可使目标函数值下降。因此选取系数小于0的非基变量为入基变量，如存在多个系数小于0的非基变量，则选择系数最小的变量作为入基变量。

§ 2.4 单纯形法

再考虑从基变量中选择一个变量作为新的非基变量，即出基变量。

对于$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$，当非基变量$x_j : 0 \to R^+$，而$x_N$中的其余变量仍为0，则有$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_j x_j$

为了保证可行性，应确保$x_B \geq 0$，即要求

$$x_p = b_p - a_{pj}x_j \geq 0, \qquad p \in \mathcal{B}$$

若$a_{pj} \leq 0$, 当$x_j : 0 \to R^+$，$x_p \geq 0$, 可行性成立。

若$a_{pj} > 0$, 当$x_j : 0 \to R^+$，x_p的值减小，

但为使$x_p \geq 0$, 需要$x_j \leq b_p / a_{pj}$, 因此，可令$x_j = b_p / a_{pj} (a_{pj} > 0)$，从而保证可行性。

若有多个$a_{pj} > 0$，则取$x_j = min \{b_p / a_{pj}\}$.

因此，引入$\theta_p = b_p / a_{pj}$，取θ_p的最小值所对应的基变量为出基变量。

特别地，如果所有的$a_{pj} \leq 0, x_p \geq 0$. 但因$c_j < 0$, 目标函数值会无限减小，使得问题无有界的最优解。

§ 2.4 单纯形法

求解步骤：

步骤1：化标准形，求初始基本可行解,建立初始单纯形表。

步骤2：若所有非基变量的系数都大于等于0，得到最优解，停止迭代；否则转入步骤3。

步骤3：确定新的基本可行解，取 $min\ \{c_j\}$所对应的非基变量为入基变量，取 $min\ \{b_p / a_{pj}\}(a_{pj} > 0)$所对应的基变量为出基变量，并构建相应的单纯形表。

步骤4：重复2、3步，直到得到最优解/无有界的最优解。

§ 2.4 单纯形法

对标准线性规划模型建立如下单纯形表：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	z
1	0	0	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	b_1
0	1	0	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	b_2
0	0	1	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	b_3

(1)若$c_1 = c_2 = c_3 = 0,\ c_4 > 0,\ c_5 > 0$, 则$x = (b_1, b_2, b_3, 0, 0)$为最优解，目标函数值-z = 0。

(2)若$c_1 = c_2 = c_3 = 0,\ c_4 < 0,\ c_5 < 0$, 则$x = (b_1, b_2, b_3, 0, 0)$不是最优解。

确定新的基本可行解：

取$\min\{c_4, c_5\}$所对应的变量为入基变量；

取$\min\{b_p / a_{pj}\}(a_{pj} > 0)$所对应的变量为出基变量；

对增广矩阵作初等行变换，使入基变量所对应的列与出基变量相同，并化基变量的系数为0.

若所有的$a_{pj} \le 0$, 则无有界的最优解。

例：利用单纯形法，求解下述线性规划问题：

$$\min\ z = -2x_1 - 3x_2$$

$$s.t.\ \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ 4x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

课堂练习

1. 用单纯形法解线性规划问题：

$$\min\ z = -9x_1 - 16x_2$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 80 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 90 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4. \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_B	-9	-16	0	0	0
x_3	1	4	1	0	80
x_4	2	3	0	1	90

$$x^1 = (0, 0, 80, 90) \qquad z = 0$$

因c_2<c_1<0, 则令x_2为入基变量

由min{80/4, 90/3}={20, 30}

则令x_3为出基变量

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_B	-5	0	4	0	320
x_2	1/4	1	1/4	0	20
x_4	5/4	0	-3/4	1	30

$$x^2 = (0, 20, 0, 30) \qquad z = -320$$

因c_1= -5<0, 则令x_1为入基变量

由min{20*4, 30*4/5}={80, 24}

则令x_4为出基变量

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_B	0	0	1	4	440
x_2	0	1	2/5	-1/5	14
x_1	1	0	-3/5	4/5	24

因c_3, c_4>0, 所以x^3 = (24, 14, 0,0)为最优解，z的最小值为-440.

- 最优解的唯一性：

若$c_N \geq 0$时，线性规划问题有最优解。

若$c_N > 0$时，线性规划问题有唯一的最优解。

若存在$c_j = 0,\ j \in \mathcal{N}$, 线性规划问题有多重解（无穷多个最优解）。

- 线性规划问题的有限终止性

非退化的线性规划：即问题的每个基本可行解都是非退化的，也就是每个基本可行解基变量的取值都不为0.

对于非退化线性规划问题，若单纯形法迭代过程中的每个基本可行解都是非退化的，则经有限次迭代后一定可以确定问题的一个最优解或判断问题无有界的最优解。

§ 2.5 大M法

对于线性规划的标准形：

$$\min\ z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

引入m个人工变量 $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geq 0$ 和一个充分大的正数M，则约束条件和目标函数变为如下形式：

$$\min\ z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \cdots + Mx_{n+m}$$

$$s.t.\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, \cdots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

§ 2.5 大M法

显然，在系数矩阵中可以找到一个单位阵，从而得到一个基本可行解，$x_1 = \cdots = x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1, \cdots, x_{n+m} = b_m$.

当基变量中不再包含这些引入的人工变量时，新问题的最优解就是原问题的最优解。

对于新问题的求解，依然采用单纯形法，所以大M法有时也称为大M单纯形法。

§ 2.5 大M法

利用目标函数中非基变量的系数判断是否为最优解：

(i) 如果$c_N \geq 0$，但基变量中含有非零的人工变量，则原问题无可行解。

(ii) 如果$c_N \geq 0$，且基变量中无人工变量，得到最优解。

特别地，所有非基变量的系数都大于0，有唯一最优解；

若存在非基变量的系数等于0，有多重解。

§ 2.5 大M法

例：利用大M法，求解如下线性规划问题：

$$\min\ z=-3x_1+x_2+2x_3$$

$$s.t.\ \begin{cases}3x_1+2x_2-3x_3=6\\ -x_1+2x_2-x_3=-4\\ x_i\geq 0,\ i=1,2,3.\end{cases}$$

先化标准形，再引入人工变量x_4，x_5和充分大的正数M，则线性规划模型变为：

$$\min\ z=-3x_1+x_2+2x_3+Mx_4+Mx_5$$

$$s.t.\ \begin{cases}3x_1+2x_2-3x_3+x_4=6\\ x_1-2x_2+x_3+x_5=4\\ x_i\geq 0,\ i=1,2,3,4,5.\end{cases}$$

§ 2.5 大M法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_B	-3	1	2	M	M	0
x_4	3	2	-3	1	0	6
x_5	1	-2	1	0	1	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_B	-3-4M	1	2+2M	0	0	-10M
x_4	3	2	-3	1	0	6
x_5	1	-2	1	0	1	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_B	0	8M/3+3	-1-2M	1+4M/3	0	6-2M
x_1	1	2/3	-1	1/3	0	2
x_5	0	-8/3	2	-1/3	1	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_B	0	5/3	0	M+5/6	M+1/2	7
x_1	1	-2/3	0	1/6	1/2	3
x_3	0	-4/3	1	-1/6	1/2	1

$x^* = (3, 0, 1, 0, 0)$为最优解，z的最小值为-7.

§ 2.6 对偶单纯形法

对于经典的线性规划问题，其矩阵形式为：

$$
\begin{aligned}
\min\ & c^T x \\
s.t.\ & Ax \geq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

对偶问题可表示为：

$$
\begin{aligned}
\max\ & b^T y \\
s.t.\ & A^T y \leq c \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

对偶问题的对偶，即为原问题。

对于其他形式的线性规划，可先将其转换为经典形式，再写出相应的对偶问题。

§ 2.6 对偶单纯形法

$$\begin{array}{ll} \min\ c^T x & \max\ b^T y \\ s.t.\ \ Ax \geq b & s.t.\ \ A^T y \leq c \\ \quad\ \ x \geq 0 & \quad\ \ y \geq 0 \end{array}$$

对偶问题的性质：

- **若x和y分别是原问题和对偶问题的可行解，则一定有$c^T x \geq b^T y$.**

设x和y都是可行解，必满足各自的约束条件，

$$Ax \geq b,\quad A^T y \leq c$$

有$y^T Ax \geq y^T b$，$x^T A^T y \leq x^T c \rightarrow y^T Ax \leq c^T x$

则$c^T x \geq b^T y$.

§ 2.6 对偶单纯形法

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ s.t.\ & Ax \ge b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max\ & b^T y \\ s.t.\ & A^T y \le c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

- 设x^*和y^*分别是原问题和对偶问题的可行解，且$c^T x^* = b^T y^*$，则x^*和y^*分别是原问题和对偶问题的最优解。

  根据性质1，对于原问题的任意可行解x，有$c^T x \ge b^T y^* = c^T x^*$，则$x^*$是原问题的最优解。

  同理，对于对偶问题的任意可行解y，有$b^T y \le c^T x^* = b^T y^*$，则$y^*$是对偶问题的最优解。

- 若原问题有最优解，则对偶问题也有最优解，反之亦然，并且两者的目标函数值相等。

§ 2.6 对偶单纯形法

x_1	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	
c_1	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	
1	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1n}	b_1
0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2n}	b_2
0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mn}	b_m

c_i：对偶问题的基本解

原问题的基本可行解

单纯形法

原问题的解是基本可行解
(对偶问题的解不可行)

$b_i \geq 0$，$c_i \ngeq 0$

逐步迭代

对偶问题的解也是基本可行解

$b_i \geq 0$，$c_i \geq 0$

对偶单纯形法

对偶问题的解是基本可行解
(原问题的解不可行)

$c_i \geq 0$，$b_i \ngeq 0$

逐步迭代

原问题的解也是基本可行解

$c_i \geq 0$，$b_i \geq 0$

最优解

§ 2.6 对偶单纯形法

例：使用对偶单纯形法，求解下列线性规划问题：

$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

约束条件引入松弛变量x_4和 x_5后，两边同乘-1，得如下形式：

$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$s.t.\ \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

§ 2.6 对偶单纯形法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_B	2	3	4	0	0	0
x_4	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	-2	1	-3	0	1	-4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_B	0	4	1	0	1	-4
x_4	0	-5/2	1/2	1	-1/2	-1
x_1	1	-1/2	3/2	0	-1/2	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_B	0	0	9/5	8/5	1/5	-28/5
x_4	0	1	-1/5	-2/5	1/5	2/5
x_1	1	0	7/5	-1/5	-2/5	11/5

$x^*=(11/5, 2/5, 0, 0, 0)$为最优解，z的最小值为28/5.

课堂练习

1. 写出下列线性规划的对偶形式(书42页8(2))。

$$\min\ z = 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ x_3, x_4 \leq 0. \end{cases}$$