其中$v, \omega_\theta, \omega_\varphi$分别为线速度、俯仰速度、偏航速度。假设线速度为常数，采样周期为ΔT。

量测值$y_{i,k}$是由距离$\gamma_i(k)$，俯仰角$\theta_i(k)$和偏航角$\varphi_i(k)$构成的向量，可通过传感器来获得：

$$y_{i,k} = [\gamma_i(k), \theta_i(k), \varphi_i(k)]^{\mathrm{T}}. \tag{4.2.16}$$

进一步，需要建立类似量测方程(4.2.2)的形式来描述量测与位姿之间的关系。考虑到可以同时观测到N个特征点，这意味着将生成N个量测值$y_{i,k}$ $(i = 1, 2, \dots, N)$：

$$\begin{bmatrix} \gamma_i(k) \\ \theta_i(k) \\ \varphi_i(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\begin{array}{l}\big(x(k) - x_i(k-1)\big)^2 + \big(y(k) - y_i(k-1)\big)^2 \\ +\big(z(k) - z_i(k-1)\big)^2\end{array}} \\ arctan\left(\frac{z(k)-z_i(k-1)}{\sqrt{\big(x(k)-x_i(k-1)\big)^2+\big(y(k)-y_i(k-1)\big)^2}}\right) - \theta(k) \\ arctan\left(\frac{y(k)-y_i(k-1)}{x(k)-x_i(k-1)}\right) - \varphi(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\gamma(k) \\ v_\theta(k) \\ v_\varphi(k) \end{bmatrix}, \tag{4.2.17}$$

其中$m_{i,k} = (x_i(k), y_i(k), z_i(k))$为$k$时刻特征点在世界坐标系中的位置信息，由下式得到

$$\begin{bmatrix} x_i(k) \\ y_i(k) \\ z_i(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) + \gamma_i(k)cos\big(\theta_i(k) + \theta(k)\big)cos\big(\varphi_i(k) + \varphi(k)\big) \\ y(k) + \gamma_i(k)cos\big(\theta_i(k) + \theta(k)\big)sin\big(\varphi_i(k) + \varphi(k)\big) \\ z(k) + \gamma_i(k)sin\big(\theta_i(k) + \theta(k)\big) \end{bmatrix}. \tag{4.2.18}$$

4.3 非线性系统 ERSFF 算法设计

考虑 Hilbert 状态空间模型(4.2.1)和(4.2.2)，构建风险敏感性能指标如下：

$$\mu_k(\theta) = -\frac{2}{\theta} log\left[Eexp\left(-\frac{\theta}{2}C_k\right)\right], \tag{4,3,1}$$

$$C_k = \sum_{i=0}^{k}\big(\check{z}_{i|l} - Lx_i\big)^{\mathrm{T}}(\check{z}_{i|l} - Lx_i), \tag{4.3.2}$$

其中$\check{z}_{i|l}$被定义为量测z_i的估计值，容易看到$E(C_k)$是H_2估计器的性能指标。

式(4.3.1)中的指数代价准则对应如下的极小化问题

$$\min_{\{\check{z}_{k|l}\}} \mu_k(\theta) = \min_{\{\check{z}_{k|l}\}} -\frac{2}{\theta} log\left[Eexp(-\frac{\theta}{2}C_k)\right], \tag{4.3.3}$$

其中参数θ称为风险敏感参数，任何使$\mu_k(\theta)$极小化的滤波器都称为风险敏感滤波器。

由联合条件分布公式可得：

$$E\left(\exp\left(-\frac{\theta}{2}C_k\right)\right)=\int exp\left[-\frac{\theta}{2}C_k\right]p(x_0,w_0,\ldots,w_k|y_0,\ldots,y_k)dx_0dw_0\cdots dw_k$$

$$\propto\int exp\left[-\frac{\theta}{2}C_k\right]exp\left[-\frac{1}{2}J_k\right]dx_0dw_0\cdots dw_k, \tag{4.3.4}$$

$$J_k=x_0^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_0^{-1}x_0+\sum_{i=0}^{k}w_i^{\mathrm{T}}Q^{-1}w_i+\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i^{\mathrm{T}}R^{-1}\varepsilon_i, \tag{4.3.5}$$

那么风险敏感评价准则可以写成

$$\theta>0:\max_{\{\check{z}_{k|l}\}}\int exp\left[-\frac{\theta}{2}C_k-\frac{1}{2}J_k\right]dx_0dw_0\cdots dw_k, \tag{4.3.6}$$

$$\theta<0:\min_{\{\check{z}_{k|l}\}}\int exp\left[-\frac{\theta}{2}C_k-\frac{1}{2}J_k\right]dx_0dw_0\cdots dw_k. \tag{4.3.7}$$

定义如下不定二次型

$$\tilde{J}_k=J_k+\theta C_k$$

$$=x_0^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_0^{-1}x_0++\sum_{i=0}^{k}w_i^{\mathrm{T}}Q^{-1}w_i+\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i^{\mathrm{T}}R^{-1}\varepsilon_i+\theta\sum_{i=0}^{k}\left(\check{z}_{k|l}-Lx_i\right)^{\mathrm{T}}(\check{z}_{k|l}-Lx_i). \tag{4.3.8}$$

为了处理极值，必须确保式(4.3.6)和(4.3.7)的积分是有限的。下面来证明积分的存在性。

引理 4.1(有限条件引理). 积分

$$\int exp\left[-\frac{1}{2}\tilde{J}_k\right]dx_0dw_0\cdots dw_k$$

是有限的当且仅当$\tilde{J}_i$在$\{x_0,w_0,\cdots,w_k\}$上有最小值。在这种情况下，它正比于

$$exp\left[-\frac{1}{2}\min_{x_0,w}\tilde{J}_k\right].$$

上述引理将风险敏感问题简化为寻找二阶标量形式的极小值问题。更准确地说，评价准则变成了

$$\theta>0:\max_{\{\check{z}_{k|l}\}}\left\{\min_{x_0,w}\tilde{J}_k\right\}, \tag{4.3.9}$$

$$\theta<0:\min_{\{\check{z}_{k|l}\}}\left\{\min_{x_0,w}\tilde{J}_k\right\}. \tag{4.3.10}$$

为了解决上述问题，引入如下 Krein 状态空间模型

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=f(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)+\boldsymbol{w}_k, \tag{4.3.11}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k\\ \check{z}_{k|k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h(\boldsymbol{x}_k)\\ L_k\boldsymbol{x}_k\end{bmatrix}+\boldsymbol{v}_k, \tag{4.3.12}$$

其中$\check{z}_{k|k}$是待估计状态的任意线性组合，状态初值及噪声参数信息如下：

$$\left\langle \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{w_i} \\ \boldsymbol{v_i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{w_j} \\ \boldsymbol{v_j} \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q\delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \theta^{-1}I \end{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}. \tag{4.3.13}$$

注意，这里用粗体字母表示 Krein 状态空间下的元素，欧几里得空间中的元素用普通字母表示。

下面给出一个有用的矩阵逆引理，它可以简化后续定理 4.1 的证明。

引理 4.2(矩阵逆引理). 假设 C 是非奇异的，那么

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \tag{4.3.14}$$

定理 4.1. 给定系统(4.3.11)-(4.3.12)，假设 4.1-4.2 成立。对于给定$\theta > 0$的后验风险敏感滤波器，风险敏感估计问题总是有一个解。对于给定$\theta < 0$的风险敏感滤波器，存在一个解的充要条件为

$$\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \theta^{-1}I \end{bmatrix} \text{和 } R_{e,k} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \theta^{-1}I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_k \\ L_k \end{bmatrix} P_k \begin{bmatrix} H_k^{\mathrm{T}} & L_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

对于所有$i = 0, 1, \cdots, n$有相同的惯性，其中$P_0 = \mathcal{P}_0$，且

$$P_{k+1} = F_k P_k F_k^{\mathrm{T}} + Q - F_k P_k \begin{bmatrix} H_k^{\mathrm{T}} & L_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} R_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} H_k \\ L_k \end{bmatrix} P_k F_k^{\mathrm{T}}, \tag{4.3.15}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_k} - h(\hat{x}_k^-) \\ \check{z}_{k|k} - \hat{z}_{k|k-1} \end{bmatrix}. \tag{4.3.16}$$

在这两种情况下，最优风险敏感滤波器可由如下公式给出

$$\check{z}_{k|k} = L_k \hat{x}_k^+,$$

$$\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k^+, u_k),$$

$$\hat{x}_{k+1}^+ = F_k \hat{x}_k^+ + K_{k+1}\big(\boldsymbol{y_{k+1}} - h(\hat{x}_{k+1}^-)\big),$$

$$K_{k+1} = P_{k+1} H_{k+1}^{\mathrm{T}} (R + H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

假设有局部滤波器$\hat{x}_{k+1,1}^+, \hat{x}_{k+1,2}^+, \dots, \hat{x}_{k+1,m}^+$，加权融合估计量$\hat{x}_{fusion}(k)$可由标量加权融合算法[107]得到：

$$\hat{x}_{fusion}(k) = \textstyle\sum_{i=1}^{m} \omega_i(k) \hat{x}_{k+1,i}^+,$$

其中最优加权系数向量$\omega(k) = [\omega_1(k), \omega_2(k), \dots, \omega_m(k)]$为

$$\omega(k) = \frac{e^{\mathrm{T}} P_{tr}^{-1}(k)}{e^{\mathrm{T}} P_{tr}^{-1}(k) e},$$

其中

$$P_{tr}(k) = \begin{bmatrix} trP_{11}(k) & \cdots & trP_{1m}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ trP_{m1}(k) & \cdots & trP_{mm}(k) \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

证明：回顾第 4.2.1 节中 EKF 的推导，非线性系统(4.3.11)和(4.3.12)可以被线性化为

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=F_k\boldsymbol{x}_k+\tilde{\boldsymbol{u}}_{k,1}+\boldsymbol{w}_k, \tag{4.3.17}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k\\ \check{z}_{k|l}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_k\boldsymbol{x}_k+\tilde{\boldsymbol{u}}_{k,2}\\ L_k\boldsymbol{x}_k\end{bmatrix}+\boldsymbol{v}_k. \tag{4.3.18}$$

对于$\theta>0$，解总是存在的，因为$\begin{bmatrix}R & 0\\ 0 & \theta^{-1}I\end{bmatrix}>0$，状态空间模型简化为通常的希尔伯特空间设置，对这种情况不进行讨论。

对于$\theta<0$，首先需要证明$\tilde{J}_k$是否存在最小值。在解的存在性得到证明后，选择$\check{z}_{k|k}$，使得$\bar{J}_k$的最小值是正定的。

$$\begin{aligned}\tilde{J}_k&=\textstyle\sum_{i=0}^{k}\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\mathrm{T}}R_{e,k}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_i\\
&=\textstyle\sum_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k-h(\hat{x}_k^-)\\ \check{z}_{k|k}-\hat{z}_{k|k-1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}R+H_kP_kH_k^{\mathrm{T}} & H_kP_kL_k^{\mathrm{T}}\\ L_kP_kH_k^{\mathrm{T}} & \theta^{-1}I+L_kP_kL_k^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k-h(\hat{x}_k^-)\\ \check{z}_{k|k}-\hat{z}_{k|k-1}\end{bmatrix}\\
&=\textstyle\sum_{i=0}^{k}\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k-h(\hat{x}_k^-)\\ \check{z}_{k|k}-\hat{z}_{k|k}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right.\\
&\quad\times\begin{bmatrix}R+H_kP_kH_k^{\mathrm{T}} & \\ & \theta^{-1}I+L_k\left(P_k-P_kH_k^{\mathrm{T}}\left(R+H_kP_kH_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1}H_kP_k\right)L_k^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{-1}\\
&\quad\times\left.\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k-h(\hat{x}_k^-)\\ \check{z}_{k|k}-\hat{z}_{k|k}\end{bmatrix}\right\},\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

其中

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k-h(\hat{x}_k^-)\\ \check{z}_{k|k}-\hat{z}_{k|k}\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}I & \\ -L_kP_kH_k^{\mathrm{T}}\left(R+H_kP_kH_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k-h(\hat{x}_k^-)\\ \check{z}_{k|k}-\hat{z}_{k|k-1}\end{bmatrix}. \tag{4.3.20}$$

利用引理 4.2，可将式(4.3.19)改写为：

$$\textstyle\sum_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k-h(\hat{x}_k^-)\\ \check{z}_{k|k}-\hat{z}_{k|k}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}R+H_kP_kH_k^{\mathrm{T}} & \\ & \theta^{-1}I+L_k(P_k^{-1}+H_k^{\mathrm{T}}H_k)^{-1}L_k^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_k-h(\hat{x}_k^-)\\ \check{z}_{k|k}-\hat{z}_{k|k}\end{bmatrix}. \tag{4.3.21}$$

注意，$\hat{z}_{k|k-1}$是$\check{z}_{k|k}$在 Krein 空间下的线性流形$\mathcal{L}\left\{\{\boldsymbol{y}_i\}_{i=0}^{k-1},\{\check{z}_{i|i}\}_{i=0}^{k-1}\right\}$上的投影，因此，$\hat{z}_{k|k-1}$是一个关于$\{y_i\}_{i=0}^{k-1}$的线性函数。进一步，$\hat{z}_{k|k}$是$\check{z}_{k|k}$在 Krein 空间下的线性流形$\mathcal{L}\left\{\{\boldsymbol{y}_i\}_{i=0}^{k},\{\check{z}_{i|i}\}_{i=0}^{k-1}\right\}$上的投影，因此$\hat{z}_{k|k}$是关于$\{y_i\}_{i=0}^{k}$的线性函数。

根据文献[105]的惯性最小条件引理和R_y的惯性引理，可以得到如下结论。如果$\mathcal{P}_0>0$且$Q>0$，则二次型J_k的稳定点为

$$J_k=\begin{bmatrix}y_k\\ \check{z}_{k|k}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}R_{y,k}^{-1}\begin{bmatrix}y_k\\ \check{z}_{k|k}\end{bmatrix},$$

该稳定点为最小值的充分必要条件是$R_{y,k}$和$\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \theta^{-1}I \end{bmatrix}$具有相同的惯性，其中

$$R_{y,k} = \langle \begin{bmatrix} y_k \\ \check{z}_{k|k} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_k \\ \check{z}_{k|k} \end{bmatrix} \rangle, \tag{4.3.22}$$

y的 Gramian 行列式$R_{y,k}$和新息的 Gramian 行列式$R_{e,k}$有相同的惯性。$R_{y,k}$的强正则性意味着$R_{e,k}$的非奇异性。假设$R_{y,k} > 0$，当且仅当

$$R_{e,k} > 0.$$

由上述引理可知，如果存在一个风险敏感估计量，当且仅当$\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \theta^{-1}I \end{bmatrix}$和$R_{e,k}$必须具有相同的惯性。容易看到

$$R + H_k P_k H_k^{\mathrm{T}} > 0$$

和

$$\theta^{-1}I + L_k (P_k^{-1} + H_k^{\mathrm{T}} H_k)^{-1} L_k^{\mathrm{T}} < 0.$$

此外，由于稳定点$\tilde{J}_k$是正定的，必须确保

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=0}^{k} [\boldsymbol{y}_k - h(\hat{x}_k^-)]^{\mathrm{T}} \left(R + H_k P_k H_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1} [\boldsymbol{y}_k - h(\hat{x}_k^-)] \\ &+ \textstyle\sum_{i=0}^{k} \left[\check{z}_{k|k} - \hat{z}_{k|k}\right]^{\mathrm{T}} \left[\theta^{-1}I + L_k (P_k^{-1} + H_k^{\mathrm{T}} H_k)^{-1} L_k^{\mathrm{T}}\right]^{-1} \left[\check{z}_{k|k} - \hat{z}_{k|k}\right] > 0. \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

显然，可以选择令

$$\check{z}_{k|k} = \hat{z}_{k|k} = L_k \hat{x}_k^+,$$

其中$\hat{x}_k^+$由 Krein 中的$\boldsymbol{x}_k$在线性流形$\mathcal{L}\left\{\{\boldsymbol{y}_i\}_{i=0}^{k}, \{\check{z}_{i|i}\}_{i=0}^{k-1}\right\}$上的投影给出。现在可以在状态空间模型(4.3.17)和(4.3.18)上进行 Kerin 空间 KF 的递归计算，求解最优状态滤波$\hat{x}_k^+$，有

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + P_{k+1} [H_{k+1}^{\mathrm{T}} \quad L_{k+1}^{\mathrm{T}}] R_{e,k}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_k. \tag{4.3.24}$$

选择$\check{z}_{k+1|k+1} = \hat{z}_{k+1|k+1}$且根据矩阵逆引理，可以将上面的式子重写为如下公式

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^+ &= \hat{x}_{k+1}^- + P_{k+1} [H_{k+1}^{\mathrm{T}} \quad L_{k+1}^{\mathrm{T}}] \begin{bmatrix} I & -\left(R + H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} H_{k+1} P_{k+1} L_{k+1}^{\mathrm{T}} \\ & I \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} R + H_k P_k H_k^{\mathrm{T}} & \\ & \theta^{-1}I + L_k (P_k^{-1} + H_k^{\mathrm{T}} H_k)^{-1} L_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1}^-) \\ \check{z}_{k+1|k+1} - \hat{z}_{k+1|k+1} \end{bmatrix} \\ &= \hat{x}_{k+1}^- + P_{k+1} H_{k+1}^{\mathrm{T}} \left(R + H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} [\boldsymbol{y}_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1}^-)]. \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

标量加权融合算法在[107]中得到了详细的证明。

定理 4.1 得证。