习题课材料（十一）

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

习题 1. 记实数域 $\mathbb{R}$ 上的全体一元可导函数组成的集合为 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$，定义 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ 上的变换: $\boldsymbol{A}\big(f(x)\big) = xf(x) \quad \forall f(x) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ 上的一个线性变换。

(2) 设 $\boldsymbol{D}$ 是求导算子，证明 $\boldsymbol{DA} - \boldsymbol{AD} = \boldsymbol{I}$.

习题 2. 考虑 xy 平面，设 T 为关于 x 轴的反射变换，S 为关于 y 轴的反射变换。对于任意向量 $\mathbf{v} = (x,y)$，写出 $S(T(\mathbf{v}))$，并给出线性变换 ST 的更简单的描述。

习题 3. 设 $\mathscr{V}$ 是所有 2 阶对称矩阵构成的线性空间，f 是其上的线性变换：$f(X) = A^{\mathrm{T}}XA$, 其中 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 求 f 在基 $E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}$ 下的矩阵。其中 E_{ij} 为 (i,j) 处元素为 1，其余元素都是 0 的矩阵。

习题 4. 设 3 维线性空间 $\mathscr{V}$ 有一组基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，其上的线性变换 f 在该组基下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 f 的全部特征值和特征向量。

(2) 判断是否存在一组基，使得 f 在该组基下的表示矩阵是对角矩阵。如果存在，写出这组基及对应的对角矩阵。

习题 5. 考虑二阶矩阵空间 $M_2(\mathbb{R})$ 上的线性变换 $T(M) = AMB$，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。描述 $\ker(T)$ 及 ImT。