习题课材料（九）

注: 带♡号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

一 设$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵$Q$对角化$S$.

解: (1)求S的特征值.

$|\lambda I-S|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)=0,$

得到S的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=-3$.

(2)求对应的特征向量.

对于$\lambda_1=0$，求解$(0I-A)x=0$. 特殊解$\eta_1=(-2,-2,1)$,单位化得到$\xi_1=(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

对于$\lambda_2=3$，求解$(3I-A)x=0$. 特殊解$\eta_2=(-1,-\frac{1}{2},1)$,单位化得到$\xi_2=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

对于$\lambda_1=-3$，求解$(-3I-A)x=0$. 特殊解$\eta_3=(-\frac{1}{2},1,1)$,单位化得到$\xi_3=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

令$Q=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. 则$Q^{-1}SQ=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

二 设$M=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(1) 证明M的特征值为纯虚数，且$|\lambda|=1$.

(2) 通过M的Trace确定M的所有特征值.

证明：(1) $M^TM=I$，M为正交矩阵. 设λ为M的复特征值，ξ为对应的复特征向量, 则

$|\xi| = |M\xi| = |\lambda\xi| = |\lambda||\xi|$，故$|\lambda| = 1$. 又由于$M^T = -M$，即$M$反对称，则

$$\overline{\xi}^T M\xi = \lambda\overline{\xi}^T\xi = (\overline{\xi}^T M\xi)^T = \xi^T M^T\overline{\xi} = -\xi^T M\overline{\xi} = -\xi^T\overline{M\xi} = -\xi^T\overline{\lambda\xi}^T = -\bar{\lambda}\xi^T\xi.$$

因此$\overline{\lambda} = -\lambda$，即$\lambda$为纯虚数.

(2)由(1)M的特征值为纯虚数，且模为1，故M的特征值只能为i，$-i$. 又由于$Tr(M) = 0$，故M的4个特征值为i，i，$-i$，$-i$。

三 设$S = \begin{pmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{pmatrix}$. 当$s$取何值时$S$正定.

解：S正定，当且仅当S的顺序主子式都大于0，即$s > 0$，$\begin{vmatrix} s & -4 \\ -4 & s \end{vmatrix} = s^2 - 16 > 0$，且$|S| = S^3 - 48S - 128 = (s+4)^2(s-8) > 0$. 于是当$s > 8$时，$S$正定.

四 设A是一个实对称阵满足$A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$和$A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(1) A是否可逆? 解释原因.

(2) 给出满足上述性质的矩阵A的例子，并且A的特征值之和为0.

解：(1) 因为$A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所以$A$不可逆.

(2)因为$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$($A$的第一列), $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$($A$的第二列)且$A$是实对称阵, A形如$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & x \end{pmatrix}$. 因为特征值之和$= 1 + 4 + x = 0$,则$x = -5$.

五 设S是$\mathbb{R}^7$的一个4维子空间，P是S上的投影矩阵.

(a) 求出P的7个特征值.

(b) 求出P的全部特征向量.

解: (a) 根据定义, P有两个特征子空间: S和$S^{\perp}$且P可对角化. 所以，P的7个特征值是$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$和$\lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=0$.

(b)关于$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$的特征向量是$S$中非零向量. 关于$\lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=0$的特征向量是$S^{\perp}$中的非零向量.

六 构造一个三阶实对称矩阵，使得其特征值为$1,1,-1$, 属于特征值1的线性无关的特征向量有$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$和$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

解: 令$\lambda_3=-1$的一个特征向量是$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. 则应用不同特征值的特征向量的正交性，我们有

$$a+b+c=0, 2a+2b+c=0.$$

解得$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$. 令$P_t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 1 & 2 & -t \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 若$t\neq 0$, 则$P_t$可逆且$P_t^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2t} & -\frac{1}{2t} & 0 \end{pmatrix}$.
我们得到

$$A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

七 设$A=(a_{ij})$是n阶实对称矩阵, 其特征值是$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$.

(1) 证明对于任意n维列向量$\alpha\in\mathbb{R}^n$, 均有

$$\lambda_1\alpha^T\alpha\leq\alpha^TA\alpha\leq\lambda_n\alpha^T\alpha.$$

(2) 展示$\lambda_1\leq a_{11}\leq\lambda_n$.

(3) 假设$A=(a_{ij})$是一个2阶实对称阵. 求a_{12}可能的最大值和最小值.

解答:

(1)

Proof. 存在正交阵Q,

$$Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

对于任意n维列向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, 令$\beta = Q\alpha$, 则有

$$\beta^T A\beta = \alpha^T Q^T AQ\alpha = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \cdots + \lambda_n a_n^2 \leq \lambda_n a_1^2 + \lambda_n a_2^2 + \cdots + \lambda_n a_n^2$$

$$\leq \lambda_n \alpha^T \alpha = \lambda_n \beta^T \beta.$$

因为Q是可逆矩阵, β可以取任意n维列向量. 同理可证不等式$\lambda_1 \alpha^T \alpha \leq \alpha^T A\alpha$. □

(2)

Proof. 令$\alpha = e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T$. 则$e_1^T A e_1 = a_{11}$. 由(1), 不等式成立. □

(3) 有两种二阶正交阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}(\text{旋转}) \qquad \text{and} \qquad \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}(\text{反射})$$

(提示：由正交阵定义, $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2 = 1$, 令$a = \cos t, b = \cos\theta$, 再应用$ab + cd = 0$.)
交换反射矩阵的两行，我们得到

$$\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - t) & \sin(\frac{\pi}{2} - t) \\ -\sin(\frac{\pi}{2} - t) & \cos(\frac{\pi}{2} - t) \end{pmatrix}$$

仍然是一个旋转矩阵. 因此, 一个2阶实对称阵能做如下分解

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

通过计算, 我们得到$a_{12} = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)\sin 2t$，因而，有

$$-\frac{1}{2} \mid \lambda_2 - \lambda_1 \mid \leq a_{12} \leq \frac{1}{2} \mid \lambda_2 - \lambda_1 \mid.$$

八 设A,B是n阶实对称矩阵, 其特征值分别是$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$和$\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n$. 求证: $A+B$的特征值全部落在区间$[\lambda_1+\mu_1, \lambda_n+\mu_n]$.

证明: 应用习题五，任意$\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^T A\alpha \le \lambda_n \alpha^T\alpha, \alpha^T B\alpha \le \mu_n \alpha^T\alpha$. 因为$A+B$也是实对称阵，特征值均是实数. 假设$\eta \in \mathbb{R}$是一个特征值,相应的特征向量是$\beta$, 则$\beta^T(A+B)\beta = \eta\beta^t\beta$. 另一方面,

$$\beta^T(A+B)\beta = \beta^T A\beta + \beta^T B\beta \le \lambda_n\beta^T\beta + \mu_n\beta^T\beta = (\lambda_n+\mu_n)\beta^T\beta.$$

因为$\beta^T\beta > 0$, 我们得到$\eta \le \lambda_n+\mu_n$. 同理可证明$\eta \ge \lambda_1+\mu_1$.

九 [♡] 若$A=(a_{ij})$是n阶实方阵，且A的秩小于n，则A的伴随矩阵的特征值包含至少$n-1$个0, 若存在非零特征值，则它是$\sum_{i=1}^n C_{ii}$.

证明: 设C是A的代数余子式矩阵，C^T是A的伴随矩阵. 因为$AC^T=0$且A不可逆, 所以C^T的秩等于1(如果A的秩等于$n-1$)或0(如果A的秩小于$n-1$, 则A的任意$n-1$阶子矩阵均不可逆). 假设$C^T \ne 0$, 即C^T的秩等于1, 则存在$u, v \ne 0 \in \mathbb{R}^n$，使得$C^T = uv^T$. 我们有

$$\det(\lambda I_n - C^T) = \lambda^{n-1}(\lambda - v^T u).$$

如果$v^T u = 0$, 则C^T只有特征值0(n重根). 如果$v^T u \ne 0$, 则C^T的全部特征值是$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = v^T u$. 进一步，

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = tr(C^T) = C_{11}+C_{22}+\cdots+C_{nn}.$$

其中C_{ij}是a_{ij}的代数余子式.

十 [♡] 设A是一个n阶反对称矩阵, 即$A^T=-A$且A是实矩阵. 证明:

(1) I_n+A可逆且$(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$是正交阵.

(2) 假设$n=3$，则存在正交阵Q和向量$b \in \mathbb{R}$，使得$Q^TAQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$.

证明: (1) 设$x \in \mathbb{R}^n$满足$(I_n+A)x=0$. 我们得到$Ax=-x$. 因此$x^TAx=-x^Tx$. 但是

$$x^TAx = (x^TAx)^T = x^TA^Tx = -x^TAx,$$

即$x^TAx=0$. 所以$x^Tx=0$, 从而$(I_n+A)x=0$只有零解, 即I_n+A可逆. 令$Q=(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$:

$$Q^TQ = (I_n+A^T)^{-1}(I_n-A^T)(I_n-A)(I_n+A)^{-1} = (I_n-A)^{-1}(I_n+A)(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$$

$$= (I_n - A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = I_n.$$

(2) 因为$|A| = |A^T| = |-A| = (-1)^3|A|$, $|A| = 0$,所以A不可逆. 存在$\alpha_1 \in \mathbb{R}^3$满足$A\alpha = 0$和$\|\alpha\| = 1$. 向量$\alpha_1$ 可以扩充成$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. 由定义, $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$是一个正交阵满足

$$AQ = (0, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_4 \\ 0 & c_2 & c_5 \\ 0 & c_3 & c_6 \end{pmatrix}$$

其中$A\alpha_2 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3, A\alpha_3 = c_4\alpha_1 + c_5\alpha_2 + c_6\alpha_3$. 这等价于说$Q^TAQ = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_4 \\ 0 & c_2 & c_5 \\ 0 & c_3 & c_6 \end{pmatrix}$.

因为Q^TAQ是一个反对称阵, $c_1 = c_4 = c_2 = c_6 = 0, c_3 = -c_5$.