习题课材料（七）

注: 带♡号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

习题1. 若$A_1,A_2,\ldots,A_{2020}$是2020个2019阶方阵，求证: 则关于$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_{2020})$的方程

$$\det\left(x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_{2020}A_{2020}\right)=0$$

存在非零解。

习题2 (♡). 计算行列式

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & n & n & n & n \\ n & n & n & n & n & n & n \end{vmatrix}$$

习题3 (♡). 计算行列式

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

习题4. 设n阶方阵A的第i行第j列的元素为$\min(i,j)$. 求$\det A$.

[记号] 设$A=(a_{ij})$是n阶方阵,（$n\geq 2$）,$C=(C_{ij})$，其中C_{ij}为a_{ij}的代数余子式

习题5. 设

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

不直接计算C_{ij}, 求解以下各题:

(1) $-2C_{11}+2C_{21}+3C_{31}+4C_{41}$;

(2) $C_{13}+C_{23}+C_{33}+C_{43}$.

习题6. 设

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

求$S_1=C_{21}+2C_{22}$ 和$S_2=C_{23}+C_{24}$.

习题7. 设

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

其中函数a_{ij}可导.

*(1)*求证:

$$\begin{aligned} D'(x) \quad &= \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & a'_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & a'_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a'_{31}(x) & a'_{32}(x) & a'_{33}(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

*(2)*将上述结论推广到n阶的情形

习题8. 设A为可逆方阵，D为方阵，证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|.$$

习题9 (♡). 求如下的n阶范德蒙行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

提示. 参考《线性代数入门》p.164-165 □

习题10 (♡)**.** 设Q是n阶正交矩阵，即$Q^TQ = QQ^T = I_n$。

(1) 若$|Q| < 0$，求证：$|Q + I_n| = 0$，因此存在非零向量$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$，使得$Q\mathbf{v} = -\mathbf{v}$。

(2) 设$|Q| > 0$. 证明当n是奇数时等式$|Q - I_n| = 0$总成立. 当n是偶数时, 判断等式$|Q - I_n| = 0$是否成立. 若成立, 请给出证明;若不成立, 请举出反例.