TS在基 $u_1,\cdots,u_l$; $w_1,\cdots,w_m$ 下的矩阵为AB.

Pf. 由题设, $S(u_1,u_2,\cdots,u_l)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)B$

$T(v_1,v_2,\cdots,v_n)=(w_1,w_2,\cdots,w_m)A$

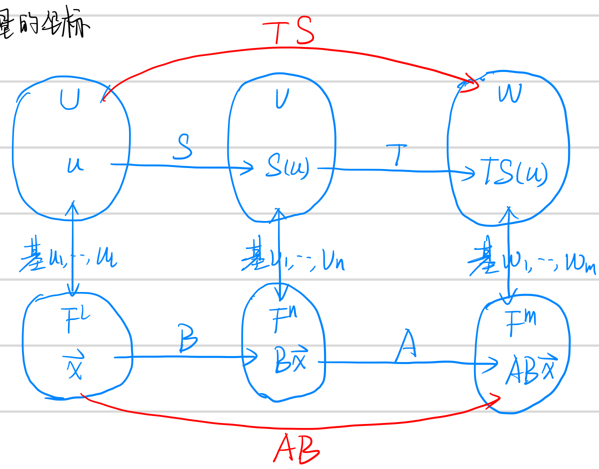
则 $TS(u_1,u_2,\cdots,u_l)=(TS(u_1),TS(u_2),\cdots,TS(u_l))=(T(S(u_1)),T(S(u_2)),\cdots,T(S(u_l)))$

$=T(S(u_1),S(u_2),\cdots,S(u_l))=T((v_1,v_2,\cdots,v_n)B)$ ← 每列对应一个向量的坐标

$\overset{T线性}{=} T(v_1,v_2,\cdots,v_n)B=((w_1,\cdots,w_m)A)B$

$=(w_1,w_2,\cdots,w_m)AB$

即TS在 $u_1,\cdots,u_l$; $w_1,\cdots,w_m$ 下的矩阵为AB. #



例. 实数域 $F=\mathbb{R}$, $\begin{cases} V=\{c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3 \mid c_0,c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\}, \\ W=\{c_0+c_1x+c_2x^2 \mid c_0,c_1,c_2\in\mathbb{R}\} \end{cases}$

$\begin{cases} T: V\to W, \quad T(v)=\dfrac{dv}{dx}. \quad \text{derivative} \\ T^+: W\to V, \quad T^+(w)=\int_0^x w(t)\,dt, \quad \text{integral} \end{cases}$

$\begin{cases} 取V的一组基\ v_1=1,\ v_2=x,\ v_3=x^2,\ v_4=x^3 \\ W的一组基\ w_1=1,\ w_2=x,\ w_3=x^2 \end{cases}$

T在 v_1,v_2,v_3,v_4; w_1,w_2,w_3 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\in M_{3\times4}(\mathbb{R})$

T^+在 w_1,w_2,w_3; v_1,v_2,v_3,v_4 下的矩阵为 $A^+=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\in M_{4\times3}(\mathbb{R})$

① 乘积 $TT^+: W\to W$, $TT^+(w)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x w(t)\,dt=w(x)$, $\forall w\in W$. 恒等变换

$TT^+(w_1,w_2,w_3)=(w_1,w_2,w_3)=(w_1,w_2,w_3)I$, 对应矩阵 I_3

验证: $AA^+=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}=I_3$

② 乘积 $T^+T: V\to V$. $T^+T(v)=\int_0^x\left(\dfrac{d}{dt}v(t)\right)dt$, $\forall v\in V$.

$T^+T(v_1)=T^+T(1)=\int_0^x\left(\dfrac{d}{dt}1\right)dt=0$.

$T^+T(v_2)=T^+T(x)=x$, $T^+T(v_3)=T^+T(x^2)=x^2$, $T^+T(v_4)=x^3$.

$T^+T(v_1,v_2,v_3,v_4)=(0,x,x^2,x^3)=(\underset{v_1}{1},\underset{v_2}{x},\underset{v_3}{x^2},\underset{v_4}{x^3})\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, T^+T在基 v_1,v_2,v_3,v_4 下矩阵.

验证：$A^+A=\begin{bmatrix}0&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$

More：$T^+T(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3)=T^+(T(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3))=T^+(c_1+2c_2x+3c_3x^2)$

$=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$，丢失c_0！

坐标：$\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=A^+A\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$

4. 核与值域

<u>定义</u>. 设T是V到W的线性映射，T的全体像的集合称为T的值域(range). 记作$\mathrm{Im}\,T$. 即

$$\mathrm{Im}\,T=\{T(v)\mid v\in V\}\subseteq W$$

所有被T映成零向量的向量的集合称为T的核(kernel)，记作$\ker T$. 即

$$\ker T=\{v\in V\mid T(v)=\theta\}\subseteq V$$

<u>定理</u> $\mathrm{Im}\,T$是W的子空间；$\ker T$是V的子空间.

Pf. 仅证$\mathrm{Im}\,T$. $\theta=T(\theta)$，$\therefore\theta\in\mathrm{Im}\,T$，$\mathrm{Im}\,T$非空.

① $\forall\, w_1,w_2\in\mathrm{Im}\,T$

一定$\exists\, v_1,v_2\in V$, s.t. $w_1=T(v_1)$, $w_2=T(v_2)$.

则$v_1+v_2\in V$，且$T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)=w_1+w_2$

$\therefore w_1+w_2\in\mathrm{Im}\,T$. 加法封闭

② $\forall\, w\in\mathrm{Im}\,T$. $k\in F$

$\exists\, v\in V$, s.t. $w=T(v)$.

则$kv\in V$，且$T(kv)=kT(v)=kw$

$\therefore kw\in\mathrm{Im}\,T$，数乘封闭.

非空，①，② $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,T$是线性空间W的子空间. #

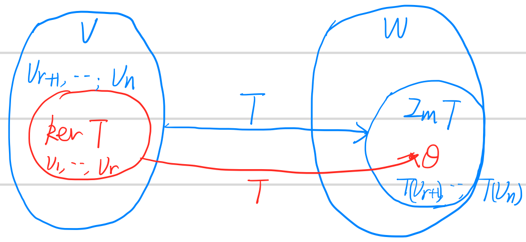
Remark：取V的一组基$v_1,v_2,\cdots,v_n$，则$\mathrm{Im}\,T=\{T(x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in F\}=\{x_1T(v_1)+\cdots+x_nT(v_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in F\}$

$\uparrow$ $T(v_1),T(v_2),\cdots,T(v_n)$的生成子空间.

<u>定义</u> $\dim\mathrm{Im}\,T$称为T的秩，$\dim\ker T$称为T的零度.

input space

定理 $T: V \to W$，线性映射，则 $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$



Pf. 设 $\dim V = n$，$\dim \ker T = r$

取 $\ker T$ 的一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_r$

将其扩充为V的一组基：$v_1, \cdots, v_r; v_{r+1}, \cdots, v_n$.

下证 $T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \cdots, T(v_n)$ 为 $\operatorname{Im} T$ 的一组基.

① $\forall\, w \in \operatorname{Im} T$，一定 $\exists\, v \in V$，s.t. $w = T(v)$.

设 $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$，则 $w = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \cdots + x_n T(v_n)$

而 $v_1, \cdots, v_r \in \ker T$，则 $T(v_1) = T(v_2) = \cdots = T(v_r) = \theta_W$

$\Rightarrow w = x_{r+1} T(v_{r+1}) + \cdots + x_n T(v_n)$，可由 $T(v_{r+1}), \cdots, T(v_n)$ 线性表出.

② 设 $x_{r+1} T(v_{r+1}) + \cdots + x_n T(v_n) = \theta_W$，则 $T(x_{r+1} v_{r+1} + \cdots + x_n v_n) = \theta_W$

$\therefore x_{r+1} v_{r+1} + \cdots + x_n v_n \in \ker T$

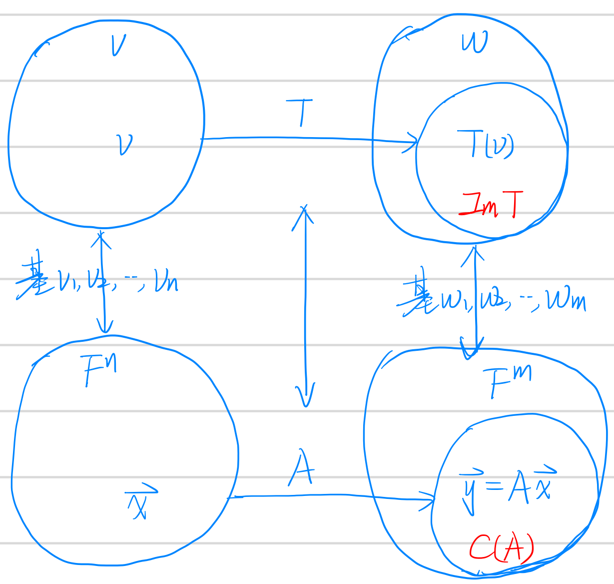
可设 $x_{r+1} v_{r+1} + \cdots + x_n v_n = x_1 v_1 + \cdots + x_r v_r$　　由 $\ker T$ 的基线性表出

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_1 v_1 + \cdots + x_r v_r - x_{r+1} v_{r+1} - \cdots - x_n v_n = \theta_V \\ \text{而 } v_1, \cdots, v_n \text{ 线性无关} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

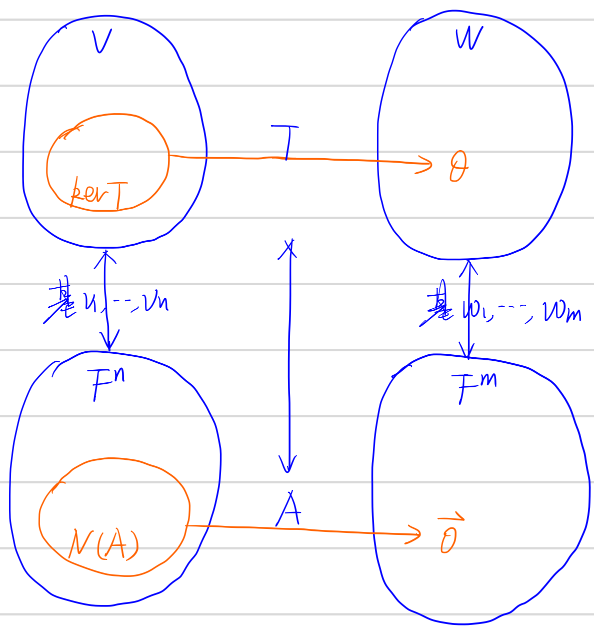
$\therefore T(v_{r+1}), \cdots, T(v_n)$ 线性无关

综合①,②，$T(v_{r+1}), \cdots, T(v_n)$ 为 $\operatorname{Im} T$ 一组基.

$\therefore \dim \operatorname{Im} T = n - r = \dim V - \dim \ker T$　　#.



$\dim \operatorname{Im} T = \dim C(A) = \operatorname{rank}(A)$



$\dim \ker T = \dim N(A) = n - \operatorname{rank}(A)$

5. 换基

数域F，线性空间V, W，线性映射 $T: V \to W$

取V的一组基：$v_1, v_2, \cdots, v_n$，W的一组基：$w_1, w_2, \cdots, w_m$

设T在基 $v_1, \cdots, v_n$; $w_1, \cdots, w_m$ 下的矩阵为A.

若取V的另一组基 $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n$，W的另一组基：$\hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_m$

则T在新的两组基下的矩阵 B = ?

定义 设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 和 $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n$ 为线性空间V的两组基，若

$$(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n) = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)C$$

第i列为 $\hat{v}_i$ 在基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 下的坐标

称C为由基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 到基 $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n$ 的**过渡矩阵**.

定理 已知 $v_1, \cdots, v_n$ 为V的一组基，且 $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n) = (v_1, v_2, \cdots, v_n)C$，则

$\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n$ 也为V的一组基 $\Leftrightarrow$ C可逆.

定理 线性空间V，从一组基 $v_1, \cdots, v_n$ 到另一组基 $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n$ 的过渡矩阵为C，若 $v \in V$ 在这两组基下坐标为 $\vec{x}$ 和 $\vec{\hat{x}}$，则

$$\vec{x} = C\vec{\hat{x}}$$

Pf.
$$\left.\begin{aligned} v &= (v_1, v_2, \cdots, v_n)\vec{x} \\ v &= (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n)\vec{\hat{x}} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)C\vec{\hat{x}} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{坐标唯一}]{\text{同一组基下}} \vec{x} = C\vec{\hat{x}}. \quad \#$$

定理 给定数域F上两个线性空间V和W，设V中从基 $v_1, \cdots, v_n$ 到基 $\hat{v}_1, \cdots, \hat{v}_n$ 的过渡矩阵为C，而W中从基 $w_1, \cdots, w_m$ 到基 $\hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_m$ 的过渡矩阵为D，若从V到W的线性映射T在基 $v_1, \cdots, v_n$; $w_1, \cdots, w_m$ 下的矩阵为A，则T在基 $\hat{v}_1, \cdots, \hat{v}_n$; $\hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_m$ 下的矩阵为 $B = D^{-1}AC$.

Pf. $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n) = (v_1, v_2, \cdots, v_n)C$ ①　　$(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_n) = (w_1, w_2, \cdots, w_n)D$ ②

$T(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (w_1, w_2, \cdots, w_m)A$ ③　　$T(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n) = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_m)B$ ④

$$\begin{cases} ④\text{左端} = T(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_n) \overset{①}{=} T\big((v_1, v_2, \cdots, v_n)C\big) = T(v_1, \cdots, v_n)C \overset{③}{=} (w_1, w_2, \cdots, w_m)AC \\ ④\text{右端} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_m)B \overset{②}{=} (w_1, w_2, \cdots, w_m)DB \end{cases}$$

$$\Rightarrow (w_1, w_2, \cdots, w_m)AC = (w_1, w_2, \cdots, w_m)DB \xrightarrow[\text{线性无关}]{w_1, \cdots, w_m} AC = DB \Rightarrow B = D^{-1}AC \quad \#.$$

注：$A \in M_{m\times n}$ 总可做奇异值分解：$A = U\Sigma V^T$，U, V为正交阵，取 $D = U$, $C = V$，则 $B = U^{-1}AC = \Sigma$.

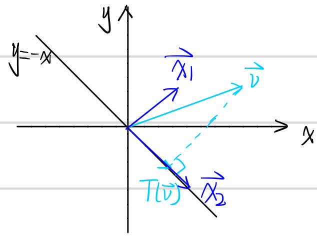
推论. 给定数域F上线性空间V，设V中从基 $v_1,\cdots,v_n$ 到基 $\tilde{v}_1,\cdots,\tilde{v}_n$ 的过渡矩阵为C，若V上线性变换T在基 $v_1,\cdots,v_n$ 下的矩阵为A，即 $T(v_1,\cdots,v_n)=(v_1,\cdots,v_n)A$，则T在基 $\tilde{v}_1,\cdots,\tilde{v}_n$ 下的矩阵为 $B=C^{-1}AC$.

即 $T(\tilde{v}_1,\cdots,\tilde{v}_n)=(\tilde{v}_1,\cdots,\tilde{v}_n)\,C^{-1}AC$

注：为线性空间V换基，线性变换T的矩阵做相似变换

若A可相似对角化，则可取合适的基，s.t. T的矩阵为对角阵.

例 数域F=$\mathbb{R}$. $V=W=\mathbb{R}^2$. T为$\mathbb{R}^2$上的线性变换，$\forall\, \vec{v}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$，$T(\vec{v})$为$\vec{v}$在直线$y=-x$上的投影.



① 取直线$y=-x$上一个向量 $\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，则投影矩阵

$$P=\frac{\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T}{\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}.\qquad \text{recall: } P=A(A^TA)^{-1}A^T$$

$T(\vec{v})=P\vec{v}$

② 取标准基 $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

$T(\vec{v}_1)=P\vec{v}_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\vec{v}_1-\frac{1}{2}\vec{v}_2$

$T(\vec{v}_2)=P\vec{v}_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\vec{v}_1+\frac{1}{2}\vec{v}_2$

i.e. $T(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=(\vec{v}_1,\vec{v}_2)\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2)A$ ，$(A=P)$

$\mathbb{R}^2$上线性变换T在基$\vec{v}_1,\vec{v}_2$下的矩阵为A. 满足$A=A^T$且$A^2=A$.

③ A为实对称阵，必可相似对角化. 投影矩阵，特征值：0，1

$\begin{cases}\text{rank}(A)=1. \text{ 不满秩，} A\vec{x}=\vec{0}\text{一定有非零解.} \Rightarrow \lambda_1=0\text{一定是特征值.}\\ \lambda_1+\lambda_2=\text{tr}\,A=1 \Rightarrow \lambda_2=1\end{cases}$

$\lambda_1=0$：求解 $A\vec{x}=\vec{0}$，得特征向量 $\vec{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=1$：求解 $(\lambda_2 I-A)\vec{x}=\vec{0}$，得特征向量 $\vec{x}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

④ 取 $C=[\vec{x}_1\ \ \vec{x}_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$，则 $C^{-1}AC=\Lambda=\begin{bmatrix}0 & \\ & 1\end{bmatrix}$

取$(\vec{\tilde{v}}_1,\vec{\tilde{v}}_2)=(\vec{v}_1,\vec{v}_2)C=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ 　　过渡矩阵为C

则T在新的基 $\vec{\tilde{v}}_1=\vec{x}_1$，$\vec{\tilde{v}}_2=\vec{x}_2$下的矩阵为对角阵 $C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}$.

新的基下：若$\vec{v}$的坐标为$\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 则$T(\vec{v})$坐标为$\begin{bmatrix}0 & \\ & 1\end{bmatrix}\vec{x}=\begin{bmatrix}0\\x_2\end{bmatrix}$