习题课材料（六）

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

记号: 如不加说明，我们只考虑实矩阵。对于矩阵 A, 它的四个基本子空间是列空间 $C(A)$, 零空间 $N(A)$, 行空间 $C(A^T)$ 和 A^T 的零空间 $N(A^T)$。

习题 1. 请构造以下满足条件的矩阵，或者指明为什么不存在满足条件的矩阵:

1. A,B 均为非零的正交投影矩阵，且 $A+B$ 仍是一个正交投影矩阵;
2. A,B 均为正交投影矩阵，然而 $A+B$ 并不是一个正交投影矩阵;
3. A,B,C 均为非对角的三阶正交投影矩阵，且 $A+B+C=I_3$。

习题 2. 假设 $A=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2.1\\3\\2\end{bmatrix}$。我们考虑方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解。显然，$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是一个非常接近正确答案的向量。

1. 注意, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有三行, 因此等于是在求解三个平面的交集。请将 $\boldsymbol{x}_0$ 向第一个平面 $2x_3=2.1$ 进行投影，得到 $\boldsymbol{x}_1$;
2. 请将 $\boldsymbol{x}_1$ 向第二个平面 $3x_2=3$ 进行投影，得到 $\boldsymbol{x}_2$;
3. 请将 $\boldsymbol{x}_2$ 向第三个平面 $x_1+x_3=2$ 进行投影，得到 $\boldsymbol{x}_3$;
4. 请将 $\boldsymbol{x}_3$ 再向第一个平面 $2x_3=2.1$ 进行投影，得到 $\boldsymbol{x}_4$;
5. (♡) 在本题这样的情形中，这样无限循环下去，是否会越来越接近正确答案?

注记: 实践中，我们想要解的方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可能十分巨大，比方说做 CT 扫描时，将人体看成 1000 个像素块（未知数），用 10000 条射线以不同的方式穿过（不同的线性方程），那么这等价于在 A 为 10000×1000 的时候求解线性方程组。可以想象，用 Gauss 消元法解决需要花费很久很久的时间，并不现实。所以我们需要利用 A 的特殊性质来想办法加速计算。

有时 A 确实有些很有趣的性质。注意，CT 扫描时，A 每一行对应着一条射线，每一列对应着一个待检测的像素块。然而，每条射线一般仅能穿过很极其有限的像素块，而完全不会碰到大多数像素块。因此 A 的每一行存在着大量的零。一个绝大多数元素都是零的矩阵，我们也称为稀疏矩阵。此时，是否有更快速地解方程的方法呢？我们这里介绍的方法叫做 Kaczmarz 方法。由于 A 是一个稀疏矩阵，每一行存在大量的零。因此投影计算非常快。所以实践中，可以采取这种 Kaczmarz 方法进行反复投影，直到足够接近正确答案为止。

习题 3. 考虑平面上的点 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\20\end{bmatrix}$。请用最小二乘法找到以下直线或曲线：

1. 找到平行于 x 轴的直线 $y=b$ 使得 $\sum\|y_i-b\|^2$ 最小；
2. 找到经过原点的直线 $y=kx$ 使得 $\sum\|y_i-kx_i\|^2$ 最小；
3. 找到直线 $y=kx+b$ 使得 $\sum\|y_i-(kx_i+b)\|^2$ 最小；
4. (♡) 找到抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 使得 $\sum\|y_i-(ax_i^2+bx_i+c)\|^2$ 最小。

习题 4. (♡)(最小二乘的统计应用)我们来研究这样一个问题：死刑到底能否降低凶杀率？为了排除社会文化，统计方式等额外因素的影响，我们考虑美国。考虑美国的一个好处是，社会文化、统计方式等各种因素相对统一，但是有的州有死刑，有的州没有死刑，这就给了研究死刑的影响提供了一个稍微可控的实验环境。

我们这里仅做一个极其简单地分析。已知德克萨斯州和宾夕法尼亚州有死刑，而纽约州，加州和麻省没有死刑。我们可以将这个信息记作向量 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，这里 1 代表有死刑，0 代表没有死刑。这五个州的凶杀率为 $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}4.6\\6.1\\2.9\\4.4\\2.0\end{bmatrix}$。我们考虑一个线性拟合模型 $y_i=kx_i+b$，也就是说我们想要从 $\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{u}$ 中解得 k,b，其中 $\boldsymbol{u}$ 是分量全是 1 的向量。显然，由于凶杀率并不仅仅由是否有死刑决定，因此方程是无解的，我们需要使用线性拟合的手法找到最小二乘解。如果我们计算发现 k 为负，则意味着允许死刑（x 值从 0 增加到 1）可以降低凶杀率（y 值下降）。

（死刑的影响是一个极具争议且比较复杂的话题，同时本题的数据量太小，并没有任何说服力，而且无法提供任何因果关系，仅仅提供了相关性。请读者不要仅仅根据此题的结果擅自下结论，保持独立思考的能力。有兴趣的读者可以搜索 Donohue 和 Wolfers 于 2006 年的文献，其中对若干著名的相关研究进行了介绍和解读。）

1. 请用最小二乘法估计出最佳的 k,b;

2. 求出没有死刑的州的凶杀率平均值，以及有死刑的州的凶杀率平均值。这二者和 k,b 有何关系?

3. 仅根据本题的计算，你猜测一个有死刑的国家，对比一个没有死刑的国家，凶杀率会更高还是更低?

习题 5. 对以下矩阵进行 QR 分解:

1. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

5. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$。

习题 6. 我们有矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$。求四维空间中超平面 $C(A)$ 的一个单位法向量（即求一个单位向量，其与 A 所有的列向量都正交)。

习题 7. 1. 如果 A 既是正交矩阵又是上三角矩阵，则 A 为对角阵，对角元为 ± 1。

2. 证明对于任意可逆矩阵 A，其 QR 分解 $A=QR$ 是唯一的。(注意我们要求 R 的对角元都大于零。)

习题 8. 令 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$ 为 $\mathbb{R}^5$ 的一组标准正交基。

1. 证明 $\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3),\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3),\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3)$ 为两两正交的单位向量;

2. 给以下向量生成的子空间找一组正交基: $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_5,\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4,2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$;

3. 考虑向 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5$ 生成的子空间进行投影的正交投影矩阵，用我们的向量 $\boldsymbol{a}_i$ 表示出来。

习题 9. 1. 对任意正交矩阵 Q，证明分块矩阵 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}Q & Q\\ Q & -Q\end{bmatrix}$ 仍旧是正交矩阵;

2. 令 $H_1=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$。令 $H_{2n}=\begin{bmatrix}H_n & H_n\\ H_n & -H_n\end{bmatrix}$。证明 H_{2^n} 是对称矩阵，它的列两两正交，且所有元素都是 ± 1。(该矩阵称为 Hadamard 矩阵，其列向量（或者行向量）即为高维的小波基。)

注记: 这里 H_{2^n} 的列向量组成了一组（非标准）正交基，其中每个向量的分量都是 ± 1，称为 Haar 小波基。它在图像处理，信息压缩等方面经常用到。

习题 10. 考虑 QR 分解的其它理解方法:

1. 考虑 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的列向量围成的平行四边形。我们可以做一个列操作，将第二列加上第一列的若干倍（几何上讲，这是一个错切变换)，使得平行四边形变成长方形。这对应着给 A 右乘哪个矩阵 R?

2. 考虑 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的列向量围成的平行四边形。找到一个正交矩阵 Q，使得 QA 对应的平行四边形的第一条边在 x_1 轴正半轴上，而第二条边在 x_1x_2 平面中 $x_2>0$ 的那个半平面。(这意味着对平行四边形进行旋转和翻转，直到把它挪到了所要求的的位置上。)

习题 11. 假设桌子上有一摞纸，但是这一摞纸是斜着堆起来的，构成了一个平行六面体。比方说，纸的相邻两边分别为向量 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-4\\3\\0\end{bmatrix}$，而纸摞起来的方向为 $\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$。

显然，斜着摞起来的纸看着很难受，拿起来也容易撒。我们希望将这摞纸理齐，换句话说，我们希望将非正交基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 变成正交基。由于一般来说已经有 $\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}_2$，所以我们只需要处理纸摞起来的方向 $\boldsymbol{a}_3$。

1. 首先，我们将这一摞纸拿起来，沿着 $\boldsymbol{a}_2$ 这条边在桌子上磕两下，再放回原处。此时 $\boldsymbol{a}_3$ 会沿着 $\boldsymbol{a}_1$ 的方向发生平移，得到 $\boldsymbol{b}_3$。请问平移了 $\boldsymbol{a}_1$ 的多少倍?

2. 现在，我们再将这一摞纸拿起来，沿着 $\boldsymbol{a}_1$ 这条边在桌子上磕两下，再放回原处。此时 $\boldsymbol{b}_3$ 会沿着 $\boldsymbol{a}_2$ 的方向发生平移，得到 $\boldsymbol{c}_3$。请问这次平移了 $\boldsymbol{a}_2$ 的多少倍?（注意，从 $\boldsymbol{a}_3$ 到 $\boldsymbol{c}_3$，这恰恰就是 Gram-Schmidt 正交化对 $\boldsymbol{a}_3$ 的处理方式。）

习题 12. (♡♡)假设我们统计了 5 个人的身高、体重、收入和受教育年数，记作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$。

1. 请找到向量 $\boldsymbol{v}$，使得 $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{a}_i$ 的每一个分量均为 $\boldsymbol{a}_i$ 对应的数据的平均值。该向量是否必须为单位向量?

2. 对任意两组数据 $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j$，定义其协方差为 $C_{ij}=(\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{a}_i)^T(\boldsymbol{a}_j-\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{a}_j)$；当 $i=j$ 时，我们称 C_{ii} 为 $\boldsymbol{a}_i$ 自身的方差。请找到矩阵 C 使得两组数据 $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j$ 之间的协方差为 $C_{ij}=\boldsymbol{a}_i^TC\boldsymbol{a}_j$。该矩阵 C 是否为正交矩阵？是否为对称矩阵?

3. 假设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 分别为 $\begin{bmatrix}1.6\\1.7\\1.8\\1.9\\2.0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}59\\59\\60\\61\\61\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1000\\1100\\1000\\900\\1000\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}16\\19\\16\\19\\19\end{bmatrix}$，请用协方差代替点积来进行一种变体的 Gram-Schmidt 正交化，使得得到的数据 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 两两协方差为零，且自身的方差均为 1。（在统计学和信息学中，变量之间的不相关与向量之间的正交有着很大的类比性。）