§3.4 向量组的线性相关性

1. 一般线性空间 V.

定义. V是数域F上的线性空间， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$. 若∃不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in F$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \theta \quad (*)$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关；否则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 （$*$ 只能推出 $k_1=\cdots=k_n=0$）

注. 若 $\beta=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$，称$\beta$是$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$的线性组合，或$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出.

几个简单结论:

(1) 包含 θ 的向量组一定线性相关. $\quad 1\theta + 0\cdot\alpha_2 + \cdots + 0\cdot\alpha_s = \theta$

(2) 单个向量线性无关 $\iff$ $\alpha \neq \theta$ （$k\alpha=\theta$ 只有零解 $k=0$）

(3). 若$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$的部分组$\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}\}$线性相关，则$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$线性相关.

Pf: ∃不全为0的数 $k_{i_1}\alpha_{i_1} + k_{i_2}\alpha_{i_2} + \cdots + k_{i_r}\alpha_{i_r} = \theta$ 其余向量系数取0，即得.

定理. 设V是线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$，$(n\geq 2)$ 则有：

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关 $\iff$ 其中必有一个向量α_i可由其余向量线性表出

Pf. "$\Rightarrow$". 若$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，则∃不全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_n$, s.t.

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \theta$$

不妨设 $k_i \neq 0$，则 $\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{k_n}{k_i}\alpha_n$

即α_i可由其余向量线性表出.

"$\Leftarrow$". 若∃α_i可由其余向量线性表出: $\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_n\alpha_n$.

则 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + (-1)\alpha_i + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s = \theta$

系数不全为0， ∴ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关. #.

定理. 线性空间V中，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，而$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关，则β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出，且表示方法唯一.

Pf. ① $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关: ∃不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n, l$, s.t.

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n + l\beta = \theta$$

若 $l=0$. 则∃不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ s.t. $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \theta$

则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关. 矛盾.

∴ $l \neq 0$. ∴ $\beta = -\frac{k_1}{l}\alpha_1 - \frac{k_2}{l}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{l}\alpha_n$. β可由$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表出.

② 假设有2种表出方法。

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n$$

相减：$(x_1-y_1)\alpha_1 + (x_2-y_2)\alpha_2 + \cdots + (x_n-y_n)\alpha_n = \theta$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Rightarrow x_1-y_1 = x_2-y_2 = \cdots = x_n-y_n = 0$. 表示方法唯一. #

定义. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是线性空间 V 的两组向量，若每个 α_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 都可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性表出，称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性表出；若两个向量组可以互相线性表出，称这两个向量组等价. 记作 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \sim \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$.

定理. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是线性空间 V 的两组向量，若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性表出，且 $n > m$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关.

Pf. $\because \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性表出

$\therefore$ 可设 $\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\beta_i$ $\quad j = 1, \cdots, n$. $(*)$. 令 $C = (c_{ij})_{m\times n}$

考虑 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \theta$. i.e. $\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j = \theta$ 是否有非零解

将 $(*)$ 代入，有：$\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\beta_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\right)\beta_i$

矩阵 C 的列数 n 大于行数 m. $\Rightarrow C\vec{x} = \vec{0}$ 有非零解. $\quad$ $C\vec{x}$ 的第 i 行

即 $\exists$ 不全为 0 的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, s.t. $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = 0$, $i = 1, \cdots, m$.

从而 $\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} 0\beta_i = \theta$.

$\therefore \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关. #

推论. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性表出，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，则 $n \le m$.

2. n 维向量空间 F^n

$\mathbb{R}^3$ 中几何解释 $(F = \mathbb{R}, n = 3)$：

① $\vec{\alpha_1}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \vec{\alpha_1} = \vec{0}$

② $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \vec{\alpha_1}$ 与 $\vec{\alpha_2}$ 共线

③ $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}$ 共面.

④ - - - - - - - - - 无关 $\Leftrightarrow$ - - - - - 不共面 $\Leftrightarrow \vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 基向量.

例. A为数域F上的n阶方阵，$\vec{\alpha}$为n维向量. 即$A\in M_n(F)$，$\vec{\alpha}\in F^n$. 且$A^{m-1}\vec{\alpha}\neq\vec{0}$，$A^m\vec{\alpha}=\vec{0}$.
证明：$\vec{\alpha}, A\vec{\alpha}, \cdots, A^{m-1}\vec{\alpha}$线性无关.

Pf. 设$k_1\vec{\alpha}+k_2A\vec{\alpha}+\cdots+k_mA^{m-1}\vec{\alpha}=\vec{0}$. 要证其只有零解$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.

$$A^{m-1}(k_1\vec{\alpha}+k_2A\vec{\alpha}+\cdots+k_mA^{m-1}\vec{\alpha})=k_1\underbrace{A^{m-1}\vec{\alpha}}_{\neq\vec{0}}+\underbrace{k_2A^m\vec{\alpha}+k_3A^{m+1}\vec{\alpha}+\cdots+k_mA^{2m-2}\vec{\alpha}}_{\text{每个}m\text{都为}\vec{0}}=\vec{0}\Rightarrow k_1=0$$

$$A^{m-2}(k_2A\vec{\alpha}+\cdots+k_mA^{m-1}\vec{\alpha})=k_2\underbrace{A^{m-1}\vec{\alpha}}_{\neq\vec{0}}+k_3\underbrace{A^m\vec{\alpha}}_{=\vec{0}}+\cdots+k_m\underbrace{A^{2m-3}\vec{\alpha}}_{=\vec{0}}=\vec{0}\Rightarrow k_2=0.$$

从此类推：$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.
$\therefore\ \vec{\alpha}, A\vec{\alpha}, \cdots, A^{m-1}\vec{\alpha}$线性无关. #

与方程组关系. $A=[\vec{\alpha_1}\ \vec{\alpha_2}\cdots\vec{\alpha_s}]_{n\times s}$

定理. n维向量$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots, \vec{\alpha_s}$线性相关（线性无关）$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$A\vec{x}=\vec{0}$有非零解（只有零解）
$\Leftrightarrow$ $N(A)$中有非零向量（$N(A)=\{\vec{0}\}$）$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)<s$（$\mathrm{rank}(A)=s$）

推论1. ($n=s$). n个n维向量$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots \vec{\alpha_n}$线性相关（线性无关）$\Leftrightarrow$ A不可逆（A可逆）

推论2. ($s>n$). F^n中任意s ($s>n$)个向量必定线性相关.（向量个数>维数） 举例.
Pf. $s>n$. 未知数# > 方程#. 一定有自由变量. $A\vec{x}=\vec{0}$一定有非零解.

推论3. 设$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots, \vec{\alpha_s}\in F^m$，$\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2}, \cdots, \vec{\beta_s}\in F^n$. 构造$s$个$m+n$维向量$\vec{\gamma_j}=\begin{bmatrix}\vec{\alpha_j}\\ \vec{\beta_j}\end{bmatrix}$，$j=1, \cdots, s$，则
$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots, \vec{\alpha_s}$线性无关 $\Rightarrow$ $\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}, \cdots, \vec{\gamma_s}$线性无关.
$\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}, \cdots, \vec{\gamma_s}$线性相关 $\Rightarrow$ $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots, \vec{\alpha_s}$线性相关.

Pf. 构造2个齐次线性方程组

$$[\vec{\alpha_1}\ \vec{\alpha_2}\cdots\vec{\alpha_s}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_s\end{bmatrix}=\vec{0}\quad(*1).\qquad[\vec{\gamma_1}\ \vec{\gamma_2}\cdots\vec{\gamma_s}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_s\end{bmatrix}=\vec{0}\quad(*2)\ (\text{更多方程})$$

(*2)前m个方程即为(*1). (*2)的解必为(*1)的解.
$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots, \vec{\alpha_s}$线性无关 $\Rightarrow$ (*1)仅有0解 $\Rightarrow$ (*2)仅有0解 $\Rightarrow$ $\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}, \cdots, \vec{\gamma_s}$线性无关.
$\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}, \cdots, \vec{\gamma_s}$线性相关 $\Rightarrow$ (*2)有非零解 $\Rightarrow$ (*1)有非0解 $\Rightarrow$ $\vec{\alpha_1}, \cdots, \vec{\alpha_s}$线性相关. #

注. 分量不一定要在最后添加，可添加在任意行. → 高维.

推论4. 对矩阵A做初等行变换，不改变其列向量间的线性相关性（已证）

§3.5 向量组的秩

1. 极大线性无关组

定义. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中,若存在 r 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关,再加进任一个向量 $\alpha_j\ (j=1,\cdots,s)$ 就线性相关,则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

注 (1) $\{\theta\}$ 无极大线性无关组.

(2) $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\}\sim\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 等价 (HW)

定理. 若 $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\ \alpha_{i_r}\}$ 与 $\{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_t}\}$ 都是 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的极大线性无关组,则 $r=t$.

Pf. 向量组 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_t}$ 可由向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出. (由注(2))
而 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_t}$ 线性无关
$\Rightarrow t\le r$

同理, $r\le t$. $\therefore r=t$. # 两个极大线性无关组有相同个数的向量.

F^n, 求极大线性无关组的方法. n 维向量 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$.

$$A=[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s]\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}(RREF).\ R=[\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_s]$$

设 $rank(A)=rank(R)=r$, 主元所在列 (pivot columns): $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列.

(1) $\vec{\beta}_{j_1},\vec{\beta}_{j_2},\cdots,\vec{\beta}_{j_r}$ 为 $\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_s$ 极大线性无关组.
$\vec{\alpha}_{j_1},\vec{\alpha}_{j_2},\cdots,\vec{\alpha}_{j_r}$ 为 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$ ....

(2) $\vec{\beta}_j=x_1\vec{\beta}_{j_1}+x_2\vec{\beta}_{j_2}+\cdots+x_r\vec{\beta}_{j_r}\iff\vec{\alpha}_j=x_1\vec{\alpha}_{j_1}+x_2\vec{\alpha}_{j_2}+\cdots+x_r\vec{\alpha}_{j_r}$, $j=1,2,\cdots,s$.

2. 向量组的秩

定义. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量个数 r 称为这个向量组的秩.
记作 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$. 规定 $r(\theta)=0$.