习题课材料（一）

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

习题 1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$，证明:

1. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解当且仅当 $b_1+b_2+b_3=0$.
2. 齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集是 $\{k\boldsymbol{x}_1, k\in\mathbb{R}\}, \boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$.
3. 当 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解时，设 $\boldsymbol{x}_0$ 是一个解，则解集是 $\{\boldsymbol{x}_0+k\boldsymbol{x}_1, k\in\mathbb{R}\}$.

习题 2. 令 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\end{bmatrix}$.

1. 求所有的 3×2 矩阵 X, 使得 $AX=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$.
2. 求一个 3×2 矩阵 X, 使得 $AX=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.
3. 求所有 3×2 矩阵 X, 使得 $AX=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

习题 3. 设 $A\in M_3(\mathbb{R})$, 考虑方程组 $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$. 已知 $\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}: c,d\in\mathbb{R}\right\}$ 是它所有的解; 请求出 A.

习题 4. 设 $\triangle ABC$ 是平面中的三角形，三边 BC, AC, AB 上的垂线分别记为 ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3. 用点积证明 ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 交于一点.

习题 5. 证明:

1. 设 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量都是 1，则 n 阶方阵 A 的各行元素之和为 1 当且仅当 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.
2. 若 n 阶方阵 A,B 的各行元素之和均为 1, 则 AB 的各行元素之和也均为 1.
3. 若 n 阶方阵 A,B 的各列元素之和均为 1, 则 AB 的各列元素之和也均为 1.

习题 6. (a) 设 2 阶方阵

$$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

由矩阵和向量的乘法给出 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 $f_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\boldsymbol{x}\mapsto R_\theta\boldsymbol{x}$.

(1) 证明: f_θ 是逆时针旋转角度 θ 的变换.

(2) 证明: 设 $\theta\neq k\pi$, 不存在非零向量 $\boldsymbol{x}$, 满足 $R_\theta\boldsymbol{x}=\pm\boldsymbol{x}$.

(3) 计算 R_θ^n, n 是整数.

(b) 设

$$H_\theta=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix},\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{bmatrix}.$$

(1) 证明: $H_\theta^2=I_2,H_\theta=I_2-2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$.

(2) 证明: $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{w},|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{w}|=1;H_\theta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v},H_\theta\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{w}$. 试分析变换 $\boldsymbol{x}\mapsto H_\theta\boldsymbol{x}$ 的几何意义.

(c) 证明: $R_{-\theta}H_\phi R_\theta=H_{\phi-\theta},H_\phi R_\theta H_\phi=R_{-\theta}$, 并分析其几何意义.

习题 7. 设 n 阶方阵

$$T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

利用初等变换证明: 存在分解式 $T=LU$, 其中 L 是下三角矩阵, U 是上三角矩阵. 据此求出 T^{-1}.

习题 8. 证明: 对角线元素全非零的上三角阵 U 可逆, 其逆矩阵 U^{-1} 也是上三角阵, 且 U^{-1} 的对角线元素是 U 的对角线元素的倒数.

习题 9 (♡). 假设 $i \neq j$. 我们把单位矩阵 I 的 (i,j) 项改成 1, 其他项保持不变, 这样得到的矩阵记作 E_{ij}. 单位矩阵 I 的 (i,i) 项和 (j,j) 项改成零, 再把 (i,j) 项和 (j,i) 项改成 1, 这样得到的矩阵记作 P_{ij}.

(a) 证明: 对于矩阵 $P_{ij}(i<j)$, 以下性质成立:

1. 若 $\forall i<k<j$, 则
   - $P_{ik}P_{ij} = P_{kj}P_{ik} = P_{ij}P_{kj}$;
   - $P_{ij}P_{ik} = P_{kj}P_{ij} = P_{ik}P_{kj}$;
   - $(P_{ik}P_{ij})^3 = I$.
2. 若 i,j,k,ℓ 互不相等，则
   - $P_{k\ell}P_{ij} = P_{ij}P_{k\ell}$;
   - $(P_{k\ell}P_{ij})^2 = I$.

(b) 对于任意两个矩阵 A,B, 我们定义 $[A,B] = AB - BA$.

1. 假设 i,j,k 两两不同, 计算 $[E_{ij},E_{jk}],[E_{ij},P_{jk}]$ 和 $[P_{ij},P_{jk}]$. (除生算外, 也可以直接考虑作为行操作或列操作, 两个矩阵的顺序调换后, 到底差别在哪里.)
2. 令 $D = \operatorname{diag}(d_1,...,d_n)$ 为对角矩阵; 假设 $i \neq j$, 计算 $[E_{ij},E_{ji}],[E_{ij},D]$ 和 $[P_{ij},D]$. (除生算外, 也可以直接考虑作为行操作或列操作, 两个矩阵的顺序调换后, 到底差别在哪里.)

习题 10 (♡).

1. 定义 $m \times n$ 阶实矩阵 $A = (a_{ij})$ 的范数为
$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$
证明:
   (a) $\|A\| \geq 0$; 且 $\|A\| = 0$ 当且仅当 $A = 0$,
   (b) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$,
   (c) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
   (d) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
2. 证明范数
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$
也满足性质 (a)-(d).