$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $A: m\times n$ 是 f 在标准坐标向量下的表示矩阵.

$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \cdots + x_n\vec{e_n}) = x_1 f(\vec{e_1}) + x_2 f(\vec{e_2}) + \cdots + x_n f(\vec{e_n})$

$= x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + \cdots + x_n\vec{a_n} = A\vec{x}$, $A = [\vec{a_1}\ \vec{a_2} \cdots \vec{a_n}] \in M_{m,n}$

命题 矩阵和向量的乘积 对向量的线性运算满足分配律

$$A(k_1\vec{x_1} + k_2\vec{x_2}) = k_1(A\vec{x_1}) + k_2(A\vec{x_2})$$

注: 由线性映射保持线性运算可证.

例. (1) 旋转变换 R_θ.

表示矩阵 $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$R_\theta(\vec{x}) = R_\theta\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{bmatrix}$$

(2) 反射变换 H_θ, 表示矩阵 $H_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{n,n}$

任意给定矩阵 $A \in M_{m,n}$

存在唯一线性映射 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

使 f 在标准坐标向量下的表示矩阵为 A.

$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = A\vec{x}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ \vdots \\ x_n - x_{n-1} \end{bmatrix}$ A: difference matrix

input: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1^2 \\ 2^2 \\ 3^2 \\ \vdots \\ n^2 \end{bmatrix}$, output: $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4-1 \\ 9-4 \\ \vdots \\ n^2-(n-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ \vdots \\ 2n-1 \end{bmatrix}$

完全平方数 奇数

第二章 解线性方程组

§2.1 线性方程组的不同解读

线性方程组：
linear equations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

m个方程
n个未知数

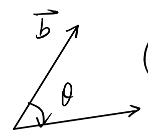
Matrix form：$A\vec{x} = \vec{b}$.

$A = (a_{ij})_{m\times n} = [\vec{c_1}\ \vec{c_2}\ \cdots \vec{c_n}] = \begin{bmatrix} \vec{r_1}^T \\ \vec{r_2}^T \\ \vdots \\ \vec{r_m}^T \end{bmatrix}$ 系数矩阵 coefficient matrix

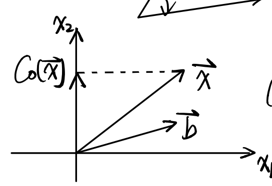
$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

例1 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \vec{r_1}^T \\ \vec{r_2}^T \end{array} \\ \begin{array}{cc} \vec{c_1} & \vec{c_2} \end{array} & \end{array}$

解读一. A 是某个线性变换在标准坐标向量下的表示矩阵

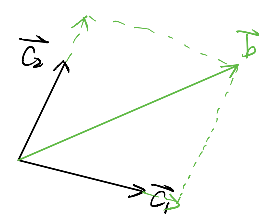


已知像 $\vec{b}$，求原像 $\vec{x}$



$\begin{cases} \text{有唯一解，例：旋转变换} \\ \text{无解，例：投影变换 } C_0: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \text{有无穷多解：若 } A\vec{x} = \vec{b} \text{ 且 } A\vec{x}' = \vec{b}\text{，则 } A(k_1\vec{x} + k_2\vec{x}') = k_1A\vec{x} + k_2A\vec{x}' = \underbrace{(k_1+k_2)}_{=1}\vec{b} \end{cases}$

解读二 A的列 $\vec{c_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$，$\vec{c_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$. $\quad A = [\vec{c_1}\ \ \vec{c_2}]$

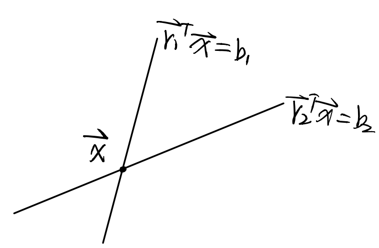


$A\vec{x} = \vec{b} \iff x_1\vec{c_1} + x_2\vec{c_2} = \vec{b}$.

已知 $\vec{c_1}$ 及 $\vec{c_2}$，将 $\vec{b}$ 用 $\vec{c_1}$ 及 $\vec{c_2}$ 线性表出，求组合系数 x_1, x_2

有唯一解、无穷多解、无解.

解读三 $A = \begin{bmatrix} \vec{r_1}^T \\ \vec{r_2}^T \end{bmatrix}$. $\quad A\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{bmatrix} \vec{r_1}^T\vec{x} \\ \vec{r_2}^T\vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 内积



已知两条直线 $\vec{r_1}^T\vec{x} = b_1$ 和 $\vec{r_2}^T\vec{x} = b_2$

求它们的交点 $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

有唯一解、无穷多解、无解.

例2 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ， $A\vec{x}=\vec{b}$ ， $A\vec{x}=x_1\vec{c_1}+x_2\vec{c_2}+x_3\vec{c_3}=\begin{bmatrix} \vec{r_1}^T\vec{x} \\ \vec{r_2}^T\vec{x} \\ \vec{r_3}^T\vec{x} \end{bmatrix}$

① $A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 线性变换. 已知像 $\vec{b}$，求原像 $\vec{x}$

② column picture

空间向量 $\vec{b}$ 可否写成 A 的列向量 $\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}$ 的线性组合？求组合系数 x_1, x_2, x_3

③ row picture

$\vec{r_i}^T\vec{x}=b_i$，$i=1,2,3$ 为3个平面方程，求交点 $\vec{x}$.

齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$

定义 线性方程组(*)中，若常数项全为0，即 $b_i=0$, $i=1,2,\cdots,m$，则称为齐次线性方程组

否则，称为非齐次线性方程组.

注：齐次线性方程组显然有解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，即 $\vec{x}=\vec{0}$. 称为零解

① 线性映射 $f(\vec{x})=A\vec{x}$，（求 $\vec{x}$, s.t. $f(\vec{x})=A\vec{x}=\vec{0}$）

由线性映射的性质：$f(\vec{0})=\vec{0}$. 故 $\vec{x}=\vec{0}$ 为 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的一个解.

② row picture： $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{r_1}\cdot\vec{x}=0 \\ \vec{r_2}\cdot\vec{x}=0 \\ \vdots \\ \vec{r_m}\cdot\vec{x}=0 \end{cases}$ each row of (*): a plane

每行所代表的平面都经过原点 $\vec{0}$

∴ 所有平面交点包含 $\vec{x}=\vec{0}$. 即 $\vec{x}=\vec{0}$ 为 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的一个解.

③ column picture： $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow x_1\vec{c_1}+x_2\vec{c_2}+\cdots+x_n\vec{c_n}=\vec{0}$

$\vec{x}=\vec{0}$：组合系数全为0，显然 $\vec{x}=\vec{0}$ 为一个解

§2.2 高斯消元法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

Matrix form: $A\vec{x} = \vec{b}$

m equations, n unknowns.

<u>例 1</u>

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 & ① \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 & ② \\ 2x_1 + x_2 \qquad = 5 & ③ \end{cases}$$

消元法

Step 1. 消去②③中的 x_1 项，仅剩①中含 x_1

$(-3)\times① + ② \to ②$: $4x_2 + x_3 = 2$ ②'

$(-1)\times① + ③ \to ③$: $2x_2 - x_3 = 4$ ③'

则

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 & ① \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 & ② \\ 2x_1 + x_2 \qquad = 5 & ③ \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{方程组}]{\text{同解}} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 & ① \\ \quad 4x_2 + x_3 = 2 & ②' \\ \quad 2x_2 - x_3 = 4 & ③' \end{cases}$$

Step 2. 交换②'与③'，得同解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 & ① \\ \quad 2x_2 - x_3 = 4 & ②'' \\ \quad 4x_2 + x_3 = 2 & ③'' \end{cases}$$

Step 3. 消去③''中的 x_2 项.

$(-2)\times②'' + ③'' \to ③''$: $3x_3 = -6$ ③'''.

Step 4. $\frac{1}{3}\times③'''$: $x_3 = -2$

同解方程组:

$$\begin{cases} \boxed{2x_1} - x_2 + x_3 = 1 & \Rightarrow x_1 = 2 \\ \quad \boxed{2x_2} - x_3 = 4 & \Rightarrow x_2 = 1 \\ \qquad \boxed{x_3} = -2 & \Rightarrow x_3 = -2 \end{cases}$$

阶梯形 (通过 forward elimination)

自下而上反解出每行第一个非零元

back substitution (回代)

定义 将(※)中的系数按顺序写成矩形的表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

线性方程组 ⟺ 增广矩阵

称为(※)的系数矩阵(coefficient matrix)和增广矩阵(augmented matrix)

A $\qquad\qquad$ $[A\ \vec{b}]$

对线性方程组进行消元法，相当于对增广矩阵作如下变换：

定义 矩阵的行初等变换

① 用一个非零数乘矩阵的某一行.

② 将一行的k倍加到另一行上.

③ 交换矩阵中两行的位置.

注：初等行变换过程是可逆的，变换前后的两个方程组同解.

例.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 9x_2 - 10x_3 = 2 \end{cases}$$

augmented matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \\ 3 & 9 & -10 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-3)r_1+r_3\to r_3]{(-2)r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}r_3\to r_3]{\frac{1}{7}r_2\to r_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)r_2+r_3\to r_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot

阶梯形，每行第1个非零元(主元)以下的元素全为0.

得同解方程组：$\begin{cases} \boxed{x_1}+3x_2-5x_3=-1 \\ \boxed{x_3}=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1}-5x_3=-1-3x_2 \\ \boxed{x_3}=1 \end{cases}$

x_2 为自由变量(free variable)，放到等号右边，可自由取值.

解得，$\begin{cases} x_1=4-3k \\ x_2=k \\ x_3=1 \end{cases}$ (通解)，k 为指定数域中的任意常数. 无穷多解

高斯消元法 (Gaussian Elimination)

不妨设 $a_{11}\neq 0$. (否则，总可以通过换行，使 $a_{11}\neq 0$)

Step 1 利用第一行，将其余各行的 x_1 系数消为0 (第2种初等行变换)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' & b_2' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}' & \cdots & a_{mn}' & b_m' \end{bmatrix}$$

若 $x_2,\cdots,x_m$ 已知，可由第一行求出 x_1

Step 2 若 $a_{22}'=a_{32}'=\cdots=a_{m2}'=0$，则 x_2 为自由变量，继续考察下一列

直到找到最小的列标 j_2，s.t. $a_{2j_2}', a_{3j_2}',\cdots,a_{mj_2}'$ 不全为0.

总可以通过行变换，将 j_2 列的 $2\sim m$ 行非0元换到第2行，不妨设 $a_{2j_2}'\neq 0$.

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & a_{1,j_2} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & a_{2,j_2}' & \cdots & a_{2n}' & b_2' \\ 0 & \cdots & a_{3,j_2}' & \cdots & a_{3n}' & b_3' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{m,j_2}' & \cdots & a_{mn}' & b_m' \end{bmatrix}$$

Step 3 利用第2行及第2种初等行变换，将 j_2 列的后 $m-2$ 行全消为0.

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & a_{1,j_2} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & \boxed{a_{2,j_2}'} & \cdots & a_{2n}' & b_2' \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{3n}'' & b_3'' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn}'' & b_m'' \end{bmatrix}$$

当 $x_{j_2+1},\cdots,x_n$ 已知时，可由第2个方程求出 x_{j_2}.

类似地，可找出 j_3，并利用第3行方程求解 x_{j_3}.

重复以上过程，得：

$$\begin{bmatrix} \boxed{c_{11}} & \cdots & c_{1,j_2} & \cdots & c_{1,j_r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & \boxed{c_{2,j_2}} & \cdots & c_{2,j_r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \boxed{c_{r,j_r}} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

阶梯状

前r行，每行第一个非零元为主元

利用前r行分别求出 $x_1, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$

r+1行常数项有可能非0.

$c_{11} \neq 0$, $c_{2j_2} \neq 0$, $\cdots$, $c_{r,j_r} \neq 0$.　　n个未知数，r个主元

(1) 若 $d_{r+1} \neq 0$，无解

(2) 若 $d_{r+1} = 0$，有解

① $r=n$. 无自由变量，$j_i = i$，$i=2,3,\cdots,n$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n \end{cases}$$

$c_{ii} \neq 0$, $i=1,2,\cdots,n$

由最后一个方程开始

由下往上依次求出 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$

有唯一解.

② $r<n$. $n-r$个自由变量（放到等号右边）

将 $n-r$ 个自由变量分别记为 $x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{1,j_2}x_{j_2} + \cdots + c_{1,j_r}x_{j_r} = d_1 - c_{1,j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{1,j_n}x_{j_n} \\ \qquad c_{2,j_2}x_{j_2} + \cdots + c_{2,j_r}x_{j_r} = d_2 - c_{2,j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{2,j_n}x_{j_n} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad c_{r,j_r}x_{j_r} = d_r - c_{r,j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{r,j_n}x_{j_n} \end{cases}$$

任意给定自由变量的一组值，都可唯一解出 $x_1, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$.

无穷多解