§2.5 逆矩阵

1. 概念及性质

<u>定义</u>. 设A是n阶方阵，若∃n阶方阵B, s.t. $A\overset{\text{right inverse}}{B}=\overset{\text{left inverse of }A}{B}A=I$，则称A是可逆的(invertible)或非奇异的(non singular)，B是A的逆矩阵；否则，称A是不可逆的。

<u>定理</u>. 若A既有左逆B又有右逆C，即 $BA=I$，$AC=I$，则 $B=C$.

Pf. $B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$. #

<u>定理</u>. 若A可逆，则A的逆矩阵唯一.

Pf. 设B, C都是A的逆矩阵，则 $BA=AC=I \Rightarrow B=C$. #

Remark: 由逆矩阵的唯一性，可记A的逆矩阵为 A^{-1}，即 $A^{-1}A=AA^{-1}=I$.

<u>性质</u> 设A是n阶方阵

(1) 若A可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

(2) 若A, B都可逆，则AB也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 穿脱原理.

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 是s个n阶可逆矩阵，则 $A_1A_2\cdots A_s$ 也可逆，且 $(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}A_{s-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.

Pf. (1) $A^{-1}A=AA^{-1}=I$

(2) 令 $C=B^{-1}A^{-1}$，则

$$\begin{cases} (AB)C=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I \\ C(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}B=I \end{cases}$$

$\Rightarrow$ AB可逆，且 $(AB)^{-1}=C=B^{-1}A^{-1}$. #

<u>定理</u>. 若方阵A可逆，则线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解 $\vec{x}=\overset{A^{-1}\text{ brings }\vec{b}\text{ back to }\vec{x}}{A^{-1}}\vec{b}$

Pf. (1) 先验证 $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ 是 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解

$\because$

$$A\vec{x} = A(A^{-1}\vec{b}) = (AA^{-1})\vec{b} = I\vec{b} = \vec{b}$$

$\therefore$ $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ 是一组解.

(2) 再证唯一性.

设 $\vec{x_0}$ 为一组解, 即 $A\vec{x_0} = \vec{b}$

则 $A^{-1}(A\vec{x_0}) = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x_0} = A^{-1}\vec{b}$. #.

<u>推论</u> 若方阵 A 可逆, 则齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 只有零解 $\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$.

Remark: 若 $A\vec{x} = \vec{0}$ 有非零解 (无穷多解), 则 A 不可逆. (No matrix can bring $\vec{0}$ back to $\vec{x}$)

<u>例</u> 对角矩阵 $A = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$. A 的可逆条件及 A^{-1}?

解. 设 $AB = I$. 试求解 B. 令 $B = \begin{bmatrix} \vec{b_1}^T \\ \vec{b_2}^T \\ \vdots \\ \vec{b_n}^T \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} \vec{e_1}^T \\ \vec{e_2}^T \\ \vdots \\ \vec{e_n}^T \end{bmatrix}$, 其中 $\vec{e_i}^T = [0, \cdots, 0, \overset{i\text{-th}}{1}, 0, \cdots, 0]$.

则 $AB = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b_1}^T \\ \vec{b_2}^T \\ \vdots \\ \vec{b_n}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\vec{b_1}^T \\ d_2\vec{b_2}^T \\ \vdots \\ d_n\vec{b_n}^T \end{bmatrix}$ A 左乘在 B 上, 相当于在 B 的 i 行上乘 d_i, $i = 1, 2, \cdots, n$

令 $AB = I$, 即 $d_i\vec{b_i}^T = \vec{e_i}^T$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

上式有解当且仅当 $d_i \neq 0$, $i = 1, \cdots, n$.

此时, $\vec{b_i}^T = \frac{1}{d_i}\vec{e_i}^T = [0, \cdots, 0, \overset{\text{第}i\text{个分量}}{1/d_i}, 0, \cdots, 0]$

即 $B = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & & \\ & 1/d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/d_n \end{bmatrix}$, 易验证 $BA = I$.

则 A 的可逆条件为: $d_i \neq 0$, $i = 1, \cdots, n$. 此时, $A^{-1} = B$.

<u>例</u> 初等矩阵

(1) $E_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$, $(\lambda \neq 0)$. $E_i(\frac{1}{\lambda}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\lambda} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

可验证: $E_i(\lambda)E_i(\frac{1}{\lambda}) = E_i(\frac{1}{\lambda})E_i(\lambda) = I \Rightarrow E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\frac{1}{\lambda})$

(2) $E_{ij}(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \mu \cdots & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$, $E_{ij}(-\mu) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\mu \cdots & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

可验证: $E_{ij}(\mu)E_{ij}(-\mu) = E_{ij}(-\mu)E_{ij}(\mu) = I \Rightarrow E_{ij}(\mu)^{-1} = E_{ij}(-\mu)$

(3) $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$. 初等矩阵都是可逆的,且其逆矩阵仍是初等矩阵.

2. Gauss-Jordan Elimination

已知 $A \in M_n$, 求解 $B \in M_n$, s.t. $AB = I$. 再验证 $BA = I$ (可省,后面证明)

设 $B = [\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n]$, $I = [\vec{e}_1\ \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_n]$, 则

$AB = I \Rightarrow A[\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n] = [\vec{e}_1\ \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_n]$

$\Rightarrow A\vec{x}_j = \vec{e}_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 一次性求解这n个线性方程组?

例. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $n=3$. 解 $A\vec{x}_1 = \vec{e}_1$, $A\vec{x}_2 = \vec{e}_2$, $A\vec{x}_3 = \vec{e}_3$.

augmented matrix: $[A \mid \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3] = [A \mid I]$ 3个方程组一起求解

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \Leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2r_1 + r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2 + r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{4}{3}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

阶梯形. echelon form

3个主元,有唯一解

再进行Jordan过程.

$$\xrightarrow[\frac{3}{4}r_3 + r_1 \to r_1]{\frac{3}{2}r_3 + r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \boxed{3} & 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{4}{3}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{3}r_2 + r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{3} & 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{4}{3}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}r_2 \;\; \frac{3}{4}r_3]{(-1)r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right] = [I \mid \vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \vec{x}_3] = [I \mid B]$$

reduced row echelon form

Remark: The inverse of a band matrix is generally a dense matrix.

3. 矩阵可逆的条件

定理 设 $A \in M_n$, 若 A 有 n 个主元, 则 A 可逆

Pf. Step 1. 考虑 $AB = I$. 令 $B = [\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n]$, $I = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_n]$

则 $AB = I \Leftrightarrow A\vec{x}_j = \vec{e}_j$, $j = 1, \cdots, n$

$\because$ A 有 n 个主元, $\therefore$ $A\vec{x}_j = \vec{e}_j$ 有唯一解, $j = 1, 2, \cdots, n$

即 $AB = I$ 有唯一解, $\therefore$ A 至少有右逆 B.

Step 2. 由 Gauss-Jordan elimination 过程知:

若 A 有 n 个主元, 则 A 可经过一系列的初等行变换变成 I.

即 $\exists$ 初等矩阵 $E_1, E_2, \cdots, E_s$, s.t. $E_s \cdots E_2 E_1 A = I$.

令 $C = E_s \cdots E_2 E_1$, 则有 $CA = I$, 即 A 有左逆 C.

Step 3. A 即有左逆 C, 又有右逆 B, 则 $B = C$; 即 A 可逆, 且 $B = C = A^{-1}$. #

定理 若 A 有右逆 B, 即 $AB = I$, 则 A 有 n 个主元.

Pf. 反证法.

Step 1. 若 A 没有 n 个主元, 则 $A \xrightarrow[\text{elimination}]{\text{Gaussian}} \hat{A}$, 且 $\hat{A}$ 中至少有一行元素全为 0.

Step 2. 即 $\exists$ 可逆矩阵 C (一系列初等矩阵的乘积), s.t. $CA = \hat{A}$

Step 3. $C = CI = C(AB) = (CA)B = \hat{A}B$.

$\hat{A}$ 中有零行, $\therefore$ C 中也至少有一行全为 0.

Step 4. 可逆矩阵 C 中一定没有零行. 否则与 $CC^{-1} = I$ 矛盾.

$\therefore$ A 有 n 个主元. #

推论：(1) $A\in M_n$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ A 有 n 个主元 $\Longleftrightarrow$ $A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow$ $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解
(A 为方阵)

B是A的右逆

(2) 若 $AB=I$，则 A 可逆，且 $BA=I$，$A^{-1}=B$

(3) 若 $BA=I$，由(2)，有 $B^{-1}=A$ $\Rightarrow$ A 可逆，且 $A^{-1}=(B^{-1})^{-1}=B$

B是A的左逆

只需验证有左逆或右逆即可

定理　A 可逆 $\Longleftrightarrow$ A 可表示成有限个初等矩阵的乘积

Pf："$\Longrightarrow$" A 可逆，则 A 有 n 个主元、

由Gauss-Jordan过程，知：

$\exists$ 初等矩阵 $E_1, E_2, \cdots, E_s$，s.t. $E_s\cdots E_2E_1A=I$

$\therefore$ $A=(E_s\cdots E_2E_1)^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_s^{-1}$

初等矩阵的逆仍是初等矩阵． $\therefore$ A 可表示成有限个初等矩阵的乘积

"$\Longleftarrow$" 初等矩阵可逆，而可逆矩阵的乘积仍可逆． #

若 A 可逆：

(1) 求 A^{-1}：　$[A\,|\,I]\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}}[I\,|\,A^{-1}]$，即 $A^{-1}[A\,|\,I]=[I\,|\,A^{-1}]$

(2) 线性方程组：$A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解 $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$，　$[A\,|\,\vec{b}]\xrightarrow{\text{行}}[I\,|\,\vec{x}]=[I\,|\,A^{-1}\vec{b}]$

$A^{-1}[A\,|\,\vec{b}]=[I\,|\,A^{-1}\vec{b}]$

(3) 若 $AX=B$，求矩阵 X．

A 可逆 $\Rightarrow$ $X=A^{-1}B$．　无需先求 A^{-1}，再算 $A^{-1}B$．

对 $[A\,|\,B]$ 作初等行变换，当 A 变成 I 时，B 则变为 X．

$A^{-1}[A\,|\,B]=[I\,|\,A^{-1}B]=[I\,|\,X]$．即 $[A\,|\,B]\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}}[I\,|\,X]$

(4) 若 $XA=B$，求矩阵 X．

右乘一系列初等矩阵，即作列变换

A 可逆 $\Rightarrow$ $X=BA^{-1}$．　$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}A^{-1}=\begin{bmatrix}I\\BA^{-1}\end{bmatrix}$，即 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{列变换}]{\text{初等}}\begin{bmatrix}I\\X\end{bmatrix}$

对 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ 作一系列初等列变换，当 A 变为 I 时，B 则变为 X．