13周习题课备选

2020年12月8日 星期二　上午9:22

(习题七 2019)

1. A 是 n 阶方阵，根据 $r(A)$ 的取值，分析 $r(A^*)$

矩阵秩的另一种等价定义：存在一个 r 阶子式非0，则矩阵的秩为 r.（解方程时所得到的主元行与主元列所构成的那个子方阵，即可作为一个 r 阶子式）

分三种情况：

(1) $r(A)=n$. A 可逆 $A^*=|A|A^{-1}$ 也可逆. $r(A^*)=n$

(2) $r(A)=n-1$，则 A 存在一个 $n-1$ 阶子式非0，因此 A 有一个代数余子式非0，$A^*\neq 0$ $r(A^*)>0$，另 $\underline{AA^*=|A|I_n=0}$ 则 $\underline{r(A^*)\leq 1}$

$\therefore r(A^*)=1$

$0=r(AA^*)\geq r(A)+r(A^*)-n$

$r(A^*)\leq n-r(A)=1$

(3) $r(A)<n-1$. 则 A 的所有 $n-1$ 阶子式为0. $A^*=0$

$r(A^*)=0$

(习题七 2019)

2. 设 A 是 n 阶实方阵，求证：存在充分小的 $t>0$ 使得 $A+tI_n$ 是可逆的。

代数学基本定理：$f(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n$ 是关于 t 的 n 次多项式，系数 a_i 为复数，$a_0\neq 0$，$f(t)=0$ 恰有 n 个复根.

$A+tI_n$ 可逆 $\Leftrightarrow |A+tI_n|\neq 0$ 根据 Big 公式 $f(t)=t^n+\cdots$ 是关于 t 的多项式，由代数学基本定理 $f(t)=0$ 至多有 n 个实根，因此总可以找到充分小的 t_0，使得 $f(t_0)\neq 0$，$A+t_0I_n$ 可逆。

(习题七.2019)

3. A B 是 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵. $(AB)^*=B^*A^*$

(1) A B 都可逆时：

$$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}=|B|B^{-1}|A|A^{-1}=B^*A^*$$

(2) A 或 B 不可逆时.

利用上题结论，$\exists$ 开区间 $(0,\delta)$，$\forall t\in(0,\delta)$ $A+tI_n$ 与 $B+tI_n$ 同时可逆，因此 $[(A+tI_n)(B+tI_n)]^*=(B+tI_n)^*(A+tI_n)^*$，这个矩阵等式共有 n^2 项，且各项都是关于 t 的多项式函数，连续。令 $t\to 0$ 得 $(AB)^*=B^*A^*$。

4. (1) A 为 n 阶实方阵，且 $A^2=I_n$，证明 A 可对角化.

(2) 找到所有满足 $A^2=I_n$ 的2阶实方阵。

A 可对角化的充要条件 $\Leftrightarrow$ 存在 n 个线性无关的特征向量

属于不同特征值的特征向量相互线性无关.

则若 A 有 n 个不同的特征值. A 可对角化

(1) 由 $A^2=I_n$ 知，A 的特征值只能为 -1 或 1，令

$$V_\lambda=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax=\lambda x\}$$

则有 $V_1\cap V_{-1}=\{0\}$，又 $\because$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$

$$A\left(\frac{x+Ax}{2}\right)=\frac{x+Ax}{2}\in V_1$$

$V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\}$

则有 $V_1 \cap V_{-1} = \{0\}$，又：$\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \frac{x+Ax}{2} + \frac{x-Ax}{2} \in V_1 + V_{-1}$$

$$A\left(\frac{x+Ax}{2}\right) = \frac{x+Ax}{2} \in V_1$$

$$A\left(\frac{x-Ax}{2}\right) = \frac{Ax-x}{2} = \frac{x-Ax}{2} \in V_{-1}$$

所以有 $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_{-1}$，分别取 V_1 的一组基 $\{v_1, \cdots, v_s\}$ 和 V_{-1} 的一组基 $\{v_{s+1}, \cdots, v_n\}$，令 $P = [v_1, \cdots, v_n]$

则 $A = P\begin{bmatrix} I_s & \\ & -I_{n-s} \end{bmatrix} P^{-1}$

(2) 由(1)知矩阵A的两个特征值有三种情况.

(a) 全为1，此时 $A = I_2$

(b) 全为-1，此时 $A = -I_2$

(c) 1,和-1，此时 $A = P\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}P^{-1}$

P为所有2阶可逆矩阵。

5. A为3阶实矩阵，且有三个实特征值. $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.
$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > 0$，$u_i$ 为 λ_i 对应的特征向量

$V = span\{u_2, u_3\}$ $W = span\{u_3\}$

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus V$，证明以下极限存在，并求出

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^{-n} A^n x$$

(2) $\forall y \in V \setminus W$. 证明以下极限存在. 并求出.

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_2^{-n} A^n y$$

(3) 证明对 $\forall$ 非0向量 z，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \|A^n z\|}{n}$$ 存在.

且只能在 $\{\log|\lambda_i| : i=1,2,3\}$ 中取值。

(1) $\{u_1, u_2, u_3\}$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基底. 设

$$x = t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3$$

由于 $x \notin V$，则有 $t_1 \neq 0$ 从而.

$$\lambda_1^{-n} A^n x = \lambda_1^{-n}(\lambda_1^n t_1 u_1 + \lambda_2^n t_2 u_2 + \lambda_3^n t_3 u_3)$$

$$= t_1 u_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n t_2 u_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^n t_3 u_3$$

$$\to t_1 u_1$$

(2) $\{u_2, u_3\}$ 构成V的一组基底，设

$$y = a u_2 + b u_3$$

由于 $y \notin W$，则 $a \neq 0$，

$$\lambda_2^{-n} A^n y = \lambda_2^{-n}(\lambda_2^n a u_2 + \lambda_3^n b u_3)$$

$$= a u_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^n b u_3$$

$$\to a u_2$$

$$\log \|A^n x\| = \log \|\lambda_1^n t_1 u_1 + \lambda_2^n t_2 u_2 + \lambda_3^n t_3 u_3\|$$

$$= \log \left\| \lambda_1^n \left(t_1 u_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n t_2 u_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^n t_3 u_3 \right) \right\|$$

$= au_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^n bu_3$

$\to au_2$

(3) 由(1)(2)且 W 为 λ_3 的特征子空间知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\|A^n z\|}{n} = \begin{cases} \log|\lambda_1| & z\in\mathbb{R}^3\setminus V \\ \log|\lambda_2| & z\in V\setminus W \\ \log|\lambda_3| & z\in W\setminus\{0\} \end{cases}$$

$= \log\|\lambda_1^n(t_1u_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n t_2u_2 + (\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^n t_3u_3)\|$

$= \log|\lambda_1^n|\ \|t_1u_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n t_2u_2 + (\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^n t_3u_3\|$

$= \frac{\log|\lambda_1|^n + \log\|\cdot\|}{n}$

$= \log|\lambda_1| + \frac{\log\|\circ\|}{n}$

一 求以下矩阵的奇异值分解：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(2) $A = uv^T$，其中$u\in\mathbb{R}^m$, $v\in\mathbb{R}^n$, $\|u\| = \|v\| = 1$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

注记：(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

.

(3)这是一个列标准正交阵；

(4)这是一个实对称阵；注意特征值和奇异值的关系(特征值的绝对值是奇异值). 设A是n阶实对称阵，满足$Q^TAQ = diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$，其中$r = rank(A)$，$Q = (q_1,\cdots,q_n)$是正交阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_s > 0$, $\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_r < 0$，则$A = U\Sigma V^T$，其中

$$U = Q, \Sigma = diag(|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_r|,0,\cdots,0), V = (q_1,\cdots,q_s,-q_{s+1},\cdots,-q_r,q_{r+1},\cdots,q_n).$$

(5)这是一个反对称阵，注意特征值和奇异值的关系(特征值的模长是奇异值).

二 设$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$的奇异值分解是$A = U\Sigma V^T$，满足$U = (u_1,\cdots,u_m)$是$m$阶正交矩阵，$V = (v_1,\cdots,v_n)$是$n$阶正交矩阵，$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$，$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r > 0$，其中$r = rank(A)$.

(1) 证明$\|Av_1\| = \sigma_1 = max_{\|v\|=1}\|Av\|$.

(2) 证明$\|Av_2\| = \sigma_2 = max_{v\perp v_1,\|v\|=1}\|Av\|$.

证明：(1) $\forall v\in\mathbb{R}^n$, $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$. 因此，

二 设$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$的奇异值分解是$A=U\Sigma V^T$，满足$U=(u_1,\cdots,u_m)$是$m$阶正交矩阵，$V=(v_1,\cdots,v_n)$是$n$阶正交矩阵，$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$，$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0$，其中$r=rank(A)$.

(1) 证明$\|Av_1\|=\sigma_1=max_{\|v\|=1}\|Av\|$.

(2) 证明$\|Av_2\|=\sigma_2=max_{v\perp v_1,\|v\|=1}\|Av\|$.

证明：(1) $\forall v\in\mathbb{R}^n$, $v=c_1v_1+\cdots+c_nv_n$. 因此，

$$\|Av\|^2=v^TA^TAv=c_1^2\lambda_1+\cdots+c_r^2\lambda_r\leq(c_1^2+\cdots+c_r^2)\lambda_1\leq\lambda_1\|v\|^2=(\sigma_1\|v\|)^2,$$

其中$\lambda_i=\sigma_i^2,i=1,\cdots,r$. 当$v=v_1$时，等式成立.

(2)设$v\in\mathbb{R}^n$且$v\perp v_1$，则$v=a_2v_2+\cdots+a_nv_n$.

$$\|Av\|^2=v^TA^TAv=a_2^2\lambda_2+\cdots+a_r^2\lambda_r\leq(a_2^2+\cdots+a_r^2)\lambda_2\leq\lambda_2\|v\|^2=(\sigma_2\|v\|)^2.$$

若$v=v_2$，等式成立.

三 讨论特征值与奇异值的差异：

(1) 特征值适用的矩阵?

(2) 奇异值适用的矩阵?

(3) 对给定的一个n阶方阵，其对应的特征值和奇异值相同吗?

(4) 对给定的一个实对称矩阵, 其对应的特征值和奇异值相同吗?

(5) 对给定的一个n阶方阵，对应的特征值和奇异值的共性?

提示: (1) 方阵, (2) 任何矩阵, (3) 不相同(书中扰动例子), (4) 特征值的绝对值, (5) 秩相同.

四 (1) 设$A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A,B,A+B$的最大奇异值分别是r,s,t.证明$r+s\geq t$..

(2) 设$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R}),B\in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, A,B,AB的最大奇异值分别是r,s,t.证明$rs\geq t$.

(3) 设$A\in M_n(\mathbb{R})$,σ_1是A的最大奇异值，σ_r是最小(正)奇异值，λ是A的任意实特征值。证明$\sigma_r\leq|\lambda|\leq\sigma_1$.

提示：(1)由习题二，存在单位向量$v\in\mathbb{R}^n$, 使得$\|(A+B)v\|=t$，则$\|(A+B)v\|\leq\|Av\|+\|Bv\|\leq r+s$.

(2)若$AB\neq 0$, 存在单位向量$w\in\mathbb{R}^n$, 使得$\|ABw\|=t\neq 0$. 则$\|ABw\|=\|A(\frac{Bw}{\|Bw\|})\|\|Bw\|\leq rs$.