例.
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ x_1+2x_2-5x_4=0 \\ 2x_1+4x_2-3x_3-19x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-3x_3-24x_4=0 \end{cases}$$

解:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & -19 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & -24 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-2)r_1+r_3\to r_3 \\ (-3)r_1+r_4\to r_4}]{(-1)r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -36 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-4)r_2+r_4\to r_4]{(-3)r_2+r_3\to r_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

全为0, x_2为自由变量　　　　阶梯形

得同解方程组:
$$\begin{cases} \boxed{x_1}+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ \boxed{-3x_3}-9x_4=0 \end{cases}$$

x_2, x_4为自由变量, 放到右边:
$$\begin{cases} x_1+3x_3=-2x_2-4x_4 \\ -3x_3=9x_4 \end{cases}$$

令 $x_2=k_1$, $x_4=k_2$, 得: $x_3=-3k_2$, $x_1=-2k_1+5k_2$

解集: $\{(-2k_1+5k_2, k_1, -3k_2, k_2) \mid k_1, k_2$ 为指定数域中的任意数$\}$.

<u>定理</u>　齐次线性方程组一定有解; 若 $m<n$, 则一定有非零解.

Pf: 增广矩阵 $\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}$ 阶梯形矩阵

常数项全为0, $\therefore d_{r+1}=0$. $\therefore$ 有解.

当 $m<n$, 有 $r\le m<n$, $\therefore$ 解不唯一, 有非零解. #.

§2.3 消去法的矩阵实现

对线性方程组进行消元法，相当于对增广矩阵作初等行变换

① 用一个非零数乘矩阵的某一行.

② 将一行的k倍加到另一行上.

③ 交换矩阵中两行的位置.

1. 初等矩阵乘列向量

$$\vec{x}\in\mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{线性变换}]{A\in M_{n,n}} A\vec{x}\in\mathbb{R}^n.$$

A: $n\times n$ 方阵

Q: 什么样的方阵作用在 $\vec{x}$（也可看作 $n\times 1$ 矩阵）上，可对 $\vec{x}$ 进行初等行变换？

$$A\vec{x}=\begin{bmatrix}\vec{r_1}\cdot\vec{x}\\ \vec{r_2}\cdot\vec{x}\\ \vdots\\ \vec{r_n}\cdot\vec{x}\end{bmatrix}$$

，A的第i行决定 $A\vec{x}$ 第i个分量.

(0) 单位矩阵 I　　identity matrix

$$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

单位矩阵 I：对角线上为1，其余元素为0.

恒等变换　$\vec{x}\longmapsto I\vec{x}=\vec{x}$

(1) 用非零数 λ 乘第i行

$$\begin{array}{c}\\ \\ i\text{行}\rightarrow\\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\lambda&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_i\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\\lambda x_i\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

（λ 所在列：i列）

记为 $E_i(\lambda)$

$E_i(\lambda)$：在I的基础上，第i行乘 λ 倍

(2) 将第i行的 μ 倍加到第j行上

$$\begin{array}{c}\\ i\text{行}\rightarrow\\ j\text{行}\rightarrow\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&\vdots&\ddots&&\\&\mu&\cdots&1&\\&&&&\ddots\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_i\\\vdots\\x_j\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_i\\\vdots\\\mu x_i+x_j\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

（μ 所在列：i列；对角元1所在列：j列）

记为 $E_{ij}(\mu)$　　elimination matrix

$E_{ij}(\mu)$：在I的基础上，对j行作改变

将i行的 μ 倍加到j行上

(3) 交换第i行和第j行

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \\ \\ i\text{行}\to \\ \\ j\text{行}\to \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & i\text{列} & & j\text{列} & & \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

P_{ij}：在I的基础上，交换i,j行

记为P_{ij} permutation matrix

<u>定义</u> $E_i(\lambda)$, $E_{ij}(\mu)$, P_{ij} 统称为初等矩阵 (elementary matrix)

其左乘在向量$\vec{x}$上，分别代表对$\vec{x}$做相应的初等行变换.

注：初等矩阵也可由对单位矩阵I做相应初等变换得到.

<u>例</u>. $\mathbb{R}^3$ $(n=3)$. $E_{1,2}(2) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ (将I的第1行的2倍加到第2行上，得$E_{1,2}(2)$)

$$E_{1,2}(2)\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1+x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

用$E_{1,2}(2)$左乘$\vec{x}$：将$\vec{x}$第1行的2倍加到第2行上.

2. 初等矩阵乘矩阵

Q：如何通过左乘初等矩阵对矩阵做初等行变换？

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nt} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{矩阵}A\,?]{\text{左乘初等}} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1t} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} & \cdots & \lambda b_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nt} \end{bmatrix}$$

$\vec{b_1}$ $\vec{b_2}$ $\cdots$ $\vec{b_t}$

相当于对B的每个列向量$\vec{b_i}$做初等行变换

$$AB = A[\vec{b_1}\ \vec{b_2}\ \cdots\ \vec{b_t}] := [A\vec{b_1}\ \ A\vec{b_2}\ \ \cdots\ \ A\vec{b_t}].$$

为了使$A\vec{b_i}$可行，需A的列数与B行数一样.

定义 设 $A\in M_{m,n}$，$B\in M_{n,t}$，且 $B=[\vec{b}_1\ \vec{b}_2 \cdots \vec{b}_t]$，其中 $\vec{b}_i\in\mathbb{R}^n$ 为B的第i列

则 $AB=A[\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \cdots\ \vec{b}_t]:=[A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2\ \cdots\ A\vec{b}_t]\in M_{m,t}$

注：$\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ 也可看作 $\vec{x}\in M_{n,1}$，$A\vec{x}$ 与矩阵乘法定义吻合.

$A: m\times n$，$B: n\times t \rightarrow AB: m\times t$

定理 用初等矩阵左乘给定的矩阵，其结果是对给定的矩阵做相应的初等行变换。

例

$$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&\mu&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\4&1&0\\3&0&9\\1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\\4&1&0\\3&0&9\\4\mu+1&\mu+1&2\end{bmatrix}$$

将矩阵第2行的μ倍加到第4行

$E_{2,4}(\mu): 4\times4$ $\quad 4\times3 \quad 4\times3$

例
$$\begin{cases}x+2y+2z=1\\4x+8y+9z=3\\3y+2z=1\end{cases}$$

解：
$$\begin{bmatrix}1&2&2&1\\4&8&9&3\\&3&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{Step 1}]{(-4)r_1+r_2\Rightarrow r_2}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&1\\0&0&1&-1\\0&3&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{Step 2}]{r_2\Leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&1\\0&\boxed{3}&2&1\\0&0&\boxed{1}&-1\end{bmatrix}$$

矩阵描述：Step 1：
$$\underset{E_{1,2}(-4)}{\begin{bmatrix}1&&\\-4&1&\\&&1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1&2&2&1\\4&8&9&3\\&3&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&1\\0&0&1&-1\\0&3&2&1\end{bmatrix}$$

Step 2：
$$\underset{P_{2,3}}{\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&0&1&-1\\0&3&2&1\end{bmatrix}=\underset{\text{记为}[U\ \vec{c}]}{\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&1\\0&\boxed{3}&2&1\\0&0&\boxed{1}&-1\end{bmatrix}}$$

综合：$P_{2,3}\left(E_{1,2}(-4)[A\ \vec{b}]\right)=[U\ \vec{c}]$ associative law

可验证：$P_{2,3}(E_{1,2}(-4)[A\ \vec{b}])=(\underbrace{P_{2,3}E_{1,2}(-4)}_{\text{一系列初等矩阵乘积}})[A\ \vec{b}]$ （结合律成立，下节证明）

例. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ $(-1)r_1 + r_2 \to r_2$

$(-1)r_1 + r_3 \to r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix}}_{E_{1,3}(-1)}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{E_{1,2}(-1)}$$

对I进行2步初等行变换得到

2个初等矩阵乘积

例 已知$A \in M_{3,3}$, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求$A$

解: 设$A = [\vec{a_1} \ \vec{a_2} \ \vec{a_3}]$, 则有:

$$\vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a_2} + \vec{a_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

例 设$A \in M_{m,n}$, 若对任意列向量$\vec{\alpha} = [a_1 \ a_2 \cdots a_n]^T$, 都有$A\vec{\alpha} = \vec{0}$, 证明$A = O$.

Pf. 取$\vec{\alpha_i} = [0, \cdots, 0, \underset{\uparrow i}{1}, 0, \cdots, 0]^T$, 则$A\vec{\alpha_i} = A$的第$i$列$= \vec{0}$

遍历$i = 1, 2, \cdots, n$, 知$A = O$. #