习题课材料（四）

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

记号: 如不加说明，我们只考虑实矩阵。对于矩阵 A, 它的四个基本子空间是列空间 $C(A)$, 零空间 $N(A)$, 行空间 $C(A^T)$ 和 A^T 的零空间 $N(A^T)$。

习题 1. $B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}r&n&b&q&k&b&n&r\\p&p&p&p&p&p&p&p\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\p&p&p&p&p&p&p&p\\r&n&b&q&k&b&n&r\end{bmatrix}$。求二者的四个子空间的基。这里，$r,n,b,q,k,p$ 为各不相同的实数。

习题 2. $A=\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}I&G\\0&0\end{bmatrix}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，且具有相同的四个子空间。证明 $F=G$。

习题 3. 给定 $V,W\subset\mathbb{R}^n$。若 $\dim V+\dim W>n$，则存在 $x\neq 0$ 且 $x\in V\cap W$。

习题 4. A 是 10 阶方阵，$A^2=0$。证明：$\mathrm{rank}(A)\leq 5$。

习题 5. 设 $(1,0,0,0,0)^T,(0,1,1,0,0)^T$ 和 $(0,1,1,1,0)^T$ 构成了 $N(A)$ 的一组基，而 A 为五阶方阵，求 $\mathrm{rref}(A)$。是否可求出 $C(A)$, $C(A^T)$ 和 $N(A^T)$ 的一组基?

习题 6.

1. 设 A 是一个 $m\times n$ 的实矩阵，证明 $N(A^TA)=N(A)$。
2. A 如上。证明 $C(A^TA)=C(A^T)$。
3. 证明 A^TA 可逆当且仅当 A 为列满秩矩阵。
4. 如果 A 是一个 $m\times n$ 的复矩阵，上述命题是否成立?

习题 7. 设 V 为向量空间，$a_1,\ldots,a_n$ 为 V 中线性无关的向量，证明当且仅当 n 为奇数时，$a_1+a_2,a_2+a_3,\ldots,a_{n-1}+a_n,a_n+a_1$ 线性无关。

习题 8. (Steinitz 替换定理) $a_1,\dots,a_r$ 线性无关，可用 $b_1,\dots,b_s$ 线性表示，则

1. $r \le s$;

2. 可以选择 $b_1,\dots,b_s$ 中的 r 个向量换成 $a_1,\dots,a_r$，得到的新的向量组与 $b_1,\dots,b_s$ 等价。

习题 9. 设 A 是 n 阶方阵且 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 为 $\mathbb{R}$ 上一多项式，则定义 $f(A) = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_nA^n$。已知多项式 f 满足 $f(0) = 0$，证明对任意方阵 A，$\mathrm{rank} f(A) \le \mathrm{rank}(A)$。

习题 10. 证明：$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}(A)$ 是 $Ax = b$ 有解的充分不必要条件。

习题 11 ($\heartsuit$). 证明：反对称矩阵的秩是偶数。

习题 12 ($\heartsuit$). 设 A 是可逆实反对称矩阵，$b \in \mathbb{R}^n$。证明下列等式成立。

1. $\mathrm{rank}(A + bb^T) = n$。

2. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = n$。