习题 12

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

记号: 对于线性映射 T, 我们用 $\ker(T)$ 表示 T 的核, $Im(T)$ 表示 T 的值域/像集。

习题 1. 考虑函数空间的子空间 $\text{span}(\sin^2 x, \cos^2 x)$.

(1) 证明 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 和 $1, \cos 2x$ 分别是子空间的一组基。

(2) 分别求从 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 到 $1, \cos 2x$, 和从 $1, \cos 2x$ 到 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 的过渡矩阵。

(3) 分别求 1 和 $\sin^2 x$ 在两组基下的坐标。

答案. 两个过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$。 □

习题 2. 考虑线性空间 $P_2[x] := \{y(x) | y(x) = a + bx + cx^2, a, b, c \in \mathbb{R}\}$。已知 $w_1(x), w_2(x), w_3(x) \in P_2[x]$ 且满足 $w_1(-1) = 1, w_1(0) = 0, w_1(1) = 0$, $w_2(-1) = 0, w_2(0) = 1, w_2(1) = 0$, $w_3(-1) = 0, w_3(0) = 0, w_3(1) = 1$。

(1) 证明: $w_1(x), w_2(x), w_3(x)$ 构成 $P_2[x]$ 的一组基。

(2) 取 $v_1(x) = 1, v_2(x) = x, v_3(x) = x^2$, 分别求从 v_1, v_2, v_3 到 w_1, w_2, w_3 的过渡矩阵和从 w_1, w_2, w_3 到 v_1, v_2, v_3 的过渡矩阵。

答案. 两个过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$。 □

习题 3. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设线性变换 T 关于基 $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$ 的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 T 关于基 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ 的矩阵。

(2) 设向量 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, 求 $T(\mathbf{v})$ 和 $T(\mathbf{w})$ 关于基 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{v}_3$ 的坐标。

解答. (1) 令 $V=[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$。由题设，有 $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)V$。所以从基 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 到基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 的过渡矩阵为 V^{-1}。则 T 关于基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 的矩阵是

$$VAV^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) $\mathbf{v}$ 关于基 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{v}_3$ 的坐标为 $\mathbf{c}=[1,6,-3]^T$，于是 $T(\mathbf{v})$ 关于 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{v}_3$ 的坐标为 $A\mathbf{c}=[0,7,10]^T$。$T(\mathbf{w})$ 关于 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$ 的坐标为 $\mathbf{d}=VAV^{-1}\mathbf{w}$，则其关于 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{v}_3$ 的坐标为 $V^{-1}\mathbf{d}=AV^{-1}\mathbf{w}=[-1,-5,1]^T$。 □

习题 4 (♡). *设* $\dim V=n$，$\dim W=m$。T *是* V *到* W *的线性映射，且* T *的秩为* r。*证明：可以分别选取* V *与* W *的合适基底，使得在此选取下* T *的矩阵表示为*

$$A=\begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

证明. 由维数公式知：

$$\dim\ker(T)=\dim V-\dim\mathrm{Im}(T)=n-r.$$

取 $\ker(T)$ 的一组基 $\{\mathbf{v}_{r+1},\cdots,\mathbf{v}_n\}$，并将其扩充为 V 的一组基 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$。设 $\mathbf{w}_i=T(\mathbf{v}_i)$，$i=1,\cdots,r$。

先证 $\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_r\}$ 线性无关。考虑

$$t_1\mathbf{w}_1+\cdots+t_r\mathbf{w}_r=\mathbf{0},\qquad t_1,\cdots,t_r\in\mathbb{R}.$$

由于 T 是线性映射，有：

$$T(t_1\mathbf{v}_1+\cdots+t_r\mathbf{v}_r)=t_1\mathbf{w}_1+\cdots+t_r\mathbf{w}_r=\mathbf{0}.$$

所以 $t_1\mathbf{v}_1+\cdots+t_r\mathbf{v}_r\in\ker(T)$。从而存在 $t_{r+1},\cdots,t_n\in\mathbb{R}$，使得

$$t_1\mathbf{v}_1+\cdots+t_r\mathbf{v}_r=t_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}+\cdots+t_n\mathbf{v}_n.$$

但 $\{\mathbf{v}_{r+1},\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 线性无关，所以

$$t_1=\cdots=t_n=0,$$

即 $\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_r\}$ 线性无关。

现将 $\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_r\}$ 扩充成 W 一组基 $\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_m\}$。直接计算知，$T$ 在 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 及 $\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_m\}$ 下的矩阵为 A。 □

习题 5 (♡). 设线性空间 $\mathscr{V}$ 有直和分解：$\mathscr{V}=\mathscr{M}_1\bigoplus\mathscr{M}_2$（即 $\mathscr{V}=\mathscr{M}_1+\mathscr{M}_2$ 且满足 $\mathscr{M}_1\cap\mathscr{M}_2=\{\mathbf{0}\}$），则任取 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{V}$，都有唯一的分解式：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，其中 $\boldsymbol{a}_1\in\mathscr{M}_1,\boldsymbol{a}_2\in\mathscr{M}_2$. 定义 $\mathscr{V}$ 上的变换：

$$\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}_1,\qquad \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}_2.$$

(1) 证明，$\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1},\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}$ 都是 $\mathscr{V}$ 上的线性变换。

(2) 证明，$\ker(\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1})=\mathscr{M}_2,Im(\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1})=\mathscr{M}_1$.

(3) 证明，$\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}^2=\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}$, $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}+\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}=\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}=\boldsymbol{O}$.

(4) 分别求 $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1},\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}$ 的特征值和特征向量。

答案. 特征值为 1。 □

6. 设 A=(a_{ij})为 n 阶实对称矩阵， $a_{ii}=1$ 且 $\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|<2$

证明 $0<|A|\leq 1$

7.设 A 为 n 阶实矩阵，A+A′为正定阵，证明：

（1）A 的特征值实部大于 0

（2）|A|>0

8.设 A，C 为对称正定阵，B 是满足 AX+XA=C 的唯一解，证明 B 对称正定。

9. A，B 是俩方阵，且 $A^2=A,B^2=B$,证明（A+B）^{2}=A+B 当且仅当 AB=BA=0

10.设 A，B 为实对称阵，证明 $tr(ABAB)\leq tr(AABB)$

6 先补充严格对角占优与盖尔圆盘定理.

Def 6.1: A 称为严格对角占优的, 若 A 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j\ne i}|a_{ij}|$ $i=1,2,\cdots,n$.

thm 6.2: 若 A 严格对角占优则 A 可逆.

pro: 反证 A 不可逆则 $\exists\, x\ne\vec{0}$ s.t. $Ax=0$. 令 $|x_{i_0}|=\max_i|x_i|$, 即 $|x_{i_0}|\ge|x_i|$。

则 $0=(Ax)_{i_0}=\sum_{j=1}^n a_{i_0j}x_j$ 故 $\sum_{j\ne i_0}a_{i_0j}x_j=-a_{i_0i_0}x_{i_0}$.

同取绝对值, 左边 $\le \sum_{j\ne i_0}|a_{i_0j}||x_j| \le \left(\sum_{j\ne i_0}|a_{i_0j}|\right)|x_{i_0}| < |a_{i_0i_0}|\cdot|x_{i_0}|$

右边 $=|a_{i_0i_0}||x_{i_0}|$. 矛盾. #

thm 6.3 (盖尔圆盘) A为任意方阵. 令 $r_i=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|$. $i=1\ldots n$. $B_i=\{x \mid |x-a_{ii}|\le r_i\}$.

以对角元为圆心, 以 $\sum_{j\ne i}|a_{ij}|$ 为半径的圆盘.

则 A 的任意特征值 $\lambda\in\bigcup_{i=1}^n B_i$ (即 $\exists B_{i^*}$ s.t. $\lambda\in B_{i^*}$).

pro: A 特征值 λ 满足 $\lambda I-A$ 不可逆.

如果 $\lambda\notin\bigcup_{i=1}^n B_i$. 则 $|\lambda-a_{ii}|>r_i$, $i=1\cdots n$. 即 $\lambda I-A$ 严格对角占优

故由 thm 6.2 知 $\lambda I-A$ 可逆, 矛盾.

第6题: 由 thm 6.3 知 $\bigcup_{i=1}^n B_i\subset B(1,1)$. (中心在1, 半径为1的球). (因 $r_i=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|<1$).

即 $|\lambda-1|\le1$ 又 A 实对称, $\lambda\in\mathbb{R}$. ∴ $\lambda\in[0,2]$. ∴ $|A|=\prod_{i=1}^n\lambda_i\ge0$.

又 $|A|=\prod_{i=1}^n\lambda_i \underset{\text{基本不等式}}{\le} \left(\frac{\sum\lambda_i}{n}\right)^n=\left(\frac{trA}{n}\right)^n=\left(\frac{n}{n}\right)^n=1$.

7 . $A+A'$ 实对称, 设其特征值为 μ_i 即 $\exists$ 正交 Q, $Q^T(A+A^T)Q=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}$

且 $\mu_1\ge\mu_2\cdots\ge\mu_n$。 任取 A 的特征值与特征向量 λ, x 则

$Ax=\lambda x \longrightarrow \bar{x}^TAx=\lambda\bar{x}^Tx$. $\xrightarrow{\text{相加}} \bar{x}^T(A+A^T)x=(\lambda+\bar\lambda)\bar{x}^Tx$.

↓取共轭转置

$\bar{x}^T\bar{A}^T=\bar\lambda\bar{x}^T \longrightarrow \bar{x}^T\bar{A}^Tx=\bar\lambda\bar{x}^Tx$

取 $y=Q^Tx$ 即 $x=Qy$. 代入得 $\bar{y}^TQ^T(A+A^T)Qy=\bar{y}^T\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}y=\sum_{i=1}^n\mu_i|y_i|^2$

$=(\lambda+\bar\lambda)\bar{y}^Ty$

而 $\sum_{i=1}^n\mu_i|y_i|^2\in[\mu_n\bar{y}^Ty,\ \mu_1\bar{y}^Ty]$. 又 $\bar{y}^Ty\ne0$. ∴ $\frac{\mu_n}{2}\le\overset{=Re(\lambda)}{\frac{\lambda+\bar\lambda}{2}}\le\frac{\mu_1}{2}$.

也就是取 A 的对称部分 $\frac{A+A^T}{2}$ 的特征值 $\sigma_i=\frac{\mu_i}{2}$ 有 $\sigma_n\le Re(\lambda_i)\le\sigma_1$。

本题 $Re(\lambda)\ge\frac{\mu_n}{2}\ge0$. ∴ A 实特征值 ≥0. 复特征值共轭成对. ∴ $|A|=\prod\lambda_i\ge0$

8. B 满足 $AB+BA=C$. (*) 同取转置 $B^TA+AB^T=C$. $\therefore B^T$ 也是方程之解.

由解唯一 $\therefore B=B^T$.

设 λ, q 为 B 特征值与向量. 对(*)同右乘再同左乘 q 得到 $2\lambda q^TAq = q^TCq$.

由 A, C 正定 $\Rightarrow \lambda > 0$ so ..

9. "$\Leftarrow$" 显然

"$\Rightarrow$" $(A+B)^2 = A+B+AB+BA = A+B$ 即 $AB+BA=0$. (*)

对(*)同左乘 A : $AB + ABA = 0$

对(*)同右乘 A : $ABA + BA = 0$

$\xrightarrow{\text{相减}} AB = BA \longrightarrow AB = BA = 0$.

Cor: 对 A B 正交投影阵 即 $A^2=A^T=A$, B 同样. 要 $A+B$ 也正交投影阵,

则 $AB=BA=0=A^TB=\begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{pmatrix}(B_1 \cdots B_n)$ 即 $A_i^TB_j=0$ $\therefore A_i \perp B_j$.

其中 $A=(A_1, \cdots A_n)$ $B=(B_1 \cdots B_n)$ 这也就是 $C(A) \perp C(B)$

10. $tr(AB) = tr(BA)$ (由看 AB 与 BA 的迹用 a_{ij}, b_{ij} 写出 证明得)

则 $tr(\underline{AB}\underline{C}) = tr(\underline{C}\,\underline{AB})$ 也就是可把某些看成一个矩阵。另有 $tr(A+B)=trA+trB$

$\forall C$. $tr\, C^TC = \sum_i \sum_j c_{ij}^2 \geq 0$. 令 $C = AB-BA$. 则 $C^T=-C$.

$\therefore 0 \geq -trC^TC = trC^2 = tr(ABAB) + \underbrace{tr(BABA)}_{= tr(ABAB)} - \underbrace{tr(ABBA)}_{= tr(AABB)} - \underbrace{tr(BAAB)}_{= tr(AABB)}$

即 $0 \geq 2\,tr(ABAB) - 2\,tr(AABB)$

11. A $m\times n$ B $n\times m$. 则 if $m\geq n$ $f_{AB}(\lambda) = \lambda^{m-n} f_{BA}(\lambda)$ 即 AB 的特征值由 BA 的特征值并上一些 0, 且 AB 与 BA 的非零特征值相同.

①. $\begin{array}{c|cc|} & s & t \\ s & A & B \\ t & 0 & C \end{array} = |A||C| = \begin{array}{c|cc|} & s & t \\ s & A & 0 \\ t & D & C \end{array}$ for any A B C D.

②. $\begin{array}{c|cc|} & s & t \\ s & A & B \\ t & C & D \end{array} \overset{\text{if } |A|\neq 0}{=\!=\!=} |A|\cdot|D-CA^{-1}B| \overset{\text{if } |D|\neq 0}{=\!=\!=} |D|\,|A-BD^{-1}C|$

pro. $\begin{vmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A|\,|D-CA^{-1}B|$ $(|A|\neq 0)$.

$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & \\ -D^{-1}C & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A-BD^{-1}C|\cdot|D|$ $(|D|\neq 0)$

③ 令 $C=\begin{pmatrix} I_n & \frac{1}{\lambda}B \\ A & I_m \end{pmatrix}$ 则 $|C|\lambda^m = \left|C\cdot\begin{pmatrix} I_n & \\ & \lambda I_m \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_m \end{vmatrix} = |I_n|\,|\lambda I_m - AI_n^{-1}B| = |\lambda I_m - AB| = f_{AB}(\lambda)$

$|C|\lambda^n = \left|\begin{pmatrix} \lambda I_n & \\ & I \end{pmatrix}\cdot C\right| = \begin{vmatrix} \lambda I_n & B \\ A & I_m \end{vmatrix} = |I_m|\cdot|\lambda I_n - BI_m^{-1}A| = |\lambda I_n - BA| = f_{BA}(\lambda)$

$\therefore$ $|C| = \lambda^{-m} f_{AB}(\lambda) = \lambda^{-m} f_{BA}(\lambda)$ $\therefore$ ~