第一章 线性映射和矩阵

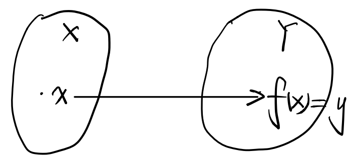
§1.1 映射

<u>定义</u> 设有集合 X 和 Y，若 X 中的任意元素 x，都从某种法则对应于 Y 中唯一一个元素，称这个对应法则 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射，x 所对应的 Y 中元素常记作 $f(x)$。

两个映射 f,g 相等 $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in X$，有 $f(x)=g(x)$.

记号：$f: X\to Y$ $\quad$ $x\in X,\ y=f(x)\in Y$

$x\longmapsto y=f(x)$



X：映射 f 的定义域 $\qquad$ Y：映射 f 的陪域

y：x 在映射 f 下的像 $\qquad$ x：y 在 f 下的原像 $(\exists?\ \ !?)$

$f(X):=\{f(x)\mid x\in X\}\subset Y$ $\quad$ f 的像集/值域

<u>定义</u> 1. $\forall x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是一个单射

(任何元素的原像至多只有一个).

2. $\forall y\in Y$，$\exists x\in X$ s.t. $y=f(x)$，则称 f 是一个满射，即 $f(X)=Y$.

3. 若映射 f 即是单射又是满射，则称 f 是一个双射 (一一对应)

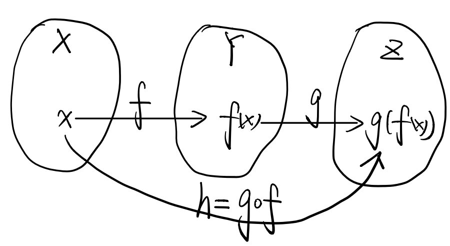
相同

<u>定义</u> X,Y,Z 是三个集合，$f: X\to Y$，$g: Y\to Z$，定义映射 h：

$h: X\to Z$

$x\longmapsto h(x)=g(f(x))$

称 h 为映射 g 与 f 的复合，记作 $h=g\circ f$.



注：$f: X\to Y$，$g: Y\to Z$，$h: Z\to W$.

有 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$. 映射的复合运算满足结合律，可写为 $h\circ g\circ f$.

定义 当映射 f 的定义域和陪域都是 X 时，称 f 是集合 X 上的一个变换.

记 $f^2=f\circ f$, $f^n=f^{n-1}\circ f$. $n\geq 1$.

定义 X 上的恒同(等)变换：$id_X(x)=x$ $\forall x\in X$.

注：映射 $f: X\to Y$. 有 $f\circ id_X=f=id_Y\circ f$

命题 对映射 $f: X\to Y$, 有

1. f 是单射 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ 映射 $g: Y\to X$. s.t. $g\circ f=id_X$.
2. f 是满射 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ 映射 $g: Y\to X$, s.t. $f\circ g=id_Y$. (HW)

Pf. 1. "$\Rightarrow$" 设 f 是单射. 下面定义映射 $g: Y\to X$.

$\forall y\in Y$. 由 f 是单射, 知 y 在 f 下的原像至多一个.

$$\begin{cases} 若\ y\in f(X).\ 则\ \exists!\ x\in X,\ s.t.\ f(x)=y.\ 令\ g(y)=x. \\ 若\ y\notin f(X).\ 可任意指定\ y\ 在\ g\ 下的像.\ (不妨取定\ x_0\in X.\ 令\ g(y)=x_0). \end{cases}$$

易验证：$\forall x\in X$, 有 $g\circ f(x)=x$. i.e. $g\circ f=id_X$.

"$\Leftarrow$". $\forall x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$. 要证 $f(x_1)\neq f(x_2)$

$$\begin{cases} x_1=(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1)) \\ x_2=(g\circ f)(x_2)=g(f(x_2)). \end{cases}$$

若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $x_1=g(f(x_1))=g(f(x_2))=x_2$. 矛盾

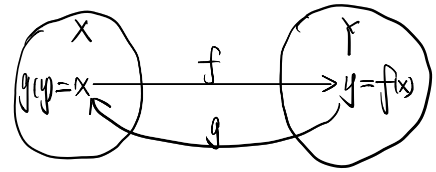
$\therefore f(x_1)\neq f(x_2)$. $\therefore f$ 是单射. #

定义 映射 $f: X\to Y$, 若 $\exists$ 映射 $g: Y\to X$, s.t. $f\circ g=id_Y$. $g\circ f=id_X$,

则称映射 f 可逆, 称 g 是 f 的一个逆(映射).

注：当f可逆时，其逆映射是唯一的，记作f^{-1}，称为f的逆。

Pf：假设g_1和g_2都是f的逆映射。



$\forall y \in Y$，有

$$g_1(y) = id_X(g_1(y)) = g_2 \circ f(g_1(y))$$
$$= g_2(f \circ g_1(y)) = g_2 \circ id_Y(y) = g_2(y)$$

$\therefore$ g_1和g_2相等。#

命题：f是双射 $\Leftrightarrow$ f可逆。　(HW)