习题课材料（十二）

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

记号: 对于线性映射 T, 我们用 $\ker(T)$ 表示 T 的核, $Im(T)$ 表示 T 的值域/像集。

习题 1. 考虑函数空间的子空间 $\mathrm{span}(\sin^2 x, \cos^2 x)$.

(1) 证明 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 和 $1, \cos 2x$ 分别是子空间的一组基。

(2) 分别求从 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 到 $1, \cos 2x$，和从 $1, \cos 2x$ 到 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 的过渡矩阵。

(3) 分别求 1 和 $\sin^2 x$ 在两组基下的坐标。

习题 2. 考虑线性空间 $P_2[x] := \{y(x) | y(x) = a + bx + cx^2, a, b, c \in \mathbb{R}\}$。已知 $w_1(x), w_2(x), w_3(x) \in P_2[x]$ 且满足 $w_1(-1) = 1, w_1(0) = 0, w_1(1) = 0$，$w_2(-1) = 0, w_2(0) = 1, w_2(1) = 0$，$w_3(-1) = 0, w_3(0) = 0, w_3(1) = 1$。

(1) 证明：$w_1(x), w_2(x), w_3(x)$ 构成 $P_2[x]$ 的一组基。

(2) 取 $v_1(x) = 1, v_2(x) = x, v_3(x) = x^2$，分别求从 v_1, v_2, v_3 到 w_1, w_2, w_3 的过渡矩阵和从 w_1, w_2, w_3 到 v_1, v_2, v_3 的过渡矩阵。

习题 3. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，设线性变换 T 关于基 $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1)$，$\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$，$\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$ 的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 T 关于基 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$，$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$，$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ 的矩阵。

(2) 设向量 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$，$\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$，求 $T(\mathbf{v})$ 和 $T(\mathbf{w})$ 关于基 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{v}_3$ 的坐标。

习题 4 (♡). 设 $\dim V = n$，$\dim W = m$。T 是 V 到 W 的线性映射，且 T 的秩为 r。证明：可以分别选取 V 与 W 的合适基底，使得在此选取下 T 的矩阵表示为

$$A = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

习题 5 (♡). 设线性空间 $\mathscr{V}$ 有直和分解：$\mathscr{V} = \mathscr{M}_1 \bigoplus \mathscr{M}_2$（即 $\mathscr{V} = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2$ 且满足 $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2 = \{\mathbf{0}\}$), 则任取 $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$, 都有唯一的分解式：$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, 其中 $\boldsymbol{a}_1 \in \mathscr{M}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathscr{M}_2$. 定义 $\mathscr{V}$ 上的变

换：

$$P_{\mathscr{M}_1}(a) = a_1, \qquad P_{\mathscr{M}_2}(a) = a_2.$$

(1) 证明，$P_{\mathscr{M}_1}, P_{\mathscr{M}_2}$ 都是 $\mathscr{V}$ 上的线性变换。

(2) 证明，$\ker(P_{\mathscr{M}_1}) = \mathscr{M}_2, Im(P_{\mathscr{M}_1}) = \mathscr{M}_1$.

(3) 证明，$P^2_{\mathscr{M}_1} = P_{\mathscr{M}_1}, P_{\mathscr{M}_1} + P_{\mathscr{M}_2} = I, P_{\mathscr{M}_1}P_{\mathscr{M}_2} = O$.

(4) 分别求 $P_{\mathscr{M}_1}, P_{\mathscr{M}_2}$ 的特征值和特征向量。

6. 设 A=(a_{ij})为 n 阶实对称矩阵，$a_{ii} = 1$ 且 $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 2$

证明 $|A| \le 1$

7.设 A 为 n 阶实矩阵，A+A'为正定阵，证明：

（1）A 的特征值实部大于 0

（2）|A|>0

8.设 A，C 为对称正定阵，B 是满足 AX+XA=C 的唯一解，证明 B 对称正定。

9. A，B 是俩方阵，且 $A^2=A, B^2=B$,证明（A+B）^{2}=A+B 当且仅当 AB=BA=0

10.设 A，B 为实对称阵，证明 $\mathrm{tr}(ABAB) \le \mathrm{tr}(AABB)$