定理 每个排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$都可经过有限次对换变成标准排列$(1,2,\cdots,n)$，同个排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$变成标准排列所经过的对换次数s不唯一，但s的奇偶性是唯一的，且与排列的奇偶性相同.

奇偶性符号：$sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)=(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}=\begin{cases}1, & \text{if } (j_1,j_2,\cdots,j_n)\text{为偶排列}\\ -1, & \text{if } (j_1,j_2,\cdots,j_n)\text{为奇排列}\end{cases}$

2. n阶行列式(续)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} \overset{\det(P)}{\overbrace{sgn(j_1,j_2,\cdots,j_n)}} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

观察：(2) $n!$项相加，一半系数为正，一半为负.（奇偶排列各一半）

(1) $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$：每一行各取一个元素，使它们在不同的列，即n个来自不同行不同列的数相乘

例. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1,2,\cdots,n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$ 上三角

最后一行只有a_{nn}可能非0，倒数第2行只能取$a_{n-1,n-1}$，…….

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$ 下三角

例. $$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det A = \underset{\det(\vec{e_2},\vec{e_1},\vec{e_4},\vec{e_3})}{\underbrace{sgn(2,1,4,3)}} = (-1)^{\tau(2,1,4,3)} = 1$$ 偶排列

$$\det(\vec{e_2},\vec{e_1},\vec{e_4},\vec{e_3}) = \begin{vmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{vmatrix}$$ （书上写法）

例. $A\in M_n(\mathbb{R})$. $\forall k\in\mathbb{R}$，则 $\det(kA)=k^n\det(A)$. 每行k倍，体积k^n倍.

例. $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad + sgn(2,1)bc = ad-bc$$

线性性

3. 行列式的性质

Recall：3个基本性质 + 1个推论. $A=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1^T\\ \vec{\alpha}_2^T\\ \vdots\\ \vec{\alpha}_n^T\end{bmatrix}$，$\det A=\det(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)$

<u>定理</u>. 若行列式的某行全为0，则行列式为0.

Pf. 证法一：big formula.

证法二：零行可提取0，$\det(\cdots,\vec{0},\cdots)=0\det(\cdots,\vec{0},\cdots)=0$.

<u>定理</u>. 若行列式的某两行成比例，则行列式为0.

Pf. $\det(\cdots,\vec{\alpha},\cdots,k\vec{\alpha},\cdots)=k\det(\cdots,\vec{\alpha},\cdots,\vec{\alpha},\cdots)=k0=0$.

<u>定理</u>. 将行列式的某一行的λ倍加到另一行上，行列式的值不变.

Pf. $\det(\cdots,\vec{\alpha_i},\cdots,\lambda\vec{\alpha_i}+\vec{\alpha_j},\cdots)=\underbrace{\det(\cdots,\vec{\alpha_i},\cdots,\lambda\vec{\alpha_i},\cdots)}_{0.\ \text{两行成比例}}+\det(\cdots,\vec{\alpha_i},\cdots,\vec{\alpha_j},\cdots)$

注意初等行变换对行列式的改变.

$A\longrightarrow U$ 上三角或下三角，简化计算

例. $\begin{vmatrix}1-a&1&1\\1&1-a&1\\1&1&1-a\end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到第1行}]{\text{后2行}}\begin{vmatrix}3-a&3-a&3-a\\1&1-a&1\\1&1&1-a\end{vmatrix}\xlongequal[\text{提取}3-a]{\text{第1行}}(3-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1-a&1\\1&1&1-a\end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{分别减第1行}]{\text{后2行}}(3-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\&-a&\\&&-a\end{vmatrix}=(3-a)a^2.$

例. $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&4\\2&4&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1\to r_3]{r_2-2r_1\to r_2}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\0&0&-5\end{vmatrix}=-5$

<u>定理</u> A可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq0$，反之，A不可逆 $\Leftrightarrow |A|=0$.

Pf. $A\xrightarrow{\text{初等行}}U$ 阶梯形，$|A|=k|U|$，$k\neq0$.

初等行变化，将|A|变成(非零)常数倍.

A可逆 $\Leftrightarrow$ 有n个主元 $\Leftrightarrow$ U的主对角线全非0 $\Leftrightarrow |U|\neq0 \Leftrightarrow |A|\neq0$.

A不可逆 $\Leftrightarrow$ U有零行 $\Leftrightarrow |U|=0 \Leftrightarrow |A|=0$. #

定理. $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

Pf. 若 $|B|=0$，则 B 不可逆 $\Rightarrow$ AB 不可逆 $\Rightarrow$ $\det(AB)=0$.

若 $|B|\neq 0$，令 $D(A)=\det(AB)/\det(B)$. 下证 $D(A)$ 满足行列式的3条基本性质，从而为 $\det(A)$.

设 $A=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1^T\\ \vec{\alpha}_2^T\\ \vdots\\ \vec{\alpha}_n^T\end{bmatrix}$，则 $AB=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1^TB\\ \vec{\alpha}_2^TB\\ \vdots\\ \vec{\alpha}_n^TB\end{bmatrix}$，记 $D(A)=D(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)$

(1) 若 $A=I$，则 $D(A)=\det(B)/\det(B)=1$.

(2) 对换A的两行，则对应的AB的两行也会互换，从而 $\det(AB)$ 变号 $\Rightarrow$ $D(A)$ 变号.

(3) $D(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_{i-1},k\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_{i+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)=\det(\vec{\alpha}_1^TB,\cdots,\vec{\alpha}_{i-1}^TB,k\vec{\alpha}_i^TB,\vec{\alpha}_{i+1}^TB,\cdots,\vec{\alpha}_n^TB)/\det(B)$

$=k\det(AB)/\det(B)=kD(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_{i-1},\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_{i+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)$

$D(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_{i-1},\vec{\alpha}_i+\vec{\beta}_i,\vec{\alpha}_{i+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)=D(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_{i-1},\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_{i+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)+D(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_{i-1},\vec{\beta}_i,\vec{\alpha}_{i+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)$. #

推论：若A可逆，则 $AA^{-1}=I$ $\Rightarrow$ $\det(A)\det(A^{-1})=1$ $\Rightarrow$ $\det(A^{-1})=1/\det(A)$.

定理 $\det(A^T)=\det(A)$.

Pf. 若A不可逆，则 A^T 也不可逆 $\Rightarrow$ $\det(A^T)=0=\det(A)$.

若A可逆，则 ∃置换矩阵P, s.t. PA 可作LU分解.

$L=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&*&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}$，$U=\begin{bmatrix}d_1&&&\\&d_2&*&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{bmatrix}$

即 $PA=LU$ $\Rightarrow$ $\det P\cdot\det A=\det L\cdot\det U$

而 $A^TP^T=U^TL^T$ $\Rightarrow$ $\det A^T\cdot\det P^T=\det U^T\det L^T$

又 $\det L=\det L^T=1$ (对角线上为1的下三角阵)

$\det U=\det U^T=d_1d_2\cdots d_n$

P为正交阵. $PP^T=I$ $\Rightarrow$ $\det P\det P^T=1$ $\Rightarrow$ $\det P$ 与 $\det P^T$ 同为1或−1.

$\Rightarrow$ $\det A=\det A^T$. #

注 ① 通过将A进行转置，$\det A$ 所有关于行的性质对列同样适用.

② $A=(a_{ij})_{n\times n}$. $(A^T)_{ij}=a_{ji}$

$\det A^T=\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\operatorname{sgn}(j_1,j_2,\cdots,j_n)(A^T)_{1,j_1}(A^T)_{2,j_2}\cdots(A^T)_{n,j_n}$

$=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}\operatorname{sgn}(i_1,i_2,\cdots,i_n)a_{i_1,1}a_{i_2,2}\cdots a_{i_n,n}$

每一列取一个元素，它们来自不同的行.

4. 行列式的展开定理

定义. 在行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列，由剩下的元素按原来的排法，构成一个 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记为 $\det M_{ij}$. 令 $C_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ij}$，称为 a_{ij} 的代数余子式 (cofactor)

称 n 阶方阵 $C=(C_{ij})$ 为 cofactor matrix，而 $A^*:=C^T$ 称为 A 的伴随矩阵.

例. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ 余子式 $\det M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{(-4)r_1+r_3\to r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ & 1 & 7 \\ & & -19 \end{vmatrix} = -19$

代数余子式 $C_{23}=(-1)^{2+3}\det M_{23}=19.$

定理

$$\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}, \quad \forall i \quad \text{按行展开} \quad \text{Cofactor formula}$$

The determinant is the dot product of any row i of A with its cofactors.

Pf. Step 1. We first prove that $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\det A \overset{\text{Big Formula}}{=} \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$\xlongequal{j_1=1} \sum_{\substack{(j_2,\cdots,j_n) \\ \text{为}2,\cdots,n\text{的任一排列}}} (-1)^{\tau(1,j_2,\cdots,j_n)} a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = a_{11}\sum_{\substack{(j_2,\cdots,j_n) \\ \text{为}2,\cdots,n}} (-1)^{\tau(j_2,\cdots,j_n)} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11}\det M_{11} = a_{11}C_{11}$$

Step 2. general case.

$$\det A \xlongequal[\text{前}i-1\text{行交换}]{\text{第}i\text{行依次与}} (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow \text{拆行}$$

$$(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}) = (a_{i1}\ 0\ \cdots\ 0) + (0\ a_{i2}\ \cdots\ 0) + \cdots + (0\ 0\ \cdots\ a_{in})$$

$$= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} & & a_{ij} & & \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{前}j-1\text{列交换}]{\text{第}j\text{列依次与}} (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & M_{ij} & \\ * & & & \end{vmatrix}$$

第 j 列

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det M_{ij} = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij}. \quad \#$$

推论. $a_{i1}C_{k1}+a_{i2}C_{k2}+\cdots+a_{in}C_{kn}=0$. $\forall k\neq i$. i行元素与k行的代数余子式乘积之和为0

Pf.

令 $\det\hat{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow k\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$ 将 $\det A$ 的第k行换为 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$，得 $\det\hat{A}$.

则 $\det A$ 的代数余子式 $C_{k1},C_{k2},\cdots,C_{kn}$ 也为 $\det\hat{A}$ 的k行元素的代数余子式

$\because \det\hat{A}\xlongequal{\text{按第k行展开}} a_{i1}C_{k1}+a_{i2}C_{k2}+\cdots+a_{in}C_{kn}$

而 $\det\hat{A}$ 中两行相同 $\Rightarrow \det\hat{A}=0$

$\Rightarrow a_{i1}C_{k1}+a_{i2}C_{k2}+\cdots+a_{in}C_{kn}=0$ #.

注. ① $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{kj}=\begin{cases}\det A, & 若\ i=k \\ 0, & 若\ i\neq k\end{cases}$

② 列也有相应结论:

$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ik}=\begin{cases}\det A, & 若\ j=k \\ 0, & 若\ j\neq k\end{cases}$

$\det A$ 的任一列所有元素与它们对应的代数余子式乘积之和为 $\det A$

——某一列——与另一列……0.