习题课材料（八）

注: 带♡号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

习题1. 求*Markov*矩阵A和A^∞的特征值和特征向量，并说明为何A^{100}近似于A^∞：

$$A=\begin{bmatrix} .6 & .2 \\ .4 & .8 \end{bmatrix}, \qquad A^\infty=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

习题2 (♡). 一个关于二阶方阵A的奇怪事实：如果两个特征值$\lambda_1\neq\lambda_2$特征向量分别为$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$，则$A-\lambda_1 I$的列是特征向量$\mathbf{x}_2$的倍数。为何？

习题3. 已知一个三阶方阵B的特征值为*0*，*1*，*2*。那么下列哪些项就可以确定下来：

1. $rank(B)$
2. $det(B^T B)$
3. $B^T B$的特征值
4. $(B^2+I)^{-1}$的特征值。

习题4. 设$A^2=A$，在A的四个子空间中，哪个包含特征值$\lambda=1$的特征向量？哪个包含特征值$\lambda=0$的特征向量？从这些信息如何推出A可以对角化？

习题5. 设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$且$(1,1,1),(1,0,-1),(1,-1,0)$是$A$的特征向量，求$a,b,c,d,e,f$.

习题6. 设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & y & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$。当$x$和$y$满足什么条件时，$A$与$B$相似？

习题7. 判断下列矩阵哪些可以对角化，哪些不能对角化，并求相应的对角矩阵以及可逆矩阵。

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

习题8. 设A是n阶实方阵，且任意非零向量$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$均为其特征向量，证明$A = \lambda I_n$。

习题9. 设A, B分别为$m \times n$阶和$n \times m$阶矩阵。证明若$\lambda \neq 0$是AB的特征值，则λ也是BA的特征值。举例说明$\lambda = 0$ 时，结论不一定对。

习题10 (♡)**.** 设A, B为n阶方阵，且均可对角化。证明$AB = BA$当且仅当它们有n个公共的线性无关的特征向量。