习题课材料（十）

注: 带♡号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

一 求以下矩阵的奇异值分解:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(2) $A = uv^T$, 其中$u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = \|v\| = 1$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

二 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$的奇异值分解是$A = U\Sigma V^T$, 满足$U = (u_1, \cdots, u_m)$是$m$阶正交矩阵，$V = (v_1, \cdots, v_n)$是$n$阶正交矩阵，$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$，$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, 其中$r = rank(A)$.

(1) 证明$\|Av_1\| = \sigma_1 = max_{\|v\|=1}\|Av\|$.

(2) 证明$\|Av_2\| = \sigma_2 = max_{v\perp v_1, \|v\|=1}\|Av\|$.

三 讨论特征值与奇异值的差异:

(1) 特征值适用的矩阵?

(2) 奇异值适用的矩阵?

(3) 对给定的一个n阶方阵，其对应的特征值和奇异值相同吗?

(4) 对给定的一个实对称矩阵, 其对应的特征值和奇异值相同吗?

(5) 对给定的一个n阶方阵，对应的特征值和奇异值的共性?

四 (1) 设$A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A,B,A+B$的最大奇异值分别是r,s,t.证明$r+s \geq t$..

(2) 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, A,B,AB的最大奇异值分别是r,s,t.证明$rs \geq t$.

(3) 设$A \in M_n(\mathbb{R})$,σ_1是A的最大奇异值，σ_r是最小(正)奇异值，λ是A的任意实特征值。证明$\sigma_r \leq |\lambda| \leq \sigma_1$.

五 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$的奇异值分解是$A = U\Sigma V^T$, 满足$U = (u_1,\cdots,u_m)$是$m$阶正交矩阵，$V = (v_1,\cdots,v_n)$ 是n阶正交矩阵，$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, 其中$r = rank(A)$. 求$A-\sigma_1 u_1 v_1^T$的奇异值分解.

六 [♡] 设A是n阶非零实矩阵. 证明：A的奇异值与A的特征值相同当且仅当A是正定阵或半正定阵.

七 设A是一个$m\times n$阶实数矩阵. 令$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$. 证明：

(1) $|\lambda I_{m+n} - \tilde{A}| = \lambda^{m-n}|\lambda^2 I_n - A^T A|$.

(2) 设A的奇异值分解是$A = U\Sigma V^T$, 满足$U = (u_1,\cdots,u_m)$是m阶正交矩阵，$V = (v_1,\cdots,v_n)$是n阶正交矩阵，$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, 其中$r = rank(A)$. 令$U_1,V_1$分别是$U,V$的前$r$列构成矩阵, U_2是U的后$m-r$列构成矩阵，V_2是V的后$n-r$列构成矩阵, 令

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & U_2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & 0 & V_2 \end{bmatrix}.$$

则

$$W^T\tilde{A}W = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \sigma_r & & & & & & \\ & & & -\sigma_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -\sigma_r & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

注：本题展示一般实对称阵特征值拥有的性质可以转换到任何实矩阵的奇异值上，例如：两实对称阵和的特征值的范围（见习题课九第八题）

八 设A是一个$m\times n$阶实矩阵，$b\in\mathbb{R}^m$. 证明：$Ax=b$的全部最小二乘解的集合是

$$\{A^+b+(I_n-A^+A)y \mid y\in\mathbb{R}^n\}.$$

展示A^+b是长度最小的最小二乘解.

九 [♡] 设A是$m\times n$阶阵，B是$p\times q$阶阵，C是$m\times q$阶阵. 考虑矩阵方程$AXB=C$，其中X是$n\times p$阶未知矩阵. 假设$rank(A,C)=rank(A)$且$rank\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}=rank(B)$. 证明：给定任意$n\times p$阶矩阵$W$，$A^+CB^++W-A^+AWBB^+$是$AXB=C$的解.

十 Moore-Penrose(M-P)广义逆的定义: 设$A\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, 若存在$M\in\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$满足(1) $AMA=A$, (2) $MAM=M$, (3) AM 与MA均为对称矩阵, 则称M为A的M-P广义逆, 记成A^+.

(1) M-P广义逆存在性证明. 对奇异值分解$AV=U\Sigma$, $V=(V_1,V_2)$和$U=(U_1,U_2)$为正交矩阵, $\Sigma=\begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, Σ_r所有正奇异值, 且$A=U_1\Sigma_rV_1^T$, 证明: $V_1\Sigma_r^{-1}U_1^T$是一个M-P广义逆.

(2) (♡) 证明: A^+唯一.

(3) 证明: $x=V_1\Sigma_r^{-1}U_1^Tb$为$Ax=b$的一个解, 由此得到满足M-P的广义逆A^+对应的$x=A^+b$为$Ax=b$的一个解.

(4) 一般的广义逆A^-定义为满足$AA^-A=A$, 谈谈你的认识.