(1) 若∃不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in F$, s.t. (*)式成立, 称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关.

(2) 若由(*)只能推出 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$, 称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

定理: $A\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ A的列向量线性相关.

$A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ A的列向量线性无关.

例 $P_3[x]$中, 若 $k_1 1+k_2x+k_3x^2=0$, 则必有 $k_1=k_2=k_3=0$

$\Rightarrow$ $1, x, x^2$ 线性无关.

3. 线性子空间

定义 设V是线性空间, W是V的一个非空子集, 如果W也是线性空间(即W在线性空间V的两个运算下仍构成一个线性空间), 则称W是V的一个子空间.

例. (1) $W=\{0\}$ 是V的一个子空间, 称为零子空间 (最小的)

(2) $W=V$ 也是V的子空间 (最大的)

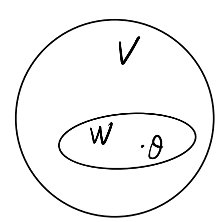
} V的平凡子空间.

定理 设W是线性空间V的非空子集, 则

W是V的子空间 $\Leftrightarrow$ W对加法封闭, W和F对数乘封闭. (无需再验证8条)

即 $\forall\alpha,\beta\in W$, $\forall k\in F$, 有 $\alpha+\beta\in W$, $k\alpha\in W$

Pf. "$\Rightarrow$" 显然.



"$\Leftarrow$" 需验证8条性质. $\forall\alpha,\beta,\gamma\in W$, $\forall k,l\in F$

∵ W是V的子集. ∴ $\alpha,\beta,\gamma\in V$.

而V是F上的线性空间, ∴ α,β,γ 及 k,l 满足①, ②, ⑤~⑧性质.

关键在于验证③, ④性质.

③: W非空. 可取 $\alpha\in W$, 再取 $k=0\in F$. 由封闭性, 知: $\theta=0\alpha\in W$. 即W中有零元素.

④ $\forall \alpha \in W$，取 $k=-1$，由封闭性，有 $-\alpha=(-1)\alpha \in W$，即 α 在 W 中有对应的负元素。#

例. 全体二阶实对称矩阵组成的集合 $SM_2(\mathbb{R})$ 是 $M_2(\mathbb{R})$ 的子空间.

Pf. $SM_2(\mathbb{R})$ 是线性空间 $M_2(\mathbb{R})$ 的非空子集.

$$\begin{cases} \forall A, B \in SM_2(\mathbb{R}). \text{ 则 } (A+B)^T = A^T + B^T = A+B. \quad \therefore A+B \in SM_2(\mathbb{R}). \text{ 加法封闭.} \\ \forall A \in SM_2(\mathbb{R}). \forall k \in \mathbb{R}. \text{ 则 } (kA)^T = kA^T = kA. \quad \therefore kA \in SM_2(\mathbb{R}) \text{ 数乘封闭.} \end{cases}$$

$\therefore SM_2(\mathbb{R})$ 是 $M_2(\mathbb{R})$ 的子空间. #

例 设 $A \in M_{m,n}$，将 n 元齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解集（解向量构成的集合）记为 $N(A)$.

则至少有 $\vec{0} \in N(A)$，$N(A)$ 为 F^n 的非空子集

$$\begin{cases} \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in N(A). \text{ 有 } A\vec{\alpha} = A\vec{\beta} = \vec{0}, \text{ 从而 } A(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta} \in N(A). \text{ 加法封闭.} \\ \forall \vec{\alpha} \in N(A). \forall k \in F. \text{ 有 } A(k\vec{\alpha}) = k(A\vec{\alpha}) = k\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow k\vec{\alpha} \in N(A) \text{ 数乘封闭} \end{cases}$$

$\therefore N(A)$ 是 n 维向量空间 F^n 的子空间. 称为矩阵 A 的解空间 / 化零空间 (Nullspace)

定义 给定线性空间 V 的一组元素 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. 构造子集 $W=\{\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i \mid k_i \in F, i=1,2,\cdots,m\}$

则 W 非空且对 V 的两个运算封闭，则 W 是 V 的子空间. 称为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 生成的子空间，记为 $S(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$. (the span of $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$).

注: $S(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 是包含 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 的最小的子空间.

定义 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$，则 A 的 n 个列向量生成 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间，称为 A 的列空间 (column space)，记为 $C(A)$. i.e. $A=[\vec{\alpha_1} \ \vec{\alpha_2} \cdots \vec{\alpha_n}]$. $C(A) := S(\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots, \vec{\alpha_n})$

注: $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \vec{b} \in C(A)$.

例 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，记 $A=[\vec{\alpha_1} \ \vec{\alpha_2} \ \vec{\alpha_3}]$.

$$C(A)=S(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3})=\{x_1\vec{\alpha_1}+x_2\vec{\alpha_2}+x_3\vec{\alpha_3}\mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$$ 显然 $\vec{\alpha_3}=\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2}$

$$=\{k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}\mid k_1,k_2\in\mathbb{R}\}=S(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2})$$

线性无关，无法再化简

$A\in M_{m,n}$

(1) Nullspace. $N(A)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\mid A\vec{x}=\vec{0}\}$ $\mathbb{R}^n$的子空间.

(2) Column space. $C(A)=\{A\vec{x}\mid\vec{x}\in\mathbb{R}^n\}$. $\mathbb{R}^m$的子空间

例. $A\in M_{m,n}$，$B\in M_{n,s}$，证明

(1) $C(AB)\subset C(A)$. (2) $N(AB)\supset N(B)$.

Pf. (1) $\forall\vec{\alpha}\in C(AB)$，要证 $\vec{\alpha}\in C(A)$.

(AB)列向量的线性组合.

$\because \vec{\alpha}\in C(AB)$. $\therefore \exists\vec{x}\in\mathbb{R}^s$ s.t. $\vec{\alpha}=(AB)\vec{x}=A(B\vec{x})$

记 $\vec{y}=B\vec{x}$，则 $\vec{\alpha}=A\vec{y}$ 为A的列的线性组合. $\therefore \vec{\alpha}\in C(A)$.

(2) $\forall\vec{\alpha}\in N(B)$. 要证 $\vec{\alpha}\in N(AB)$.

$\because \vec{\alpha}\in N(B)$. $\therefore B\vec{\alpha}=\vec{0}$

$\therefore (AB)\vec{\alpha}=A(B\vec{\alpha})=A\vec{0}=\vec{0}$，即 $\vec{\alpha}\in N(AB)$.

$\therefore N(B)\subset N(AB)$. #.

§3.2 齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $\vec{x}=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$, 考虑 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解集 $N(A)$. Nullspace.

已知结论:

(1) $A\vec{x}=\vec{0}$ 至少有零解, $\vec{0}\in N(A)$. (不存在无解的情况)

(2) $m<n$ 时, 方程# < 未知数#, 必有自由变量, 此时有非零解 (无穷多解).

(3) 一般情形 (任意 m,n)

$$\begin{cases} A\vec{x}=\vec{0} \text{ 只有零解} \iff A\text{ 的主元个数 } r=n \text{ (无自由变量)} \iff A\text{ 的列线性无关} \\ A\vec{x}=\vec{0} \text{ 有非零解} \iff A\text{ 的主元个数 } r<n \text{ (}n-r\text{ 个自由变量)} \iff A\text{ 的列线性相关} \end{cases}$$

(4). $m=n$ 时, A 为方阵, 此时

$$\begin{cases} A\vec{x}=\vec{0} \text{ 只有零解} \iff A\text{ 可逆} \\ A\vec{x}=\vec{0} \text{ 有非零解} \iff A\text{ 不可逆} \end{cases}$$

(5) $N(A)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 子空间, 解的任意线性组合仍是解.

Q: 解集的结构? $N(A)$ 可否由有限个解生成?

例 数域F. $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3-x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+6x_2-8x_3+5x_4+3x_5=0 \\ x_1+3x_2-3x_3+6x_4+x_5=0 \end{cases}$

解.

free columns

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{forward elimination}]{\text{Gauss}} U=\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -5 & -1 & 2 \\ & & \boxed{2} & 7 & -1 \\ & & & & \end{bmatrix}$$ row echelon form

pivot columns

$$\xrightarrow[\text{backward substitution}]{\text{Jordan}} R=\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & \frac{33}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & \boxed{1} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Reduced row echelon form (RREF)

(主元上方全消为0, 主元变为1)

主元(pivot variables): x_1, x_3. 自由变量(free variables): x_2, x_4, x_5.

$U\vec{x}=\vec{0}$: $\begin{cases} x_1-5x_3=-3x_2+x_4-5x_5 \\ 2x_3=-7x_4+x_5 \end{cases}$ 任取 x_2, x_4, x_5 的值 都可自下而上解出 x_3, x_1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3x_2-\frac{23}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5 \\ x_3=-\frac{7}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5 \end{cases}$ (此即 $R\vec{x}=\vec{0}$)

取自由变量 $x_2=c_1$, $x_4=c_2$, $x_5=c_3$, $c_1, c_2, c_3 \in F$, 则

$$\begin{cases} x_1 = -3c_1 - \frac{23}{2}c_2+\frac{1}{2}c_3 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = -\frac{7}{2}c_2+\frac{1}{2}c_3, \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases}$$

即 $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -\frac{23}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\vec{s}_1+c_2\vec{s}_2+c_3\vec{s}_3, \quad \forall c_1, c_2, c_3 \in F.$$

$\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$: three special solutions of $A\vec{x}=\vec{0}$.
- 分别取 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其余分量由 R 给出 (取负号)
- $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ 线性无关. (令 $k_1\vec{s}_1+k_2\vec{s}_2+k_3\vec{s}_3=\vec{0}$, 只能推出 $k_1=k_2=k_3=0$)

$A\vec{x}=\vec{0}$ 通解: $\vec{x}=c_1\vec{s}_1+c_2\vec{s}_2+c_3\vec{s}_3$, $\forall c_1, c_2, c_3 \in F$. linear combinations of the special solutions.

总结: 线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$. $A \in M_{m,n}(F)$, n variables, m equations.

$A \xrightarrow{\text{Gauss}} U \xrightarrow{\text{Jordan}} R$

$A\vec{x}=\vec{0}$, $U\vec{x}=\vec{0}$ 及 $R\vec{x}=\vec{0}$ 同解. i.e. $N(A)=N(U)=N(R)$.

设 A 有 r 个主元.

(1) 若 $r=n$. $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解. $N(A)=\{\vec{0}\}=Z$.

(2) 若 $r<n$. 则有 $n-r$ 个自由变量.

分别取其中一个自由变量为1, 其余自由变量为0, 并求解 pivot variables.

得 $n-r$ 个 special solutions: $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \cdots, \vec{s}_{n-r}$.

$N(A)=\{c_1\vec{s}_1+c_2\vec{s}_2+\cdots+c_{n-r}\vec{s}_{n-r} \mid c_i\in F, i=1,2,\cdots,n-r\}$

注: $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \cdots, \vec{s}_{n-r}$ 为 $N(A)$ 一组基. $N(A)$ 维数为 $n-r$ (后续会学到)

<u>定理</u>. 设 $A=[\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2 \cdots \vec{\alpha}_n] \xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{一系列}} B=[\vec{\beta}_1\ \vec{\beta}_2 \cdots \vec{\beta}_n]$

$\forall \{1,2,\cdots,n\}$ 的子列 $\{j_1, j_2, \cdots, j_s\}$. 则:

$\{\vec{\alpha}_{j_1}, \vec{\alpha}_{j_2}, \cdots, \vec{\alpha}_{j_s}\}$ 与 $\{\vec{\beta}_{j_1}, \vec{\beta}_{j_2}, \cdots, \vec{\beta}_{j_s}\}$ 有相同的线性相关性.

进一步地: $x_1\vec{\alpha}_{j_1}+x_2\vec{\alpha}_{j_2}+\cdots+x_s\vec{\alpha}_{j_s}=\vec{0} \Leftrightarrow x_1\vec{\beta}_{j_1}+x_2\vec{\beta}_{j_2}+\cdots+x_s\vec{\beta}_{j_s}=\vec{0}$

初等行变换不改变列向量之间的关系

Pf: 令 $A_1=[\vec{\alpha}_{j_1}, \vec{\alpha}_{j_2}, \cdots, \vec{\alpha}_{j_s}]$, $B_1=[\vec{\beta}_{j_1}, \vec{\beta}_{j_2}, \cdots, \vec{\beta}_{j_s}]$.

$A \xrightarrow{\text{行}} B$. 则 $A_1 \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{相同的初等}} B_1$

$\therefore$ $A_1\vec{x}=\vec{0}$ 与 $B_1\vec{x}=\vec{0}$ 同解 (初等行变换不改变方程组的解)

$\therefore$ $x_1\vec{\alpha}_{j_1}+x_2\vec{\alpha}_{j_2}+\cdots+x_s\vec{\alpha}_{j_s}=\vec{0} \Leftrightarrow x_1\vec{\beta}_{j_1}+x_2\vec{\beta}_{j_2}+\cdots+x_s\vec{\beta}_{j_s}=\vec{0}$ #

Remark: $A\to U\to R$. 可通过研究 U 或 R 的列的关系来得到 A 的列的关系, 从而研究 $C(A)$.

通过行变换化为阶梯形矩阵后, 每行的第1个非零元

<u>定义</u>. A的主元的个数称为A的秩 (rank).

$n-r$ free columns $\begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}$

$$A \xrightarrow[\text{Jordan}]{\text{Gauss}} R=\begin{bmatrix} 0\cdots0 & \boxed{1} & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ & & & \boxed{1} & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ & & & & & \boxed{1} & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & \boxed{1} & *\cdots* \\ & & & & & & & & \end{bmatrix}_{m\times n} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{rank}=r$$

r pivot columns

RREF.

(1) R 的 pivot columns 即 I_m 的前 r 行: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_r$ 它们线性无关.

\- - - - - - - - - - 对应的A的列向量也线性无关.

(2) each free column of R = a linear combination of earlier pivot columns.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \cdots + b_k\vec{e}_k$$

A的列之间也有相应的组合关系.

注：主元对应的A的列向量为C(A)一组基. C(A)的维数为r.