习题课材料（三）

记号: 如不加说明，我们只考虑实矩阵。对于矩阵 A, 它的四个基本子空间是列空间 $C(A)$, 零空间 $N(A)$, 行空间 $C(A^T)$ 和 A^T 的零空间 $N(A^T)$。

习题 1. 假设 V 是一个线性空间，n 是一个正整数，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 V 中一组线性无关的向量，$\beta \in V$。证明：扩充后的向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ 线性相关当且仅当 β 是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的一个线性组合。

习题 2. 对正整数 n, 记 n 阶实方阵的全体为 $\mathbb{M}_n$。

1. 验证 $\mathbb{M}_n$ 配上矩阵加法和矩阵与实数的数乘，构成了一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。
2. 对于下列 $\mathbb{M}_n$ 的各子集，分别判断它们是否构成一个线性子空间。
   (a) $\{A \in \mathbb{M}_n : A = -A^T\}$.
   (b) $\{A \in \mathbb{M}_n : \mathrm{tr}(A) = 0\}$, 其中 $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ 称为 A 的迹。
   (c) $\{A \in \mathbb{M}_n : A$ 与 B 可交换$\}$，其中 B 是给定的一个 n 阶方阵。
   (d) $\{A \in \mathbb{M}_n : Ax = b$ 有解$\}$，其中 b 是给定的 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量。
   (e) $\{A \in \mathbb{M}_n : b \in N(A)$ 且 $b \in N(A^T)\}$, 其中 b 是给定的 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量。

习题 3. $R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵。

1. 求 R 的各子块的大小。
2. 如果 $r = m$，求一个 B 使得 $RB = I$。
3. 如果 $r = n$，求一个 C 使得 $CR = I$。
4. 在上述两小问中，求所有满足条件的 B, C。
5. ($\heartsuit$) 求 $\mathrm{rref}(R^T)$。
6. ($\heartsuit$) 求 $\mathrm{rref}(R^T R)$。

习题 4. A 是 3×4 矩阵，$s = (2, 3, 1, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的唯一特殊解（special solution）。

1. 求 $\mathrm{rank}(A)$ 并找出 $Ax=0$ 的全部解。

2. 求 $\mathrm{rref}(A)$。

3. $Ax=b$ 对任意 b 都有解吗?

习题 5. $Ax=b$ 和 $Cx=b$，对任意 b 都有相同的解集。$A=C$ 成立吗?

习题 6. 假设 $x_1,\ldots,x_p$ 是 $Ax=b$ 的解，且 b 非零。证明：$k_1x_1+\cdots+k_px_p$ 也是解当且仅当 $k_1+\cdots+k_p=1$。

习题 7. 设 A,B 为同型矩阵，且 $N(A)=N(B)$. 试证明 $\mathrm{rref}(A)=\mathrm{rref}(B)$.

习题 8. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha_i\cdot\alpha_j<0,\forall i\neq j$. 证明: 其中任意 n 个向量都线性无关.

习题 9. 证明: 若 $C\in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ 的列向量线性无关, $A\in M_{r\times m}(\mathbb{R}),B=CA$, 则 B 的第 $j_1,\cdots,j_s$ 列线性相关 (resp. 线性无关) 当且仅当 A 的第 $j_1,\cdots,j_s$ 列线性相关 (resp. 线性无关). 特别的, A 与 B 的秩相同.

习题 10. 设线性空间 V 中有向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关. 考虑有序向量组 $\{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$. 求证: 或者该有序向量组线性无关, 或者存在唯一的 i 使得 α_i 可由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表出.

习题 11. 设 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in\mathrm{N}(A)$ 且为 special solutions, β 是非齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解 (particular solution). 证明: $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta\in\mathbb{R}^n$ 是线性无关的.

习题 12. 考察 $\mathbb{R}^5$ 中的三个平面

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_5)^T : 3x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=7\},\\
S_2 &:= \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 : 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2\},\\
S_3 &:= \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 : 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12\}.
\end{aligned}$$

(i) 求它们的交集 S. 判断 $\mathbf{0}$ 是否在 S 里，判断 S 是否构成一个线性空间 (即是 $\mathbb{R}^5$ 的一个子空间)。

(ii) 求一个线性空间 V 和一个向量 $\mathbf{x}_0$ 使得 $S=\mathbf{x}_0+V:=\{\mathbf{x}_0+\mathbf{x}:\mathbf{x}\in V\}$。