分块矩阵的行列式

设$A\in M_s$, $B\in M_t$, 则

① $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$. ② $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \det(A)\cdot\det(B)$ 转置.

③ $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{st}\det(A)\det(B)$. 对于后s列,每列依次与前t列交换,共st次.

例 计算n阶三对角行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

解. Method 1

$$D_n \xlongequal{\text{按第一行展开}} (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & & & \\ & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第1列}} (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$\Rightarrow D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \cdots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$

而 $D_1 = \alpha+\beta$. $D_2 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta \Rightarrow D_2 - \alpha D_1 = \beta^2$

$\Rightarrow D_n = \alpha D_{n-1} + \beta^n$ ①

1°. 若$\alpha=\beta$, 则 $D_n = \alpha D_{n-1} + \alpha^n = \alpha(\alpha D_{n-2} + \alpha^{n-1}) + \alpha^n = \alpha^2 D_{n-2} + 2\alpha^n = \cdots = (n+1)\alpha^n$.

2°. 若$\alpha\neq\beta$, 由α及β的对称性, 有: $D_n = \beta D_{n-1} + \alpha^n$ ②

则 ①$\cdot\beta$ − ②$\cdot\alpha$ $\Rightarrow (\beta-\alpha)D_n = \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \Rightarrow D_n = (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})/(\beta-\alpha)$

Method 2

$$D_n \xlongequal{\text{拆第1列}} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & & & \\ & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

每列乘$-\alpha$,往后列加

$$= \alpha D_{n-1} + \begin{vmatrix} \beta & & & \\ 1 & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \beta \end{vmatrix} = \alpha D_{n-1} + \beta^n. \text{ 即①.}$$

例. 求n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$

解. $D_n \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n \to c_1} \begin{vmatrix} b+(n-1)a & a & \cdots & a \\ b+(n-1)a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b+(n-1)a & a & \cdots & b \end{vmatrix} = [b+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & b \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{(-1)r_1+r_i\to r_i} [b+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & b-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b-a \end{vmatrix} = [b+(n-1)a](b-a)^{n-1}.$$

练习5.2.23 $A_1\in M_m$. $A_2\in M_n$ 且 A_2 为上三角阵, $B\in M_{m,n}$. A_1 与 A_2 没有相同的特征值.

证明: Sylvester 方程 $A_1X-XA_2=B$ 有唯一解 X.

Pf. 设 $X=[\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n]$, $A_2=[a_{ij}]_{n\times n}$, $B=[\vec{b}_1\ \vec{b}_2 \cdots \vec{b}_n]$.

$$A_1X-XA_2=B \Leftrightarrow A_1[\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n]-[\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}=[\vec{b}_1\ \vec{b}_2 \cdots \vec{b}_n] \quad (*)$$

$\because$ A_2 为上三角阵 $\therefore$ 其对角元 a_{ii}, $i=1,2,\cdots,n$ 为其特征值.

(*) 第1列: $A_1\vec{x}_1-a_{11}\vec{x}_1=\vec{b}_1$, 即 $(A_1-a_{11}I)\vec{x}_1=\vec{b}_1$

$\because$ a_{11} 不是 A_1 特征值. $\therefore$ $|A_1-a_{11}I|\neq 0$. $\therefore$ $\vec{x}_1=(A_1-a_{11}I)^{-1}\vec{b}_1$ 唯一解

(*) 第2列: $A_1\vec{x}_2-a_{12}\vec{x}_1-a_{22}\vec{x}_2=\vec{b}_2$, 即 $(A_1-a_{22}I)\vec{x}_2=\vec{b}_2+a_{12}\vec{x}_1$

$\because$ a_{22} 不是 A_1 特征值. $\therefore$ $|A_1-a_{22}I|\neq 0$. $\therefore$ $\vec{x}_2$ 有唯一解

$\vdots$

一般情形: 略.

例. $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&a&b\\0&c&d\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&&\\&t&\\&&3\end{bmatrix}$, A与B相似, 求$|A|$.

解. A与对角阵B相似，则 $\begin{cases}\text{B的对角元}1,t,3\text{为A的特征值}\\|A|=|B|=3t.\end{cases}$

而 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&&\\&\lambda-a&-b\\&-c&\lambda-d\end{vmatrix}:=0 \Rightarrow \lambda=2$ 为A的一个特征值.

$\therefore t=2$. $|A|=3t=6$.

例. A是下三角矩阵. 若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$, 且至少有一个 $a_{i_0j_0}\neq0$ $(i_0>j_0)$. 证明: A不可相似对角化.

Pf. $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&&&\\&\lambda-a_{11}&&\\&*&\ddots&\\&&&\lambda-a_{11}\end{vmatrix}=(\lambda-a_{11})^n:=0$, 得特征值 a_{11} (代数重数为n)

$a_{11}I$

假设A可以对角化, 则∃可逆矩阵P. s.t. $A=P^{-1}\Lambda P$. 其中 $\Lambda=diag(a_{11},a_{11},\cdots,a_{11})$.

$\therefore A=P^{-1}\Lambda P=a_{11}P^{-1}IP=a_{11}P^{-1}P=a_{11}I=\Lambda$.

与 $a_{i_0j_0}\neq0$ 矛盾. $\therefore$ A不可相似对角化.

例. 设A为实对称阵. 若有实向量 $\vec{x}_1$ 和 $\vec{x}_2$, s.t. $\vec{x}_1^TA\vec{x}_1>0$, $\vec{x}_2^TA\vec{x}_2<0$.

证明: ∃向量 $\vec{x}_0\neq\vec{0}$. s.t. $\vec{x}_0^TA\vec{x}_0=0$.

Pf. ∵ A为实对称阵.

∴ ∃正交阵Q. 对角阵$\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. s.t. $A=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T$.

则 $\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{x}^TQ\Lambda Q^T\vec{x}=(Q^T\vec{x})^T\Lambda(Q^T\vec{x})=\vec{\xi}^T\Lambda\vec{\xi}$, 其中 $\vec{\xi}=Q^T\vec{x}$. $(\vec{x}=Q\vec{\xi})$

$=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\cdots+\lambda_n\xi_n^2$.

由题设 $\begin{cases}\exists\ \vec{\xi}_1:=Q^T\vec{x}_1,\ s.t.\ \vec{\xi}_1^T\Lambda\vec{\xi}_1=\vec{x}_1^TA\vec{x}_1>0. \Rightarrow \lambda_1,\cdots,\lambda_n\text{中至少有一个严格}>0.\\\exists\ \vec{\xi}_2=Q^T\vec{x}_2,\ s.t.\ \vec{\xi}_2^T\Lambda\vec{\xi}_2=\vec{x}_2^TA\vec{x}_2<0. \Rightarrow \text{- - - - - - - - - -}<0.\end{cases}$

不妨设 $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$. 取 $\vec{\xi}_0=[1/\sqrt{\lambda_1}, 1/\sqrt{-\lambda_2}, 0,\cdots,0]^T$, 则 $\vec{\xi}_0^T\Lambda\vec{\xi}_0=0$.

取 $\vec{x}_0=Q\vec{\xi}_0$, 又有Q可逆, $\vec{\xi}_0\neq\vec{0}$. 则 $\vec{x}_0\neq\vec{0}$. 且 $\vec{x}_0^TA\vec{x}_0=\vec{\xi}_0^T\Lambda\vec{\xi}_0=0$. #

例 实二次型 $\eta(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3=\vec{x}^TA\vec{x}$, $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$. 求参数 η 的范围. s.t.

(1) A 正定

(2) 二次型可写为 $(ax_1+bx_2+cx_3)^2$ 的形式, 其中 a,b,c 不全为 0.

解. (1) $A=\begin{bmatrix}\eta & -1 & -1\\ -1 & \eta & 1\\ -1 & 1 & \eta\end{bmatrix}$. A 正定 $\Leftrightarrow$ 所有顺序主子式 >0.

$$\left.\begin{array}{l}\det A_1=\eta>0. \quad \det A_2=\begin{vmatrix}\eta & -1\\ -1 & \eta\end{vmatrix}=\eta^2-1>0\\ \det A=(\eta-1)^2(\eta+2)>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \eta>1$$

(2) $\because$ a,b,c 不全为 0 ,

$\therefore$ 总可找到可逆矩阵 P. s.t. $\vec{y}=P\vec{x}$. $\vec{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$ $\begin{cases}y_1=ax_1+bx_2+cx_3\\ y_2=\cdots\\ y_3=\cdots\end{cases}$

而 $\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{y}^TB\vec{y}$, 其中 $B=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}$ 标准形. 正惯性指数 $=1$.

又 $\vec{y}^TB\vec{y}=\vec{x}^T(P^TBP)\vec{x}$. $\therefore A=P^TBP$. 合同.

$\therefore \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=1$. $\Rightarrow A$ 每行成比例 $\Rightarrow \eta=1$ (比较前2行).

例 $S\in M_n$ 是正定矩阵, 特征值(按重数记)为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$.

(1) 证明: λ_1I_n-S 是半正定的.

(2) 证明: $\max\limits_{\vec{x}\neq\vec{0}}\dfrac{\vec{x}^TS\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}=\lambda_1$. 这里 $\|\vec{x}\|^2=\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$, 何时等号成立?

(3) 设 $\lambda_1>\lambda_2$. 证明: $\max\limits_{\vec{x}\neq\vec{0},\vec{x}\perp\vec{q}_1}\dfrac{\vec{x}^TS\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}=\lambda_2$. 这里 $\vec{q}_1$ 是属于 λ_1 的特征向量.

Pf. (1) λ_1I_n-S 仍是实对称阵

λ_1I_n-S 的特征值是 $\lambda_1-\lambda_i$, $i=1,2,\cdots,n$ (见之前笔记)

$\therefore$ λ_1I_n-S 的所有特征值都非负 $\Rightarrow$ λ_1I_n-S 半正定

(2) $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. 有 $\vec{x}^T(\lambda_1I_n-S)\vec{x}\geqslant0$. 即 $\vec{x}^TS\vec{x}\leqslant\lambda_1\vec{x}^TI\vec{x}=\lambda_1\|\vec{x}\|^2$

$\because$ 当 $\vec{x}\neq\vec{0}$, 有 $\dfrac{\vec{x}^TS\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}\leqslant\lambda_1$ $\Rightarrow$ $\sup\limits_{\vec{x}\neq\vec{0}}\dfrac{\vec{x}^TS\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\leqslant\lambda_1$

而当 $\vec{x}=\vec{q}_1$ 时. $\vec{x}^TS\vec{x}=\vec{q}_1^T(\lambda_1\vec{q}_1)=\lambda_1\|\vec{q}_1\|^2=\lambda_1\|\vec{x}\|^2$. 即 $\dfrac{\vec{x}^TS\vec{x}}{\|\vec{x}\|}=\lambda_1$.

(3) $\because S$ 为实对称阵

$\therefore \exists$ 正交阵 $Q = [\vec{q}_1\ \vec{q}_2 \cdots \overset{\swarrow \text{特征向量}}{\vec{q}_n}]$ 及对角阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\overset{\downarrow \text{特征值}}{\lambda_1}, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ s.t.

$$Q^T S Q = Q^{-1} S Q = \Lambda \quad \text{，即 } S = Q\Lambda Q^T.$$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$，有 $\vec{x}^T S \vec{x} = \vec{x}^T (Q\Lambda Q^T)\vec{x} = (Q^T\vec{x})^T \Lambda (Q^T\vec{x}) = \vec{\xi}^T \Lambda \vec{\xi}$. 其中 $\vec{\xi} = Q^T\vec{x}$

设 $\vec{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]^T$

若 $\vec{x} \perp \vec{q}_1$，则 $\xi_1 = \vec{q}_1^T \vec{x} = 0$.

$$\therefore \vec{x}^T S \vec{x} = \vec{\xi}^T \Lambda \vec{\xi} = \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + \cdots + \lambda_n \xi_n^2$$

$$\le \lambda_2 (\xi_2^2 + \xi_3^2 + \cdots + \xi_n^2) = \lambda_2 \|\vec{\xi}\|^2 \underset{\uparrow Q^T\text{正交，保长度.}}{=} \lambda_2 \|\vec{x}\|^2.$$

$$\therefore \sup_{\vec{x} \ne \vec{0},\ \vec{x} \perp \vec{q}_1} \frac{\vec{x}^T S \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \le \lambda_2$$

而当 $\vec{x} = \vec{q}_2$ 时，有 $\vec{x} \ne \vec{0}$，$\vec{x} \perp \vec{q}_1$，且 $\dfrac{\vec{x}^T S \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} = \dfrac{\vec{q}_2^T (\lambda_2 \vec{q}_2)}{\|\vec{q}_2\|^2} = \lambda_2$

$$\therefore \max_{\vec{x} \ne \vec{0},\ \vec{x} \perp \vec{q}_1} \frac{\vec{x}^T S \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} = \lambda_2. \quad \#$$

例. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶可逆矩阵 $(n \ge 2)$. 求:

(1) $(A^*)^{-1}$ (2) $(A^{-1})^*$. (3) $(kA)^*$, $k \ne 0$ (4) $(A^*)^*$.

解: $AA^* = |A| I_n$. 当 A 可逆时，有 $A^* = |A| A^{-1}$

(1) A^* 可逆. $\therefore (A^*)^{-1} = (|A| A^{-1})^{-1} = |A|^{-1} A$

(2) $(A^{-1})^* = |A^{-1}| (A^{-1})^{-1} = |A|^{-1} A$.

(3) $(kA)^* = |kA| (kA)^{-1} = k^n |A| k^{-1} A^{-1} = k^{n-1} |A| A^{-1} = k^{n-1} A^*$.

(4) $(A^*)^* = |A^*| (A^*)^{-1} = \big| |A| A^{-1} \big| |A|^{-1} A = |A|^n |A^{-1}| |A|^{-1} A = |A|^{n-2} A$.

例. 实对称阵 $S=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$，是否正定?

解: (1) $f_S(\lambda)=|\lambda I-S|=0 \Rightarrow$ eigenvalues: $\lambda_1=2,\ \lambda_2=2-\sqrt{2},\ \lambda_3=2+\sqrt{2}$.

all positive $\Rightarrow$ 正定.

(2) 顺序主子式: $\det S_1=2$, $\det S_2=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3$, $\det S=4$ $(=\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$

all positive $\Rightarrow$ 正定.

(3) 利用第2类初等行变换

$$S \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix}2&-1&0\\0&\frac{3}{2}&-1\\0&-1&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{3}r_2+r_3\to r_3} \begin{bmatrix}2&-1&0\\&\frac{3}{2}&-1\\&&\frac{4}{3}\end{bmatrix}=U$$

U的对角元: $2>0,\ \frac{3}{2}>0,\ \frac{4}{3}>0 \Rightarrow S$正定

$(\det S_1=2,\quad \det S_2=2\times\frac{3}{2}=3,\quad \det S=2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=4)$

(4) $\vec{x}^T S\vec{x}>0,\ \forall \vec{x}\neq\vec{0}$?

① $S=Q\Lambda Q^T$, $Q=[\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \overset{\text{特征向量}}{\vec{q}_3}]$. $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\overset{\text{特征值}}{\lambda_3})=\operatorname{diag}(2,2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$.

取 $\vec{y}=Q^T\vec{x} \Rightarrow y_1=\vec{q}_1^T\vec{x},\ y_2=\vec{q}_2^T\vec{x},\ y_3=\vec{q}_3^T\vec{x}$.

$\vec{x}^TS\vec{x}=\vec{y}^T\Lambda\vec{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=\lambda_1(\vec{q}_1^T\vec{x})^2+\lambda_2(\vec{q}_2^T\vec{x})^2+\lambda_3(\vec{q}_3^T\vec{x})^2>0.\ \forall\vec{x}\neq\vec{0}$.

② $S=LU=\begin{bmatrix}1&&\\-\frac{1}{2}&1&\\0&-\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&0\\&\frac{3}{2}&-1\\&&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&&\\-\frac{1}{2}&1&\\0&-\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&\frac{3}{2}&\\&&\frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\&1&-\frac{2}{3}\\&&1\end{bmatrix}=LDL^T$, S相合于D.

取 $\vec{y}=L^T\vec{x} \Rightarrow y_1=x_1-\frac{1}{2}x_2,\ y_2=x_2-\frac{2}{3}x_3,\ y_3=x_3$.

$\vec{x}^TS\vec{x}=\vec{y}^TD\vec{y}=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2+\frac{4}{3}y_3^2$

$=2(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{2}(x_2-\frac{2}{3}x_3)^2+\frac{4}{3}x_3^2>0.\ \forall\vec{x}\neq\vec{0}$.

(5) $S=A^TA$, A列满秩?

① $S=A_1^TA_1$, $A_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$, 列满秩, 不是方阵.

② $S=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T$, Q的列: 特征向量. $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ Q正交阵, $Q^TQ=I$.

取 $A_2=\sqrt{\Lambda}Q^T$, 则 $A_2^TA_2=Q\sqrt{\Lambda}\sqrt{\Lambda}Q^T=Q\Lambda Q^T=S$. A_2: 列满秩.

取 $A_3=Q\sqrt{\Lambda}Q^T$, 则 $A_3^TA_3=Q\sqrt{\Lambda}\underline{Q^TQ}\sqrt{\Lambda}Q^T=Q\Lambda Q^T=S$. A_3: 列满秩.

③ $S=LDL^T=L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T=(\sqrt{D}L^T)^T(\sqrt{D}L^T)=A_4^TA_4$. $A_4=\sqrt{D}L^T$ Cholesky factor of S.