例 方阵$A\in M_n$, $f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$, $\lambda_i\neq\lambda_j$ for $i\neq j$. $\sum_{i=1}^{s}n_i=n$. $s\le n$.

证明: (1) 若$\lambda_i\neq 0$, $i=1,2,\cdots,s$, 则 $\operatorname{rank}(A)=n$.

(2) 若 $\lambda_k=0$, 则 $n-n_k\le\operatorname{rank}(A)<n$.

Pf. (1) $|A|=\prod_{i=1}^{s}(\lambda_i)^{n_i}\neq 0$. $\therefore \operatorname{rank}(A)=n$. 可逆.

(2) 设λ_k的几何重数为m_k. 即 $m_k=\dim V_{\lambda_k}=\dim N(\lambda_k I-A)$.

而$\lambda_k=0$. $\therefore m_k=\dim N(A)=n-\operatorname{rank}(A)$

又有 $m_k\le n_k$

$\Rightarrow n-\operatorname{rank}(A)\le n_k \Rightarrow n-n_k\le\operatorname{rank}(A)$

而 $|A|=\prod_{i=1}^{s}(\lambda_i)^{n_i}=0 \Rightarrow \operatorname{rank}(A)<n$. #

注: ① $\operatorname{rank}(A)\ge n-n_k=\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{s}n_i$, 即 $\operatorname{rank}(A)\ge$非零特征值的代数重数之和.

② 若A可对角化, 则 $m_i=n_i$, $i=1,2,\cdots,S$.

$\operatorname{rank}(A)=n-n_k=\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{s}n_i$, 即 $\operatorname{rank}(A)=$非零特征值的代数(几何)重数之和.

$$A=X\begin{bmatrix}\left.\begin{matrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_1\end{matrix}\right\}m_1个&&&\\&\left.\begin{matrix}\lambda_2&&\\&\ddots&\\&&\lambda_2\end{matrix}\right\}m_2个&&\\&&\ddots&\\&&&\left.\begin{matrix}\lambda_s&&\\&\ddots&\\&&\lambda_s\end{matrix}\right\}m_s个\end{bmatrix}X^{-1}.\qquad \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(\Lambda)$$

幂等矩阵 $A\in M_n$. $A^2=A$.

(*) $\begin{cases}\forall\vec{x}\in N(A).\ 有\ A\vec{x}=\vec{0}=0\vec{x}. & A限制在N(A)上为零变换\\ \forall\vec{x}\in C(A).\ 则\ \exists\vec{y}\in\mathbb{R}^n.\ s.t.\ \vec{x}=A\vec{y}.\ 而\ A\vec{x}=A(A\vec{y})=A^2\vec{y}=A\vec{y}=\vec{x}=1\vec{x} & 恒等变换\end{cases}$

① 若$N(A)$中含非零向量, 则0为一个特征值. 而 $V_0=N(A)$. 几何重数$=\dim N(A)=n-\operatorname{rank}(A)$

若 $C(A)$中……, 则1……, 而 $V_1=C(A)$, 几何重数$=\dim C(A)=\operatorname{rank}(A)$.

几何重数之和$=n\Rightarrow$ A可以相似对角化. 维数公式: $\dim(C(A)+N(A))=n$.

② 由(*) $\Rightarrow N(A)\cap C(A)=\{\vec{0}\}$. 而 $\dim N(A)+\dim C(A)=n$ $\Big\}\Rightarrow C(A)\oplus N(A)=\mathbb{R}^n$, 直和分解

$\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, 有 $\vec{x}=\vec{x}_c+\vec{x}_N$, $\vec{x}_c\in C(A)$. $\vec{x}_N\in N(A)$. $A\vec{x}=A\vec{x}_c+\overset{\vec{0}}{A\vec{x}_N}=A\vec{x}_c=\vec{x}_c$

③ 进一步地, 若$A=A^T$ (symmetric), 则 $C(A)\perp N(A)$. 结合②, 有$C(A)$与$N(A)$互为$\mathbb{R}^n$中正交补.

$\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. 有 $A\vec{x}=\vec{x}_c\in C(A)$, 且$(\vec{x}-\vec{x}_c)\perp C(A)$, A为投影矩阵.

§6.4 Symmetric Matrices

一般实矩阵的特征值未必是实数.

例. $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ （旋转）

解: $|\lambda I-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=\cos\theta+i\sin\theta$, $\lambda_2=\cos\theta-i\sin\theta$ $\lambda_1=\overline{\lambda_2}$

$\begin{cases}\lambda_1 \text{ 对应的特征向量}: \vec{x}_1=[1 \quad -i]^T \\ \lambda_2 \text{ - - - - - - -}: \vec{x}_2=[1 \quad i]^T\end{cases}$ $\vec{x}_1=\overline{\vec{x}_2}$.

定理. For real matrices, complex λ's and $\vec{x}$'s come in "conjugate pairs". 共轭,成对出现.
If $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, then $A\overline{\vec{x}}=\overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}}$.

定理 设S是实对称阵, 则A的特征值都实数

Pf. 设 $S\vec{x}=\lambda\vec{x}$, $\vec{x}\neq\vec{0} \Rightarrow \overline{\vec{x}}^T S\vec{x}=\lambda\,\overline{\vec{x}}\cdot\vec{x}$

两边取共轭: $S\overline{\vec{x}}=\overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}} \Rightarrow \overline{\vec{x}}^T S=\overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}}^T \Rightarrow \overline{\vec{x}}^T S\vec{x}=\overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}}\cdot\vec{x}$

$\Rightarrow (\lambda-\overline{\lambda})(\overline{\vec{x}}\cdot\vec{x})=0$

$\overline{\vec{x}}\cdot\vec{x}=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2=\|\vec{x}\|^2\neq 0$

$\Rightarrow \lambda=\overline{\lambda} \Rightarrow \lambda$ 为实数. #

例. $S=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$, S: real, symmetric.

解: $|\lambda I-S|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda:=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=5$ (both real)

$\begin{cases} S \text{ is singular (不可逆)}. \text{一定}\exists\,\vec{x}\neq\vec{0}, \text{ s.t. } S\vec{x}=\vec{0}=0\vec{x} \Rightarrow \lambda_1=0. \\ \lambda_1+\lambda_2=\operatorname{tr}S=5 \Rightarrow \lambda_2=5.\end{cases}$ (both real)

① $\lambda_1=0$. $\begin{bmatrix}-1&-2\\-2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=k\underbrace{\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}}_{\vec{x}_1}$, $\forall k\neq 0$. $\{\vec{x}\mid S\vec{x}=\vec{0}\}=N(S)$

② $\lambda_2=5$. $\begin{bmatrix}4&-2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=k\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}_{\vec{x}_2}$, $\forall k\neq 0$ $\{\vec{x}\mid S\vec{x}=5\vec{x}\}=C(S)$ dim=1

Notice that: $\vec{x}_1\perp\vec{x}_2$.

$N(S)\perp \underbrace{C(S^T)}_{\text{row space}}$, 而 $S=S^T$. $\therefore C(S^T)=\underbrace{C(S)}_{\text{column space}} \Rightarrow N(S)\perp C(S)$

定理 设S是n阶实对称阵，则其一定可相似对角化。($\exists n$个线性无关的特征向量)

特别地，其有n个标准正交的特征向量 $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \cdots, \vec{q}_n$ s.t. $S\vec{q}_i = \lambda_i \vec{q}_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

orthonomal (一定线性无关)

令 $Q=[\vec{q}_1\ \vec{q}_2 \cdots \vec{q}_n]$，则$Q$为正交矩阵，且

$$SQ = Q\Lambda, \quad \text{即} \quad Q^{-1}SQ=\Lambda \quad \text{及} \quad S=Q\Lambda Q^{-1}, \quad \text{其中} \ \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

注. $\because Q$为正交阵，$\therefore Q^{-1}=Q^T$.

即 $$S = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T = [\vec{q}_1\ \vec{q}_2 \cdots \vec{q}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{q}_1^T \\ \vec{q}_2^T \\ \vdots \\ \vec{q}_n^T\end{bmatrix} = \lambda_1\vec{q}_1\vec{q}_1^T + \lambda_2\vec{q}_2\vec{q}_2^T + \cdots + \lambda_n\vec{q}_n\vec{q}_n^T.$$

定理 设S是实对称矩阵，λ_1和λ_2是S的两个互异的特征值，$\vec{x}_1$和$\vec{x}_2$分别是属于λ_1和λ_2的特征向量，则$\vec{x}_1$与$\vec{x}_2$必正交.

Pf. $$\left.\begin{aligned} &S\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1 \Rightarrow \vec{x}_2^T S\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_2^T\vec{x}_1 \\ &S\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2 \Rightarrow \vec{x}_2^T S\vec{x}_1 = (S\vec{x}_2)^T\vec{x}_1 = \lambda_2\vec{x}_2^T\vec{x}_1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)\vec{x}_2^T\vec{x}_1 = 0 \\ &\lambda_1 \neq \lambda_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{x}_2^T\vec{x}_1 = 0 \Rightarrow \vec{x}_1 \perp \vec{x}_2 \quad \#$$

P339 Example 2. $S=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$.

Q: 给定实对称阵S，如何求正交阵Q，将S相似对角化? $Q^{-1}SQ=\Lambda$. i.e. $SQ=Q\Lambda$

Step 1 $f_S(\lambda) = |\lambda I - S| = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$互异.

Let $f_S(\lambda)=0 \Rightarrow$ eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{R}$.

Step 2 (若为一般矩阵，需判断是否可对角化($m_i=n_i$, $i=1,\cdots,s$).
$\because S$是实对称阵 $\therefore$一定可对角化(一定有$m_i=n_i$) 故可省去此判别)

For each λ_i, solve $(\lambda_i I - S)\vec{x} = \vec{0}$ to get independent eigenvectors
$\vec{x}_{i1}, \vec{x}_{i2}, \cdots, \vec{x}_{i,m_i}$ i.e. a basis of $N(\lambda_i I - S) = V_{\lambda_i}$.

Step 3 For each λ_i, $\vec{x}_{i1}, \vec{x}_{i2}, \cdots, \vec{x}_{i,n_i} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \vec{q}_{i1}, \vec{q}_{i2}, \cdots, \vec{q}_{i,n_i}$ (orthonormal)

Step 4 Then $Q = [\vec{q}_{11}, \cdots, \vec{q}_{1,n_1}, \vec{q}_{21}, \cdots, \vec{q}_{2,n_2}, \cdots, \vec{q}_{s1}, \cdots, \vec{q}_{s,n_s}]$

$$\Lambda = diag(\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{n_1}, \underbrace{\lambda_2, \cdots, \lambda_2}_{n_2}, \cdots, \underbrace{\lambda_s, \cdots, \lambda_s}_{n_s})$$

合同对角化

<u>定义</u> $A,B\in M_n$，若∃可逆方阵 P，s.t. $B=P^TAP$，称 A 与 B 相合/合同。

<u>定理</u> 设 A 为对称方阵，则其总可以合同对角化，即∃可逆矩阵 P，s.t. $P^TAP=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$

注：若令 $\tilde{P}=(P^T)^{-1}$，则有 $A=\tilde{P}\,\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)\tilde{P}^T$

注：① 合同对角化过程 P 及对角阵 $\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 都不唯一。

② 实对称阵：$\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 中<u>正元素的个数唯一</u>，<u>负元素的个数唯一</u>。（matching signs）

$\underbrace{\text{正元素的个数}}_{\text{正惯性指数}}+\underbrace{\text{负元素的个数}}_{\text{负惯性指数}}=\mathrm{rank}(A)$

③ 特别地，若 A 是实对称阵，其中一种合同对角化的途径为：

∃正交矩阵 Q，使其相似对角化，$Q^{-1}AQ=\Lambda$
而 $Q^{-1}=Q^T$
$\Rightarrow Q^TAQ=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

real eigenvalues

orthonormal eigenvectors.

<u>例</u> S 为实对称阵，不同的合同对角化过程：

$\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ * & & 1\end{bmatrix}$ 　对角阵，对角线上为主元。

① 若 S 可仅通过第2类初等行变换化为上三角阵，则 $S=LU=LDL^T$，S 与 D 相合

② ∃正交阵 Q，s.t. $S=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T$，$S$ 与 Λ 相合。

二次型

<u>定义</u> n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$（规定 $a_{ij}=a_{ji}$）称为 n 元二次型。

记为 $\vec{x}^TA\vec{x}$，其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$（symmetric，$A=A^T$），$\vec{x}=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$

<u>例</u> 3元二次型 $3x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-x_1x_3+4x_2x_3=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}3 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 2\\ -\frac{1}{2} & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

<u>定义</u> 二次型的标准形：$\sum_{i=1}^{n}c_ix_i^2=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]\begin{bmatrix}c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}$

可逆线性替换：$\vec{x}=P\vec{z}$，P 可逆

则 $\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{z}^T(P^TAP)\vec{z}\ \xlongequal{\text{记为}}\ \vec{z}^TB\vec{z}$，其中 $B=P^TAP$ 相合。

定理. 二次型 $\vec{x}^T A \vec{x}$ (满足 $A=A^T$) 总可通过合适的可逆线性替换 $\vec{x}=P\vec{\xi}$, 变为标准形:

$$\vec{x}^T A \vec{x} = b_1\xi_1^2 + b_2\xi_2^2 + \cdots + b_n\xi_n^2.$$

Pf: A为对称方阵, 则其总可以合同对角化,

即∃可逆矩阵P, s.t. $P^T A P = B = diag(b_1, b_2, \cdots, b_n)$

令 $\vec{x}=P\vec{\xi}$, 则有: $\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{\xi}^T(P^T A P)\vec{\xi} = b_1\xi_1^2 + b_2\xi_2^2 + \cdots + b_n\xi_n^2$

与上面的P不同.

注: 有时也写成 $A = PBP^T$, P可逆, B为对角阵, 则

$\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T PBP^T \vec{x} = (P^T\vec{x})^T B (P^T\vec{x})$

令 $\vec{\xi} = P^T\vec{x}$, 则有 $\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{\xi}^T B \vec{\xi} = b_1\xi_1^2 + b_2\xi_2^2 + \cdots + b_n\xi_n^2$.