习题课材料（十一）

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

习题 1. 记实数域 $\mathbb{R}$ 上的全体一元可导函数组成的集合为 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$，定义 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ 上的变换: $\boldsymbol{A}\big(f(x)\big) = xf(x) \quad \forall f(x) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ 上的一个线性变换。

(2) 设 $\boldsymbol{D}$ 是求导算子，证明 $\boldsymbol{DA}-\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{I}$.

答案. 按照定义证明。 □

习题 2. 考虑 xy 平面，设 T 为关于 x 轴的反射变换，S 为关于 y 轴的反射变换。对于任意向量 $\mathbf{v}=(x,y)$，写出 $S(T(\mathbf{v}))$，并给出线性变换 ST 的更简单的描述。

习题 3. 设 $\mathscr{V}$ 是所有 2 阶对称矩阵构成的线性空间，f 是其上的线性变换：$f(X)=A^{\mathrm{T}}XA$, 其中 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 求 f 在基 $E_{11},E_{22},E_{12}+E_{21}$ 下的矩阵。其中 E_{ij} 为 (i,j) 处元素为 1，其余元素都是 0 的矩阵。

$f(E_{11})=\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$ $f(E_{22})=\begin{pmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{pmatrix}$ $f(E_{12}+E_{21})=\begin{pmatrix} 2ac & ad+bc \\ ad+bc & 2bd \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(E_{11}\ E_{22}\ E_{12}+E_{21})$
$=(E_{11}\ E_{22}\ E_{12}+E_{21})\begin{pmatrix} a^2 & c^2 & 2ac \\ b^2 & d^2 & 2bd \\ ab & cd & ad+bc \end{pmatrix}$

习题 4. 设 3 维线性空间 $\mathscr{V}$ 有一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，其上的线性变换 f 在该组基下的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 f 的全部特征值和特征向量。

(2) 判断是否存在一组基，使得 f 在该组基下的表示矩阵是对角矩阵。如果存在，写出这组基及对应的对角矩阵。

答案. 求解 A 的特征值 $\lambda_{1,2}=3,\lambda_3=1$ 和相应的特征向量 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。则 f 的特征值和特征向量为

$$(\lambda,\boldsymbol{x})=(3,\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),\ 和(1,-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3).$$

□

习题 5. 考虑二阶矩阵空间 $M_2(\mathbb{R})$ 上的线性变换 $T(M) = AMB$，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。描述 $\ker(T)$ 及 ImT。

答案. $\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,c,d \in \mathbb{R} \right\}$。$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$。可以验证 $\dim\ker(T) + \dim Im(T) = \dim M_2(\mathbb{R})$。 □

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$AMB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$