§2.7 转置及置换矩阵

1. 矩阵的转置

定义　将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行与列互换，得到的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 A 的转置(transpose)，记作 A^T.

注. 记 $A^T=(\hat{a}_{ij})_{n\times m}$，则 $\hat{a}_{ij}=a_{ji}$，$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,m$

例　$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，$[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

定理　设 A, B 是矩阵，k 是常数，则

(1) $(A^T)^T=A$.　(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(3) $(kA)^T=kA^T$　(4) $(AB)^T=B^TA^T$　(5) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

Pf. (4) ① 先证 对列向量 $\vec{x}$，有 $(A\vec{x})^T=\vec{x}^TA^T$.

设 $A=[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_m]$，$\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$，则 $A\vec{x}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\cdots+x_m\vec{a}_m$

$$\therefore (A\vec{x})^T = x_1\vec{a}_1^T+x_2\vec{a}_2^T+\cdots+x_m\vec{a}_m^T = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_m]\begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T \end{bmatrix} = \vec{x}^TA^T.$$

② 设 $B=[\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \cdots\ \vec{b}_n]$，则 $AB=[A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2\ \cdots\ A\vec{b}_n]$.

$$\therefore (AB)^T = \begin{bmatrix} (A\vec{b}_1)^T \\ (A\vec{b}_2)^T \\ \vdots \\ (A\vec{b}_n)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^TA^T \\ \vec{b}_2^TA^T \\ \vdots \\ \vec{b}_n^TA^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^T \\ \vec{b}_2^T \\ \vdots \\ \vec{b}_n^T \end{bmatrix} A^T = B^TA^T \qquad \#$$

(5) $AA^{-1}=I$，两边取转置 有: $(A^{-1})^TA^T=I^T=I$

$$\therefore (A^{-1})^T=(A^T)^{-1}. \qquad \#$$

注: $(A_1A_2\cdots A_s)^T = A_s^T A_{s-1}^T \cdots A_2^T A_1^T$

A可逆 $\Longleftrightarrow$ A^T可逆

例 ① dot product (inner product): $\vec{x}\cdot\vec{y}=\sum_{k=1}^{n} x_i y_i = \vec{x}^T\vec{y}$ 1×1 a numble

② rank one product (outer product): $\vec{x}\,\vec{y}^T$ matrix

③ $(A\vec{x})^T\vec{y} = \vec{x}^T(A^T\vec{y})$. i.e. $(A\vec{x})\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot(A^T\vec{y})$.

定义. 若方阵S满足 $S^T=S$, 称S是对称矩阵 (symmetric matrix)

……………… $S^T=-S$, …… 反对称矩阵 (skew-symmetric matrix)

注 ①若 $S^T=S$, 则 $S_{ij}=S_{ji}$, $\forall i,j$. ②若 $S^T=-S$, 则 $S_{ij}=-S_{ji}$, $\forall i,j$.

例. $$P_{ij}=\begin{array}{c}\\ \\ i行\rightarrow \\ \\ j行\rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & 1 \ddots 1 & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & i列 & j列 \end{array}$$
为对称矩阵.

定理. 若可逆矩阵S是对称矩阵, 则 S^{-1} 也是对称矩阵.

Pf. $(S^{-1})^T=(S^T)^{-1}=S^{-1}$. ∴ S^{-1}是对称阵.

例 $S=\begin{bmatrix}2&2\\2&3\end{bmatrix}$, $S=S^T$, 对称 $2\times3-2\times2=2\neq0$.

∴ S可逆 且 $S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-2\\-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-1\\-1&1\end{bmatrix}$, S^{-1}也是对称矩阵.

定理 $\forall A\in M_{m,n}(F)$, 有 $\overset{n\times n}{\overset{\downarrow}{A^TA}}$ 及 $\overset{m\times m}{\overset{\downarrow}{AA^T}}$ 都是对称矩阵.

Pf. Method 1. $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$. ∴ A^TA是对称矩阵.

Method 2. 令 $A=[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n]$, 则

$$\begin{cases}(A^TA)_{ij} = \vec{a_i}^T\vec{a_j} = \vec{a_i}\cdot\vec{a_j} \\ (A^TA)_{ji} = \vec{a_j}^T\vec{a_i} = \vec{a_i}\cdot\vec{a_j}\end{cases} \Rightarrow (A^TA)_{ij} = (A^TA)_{ji}. \quad i,j=1,\cdots,n$$

$\therefore A^TA$ 为对称矩阵.

注：A^TA 及 AA^T 的主对角线元素均非负.

<u>定理</u> 设可逆矩阵 S 是对称阵. 且其可仅通过第2类初等行变换变为上三角阵.

则其 LDU 分解满足 $U=L^T$，即 $S=LDU=LDL^T$. ↑ no row exchages.

Pf. 参看 Problem set 2.6, 15 题，LDU 分解唯一性.

2. 置换矩阵 Permutation matrices

<u>定义</u> 将单位阵 I_n 的行进行任意排列. 所得到的矩阵 P 称为置换矩阵.

注 (1) P 的每行及每列有且仅有一个元素 1，其余元素均为 0.

(2) P^T 仍是置换矩阵

(3) P 可通过将 I 的行进行有限次的两两对换所得到.

$\therefore P$ 可写成若干个第3类初等矩阵的乘积.

(4) 置换矩阵的乘积仍是置换矩阵

(5) n 阶置换矩阵共 $n!$ 个.

例. $$P=\begin{bmatrix}\vec{e_4}^T\\ \vec{e_1}^T\\ \vec{e_2}^T\\ \vec{e_3}^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 1\\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} = P_{34}P_{24}P_{14}I_4 = P_{34}P_{24}P_{14}$$

例. $n=3$.

$$I_3=\begin{bmatrix}\vec{e_1}^T\\ \vec{e_2}^T\\ \vec{e_3}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}, \quad P_{23}=\begin{bmatrix}\vec{e_1}^T\\ \vec{e_3}^T\\ \vec{e_2}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & & 1\\ & 1 & \end{bmatrix}, \quad P_{21}=\begin{bmatrix}\vec{e_2}^T\\ \vec{e_1}^T\\ \vec{e_3}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

$$P_{23}P_{21}=\begin{bmatrix}\vec{e_2}^T\\ \vec{e_3}^T\\ \vec{e_1}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1\\ 1 & & \end{bmatrix}, \quad \underset{P_{13}P_{12}}{\overset{}{P_{23}P_{13}}}=\begin{bmatrix}\vec{e_3}^T\\ \vec{e_1}^T\\ \vec{e_2}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & 1\\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}, \quad P_{13}=\begin{bmatrix}\vec{e_3}^T\\ \vec{e_2}^T\\ \vec{e_1}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

定理. 若P是置换矩阵，则P^{-1}也是置换矩阵，且$P^{-1}=P^T$

Pf. Method 1. P可写成一系列第3类初等矩阵的乘积，设$P=P_s\cdots P_2P_1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{则 } P^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}=P_1P_2\cdots P_s \\ P^T=P_1^TP_2^T\cdots P_s^T=P_1P_2\cdots P_s \end{array}\right\}\Rightarrow P^{-1}=P^T.$$

Method 2. 设$P=\begin{bmatrix}\vec{p}_1^T\\ \vec{p}_2^T\\ \vdots\\ \vec{p}_n^T\end{bmatrix}$，则$(PP^T)_{ij}=\vec{p}_i^T\vec{p}_j=\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j=\begin{cases}1, & \text{if } i=j\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$

即$PP^T=I$ $\therefore P^{-1}=P^T$. #.

例. 若方阵A可逆，则$\exists$置换矩阵P, s.t. $\underbrace{PA}=LU$

row exchanges before elimination.

$\uparrow$ P puts the rows of A in the right order.

定义. 对于实方阵Q，若$Q^TQ=I$，则称Q为正交阵 (orthogonal matrix)

$\uparrow Q^{-1}=Q^T$, $QQ^T=I$.

注: 若Q是正交阵，则$\begin{cases}Q\text{的各列是单位向量且两两正交}\\ Q\text{的各行}\ \text{------}\ \text{~~~~}.\end{cases}$

第3章 线性空间与子空间

§3.1 数域F上的线性空间

1. 线性空间的定义.

定义. 设V是一个非空集合, F是数域, 对V中元素定义有2个代数运算:

① 加法. 且 $\forall \alpha,\beta\in V$, 有$\alpha+\beta\in V$

② 数量乘法, 且 $\forall \alpha\in V$, $\forall k\in F$, 有$k\alpha\in V$

} 封闭.

如果加法满足:

① 交换律: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.　② 结合律: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

③ V中有一个零元素θ, s.t. $\forall\alpha\in V$, 有$\alpha+\theta=\alpha$.

④ $\forall\alpha\in V$, 有一个负元素$-\alpha\in V$, s.t. $\alpha+(-\alpha)=\theta$.

数量乘法满足:

⑤ 对数域F中的1, 有: $1\alpha=\alpha$.　(6). $\forall k,l\in F$, 有 $k(l\alpha)=(kl)\alpha$.

数量乘法、加法满足分配律:

⑦ $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.　(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

则称V是数域F上的线性空间.

例. (1) $V=\{$三维几何空间中有大小有方向的向量$\}$, $F=\mathbb{R}$ (实数域).

几何向量的加法与数乘. ✓

(2) 数域F, $V=F^n$ (向量空间). 向量的加法, 数乘向量 ✓

(3). 数域F, $V=M_{m,n}(F)$. 矩阵的加法, 数乘矩阵 ✓. 当$m=n$时, 也记为$M_n(F)$

(4). $P_n[x]:=\{f(x)\mid f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ a_i\in F,\ i=0,1,\cdots,n\}$ ✓

数域F上次数小于等于n的多项式全体.

多项式的加法: $f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{i=0}^{n}b_ix^i=\sum_{i=0}^{n}\underbrace{(a_i+b_i)}_{\in F}x^i\in P_n[x]$. 封闭

数乘多项式: $\forall k\in F$, $kf(x)=k\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\sum_{i=0}^{n}\underbrace{(ka_i)}_{\in F}x^i\in P_n[x]$. 封闭.

满足8条. 其中$\theta=$零多项式.

(5) V：数域F上次数$=n$的多项式全体.$(n\geq 1)$　　同(4)中的加法,数乘定义　$\times$.

对加法不封闭、$f(x)=x^n+1$, $g(x)=1-x^n$, $f(x)+g(x)=2\notin V$.

(6) 数域F, $A\in M_{mn}(F)$.

齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解集，向量加法与数乘向量.　$\checkmark$.

非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解集.　$\times$（加法,数乘都不封闭).

一般线性空间中的元素仍称为"向量",但比F^n中向量的含义广泛.

<u>线性空间V的性质</u>

(1). V中只有一个零向量.

Pf. 若θ_1和θ_2都是V的零向量,则

$$\theta_1 \xlongequal{\theta_2\text{是零向量}} \theta_1+\theta_2 \xlongequal{\text{交换律}} \theta_2+\theta_1 \xlongequal{\theta_1\text{是零向量}} \theta_2.$$

(2). $\forall\alpha\in V$, α只有一个负向量.

Pf. 设β,γ都是α的负向量,则

$$\beta=\beta+\theta=\beta+(\alpha+\gamma)=(\beta+\alpha)+\gamma=\theta+\gamma=\gamma.$$

(3) $0\alpha=\theta$, $(-1)\alpha=-\alpha$, $k\theta=\theta$.

Pf. $\forall\alpha\in V$, $\alpha+0\alpha=1\alpha+0\alpha=(1+0)\alpha=\alpha \Rightarrow 0\alpha=\theta$. 零元素

$\alpha+(-1)\alpha=1\alpha+(-1)\alpha=(1-1)\alpha=0\alpha=\theta \Rightarrow (-1)\alpha=-\alpha$　负元素.

$$\begin{cases} k=0\text{时}, & k\theta=0\theta=\theta \\ k\neq 0\text{时}. & \alpha+k\theta=k(\frac{1}{k}\alpha)+k\theta=k(\frac{1}{k}\alpha+\theta)=k\cdot\frac{1}{k}\alpha=\alpha \Rightarrow k\theta=\theta. \end{cases}$$

(4) 若$k\alpha=\theta$, 则$k=0$ 或 $\alpha=\theta$.

2. 线性相关与线性无关

<u>定义</u>　V是数域F上的线性空间, $\forall\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V$, 考虑

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\theta \quad (*)$$

(1) 若$\exists$不全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_n \in F$, s.t. (*)式成立, 称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关.

(2) 若由(*)只能推出$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, 称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关.

定理: $A\vec{x} = \vec{0}$ 有非零解 $\Longleftrightarrow$ A的列向量线性相关.

$A\vec{x} = \vec{0}$ 只有零解 $\Longleftrightarrow$ A的列向量线性无关.

例 $P_3[x]$中, 若$k_1 1 + k_2 x + k_3 x^2 = 0$, 则必有$k_1 = k_2 = k_3 = 0$

$\Rightarrow$ $1, x, x^2$ 线性无关.