第八章 线性映射

1. 基本概念

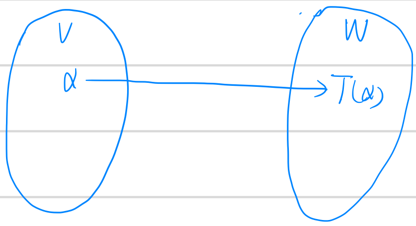
定义 给定数域 F 上两个线性空间 V（input space）和 W（output space），T 是 V 到 W 的一个映射，若满足

① $\forall \alpha, \beta \in V$，有 $T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$，

② $\forall k \in F$，$\alpha \in V$，有 $T(k\alpha) = kT(\alpha)$

则称 T 是从 V 到 W 的线性映射 (linear mapping)。

若 $V=W$，称 T 为 V 上的线性变换 (linear transformation)



注：①, ② $\Leftrightarrow$ $\forall k, l \in F$, $\alpha, \beta \in V$, 有 $T(k\alpha + l\beta) = kT(\alpha) + lT(\beta)$.

例. (1) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$T(\vec{x}) = A\vec{x}$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \to A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$.　　$A(k\vec{x} + l\vec{y}) = k(A\vec{x}) + l(A\vec{y})$.

(2) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^1$，取 $A = [1 \;\; 3 \;\; 4] = \vec{\alpha}^T$，则 $T(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{\alpha}^T\vec{x}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^1$ 的线性映射，

即 $T(\vec{x}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{x} = x_1 + 3x_2 + 4x_3$.　　dot product

例. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.　$T(\vec{v}) = \|\vec{v}\|$ 不是线性的.　　$T(\vec{v}+\vec{w}) = \|\vec{v}+\vec{w}\| \le \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$

例：$V = xy$ 平面.　T：将 $\vec{\alpha}$ 绕原点逆时针旋转 θ 角.　　V 上线性变换

例. $V = C[a,b]$. $\forall f(x) \in C[a,b]$，令 $T(f(x)) = \int_a^x f(t)dt \in C[a,b]$　积分

$$\left.\begin{aligned} T(f(x)+g(x)) &= \int_a^x (f(t)+g(t))\,dt = T(f(x)) + T(g(x)) \\ T(kf(x)) &= \int_a^x kf(t)\,dt = kT(f(x)) \end{aligned}\right\} \text{linear}$$

V 上线性变换

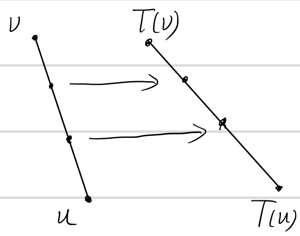
性质 (1) $T(\theta) = \theta$ ：$T(\theta) = T(0\alpha) = 0T(\alpha) = \theta$

(2) $T(-\alpha) = -T(\alpha)$ ：$T(-\alpha) = T((-1)\alpha) = (-1)T(\alpha) = -T(\alpha)$

(3) $T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n) = k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) + \cdots + k_nT(\alpha_n)$　保持线性组合

例. P402　Lines to Lines. Triangles to triangles.　　Basis Tells All!

Equally spaced points to equally spaced points. 等距点



2. 线性映射的矩阵

<u>定理</u> 设V和W是数域F上的线性空间，T是从V到W的线性映射，$v_1, v_2, \cdots, v_n$为V的一组基，则V中任一向量v的像$T(v)$由基的像$T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)$所完全确定.

Pf. $\forall v \in V$. 有 $\alpha = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$. $\{x_1, \cdots, x_n\}$为v的坐标.

则 $T(v) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \cdots + x_n T(v_n)$. #

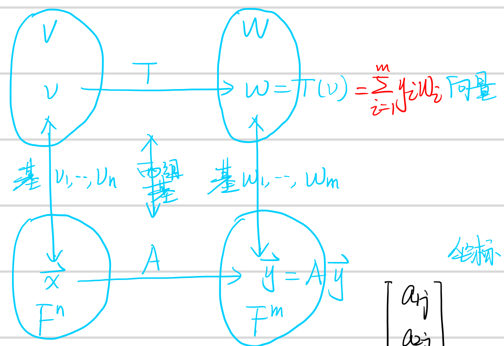
注. V到W的两个线性映射T_1和T_2, 若在同一组基下的像一样, 即$T_1(v_i) = T_2(v_i)$, $i=1,\cdots,n$, 则$T_1 = T_2$, 即$T_1(\alpha) = T_2(\alpha)$. $\forall \alpha$

Q: 给定数域F上两个线性空间V, W, T为V到W线性映射.

取定V的一组基$v_1, \cdots, v_n$, W的一组基$w_1, \cdots, w_m$

$\begin{cases} v \in V \text{在} v_1,\cdots,v_n \text{下坐标为} \vec{x}, \text{即} v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n. \\ T(v) \in W \text{在} w_1, \cdots, w_n \text{下坐标} \vec{y} \text{为多少?} \quad w = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \cdots + y_m w_m. \end{cases}$

$\triangleq (w_1, \cdots, w_n)\vec{y}$



<u>定义</u>. 设$T(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \cdots + a_{mj} w_m$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 即V的基v_j的像在$w_1, \cdots, w_m$下的坐标为$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$, $j=1,2,\cdots,n$.

则称$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$为线性映射$T$在基$v_1, \cdots, v_n$; $w_1, \cdots, w_n$下的矩阵.

可记为

$$T(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \big(T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\big) = (w_1, w_2, \cdots, w_m) \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m\times n} = (w_1, w_2, \cdots, w_m) A.$$

$T(v_1)$坐标 　　 $T(v_n)$坐标

<u>定理</u> 设线性变换在基$v_1, \cdots, v_n$; $w_1, \cdots, w_m$下的矩阵是A, 向量v在$v_1, \cdots, v_n$下坐标是$\vec{x}$, 则$T(v)$在$w_1, \cdots, w_m$下的坐标为$\vec{y} = A\vec{x}$

Pf: $T(v) = T(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \cdots + x_n T(v_n)$

$= \big(T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\big)\vec{x} = \big((w_1, w_2, \cdots, w_m) A\big)\vec{x} = (w_1, \cdots, w_m)\underbrace{(A\vec{x})}_{\vec{y}}$ #

例. 实数域$F = \mathbb{R}$, $V = \{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \mid c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$, 　　 $\dim V = 4$

$W = \{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \mid c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ 　　 $\dim W = 3$

$T: V \to W$, $T(v) = \frac{dv}{dx}$. derivative 　 $T = d/dx$

① $\forall k, l \in \mathbb{R}$. $\alpha, \beta \in V$, 有 $T(k\alpha + l\beta) = \frac{d}{dx}(k\alpha + l\beta) = k\frac{d\alpha}{dx} + l\frac{d\beta}{dx} = kT(\alpha) + lT(\beta)$. 线性映射.

② 取V的一组基 $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$, $v_4 = x^3$ 　 即 $v_j = x^{j-1}$, $j = 1, 2, 3, 4$

W的一组基 $w_1 = 1$, $w_2 = x$, $w_3 = x^2$

$$T(v_1, v_2, v_3, v_4) = (T(v_1), T(v_2), T(v_3), T(v_4)) = (\underset{0}{0}, \underset{1w_1}{1}, \underset{2w_2}{2x}, \underset{3w_3}{3x^2}) = (\underset{w_1}{1}, \underset{w_2}{x}, \underset{w_3}{x^2}) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A \in M_{3\times4}(\mathbb{R})} = (w_1, w_2, w_3) A$$

$T=\frac{d}{dx}$ 在V的基 $1, x, x^2, x^3$ 及W的基 $1, x, x^2$ 下的矩阵为A.

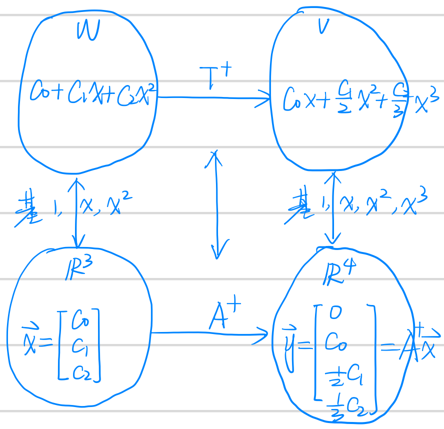
③ 取 $v=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3\in V$，其在 $v_1=1,\ v_2=x,\ v_3=x^2,\ v_4=x^3$ 下坐标为 $\vec{x}=\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$

而 $T(v)=c_1+2c_2x+3c_3x^2$，其在 $w_1=1,\ w_2=x,\ w_3=x^3$ 下坐标为 $\vec{y}=[c_1, 2c_2, 3c_3]^T$.

验证：的确有 $\vec{y}=A\vec{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\2c_2\\3c_3\end{bmatrix}$

例. $F=\mathbb{R}$, V, W同上例.

$T^+: W\to V$, $\quad T^+(w)=\int_0^x w(t)\,dt$ 线性映射



input space: W. $\quad$ output space: V，与上例相同的基.

① $T^+(w_1,w_2,w_3)=(T^+(w_1),T^+(w_2),T^+(w_3))=(\int_0^x 1\,dt, \int_0^x t\,dt, \int_0^x t^2\,dt)$

$=(x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3})=(\underset{\substack{\uparrow\\1}}{v_1}, \underset{\substack{\uparrow\\x}}{v_2}, \underset{\substack{\uparrow\\x^2}}{v_3}, \underset{\substack{\uparrow\\x^3}}{v_4})\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&\frac12&0\\0&0&\frac13\end{bmatrix}=(v_1,v_2,v_3,v_4)A^+$.

T^+在W的基 $1, x, x^2$ 及V的基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵为 A^+.

② 取 $w=c_0+c_1x+c_2x^2$，其在基 $w_1=1,\ w_2=x,\ w_3=x^2$ 下的坐标为 $\vec{x}=\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}$

则 $T^+(w)=\int_0^x w(t)\,dt$ 在基 $v_1=1,\ v_2=x,\ v_3=x^2,\ v_4=x^3$ 下的坐标应为

$\vec{y}=A^+\vec{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&\frac12&0\\0&0&\frac13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\c_0\\\frac12c_1\\\frac13c_2\end{bmatrix}$，即 $T^+(w)=(v_1,v_2,v_3,v_4)\vec{y}=c_0v_2+\frac12c_1v_3+\frac13c_2v_4$

验证：$T^+(w)=\int_0^x(c_0+c_1t+c_2t^2)\,dt=c_0x+\frac12c_1x^2+\frac13c_2x^3=c_0v_2+\frac12c_1v_3+\frac13c_2v_4$

注：A^+为上例求导中的A的广义逆.

3. 线性映射的乘法

假定：给定数域F上的线性空间U, V, W， S是从U到V的线性映射，T是从V到W的线性映射

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "S"] \arrow[rr, bend right, "TS"'] & V \arrow[r, "T"] & W \end{tikzcd}$$

定义：乘积TS定义为 $TS: U\to W$, $\quad TS(u)=T(S(u))$, $\forall u\in U$.

注：$TS(k\alpha+l\beta)=T(S(k\alpha+l\beta))=T(kS(\alpha)+lS(\beta))=kTS(\alpha)+lTS(\beta)$. 乘积TS仍是线性映射

定理. 取定U的一组基 $u_1, u_2, \dots, u_l$，V的一组基 $v_1, v_2, \dots, v_n$，W的一组基 $w_1, w_2, \dots, w_m$.

若S在基 $u_1,\dots,u_l;\ v_1,\dots,v_n$ 下的矩阵为B，而T在 $v_1,\dots,v_n;\ w_1,\dots,w_m$ 下的矩阵为A，则有

TS 在基 $u_1,\cdots,u_l$; $w_1,\cdots,w_m$ 下的矩阵为 AB.

Pf. 由题设, $S(u_1,u_2,\cdots,u_l)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)B$

$$T(v_1,v_2,\cdots,v_n)=(w_1,w_2,\cdots,w_m)A$$

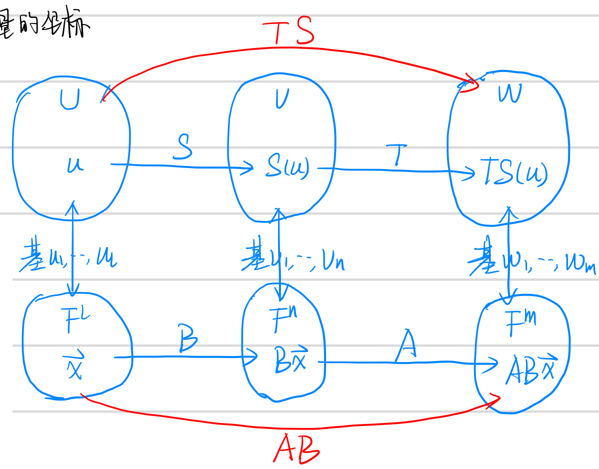
则 $TS(u_1,u_2,\cdots,u_l)=\big(TS(u_1),TS(u_2),\cdots,TS(u_l)\big)=\big(T(S(u_1)),T(S(u_2)),\cdots,T(S(u_l))\big)$

$=T\big(S(u_1),S(u_2),\cdots,S(u_l)\big)=T\big((v_1,v_2,\cdots,v_n)B\big)$ 每列对应一个向量的坐标

$\overset{T线性}{=} T(v_1,v_2,\cdots,v_n)B=\big((w_1,\cdots,w_m)A\big)B$

$=(w_1,w_2,\cdots,w_m)AB$

即 TS 在 $u_1,\cdots,u_l$; $w_1,\cdots,w_m$ 下的矩阵为 AB. #



4. 核与值域

<u>定义</u>. 设T是V到W的线性映射，T的全体像的集合称为T的值域(range). 记作 Im T. 即

$$\mathrm{Im}\,T = \{T(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$

所有被T映成零向量的向量的集合称为T的核(kernel)，记作 ker T，即

$$\ker T = \{v \in V \mid T(v) = \theta\} \subseteq V$$