定理 二次型 $\vec{x}^TA\vec{x}$ (满足 $A=A^T$) 总可通过合适的可逆线性替换 $\vec{x}=P\vec{\xi}$，变为标准形：

$$\vec{x}^TA\vec{x}=b_1\xi_1^2+b_2\xi_2^2+\cdots+b_n\xi_n^2.$$

Pf: A为对称方阵，则其总可以合同对角化，

即∃可逆矩阵P，s.t. $P^TAP=B=diag(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

令 $\vec{x}=P\vec{\xi}$，则有：$\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{\xi}^T(P^TAP)\vec{\xi}=b_1\xi_1^2+b_2\xi_2^2+\cdots+b_n\xi_n^2$

与上面的P不同.

注：有时也写成 $A=PBP^T$，P可逆，B为对角阵，则

$\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{x}^TPBP^T\vec{x}=(P^T\vec{x})^TB(P^T\vec{x})$

令 $\vec{\xi}=P^T\vec{x}$，则有 $\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{\xi}^TB\vec{\xi}=b_1\xi_1^2+b_2\xi_2^2+\cdots+b_n\xi_n^2$.

§6.5 正定矩阵 (Positive Definite Matrices)

定义 若S是n阶实对称矩阵，且所有特征值>0 (正惯性指数=n)，则S称为正定矩阵。

定义 设 $A=(a_{ij})\in M_n$，$\det A_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii}\end{vmatrix}$ 称为A的i阶顺序主子式 (upper left determinants)

定理 实对称阵S为正定矩阵 ⟺ S的各阶顺序主子式 >0 (包含 $|S|>0$)

共n个

例 $S=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c\end{bmatrix}$，real, symmetric

$\lambda_1+\lambda_2=trS=a+c$，　　$\lambda_1\lambda_2=|S|=ac-b^2$　　$ac>b^2\geq0$，a与c同号

$\lambda_1,\lambda_2>0 \Leftrightarrow \lambda_1+\lambda_2>0,\ \lambda_1\lambda_2>0 \Leftrightarrow a+c>0,\ ac-b^2>0 \Leftrightarrow a>0,\ ac-b^2>0$ (各阶顺序主子式)

推论 若实对称阵S $\xrightarrow[\text{(不改变行列式的值)}]{\text{仅通过第2类初等行变换}}$ 上三角阵 $U=\begin{bmatrix} d_1 & & * \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n\end{bmatrix}$，(非零 d_i：主元)

则S的i阶顺序主子式 $=d_1d_2\cdots d_i$，$i=1,2,\cdots,n$　　($d_i=\dfrac{\det S_i}{\det S_{i-1}}$)

S正定 ⟺ $d_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$

定理 实对称阵S是正定矩阵 $\Leftrightarrow$ $\vec{x}^TS\vec{x}>0$, $\forall \vec{x}\neq\vec{0}$. (正定二次型)

Pf. S为实对称, 一定相合于一个对角阵 $B=diag(b_1, b_2, \cdots, b_n)$

即 $\exists$ 可逆P. s.t. $S=PBP^T$ (P及B不唯一, 但正惯性指数唯一)

则 $\vec{x}^TS\vec{x} = \vec{x}^TPBP^T\vec{x} = (P^T\vec{x})^TB(P^T\vec{x})$

令 $\vec{\xi}=P^T\vec{x}$, 则 $\vec{x}^TS\vec{x}=\vec{\xi}^TB\vec{\xi} = b_1\xi_1^2+b_2\xi_2^2+\cdots+b_n\xi_n^2$

而 $\vec{x}\neq\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\xi}\neq\vec{0}$. ($P^T$可逆)

$\therefore$ S正定 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数$=n$, 即 $b_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$.

$\Leftrightarrow \vec{\xi}^TB\vec{\xi}>0$. $\forall \vec{\xi}\neq\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{x}^TS\vec{x}>0$. $\forall\vec{x}\neq\vec{0}$. #

定理 实对称阵S为正定阵 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 列满秩矩阵A (未必是方阵), s.t. $S=A^TA$.

Pf. "$\Rightarrow$". $$S=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{正交阵}}}{Q}\Lambda Q^{-1} = Q\underset{\substack{\uparrow\\ \text{特征值}>0}}{\Lambda} Q^T = Q\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}Q^T = Q\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}Q^T}_{A.\ \text{可逆}} = A^TA.$$

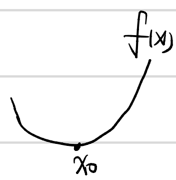
"$\Leftarrow$". $\forall \vec{x}\neq\vec{0}$, 则 $A\vec{x}\neq\vec{0}$ (否则A的列线性相关)

$\vec{x}^TS\vec{x} = \vec{x}^TA^TA\vec{x} = (A\vec{x})^T(A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|^2>0$

$\therefore$ S 正定. #

定理. 实对称矩阵S为正定的 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 可逆矩阵A, s.t. $S=A^TA$ $\Leftrightarrow$ S与I相合.

Application: Test for a Minimum



① $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+O(\Delta x^3)$, $\Delta x=|x-x_0|$

极小值点 x_0: $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$.

② $f(x,y)=f(x_0,y_0)+(\nabla f(x_0,y_0))^T\vec{\Delta x}+\frac{1}{2}\vec{\Delta x}^TH(x_0,y_0)\vec{\Delta x}+\cdots$

where $\nabla f=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}$, Hessian Matrix $H=\begin{bmatrix}\frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial f^2}{\partial y\partial x} & \frac{\partial f^2}{\partial y^2}\end{bmatrix}$, $\vec{\Delta x}=\begin{bmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}$

f(x,y) has a minimum at the point (x_0,y_0) if $\nabla f(x_0,y_0)=\vec{0}$ and $H(x_0,y_0)$ is positive definite

半正定 (Positive Semidefinite Matrices)

S为实对称阵, 若 $\vec{x}^TS\vec{x}\geq 0$ for $\forall\vec{x}\neq\vec{0}$, 称S为半正定矩阵

S半正定 $\Leftrightarrow$ S所有特征值非负 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 矩阵A, s.t. $S=A^TA$ (未必列满秩)

例 $A\in M_{m\times n}$ 是实矩阵. 证明: $\operatorname{rank}(A^TA)=\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^T)$

Pf. recall: $N(A^TA)=N(A)$

$\therefore \dim N(A^TA)=\dim N(A) \Rightarrow n-\operatorname{rank}(A^TA)=n-\operatorname{rank}(A)$

$\therefore \operatorname{rank}(A^TA)=\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^T)$. #

$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, 则 $\overset{n\times n}{A^TA}$ 及 $\overset{m\times m}{AA^T}$ 至少为半正定矩阵. (real. symmetric)

$\begin{cases} \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n. \quad \vec{x}^T(A^TA)\vec{x}=(A\vec{x})^T(A\vec{x})=\|A\vec{x}\|^2\geq 0. \\ \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^m. \quad \vec{x}^T(AA^T)\vec{x}=(A^T\vec{x})^T(A^T\vec{x})=\|A^T\vec{x}\|^2\geq 0. \end{cases}$ (特征值全 ≥ 0)

进一步地:

$\begin{cases} \text{若 } \operatorname{rank}(A^TA)=n \text{ (满秩, 特征值全} >0\text{), 即 } \operatorname{rank}(A)=n \text{ (列满秩), 则 } A^TA \text{ 为正定的} \\ \text{若 } \operatorname{rank}(AA^T)=m \text{ (- - - - - - - -). 即 } \operatorname{rank}(A)=m \text{ (行满秩), 则 } AA^T \text{ 为正定的.} \end{cases}$

应用：判别平面上的图像 $ax^2+2bxy+cy^2=d$， a,b,c,d：real numbers.

$ax^2+2bxy+cy^2=[x\ \ y]\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\vec{x}^T S\vec{x}$. 实二次型. $\vec{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$

S 为实对称阵，$\exists$ 正交阵 $Q=[\vec{q}_1\ \ \vec{q}_2]$（特征向量），对角阵 $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}$（特征值），s.t. $Q^TSQ=\Lambda$.

取 $\vec{x}=Q\vec{\xi}$，$\vec{\xi}=[\xi\ \ \eta]^T$，则

$$\vec{x}^TS\vec{x}=\vec{\xi}^T(Q^TSQ)\vec{\xi}=\vec{\xi}^T\Lambda\vec{\xi}=\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2 \quad \text{标准形.}$$

$ax^2+2bxy+cy^2=d$ (*1) 转化为 $\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2=d$. (*2).

Q 为正交阵：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 保持内积（保持长度、夹角）. 图像 (*1) 与 (*2)：形状、大小不变，方向可变.

① $\xi-\eta$ system. 由 d 及 λ_1,λ_2，判断 (*2) 的形状.

例如，若 $d=1$. (*2)：$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2=1$

- 若 $\lambda_1>0,\lambda_2>0$ ：椭圆 (ellipse). half-lengths：$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$，$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$. 正定
- 若 λ_1 和 λ_2 中有正有负：双曲线 (hyperbola) 不定 $|S|=ac-b^2<0$. 则 $\lambda_1\lambda_2=|S|<0$.
- 若 λ_1 和 λ_2 全为负：no points at all. 负定
- ……

② 利用 $\vec{x}=Q\vec{\xi}$，还原到 $x-y$ system. Q：$\vec{\xi}\to\vec{x}=Q\vec{\xi}$.

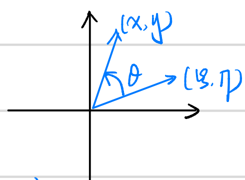
- $\vec{\xi}=\vec{0}\to\vec{x}=\vec{0}$ 图像中心点仍在 $(0,0)$.
- $\vec{\xi}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\to\vec{x}=\vec{q}_1$，$\vec{\xi}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\to\vec{x}=\vec{q}_2$ 主轴方向变为 $\vec{q}_1$ 及 $\vec{q}_2$.

二阶正交矩阵 Q 可能是何种变换？

设 $Q=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 为正交阵，则 $a^2+c^2=1$，$b^2+d^2=1$，$ab+cd=0$.

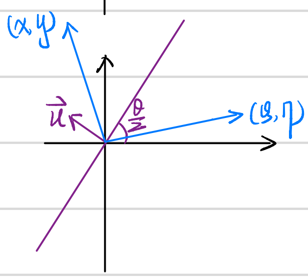
只有以下两种可能：

① $Q=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，沿逆时针旋转 θ. rotation. $|Q|=1$



② $Q=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$，沿 $\frac{\theta}{2}$ 所在直线看翻折 reflection. $|Q|=-1$.

$=I-2\vec{u}\vec{u}^T$，其中 $\vec{u}=\begin{bmatrix}\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})\end{bmatrix}$



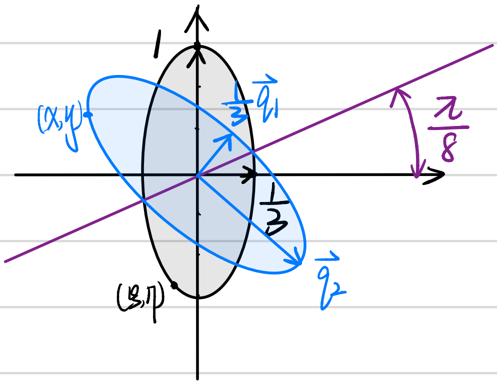
Example (P354) $5x^2+8xy+5y^2=1$.

解. $5x^2+8xy+5y^2=[x\ \ y]\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$ 实对称

各阶顺序主子式: $5>0$, $|S|=9>0$ $\Rightarrow$ S正定. 特征值 $\lambda_1,\lambda_2>0$, 椭圆.

求得: $Q^TSQ=\Lambda$, 其中 $Q=[\vec{q}_1\ \vec{q}_2]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}9&\\&1\end{bmatrix}$, $Q^{-1}=Q^T$. 正交阵

$$\vec{x}^TS\vec{x}\ \overset{\vec{x}=Q\vec{\xi}}{=\!=}\ \vec{\xi}^T(Q^TSQ)\vec{\xi}=\vec{\xi}^T\Lambda\vec{\xi}=9\xi^2+\eta^2=1$$



ξ-η system: $9\xi^2+\eta^2=1$

x-y system: $\vec{x}=Q\vec{\xi}$. $|Q|=-1$. reflection.

$\begin{cases}\text{长轴上向量: } \vec{q}_2=Q\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\ \text{短 - - - - : } \frac13\vec{q}_1=Q\begin{bmatrix}\frac13\\0\end{bmatrix}\end{cases}$

($\vec{q}_1=Q\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 及 $\vec{q}_2=Q\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 为两个主轴上的单位向量)

↑保持长度