习题课材料（五）

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

记号: 如不加说明，我们只考虑实矩阵。对于矩阵 A, 它的四个基本子空间是列空间 $C(A)$, 零空间 $N(A)$, 行空间 $C(A^T)$ 和 A^T 的零空间 $N(A^T)$。

习题 1. 请构造以下满足条件的矩阵，或者指明为什么不存在满足条件的矩阵:

1. 列空间包含向量 $\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix}$，零空间包含向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$;
2. 行空间包含向量 $\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix}$，零空间包含向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$;
3. $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 有解，且 A 的左零空间包含 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$;
4. A 不是零矩阵，且 A 的所有行垂直于 A 的所有列;
5. A 非零，且它的列空间等于零空间;
6. A 的所有列向量的和是零向量，但是所有行向量的和是一个分量均为 1 的向量;

习题 2. 对 n 阶方阵 A, 设 $\mathrm{Com}(A) = \{n \text{ 阶方阵} B : AB = BA\}$. (Com 表示 Commutator.)

1. 证明: 任取 $B, C \in \mathrm{Com}(A)$, 都有 $I_n, kB + \ell C, BC \in \mathrm{Com}(A)$, 其中 $k, \ell \in \mathbb{R}$.
2. 设 $A = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. 证明: $J_3 = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \in \mathrm{Com}(A)$, 而且 $\mathrm{Com}(A) = \{k_1 I_3 + k_2 J_3 + k_3 J_3^2 : k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}$.

习题 3. 请将以下向量 $\boldsymbol{x}$ 分解成在 $N(A)$ 中的部分与在 $C(A^T)$ 中的部分的和，然后点积验证它们确实垂直。

1. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$;
2. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$;
3. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}5\\5\\9\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&4\\2&3&5\end{bmatrix}$;

习题 4 (矩阵的对角化). 计算:

1. $\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$;
2. $\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}$;
3. $\begin{bmatrix}17&-6\\35&-12\end{bmatrix}^6$.

习题 5. 考虑矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&6&6\\4&8&8\end{bmatrix}$。

1. 计算向着 $\begin{bmatrix}3&6&6\\4&8&8\end{bmatrix}$ 的列空间的正交投影矩阵 P_1;
2. 计算向着 $\begin{bmatrix}3&6&6\\4&8&8\end{bmatrix}$ 的行空间的正交投影矩阵 P_2;
3. 计算 P_1AP_2。结果意不意外？为什么会有如此结果？

习题 6 (♡). （Fredholm 二择一定理）

1. 证明方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解当且仅当 $N(A^T)$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交;
2. 证明 $N(A^T)$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不正交当且仅当存在 $\boldsymbol{y}$，使得 $\boldsymbol{y}^T A=0,\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}=1$;

3. 说明当方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解时，方程组的一个伪解（即一个假定的 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解）给出标准矛盾等式 $0=1$。

习题 7. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中两个子空间 $\mathscr{M},\mathscr{N}$。通过把对应的一组基当成列向量，不妨假设可以找到列满秩矩阵 A,B，使得 $C(A)=\mathscr{M},C(B)=\mathscr{N}$。

1. 证明 $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{N}$ 当且仅当存在矩阵 X 使得 $A=BX$；

2. 仿照集合论中补集的性质，我们期待正交补有类似的性质。假设 $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{N}$，请证明 $\mathscr{N}^\perp\subseteq\mathscr{M}^\perp$。（能否从前一小问，看出一个矩阵角度的证明？）

习题 8 (♡). 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中两个子空间 $\mathscr{M},\mathscr{N}$。通过把对应的一组基当成列向量，不妨假设可以找到列满秩矩阵 A,B，使得 $C(A)=\mathscr{M},C(B)=\mathscr{N}$。

1. $\mathscr{M}+\mathscr{N}$ 是哪个由 A,B 构造出的矩阵的列空间？这意味着 $(\mathscr{M}+\mathscr{N})^\perp$ 是该矩阵的什么空间？

2. $\mathscr{M}^\perp,\mathscr{N}^\perp$ 分别是哪个由 A,B 构造出的矩阵的零空间？这意味着 $\mathscr{M}^\perp\cap\mathscr{N}^\perp$ 是哪个由 A,B 构造出的矩阵的零空间？

3. 证明子空间版本的 De Morgan 定律：$(\mathscr{M}+\mathscr{N})^\perp=\mathscr{M}^\perp\cap\mathscr{N}^\perp,(\mathscr{M}\cap\mathscr{N})^\perp=\mathscr{M}^\perp+\mathscr{N}^\perp$。

注记：集合论中有 De Morgan 定律，它说对于两个子集 X,Y，$X\cap Y$ 的补集等于 X 的补集并上 Y 的补集，且 $X\cup Y$ 的补集等于 X 的补集交上 Y 的补集。对于子空间来说，正交补也有类似的性质。

习题 9. 设 A 为列满秩矩阵。

1. 假设 $\boldsymbol{v}=A\boldsymbol{x}$，我们希望找到 $\boldsymbol{y}$ 使得 $\boldsymbol{v}=AA^T\boldsymbol{y}$。请找到一个矩阵 C（使用 A 来构造）使得 $C\boldsymbol{x}$ 就是这里所需要的 $\boldsymbol{y}$；（提示：A^T 未必可逆，但是利用可逆矩阵 A^TA，可以给它找一个右逆。）

2. 证明 $C(AA^T)=C(A)$。

习题 10 (♡). 任取 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2$，与 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2$，是否一定存在一个矩阵 A，使得 $C(A)=\mathscr{M}_1,N(A^T)=\mathscr{M}_2,C(A^T)=\mathscr{N}_1,N(A)=\mathscr{N}_2$？如果并不一定存在，请给四个子空间加上尽量少的条件，使得这样的矩阵一定存在。

习题 11. 日常生活中我们常说的两个平面垂直，是指平面的法向量正交。例如假设墙角是原点，那么竖直的墙面和地板是一对彼此垂直的平面。但是注意，它们之间并不是正交子空间的关系，因为它俩的交集包含的非零向量。我们下面来探索平面垂直与子空间正交之间的关系。

1. 考虑 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 6 & 3\\ -5 & -4\end{bmatrix}$。请找到这两个矩阵的列空间交集中的一个非零向量。他们的列空间平面的法向量是否垂直？是否是正交子空间？

2. 找到以上矩阵对应的正交投影矩阵 P_A, P_B，是否有 $P_AP_B = P_BP_A$？

3. 假设 $\mathbb{R}^3$ 内一个二维子空间作为平面的单位法向量是 $\boldsymbol{v}$，证明到该平面的正交投影是 $I-\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T$

4. 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的任意两个二维子空间，假设其正交投影矩阵是 P_1, P_2，证明 $P_1P_2 = P_2P_1$ 当且仅当两个子空间要么作为平面是垂直的（法向量垂直），要么相等。（对比之下，正交子空间的要求是 $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$）

习题 12. 给定 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，方程 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=b$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 中的一个超平面。给定一个向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$，将它看成是空间中的一个点，超平面上距离点 $\boldsymbol{v}$ 最近的点称为 $\boldsymbol{v}$ 到该超平面的正交投影。我们想求点 $\boldsymbol{v}$ 到这个超平面的正交投影。

1. 我们显然希望 $\boldsymbol{v}$ 沿着一个垂直于该超平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向移动，直到 $\boldsymbol{v}$ 碰到该超平面为止。这个法向量 $\boldsymbol{n}$ 是什么？

2. 设答案为 $\boldsymbol{v}+x\boldsymbol{n}$，请求出所需要的 x；

3. 将 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 看成是空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一个点，且 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$，求点 $\boldsymbol{v}$ 到平面 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=2$ 的正交投影和点到平面的距离。