习题课材料（九）

注: 带♡号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

一 设$S=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$. 求正交矩阵$Q$对角化$S$.

二 设$M=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}0&1&1&1\\-1&0&-1&1\\-1&1&0&-1\\-1&-1&1&0\end{bmatrix}$.

(1) 证明M的特征值为纯虚数，且$|\lambda|=1$.

(2) 通过M的Trace确定M的所有特征值.

三 设$S=\begin{pmatrix}s&-4&-4\\-4&s&-4\\-4&-4&2\end{pmatrix}$. 当$s$取何值时$S$正定.

四 设A是一个实对称阵满足$A\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}$和$A\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix}$.

(1) A是否可逆? 解释原因.

(2) 给出满足上述性质的矩阵A的例子，并且A的特征值之和为0.

五 设S是$\mathbb{R}^7$的一个4维子空间，P是S上的投影矩阵.

(a) 求出P的7个特征值.

(b) 求出P的全部特征向量.

六 构造一个三阶实对称矩阵，使得其特征值为$1,1,-1$, 属于特征值1的线性无关的特征向量有$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$和$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

七 设$A=(a_{ij})$是n阶实对称矩阵, 其特征值是$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

(1) 证明对于任意n维列向量$\alpha \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$\lambda_1 \alpha^T \alpha \leq \alpha^T A \alpha \leq \lambda_n \alpha^T \alpha.$$

(2) 展示$\lambda_1 \leq a_{11} \leq \lambda_n$.

(3) 假设$A=(a_{ij})$是一个2阶实对称阵. 求a_{12}可能的最大值和最小值.

八 设A,B是n阶实对称矩阵, 其特征值分别是$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$和$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n$. 求证: $A+B$的特征值全部落在区间$[\lambda_1+\mu_1, \lambda_n+\mu_n]$.

九 [♡] 若$A=(a_{ij})$是n阶实方阵，且A的秩小于n，则A的伴随矩阵的特征值包含至少$n-1$个0, 若存在非零特征值，则它是$\sum_{i=1}^n C_{ii}$.

十 [♡] 设A是一个n阶反对称矩阵, 即$A^T=-A$且A是实矩阵. 证明:

(1) I_n+A可逆且$(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$是正交阵.

(2) 假设$n=3$，则存在正交阵Q和向量$b \in \mathbb{R}$，使得$Q^TAQ=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$.