例. 求矩阵 X.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$　　(2) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

解. (1) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(-2)r_1+r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 3 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{3r_2+r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{(-1)r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] = [I \;\; X]$. $\therefore X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) $\left[\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)c_1+c_3 \to c_3]{(-1)c_1+c_2 \to c_2} \left[\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ \hline 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)c_2+c_3 \to c_3} \left[\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ \hline 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$

$\therefore X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

例. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow ad-bc \neq 0$, 且 $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

例. 设方阵满足 $A^2+A-2I=0$. 证明 A 和 $A-2I$ 都可逆, 并求出它们的逆.

解: ① $A^2+A-2I=0 \Rightarrow A(A+I)=2I \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}(A+I)\right)=I$

$\therefore A$ 可逆, 且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I)$.

② $A^2+A-2I=0 \Rightarrow (A-2I)(A+3I)+4I=0$

$\Rightarrow (A-2I)\left(-\frac{1}{4}(A+3I)\right)=I$

$\therefore A$ 可逆, 且 $A^{-1}=-\frac{1}{4}(A+3I)$.

定理　主对角占优矩阵（diagonally dominant matrix）为可逆矩阵

主对角占优矩阵：$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$，$i=1,2,\cdots,n$

Pf. 设A为主对角占优矩阵，下证 $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解.　　$\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

设解 $\vec{x}$ 中绝对值最大的分量为 x_i，即 $|x_i| \geq |x_j|$，$j=1,2,\cdots,n$

row i of $A\vec{x}=\vec{0}$：$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n = 0$.

即 $a_{ii}x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j$

$\Rightarrow |a_{ii}||x_i| = |a_{ii}x_i| = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\right)|x_i|$

若 $x_i \neq 0$，有 $|a_{ii}||x_i| \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\right)|x_i| < |a_{ii}||x_i|$ 矛盾.

$\therefore x_i = 0$.　　$\therefore x_j = 0$，$j=1,\cdots,n$

即 $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解.　　$\therefore$ A可逆. #

Remark：可逆矩阵未必都是对角占优的.

例　$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，　$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$　　A, B都是可逆矩阵.

主对角占优（$3>1+1$）　　非主对角占优

例　上（下）三角矩阵可逆 $\Leftrightarrow$ 所有主对角元非零

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$　　$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$　　考虑 $A \to I$ 过程

上三角矩阵　　下三角矩阵　　Gauss-Jordan Elimination

n个主元

例　除了主对角线上的子块，其他子块都是零的矩阵，称为准对角矩阵.

$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix} = diag(A_1, A_2, \cdots, A_s)$，其中 A_i 是方阵，$i=1,2,\cdots,s$

设 $B=\mathrm{diag}(B_1,B_2,\cdots,B_s)$ 且 A_i 与 B_i 是同阶方阵，$i=1,2,\cdots,s$，则

$$\begin{cases} A+B=\mathrm{diag}(A_1+B_1,\ A_2+B_2,\ \cdots,\ A_s+B_s). \\ AB=\mathrm{diag}(A_1B_1,\ A_2B_2,\ \cdots,\ A_sB_s). \end{cases}$$

$AB=I \Leftrightarrow \mathrm{diag}(A_1B_1,A_2B_2,\cdots,A_sB_s)=\mathrm{diag}(I,I,\cdots,I)$

$\Leftrightarrow A_iB_i=I$，$i=1,2,\cdots,s$. $\Leftrightarrow A_i$ 可逆，且 $A_i^{-1}=B_i$，$i=1,2,\cdots,s$.

$\therefore A$ 可逆 $\Leftrightarrow A_i$ 可逆，$i=1,2,\cdots,s$，且 $A^{-1}=\mathrm{diag}(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1})$

分块矩阵的初等变换

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

定义 分块矩阵的初等行(列)变换

(1) 用可逆矩阵 P 左乘 M 的某一行（右乘 M 的某一列）

(2) 用矩阵 Q 左乘 M 的某一行，并加到另一行上（右乘某一列，加到另一列上）

(3) 交换两行（两列）.

注：对分块矩阵进行一次行(列)变换，相当于对原矩阵进行一系列行(列)变换.

定义 对单位矩阵 I 进行分块，$I=\mathrm{diag}(I_s,I_t)$. 对其进行一次初等变换，得到分块矩阵的初等矩阵.

(1) $\begin{bmatrix} P & \\ & I_t \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} I_s & \\ & P \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} I_s & \\ Q & I_t \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} I_s & Q \\ & I_t \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} & I_t \\ I_s & \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} & I_s \\ I_t & \end{bmatrix}$

定理 用分块矩阵的初等矩阵左(右)乘分块矩阵 M，只要乘法可行，其结果是对 M 作相应的分块矩阵的初等行(列)变换.

Pf. 左乘 $\begin{bmatrix} P & \\ & I_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$ 第一行左乘 P.

$$\begin{bmatrix} I & \\ Q & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ QA+C & QB+C \end{bmatrix}$$ 第一行左乘Q,加到第二行上.

$$\begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$$ 交换两行.

例. $A = \begin{bmatrix} B & D \\ & C \end{bmatrix}$, 其中$B, C$可逆, 试求$A^{-1}$

解: $[A \quad I] \xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}} [I \quad A^{-1}]$

$$[A \quad I] = \left[\begin{array}{cc|cc} B & D & I & \\ & C & & I \end{array}\right] \xrightarrow{-DC^{-1}r_2 + r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} B & & I & -DC^{-1} \\ & C & & I \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[C^{-1}r_2]{B^{-1}r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} I & & B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ & I & & C^{-1} \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ & C^{-1} \end{bmatrix}$$

特别地, 当A是上三角阵时, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \vec{\alpha}^T \\ & C \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{1}{a_{11}}\vec{\alpha}^T C^{-1} \\ & C^{-1} \end{bmatrix}$

(可逆上(下)三角矩阵的逆矩阵也是上(下)三角矩阵, 数学归纳法)

§2.6 可逆矩阵的LU分解

用消元法求解 $A\vec{x}=\vec{b}$ $\longrightarrow$ LU分解. L记录消元法的过程. $[A\ \ \overset{\swarrow \text{可换}}{\vec{b}}] \to [U\ \ \vec{c}]$, $A=LU$

例. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A \to$ 上三角形U (upper triangular form)

解: $A \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{3}r_2+r_3\to r_3} \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} = U$

每次初等行变换相当于左乘初等矩阵 $E_{23}(\frac{2}{3})E_{12}(\frac{1}{2})A=U$

$\Rightarrow A=\left(E_{23}(\frac{2}{3})E_{12}(\frac{1}{2})\right)^{-1}U = E_{12}(-\frac{1}{2})E_{23}(-\frac{2}{3})\,U = LU.$

$L=\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$ 下三角 $L=(l_{ij})$

L记录了消元法的过程. $\begin{cases} l_{21}=-2: \text{消元法中从第2行中减去了第1行的}-2\text{倍}. \\ l_{32}=-\frac{2}{3}: \text{------从第3行中减去了第2行的}-\frac{2}{3}\text{倍} \end{cases}$

一般地, 若A可经过一系列第2类初等行变换变成U (无行交换), 则: (A可逆, n个主元.)

$$\underbrace{E_{n-1,n}(-l_{n,n-1})\,E_{n-2,n}(-l_{n,n-2})\,E_{n-2,n-1}(-l_{n-1,n-2})}_{n-2\text{行的若干倍加到后续行}}\cdots\underbrace{E_{1n}(-l_{n1})\cdots E_{12}(-l_{21})}_{\text{第一行的若干倍加到后续行}}A = U = \begin{bmatrix} \boxed{d_1} & & * \\ & \boxed{d_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{d_n} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A = E_{12}(l_{21})\cdots E_{1n}(l_{n1})\cdots E_{n-2,n-1}(l_{n-1,n-2})\,E_{n-2,n}(l_{n,n-2})\,E_{n-1,n}(l_{n,n-1})\,U$

$= LU.$ L brings U back to A.

其中

$$L = \cdots E_{n-2,n-1}(l_{n-1,n-2})\,E_{n-2,n}(l_{n,n-2})\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} = \cdots \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & & \\ & & l_{n-1,n-2} & 1 & \\ & & l_{n,n-2} & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \text{下三角}$$

Elimination without row exchange: $A=LU$

(1) U 为上三角矩阵, 对角线上为主元.

(2) L 为下三角矩阵, 对角线元素全为1.

(3) l_{ij} 代表消元法过程中从第 i 行减去第 j 行的 l_{ij} 倍.

The memory of elimination is held in L and U.

$A\vec{x}=\vec{b}$ 分解成2个 triangular system: $L(\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{c}})=\vec{b}$

Step 1. Solve $L\vec{c}=\vec{b}$ (forward elimination).

Step 2. Solve $U\vec{x}=\vec{c}$ (backward substitution)

$$\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ * & \ddots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$ easy to solve

$$A=LU=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & * & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1 & & & \\ & d_2 & * & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & * & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & * & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

称为 LDU 分解