§5.3 Cramer's Rule; Inverse

定理 (Cramer's Rule) 考虑线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$，其中 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 为方阵。若系数行列式 $\det A\neq 0$，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解 $x_j=\dfrac{\det B_j}{\det A}$，$j=1,2,\cdots,n$. (*) 其中 B_j 为将A的第j列替换成 $\vec{b}$ 所得到的矩阵.

Pf. (1) 先验证(*)的确是一组解（存在性）

$$A=[\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2 \cdots \vec{\alpha}_n]=(a_{ij})_{n\times n},\quad B_j=[\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_{j-1}\ \vec{b}\ \vec{\alpha}_{j+1} \cdots \vec{\alpha}_n]$$

$A\vec{x}$ 第i个分量：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,{\det B_j}/{\det A}$ fixed i

$\det B_j$ 按第j列展开：$\det B_j=b_1C_{1j}+b_2C_{2j}+\cdots+b_nC_{nj}=\sum_{k=1}^{n} b_kC_{kj}$

$$(A\vec{x})_i=\frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{k=1}^{n}b_kC_{kj}=\frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}b_k\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{kj}\Big)=\frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}b_k(\delta_{ik}\det A)\overset{k=i}{=}b_i,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$\therefore A\vec{x}=\vec{b}$

(2) 已知 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解. 下证(*)是唯一解.

易知：$A[\vec{e}_1\cdots\vec{e}_{j-1}\ \vec{x}\ \vec{e}_{j+1}\cdots\vec{e}_n]=[\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_{j-1}\ \vec{b}\ \vec{\alpha}_{j+1}\cdots\vec{\alpha}_n]=B_j$ (**)

$$\det[\vec{e}_1\cdots\vec{e}_{j-1}\ \vec{x}\ \vec{e}_{j+1}\cdots\vec{e}_n]=\begin{vmatrix}1 & & & x_1 & & \\ & 1 & & x_2 & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & x_j & & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & x_n & & 1\end{vmatrix}=x_j \quad \text{(Big Formula)}$$

单位阵第j列换为$\vec{x}$

$$(**)\Rightarrow \det(A)\cdot x_j=\det B_j \xrightarrow{\det(A)\neq 0} x_j=\det B_j/\det A,\quad j=1,2,\cdots,n.\ \#$$

定理 若A可逆(即 $\det A\neq 0$)，则 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*=\dfrac{C^T}{\det A}$，也即 $(A^{-1})_{ij}=\dfrac{C_{ji}}{\det A}$ cofactor not C_{ij}!

Pf. Method 1. 利用Cramer's rule 分别求解 $A\vec{x}=\vec{e}_j$，$j=1,2,\cdots,n$，得 A^{-1} 的每一列. (P273)

Method 2 直接验证.

$$(AA^*)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(A^*)_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}C_{jk}=\delta_{ij}|A|.$$

i行元素与j行的余子式

$$\therefore AA^*=\begin{bmatrix}|A| & & \\ & |A| & \\ & & \ddots \\ & & & |A|\end{bmatrix}=|A|I_n$$

$$\therefore A\cdot\Big(\frac{1}{|A|}A^*\Big)=I_n \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.\ \#$$

注：常用结论
- $AA^*=A^*A=|A|I$ （即使A不可逆也成立）
- A可逆时($|A|\neq 0$)，有 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$. $A^*=|A|A^{-1}$

Chapter 6 特征值和特征向量

前言

$A\in M_n(F)$. $\vec{x}\in F^n \longrightarrow A\vec{x}\in F^n$. 投影. 反射. 旋转 ⋯ 线性变换

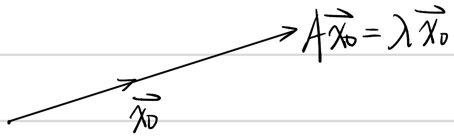
$A\vec{x}=\vec{b}$. 静态问题. image processing. $\vec{x}$: 原图 $\vec{b}$: 带噪声的图. 反问题. $\vec{b}\to\vec{x}$.

动态问题: $\vec{x}_{k+1}=A\vec{x}_k$. 天气. CFD. 飞机气流 ⋯

状态随时间演化. $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1=A\vec{x}_0$, $\vec{x}_2=A\vec{x}_1=A^2\vec{x}_0$, ⋯, $\vec{x}_k=A^k\vec{x}_0$, ⋯ A^{100}? 计算?

若 $A\vec{x}_0=\lambda\vec{x}_0$, 延长. 收缩. 反向 ⋯

则 $\vec{x}_k = A^k\vec{x}_0 = A^{k-1}(\lambda\vec{x}_0)=\cdots=\lambda^k\vec{x}_0$.



一般情况, 若能找到特征向量构成 F^n 一组基: $\vec{y}_1,\vec{y}_2,\cdots,\vec{y}_n$. $A\vec{y}_i=\lambda_i\vec{y}_i$. $i=1,\cdots,n$

$\forall\ \vec{x}_0\in F^n$. $\vec{x}_0=a_1\vec{y}_1+a_2\vec{y}_2+\cdots+a_n\vec{y}_n$.

$$\vec{x}_k=A^k\vec{x}_0=a_1A^k\vec{y}_1+a_2A^k\vec{y}_2+\cdots+a_nA^k\vec{y}_n$$
$$=a_1\lambda_1^k\vec{y}_1+a_2\lambda_2^k\vec{y}_2+\cdots+a_n\lambda_n^k\vec{y}_n.$$

如何求解 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$?

何时特征向量构成一组基 ?

§6.1 特征值和特征向量的求解

1. 定义与求解

定义. $A\in M_n(F)$. 若 $\exists\lambda\in F$, $\vec{x}\in F^n$, $\vec{x}\neq\vec{0}$, s.t. $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, 称 λ 是 A 的特征值(eigenvalue), $\vec{x}$ 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量(eigenvector).

注: 特征值 λ 可以为 0, 此时 $\vec{x}\in N(A)$.

定义. 设 λ 为 A 的一个特征值, 称 $V_\lambda:=\underbrace{\{\vec{x}\in F^n \mid A\vec{x}=\lambda\vec{x}\}}_{\lambda\text{的全体特征向量及}\vec{0}}$ 称为 A 的属于特征值 λ 的特征子空间 (对加法、数乘封闭).
$\dim V_\lambda$ 称为 λ 的几何重数.

求解 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ ($\vec{x}\neq\vec{0}$)

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, $\vec{x}\neq\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $(\lambda I-A)\vec{x}=\vec{0}$ 且 $\vec{x}\neq\vec{0}$. 即齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ $|\lambda I-A|=0$.

$f_A(\lambda):=|\lambda I-A|$ 称为 A 的特征多项式 (characteristic polynomial) (degree n, 首项 λ^n).

Step 1 求 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}=0$. ($\lambda_i\neq\lambda_j$, if $i\neq j$) 的所有解,
得 A 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$, 称 n_i 为特征值 λ_i 的代数重数.

Step 2 对每个 λ_i, ($i=1,2,\cdots,s$), 代入 $(\lambda_i I-A)\vec{x}=\vec{0}$, 求得 special solutions $\vec{x}_{i1},\vec{x}_{i2},\cdots,\vec{x}_{im_i}$
则所有非零线性组合 $\sum_{j=1}^{m_i}k_j\vec{x}_{ij}$ 为属于 λ_i 的全部特征向量
$V_{\lambda_i}=N(\lambda_i I-A)$. 几何重数 $\dim V_{\lambda_i}=m_i$.

注: ① $\sum_{i=1}^{s}n_i=n$

② $m_i\leq n_i$, $\sum_{i=1}^{s}m_i$ 可能严格 $<n$ (不可对角化)

例. $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, $F=\mathbb{R}$.

解. Step 1 characteristic polynomial

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

令 $f_A(\lambda)=0$, 得 eigenvalues: $\begin{cases}\lambda_1=4, & \text{代数重数 } n_1=1\\ \lambda_2=1, & \text{代数重数 } n_2=2 \text{ (重根)}\end{cases}$

Step 2 ① 将 $\lambda_1=4$ 代入 $(\lambda I-A)\vec{x}=\vec{0}$，得：

$$\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$，得 special solution：$\vec{x_1}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$　　几何重数 $m_1=1\le n_1$

属于 $\lambda_1=4$ 的特征向量为 $k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\forall k\in F$，$k\neq 0$.

② 将 $\lambda_2=1$ 代入 $(\lambda I-A)\vec{x}=\vec{0}$，得：

$$\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$，得 special solutions：$\vec{x_{21}}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\vec{x_{22}}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，　$m_2=2\le n_2$

属于 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $k_1\vec{x_{21}}+k_2\vec{x_{22}}$，$\forall k_1,k_2\in F$，$k_1\neq 0, k_2\neq 0$.

例　$W=\text{span}\{\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_n}\}=C(A)$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的 n 维子空间 $(n<m)$.　$A=[\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_n}]$

$\forall\vec{b}\in\mathbb{R}^m$，$\vec{b}$ 到 $\vec{w}$ 上的投影 $\vec{p}=P\vec{b}$，其中 P 为投影矩阵，$P=A(A^TA)^{-1}A^T\in M_m$

(1) $\lambda_1=1$. $V_{\lambda_1}=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^m\mid P\vec{x}=\lambda_1\vec{x}=\vec{x}\}$

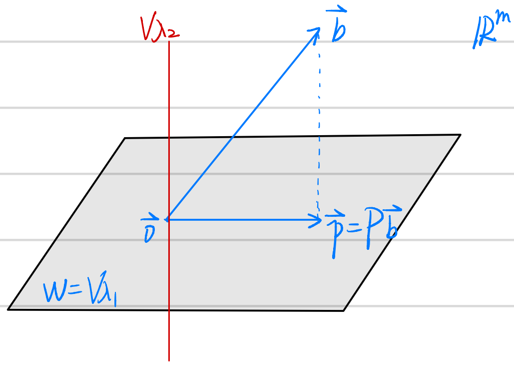
$=W=C(P)$.　(Problem Set 4.2，25)

几何重数 $m_1=\dim V_{\lambda_1}=\dim W=n$.

$\text{rank}(P)=\dim C(P)=\dim W=n$.

(2) $\lambda_2=0$.　$V_{\lambda_2}=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^m\mid P\vec{x}=\lambda_2\vec{x}=\vec{0}\}=N(P)$.

几何重数 $m_2=\dim V_{\lambda_2}=\dim N(P)=m-\text{rank}(P)=m-n$.



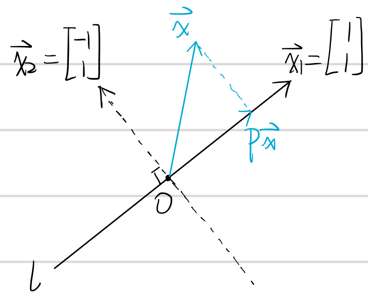
Remark. ① $P\in M_n$，$\text{rank}(P)=n<m$.　P 不可逆，则 $\lambda=0$ 一定为一个特征值.

② $P^T=P$. symmetric, real $\Rightarrow V_{\lambda_1}\perp V_{\lambda_2}$　(§6.4).

$V_{\lambda_1}=C(P)$.　$V_{\lambda_2}=N(P)=N(P^T)\Rightarrow V_{\lambda_1}\perp V_{\lambda_2}$.　$\mathbb{R}^m=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}=C(P)\oplus N(P)$.

The projection keeps the column space and destroys the nullspace.

例　The projection matrix $P=\dfrac{\vec{x_1}\,\vec{x_1}^T}{\vec{x_1}^T\vec{x_1}}=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0.5&0.5\end{bmatrix}$ ← Markov



① $P\vec{x_1}=\vec{x_1}$.　$\lambda_1=1$，对应特征向量 $k\vec{x_1}$，$k\neq 0$；$\{k\vec{x_1}\}=C(P)$

② $P\vec{x_2}=\vec{0}$，　$\lambda_2=0$ - - - - - - $k\vec{x_2}$，$k\neq 0$；$\{k\vec{x_2}\}=N(P)$

↑ P 不可逆.

(P290 Example 2)

2. $\mathbb{R}^2$中的应用

例1. $A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}$ 每列元素之和为1. Markov Matrix.

解: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-0.8 & -0.3\\ -0.2 & \lambda-0.7\end{vmatrix} = \lambda^2-1.5\lambda+0.5=(\lambda-1)(\lambda-0.5)$

令 $|\lambda I-A|=0$, 得 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0.5$. 代数重数均为1.

$\lambda_1=1$: $\begin{bmatrix}0.2 & -0.3\\ -0.2 & 0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=k\underbrace{\begin{bmatrix}0.3\\ 0.2\end{bmatrix}}_{\vec{x}_1}$, $k\in\mathbb{R}$, $k\neq0$. 几何重数: 1

$\lambda_2=0.5$: $\begin{bmatrix}-0.3 & -0.3\\ -0.2 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=k\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}}_{\vec{x}_2}$, $k\in\mathbb{R}$, $k\neq0$ 几何重数: 1

注意: (1) $|\lambda I-A|=0$, 则 $\lambda I-A$ 形如 $\begin{bmatrix}a & b\\ la & lb\end{bmatrix}$, 不满秩, 则 $(\lambda I-A)\vec{x}=\vec{0}$ 的解为 $\vec{x}=k\begin{bmatrix}b\\ -a\end{bmatrix}$

(2) 不同的特征值的特征向量线性无关. $\vec{x}_1$与$\vec{x}_2$线性无关, 为$\mathbb{R}^2$一组基.

应用: 求A^{100}? $A=[\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2]$. $A^{100}=[A^{99}\vec{\alpha}_1\ \ A^{99}\vec{\alpha}_2]$

A的第1列: $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0.8\\ 0.2\end{bmatrix}=2\vec{x}_1+0.2\vec{x}_2$

steady state ($2\vec{x}_1$)

decaying mode ($0.2\vec{x}_2$)

unchanged

multiplied by $\lambda_2=0.5$

$A\vec{\alpha}_1=2A\vec{x}_1+0.2A\vec{x}_2=2\vec{x}_1+0.2\cdot(0.5\vec{x}_2)$

$A^{99}\vec{\alpha}_1=2\vec{x}_1+0.2\cdot(0.5)^{99}\vec{x}_2=\begin{bmatrix}0.6\\ 0.4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{very small vector}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0.6\\ 0.4\end{bmatrix}$ close to steady state

第2列可类似计算.

注: 若$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, 则 $A^2\vec{x}=A(\lambda\vec{x})=\lambda A\vec{x}=\lambda^2\vec{x}$, ……, $A^k\vec{x}=\lambda^k\vec{x}$.

$\vec{x}$仍为A^k的特征向量, 对应的特征值变为λ^k.

例 P290 Example 3. (reflection)

P293 Example 5. (rotation)

$$\left\{\begin{array}{l}B=a_1A+a_2I,\quad a_1\neq0.\\ f_B(\lambda)=|\lambda I-B|=|(\lambda-a_2)I-a_1A|=0\\ \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda-a_2}{a_1}I-A\right|=f_A\left(\frac{\lambda-a_2}{a_1}\right)=0.\\ \text{若 A 的特征值为 } \lambda_i,\ i=1,\dots,s \\ \text{则 B ———为 } a_1\lambda_i+a_2,\ i=1,\dots,s.\end{array}\right.$$

特征向量相同.