习题课材料（二）

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

习题 1. 是否存在矩阵 A 满足: 存在矩阵 X 使得 $XA=I$, 但不存在 Y 使得 $AY=I$? 有没有方阵满足上述条件?

习题 2. 定义函数 $\mathrm{tr}: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{tr}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$, 为取方阵的对角线元素之和. $\mathrm{tr}(A)$ 称为方阵 A 的迹.

1. 证明 tr 满足如下三个条件:
   - $\mathrm{tr}(kA+\ell B) = k\mathrm{tr}(A) + \ell\mathrm{tr}(B)$, $k, \ell \in \mathbb{R}$.
   - $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$;
   - $\mathrm{tr}(I_n) = n$.
2. 说明是否存在 A, B, 使得 $AB - BA = I_n$.
3. (♡) 在 $n=2$ 时证明满足上述三个条件的函数一定是 tr.
4. (♡) 对一般的 n 证明满足上述三个条件的函数一定是 tr.

习题 3. 1. 任取 $m \times n$ 矩阵 X; 证明: 分块矩阵 $\begin{pmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ 可逆, 并求其逆矩阵.

2. 对分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 计算 $\begin{pmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. 由此判断矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a \end{bmatrix}$$

何时可逆, 并在它可逆时计算它的逆.

习题 4. 1. 对 n 阶可逆矩阵 A 和 n 维列向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$, 设 $1+\boldsymbol{v}^TA^{-1}\boldsymbol{u}\neq 0$, 证明：$A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ 可逆, 且

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{v}^TA^{-1}\boldsymbol{u}}A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^TA^{-1}.$$

(这称为 Sherman-Morrison-Woodbury 公式.)

2. 设 $a_i>0(1\leq i\leq n)$, 求矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n+1 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

习题 5. 证明:

1. 任意方阵 A 都可以唯一地表为 $A=B+C$, 其中 B 是对称矩阵, C 是反对称矩阵.
2. ($\heartsuit$) n 阶方阵 A 是反对称矩阵当且仅当任取 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 都有 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=0$.
3. 设 A,B 是对称矩阵, 则 $A=B$ 当且仅当任取 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 都有 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^TB\boldsymbol{x}$.

习题 6 ($\heartsuit$). A 为 n 阶实方阵. 证明以下结论:

1. 若对于任意的 n 维实列向量 $\boldsymbol{x}$, 都有 $(A\boldsymbol{x})\cdot(A\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$, 则 A 必须是正交矩阵.
2. 若对于任意两个 n 维实列向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, 都有 $(A\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot(A\boldsymbol{y})$, 则 A 必须是对称矩阵.

习题 7. 记闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的实值连续函数的全体为 $\mathscr{C}([-\pi,\pi])$, 定义函数的加法，以及函数与实数的数乘如下:

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x),\qquad (kf)(x):=k(f(x)),\qquad \text{其中 } f,g\in\mathscr{C}([-\pi,\pi]),k\in\mathbb{R}.$$

1. 验证 $\mathscr{C}([-\pi,\pi])$ 配上上述运算构成了一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。
2. ($\heartsuit$) 对于任意正整数 n, 验证 $\mathscr{C}([-\pi,\pi])$ 中的向量组

$$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\ldots,\sin(nx),\cos(nx)$$

线性无关。

习题 8. 对于 n 阶方阵 A 试说明下列几条为何等价:

1. A 可逆.
2. 任取 n 维向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解唯一，且解为 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$.
3. 齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.
4. A 对应的阶梯型矩阵有 n 个主元.
5. A 对应的行简化阶梯形矩阵一定是 I_n.
6. A 是有限个初等矩阵的乘积.

习题 9. 求证: 对于任何 $m\times n$ 的矩阵 A 和 $n\times m$ 的矩阵 B，I_m+AB 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆。这里 I_m 是 m 阶单位矩阵，I_n 是 n 阶单位矩阵。(提示: 一种巧方法是巧妙利用 $A(I_n+BA) = (I_m+AB)A$，用一个的逆凑出另一个的逆。另一种方法是考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}$, 并用行列操作使其分块对角化。等学了特征值或者矩阵级数，这里还有其他方法。)

习题 10. 证明: 任意 s 个非零实向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 满足 $\alpha_i\cdot\alpha_j=0, \forall i\neq j$, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是（实）线性无关的。