§1.2 长度与内积 （默认取标准内积及直角坐标系）

1. $\mathbb{R}^n$ 中的标准内积

定义. 设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\vec{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准内积.

性质. (1) $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$，$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$. 对称性

(2) $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^n$，$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ } 线性性

(3) $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$，$\forall k \in \mathbb{R}$，$(k\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = k(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$ }

(4) $\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$，$\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} \geq 0$，$\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$ 正定性

∃其它内积定义方式 需满足(1)~(4) 最基本的性质

例. $\mathbb{R}^2$. $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$，$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 \times 2 + 4 \times 1 = 10$.

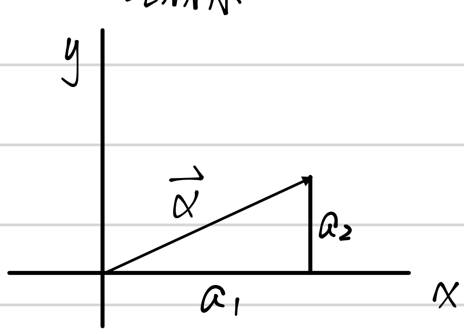
例. P12 Example 13. economics and business.

2. 长度及单位向量.

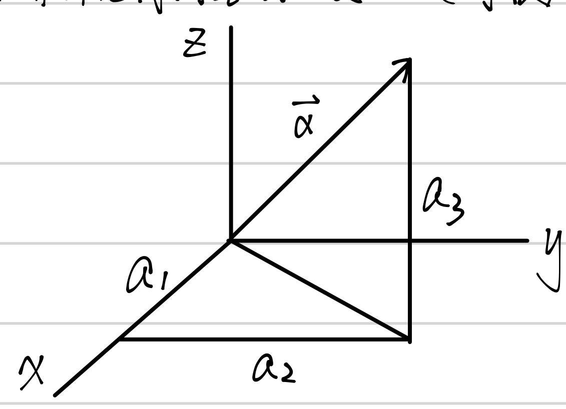
定义. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$，定义其长度 $\|\vec{\alpha}\|$ 为 $\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}}$ （正定性保证了该定义有意义）

（标准内积下）$\|\vec{\alpha}\| = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^{1/2}$.

几何向量 $\xleftrightarrow[\text{坐标系}]{\text{直角}}$ 坐标 $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$，$n \leq 3$，$\|\vec{\alpha}\|$ 即几何向量的长度.（勾股定理）（标准内积下）



$\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$



$\|\vec{\alpha}\| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$

定义. 长度为1的向量称为单位向量.

$\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$，当 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ 时，$\left\| \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha} \right\| = \left(\left(\frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha} \right) \right)^{1/2} \overset{\text{内积的性质(1),(3)}}{=} \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha})^{1/2} = \frac{\|\vec{\alpha}\|}{\|\vec{\alpha}\|} = 1$

即 $\frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha}$ 为单位向量，称为对向量 $\vec{\alpha}$ 单位化.

3. 两个向量的夹角

Cauchy-Schwarz 不等式：$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \le \|\vec{\alpha}\|\,\|\vec{\beta}\|$ （证明略）

定义 $\forall$ 两个非零向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbb{R}^n$，规定 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的夹角 θ 由 $\cos\theta=\underbrace{\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|\,\|\vec{\beta}\|}}_{\in[-1,1]\ (\text{Cauchy-Schwarz})}$，$0\le\theta\le\pi$ 所确定

若 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$，称 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 正交，记作 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

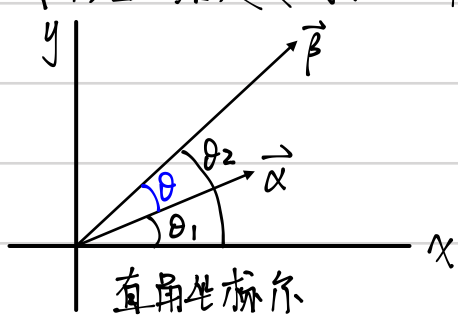
（$\vec{\alpha}=\vec{0}$ 或 $\vec{\beta}=\vec{0}$ 或夹角为 $\frac{\pi}{2}$）

注. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0 \Rightarrow \cos\theta>0 \Rightarrow 0\le\theta<\frac{\pi}{2}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0 \Rightarrow \cos\theta<0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$.

注. 几何空间中，上述定义的夹角即几何向量的夹角.

$\mathbb{R}^2$:



$\vec{\alpha}=(\|\vec{\alpha}\|\cos\theta_1,\ \|\vec{\alpha}\|\sin\theta_1)$ 坐标

$\vec{\beta}=(\|\vec{\beta}\|\cos\theta_2,\ \|\vec{\beta}\|\sin\theta_2)$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\|\vec{\alpha}\|\,\|\vec{\beta}\|(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)=\|\vec{\alpha}\|\,\|\vec{\beta}\|\cos(\theta_2-\theta_1)$

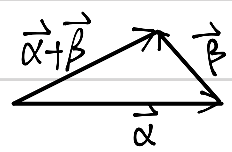
夹角 θ：$\cos\theta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|\,\|\vec{\beta}\|}=\cos(\theta_2-\theta_1) \Rightarrow \theta$ 即几何向量的夹角

定理. 三角不等式：$\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|\le\|\vec{\alpha}\|+\|\vec{\beta}\|$，$\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbb{R}^n$.

pf. $\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|=\sqrt{(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})^{1/2}$ （内积的性质）

$=(\|\vec{\alpha}\|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\|\vec{\beta}\|^2)^{1/2} \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} (\|\vec{\alpha}\|^2+2\|\vec{\alpha}\|\,\|\vec{\beta}\|+\|\vec{\beta}\|^2)^{1/2}=\|\vec{\alpha}\|+\|\vec{\beta}\|$

注: $n=2,3$：三角形两边之和大于等于第三边.

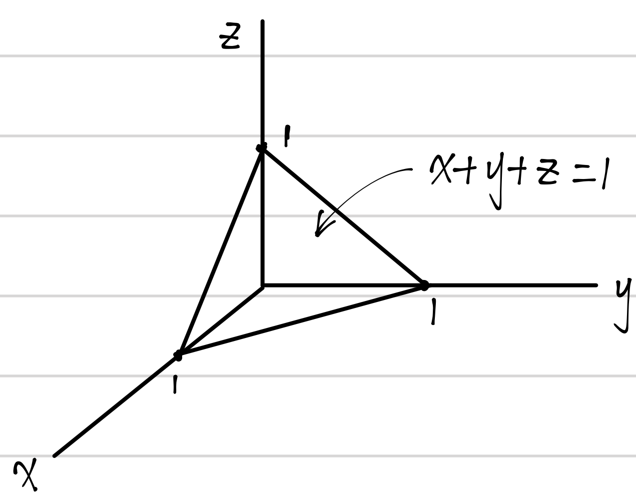


补充：平面方程.

定理. 每个平面都可用三元一次方程来表示；反之，每个三元一次方程代表一个平面.

$(Ax+By+Cz+D=0)$.

例.



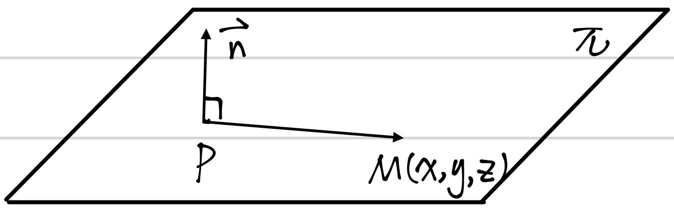
$A=1,\ B=1,\ C=1,\ D=-1$

Q. 右手直角坐标系下. A,B,C为何意义?

平面π: $Ax+By+Cz+D=0$.

取定π上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$. $\Rightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \Rightarrow D=-Ax_0-Bx_0-Cx_0$.

$\Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. (*)



记 $\vec{n}=(A,B,C)$. $M(x,y,z)$.

则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0 \Leftrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{PM}$

$\vec{n}=(A,B,C)$ 为平面π的法向量

(*) 代表π是过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 且与 $\vec{n}=(A,B,C)$ 垂直的平面.

Q. 如何平移π? 改变D的值. 法向 (A,B,C) 不变.

Problem Set 1.1 . 6. $\vec{v},\vec{w}$ 所在平面: $x+y+z=0$. 代数的几何直观

(3,3,6) 不在平面上.