$$E(L^TY) = E(L^T(Xb+\varepsilon))$$
$$= E(E[L^T(Xb+\varepsilon)|b])$$
$$= E(L^TXb + E(L^T\varepsilon|b))$$
$$= E(L^TXb) + E(L^T E(\varepsilon|b))$$
$$= L^TX\theta + 0 \qquad (\text{as } E(b)=\theta,\ E(\varepsilon|b)=0)$$
$$= L^TX\theta.$$

$$Var(Y) = E(Var(Y|b)) + Var(E(Y|b))$$
$$= E(Var(Xb+\varepsilon|b)) + Var(E(Xb+\varepsilon|b))$$
$$= E(Var(\varepsilon|b)) + Var(Xb + E(\varepsilon|b))$$
$$= V + Var(Xb)$$
$$= V + XFX^T.$$

$$\Rightarrow Var(L^TY) = L^T(V+XFX^T)L.$$

Then, $r \triangleq Var(p^Tb - a - L^TY)$
$$= Var(p^Tb) + Var(L^TY) - 2Cov(p^Tb, L^TY)$$
$$= p^TFp + Var(L^TY) - 2Cov(p^Tb, L^TY).$$

Consider $Cov(Y, p^Tb) = E(Cov(Y, p^Tb|b)) + Cov(E(Y|b), E(p^Tb|b))$
$$= E(Cov(Xb+\varepsilon, p^Tb|b)) + Cov(E(Xb+\varepsilon|b), p^Tb)$$
$$= E[Cov(Xb, p^Tb|b) + Cov(\varepsilon, p^Tb|b)] + Cov(Xb, p^Tb)$$
$$= E[0+0] + Cov(Xb, p^Tb)$$
$$= XFp \qquad (Cov(b)=F)$$

$$\Rightarrow 2Cov(L^TY, p^Tb) = 2L^TXFp.$$