使△ABP∽△ADC和△BPD∽△ADC，得$\frac{AB}{AD}=\frac{AP}{AC}$，$\frac{AD}{BD}=\frac{DC}{DP}$。其中AD为两组相似三角形中的共同线段。又如例3，应用$\frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1d_2}{d_1c_2}$作出辅助线DG后，使△BDG∽△BAC和△CFE∽△GFD，其中DG是两组相似三角形的一条公共线段。再如例4，作辅助线MN，使MN//BC，得△ABC∽△AMN，△FBC∽△FMP，△EBC∽△EPN，其中BC是它们的公共边。综上所述，我们在几何图形中作辅助线或辅助角，找出两组相似三角形，并使其中有一条相应边相等，就可使这类成比例线段的复合题得到证明。在这个过程中，常需一定的技巧和仔细对待证题目的分析。通过适当练习，掌握了规律和证题思路，解这类证明题也就不会感到困难了。

（作者单位：天津技工师范学院）

关于三线共点的条件

林道曾

关于三线共点的条件，中学教材中有两种表述方法：

一是："方程$a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$，$a_3x+b_3y+c_3=0$表示的三条直线共点的必要条件是

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0."$$

二是："三条互不平行的直线，共点的充要条件是：

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0."$$

上述两种提法，都是中学生不易理解的。本文想通过对三线共点问题的剖析，意在帮助学生加深理解。

定理 三条互不平行的直线 l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$，l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$，l_3：$a_3x+b_3y+c_3=0$共点的充要条件是

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0.$$

证明 必要性。

∵l_1、l_2、l_3互不平行，

$$\therefore \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2},\ \frac{a_1}{a_3}\neq\frac{b_1}{b_3},\ \frac{a_2}{a_3}\neq\frac{b_2}{b_3}.$$

又三条直线共点，

∴l_1和l_2的交点必在直线l_3上，

从而，其坐标满足l_3的方程，

即 $$a_3\cdot\frac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}+b_3\cdot\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}+c_3=0,$$

整理得 $$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0.$$

充分性。

$$\because \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0 \qquad (\alpha)$$

又 $$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2} \qquad (\beta),$$

$$\frac{a_2}{a_3}\neq\frac{b_2}{b_3} \qquad (\gamma),$$

$$\frac{a_1}{a_3}\neq\frac{b_1}{b_3} \qquad (\delta),$$

$\therefore a_3b_1c_2+a_2b_3c_1+a_1b_2c_3-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3=0$,

$$\text{即}a_3\cdot\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}+b_2\cdot\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}+c_3\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0,$$

$$\text{或}a_2\cdot\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_3 & b_3\end{vmatrix}+b_2\cdot\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_3 & -c_3\end{vmatrix}+c_2\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}=0,$$

$$\text{或}a_1\cdot\begin{vmatrix}-c_2 & b_2\\ -c_3 & b_3\end{vmatrix}+b_1\cdot\begin{vmatrix}a_2 & -c_2\\ a_3 & -c_3\end{vmatrix}+c_1\cdot\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}=0.$$

由（β）、（γ）、（δ），上述三式可化成

$$a_3\cdot\frac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}+b_3\cdot\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}+c_3=0, \qquad (1)$$

$$a_2\cdot\frac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_3 & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}+b_2\cdot\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_3 & -c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}+c_2=0,\quad(2)$$

$$a_1\cdot\frac{\begin{vmatrix}-c_2 & b_2\\ -c_3 & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}+b_1\cdot\frac{\begin{vmatrix}a_2 & -c_2\\ a_3 & -c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}+c_1=0.\quad(3)$$

其中(1)式说明l_1、l_2交点在l_3上，(2)式说明l_1、l_3交点在l_2上，(3)式说明l_2、l_3交点在l_1上。

所以，三条直线共点。

然而，必须指出的是，上述必要条件的存在并不是唯一的。事实上，只要$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$，$\frac{a_2}{a_3}\neq\frac{b_2}{b_3}$，$\frac{a_1}{a_3}\neq\frac{b_1}{b_3}$，三线共点存在；或者三个比例式$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，$\frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2}{b_3}=\frac{c_2}{c_3}$，$\frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}=\frac{c_1}{c_3}$中至少有一个式子成立；甚至$a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3$成立，都可以推出三阶系数行列式的值为0。因而，条件

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$$

即可以是互不平行的三线共点的必要条件，也可以是任意两线重合，第三条直线随意放置（不管有无交点）的三线的必要条件，甚至可以是互相平行三线的必要条件。

综上，当我们解含有参数k的三线共点的题目时，令三阶系数行列式的值为0，这时，由于该方程的解集是全集I，而适合条件的k值往往是I的子集，因而对解出的k值需要进行必要的验证。或者，在令三阶系数行列式的值为0前，我们预先就把可能出现的麻烦去掉，即预先解出适合条件$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，$\frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2}{b_3}=\frac{c_2}{c_3}$，$\frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}=\frac{c_1}{c_3}$，$a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3$的所有k值，记以集合K，再令三阶系数行列式的值为0，解得k值（即由所有k值组成的全集I）。那末真正适合题意的解k应是$\overline{K}$。

例1. 已知下列三条互不平行的直线共点，求出k的值：

$$3x+2y+9k=0,\ 2x+y-5=0,\ x+ky+2=0.$$

解　∵所给三条直线共点，

$$\therefore\begin{vmatrix}3 & 2 & 9k\\ 2 & 1 & -5\\ 1 & k & 2\end{vmatrix}=0,$$

即　$3k^2+k-2=0$，

$\therefore k_1=\frac{2}{3}$，$k_2=-1$.

当　$k=\frac{2}{3}$时，直线$3x+2y+9k=0$与直线$x+ky+2=0$重合，不合题意，应该舍去。

$\therefore k=-1$.

从定理充分条件的证明中，我们发现，条件(α)、(β)、(γ)、(δ)缺一不可。故互不平行三线共点的充分条件是三阶系数行列式的值为0. 上述充分条件的应用价值就在于，它常常可以帮助我们较容易地解决平面几何中较复杂的三线共点问题。

例2. 求证：三角形三条中线相交于一点，这点到顶点的距离是它到对边中点距离的2倍。

证明　如图1，以B为原点，BC所在边为x轴，建立直角坐标系。从而有

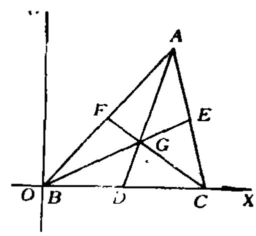


图　1

$B(0,0)$，$C(a,0)$，$A(c,d)$，

$D\left(\frac{a}{2},0\right)$，$E\left(\frac{a+c}{2},\frac{d}{2}\right)$，

$F\left(\frac{c}{2},\frac{d}{2}\right)$.

于是AD方程：$2dx+(a-2c)y-ad=0$，　(1)

BE方程：$dx-(a+c)y=0$，　(2)

CF方程：$dx+(2a-c)y-ad=0$.

$$\because 三线不平行，且\begin{vmatrix}2d & a-2c & -ad\\ d & -a-c & 0\\ d & 2a-c & -ad\end{vmatrix}=0,$$

∴AD、BE、CF三线交于一点，令交点为G.

由(1)、(2)解得$G\left(\frac{a+c}{3},\frac{d}{3}\right)$.

$$而\frac{|AG|}{|GD|}=\frac{\sqrt{\left(c-\frac{a+c}{3}\right)^2+\left(d-\frac{d}{3}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{a+c}{3}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{3}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{4c^2-4ac+a^2+4d^2}}{3}}{\frac{\sqrt{4c^2-4ac+a^2+4d^2}}{6}}=\frac{2}{1}.$$

同理可得 $\frac{|CG|}{|GF|}=\frac{|BG|}{|GE|}=2$.

从例2可以看出.要判断互不平行的三线共点，在适当建立坐标系并写出三线的方程之后，必须通过充要条件，即三阶系数行列式为0来加以判定。

到此，我们已能指出，全日制十年制高中第三册课本所指的三线共点的必要条件是指三线交于一点的一般情形。

例3. 已知O是△ABC内的一点，O与△ABC三顶点连线分别为AO、BO、CO，其延长线交对边于X、Y、Z. 求证：$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$.

证明 如图2，建立直角坐标系，各点坐标分别是A（h，k）、B（b，0）、C(c，0)、X(0,0).

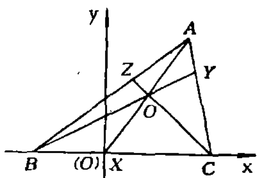


图 2

设Z分AB之比为λ. 则Z的坐标是

$$\left(\frac{h+\lambda b}{1+\lambda},\ \frac{k}{1+\lambda}\right).$$

设Y分CA之比为μ，则Y的坐标是

$$\left(\frac{c+\mu h}{1+\mu},\ \frac{\mu k}{1+\mu}\right).$$

于是BY的方程是：

$$(c+\mu h-b-\mu b)y=\mu kx-\mu kb,$$

CZ的方程是：

$$(h+\lambda b-c-c\lambda)y=kx-ck,$$

AX的方程是：$hy=kx$.

∵三线共点，

$$\therefore\begin{vmatrix} c+\mu h-b-\mu b & \mu k & -\mu kb \\ h+\lambda b-c-c\lambda & k & -ck \\ h & k & 0 \end{vmatrix}=0.$$

化简得：$b\lambda\mu=-c$,

即 $\left|\frac{b}{c}\right|\cdot|\mu|\cdot|\lambda|=1$.

$$\therefore\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

例3告诉我们，在已知互不平行的三线共点的条件下，就要运用必要条件，即三阶系数行列式为0来导出题目欲证的结果。

（作者单位：天津市第三十五中学）

推导圆锥曲线方程的消参数方法

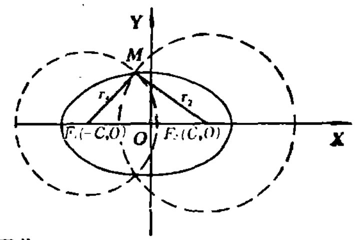
杨世明

按一般教科书的顺序，是圆锥曲线在先，曲线的参数方程在后。如果在讲授曲线的参数方程时，运用本文所介绍的消参数方法重新推导圆锥曲线的方程，这不仅对学生熟练掌握和应用消参数法有益，而且对他们进一步深入认识圆锥曲线有益，同时对于他们将来学习空间解析几何也会有所帮助的。现将消参数方法简介如下。

一、椭圆方程的推导

求到定点F_1（$-c$，0），F_2（c，0）的距离之和为2a的点的轨迹方程（$a>c>0$）.

解 设M（x，y）为轨迹上任意一点，它到F_1、F_2的距离分别为r_1、r_2，那么M必在以F_1为圆心、r_1为半径和以F_2为圆心、r_2为半径的两个圆上(如图)，因此



$$\begin{cases}(x+c)^2+y^2=r_1^2, & (1)\\ (x-c)^2+y^2=r_2^2, & (2)\\ r_1+r_2=2a. & (3)\end{cases}$$

消去参数r_1、r_2：（1）－（2）得

$$r_1^2-r_2^2=(x+c)^2-(x-c)^2,$$

即 $(r_1+r_2)(r_1-r_2)=4cx$.

从而有，$\begin{cases}r_1+r_2=2a,\\ r_1-r_2=\frac{2c}{a}x.\end{cases}$

于是，$r_1=\frac{cx+a^2}{a}$. （4）

将（4）代入（1），命$a^2-c^2=b^2$即得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

二、双曲线方程的推导

求到定点F_1（-c，0），F_2（c，0）的距离之差的绝对值为2a的点的轨迹方程（$c>a>0$）.

解 设M(x，y)为轨迹上任意一点，可得方程组