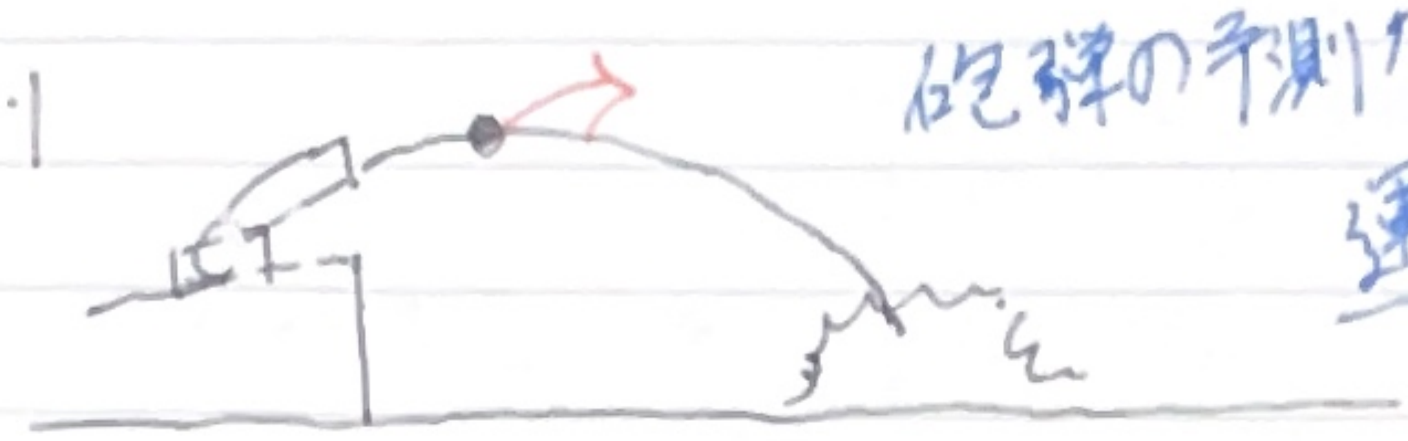
中学数学からはじめる微分積分 by よびのり

微分積分を理解する。

・微積とは何か？ → 現代科学の基礎

例



砲弾の予測など　未来予測!?

運動方程式 — 微分方程式の一つ

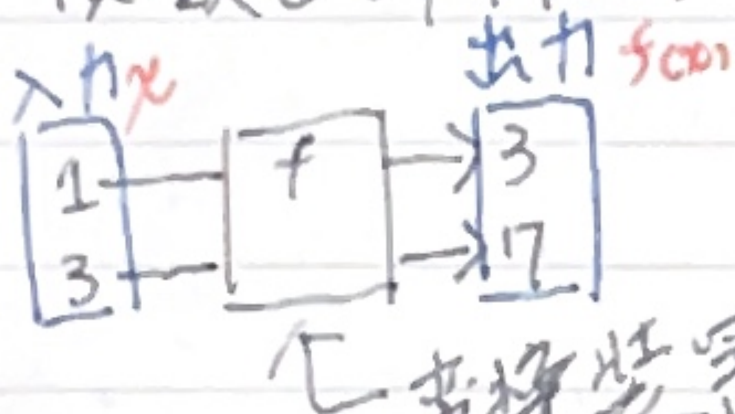
「世界は微分で記述され、積分で読み解く」 by よびのり

・学ぶメリット → 世界を見る目が変わる!?

数学 — 本質が詰まってる

微積を知ってる人だけが見れる世界がある

・関数とは何か？　数と数の間の関係　引数と返り値やね。

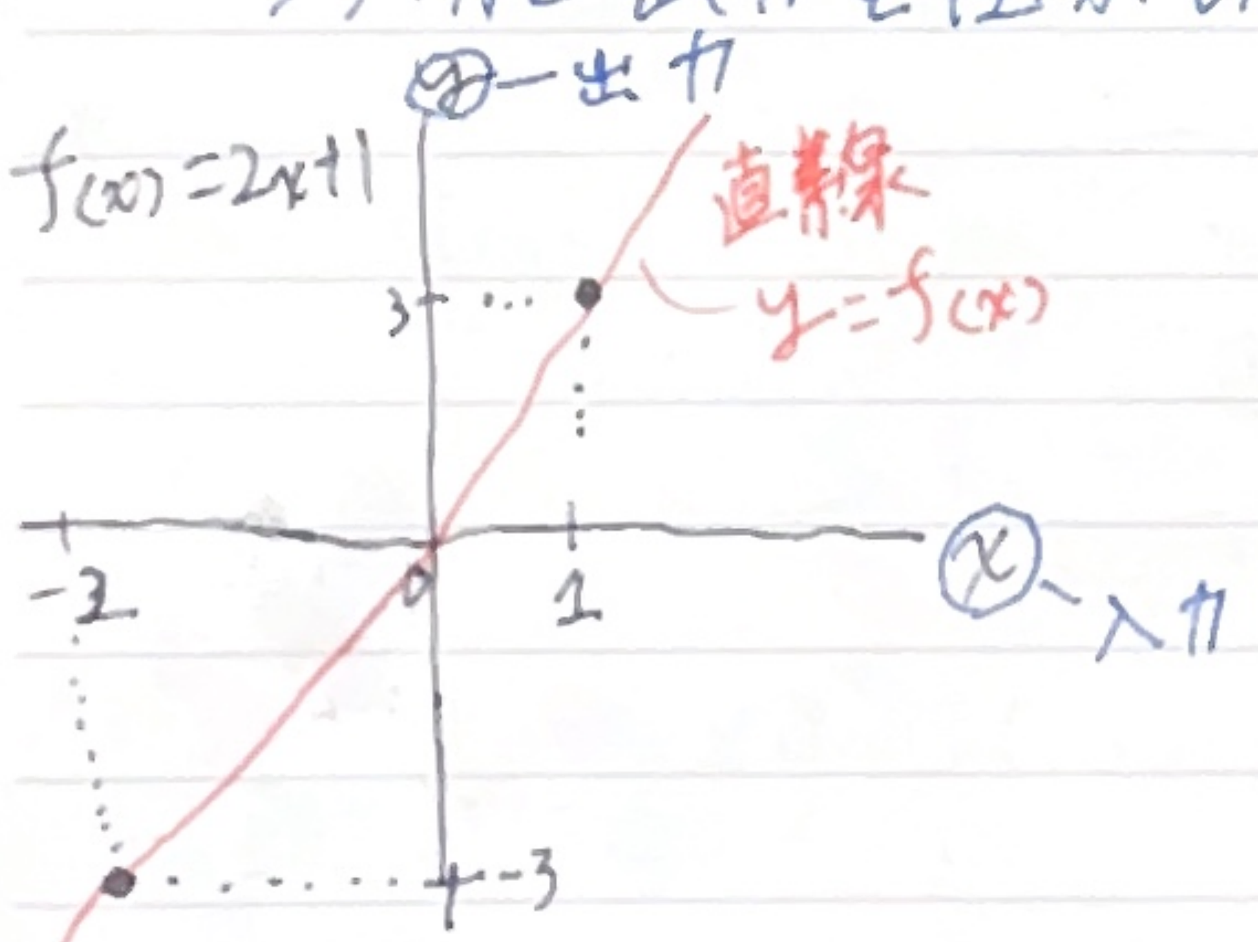


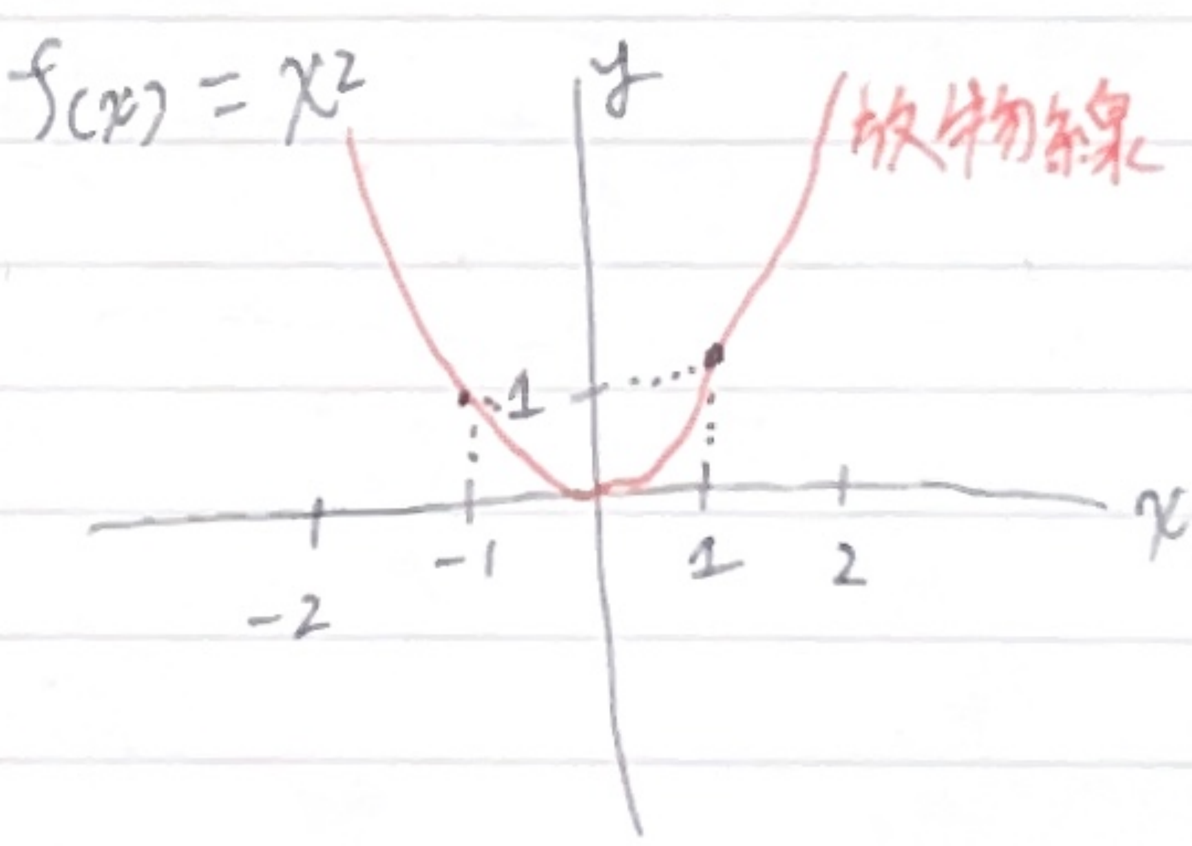
変換装置 ＝ 関数 "function"

$f(x)$ — 引数 — 関数名

・「グラフとは何か」を理解する

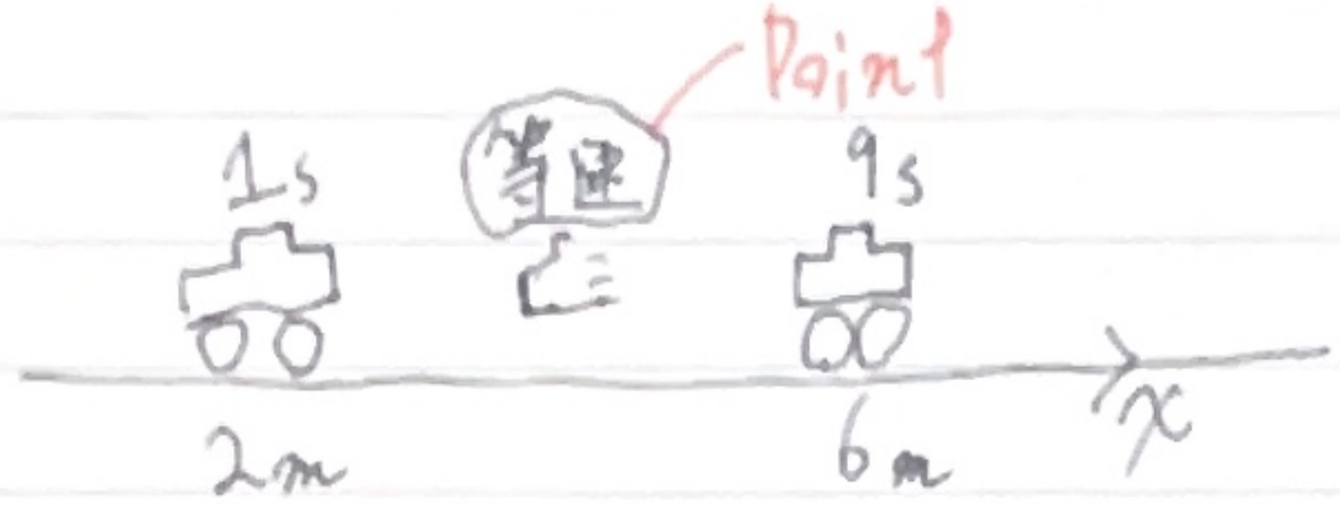
→ 入力と出力を図示したもの → 目で見てわかる様にする





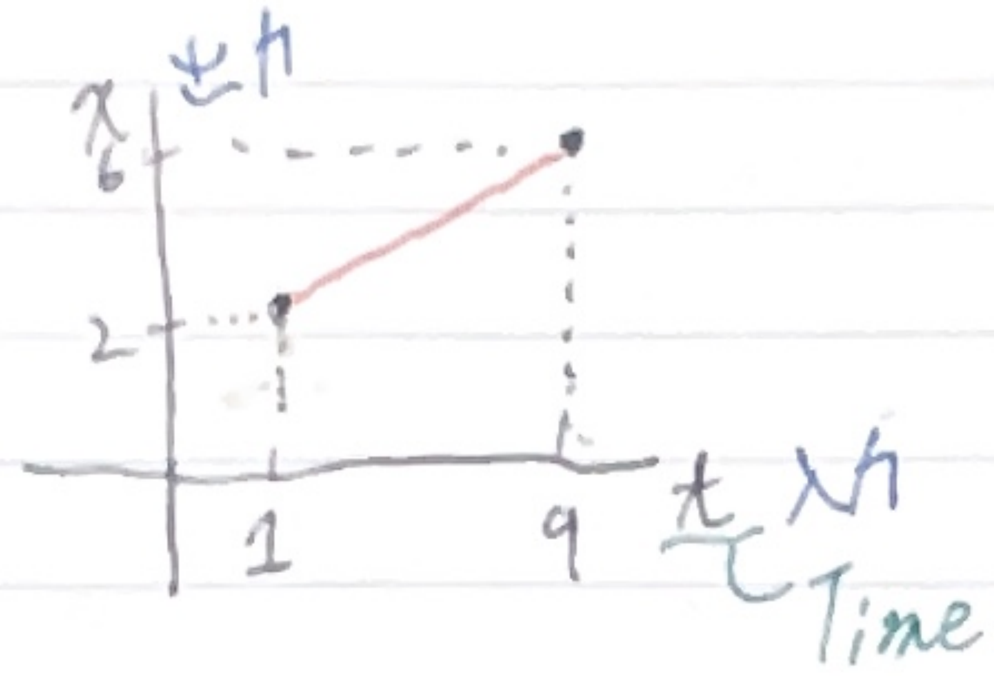
・微分とは何か？

→微分とは「傾き」だ！



$$速度 = \frac{6-2\ \mathrm{m}}{9-1\ \mathrm{s}} = 0.5\ \mathrm{m/s}$$ ← 1秒で進むキョリ

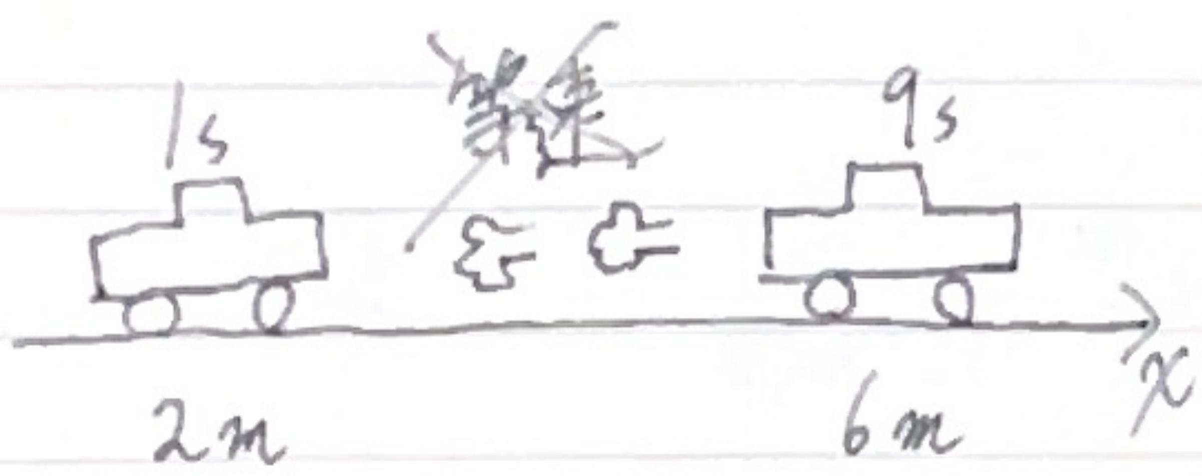
$$\frac{キョリの変化}{時間の変化}$$



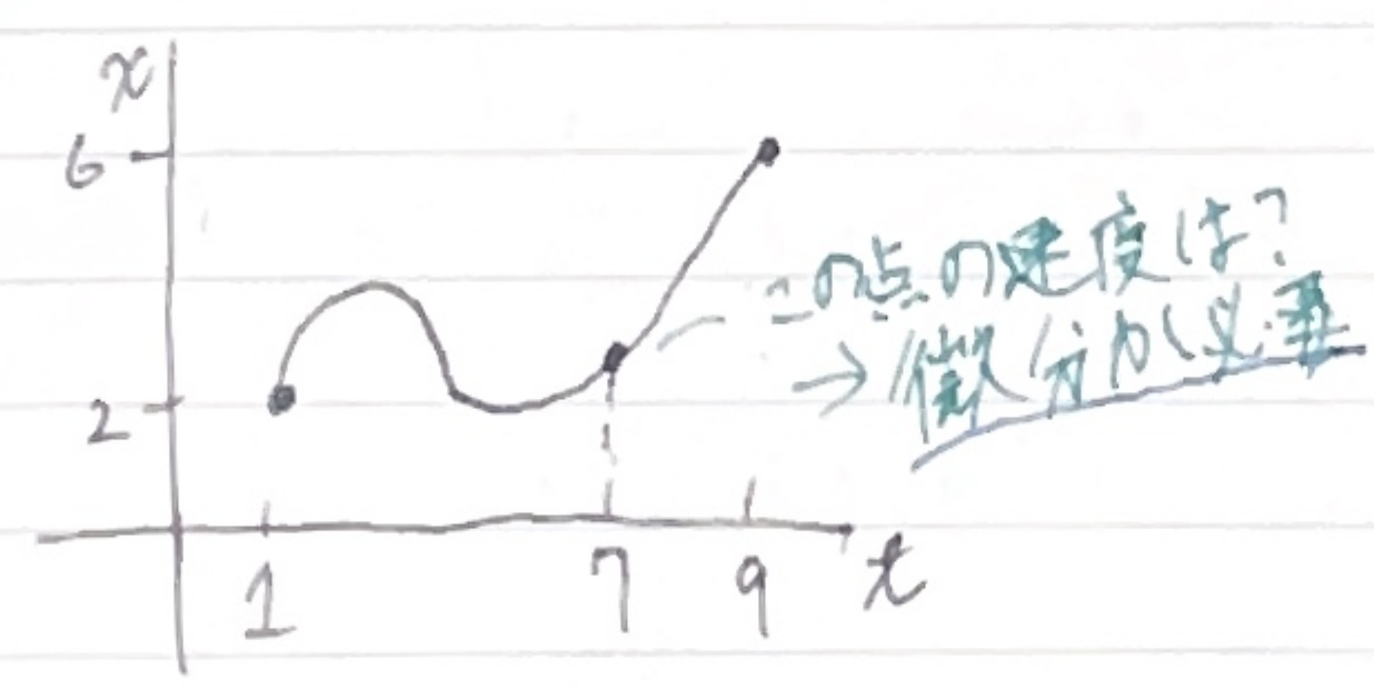
$$傾き = \frac{縦軸の変化}{横軸の変化}$$ ～ 横に進んだ時、縦にどれだけ進むか

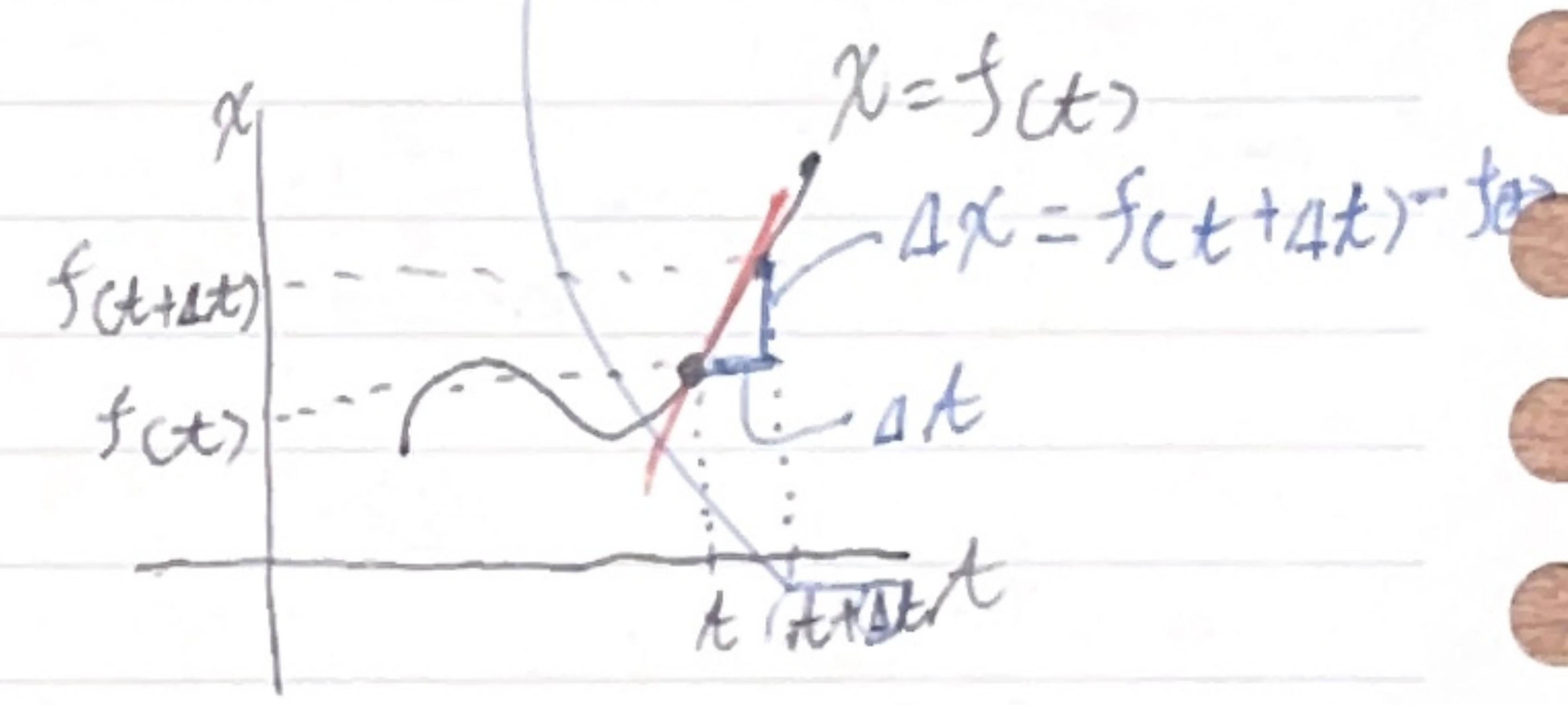
速度

速度とはx−tグラフの傾きである。



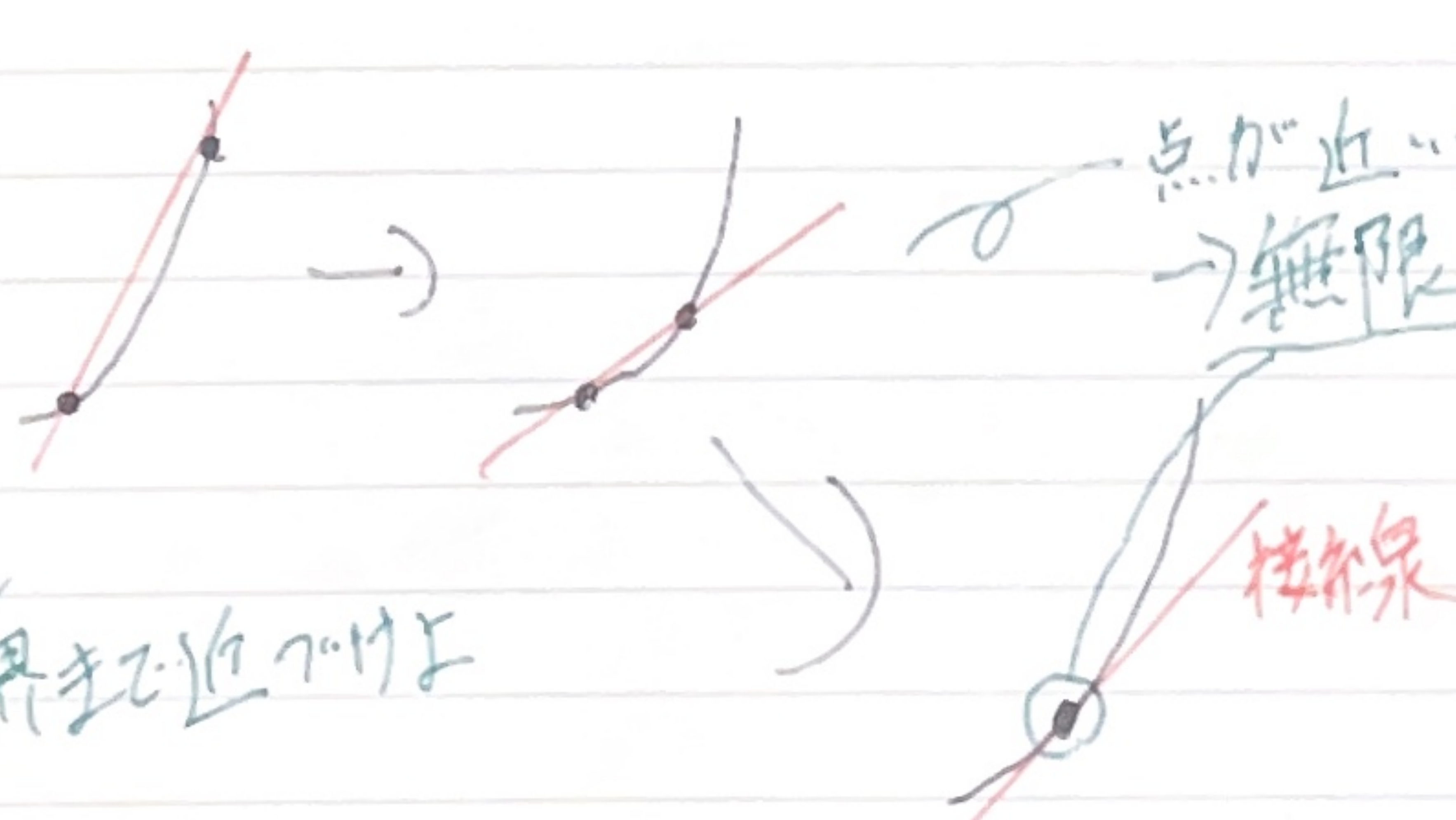
Δ（デルタ） = 変化





$$\boxed{平均の速度 = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{(t+\Delta t)-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

→ある時間の瞬間の速度ではない…



～ 点が近い方がリアルな速度

→無限に近ければ、瞬間の速度！？

lim

→限界まで近づけよ

$$\boxed{瞬間の速度 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}}$$

（lim：リミット）

☆用語と表記

変化 difference　無限まで小さくなった変化を表す記号

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ を $\frac{dx}{dt}$ と書く

∟ xをtで微分する

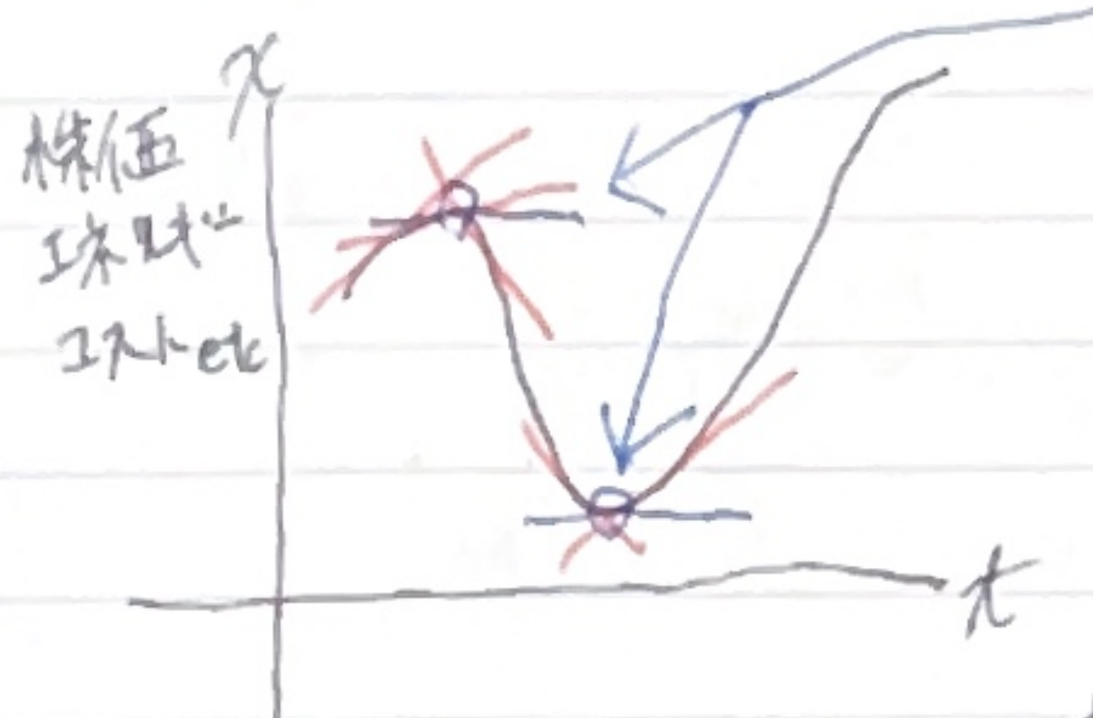
point

$\boxed{\text{微分とはめちゃめちゃ小さな「変化」を見ること}}$

・現実への応用

$\frac{dx}{dt} = 0$ 傾きが0の状態

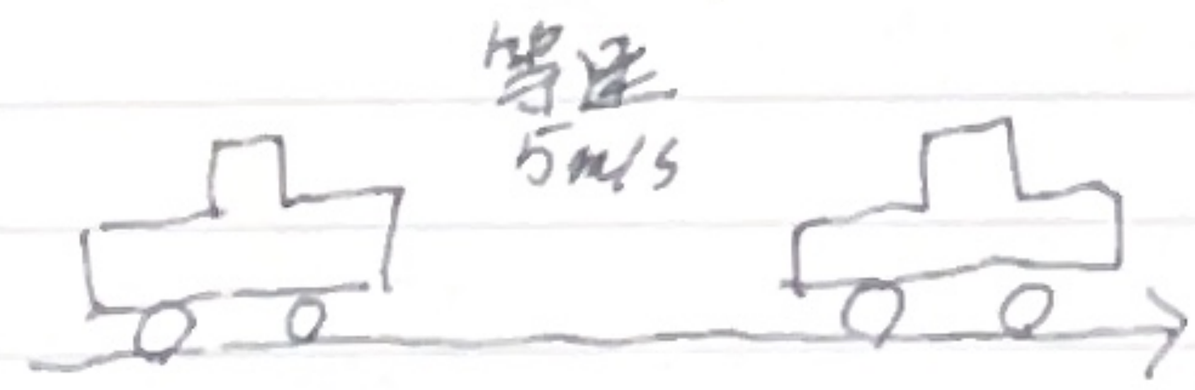
重要！→物事の変化点

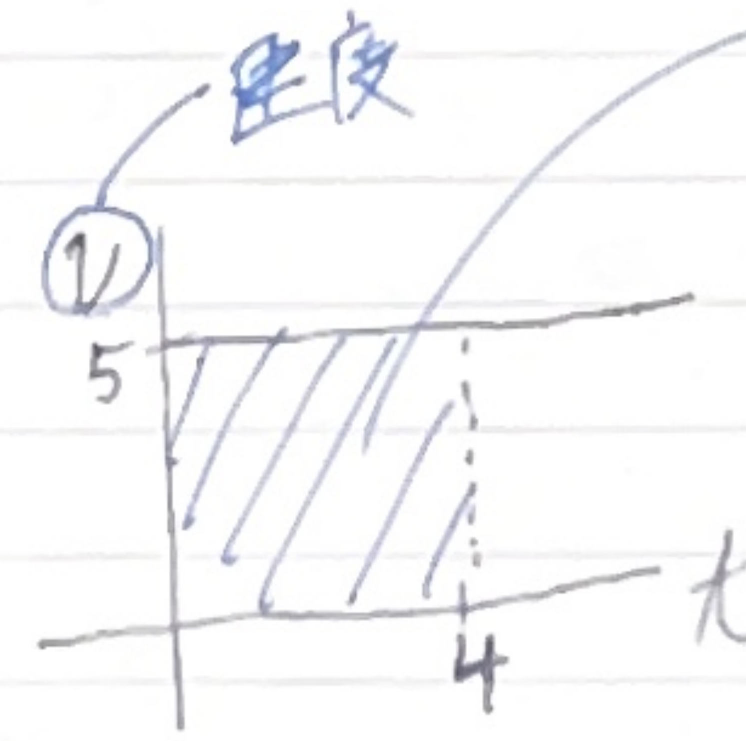


分析のプロセス
変化点を見る

$\boxed{\text{問題}} \xrightarrow{\text{数式化}} \underset{\text{関数}}{\boxed{y=f(x)}} \xrightarrow{\text{微分}} \boxed{\frac{dy}{dx}}$

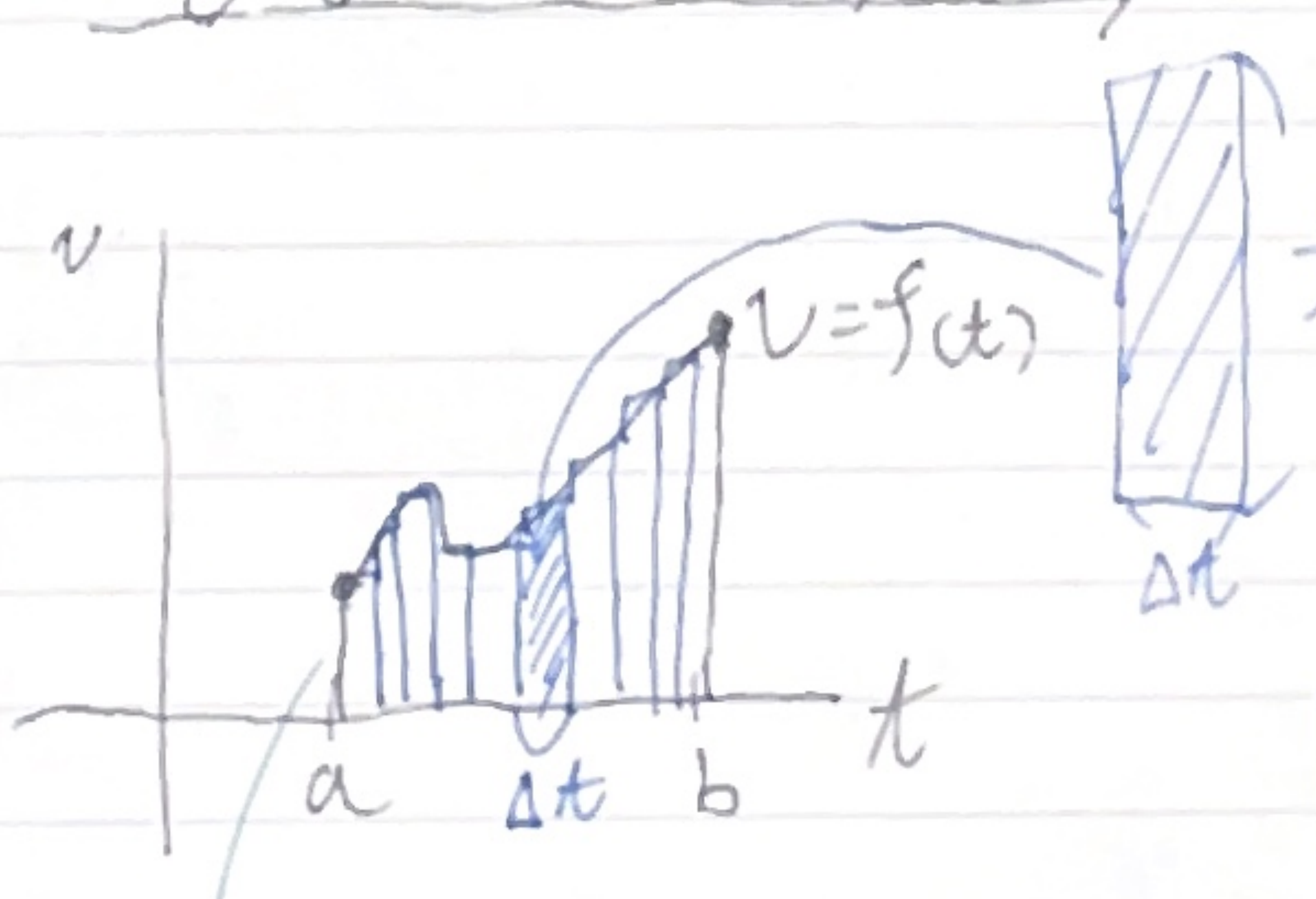
・積分とは何か？
→積分とは「面積」だ！





面積は20
→20m進んだ

キョリ＝面積



f(t)の面積 ＝ f(t) × Δt

変な形だと計算できないので長方形にしちゃおう

$\boxed{\text{キョリ(面積)} \fallingdotseq f(t) \times \Delta t \text{ を } t=a \sim b \text{ で足したもの}}$

Δtを小さくする

$\int_a^b f(t)\,dt$

↳インテグラル、a~bのtを足せ！

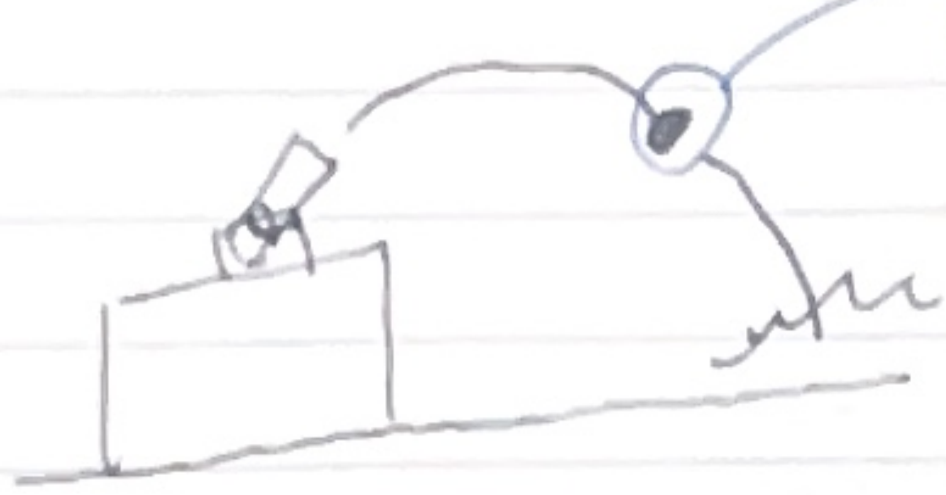
☆用語と表記

$\int$ インテグラル

元々は sum の「S」
足す

Point
積分とはめちゃめちゃ小さい「変化」を足していくこと

・予測と微積の関係



運動の法則

$$m\frac{dv}{dt}=f$$

質力　　力

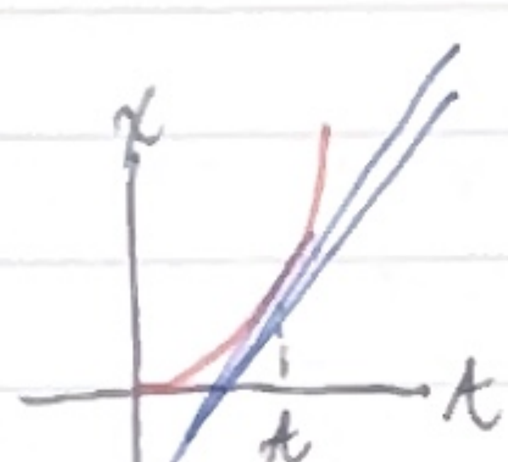
← 微分がある！
一瞬の変化を見ている

積分
一瞬の変化を足してくこと

正確な予測

tがちょっと変化したとき
xがどんくらい変化するか

例題
$x=t^2$



$$\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{(t+\Delta t)-t}$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^2-t^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{t^2}+2t\Delta t+(\Delta t)^2-\cancel{t^2}}{\Delta t}$$

$$\frac{4+8}{2}=2+4=6$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t)$$

↳限りなく0になる
→0になる

$$=2t$$

→ t は好きな数を入ることができる
→ 3秒の時に速度は6

t^2（きょり） $\xrightarrow{\text{微分}}$ $2t$（速度）
$2t$（速度） $\xrightarrow{\text{積分}}$ t^2（きょり）

$t^3 \to 3t^2$　　$2t^2 \to 2\cdot 2t = 4t$

$(a+b)^2$

$=a^2+2ab+b^2$

$\int (3x^2-4x+5)\,dx$

$(a-b)^2$

$=(a-b)(a-b)$

$=a^2-ab-ab+b^2$

$=a^2-2ab+b^2$

$=\int 3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}\right)dx$

$\int_0^1 (x^2+2x)\,dx$ $\qquad x-$

$=\int$

$\int (x^2+2x)\,dx$

$\int (2x+3)\,dx$ $\quad =\int (1x^2)\,dx+\int (2x^1)\,dx$

$2x \to x^2$

$=\int \left(\frac{1}{2+1}x^{2+1}\right)dx+\int \left(\frac{2}{1+1}x^{1+1}\right)dx$

$=\int (x^2+9)\,dx$

$=\int_0^2 x^3\; x^2+x$

$=\frac{x^3}{2}+x^2+C$

$=x^2+9+C$

$=4+2-0$

$=6$

$\int ax^n\,dx=\frac{a}{n+1}x^{n+1}$

$\left[\frac{x^3}{2}+x^2\right]_0^1=\left(\frac{1^3}{2}+1\right)-0$

$3x^2=\frac{3}{2+1}x^{2+1}$

$=\frac{1}{2}+1$

$=x^3$

$=\frac{3}{2}$

$x^n \to n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = 3x^2 + 4x + 5$

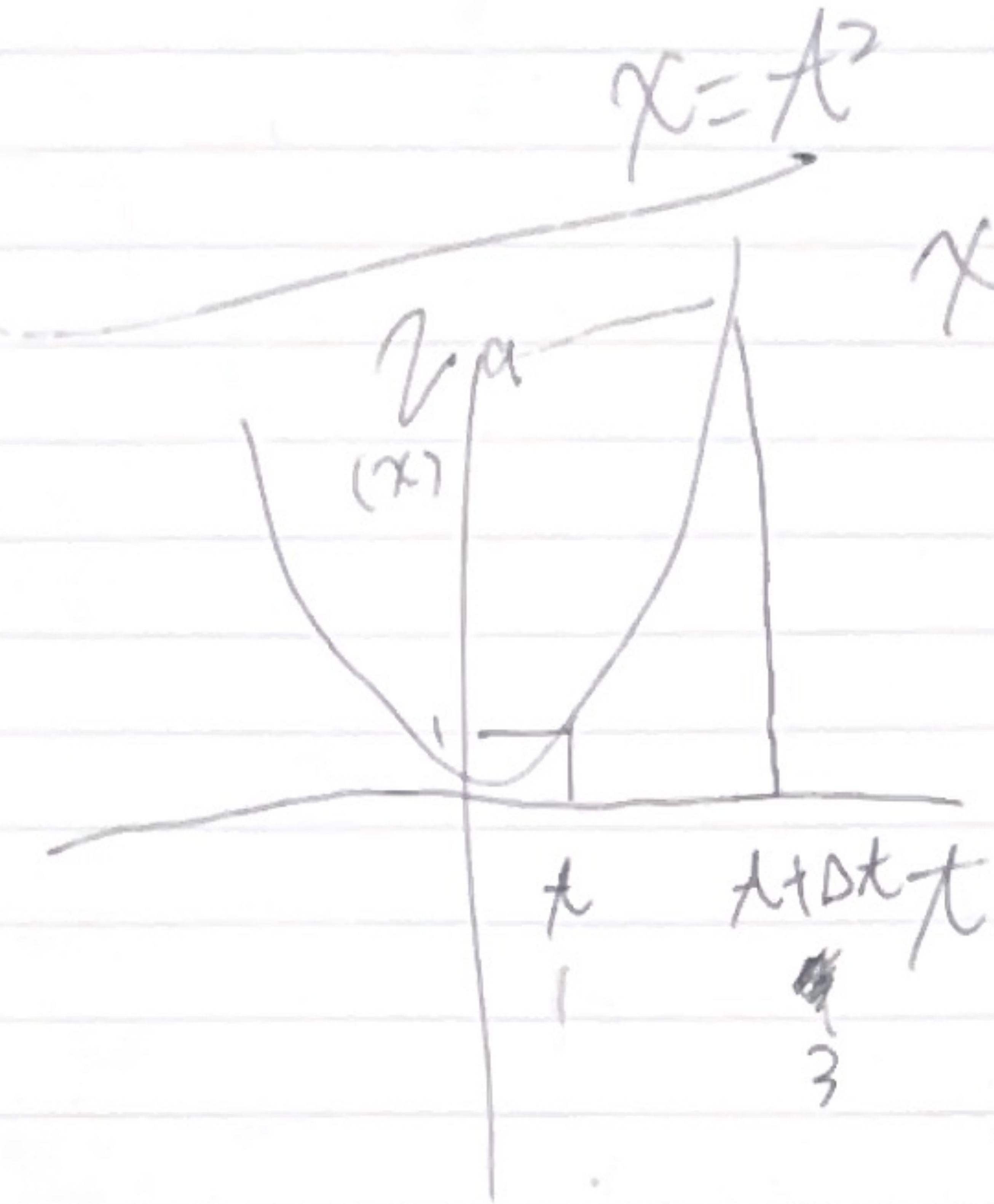
$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 4$

$\frac{d}{dx} 5x^3 = 3x^2$

$= -2x^1$

$= x^6$

$3x^2 - 2x + x^6$



$x = f(t) = t^2$

$\frac{dx}{dt} = 2t$

$\int_1^3 f(x)\,dt$

$ax^n = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$

$\int_1^3 t^2\,dt$

$\int_2^4 (x-1)\,dx$

$= \int_2^4 (1x^1 - 1)\,dx$ 8

$= \int_2^4 \left(\frac{1}{1+1} x^{1+1}\right) + \int_2^4 -1\,dx$

$\cancel{= \int_2^4 \left(\frac{1}{2} x^2\right)}$

$\left[\frac{1}{2}x^2 - 1x\right]_2^4$

$= \left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right)$

$= (8-4) - (2-4)$

$= 4 + 2$

$= 6$

$2t \to t^2$

$f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x$

$16x^3 - 9x^2 + 4x - 5$

$\int_1^3 (3x^2 + 2x)\,dx = \int_1^3 3x^2\,dx + \int_1^3 2x\,dx$

2 . 4 . 6 .

$\int 3x^2\,dx = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = x^3$

$\int 2x^1\,dx = \frac{2}{1+1} x^{1+1} = x^2$

12.

$[x^3 + x^2]_1^3$

$= (27+9) - (1+1)$

$= 36 - 2$

$= 34$

$\int_1^2 (x^2 + 3x)\,dx$

$= \int_1^2 x^2\,dx + \int_1^2 3x\,dx$

$\int x^2\,dx$

$= \int \frac{1}{2+1} x^{2+1}\,dx$

$= \frac{x^3}{3}$

$\int 3x\,dx$

$= \int \frac{3}{1+1} x^{1+1}\,dx$

$= \frac{3}{2} x^2$

$\int_3^1 2t\,dx$

$t^2 + C$

$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\right]_1^2$

$= \left(\frac{8}{3} + \frac{12}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right)$

$= \frac{8}{3} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}$

$= \frac{7}{3} - \frac{3}{2} + 6$

$= \frac{14}{6} - \frac{9}{6} + \frac{36}{6}$

$= \frac{5}{6} + \frac{36}{6} = \frac{41}{6}$

$(9 + C) - (1 + C)$

$= 9 + C - 1 - C$

$= 8$

$\int (4x^3 - 5x^2 + 2x - 1)\,dx$

$= \int \left(\frac{4}{3+1} x^{3+1}\right) dx - \int \left(\frac{5}{2+1} x^{2+1}\right) dx + \int \left(\frac{2}{1+1} x^{1+1}\right) dx$

$= x^4 - \frac{5}{3} x^3 + x^2 + C$

$\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$

$= \int \left(\frac{6}{2+1} x^{2+1}\right) dx - \int \left(\frac{4}{1+1} x^{1+1}\right) dx + 3x$

$= 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$