目录

1 三角函数 **4**

1.1 基础知识 4

1.2 终边一点 6

1.3 平移 6

1.4 sin 和 cos 互化 6

1.5 区间内最值, 值域 6

1.6 伸缩变换 6

1.7 对称中心, 对称轴, 单调区间 6

1.8 sinx 图像翻转 7

1.9 零点个数 7

2 正余弦 **8**

2.1 基础知识 8

2.2 多解取舍两种思路 8

2.3 角化边, 边化角, 角化角 8

2.4 三角形形状 (讨论 n 种情况) 8

2.5 已知三边判断三角形形状 9

3 向量 **10**

3.1 基础知识 10

3.2 绝对值 10

3.3 夹角, 锐角, 钝角 10

3.4 基础图形 (理) 11

3.5 基底建模法 (理) 11

4 数列 **13**

4.1 基础知识 13

4.2 单调性 15

4.2.1 分式数列 15

4.2.2 分段数列 15

4.2.3 一般数列 15

4.3 最值问题 16

4.4 求通项公式 16

4.4.1 叠加法 16

4.4.2 叠乘法 16

4.4.3 倒数法 16

4.4.4 待定系数法 16

4.5 求和 16

4.5.1 裂项相消法 16

4.5.2 错位相减法 17

数学笔记

于洋

1 三角函数

1.1 基础知识

诱导公式:

$$\begin{aligned}\sin(2k\pi+\alpha)&=\sin\alpha, k\in\mathbb{Z}\\ \cos(2k\pi+\alpha)&=\cos\alpha, k\in\mathbb{Z}\\ \tan(2k\pi+\alpha)&=\tan\alpha, k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\pi+\alpha)&=-\sin\alpha\\ \cos(\pi+\alpha)&=-\cos\alpha\\ \tan(\pi+\alpha)&=\tan\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha)&=-\sin\alpha\\ \cos(-\alpha)&=\cos\alpha\\ \tan(-\alpha)&=-\tan\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha)&=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)&=-\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha)&=-\tan\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=\cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=-\sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=-\cot\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\cot\alpha\end{aligned}$$

两角和差:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

二倍角和降幂:

$$\begin{aligned}&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ &\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\\ &\tan 2\alpha=\tfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha=\tfrac{1+\cos 2\alpha}{2},\\ &\sin^2\alpha=\tfrac{1-\cos 2\alpha}{2}\end{aligned}$$

辅助角公式: $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),\tan\varphi=\frac{b}{a}$

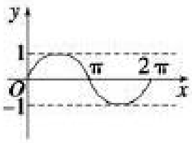
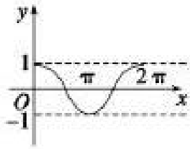
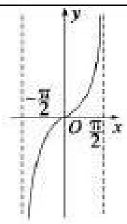
弧长和扇形面积公式: $l=r|\alpha|,\quad S=\frac{1}{2}\,\mathrm{lr}=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

和差化积, 积化和差:

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \sin\alpha-\sin\beta&=2\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ \cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \cos\alpha-\cos\beta&=-2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha\sin\beta&=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\\ \sin\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\\ \cos\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\\ \sin\alpha\sin\beta&=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]\end{aligned}$$

三角函数性质:

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图像			
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
单调性	$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递增； $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递减	$[-\pi+2k\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递增； $[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递减	$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$上递增
最值	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{max}=1$； $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{min}=-1$	$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{max}=1$； $x=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{min}=-1$	
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
对称中心	$(k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{k\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$
对称轴方程	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$	$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$	
周期	2π	2π	π

1.2 终边一点

角 α 终边上一点 (-4,3):

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{3}{5}$

1.3 平移

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 移动变成 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$:

1) 提括号: $\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ $\quad \sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$

2) 相减:$\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{12}$

3) 翻译: $-\frac{\pi}{12}$ 是向右移动 $\frac{\pi}{12}$

1.4 sin 和 cos 互化

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$ 根据 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ 根据 $\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

1.5 区间内最值, 值域

$f(x)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值, 最小值

$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$2x\in[0,\pi]$

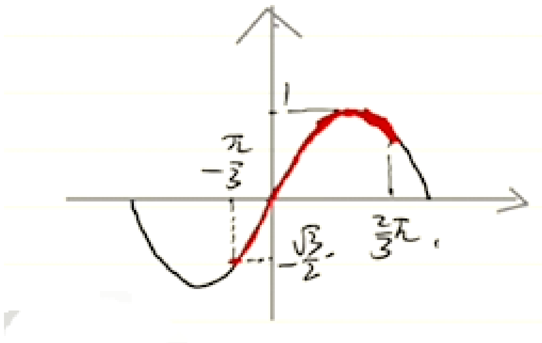
$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right]$

如图此区间的最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 最大值 1, 所以

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-2\sqrt{3},4]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\in[-\sqrt{3},4+\sqrt{3}]$



1.6 伸缩变换

$y=\cos x$

横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (x 换成 2x) $\longrightarrow y=\cos 2x$

纵坐标伸长到原来的 2 倍 (A 换成 2A) $\longrightarrow y=2\cos 2x$

向左平移 $\frac{\pi}{4}$ (x 换成 $x+\frac{\pi}{4}$) $\longrightarrow y=2\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

1.7 对称中心, 对称轴, 单调区间

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的减区间

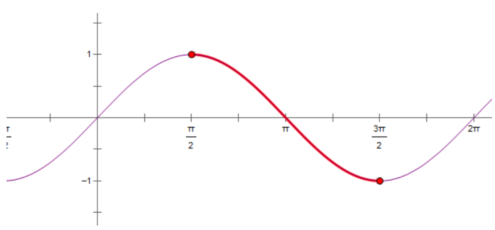


图 1: $\sin x$ 减区间

与基础图形对照:

$\sin x$ 减区间	$x \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right] (k \in z)$
$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 减区间	$2x-\frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right] (k \in z)$

计算出 x 范围即可. 对称中心, 对称轴, 同样原理, 都是根据基础图形, 替换即可

1.8 sinx 图像翻转

$y=|\sin x|$, $y=\sin|x|$, $y=-\sin x$ (绿虚线:$\sin x$ 图像, 红线: 翻转后图像)

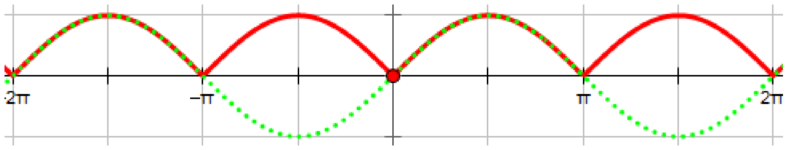


图 2: y=$|\sin x|$ **整体加绝对值: x 轴下方图像翻折到上方. 下方图像不保留.**

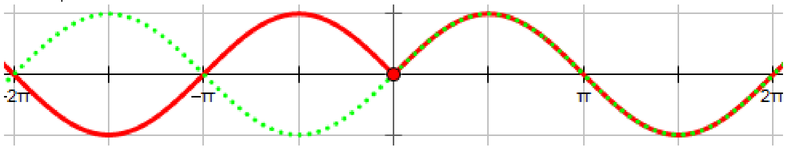


图 3: y=$\sin|x|$ **x 加绝对值: 先画出 x 轴正半轴, 再沿 y 轴翻折.**

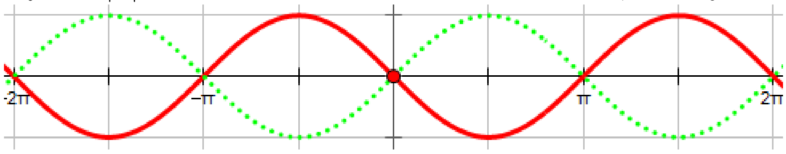


图 4: y=$-\sin x$ **整体加负号: 沿 x 轴上下翻折.**

1.9 零点个数

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\sin x$ 零点个数

令 $f(x)=0$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\sin x$

画出等号左右两侧图像, 交点个数就是零点个数 (2 个)

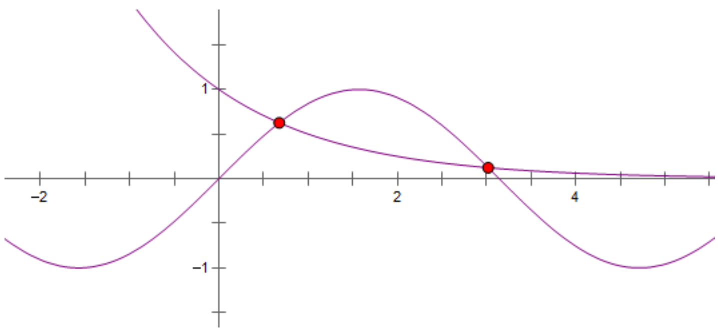


图 5: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x)=\sin x$

2　正余弦

2.1　基础知识

正弦定理:

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

余弦定理:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　　$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　　$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$　　$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

面积公式:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$

$S=\frac{(a+b+c)r}{2}$　　$S=\frac{abc}{4R}$　　$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$　　$(p=\frac{1}{2}(a+b+c))$

判断三角形形状: 最短两条边的平方与第三条边平方比较

$a^2>b^2+c^2$　ΔABC 为钝角三角形

$a^2=b^2+c^2$　ΔABC 为直角三角形

$a^2<b^2+c^2$　ΔABC 为锐角三角形

2.2　多解取舍两种思路

在 ΔABC 中,$b=\sqrt{3},B=60°,c=1$, 求 C

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\therefore\sin C=\frac{1}{2}\therefore c=30°$ 或 $150°$

角度取舍两种思路:

1) 依据大边对大角:　$\because b>c,\therefore B>C\therefore C=30°$

2) 三角形内角和 180° :　$\because B=60°,\therefore 0°<C<120°\therefore C=30°$

2.3　角化边, 边化角, 角化角

$3a\cos A=c\cos B+b\cos C$, 求 $\cos A$

两种思路都可以:

边 $\rightarrow$ 角

$3\sin A\cos A=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A\therefore\cos A=\frac{1}{3}$

角 $\rightarrow$ 边

$3a\cos A=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\therefore\cos A=\frac{1}{3}$

2.4　三角形形状 (讨论 n 种情况)

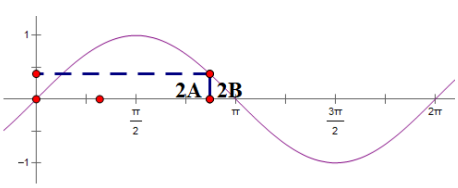


图 6: 2A=2B

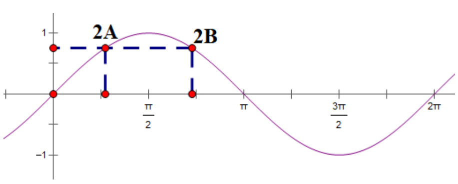


图 7: $2A+2B=\frac{\pi}{2}*2$

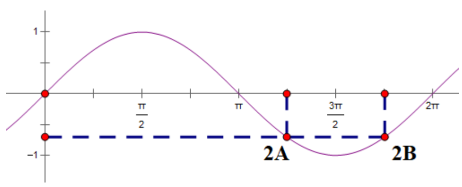


图 8: $2A+2B=\frac{3\pi}{2}*2$

$\sin 2A = \sin 2B$

$\because 0 < A < \pi \therefore 0 < 2A < 2\pi$

如图: 三种情况

1) 当 $2A = 2B$ 时等腰三角形

2) 当 $2A + 2B = \frac{\pi}{2} * 2$ 时, 直角三角形

3) 当 $2A + 2B = \frac{3\pi}{2} * 2$ 时, 不符合三角形

2.5 已知三边判断三角形形状

已知三角形三边为 3,5,7 求三角形是形状 (锐角, 直角, 钝角)

$\because 3^2 + 5^2 < 7^2 \therefore$ 钝角

3 向量

3.1 基础知识

	线性运算	坐标运算
加法	三角形法则: 首尾相连首尾连: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 平行四边形法则: 同起点, 对角线	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
减法	三角形法则: 同起点，连终点，指向被减向量:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$	$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$
数乘	$x\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 的方向相同 $(x>0)$ 或者相反 $(x<0)$, 长度为 $\vec{a}$ 的 x 倍	$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$
数量积	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$
模	$\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\qquad(\vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2)$	$\|\vec{a}\|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$
夹角	$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$	$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
平行	$\vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$	$x_1y_2=x_2y_1$
垂直	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2=0$
大写坐标	设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$	

3.2 绝对值

题目:

已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$ ( ) 。

A: $\sqrt{2}$

B: 2

C: 1

D: $-\frac{1}{2}$

解: 绝对值、想平方, 算完之后不要慌.

$\because |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=8$

$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$\therefore$ 选 A

3.3 夹角, 锐角, 钝角

题目:

已知 $\vec{a}=(\lambda,2)$, $\vec{b}=(-3,5)$,且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角,则 λ 的取值范围( )

解: $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ 且不共线

解:由题意可得 $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$,且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线,即 $-3\lambda+10>0$,且,$5\lambda \neq 2\times(-3)$,解得 $\lambda < \dfrac{10}{3}$ 且 $\lambda \neq -\dfrac{6}{5}$,

所以C选项是正确的

3.4　基础图形 (理)

题目:

如图：已知在△ABC中，D是BC上的一点，且BD＝λDC(λ≠－1)，求证：$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$.

解:

证明：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，∵BD＝λDC(λ≠－1)，∴$\overrightarrow{BD}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，∴$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$.

3.5　基底建模法 (理)

题目:

如图所示，在△ABC中，点M是BC的中点，点N在AC上，且AN=2NC，AM与BN相交于点P，求AP∶PM

的值.

解:以 $\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}$ 为基底, 进行计算.

设:$e_1=\overrightarrow{BM}$,　$e_2=\overrightarrow{CN}$, 则

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3e_2-e_1$$
$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2e_1+e_2$$

因为 A,P,M 和 B,P,N 分别共线所以:

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda e_1-3\lambda e_2$$
$$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu e_1+\mu e_2$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)e_1+(3\lambda+\mu)e_2$$
$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2e_1+3e_2$$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = 3 \end{cases} \begin{cases} \lambda = \frac{4}{5} \\ \mu = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$\therefore AP : PM = 4 : 1$

4 数列

4.1 基础知识

	等差数列性质	等比数列性质
1 定义	$a_{n+1}-a_n=d(n\ge 1)$ $a_n-a_{n-1}=d(n\ge 2)$；	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\ge 1)$ ；$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\ge 2)$
2 通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$ $a_n=a_m+(n-m)d(n,m\in N^*)$	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ $a_n=a_m\cdot q^{n-m}$
3、前n项和	$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$	$q=1$，$S_n=na_1$; $q\ne 1, S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$
4、中项	a、A、b 成等差数列$\Leftrightarrow A=\frac{a+b}{2}$； a_n是其前 k 项a_{n-k}与后 k 项a_{n+k}的等差中项，即：$a_n=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$	a、A、b 成等比数列$\Leftrightarrow \frac{A}{a}=\frac{b}{A}$ （不等价于$A^2=ab$，只能$\Rightarrow$）； a_n是其前 k 项a_{n-k}与后 k 项a_{n+k}的等比中项，即：$a_n^2=a_{n-k}\cdot a_{n+k}$
5、下标和公式	若 m+n=p+q，则$a_m+a_n=a_p+a_q$ 特别地，若 m+n=2p，则$a_m+a_n=2a_p$	若 m+n=p+q，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ 特别地，若 m+n=2p，则$a_m\cdot a_n=a_p^2$
6、首尾项性质	等差数列的第 k 项与倒数第 k 项的和等于首尾两项的和，即： $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_k+a_{n-(k-1)}$	等比数列的第 k 项与倒数第 k 项的积等于首尾两项的积，即： $a_1\cdot a_n=a_2\cdot a_{n-1}=\cdots=a_k\cdot a_{n-(k-1)}$
	{a_n }为等差数列，若 m，n，p 成等差数列， 则a_m,a_n,a_p成等差数列	{a_n }为等比数列，若 m，n，p 成等差数列，则a_m,a_n,a_p成等比数列

7、结论	（两个等差数列的代数和仍是等差数列） 等差数列{a_n},{b_n}的公差分别为d,e，则数列{a_n+b_n}仍为等差数列，公差为$d+e$	(两个等比数列的积或商仍是等比数列) 等比数列{a_n},{b_n}的公比分别为p,q,则数列{$a_n\cdot b_n$}仍为等比数列，公比为pq
	取出等差数列的所有奇（偶）数项，组成的新数列仍为等差数列，且公差为$2d$	取出等比数列的所有奇（偶）数项，组成的新数列仍为等比数列，且公比为q^2
	$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$成等差数列，公差为$m^2d$	$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$成等比数列，公比为$q^m$
	当项数为偶数$2n$时，$S_{\text{偶}}-S_{\text{奇}}=nd$ $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 当项数为奇数$2n-1$时， $S_{2n-1}=(2n-1)a_{\text{中}}$ $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}}=\frac{n}{n-1}$	当项数为偶数$2n$时， $S_{\text{偶}}=qS_{\text{奇}}$ 当项数为奇数$2n-1$时， $S_{\text{奇}}=a_1+qS_{\text{偶}}$
	等差数列判断方法 ①定义法：$a_n-a_{n-1}=d(n\geq 2)$ ②等差中项概念；$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geq 2)$ ③函数法：$a_n=pn+q(p,q\textit{为常数})$关于n的一次函数⇔数列$\{a_n\}$是首项为p+q，公差为p$(\neq 0)$的等差数列； ④数列$S_n=an^2+bn$的前n项和形如$S_n=an^2+bn$（$a$，$b$为常数)，那么数列$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$是等差数列，	等比数列判断方法 ①定义法：$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$ ②等比中项概念；$a_na_{n+2}=a_{n+1}{}^2(a_n\neq 0)$ ③函数法：$a_n=cq^n$（c，q均为不为0的常数，$n\in\mathbf{N}_+$)，则数列$\{a_n\}$是等比数列. ④数列$S_n=Aq^n-A$的前n项和形如$S_n=Aq^n-A$（A，q均为不等于0的常数且$q\neq 1$)，则数列$\{a_n\}$是公比不为1的等比数列.
8、共性	非零常数列既是等差数列又是等比数列	

4.2 单调性

4.2.1 分式数列

数列 $a_n = \frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$, 则前 100 项的最大项, 最小项是第几项

解: 需要会分式函数的化简与图像:

$a_n = \frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}} = 1 + \frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$

根据函数图像:

当 $n \in [1, 44]$ 时,$\{a_n\}$ 单调递减,

当 $n \in [45, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore (a_n)_{\max} = a_{45}, (a_n)_{\min} = a_{44}$

4.2.2 分段数列

题目:

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, x\leq 7 \\ a^{x-6}, x > 7 \end{cases}$,若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n)(n\in N^*)$,且 $\{a_n\}$ 是递增数列,则实数a的取值范围是( )

A. $[\frac{9}{4}, 3)$

B. $(\frac{9}{4}, 3)$

C. $(2, 3)$

D. $(1, 3)$

解: 需要会分段函数单调性并注意与之对比:

解:根据题意, $a_n = f(n) = \begin{cases} (3-a)n-3, n\leq 7 \\ a^{n-6}, n > 7 \end{cases}$;

要使 $\{a_n\}$ 是递增数列,必有 $\begin{cases} 3-a > 0 \\ a > 1 \\ (3-a)\times 7 - 3 < a^{8-6} \end{cases}$;

解可得, $2 < a < 3$;

所以C选项是正确的.

4.2.3 一般数列

题目:

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = (n+1)(\frac{10}{11})^n$, $n\in N^+$

1.求证数列 $\{a_n\}$ 先递增,后递减

2.求数列 $\{a_n\}$ 的最大项

解: 作差法或作商法:

作差法:

(1) $a_n=(n+1)(\frac{10}{11})^n$

$a_{n-1}=n\times(\frac{10}{11})^{n-1}$

$a_n-a_{n-1}=(\frac{10}{11}-\frac{n}{11})\times(\frac{10}{11})^{n-1}=0$

$n=10$ 时, $a_n-a_{n-1}=0$

$n<10$ 时, $a_n-a_{n-1}>0$,递增;

$n>10$ 时, $a_n-a_{n-1}<0$,递减;

(2)最大项为 $a_{10}=a_9=11\times(\frac{10}{11})^{10}=10\times(\frac{10}{11})^9$

作商法:

【点拨】 因为 $a_n=(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n$ 是积的形式且 $a_n>0$,所以可用作商法比较 a_n 与 a_{n-1} 的大小.

【证明】 (1)令 $\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant1(n\geqslant2)$,即 $\frac{(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n}{n\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{n-1}}\geqslant1$.

整理得 $\frac{n+1}{n}\geqslant\frac{11}{10}$,解得 $n\leqslant10$. 又 $a_1<a_2$,

∴数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项到第 9 项递增,从第 10 项起递减.

【解析】 (2)由(1)知 $a_9=a_{10}=\frac{10^{10}}{11^9}$ 最大.

4.3 最值问题

4.4 求通项公式

4.4.1 已知 S_n 和 n

4.4.2 已知 S_n 和 a_n

4.4.3 叠加法

4.4.4 叠乘法

4.4.5 倒数法

4.4.6 待定系数法

4.5 求和

4.5.1 裂项相消法

如何裂项: $a_n=\frac{k}{b_n\cdot c_n}=\frac{k}{b_n-c_n}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{c_n}\right)$

相消规律: 对称性

最后尽量化简成 1 个分式

例题:

求 $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 前 n 项和

$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$

4.5.2 错位相减法

适用于: 等差乘以等比

步骤: 1. 乘公比 2. 错位 3. 相减

例题:

求 $a_n = n \cdot 2^n$ 的前 n 项和

$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$

乘公比 2 并错位写方便计算

$2S_n = \qquad 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$

两式相减

$-S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$

等比前 n 项和公式化简 $S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$