目录

1 三角函数 **3**

1.1 基础知识 3

1.2 终边一点 5

1.3 平移 5

1.4 sin 和 cos 互化 5

1.5 区间内最值, 值域 5

1.6 伸缩变换 5

1.7 对称中心, 对称轴, 单调区间 5

1.8 sinx 图像翻转 6

1.9 零点个数 6

2 正余弦 **7**

2.1 基础知识 7

2.2 多解取舍两种思路 7

2.3 角化边, 边化角, 角化角 7

2.4 三角形形状 (讨论 n 种情况) 7

2.5 已知三边判断三角形形状 8

3 向量 **9**

3.1 基础知识 9

3.2 绝对值 9

3.3 夹角, 锐角, 钝角 9

3.4 基础图形 (理) 10

3.5 基底建模法 (理) 10

4 数列 **12**

4.1 基础知识 12

4.2 单调性 14

4.2.1 分式数列 14

4.2.2 分段数列 14

4.2.3 一般数列 14

4.3 最值问题 15

4.4 通项公式 15

4.4.1 求通项公式 1 15

4.4.2 求通项公式 2 15

4.5 求和 15

4.5.1 裂项相消法 15

4.5.2 错位相减法 15

数学笔记

于洋

1 三角函数

1.1 基础知识

诱导公式:

$$\begin{aligned}\sin(2k\pi+\alpha)&=\sin\alpha,k\in\mathbb{Z}\\\cos(2k\pi+\alpha)&=\cos\alpha,k\in\mathbb{Z}\\\tan(2k\pi+\alpha)&=\tan\alpha,k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\pi+\alpha)&=-\sin\alpha\\\cos(\pi+\alpha)&=-\cos\alpha\\\tan(\pi+\alpha)&=\tan\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha)&=-\sin\alpha\\\cos(-\alpha)&=\cos\alpha\\\tan(-\alpha)&=-\tan\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha)&=\sin\alpha\\\cos(\pi-\alpha)&=-\cos\alpha\\\tan(\pi-\alpha)&=-\tan\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=\cos\alpha\\\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=-\sin\alpha\\\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=-\cot\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\cos\alpha\\\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\sin\alpha\\\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\cot\alpha\end{aligned}$$

两角和差:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\\cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\\tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

二倍角和降幂:

$$\begin{aligned}&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\&\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\\&\tan 2\alpha=\tfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha=\tfrac{1+\cos 2\alpha}{2},\\&\sin^2\alpha=\tfrac{1-\cos 2\alpha}{2}\end{aligned}$$

辅助角公式: $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),\tan\varphi=\frac{b}{a}$

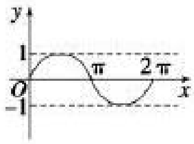
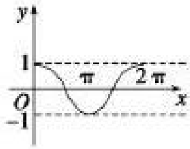
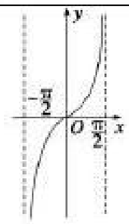
弧长和扇形面积公式: $l=r|\alpha|,\quad S=\frac{1}{2}\,\mathrm{lr}=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

和差化积, 积化和差:

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\\sin\alpha-\sin\beta&=2\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\\\cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\\cos\alpha-\cos\beta&=-2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha\sin\beta&=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\\\sin\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\\\cos\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\\\sin\alpha\sin\beta&=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]\end{aligned}$$

三角函数性质:

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图像			
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
单调性	$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上递增；$[\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上递减	$[-\pi+2k\pi，2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上递增；$[2k\pi，\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上递减	$(-\frac{\pi}{2}+k\pi，\frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 上递增
最值	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{max}=1$；$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{min}=-1$	$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{max}=1$；$x=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{min}=-1$	
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
对称中心	$(k\pi，0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{\pi}{2}+k\pi，0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{k\pi}{2}，0)(k\in\mathbf{Z})$
对称轴方程	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$	$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$	
周期	2π	2π	π

1.2 终边一点

角 α 终边上一点 (-4,3):

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{3}{5}$

1.3 平移

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 移动变成 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$:

1) 提括号: $\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ $\quad\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$

2) 相减:$\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{12}$

3) 翻译: $-\frac{\pi}{12}$ 是向右移动 $\frac{\pi}{12}$

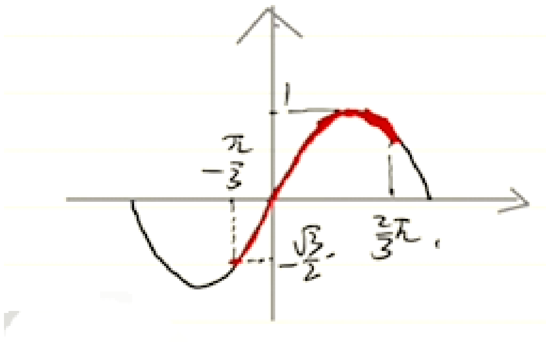
1.4 sin 和 cos 互化

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$ 根据 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ 根据 $\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

1.5 区间内最值, 值域

$f(x)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值, 最小值



$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$2x\in[0,\pi]$

$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right]$

如图此区间的最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 最大值 1, 所以

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-2\sqrt{3},4]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\in[-\sqrt{3},4+\sqrt{3}]$

1.6 伸缩变换

$y=\cos x$

横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (x 换成 2x) $\longrightarrow y=\cos 2x$

纵坐标伸长到原来的 2 倍 (A 换成 2A) $\longrightarrow y=2\cos 2x$

向左平移 $\frac{\pi}{4}$ (x 换成 $x+\frac{\pi}{4}$) $\longrightarrow y=2\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

1.7 对称中心, 对称轴, 单调区间

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的减区间

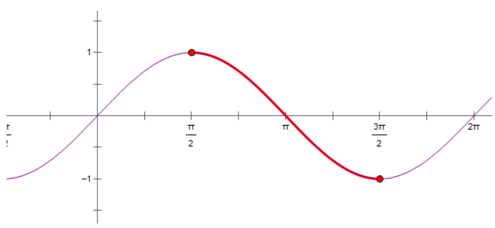


图 1: $\sin x$ 减区间

与基础图形对照:

$\sin x$ 减区间	$x \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right] (k \in z)$
$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 减区间	$2x-\frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right] (k \in z)$

计算出 x 范围即可. 对称中心, 对称轴, 同样原理, 都是根据基础图形, 替换即可

1.8 sinx 图像翻转

$y=|\sin x|$, $y=\sin|x|$, $y=-\sin x$ (绿虚线:$\sin x$ 图像, 红线: 翻转后图像)

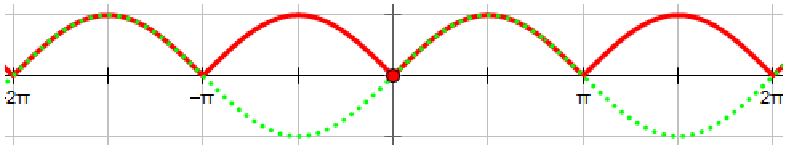


图 2: y=$|\sin x|$ **整体加绝对值: x 轴下方图像翻折到上方. 下方图像不保留.**

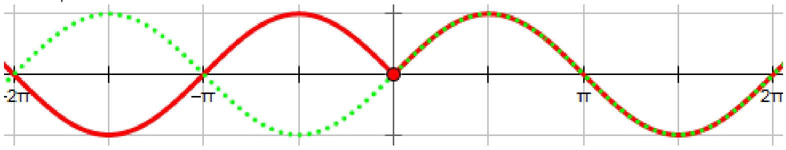


图 3: y=$\sin|x|$ **x 加绝对值: 先画出 x 轴正半轴, 再沿 y 轴翻折.**

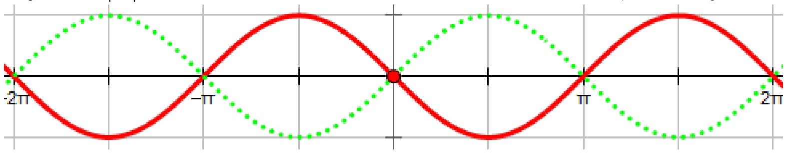


图 4: y=$-\sin x$ **整体加负号: 沿 x 轴上下翻折.**

1.9 零点个数

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\sin x$ 零点个数

令 $f(x)=0$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\sin x$

画出等号左右两侧图像, 交点个数就是零点个数 (2 个)

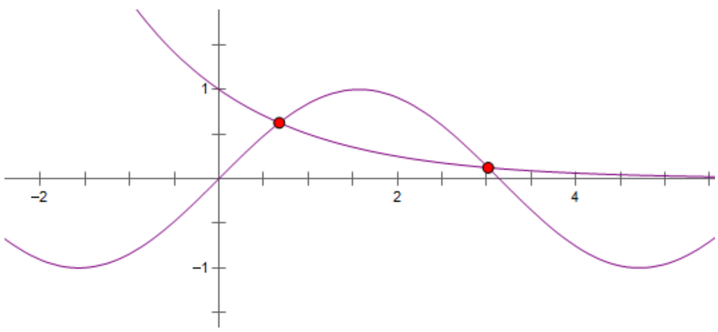


图 5: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x)=\sin x$

2 正余弦

2.1 基础知识

正弦定理:

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

余弦定理:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \qquad b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \qquad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

面积公式:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$

$S=\frac{(a+b+c)r}{2} \qquad S=\frac{abc}{4R} \qquad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (p=\frac{1}{2}(a+b+c))$

判断三角形形状: 最短两条边的平方与第三条边平方比较

$a^2>b^2+c^2 \quad \Delta ABC$ 为钝角三角形

$a^2=b^2+c^2 \quad \Delta ABC$ 为直角三角形

$a^2<b^2+c^2 \quad \Delta ABC$ 为锐角三角形

2.2 多解取舍两种思路

在 ΔABC 中,$b=\sqrt{3},B=60°,c=1$, 求 C

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\therefore\sin C=\frac{1}{2}\therefore c=30°$ 或 $150°$

角度取舍两种思路:

1) 依据大边对大角: $\quad\because b>c,\therefore B>C\therefore C=30°$

2) 三角形内角和 $180°$: $\quad\because B=60°,\therefore 0°<C<120°\therefore C=30°$

2.3 角化边, 边化角, 角化角

$3a\cos A=c\cos B+b\cos C$, 求 $\cos A$

两种思路都可以:

边 $\rightarrow$ 角

$3\sin A\cos A=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A\therefore\cos A=\frac{1}{3}$

角 $\rightarrow$ 边

$3a\cos A=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\therefore\cos A=\frac{1}{3}$

2.4 三角形形状 (讨论 n 种情况)

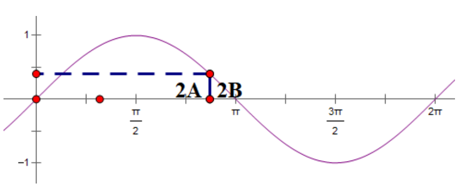


图 6: 2A=2B

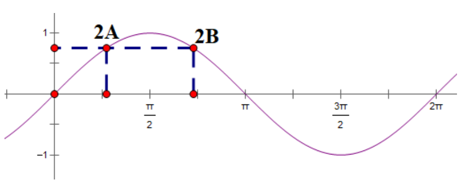


图 7: $2A+2B=\frac{\pi}{2}*2$

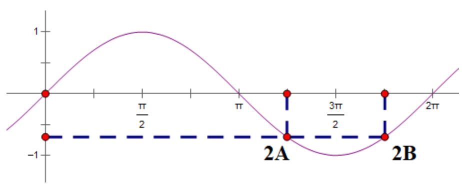


图 8: $2A+2B=\frac{3\pi}{2}*2$

$\sin 2A = \sin 2B$

$\because 0 < A < \pi \therefore 0 < 2A < 2\pi$

如图: 三种情况

1) 当 $2A = 2B$ 时等腰三角形

2) 当 $2A + 2B = \frac{\pi}{2} * 2$ 时, 直角三角形

3) 当 $2A + 2B = \frac{3\pi}{2} * 2$ 时, 不符合三角形

2.5 已知三边判断三角形形状

已知三角形三边为 3,5,7 求三角形是形状 (锐角, 直角, 钝角)

$\because 3^2 + 5^2 < 7^2 \therefore$ 钝角

3 向量

3.1 基础知识

	线性运算	坐标运算
加法	三角形法则: 首尾相连首尾连: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 平行四边形法则: 同起点, 对角线	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
减法	三角形法则: 同起点，连终点，指向被减向量:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$	$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$
数乘	$x\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 的方向相同 $(x>0)$ 或者相反 $(x<0)$, 长度为 $\vec{a}$ 的 x 倍	$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$
数量积	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$
模	$\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\qquad(\vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2)$	$\|\vec{a}\|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$
夹角	$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$	$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
平行	$\vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$	$x_1y_2=x_2y_1$
垂直	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2=0$
大写坐标	设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 则 $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)$	

3.2 绝对值

题目:

已知向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$满足$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}$，则$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=$（ ）。

A: $\sqrt{2}$

B: 2

C: 1

D: $-\frac{1}{2}$

解: 绝对值、想平方, 算完之后不要慌.

$\because |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=8$

$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$\therefore$ 选 A

3.3 夹角, 锐角, 钝角

题目:

已知 $\overrightarrow{a}=(\lambda,2)$, $\overrightarrow{b}=(-3,5)$,且 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角为锐角,则 λ 的取值范围(　)

解: $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ 且不共线

解:由题意可得 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}>0$,且 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 不共线,即 $-3\lambda+10>0$,且,$5\lambda\neq2\times(-3)$,解得 $\lambda<\dfrac{10}{3}$ 且 $\lambda\neq-\dfrac{6}{5}$,

所以C选项是正确的

3.4 基础图形 (理)

题目:

如图:已知在△ABC中,D是BC上的一点,且BD=λDC(λ≠−1),求证:$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$.

解:

证明:$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$,∵BD=λDC(λ≠−1),∴$\overrightarrow{BD}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,∴$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$.

3.5 基底建模法 (理)

题目:

如图所示,在△ABC中,点M是BC的中点,点N在AC上,且AN=2NC,AM与BN相交于点P,求AP∶PM

的值.

解:以 $\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}$ 为基底, 进行计算.

设:$e_1=\overrightarrow{BM},\quad e_2=\overrightarrow{CN}$, 则

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3e_2-e_1$$
$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2e_1+e_2$$

因为 A,P,M 和 B,P,N 分别共线所以:

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda e_1-3\lambda e_2$$
$$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu e_1+\mu e_2$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)e_1+(3\lambda+\mu)e_2$$
$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2e_1+3e_2$$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = 3 \end{cases} \begin{cases} \lambda = \frac{4}{5} \\ \mu = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$\therefore AP : PM = 4 : 1$

4 数列

4.1 基础知识

	等差数列性质	等比数列性质
1 定义	$a_{n+1}-a_n=d(n\ge 1)$ $a_n-a_{n-1}=d(n\ge 2)$；	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\ge 1)$ ； $\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\ge 2)$
2 通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$ $a_n=a_m+(n-m)d(n,m\in N^*)$	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ $a_n=a_m\cdot q^{n-m}$
3、前n项和	$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$	$q=1$, $S_n=na_1$; $q\ne 1, S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$
4、中项	a、A、b 成等差数列$\Leftrightarrow$ $A=\frac{a+b}{2}$； a_n是其前 k 项a_{n-k}与后 k 项a_{n+k}的等差中项，即：$a_n=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$	a、A、b 成等比数列$\Leftrightarrow$ $\frac{A}{a}=\frac{b}{A}$ （不等价于$A^2=ab$，只能$\Rightarrow$）； a_n是其前 k 项a_{n-k}与后 k 项a_{n+k}的等比中项，即：$a_n^2=a_{n-k}\cdot a_{n+k}$
5、下标和公式	若 m+n=p+q, 则$a_m+a_n=a_p+a_q$ 特别地, 若 m+n=2p, 则$a_m+a_n=2a_p$	若 m+n=p+q, 则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ 特别地, 若 m+n=2p, 则$a_m\cdot a_n=a_p^2$
6、首尾项性质	等差数列的第 k 项与倒数第 k 项的和等于首尾两项的和，即： $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_k+a_{n-(k-1)}$	等比数列的第 k 项与倒数第 k 项的积等于首尾两项的积，即： $a_1\cdot a_n=a_2\cdot a_{n-1}=\cdots=a_k\cdot a_{n-(k-1)}$
	$\{a_n\}$为等差数列, 若 m, n, p 成等差数列, 则a_m, a_n, a_p成等差数列	$\{a_n\}$为等比数列, 若 m, n, p 成等差数列, 则a_m, a_n, a_p成等比数列

<table>
<tr><td rowspan="5">7、结论</td><td>（两个等差数列的代数和仍是等差数列）
等差数列{a_n},{b_n}的公差分别为d,e，则数列{a_n+b_n}仍为等差数列，公差为$d+e$</td><td>(两个等比数列的积或商仍是等比数列）
等比数列{a_n},{b_n}的公比分别为p,q,则数列{$a_n\cdot b_n$}仍为等比数列，公比为pq</td></tr>
<tr><td>取出等差数列的所有奇（偶）数项，组成的新数列仍为等差数列，且公差为$2d$</td><td>取出等比数列的所有奇（偶）数项，组成的新数列仍为等比数列，且公比为q^2</td></tr>
<tr><td>$S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m},\cdots$成等差数列，公差为$m^2d$</td><td>$S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m},\cdots$
成等比数列，公比为q^m</td></tr>
<tr><td>当项数为偶数$2n$时，$S_{\text{偶}}-S_{\text{奇}}=nd$
$\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$
当项数为奇数$2n-1$时，
$S_{2n-1}=(2n-1)a_{\text{中}}$
$\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}}=\frac{n}{n-1}$</td><td>当项数为偶数$2n$时，
$S_{\text{偶}}=qS_{\text{奇}}$
当项数为奇数$2n-1$时，
$S_{\text{奇}}=a_1+qS_{\text{偶}}$</td></tr>
<tr><td>等差数列判断方法
①定义法：$a_n-a_{n-1}=d(n\ge 2)$
②等差中项概念；$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\ge 2)$
③函数法：$a_n=pn+q$(p,q为常数)关于n的一次函数⇔数列{a_n}是首项为p+q，公差为p($\ne 0$)的等差数列；
④数列$S_n=an^2+bn$的前n项和形如$S_n=an^2+bn$（a，b为常数），那么数列$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$是等差数列，</td><td>等比数列判断方法
①定义法：$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$
②等比中项概念；$a_na_{n+2}=a_{n+1}{}^2(a_n\ne 0)$
③函数法：$a_n=cq^n$（c，q均为不为0的常数，$n\in\mathbf{N}_+$），则数列{a_n}是等比数列.
④数列$S_n=Aq^n-A$的前n项和形如$S_n=Aq^n-A$（A，q均为不等于0的常数且$q\ne 1$），则数列{a_n}是公比不为1的等比数列.</td></tr>
<tr><td>8、共性</td><td colspan="2">非零常数列既是等差数列又是等比数列</td></tr>
</table>

4.2 单调性

4.2.1 分式数列

数列 $a_n=\frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$, 则前 100 项的最大项, 最小项是第几项

解:$a_n=\frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}=1+\frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$

根据函数图像:

当 $n\in[1,44]$ 时,$\{a_n\}$ 单调递减,

当 $n\in[45,+\infty)$ 单调递增,

$\therefore(a_n)_{\max}=a_{45},(a_n)_{\min}=a_{44}$

4.2.2 分段数列

题目:

已知函数 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-3,x\leq 7\\ a^{x-6},x>7\end{cases}$,若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n)(n\in N^*)$,且 $\{a_n\}$ 是递增数列,则实数a的取值范围是( )

A. $[\frac{9}{4},3)$

B. $(\frac{9}{4},3)$

C. $(2,3)$

D. $(1,3)$

解:

解:根据题意, $a_n=f(n)=\begin{cases}(3-a)n-3,n\leq 7\\ a^{n-6},n>7\end{cases}$;

要使 $\{a_n\}$ 是递增数列,必有 $\begin{cases}3-a>0\\ a>1\\ (3-a)\times 7-3<a^{8-6}\end{cases}$;

解可得, $2<a<3$;

所以C选项是正确的.

4.2.3 一般数列

题目:

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=(n+1)(\frac{10}{11})^n$, $n\in N^+$

1.求证数列 $\{a_n\}$ 先递增,后递减

2.求数列 $\{a_n\}$ 的最大项

解: 作差法或作商法:

作差法:

(1) $a_n=(n+1)(\frac{10}{11})^n$

$a_{n-1}=n\times(\frac{10}{11})^{n-1}$

$a_n-a_{n-1}=(\frac{10}{11}-\frac{n}{11})\times(\frac{10}{11})^{n-1}=0$

$n=10$ 时, $a_n-a_{n-1}=0$

$n<10$ 时, $a_n-a_{n-1}>0$,递增;

$n>10$ 时, $a_n-a_{n-1}<0$,递减;

(2)最大项为 $a_{10}=a_9=11\times(\frac{10}{11})^{10}=10\times(\frac{10}{11})^9$

作商法:

【点拨】 因为 $a_n=(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n$ 是积的形式且 $a_n>0$,所以可用作商法比较 a_n 与 a_{n-1} 的大小.

【证明】 (1)令 $\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant1(n\geqslant2)$,即 $\frac{(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n}{n\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{n-1}}\geqslant1$.

整理得 $\frac{n+1}{n}\geqslant\frac{11}{10}$,解得 $n\leqslant10$. 又 $a_1<a_2$,

∴数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项到第 9 项递增,从第 10 项起递减.

【解析】 (2)由(1)知 $a_9=a_{10}=\frac{10^{10}}{11^9}$ 最大.

4.3 最值问题

4.4 求通项公式

4.4.1 求通项公式 1

4.4.2 求通项公式 2

4.5 求和

4.5.1 裂项相消法

4.5.2 错位相减法