目录

数学笔记

于洋

1 三角函数

1.1 基础知识

诱导公式:

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha, k\in\mathbb{Z} \qquad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha, k\in\mathbb{Z} \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha, k\in\mathbb{Z} \qquad \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

两角和差:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

二倍角和降幂:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha=\tfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\cos^2\alpha=\tfrac{1+\cos 2\alpha}{2},$$
$$\sin^2\alpha=\tfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

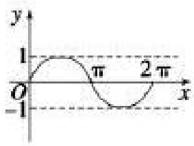
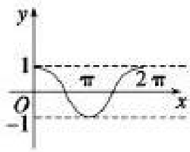
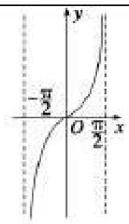
辅助角公式: $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi), \tan\varphi=\frac{b}{a}$

弧长和扇形面积公式: $l=r|\alpha|$, $S=\frac{1}{2}\mathrm{lr}=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

和差化积, 积化和差:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

三角函数性质:

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图像			
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x\|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
单调性	$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递增； $[\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递减	$[-\pi+2k\pi，2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递增； $[2k\pi，\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递减	$(-\frac{\pi}{2}+k\pi，\frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$上递增
最值	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{max}=1$； $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{min}=-1$	$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{max}=1$； $x=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{min}=-1$	
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
对称中心	$(k\pi，0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{\pi}{2}+k\pi，0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{k\pi}{2}，0)(k\in\mathbf{Z})$
对称轴方程	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$	$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$	
周期	2π	2π	π

1.2 终边一点

角 α 终边上一点 (-4,3):

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{3}{5}$

1.3 平移

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 移动变成 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$:

1) 提括号: $\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right] \quad \sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$

2) 相减:$\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{12}$

3) 翻译: $-\frac{\pi}{12}$ 是向右移动 $\frac{\pi}{12}$

1.4 sin 和 cos 互化

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$ 根据 $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ 根据 $\sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

1.5 区间内最值, 值域

$f(x) = 4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值, 最小值

$x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$2x \in [0,\pi]$

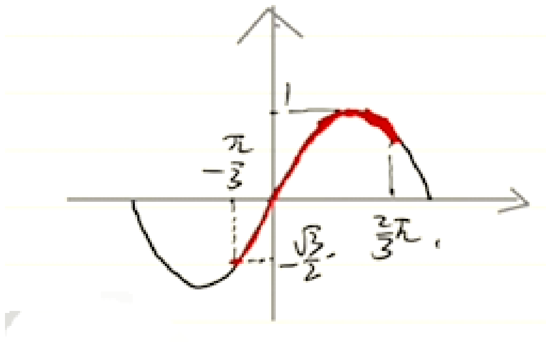
$2x-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right]$

如图此区间的最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 最大值 1, 所以

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \in [-2\sqrt{3},4]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3} \in [-\sqrt{3},4+\sqrt{3}]$



1.6 伸缩变换

$y = \cos x$

横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (x 换成 2x) $\longrightarrow y = \cos 2x$

纵坐标伸长到原来的 2 倍 (A 换成 2A) $\longrightarrow y = 2\cos 2x$

向左平移 $\frac{\pi}{4}$ (x 换成 $x+\frac{\pi}{4}$) $\longrightarrow y = 2\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

1.7 对称中心, 对称轴, 单调区间

$y = \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的减区间

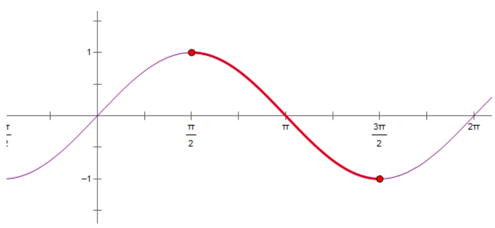


图 1: $\sin x$ 减区间

与基础图形对照:	$\sin x$ 减区间	$x \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right] (k \in z)$
	$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 减区间	$2x-\frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right] (k \in z)$

计算出 x 范围即可. 对称中心, 对称轴, 同样原理, 都是根据基础图形, 替换即可

1.8 sinx 图像翻转

$y=|\sin x|$, $y=\sin|x|$, $y=-\sin x$ (绿虚线:$\sin x$ 图像, 红线: 翻转后图像)

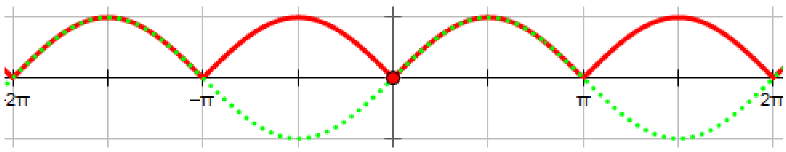


图 2: y=$|\sin x|$ **整体加绝对值: x 轴下方图像翻折到上方. 下方图像不保留.**

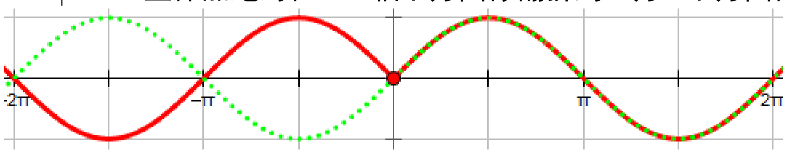


图 3: y=sin $|x|$ **x 加绝对值: 先画出 x 轴正半轴, 再沿 y 轴翻折.**

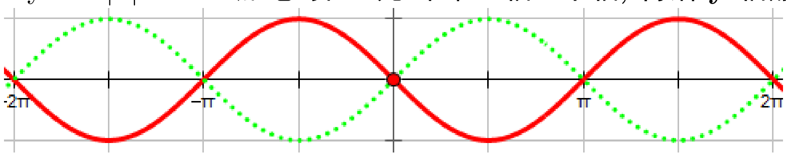


图 4: y=$-\sin x$ **整体加负号: 沿 x 轴上下翻折.**

1.9 零点个数

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\sin x$ 零点个数

令 $f(x)=0$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\sin x$

画出等号左右两侧图像, 交点个数就是零点个数 (2 个)

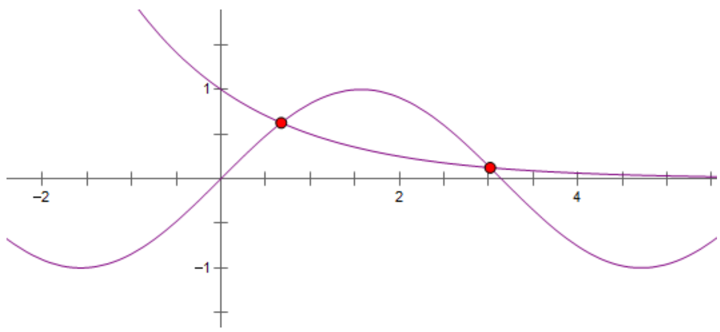


图 5: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x)=\sin x$

2 正余弦

2.1 基础知识

正弦定理:

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

余弦定理:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \qquad b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \qquad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

面积公式:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$

$S=\frac{(a+b+c)r}{2} \qquad S=\frac{abc}{4R} \qquad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (p=\frac{1}{2}(a+b+c))$

判断三角形形状: 最短两条边的平方与第三条边平方比较

$a^2>b^2+c^2$ ΔABC 为钝角三角形

$a^2=b^2+c^2$ ΔABC 为直角三角形

$a^2<b^2+c^2$ ΔABC 为锐角三角形

2.2 多解取舍两种思路

在 ΔABC 中,$b=\sqrt{3}, B=60°, c=1$, 求 C

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\therefore \sin C=\frac{1}{2}\therefore c=30°$ 或 $150°$

角度取舍两种思路:

1) 依据大边对大角: $\because b>c, \therefore B>C\therefore C=30°$

2) 三角形内角和 $180°$: $\because B=60°, \therefore 0°<C<120°\therefore C=30°$

2.3 角化边, 边化角, 角化角

$3a\cos A=c\cos B+b\cos C$, 求 $\cos A$

两种思路都可以:

边 $\rightarrow$ 角

$3\sin A\cos A=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A\therefore \cos A=\frac{1}{3}$

角 $\rightarrow$ 边

$3a\cos A=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\therefore \cos A=\frac{1}{3}$

2.4 三角形形状 (讨论 n 种情况)

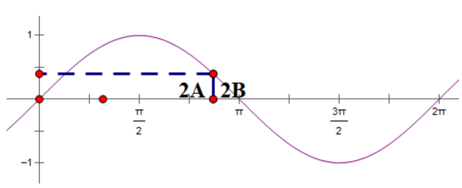


图 6: 2A=2B

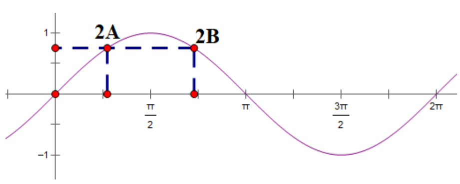


图 7: $2A+2B=\frac{\pi}{2}*2$

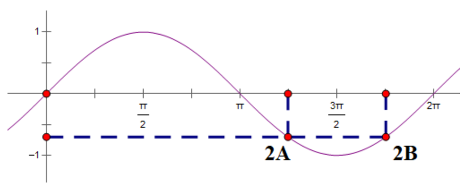


图 8: $2A+2B=\frac{3\pi}{2}*2$

$\sin 2A = \sin 2B$

$\because 0 < A < \pi \therefore 0 < 2A < 2\pi$

如图: 三种情况

1) 当 $2A = 2B$ 时等腰三角形

2) 当 $2A + 2B = \frac{\pi}{2} * 2$ 时, 直角三角形

3) 当 $2A + 2B = \frac{3\pi}{2} * 2$ 时, 不符合三角形

2.5 已知三边判断三角形形状

已知三角形三边为 3,5,7 求三角形是形状 (锐角, 直角, 钝角)

$\because 3^2 + 5^2 < 7^2 \therefore$ 钝角

3 向量

3.1 基础知识

	线性运算	坐标运算
加法	三角形法则: 首尾相连首尾连: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 平行四边形法则: 同起点, 对角线	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
减法	三角形法则: 同起点，连终点，指向被减向量:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$	$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$
数乘	$x\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 的方向相同 $(x>0)$ 或者相反 $(x<0)$, 长度为 $\vec{a}$ 的 x 倍	$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$
数量积	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$
模	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \qquad (\vec{a}^2=\lvert\vec{a}\rvert^2)$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$
夹角	$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$	$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
平行	$\vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$	$x_1y_2=x_2y_1$
垂直	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2=0$
大写坐标	设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 则 $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)$	

3.2 绝对值

题目:

已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert=2\sqrt{2}$，$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{2}$，$\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{3}$，则$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert=$ ( ) 。

A: $\sqrt{2}$

B: 2

C: 1

D: $-\frac{1}{2}$

解: 绝对值、想平方, 算完之后不要慌.

$\because \lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert^2=\lvert\vec{a}\rvert^2+\lvert\vec{b}\rvert^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=8$

$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$\therefore \lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^2=\lvert\vec{a}\rvert^2+\lvert\vec{b}\rvert^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$\therefore$ 选 A

3.3 夹角, 锐角, 钝角

题目:

已知 $\vec{a}=(\lambda,2)$, $\vec{b}=(-3,5)$,且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角,则 λ 的取值范围(   )

解: $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ 且不共线

解:由题意可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$,且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线,即 $-3\lambda+10>0$,且,$5\lambda\neq 2\times(-3)$,解得 $\lambda<\frac{10}{3}$ 且 $\lambda\neq-\frac{6}{5}$,

所以C选项是正确的

3.4 基础图形 (理)

题目:

3.5 基底建模法 (理)

题目:

如图所示,在△ABC中,点M是BC的中点,点N在AC上,且AN=2NC,AM与BN相交于点P,求AP∶PM

的值.

解:以 $\overrightarrow{BM}$,$\overrightarrow{CN}$ 为基底, 进行计算.

设:$e_1=\overrightarrow{BM}$, $\quad e_2=\overrightarrow{CN}$, 则

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3e_2-e_1$$
$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2e_1+e_2$$

因为 A,P,M 和 B,P,N 分别共线所以:

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda e_1-3\lambda e_2$$
$$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu e_1+\mu e_2$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)e_1+(3\lambda+\mu)e_2$$
$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2e_1+3e_2$$

$$\begin{cases}\lambda+2\mu=2\\3\lambda+\mu=3\end{cases}\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5}\\\mu=\frac{3}{5}\end{cases}$$

$\therefore AP:PM=4:1$

4 数列

4.1 分式数列单调性

数列 $a_n = \frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$, 则前 100 项的最大项, 最小项是第几项

解:$a_n = \frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}} = 1 + \frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$

根据函数图像:

当 $n \in [1, 44]$ 时,$\{a_n\}$ 单调递减,

当 $n \in [45, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore (a_n)_{\max} = a_{45}, (a_n)_{\min} = a_{44}$

4.2 分段数列单调性

题目:

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, x\leq 7 \\ a^{x-6}, x>7 \end{cases}$,若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n)(n\in N^*)$,且 $\{a_n\}$ 是递增数列,则实数a的取值范围是( )

A. $[\frac{9}{4}, 3)$

B. $(\frac{9}{4}, 3)$

C. $(2, 3)$

D. $(1, 3)$

解:

解:根据题意, $a_n = f(n) = \begin{cases} (3-a)n-3, n\leq 7 \\ a^{n-6}, n>7 \end{cases}$;

要使 $\{a_n\}$ 是递增数列,必有 $\begin{cases} 3-a>0 \\ a>1 \\ (3-a)\times 7-3 < a^{8-6} \end{cases}$;

解可得, $2 < a < 3$;

所以C选项是正确的.

4.3 一般数列单调性