数学笔记

于洋

1　三角函数

基础知识

诱导公式:

$$\begin{aligned}\sin(2k\pi+\alpha)&=\sin\alpha,k\in\mathbb{Z}\\ \cos(2k\pi+\alpha)&=\cos\alpha,k\in\mathbb{Z}\\ \tan(2k\pi+\alpha)&=\tan\alpha,k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\pi+\alpha)&=-\sin\alpha\\ \cos(\pi+\alpha)&=-\cos\alpha\\ \tan(\pi+\alpha)&=\tan\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha)&=-\sin\alpha\\ \cos(-\alpha)&=\cos\alpha\\ \tan(-\alpha)&=-\tan\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha)&=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)&=-\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha)&=-\tan\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=\cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=-\sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=-\cot\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\cot\alpha\end{aligned}$$

两角和差:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

二倍角和降幂:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$　　$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

辅助角公式:　$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),\tan\varphi=\frac{b}{a}$

弧长和扇形面积公式:　$l=r|\alpha|,\quad S=\frac{1}{2}\mathrm{lr}=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

1.1 终边一点

角 α 终边上一点 (-4,3):

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{3}{5}$

1.2 平移

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 移动变成 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$:

1) 提括号: $\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right] \quad \sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$

2) 相减:$\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{12}$

3) 翻译: $-\frac{\pi}{12}$ 是向右移动 $\frac{\pi}{12}$

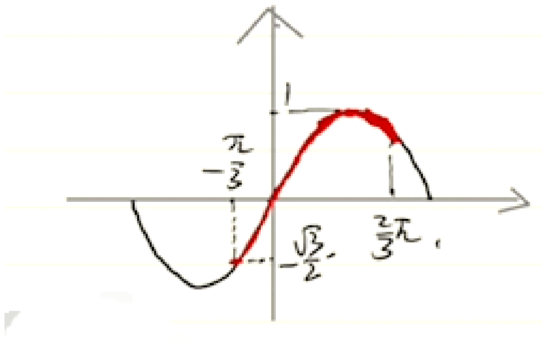
1.3 sin 和 cos 互化

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$ 　根据 $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ 　根据 $\sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

1.4 区间内最值, 值域

$f(x) = 4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值, 最小值



$x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$2x \in [0,\pi]$

$2x-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right]$

如图此区间的最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 最大值 1, 所以

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \in [-2\sqrt{3},4]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3} \in [-\sqrt{3},4+\sqrt{3}]$

1.5 伸缩变换

$y=\cos x$

横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (x 换成 2x) $\longrightarrow y=\cos 2x$

纵坐标伸长到原来的 2 倍 (A 换成 2A) $\longrightarrow y=2\cos 2x$

向左平移 $\frac{\pi}{4}$ (x 换成 $x+\frac{\pi}{4}$) $\longrightarrow y=2\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

1.6 对称中心, 对称轴, 单调区间

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的减区间

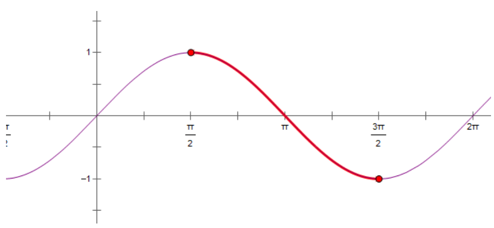


图 1: $\sin x$ 减区间

与基础图形对照:

$\sin x$ 减区间	$x \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right] (k \in z)$
$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 减区间	$2x-\frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right] (k \in z)$

计算出 x 范围. 对称中心, 对称轴, 同样原理, 都是根据基础图形, 替换即可

1.7 sinx 图像翻转

$y=|\sin x|$, $y=\sin|x|$, $y=-\sin x$ 图像

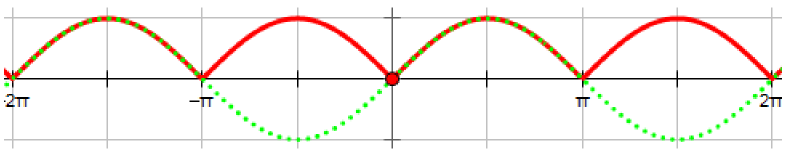


图 2: y=$|\sin x|$ **整体加绝对值: x 轴下方图像翻折到上方. 下方图像不保留.**

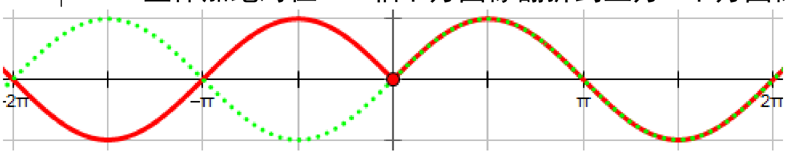


图 3: y=$\sin|x|$ **x 加绝对值: 先画出 x 轴正半轴, 再沿 y 轴翻折.**

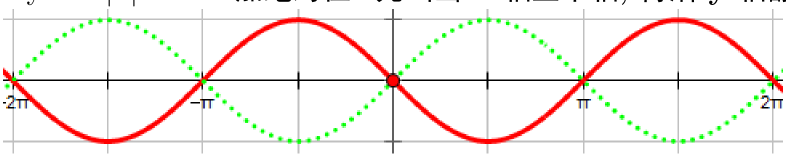


图 4: y=$-\sin x$ **整体加负号: 沿 x 轴上下翻折.**

1.8 零点个数

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\sin x$ 零点个数

令 $f(x)=0$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\sin x$

画出等号左右两侧图像, 交点个数就是零点个数 (2 个)

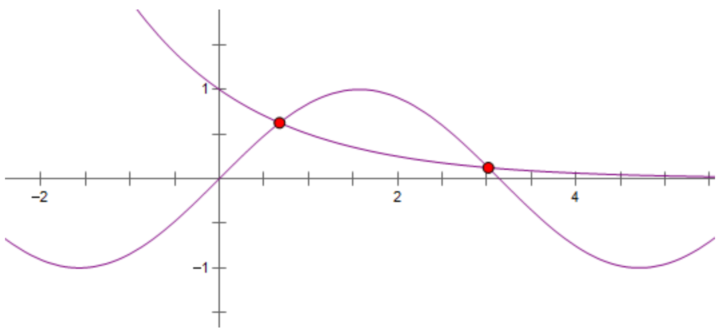


图 5: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x)=\sin x$

2 正余弦

基础知识

2.1 正弦定理 (多解取舍)

在 ΔABC 中,$b=\sqrt{3}, B=60°, c=1$, 求 C

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \therefore \sin C=\frac{1}{2}, c=30°$ 或 $150°$

角度取舍两种思路:

1) 依据大边对大角: $\because b>c, \therefore B>C \therefore C=30°$

2) 三角形内角和 $180°$: $\because B=60°, \therefore 0°<C<120° \therefore C=30°$

2.2 角化边, 边化角, 角化角

$3a\cos A=c\cos B+b\cos C$, 求 $\cos A$

两种思路都可以:

边 $\rightarrow$ 角

$3\sin A\cos A=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A \therefore \cos A=\frac{1}{3}$

角 $\rightarrow$ 边

$3a\cos A=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \therefore \cos A=\frac{1}{3}$

2.3 三角形形状 (讨论 n 种情况)

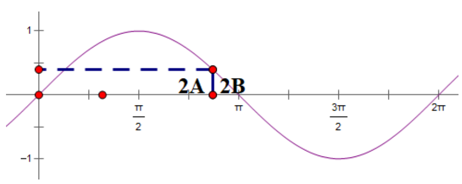


图 6: 2A=2B

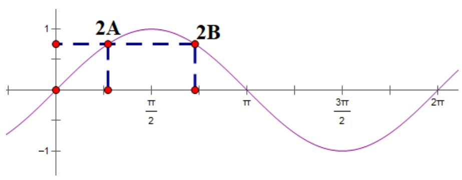


图 7: $2A+2B=\frac{\pi}{2}*2$

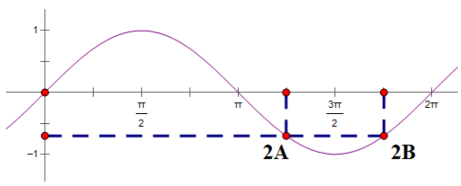


图 8: $2A+2B=\frac{3\pi}{2}*2$

$\sin 2A=\sin 2B$

$\because 0<A<\pi \therefore 0<2A<2\pi$

如图: 三种情况

1) 当 $2A=2B$ 时等腰三角形

2) 当 $2A+2B=\frac{\pi}{2}*2$ 时, 直角三角形

3) 当 $2A+2B=\frac{3\pi}{2}*2$ 时, 不符合三角形

2.4 已知三边判断三角形形状

已知三角形三边为 3,5,7 求三角形是形状 (锐角, 直角, 钝角)

$\because 3^2+5^2<7^2 \therefore$ 钝角

3 向量

3.1 绝对值

绝对值、想平方, 算完之后不要慌.

题目:

已知向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$满足$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}$，则$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=$ ( ) 。

A: $\sqrt{2}$

B: 2

C: 1

D: $-\frac{1}{2}$

解答: A

$\because |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=8$

$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

3.2 夹角锐角钝角

题目:

已知 $\overrightarrow{a}=(\lambda,2)$, $\overrightarrow{b}=(-3,5)$,且 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角为锐角,则 λ 的取值范围( )

解答: $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ 且不共线

解:由题意可得 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}>0$,且 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 不共线,即 $-3\lambda+10>0$,且, $5\lambda\neq 2\times(-3)$,解得 $\lambda<\frac{10}{3}$ 且 $\lambda\neq-\frac{6}{5}$,

所以C选项是正确的

3.3 基础图形 (理)

题目:

3.4 基底建模法 (理)

题目:

如图所示，在△ABC中，点M是BC的中点，点N在AC上，且AN=2NC，AM与BN相交于点P，求AP∶PM

的值.

解答:以 $\overrightarrow{BM}$,$\overrightarrow{CN}$ 为基底, 进行计算.

设:$e_1=\overrightarrow{BM}$, $e_2=\overrightarrow{CN}$, 则

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = -3e_2 - e_1$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = 2e_1 + e_2$

因为 A,P,M 和 B,P,N 分别共线所以:

$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AM} = -\lambda e_1 - 3\lambda e_2$

$\overrightarrow{BP} = \mu\overrightarrow{BN} = 2\mu e_1 + \mu e_2$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{AP} = (\lambda + 2\mu)e_1 + (3\lambda + \mu)e_2$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2e_1 + 3e_2$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = 3 \end{cases} \begin{cases} \lambda = \frac{4}{5} \\ \mu = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$\therefore AP : PM = 4 : 1$

4 数列

4.1 分式数列单调性

数列 $a_n=\frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$, 则前 100 项的最大项, 最小项是第几项

解:$a_n=\frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}=1+\frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$

根据函数图像:

当 $n\in[1,44]$ 时,$\{a_n\}$ 单调递减,

当 $n\in[45,+\infty)$ 单调递增,

$\therefore (a_n)_{\max}=a_{45}, (a_n)_{\min}=a_{44}$

4.2 分段数列单调性

题目:

已知函数 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-3, x\le 7\\ a^{x-6}, x>7\end{cases}$,若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n)(n\in N^*)$,且 $\{a_n\}$ 是递增数列,则实数a的取值范围是(　)

A. $[\frac{9}{4},3)$

B. $(\frac{9}{4},3)$

C. $(2,3)$

D. $(1,3)$

解答:

解:根据题意, $a_n=f(n)=\begin{cases}(3-a)n-3, n\le 7\\ a^{n-6}, n>7\end{cases}$;

要使 $\{a_n\}$ 是递增数列,必有 $\begin{cases}3-a>0\\ a>1\\ (3-a)\times 7-3<a^{8-6}\end{cases}$;

解可得, $2<a<3$;

所以C选项是正确的.

4.3 一般数列单调性