

目录

1	三角函数	4
1.1	基础知识	4
1.2	终边一点	6
1.3	平移	6
1.4	\sin 和 \cos 互化	6
1.5	区间内最值, 值域	6
1.6	伸缩变换	6
1.7	对称中心, 对称轴, 单调区间	6
1.8	$\sin x$ 图像翻转	7
1.9	零点个数	7
2	正余弦	8
2.1	基础知识	8
2.2	多解取舍两种思路	8
2.3	利用三角形多解取舍	8
2.4	角化边, 边化角	8
2.5	角化角	8
2.6	三角形形状 (讨论 n 种情况)	9
2.7	已知三边判断三角形形状	9
3	向量	10
3.1	基础知识	10
3.2	绝对值	10
3.3	夹角为锐角, 钝角	10
3.4	基础图形 (理)	11
3.5	基底建模法 (理)	11
4	数列	13
4.1	基础知识	13
4.2	单调性	15
4.2.1	分式数列	15
4.2.2	分段数列	15
4.2.3	一般数列	15
4.3	等差最值问题	16
4.4	求通项公式 a_n	16
4.4.1	已知 S_n 和 n 的关系, 求 a_n	16
4.4.2	已知 S_n 和 a_n 的关系, 求 a_n	17
4.5	求前 n 项和 S_n	17
4.5.1	裂项相消法	17
4.5.2	错位相减法	17

5	立体几何	18
5.1	经验和基础知识	18
5.1.1	三种角范围	18
5.1.2	面积体积	18
5.1.3	平行	19
5.1.4	垂直	19
5.2	外接圆, 内切圆	20
5.3	三视图还原方法	20
5.4	平行三种模型	20
5.5	垂直两种模型	20
6	不等式	21
6.1	利用不等式性质求取值范围	21
6.2	一元二次含参不等式	21
6.3	一元二次含参不等式逆向	21
6.4	恒成立三种解法	21
6.5	基本不等式	21
6.6	绝对值不等式	21
6.7	柯西不等式	21
6.8	线性规划	21
6.9	一元二次方程根的分布	21
7	空间向量 (理)	21
8	更新日志	22

数学笔记

于洋

1 三角函数

1.1 基础知识

诱导公式:

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

两角和差:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

二倍角和降幂:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

辅助角公式: $a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \tan \varphi = \frac{b}{a}$

弧长和扇形面积公式: $l = r|\alpha|, S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$

和差化积, 积化和差:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

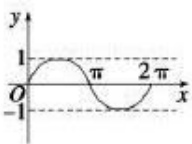
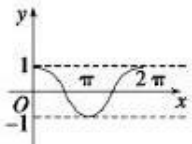
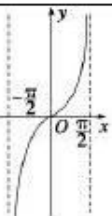
$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

三角函数性质:

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图像			
定义域	\mathbf{R}	\mathbf{R}	$\{x x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	\mathbf{R}
单调性	$[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi](k \in \mathbf{Z})$ 上递增; $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi](k \in \mathbf{Z})$ 上递减	$[-\pi + 2k\pi, 2k\pi](k \in \mathbf{Z})$ 上递增; $[2k\pi, \pi + 2k\pi](k \in \mathbf{Z})$ 上递减	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)(k \in \mathbf{Z})$ 上递增
最值	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi(k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\max} = 1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi(k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\min} = -1$	$x = 2k\pi(k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\max} = 1$; $x = \pi + 2k\pi(k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\min} = -1$	
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
对称中心	$(k\pi, 0)(k \in \mathbf{Z})$	$(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)(k \in \mathbf{Z})$	$(\frac{k\pi}{2}, 0)(k \in \mathbf{Z})$
对称轴方程	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi(k \in \mathbf{Z})$	$x = k\pi(k \in \mathbf{Z})$	
周期	2π	2π	π

1.2 终边一点

角 α 终边上一点 $(-4,3)$:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = -\frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{3}{5}$$

1.3 平移

$\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 移动变成 $\sin(2x + \frac{\pi}{6})$:

1) 提括号: $\sin[2(x + \frac{\pi}{6})]$ $\sin[2(x + \frac{\pi}{12})]$

2) 相减: $(x + \frac{\pi}{12}) - (x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{12}$

3) 翻译: $-\frac{\pi}{12}$ 是向右移动 $\frac{\pi}{12}$

1.4 sin 和 cos 互化

$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) \quad \text{根据 } \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) \quad \text{根据 } \sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

1.5 区间内最值, 值域

$f(x) = 4\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值, 最小值

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$2x \in [0, \pi]$$

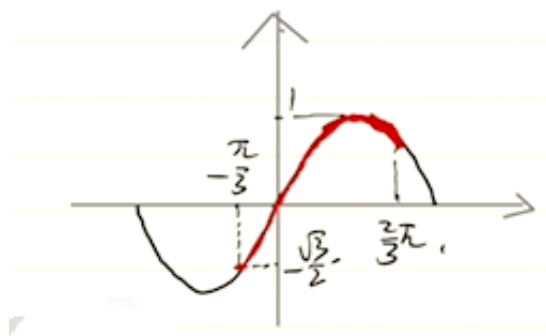
$$2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi]$$

如图此区间的最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 最大值 1, 所以

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$$

$$4\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-2\sqrt{3}, 4]$$

$$4\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} \in [-\sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}]$$



1.6 伸缩变换

$$y = \cos x$$

横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (x 换成 $2x$) $\rightarrow y = \cos 2x$

纵坐标伸长到原来的 2 倍 (A 换成 $2A$) $\rightarrow y = 2\cos 2x$

向左平移 $\frac{\pi}{4}$ (x 换成 $x + \frac{\pi}{4}$) $\rightarrow y = 2\cos[2(x + \frac{\pi}{4})]$

1.7 对称中心, 对称轴, 单调区间

$y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的减区间

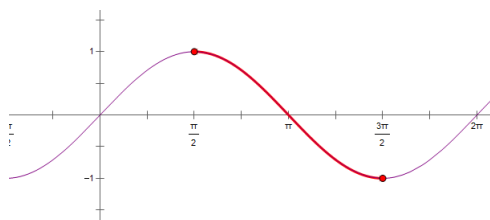


图 1: $\sin x$ 减区间

与基础图形对照:

$\sin x$ 减区间	$x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$
$\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 减区间	$2x - \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$

计算出 x 范围即可. 对称中心, 对称轴, 同样原理, 都是根据基础图形, 替换即可

1.8 $\sin x$ 图像翻转

$y = |\sin x|, y = \sin |x|, y = -\sin x$ (绿虚线: $\sin x$ 图像, 红线: 翻转后图像)

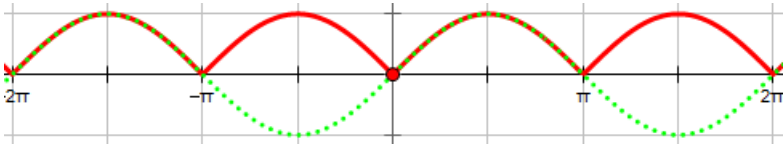


图 2: $y = |\sin x|$ 整体加绝对值: x 轴下方图像翻折到上方. 下方图像不保留.

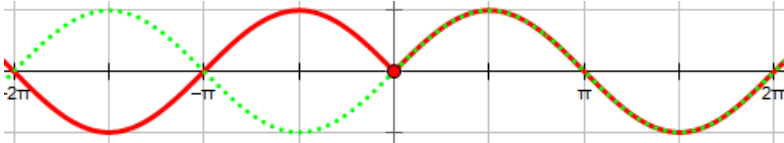


图 3: $y = \sin |x|$ x 加绝对值: 先画出 x 轴正半轴, 再沿 y 轴翻折.

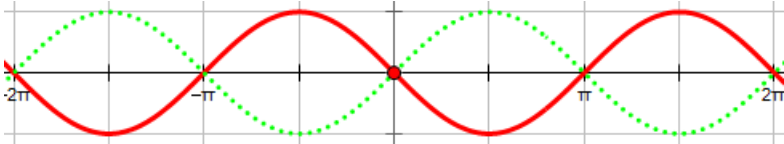


图 4: $y = -\sin x$ 整体加负号: 沿 x 轴上下翻折.

1.9 零点个数

$f(x) = (\frac{1}{2})^x - \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 的零点个数

令 $f(x) = 0$ 即 $(\frac{1}{2})^x = \sin x$

画出等号左右两侧图像, 交点个数就是零点个数 (2 个)

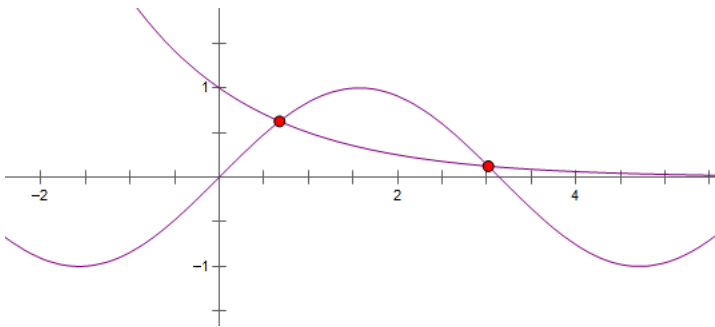


图 5: $f(x) = (\frac{1}{2})^x, f(x) = \sin x$

2 正余弦

2.1 基础知识

正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

余弦定理:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

面积公式:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$S = \frac{(a+b+c)r}{2} \quad S = \frac{abc}{4R} \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (p = \frac{1}{2}(a+b+c))$$

判断三角形形状: 最短两条边的平方与第三条边平方比较

$$a^2 > b^2 + c^2 \quad \triangle ABC \text{ 为钝角三角形}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \triangle ABC \text{ 为直角三角形}$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \quad \triangle ABC \text{ 为锐角三角形}$$

2.2 多解取舍两种思路

在 $\triangle ABC$ 中, $b = \sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $c = 1$, 求 C

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \therefore \sin C = \frac{1}{2} \therefore C = 30^\circ \text{ 或 } 150^\circ$$

角度取舍两种思路:

1) 依据大边对大角: $\because b > c, \therefore B > C \therefore C = 30^\circ$

2) 三角形内角和 180° : $\because B = 60^\circ, \therefore 0^\circ < C < 120^\circ \therefore C = 30^\circ$

2.3 利用三角形多解取舍

2.4 角化边, 边化角

$3a \cos A = c \cos B + b \cos C$, 求 $\cos A$

两种思路都可以:

边 \rightarrow 角

$$3 \sin A \cos A = \sin C \cos B + \sin B \cos C = \sin(B+C) = \sin A \therefore \cos A = \frac{1}{3}$$

角 \rightarrow 边

$$3a \cos A = c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \therefore \cos A = \frac{1}{3}$$

2.5 角化角

$\sin B \cdot \sin C = \cos^2 \frac{A}{2}$, 三角形形状

解: 当出现三个角时, 考虑角化角. 化简成两个角的关系.

$$\text{先降幂: } \sin B \cdot \sin C = \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos A + 1}{2}$$

$$A \text{ 角化成 } B+C: \therefore 2 \sin B \cdot \sin C = \cos A + 1 = \cos(B+C) + 1$$

化简计算即可:

$$\therefore 2 \sin B \cdot \sin C = -\cos B \cos C + \sin B \sin C + 1$$

$$\therefore \cos B \cos C + \sin B \sin C = \cos(B - C) = 1$$

$$\therefore B - C = 0, B = C$$

\therefore 等腰

2.6 三角形形状 (讨论 n 种情况)

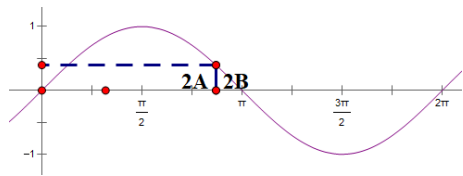


图 6: $2A=2B$

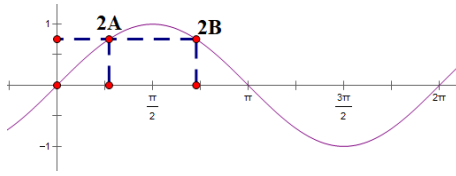


图 7: $2A + 2B = \frac{\pi}{2} * 2$

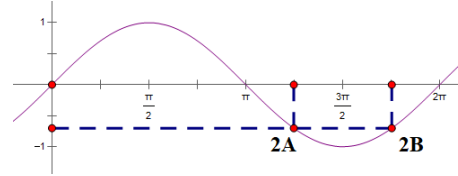


图 8: $2A + 2B = \frac{3\pi}{2} * 2$

$$\sin 2A = \sin 2B$$

$$\therefore 0 < A < \pi \therefore 0 < 2A < 2\pi$$

如图: 三种情况

- 1) 当 $2A = 2B$ 时等腰三角形
- 2) 当 $2A + 2B = \frac{\pi}{2} * 2$ 时, 直角三角形
- 3) 当 $2A + 2B = \frac{3\pi}{2} * 2$ 时, 不符合三角形

2.7 已知三边判断三角形形状

已知三角形三边为 3,5,7 求三角形是形状 (锐角, 直角, 钝角)

$$\therefore 3^2 + 5^2 < 7^2 \therefore \text{钝角}$$

3 向量

3.1 基础知识

	线性运算	坐标运算
加法	三角形法则: 首尾相连首尾连: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 平行四边形法则: 同起点, 对角线	$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
减法	三角形法则: 同起点, 连终点, 指向被减向量: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$	$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
数乘	$x\vec{a}$ 表示与 \vec{a} 的方向相同 ($x > 0$) 或者相反 ($x < 0$), 长度为 \vec{a} 的 x 倍	$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$
数量积	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos \theta$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$
模	$ \vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (\vec{a} ^2 = \vec{a}^2)$	$ \vec{a} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$
夹角	$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} }$	$\cos \theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$
平行	$\vec{a} = \lambda\vec{b}(\vec{b} \neq 0)$	$x_1y_2 = x_2y_1$
垂直	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$
大写坐标	设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$	

3.2 绝对值

题目:

已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{2}, |\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = ()$ 。

- A: $\sqrt{2}$
- B: 2
- C: 1
- D: $-\frac{1}{2}$

解: 绝对值、想平方, 算完之后不要慌. 因为算完后的 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 常常作为一个整体看待!

$\because |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$
 $\therefore 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$
 $\therefore |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$
 \therefore 选 A

3.3 夹角为锐角, 钝角

题目:

已知 $\vec{a} = (\lambda, 2), \vec{b} = (-3, 5)$, 且 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为锐角, 则 λ 的取值范围()

解: $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 且不共线

解:由题意可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, 且 \vec{a} 与 \vec{b} 不共线, 即 $-3\lambda + 10 > 0$, 且 $5\lambda \neq 2 \times (-3)$, 解得 $\lambda < \frac{10}{3}$ 且 $\lambda \neq -\frac{6}{5}$,

所以C选项是正确的

3.4 基础图形 (理)

题目:

如图: 已知在 $\triangle ABC$ 中, D是BC上的一点, 且 $BD = \lambda DC (\lambda \neq -1)$, 求证: $\vec{AD} = \frac{\vec{AB} + \lambda \vec{AC}}{1 + \lambda}$.



解:

证明: $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$, $\because BD = \lambda DC (\lambda \neq -1)$, $\therefore \vec{BD} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \vec{BC}$,

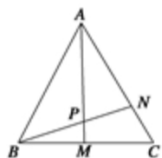
$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$, $\therefore \vec{AD} = \vec{AB} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \vec{BC} = \vec{AB} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} (\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{\vec{AB} + \lambda \vec{AC}}{1 + \lambda}$.

3.5 基底建模法 (理)

题目:

如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点M是BC的中点, 点N在AC上, 且 $AN = 2NC$, AM与BN相交于点P, 求AP:PM

的值.



解:以 \vec{BM}, \vec{CN} 为基底, 进行计算.

设: $e_1 = \vec{BM}$, $e_2 = \vec{CN}$, 则

$$\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM} = -3e_2 - e_1$$

$$\vec{BN} = \vec{BC} + \vec{CN} = 2e_1 + e_2$$

因为 A, P, M 和 B, P, N 分别共线所以:

$$\vec{AP} = \lambda \vec{AM} = -\lambda e_1 - 3\lambda e_2$$

$$\vec{BP} = \mu \vec{BN} = 2\mu e_1 + \mu e_2$$

$$\vec{BA} = \vec{BP} - \vec{AP} = (\lambda + 2\mu)e_1 + (3\lambda + \mu)e_2$$

$$\vec{BA} = \vec{BC} + \vec{CA} = 2e_1 + 3e_2$$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = 3 \end{cases} \begin{cases} \lambda = \frac{4}{5} \\ \mu = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\therefore AP : PM = 4 : 1$$

4.1 基础知识

	等差数列性质	等比数列性质
1 定义	$a_{n+1} - a_n = d (n \geq 1)$ $a_n - a_{n-1} = d (n \geq 2);$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (n \geq 1) \quad ; \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = q (n \geq 2)$
2 通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$ $a_n = a_m + (n-m)d (n, m \in N^+)$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$
3 、 前 n 项和	$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$	$q=1, S_n = na_1;$ $q \neq 1, S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $= \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$
4 、 中 项	$a, A, b \text{ 成等差数列} \Leftrightarrow A = \frac{a+b}{2};$ $a_n \text{ 是其前 } k \text{ 项 } a_{n-k} \text{ 与后 } k \text{ 项 } a_{n+k} \text{ 的等}$ $\text{差中项, 即: } a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$	$a, A, b \text{ 成等比数列} \Leftrightarrow \frac{A}{a} = \frac{b}{A}$ $(\text{不等价于 } A^2 = ab, \text{ 只能 } \Rightarrow);$ $a_n \text{ 是其前 } k \text{ 项 } a_{n-k} \text{ 与后 } k \text{ 项 } a_{n+k} \text{ 的}$ $\text{等比中项, 即: } a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$
5 、 下 标 和 公 式	$\text{若 } m+n=p+q, \text{ 则 } a_m + a_n = a_p + a_q$ $\text{特别地, 若 } m+n=2p, \text{ 则 } a_m + a_n = 2a_p$	$\text{若 } m+n=p+q, \text{ 则 } a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ $\text{特别地, 若 } m+n=2p, \text{ 则 } a_m \cdot a_n = a_p^2$
6 、 首 尾 项 性 质	$\text{等差数列的第 } k \text{ 项与倒数第 } k \text{ 项的和等于首尾两项的和, 即:}$ $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_k + a_{n-(k-1)}$	$\text{等比数列的第 } k \text{ 项与倒数第 } k \text{ 项的积等于首尾两项的积, 即:}$ $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \dots = a_k \cdot a_{n-(k-1)}$
	$\{a_n\} \text{ 为等差数列, 若 } m, n, p \text{ 成等差数}$ 列, $\text{则 } a_m, a_n, a_p \text{ 成等差数列}$	$\{a_n\} \text{ 为等比数列, 若 } m, n, p \text{ 成等差}$ $\text{数列, 则 } a_m, a_n, a_p \text{ 成等比数列}$

7、 结 论	<p>(两个等差数列的代数和仍是等差数列)</p> <p>等差数列$\{a_n\}, \{b_n\}$的公差分别为d, e, 则数列$\{a_n + b_n\}$仍为等差数列, 公差为$d + e$</p>	<p>(两个等比数列的积或商仍是等比数列)</p> <p>等比数列$\{a_n\}, \{b_n\}$的公比分别为p, q, 则数列$\{a_n \cdot b_n\}$仍为等比数列, 公比为pq</p>
	<p>取出等差数列的所有奇(偶)数项, 组成的新数列仍为等差数列, 且公差为$2d$</p>	<p>取出等比数列的所有奇(偶)数项, 组成的新数列仍为等比数列, 且公比为q^2</p>
	<p>$S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 成等差数列, 公差为$m^2 d$</p>	<p>$S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 成等比数列, 公比为q^m</p>
	<p>当项数为偶数$2n$时, $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd$</p> $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ <p>当项数为奇数$2n - 1$时,</p> $S_{2n-1} = (2n-1)a_{\text{中}}$ $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}$	<p>当项数为偶数$2n$时,</p> $S_{\text{偶}} = qS_{\text{奇}}$ <p>当项数为奇数$2n - 1$时,</p> $S_{\text{奇}} = a_1 + qS_{\text{偶}}$
	<p>等差数列判断方法</p> <p>①定义法: $a_n - a_{n-1} = d (n \geq 2)$</p> <p>②等差中项概念: $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} (n \geq 2)$</p> <p>③函数法: $a_n = pn + q (p, q \text{ 为常数})$ 关于 n 的一次函数 \Leftrightarrow 数列$\{a_n\}$是首项为 $p+q$, 公差为 $p (\neq 0)$ 的等差数列;</p> <p>④数列$S_n = an^2 + bn$的前 n 项和形如$S_n = an^2 + bn$ (a, b 为常数), 那么数列$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ 是等差数列,</p>	<p>等比数列判断方法</p> <p>①定义法: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$</p> <p>②等比中项概念: $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 (a_n \neq 0)$</p> <p>③函数法: $a_n = cq^n$ (c, q 均为不为 0 的常数, $n \in \mathbf{N}_+$), 则数列$\{a_n\}$是等比数列.</p> <p>④数列$S_n = Aq^n - A$的前 n 项和形如$S_n = Aq^n - A$ (A, q 均为不等于 0 的常数且 $q \neq 1$), 则数列$\{a_n\}$是公比不为 1 的等比数列.</p>
8、 共 性	<p>非零常数列既是等差数列又是等比数列</p>	

4.2 单调性

4.2.1 分式数列

数列 $a_n = \frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$, 则前 100 项的最大项, 最小项是第几项

解: 需要会分式函数的化简与图像:

$$a_n = \frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}} = 1 + \frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$$

根据函数图像:

当 $n \in [1, 44]$ 时, $\{a_n\}$ 单调递减,

当 $n \in [45, +\infty)$ 单调递增,

$$\therefore (a_n)_{\max} = a_{45}, (a_n)_{\min} = a_{44}$$

4.2.2 分段数列

题目:

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$, 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n) (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 a

的取值范围是()

A. $[\frac{9}{4}, 3)$

B. $(\frac{9}{4}, 3)$

C. $(2, 3)$

D. $(1, 3)$

解: 需要会分段函数单调性并注意与之对比:

解: 根据题意, $a_n = f(n) = \begin{cases} (3-a)n-3, & n \leq 7 \\ a^{n-6}, & n > 7 \end{cases};$

要使 $\{a_n\}$ 是递增数列, 必有 $\begin{cases} 3-a > 0 \\ a > 1 \\ (3-a) \times 7 - 3 < a^{8-6} \end{cases};$

解可得, $2 < a < 3$;

所以C选项是正确的.

4.2.3 一般数列

题目:

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = (n+1)(\frac{10}{11})^n$, $n \in \mathbb{N}^+$

1. 求证数列 $\{a_n\}$ 先递增, 后递减

2. 求数列 $\{a_n\}$ 的最大项

解: 作差法或作商法:

作差法:

$$(1) a_n = (n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n$$

$$a_{n-1} = n \times \left(\frac{10}{11}\right)^{n-1}$$

$$a_n - a_{n-1} = \left(\frac{10}{11} - \frac{n}{11}\right) \times \left(\frac{10}{11}\right)^{n-1} = 0$$

$$n = 10 \text{ 时, } a_n - a_{n-1} = 0$$

$$n < 10 \text{ 时, } a_n - a_{n-1} > 0, \text{ 递增;}$$

$$n > 10 \text{ 时, } a_n - a_{n-1} < 0, \text{ 递减;}$$

$$(2) \text{最大项为 } a_{10} = a_9 = 11 \times \left(\frac{10}{11}\right)^{10} = 10 \times \left(\frac{10}{11}\right)^9$$

作商法:

【点拨】 因为 $a_n = (n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n$ 是积的形式且 $a_n > 0$, 所以可用作商法比较

a_n 与 a_{n-1} 的大小.

$$\text{【证明】 (1) 令 } \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 (n \geq 2), \text{ 即 } \frac{(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n}{n \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^{n-1}} \geq 1.$$

$$\text{整理得 } \frac{n+1}{n} \geq \frac{11}{10}, \text{ 解得 } n \leq 10. \text{ 又 } a_1 < a_2,$$

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项到第 9 项递增, 从第 10 项起递减.

$$\text{【解析】 (2) 由 (1) 知 } a_9 = a_{10} = \frac{10^{10}}{11^9} \text{ 最大.}$$

4.3 等差最值问题

待补充 1. 什么情况才会有最值?

2. 最值的常见问法?

3. 最值解题思路?

4.4 求通项公式 a_n

4.4.1 已知 S_n 和 n 的关系, 求 a_n

$$\text{根据公式: } a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$S_n = 2n^2 + 3n + 1, \text{ 求 } a_n$$

解:

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = 6$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 4n - 1$$

(假设上式 $n=1$, 看是否也等于 6, 如果等于可以合在一块写. 不等于要分段写. 此题不等于.)

$$\text{假设上式 } n=1, \text{ 则 } a_1 = 5 \neq S_1$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 6 & n=1 \\ 4n-1 & n \geq 2 \end{cases}$$

4.4.2 已知 S_n 和 a_n 的关系, 求 a_n

4.5 求前 n 项和 S_n

4.5.1 裂项相消法

如何裂项: $a_n = \frac{k}{b_n \cdot c_n} = \frac{k}{c_n - b_n} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{c_n} \right)$

相消规律: 对称性

最后结果尽量化简成 1 个分式

例题:

求 $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 前 n 项和

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$$

4.5.2 错位相减法

适用于: 等差乘以等比

步骤: 1. 乘公比 2. 错位 3. 相减

例题:

求 $a_n = n \cdot 2^n$ 的前 n 项和

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$$

乘公比 2 并错位写方便计算

$$2S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

两式相减

$$-S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$$


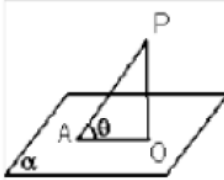
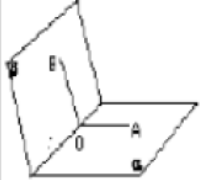
利用等比前 n 项和公式化简

$$S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

5 立体几何

5.1 经验和基础知识

5.1.1 三种角范围

四、三种角的范围		
异面直线所成角 $\theta \in (0^\circ, 90^\circ]$	直线与平面所成角 $\angle PAO \in [0^\circ, 90^\circ]$	二面角 $\angle AOB \in [0^\circ, 180^\circ]$
		

5.1.2 面积体积

名称		侧面积($S_{侧}$)	全面积($S_{全}$)	体 积(V)
棱柱	棱柱	直截面周长 $\times l$	$S_{侧}+2S_{底}$	$S_{底} \cdot h=S_{直截面} \cdot h$
	直棱柱	ch		$S_{底} \cdot h$
棱锥	棱锥	各侧面积之和	$S_{侧}+S_{底}$	$\frac{1}{3} S_{底} \cdot h$
	正棱锥	$\frac{1}{2} ch'$		
棱台	棱台	各侧面面积之和	$S_{侧}+S_{上底}+S_{下底}$	$\frac{1}{3} h(S_{上底}+S_{下底}+\sqrt{S_{上底} \cdot S_{下底}})$
	正棱台	$\frac{1}{2} (c+c') h'$		

表中 S 表示面积， c' 、 c 分别表示上、下底面周长， h 表斜高， h' 表示斜高， l 表示侧棱长。

名称	圆柱	圆锥	圆台	球
$S_{侧}$	$2\pi rl$	πrl	$\pi (r_1+r_2) l$	
$S_{全}$	$2\pi r(l+r)$	$\pi r(l+r)$	$\pi (r_1+r_2) l+\pi (r_1^2+r_2^2)$	$4\pi R^2$
V	$\pi r^2 h$ (即 $\pi r^2 l$)	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$	$\frac{1}{3} \pi h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$	$\frac{4}{3} \pi R^3$

表中 l 、 h 分别表示母线、高， r 表示圆柱、圆锥与球冠的底半径， r_1 、 r_2 分别表示圆台 上、下底面半径， R 表示半径。

5.1.3 平行

二、有关平行的证明				
线//线	$(1) \left. \begin{array}{l} a//b \\ b//c \end{array} \right\} \Rightarrow a//c$ 线//线 \Rightarrow 线//线 (都是直线)	$(2) \left. \begin{array}{l} a//\alpha \\ a\subset\beta \\ \alpha\cap\beta=b \end{array} \right\} \Rightarrow a//b$ 线//面 \Rightarrow 线//线 (相交平面)	$(3) \left. \begin{array}{l} \alpha//\beta \\ \alpha\cap\gamma=a \\ \beta\cap\gamma=b \end{array} \right\} \Rightarrow a//b$ 面//面 \Rightarrow 线//线 (平行平面)	$(4) \left. \begin{array}{l} a\perp\alpha \\ b\perp\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a//b$ 同垂直于一个平面 \Rightarrow 线//线 (线面垂直)
线//面	$(1) \left. \begin{array}{l} a\subset\alpha \\ b\subset\alpha \\ a//b \end{array} \right\} \Rightarrow a//\alpha$ 线//线 \Rightarrow 线//面	$(2) \left. \begin{array}{l} \alpha//\beta \\ a\subset\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a//\beta$ 面//面 \Rightarrow 线//面	面//面	$\left. \begin{array}{l} a\subset\alpha, b\subset\alpha \\ a\cap b=O \\ a//\beta, b//\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha//\beta$ 线//面 \Rightarrow 面//面

5.1.4 垂直

线 \perp 线	$\left. \begin{array}{l} a\perp c \\ a//b \end{array} \right\} \Rightarrow b\perp c$ 线 \perp 线 \Rightarrow 线 \perp 线	$\left. \begin{array}{l} a\perp\alpha \\ b\subset\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a\perp b$ 线 \perp 面 \Rightarrow 线 \perp 线
线 \perp 面	$\left. \begin{array}{l} l\perp a, l\perp b \\ a\cap b=P \\ a\subset\alpha, b\subset\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l\perp\alpha$ 线 \perp 线 \Rightarrow 线 \perp 面	$\left. \begin{array}{l} \alpha\perp\beta \\ \alpha\cap\beta=l \\ a\subset\alpha \\ a\perp l \end{array} \right\} \Rightarrow a\perp\beta$ 面 \perp 面 \Rightarrow 线 \perp 面
面 \perp 面	$\left. \begin{array}{l} a\perp\beta \\ a\subset\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha\perp\beta$ 线 \perp 面 \Rightarrow 面 \perp 面	

5.2 外接圆, 内切圆

1

5.3 三视图还原方法

5.4 平行三种模型

5.5 垂直两种模型

6 不等式

6.1 利用不等式性质求取值范围

6.2 一元二次含参不等式

6.3 一元二次含参不等式逆向

6.4 恒成立三种解法

6.5 基本不等式

6.6 绝对值不等式

6.7 柯西不等式

6.8 线性规划

6.9 一元二次方程根的分布

7 空间向量 (理)

2019-7-21 添加了立体几何中” 基础知识” 小节.