

数学笔记

于洋

1 三角函数

1.1 终边一点

角 α 终边上一点 $(-4,3)$:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = -\frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{3}{5}$$

1.2 平移

$\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 移动变成 $\sin(2x + \frac{\pi}{6})$:

1) 提括号: $\sin[2(x + \frac{\pi}{6})] \quad \sin[2(x + \frac{\pi}{12})]$

2) 相减: $(x + \frac{\pi}{12}) - (x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{12}$

3) 翻译: $-\frac{\pi}{12}$ 是向右移动 $\frac{\pi}{12}$

1.3 sin 和 cos 互化

$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) \quad \text{根据 } \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) \quad \text{根据 } \sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

1.4 区间内最值, 值域

$f(x) = 4\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值, 最小值

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$2x \in [0, \pi]$$

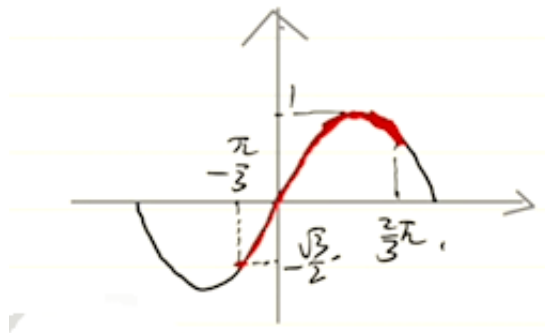
$$2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi]$$

如图此区间的最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 最大值 1, 所以

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$$

$$4\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-2\sqrt{3}, 4]$$

$$4\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} \in [-\sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}]$$



1.5 伸缩变换

$$y = \cos x$$

横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (x 换成 $2x$) $\rightarrow y = \cos 2x$

纵坐标伸长到原来的 2 倍 (A 换成 $2A$) $\rightarrow y = 2\cos 2x$

向左平移 $\frac{\pi}{4}$ (x 换成 $x + \frac{\pi}{4}$) $\rightarrow y = 2\cos[2(x + \frac{\pi}{4})]$

1.6 对称中心, 对称轴, 单调区间

$y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的减区间

与基础图形对照:	$\sin x$ 减区间	$x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$
	$\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 减区间	$2x - \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$

计算出 x 范围. 对称中心, 对称轴, 同样原理, 都是根据基础图形, 替换即可

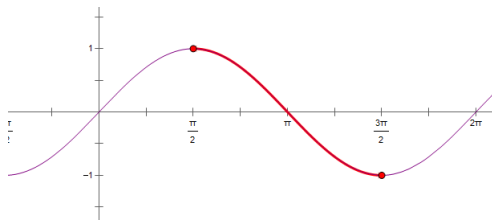


图 1: $\sin x$ 减区间

1.7 $\sin x$ 图像翻转

$y = |\sin x|$, $y = \sin |x|$, $y = -\sin x$ 图像

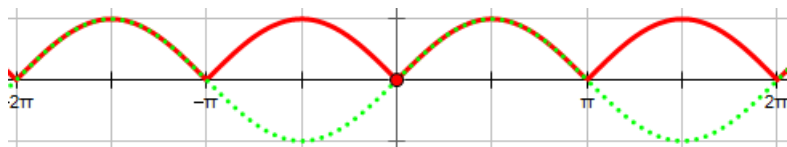


图 2: $y = |\sin x|$ 整体加绝对值: x 轴下方图像翻折到上方. 下方图像不保留.

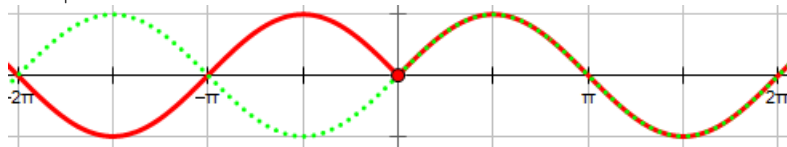


图 3: $y = \sin |x|$ x 加绝对值: 先画出 x 轴正半轴, 再沿 y 轴翻折.

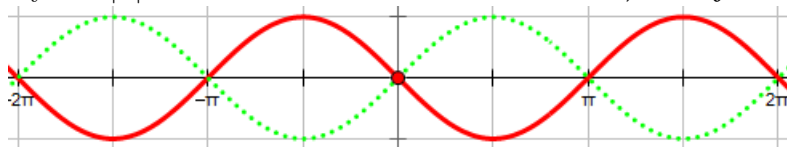


图 4: $y = -\sin x$ 整体加负号: 沿 x 轴上下翻折.

1.8 零点个数

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \sin x$ 零点个数

令 $f(x) = 0$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sin x$

画出等号左右两侧图像, 交点个数就是零点个数 (2 个)

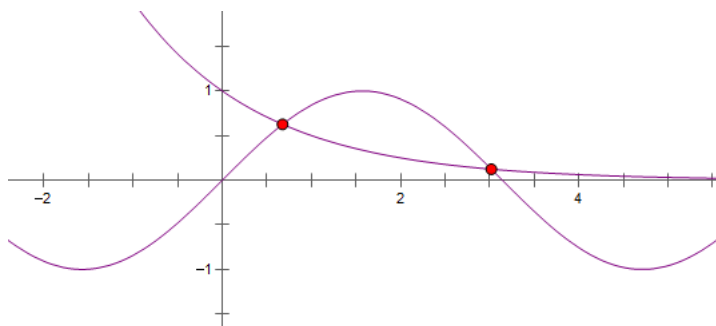


图 5: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \sin x$

2 正余弦

2.1 正弦定理 (多解取舍)

在 $\triangle ABC$ 中, $b = \sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $c = 1$, 求 C

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \therefore \sin C = \frac{1}{2}, c = 30^\circ \text{ 或 } 150^\circ$$

角度取舍两种思路:

- 1) 依据大边对大角: $\because b > c, \therefore B < C \therefore C = 30^\circ$
- 2) 三角形内角和 180° : $\because B = 60^\circ, \therefore 0^\circ < C < 120^\circ \therefore C = 30^\circ$

2.2 角化边, 边化角, 角化角

$3a \cos A = c \cos B + b \cos C$, 求 $\cos A$

两种思路都可以:

边 \rightarrow 角

$$3 \sin A \cos A = \sin C \cos B + \sin B \cos C = \sin(B + C) = \sin A \therefore \cos A = \frac{1}{3}$$

角 \rightarrow 边

$$3a \cos A = c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \therefore \cos A = \frac{1}{3}$$

2.3 三角形形状 (讨论 n 种情况)

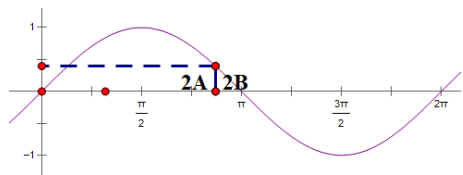


图 6: $2A=2B$

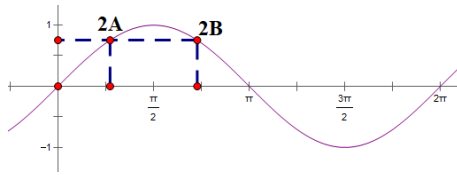


图 7: $2A + 2B = \frac{\pi}{2} * 2$

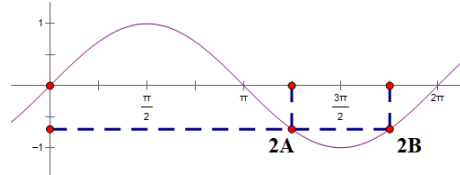


图 8: $2A + 2B = \frac{3\pi}{2} * 2$

$$\sin 2A = \sin 2B$$

$$\because 0 < A < \pi \therefore 0 < 2A < 2\pi$$

如图: 三种情况

- 1) 当 $2A = 2B$ 时等腰三角形
- 2) 当 $2A + 2B = \frac{\pi}{2} * 2$ 时, 直角三角形
- 3) 当 $2A + 2B = \frac{3\pi}{2} * 2$ 时, 不符合三角形

2.4 已知三边判断三角形形状

已知三角形三边为 3,5,7 求三角形是形状 (锐角, 直角, 钝角)

$$\because 3^2 + 5^2 < 7^2 \therefore \text{钝角}$$

3.1 绝对值

绝对值、想平方, 算完之后不要慌.

题目:

已知向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = ()$ 。

A: $\sqrt{2}$

B: 2

C: 1

D: $-\frac{1}{2}$

解答: A

$$\because |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$$

$$\therefore 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

3.2 夹角锐角钝角

题目:

已知 $\vec{a} = (\lambda, 2)$, $\vec{b} = (-3, 5)$, 且 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为锐角, 则 λ 的取值范围()

解答: $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 且不共线

解: 由题意可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, 且 \vec{a} 与 \vec{b} 不共线, 即 $-3\lambda + 10 > 0$, 且 $5\lambda \neq 2 \times (-3)$, 解得 $\lambda < \frac{10}{3}$ 且 $\lambda \neq -\frac{6}{5}$,

所以C选项是正确的

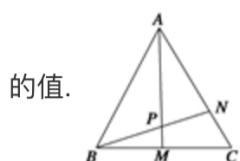
3.3 基础图形 (理)

题目:

3.4 基底建模法 (理)

题目:

如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点M是BC的中点, 点N在AC上, 且 $AN=2NC$, AM与BN相交于点P, 求AP:PM



的值.

解答: 以 \vec{BM}, \vec{CN} 为基底, 进行计算.

设: $e_1 = \vec{BM}$, $e_2 = \vec{CN}$, 则

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3e_2-e_1$$

$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2e_1+e_2$$

因为 A,P,M 和 B,P,N 分别共线所以:

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda e_1-3\lambda e_2$$

$$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu e_1+\mu e_2$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)e_1+(3\lambda+\mu)e_2$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2e_1+3e_2$$

$$\begin{cases} \lambda+2\mu=2 \\ 3\lambda+\mu=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{4}{5} \\ \mu=\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\therefore AP:PM=4:1$$

4.1 分式数列单调性

数列 $a_n = \frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$, 则前 100 项的最大项, 最小项是第几项

解: $a_n = \frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}} = 1 + \frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$

根据函数图像:

当 $n \in [1, 44]$ 时, $\{a_n\}$ 单调递减,

当 $n \in [45, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore (a_n)_{\max} = a_{45}, (a_n)_{\min} = a_{44}$

4.2 分段数列单调性

题目:

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$, 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n) (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 a

的取值范围是()

- A. $[\frac{9}{4}, 3)$
- B. $(\frac{9}{4}, 3)$
- C. $(2, 3)$
- D. $(1, 3)$

解答:

解: 根据题意, $a_n = f(n) = \begin{cases} (3-a)n-3, & n \leq 7 \\ a^{n-6}, & n > 7 \end{cases};$

要使 $\{a_n\}$ 是递增数列, 必有 $\begin{cases} 3-a > 0 \\ a > 1 \\ (3-a) \times 7 - 3 < a^{8-6} \end{cases};$

解可得, $2 < a < 3$;

所以C选项是正确的.

4.3 一般数列单调性

题目:

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$, 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n) (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 a

的取值范围是()

- A. $[\frac{9}{4}, 3)$
- B. $(\frac{9}{4}, 3)$
- C. $(2, 3)$
- D. $(1, 3)$

解答:

解:根据题意, $a_n = f(n) = \begin{cases} (3-a)n-3, n \leq 7 \\ a^{n-6}, n > 7 \end{cases}$;

要使 $\{a_n\}$ 是递增数列,必有 $\begin{cases} 3-a > 0 \\ a > 1 \\ (3-a) \times 7 - 3 < a^{8-6} \end{cases}$;

解可得, $2 < a < 3$;

所以C选项是正确的.