数学笔记

于洋

1 三角函数

1.1 终边一点

角 α 终边上一点 (-4,3):

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{3}{5}$

1.2 平移

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 移动变成 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$:

1) 提括号: $\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ $\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$

2) 相减:$\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{12}$

3) 翻译: $-\frac{\pi}{12}$ 是向右移动 $\frac{\pi}{12}$

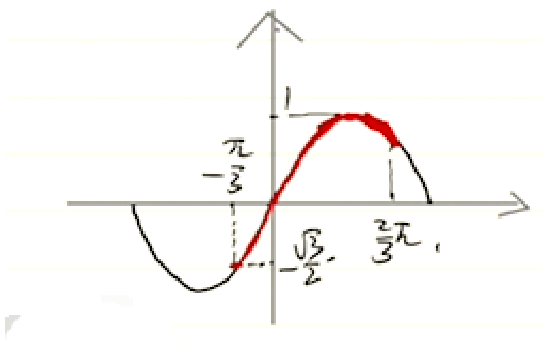
1.3 sin 和 cos 互化

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$ 根据 $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ 根据 $\sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

1.4 区间内最值, 值域

$f(x) = 4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值, 最小值



$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$2x\in[0,\pi]$

$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right]$

如图此区间的最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 最大值 1, 所以

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-2\sqrt{3},4]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\in[-\sqrt{3},4+\sqrt{3}]$

1.5 伸缩变换

$y=\cos x$

横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (x 换成 2x) $\longrightarrow y=\cos 2x$

纵坐标伸长到原来的 2 倍 (A 换成 2A) $\longrightarrow y=2\cos 2x$

向左平移 $\frac{\pi}{4}$ (x 换成 x+4) $\longrightarrow y=2\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

1.6 对称中心, 对称轴, 单调区间

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的减区间

与基础图形对照:

$\sin x$ 减区间	$x\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right]$ $(k\in z)$
$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 减区间	$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right]$ $(k\in z)$

计算出 x 范围. 对称中心, 对称轴, 同样原理, 都是根据基础图形, 替换即可

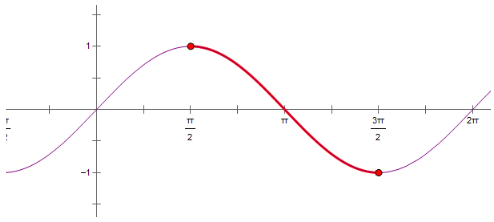


图 1: $\sin x$ 减区间

1.7 sinx 图像翻转

$y = |\sin x|$, $y = \sin|x|$, $y = -\sin x$ 图像

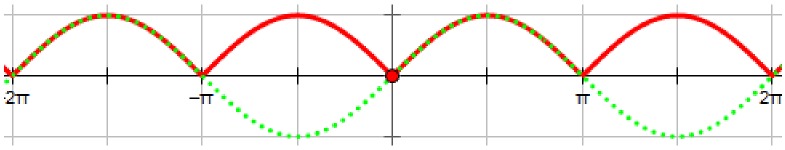


图 2: y=$|\sin x|$ **整体加绝对值：x 轴下方图像翻折到上方．下方图像不保留．**

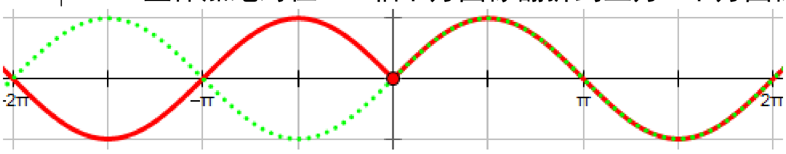


图 3: y=$\sin|x|$ **x 加绝对值：先画出 x 轴正半轴，再沿 y 轴翻折．**

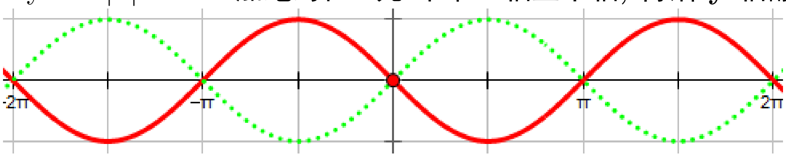


图 4: y=$-\sin x$ **整体加负号：沿 x 轴上下翻折．**

1.8 零点个数

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \sin x$ 零点个数

令 $f(x) = 0$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sin x$

画出等号左右两侧图像, 交点个数就是零点个数 (2 个)

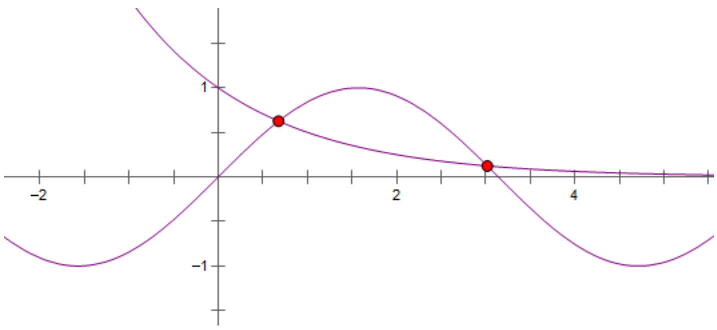


图 5: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \sin x$

2 正余弦

2.1 正弦定理 (多解取舍)

在 ΔABC 中,$b=\sqrt{3}, B=60°, c=1$, 求 C

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \therefore \sin C=\frac{1}{2}, c=30°$ 或 $150°$

角度取舍两种思路:

1) 依据大边对大角: $\because b>c, \therefore B<C \therefore C=30°$

2) 三角形内角和 $180°$: $\because B=60°, \therefore 0°<C<120° \therefore C=30°$

2.2 角化边, 边化角, 角化角

$3a\cos A=c\cos B+b\cos C$, 求 $\cos A$

两种思路都可以:

边 $\rightarrow$ 角

$3\sin A\cos A=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A \therefore \cos A=\frac{1}{3}$

角 $\rightarrow$ 边

$3a\cos A=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \therefore \cos A=\frac{1}{3}$

2.3 三角形形状 (讨论 n 种情况)

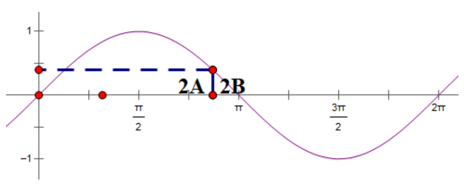


图 6: 2A=2B

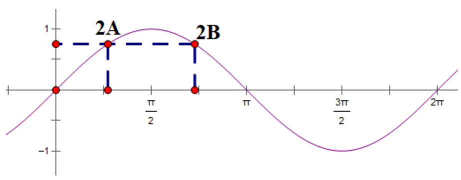


图 7: $2A+2B=\frac{\pi}{2}*2$

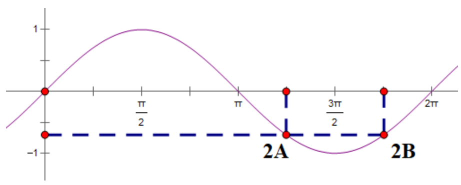


图 8: $2A+2B=\frac{3\pi}{2}*2$

$\sin 2A=\sin 2B$

$\because 0<A<\pi \therefore 0<2A<2\pi$

如图: 三种情况

1) 当 $2A=2B$ 时等腰三角形

2) 当 $2A+2B=\frac{\pi}{2}*2$ 时, 直角三角形

3) 当 $2A+2B=\frac{3\pi}{2}*2$ 时, 不符合三角形

2.4 已知三边判断三角形形状

已知三角形三边为 3,5,7 求三角形是形状 (锐角, 直角, 钝角)

$\because 3^2+5^2<7^2 \therefore$ 钝角

3 向量

3.1 绝对值

绝对值、想平方, 算完之后不要慌.

题目:

已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$（ ）。

A: $\sqrt{2}$

B: 2

C: 1

D: $-\frac{1}{2}$

解答: A

$\because |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 8$

$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 3$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 2$

3.2 夹角锐角钝角

题目:

已知 $\vec{a}=(\lambda,2)$, $\vec{b}=(-3,5)$,且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角,则 λ 的取值范围(　)

解答: $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ 且不共线

解:由题意可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$,且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线,即 $-3\lambda+10>0$,且, $5\lambda\neq 2\times(-3)$,解得 $\lambda<\frac{10}{3}$ 且 $\lambda\neq-\frac{6}{5}$,

所以C选项是正确的

3.3 基础图形 (理)

题目:

3.4 基底建模法 (理)

题目:

如图所示，在△ABC中，点M是BC的中点，点N在AC上，且AN=2NC，AM与BN相交于点P，求AP∶PM的值.

解答:以 $\overrightarrow{BM}$,$\overrightarrow{CN}$ 为基底, 进行计算.

设:$e_1=\overrightarrow{BM}$,　$e_2=\overrightarrow{CN}$, 则

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3e_2-e_1$

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2e_1+e_2$

因为 A,P,M 和 B,P,N 分别共线所以:

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda e_1-3\lambda e_2$

$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu e_1+\mu e_2$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)e_1+(3\lambda+\mu)e_2$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2e_1+3e_2$

$$\begin{cases}\lambda+2\mu=2\\3\lambda+\mu=3\end{cases}\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5}\\\mu=\frac{3}{5}\end{cases}$$

$\therefore AP:PM=4:1$

4 数列

4.1 分式数列单调性

数列 $a_n = \frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$, 则前 100 项的最大项, 最小项是第几项

解:$a_n = \frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}} = 1 + \frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$

根据函数图像:

当 $n \in [1, 44]$ 时,$\{a_n\}$ 单调递减,

当 $n \in [45, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore (a_n)_{\max} = a_{45}, (a_n)_{\min} = a_{44}$

4.2 分段数列单调性

题目:

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, x\leq 7 \\ a^{x-6}, x>7 \end{cases}$,若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n)(n\in N^*)$,且 $\{a_n\}$ 是递增数列,则实数a的取值范围是( )

A. $[\frac{9}{4}, 3)$

B. $(\frac{9}{4}, 3)$

C. $(2, 3)$

D. $(1, 3)$

解答:

解:根据题意, $a_n = f(n) = \begin{cases} (3-a)n-3, n\leq 7 \\ a^{n-6}, n>7 \end{cases}$;

要使 $\{a_n\}$ 是递增数列,必有 $\begin{cases} 3-a>0 \\ a>1 \\ (3-a)\times 7-3 < a^{8-6} \end{cases}$;

解可得, $2<a<3$;

所以C选项是正确的.

4.3 一般数列单调性

题目:

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-3, x\leq 7 \\ a^{x-6}, x>7 \end{cases}$,若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n)(n\in N^*)$,且 $\{a_n\}$ 是递增数列,则实数a的取值范围是( )

A. $[\frac{9}{4}, 3)$

B. $(\frac{9}{4}, 3)$

C. $(2, 3)$

D. $(1, 3)$

解答:

解:根据题意, $a_n = f(n) = \begin{cases} (3-a)n-3, n\leq 7 \\ a^{n-6}, n>7 \end{cases}$;

要使 $\{a_n\}$ 是递增数列,必有 $\begin{cases} 3-a>0 \\ a>1 \\ (3-a)\times 7-3<a^{8-6} \end{cases}$;

解可得, $2<a<3$;

所以C选项是正确的.