目录

数学笔记

于洋

1 三角函数

1.1 基础知识

诱导公式:

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha, k\in\mathbb{Z}$$
$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha, k\in\mathbb{Z}$$
$$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha, k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

两角和差:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

二倍角和降幂:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha=\tfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha=\tfrac{1+\cos 2\alpha}{2},$$
$$\sin^2\alpha=\tfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

辅助角公式: $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi), \tan\varphi=\frac{b}{a}$

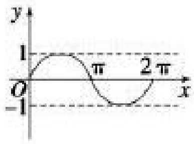
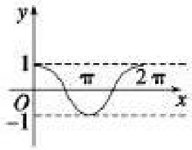
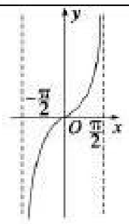
弧长和扇形面积公式: $l=r|\alpha|,\quad S=\frac{1}{2}\,\mathrm{lr}=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

和差化积, 积化和差:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

三角函数性质:

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图像			
定义域	**R**	**R**	$\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$， $k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	**R**
单调性	$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递增； $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递减	$[-\pi+2k\pi,\ 2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递增； $[2k\pi,\ \pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上递减	$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$上递增
最值	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{max}=1$； $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{min}=-1$	$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{max}=1$； $x=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{min}=-1$	
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
对称中心	$(k\pi，0)(k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{\pi}{2}+k\pi，0)\ (k\in\mathbf{Z})$	$(\frac{k\pi}{2}，0)(k\in\mathbf{Z})$
对称轴方程	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$	$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$	
周期	2π	2π	π

1.2 终边一点

角 α 终边上一点 (-4,3):

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{3}{5}$

1.3 平移

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 移动变成 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$:

1) 提括号: $\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$　　$\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$

2) 相减:$\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{12}$

3) 翻译: $-\frac{\pi}{12}$ 是向右移动 $\frac{\pi}{12}$

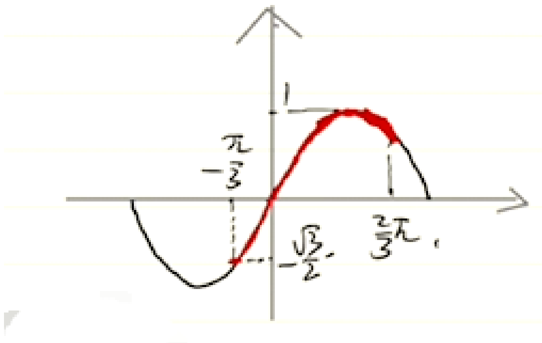
1.4 sin 和 cos 互化

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$　　根据 $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$　　根据 $\sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

1.5 区间内最值, 值域

$f(x) = 4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值, 最小值



$x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$2x \in [0,\pi]$

$2x-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right]$

如图此区间的最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 最大值 1, 所以

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \in [-2\sqrt{3},4]$

$4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3} \in [-\sqrt{3},4+\sqrt{3}]$

1.6 伸缩变换

$y=\cos x$

横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (x 换成 2x) $\longrightarrow y=\cos 2x$

纵坐标伸长到原来的 2 倍 (A 换成 2A) $\longrightarrow y=2\cos 2x$

向左平移 $\frac{\pi}{4}$ (x 换成 $x+\frac{\pi}{4}$) $\longrightarrow y=2\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

1.7 对称中心, 对称轴, 单调区间

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的减区间

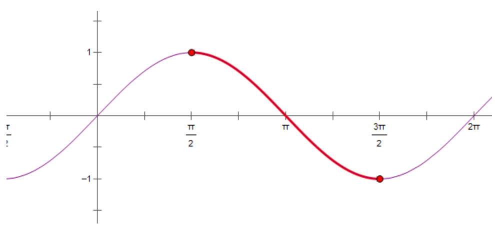


图 1: $\sin x$ 减区间

与基础图形对照:

$\sin x$ 减区间	$x \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right] (k \in z)$
$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 减区间	$2x-\frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right] (k \in z)$

计算出 x 范围即可. 对称中心, 对称轴, 同样原理, 都是根据基础图形, 替换即可

1.8 sinx 图像翻转

$y=|\sin x|$, $y=\sin|x|$, $y=-\sin x$ (绿虚线:$\sin x$ 图像, 红线: 翻转后图像)

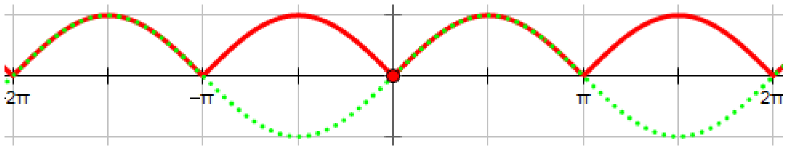


图 2: y=$|\sin x|$ **整体加绝对值: x 轴下方图像翻折到上方. 下方图像不保留.**

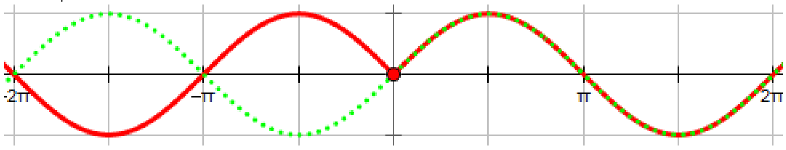


图 3: y=$\sin|x|$ **x 加绝对值: 先画出 x 轴正半轴, 再沿 y 轴翻折.**

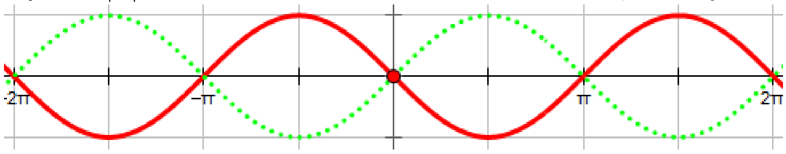


图 4: y=$-\sin x$ **整体加负号: 沿 x 轴上下翻折.**

1.9 零点个数

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 的零点个数

令 $f(x)=0$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\sin x$

画出等号左右两侧图像, 交点个数就是零点个数 (2 个)

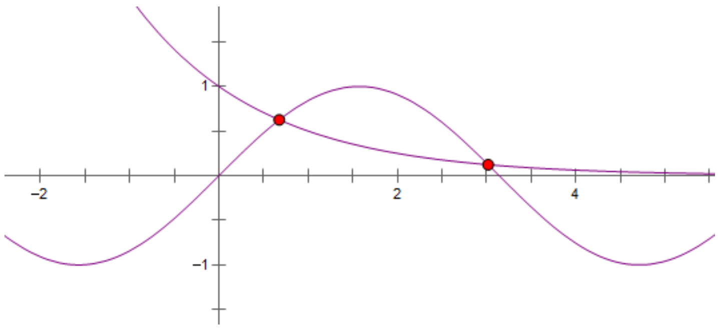


图 5: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x)=\sin x$

2 正余弦

2.1 基础知识

正弦定理:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

余弦定理:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \qquad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

面积公式:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$

$S = \frac{(a+b+c)r}{2} \qquad S = \frac{abc}{4R} \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (p = \frac{1}{2}(a+b+c))$

判断三角形形状: 最短两条边的平方与第三条边平方比较

$a^2 > b^2 + c^2 \quad \Delta ABC$ 为钝角三角形

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Delta ABC$ 为直角三角形

$a^2 < b^2 + c^2 \quad \Delta ABC$ 为锐角三角形

2.2 多解取舍两种思路

在 ΔABC 中,$b = \sqrt{3}, B = 60°, c = 1$, 求 C

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \therefore \sin C = \frac{1}{2} \therefore c = 30°$ 或 $150°$

角度取舍两种思路:

1) 依据大边对大角: $\because b > c, \therefore B > C \therefore C = 30°$

2) 三角形内角和 $180°$: $\because B = 60°, \therefore 0° < C < 120° \therefore C = 30°$

2.3 角化边, 边化角

$3a\cos A = c\cos B + b\cos C$, 求 $\cos A$

两种思路都可以:

边 $\rightarrow$ 角

$3\sin A\cos A = \sin C\cos B + \sin B\cos C = \sin(B+C) = \sin A \therefore \cos A = \frac{1}{3}$

角 $\rightarrow$ 边

$3a\cos A = c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \therefore \cos A = \frac{1}{3}$

2.4 角化角

$\sin B\cdot\sin C = \cos^2\frac{A}{2}$, 三角形形状

解:当出现三个角时, 考虑角化角. 化简成两个角的关系.

先降幂: $\sin B\cdot\sin C = \cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos A+1}{2}$

A 角化成 B+C : $\therefore 2\sin B\cdot\sin C = \cos A + 1 = \cos(B+C) + 1$

化简计算即可:

$\therefore 2\sin B\cdot\sin C = -\cos B\cos C + \sin B\sin C + 1$

$\therefore \cos B \cos C + \sin B \sin C = \cos(B - C) = 1$

$\therefore B - C = 0, B = C$

$\therefore$ 等腰

2.5 三角形形状 (讨论 n 种情况)

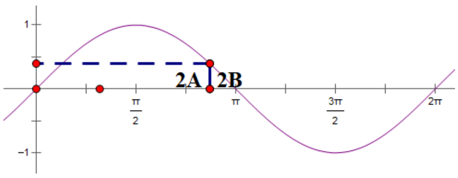


图 6: 2A=2B

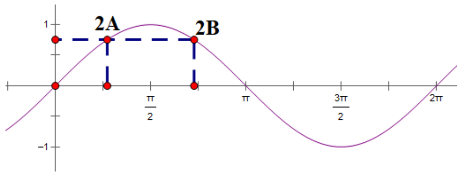


图 7: $2A + 2B = \frac{\pi}{2} * 2$

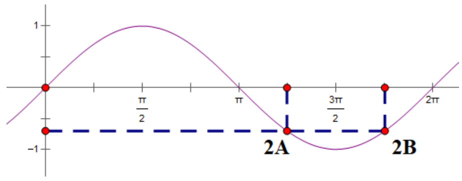


图 8: $2A + 2B = \frac{3\pi}{2} * 2$

$\sin 2A = \sin 2B$

$\because 0 < A < \pi \therefore 0 < 2A < 2\pi$

如图: 三种情况

1) 当 $2A = 2B$ 时等腰三角形

2) 当 $2A + 2B = \frac{\pi}{2} * 2$ 时, 直角三角形

3) 当 $2A + 2B = \frac{3\pi}{2} * 2$ 时, 不符合三角形

2.6 已知三边判断三角形形状

已知三角形三边为 3,5,7 求三角形是形状 (锐角, 直角, 钝角)

$\because 3^2 + 5^2 < 7^2 \therefore$ 钝角

3 向量

3.1 基础知识

	线性运算	坐标运算
加法	三角形法则: 首尾相连首尾连: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 平行四边形法则: 同起点, 对角线	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
减法	三角形法则: 同起点，连终点，指向被减向量:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$	$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$
数乘	$x\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 的方向相同 $(x>0)$ 或者相反 $(x<0)$, 长度为 $\vec{a}$ 的 x 倍	$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$
数量积	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$
模	$\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \qquad (\|\vec{a}\|^2=\vec{a}^2)$	$\|\vec{a}\|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$
夹角	$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$	$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
平行	$\vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$	$x_1y_2=x_2y_1$
垂直	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2=0$
大写坐标	设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ 则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$	

3.2 绝对值

题目:

已知向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$满足$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}$，则$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=$（ ）。

A: $\sqrt{2}$

B: 2

C: 1

D: $-\frac{1}{2}$

解: 绝对值、想平方, 算完之后不要慌. 因为算完后的 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 常常作为一个整体看待!

$\because |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=8$

$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$\therefore$ 选 A

3.3 夹角为锐角, 钝角

题目:

已知 $\overrightarrow{a}=(\lambda,2)$, $\overrightarrow{b}=(-3,5)$,且 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角为锐角,则 λ 的取值范围(　)

解: $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ 且不共线

解:由题意可得 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}>0$,且 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 不共线,即 $-3\lambda+10>0$,且,$5\lambda\neq 2\times(-3)$,解得 $\lambda<\dfrac{10}{3}$ 且 $\lambda\neq-\dfrac{6}{5}$,

所以C选项是正确的

3.4 基础图形 (理)

题目:

如图：已知在△ABC中，D是BC上的一点，且BD＝λDC(λ≠－1)，求证：$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$.

解:

证明：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，∵BD＝λDC(λ≠－1)，∴$\overrightarrow{BD}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，∴$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$.

3.5 基底建模法 (理)

题目:

如图所示，在△ABC中，点M是BC的中点，点N在AC上，且AN=2NC，AM与BN相交于点P，求AP∶PM

的值.

解:以 $\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}$ 为基底, 进行计算.

设:$e_1=\overrightarrow{BM}$, $e_2=\overrightarrow{CN}$, 则

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3e_2-e_1$$
$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2e_1+e_2$$

因为 A,P,M 和 B,P,N 分别共线所以:

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda e_1-3\lambda e_2$$
$$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu e_1+\mu e_2$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)e_1+(3\lambda+\mu)e_2$$
$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2e_1+3e_2$$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = 3 \end{cases} \begin{cases} \lambda = \frac{4}{5} \\ \mu = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$\therefore AP : PM = 4 : 1$

4 数列

4.1 基础知识

	等差数列性质	等比数列性质
1 定义	$a_{n+1}-a_n=d(n\ge 1)$ $a_n-a_{n-1}=d(n\ge 2)$；	$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\ge 1)$ ； $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\ge 2)$
2 通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$ $a_n=a_m+(n-m)d(n,m\in N^*)$	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ $a_n=a_m\cdot q^{n-m}$
3、前 n 项和	$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$ $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$	$q=1$，$S_n=na_1$; $q\ne 1,S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$
4、中项	a、A、b 成等差数列$\Leftrightarrow A=\dfrac{a+b}{2}$； a_n是其前 k 项a_{n-k}与后 k 项a_{n+k}的等差中项，即：$a_n=\dfrac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$	a、A、b 成等比数列$\Leftrightarrow \dfrac{A}{a}=\dfrac{b}{A}$ （不等价于$A^2=ab$，只能$\Rightarrow$）； a_n是其前 k 项a_{n-k}与后 k 项a_{n+k}的等比中项，即：$a_n^2=a_{n-k}\cdot a_{n+k}$
5、下标和公式	若 m+n=p+q, 则$a_m+a_n=a_p+a_q$ 特别地, 若 m+n=2p, 则$a_m+a_n=2a_p$	若 m+n=p+q, 则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ 特别地, 若 m+n=2p, 则$a_m\cdot a_n=a_p^2$
6、首尾项性质	等差数列的第 k 项与倒数第 k 项的和等于首尾两项的和，即： $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_k+a_{n-(k-1)}$	等比数列的第 k 项与倒数第 k 项的积等于首尾两项的积，即： $a_1\cdot a_n=a_2\cdot a_{n-1}=\cdots=a_k\cdot a_{n-(k-1)}$
	{a_n }为等差数列, 若 m, n, p 成等差数列, 则a_m,a_n,a_p成等差数列	{a_n }为等比数列, 若 m, n, p 成等差数列, 则a_m,a_n,a_p成等比数列

7、结论	（两个等差数列的代数和仍是等差数列） 等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公差分别为d,e，则数列$\{a_n+b_n\}$仍为等差数列，公差为$d+e$	(两个等比数列的积或商仍是等比数列） 等比数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公比分别为p,q,则数列$\{a_n\cdot b_n\}$仍为等比数列，公比为pq
	取出等差数列的所有奇（偶）数项，组成的新数列仍为等差数列，且公差为$2d$	取出等比数列的所有奇（偶）数项，组成的新数列仍为等比数列，且公比为q^2
	$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$成等差数列，公差为$m^2d$	$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$成等比数列，公比为$q^m$
	当项数为偶数$2n$时，$S_{\text{偶}}-S_{\text{奇}}=nd$ $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 当项数为奇数$2n-1$时， $S_{2n-1}=(2n-1)a_{\text{中}}$ $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}}=\frac{n}{n-1}$	当项数为偶数$2n$时， $S_{\text{偶}}=qS_{\text{奇}}$ 当项数为奇数$2n-1$时， $S_{\text{奇}}=a_1+qS_{\text{偶}}$
	等差数列判断方法 ①定义法：$a_n-a_{n-1}=d(n\geq 2)$ ②等差中项概念；$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geq 2)$ ③函数法：$a_n=pn+q(p,q\text{为常数})$关于n的一次函数⇔数列$\{a_n\}$是首项为 p+q，公差为 p$(\neq 0)$的等差数列； ④数列$S_n=an^2+bn$的前 n 项和形如$S_n=an^2+bn$（a，b 为常数），那么数列$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$是等差数列，	等比数列判断方法 ①定义法：$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$ ②等比中项概念；$a_na_{n+2}=a_{n+1}^2(a_n\neq 0)$ ③函数法：$a_n=cq^n$（c，q均为不为 0 的常数，$n\in\mathbf{N}_+$），则数列$\{a_n\}$是等比数列. ④数列$S_n=Aq^n-A$的前 n 项和形如$S_n=Aq^n-A$（A，q均为不等于 0 的常数且 q≠1），则数列$\{a_n\}$是公比不为 1 的等比数列.
8、共性	非零常数列既是等差数列又是等比数列	

4.2 单调性

4.2.1 分式数列

数列 $a_n=\frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$, 则前 100 项的最大项, 最小项是第几项

解: 需要会分式函数的化简与图像:

$a_n=\frac{n-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}=1+\frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{n-\sqrt{2017}}$

根据函数图像:

当 $n\in[1,44]$ 时,$\{a_n\}$ 单调递减,

当 $n\in[45,+\infty)$ 单调递增,

$\therefore (a_n)_{\max}=a_{45},(a_n)_{\min}=a_{44}$

4.2.2 分段数列

题目:

已知函数 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-3,x\leq 7\\ a^{x-6},x>7\end{cases}$,若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n)(n\in N^*)$,且 $\{a_n\}$ 是递增数列,则实数a的取值范围是( )

A. $[\frac{9}{4},3)$

B. $(\frac{9}{4},3)$

C. $(2,3)$

D. $(1,3)$

解: 需要会分段函数单调性并注意与之对比:

解:根据题意, $a_n=f(n)=\begin{cases}(3-a)n-3,n\leq 7\\ a^{n-6},n>7\end{cases}$;

要使 $\{a_n\}$ 是递增数列,必有 $\begin{cases}3-a>0\\ a>1\\ (3-a)\times 7-3<a^{8-6}\end{cases}$;

解可得, $2<a<3$;

所以C选项是正确的.

4.2.3 一般数列

题目:

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=(n+1)(\frac{10}{11})^n$, $n\in N^+$

1.求证数列 $\{a_n\}$ 先递增,后递减

2.求数列 $\{a_n\}$ 的最大项

解: 作差法或作商法:

作差法:

(1) $a_n=(n+1)(\frac{10}{11})^n$

$a_{n-1}=n\times(\frac{10}{11})^{n-1}$

$a_n-a_{n-1}=(\frac{10}{11}-\frac{n}{11})\times(\frac{10}{11})^{n-1}=0$

$n=10$ 时，$a_n-a_{n-1}=0$

$n<10$ 时，　$a_n-a_{n-1}>0$,递增;

$n>10$ 时，　$a_n-a_{n-1}<0$,递减;

(2)最大项为 $a_{10}=a_9=11\times(\frac{10}{11})^{10}=10\times(\frac{10}{11})^9$

作商法:

【点拨】 因为 $a_n=(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n$ 是积的形式且 $a_n>0$,所以可用作商法比较 a_n 与 a_{n-1} 的大小.

【证明】 (1)令$\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant1(n\geqslant2)$,即$\frac{(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n}{n\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{n-1}}\geqslant1$.

整理得$\frac{n+1}{n}\geqslant\frac{11}{10}$,解得 $n\leqslant10$. 又 $a_1<a_2$,

∴数列$\{a_n\}$从第 1 项到第 9 项递增,从第 10 项起递减.

【解析】 (2)由(1)知 $a_9=a_{10}=\frac{10^{10}}{11^9}$最大.

4.3　等差最值问题

待补充 1. 什么情况才会有最值?

2. 最值的常见问法?

3. 最值解题思路?

4.4　求通项公式 a_n

4.4.1　已知 S_n 和 n 的关系，求 a_n

根据公式:$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant2)\end{cases}$

$S_n=2n^2+3n+1$, 求 a_n

解:

当 n=1 时,$a_1=S_1=6$

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-1$

(假设上式 n=1, 看是否也等于 6, 如果等于可以合在一块写. 不等于要分段写. 此题不等于.)

假设上式 n=1, 则 $a_1=5\neq S_1$

$\therefore a_n=\begin{cases}6 & n=1\\ 4n+1 & n\geqslant2\end{cases}$

4.4.2 已知 S_n 和 a_n 的关系，求 a_n

4.5 求前 n 项和 S_n

4.5.1 裂项相消法

如何裂项: $a_n = \frac{k}{b_n \cdot c_n} = \frac{k}{c_n - b_n}\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{c_n}\right)$

相消规律: 对称性

最后结果尽量化简成 1 个分式

例题:

求 $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 前 n 项和

$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$

4.5.2 错位相减法

适用于: 等差乘以等比

步骤: 1. 乘公比 2. 错位 3. 相减

例题:

求 $a_n = n \cdot 2^n$ 的前 n 项和

$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$

乘公比 2 并错位写方便计算

$2S_n = \qquad 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$

两式相减

$-S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$

利用等比前 n 项和公式化简

$S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$