南开大学 2020 级文科高等数学统考试卷（A 卷）答案

一、填空题（每小题 3 分，共 36 分）

1. −2

2. 2

3. 3

4. 1

5. 2x+y−2=0

6. $x \sin x + \cos x + C$

7. $5 - \dfrac{1}{e}$

8. 19

9. 2

10. 5

11. 2

12. 2

二、计算题：（每小题 8 分，共 56 分）

1. 解：

$$\lim_{x \to 0}(\frac{1}{x} - \cot x) = \lim_{x \to 0}\frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0}\frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{\cos x - (\cos x - x \sin x)}{2x} = \lim_{x \to 0}\frac{x \sin x}{2x} = 0$$

2.解：

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \sin x = 1 = \lim_{x \to 0^-} x \sin \frac{1}{x} + a = 0 + a$$

$$\therefore a = 1$$

3. 解：

$$x = 2\sec t, dx = 2\sec t \tan t \, dt$$

$$\int \frac{2\sec t \tan t}{4\sec^2 t \cdot 2\tan t} dt = \int \frac{1}{4\sec t} dt = \frac{1}{4}\int \cos t \, dt$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C$$

4. 解：

$$D_f : (-\infty, +\infty)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$$

驻点 x=1，不可导点 x=0

	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,+∞)
f'(x)	+		-	0	+
f(x)	↑		↓		↑

极大值 y(0)=0，极小值 y(1)=-1/2

5. 解：

令 $k = \int_0^a f(x)\, dx$，对 $f(x) = x^2 - \int_0^a f(x)\, dx = x^2 - k$ 两边取定

积分有 $k = \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a (x^2 - k)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - kx\right)\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} - ka$

因此有 $k + ak = \frac{a^3}{3}$，$\int_0^a f(x)\, dx = k = \frac{a^3}{3(1+a)}$

6. (A-I)X = B 运用初等变换

$$(A - I \ B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{因此 } X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. 对系数矩阵做初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

原方程组同解于方程组 $x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_4 = 0, x_3 - x_4 = 0$

令 $x_4 = c$，方程组通解为 $x_1 = -c$，$x_2 = c$，$x_3 = c$，$x_4 = c$。

其中 c 为任意常数。

3. 解答题（每小题 4 分，共 8 分）

1. 解：

由于 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ 且有 $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$，得知 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$。又因 f(x)

在 x=1 处连续，有 $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$。由导数定义，$f'(1) = $

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$

2. 直接计算可得

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A$$

因此 $A^n - 2A^{n-1} = (A^2 - 2A)A^{n-2} = 0$