文科数学« 概率论 »

作业答案解析 (1)

全体同学

3.1 随机事件及其运算

3.1.2 设 $\Omega = \{x|0 \le x \le 2\}, A = \{x|\frac{1}{2} < x \le 1\}, B = \{x|\frac{1}{4} \le x < \frac{3}{2}\}$，用集合表示事件 $\overline{A}B$.

解: 事件 $\overline{A}$ 表示事件 A 的对立 (互补) 事件, 而样本空间为 $\Omega = \{x|0 \le x \le 2\}$, 因此

$$\overline{A} = \{x|0 \le x \le \frac{1}{2}\} \cup \{1 < x \le 2\},$$

又因为 $\overline{A}B$ 表示事件 $\overline{A}$ 和事件 B 同时发生的事件, 所以,

$$\overline{A}B = \{x|\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}\} \cup \{1 < x < \frac{3}{2}\}.$$

3.1.4 一个工人生产了 4 个零件，以事件 A_i 表示生产的第 i 个零件是正品 ($1 \le i \le 4$)，用 A_i 表示下列事件:

(1) ” 没有一个零件是次品”;　 (2) ” 至少有一个零件不是次品”;

(3) ” 仅有一个零件是次品”;　 (4) ” 至少有两个零件不是次品”.

解:(1) 事件” 没有一个零件是次品” 等价于”4 个零件全部是正品”, 即事

件 $A_i,(1\le i\le 4)$ 同时发生, 所以为 $A_1A_2A_3A_4$;

(2) 事件" 至少有一个零件不是次品" 等价于"4 个零件至少一个零件是正品", 即事件 $(1\le i\le 4)$ 至少有一个发生, 所以为 $A_1+A_2+A_3+A_4$;

(3) 事件" 仅有一个零件是次品", 即为:$\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_1A_2A_3\overline{A_4}$;

(4) 事件" 至少有两个零件不是次品" 等价于事件" 至少两个零件是正品", 即为 $A_1A_2+A_1A_3+A_1A_4+A_2A_3+A_2A_4+A_3A_4$.

3.1.5 用 A,B,C,D 是四个事件, 试用这四个事件表示下列事件:

(1) 这四个事件至少发生一个;(2) 这四个事件恰好发生两个;(3)A、B 都发生而 C、D 都不发生;(4) 这四个事件都不发生;(5) 这四个事件至多发生一个.

解: (1) " 这四个事件至少发生一个":$A+B+C+D$;

(2) " 这四个事件恰好发生两个":$AB\overline{C}\ \overline{D}+A\overline{B}C\overline{D}+A\overline{B}\ \overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}\ \overline{B}CD$;

(3) "A、B 都发生而 C、D 都不发生": $AB\overline{C}\ \overline{D}$;

(4) " 这四个事件都不发生":$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}$;

(5) " 这四个事件至多发生一个":$A\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}+\overline{A}\ B\ \overline{C}\ \overline{D}+\overline{A}\ \overline{B}\ C\ \overline{D}+\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ D+\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}$.

3.2 概率的定义

3.2.1 一个宿舍中有 6 名同学，问这 6 名同学生日都不同的概率是多少（设一年 365 天）?

解: 不妨设事件 A 表示“6 名同学生日都不同”, 则任意一个同学的生

日有 365 可能, 而 6 名同学生日共有 365^6 种可能, 因而样本空间 $\Omega = 365^6$.

而事件 6 名同学生日都不同有 A_{365}^6, 因而这 6 名同学生日都不同的概率是

$$P(A) = \frac{A_{365}^6}{365^6}.$$

3.2.2 一套文集包括第一至第 4 卷共 4 本，按任意顺序放到书架上，问各卷自左向右或自右向左恰成 1，2，3，4 的顺序的概率.

解: 设 A 表示事件“各卷自左向右或自右向左恰成 1, 2, 3, 4 的顺序.” 因为摆放要考虑书籍的顺序, 因而总的样本空间个数共有 $4! = 24$ 种排列, 而事件 A 包含 2 个基本事件, 因而所求概率为:

$$P(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

3.2.3 把 10 本书任意地放在书架上，用 A 表示“其中指定的三本书放在一起”，求 P(A).

解: 因为摆放要考虑书籍的顺序, 因而总的样本空间个数共有 10! 种排列. 事件 A 当三本书放在一起时候, 三本书本身还要考虑顺序, 有 3! 种可能, 而剩余的 7 本书和这三本考虑顺序摆放在书架上, 有 8! 种可能. 因而事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{3!8!}{10!} = \frac{1}{15}.$$

3.2.4 设甲袋有 a 只白球，b 黑球；乙袋有 c 只白球，d 黑球；从两袋中各取一球，所得两球颜色不同的概率是多少？解设 A 表示事件“所得两球颜色不同”，总的基本事件个数为 $C_{a+b}^1 C_{c+d}^1$.

事件 A 有两种可能：(1) 从甲袋取出白球乙袋取出黑球, 有 $C_a^1 C_d^1$ 种可

能;(2) 从甲袋取出黑球乙袋取出白球有 $C_b^1C_c^1$. 所以事件 A 的概率为:

$$P(A)=\frac{C_a^1C_d^1+C_b^1C_c^1}{C_{a+b}^1C_{c+d}^1}=\frac{ad+bc}{(a+b)(c+d)}.$$

3.2.5 在房间中有 6 个人，问至少有两个人的生日在同一个月的概率是多少?

解: 设事件 A 表示“至少有两个人的生日在同一个月”, 则 $\overline{A}$ 表示“任两个人生日都不同月”.

任意一个同学的生日月份有 12 种可能, 而 6 名同学生日共有 12^6 种可能, 因而样本空间有 $=12^6$ 可能, 因而 $P(\overline{A})=\frac{A_{12}^6}{12^6}$. 所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{A_{12}^6}{12^6}.$$

3.2.6 设四位数中的 4 个数字都取自 6，7，8，9，求所组成的四位数含有重复数字的概率.

解: 设事件 A 表示“所组成的四位数含有重复数字”, 则 $\overline{A}$ “ ”

基本样本空间个数为 4^4 种, 而事件 $\overline{A}$ 可能性有 4! 种, 因而事件 $\overline{A}$ 概率为:$P(\overline{A})=\frac{4!}{4^4}=\frac{3}{32}$. 所以事件 A 的概率为:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{29}{32}.$$

3.2.7 一批灯泡有 40 只，其中 3 只是坏的，从中任取 5 只检查，问:（1）5 只都是好的概率是多少？(2) 5 只中有两只坏的概率是多少？

解: (1) 设事件 A 表示“5 只灯泡都是好的”.

40 只灯泡任取 5 只共有 C_{40}^5 种方式, 取到的 5 只都是好的有 C_{37}^5 种方

式. 所以事件 A 的概率:

$$P(A)=\frac{C_{37}^5}{C_{40}^5}=0.662.$$

(2) 设事件 B 表示 "5 只灯泡中有两只坏的", 取到的 2 只坏的有 $C_{37}^3C_3^2$ 种, 因而事件 B 的概率为 $P(B)=\frac{C_{37}^3C_3^2}{C_{40}^5}=0.0354.$

3.2.10 设 A B **为两个随机事件** $P(A)=p, P(B)=q, P(A+B)=r$, **求** $P(\overline{A}B)$.

解: 由 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 得到 $P(AB)=p+q-r$,

因为事件 AB 和事件 $\overline{A}B$ 是对立事件, 所以 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$ 因此 $P(\overline{A}B)=r-p$.

3.2.13 设事件 A B **互不相容，已知** $P(A)=p, P(B)=q$.

求（1） $P(A+B)$**；（2）** $P(\overline{A}+B)$;

(3) $P(\overline{A}B)$ **(4)** $P(\overline{AB})$.

解: (1) 因为 AB 互不相容，因此 $P(AB)=0$, 所以 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=p+q$.

(2) $P(\overline{A}+B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=1-p+q-P(\overline{A}B)$ 而有 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$ 得到 $P(\overline{A}B)=q$, 因而 $P(\overline{A}+B)=1-p$.

(3) 有 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$ 得到 $P(\overline{A}B)=q$.

(4) 有 $P(\overline{A})=P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\,\overline{B})$ 可以得到 $P(\overline{A}\,\overline{B})=1-(p+q)$.

3.1.5 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(BC)=0, P(AC)=\frac{3}{16}$**，求事件** A,B,C **全不发生的概率.**

解: 事件 A, B, C 全不发生表示为 $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$. 并且由概率公式可以得到

$$P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}) = 1 - P(A+B+C).$$

又因为

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

由 $ABC \leq AB$ 得到 $P(ABC) \leq P(AB) = 0$, 因此

$$P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}) = 1 - P(A+B+C) = \frac{7}{16}.$$

3.2.19 甲、乙两人约定在 12 点到 13 点会面, 并且说定先到者等 20 分钟，过时就离开. 假设两人在规定时间内到达的时刻是完全随机的, 求两人能会面的概率.

解: 该问题是一个几何概率模型. 设事件 A 表示" 两人能会面", s 示甲到达的时间,t 示乙到达的时间, 则

$$\{s|0 \leq s \leq 60\}, \quad \{t|0 \leq t \leq 60\}, \quad \Omega = \{(s,t)|0 \leq s \leq 60,\ 0 \leq s \leq 60\}.$$

两人会面的条件为 $|s-t| \leq 20$, 它对应的平面面积区域为 2000, 因而

$$P(A) = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}.$$

[注意事项]

(1). 部分同学写成如下形式:

$$①. \overline{A}B=\{x|\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\text{ 或 }1<x<\frac{3}{2}\}.$$

$$②. \overline{A}B=\{x|\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2},\ 1<x<\frac{3}{2}\}.$$

为了更符合数学的书写规范, 希望大家以后使用以下两种形式:

$$1.\ \overline{A}B=\{x|\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\}\cup\{1<x<\frac{3}{2}\}.$$

$$2.\ \overline{A}B=[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]\cup(1<x,\frac{3}{2}).$$

(2). 区分事件 $\overline{A}$ $\overline{B}$和$\overline{AB}$, 他们表示不同的含义, 做题时候仔细区分.

(3). 注意组合数和排列数的使用和符号表示:

① **排列数:**

从 n 个不同元素种取出 $m(m\ n)$ 个元素的所有不同排列的个数，叫做从 n 个不同元素种取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示 (也有用 P_n^m 表示的). **排列数公式:**

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!},\ n,m\in N^*,\ m\le n.$$

规定: 0!=1.

① **组合数:** 组合数公式是指从 n 个不同元素中，任取 $m(m\le n)$ 个元

素并成一组，叫做 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数。用符号 C_n^m 表示.). **组合数公式:**

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

(4). 注意事件的关系和运算以及事件运算的性质, 概率的性质等基础知识的掌握.