文科高等数学

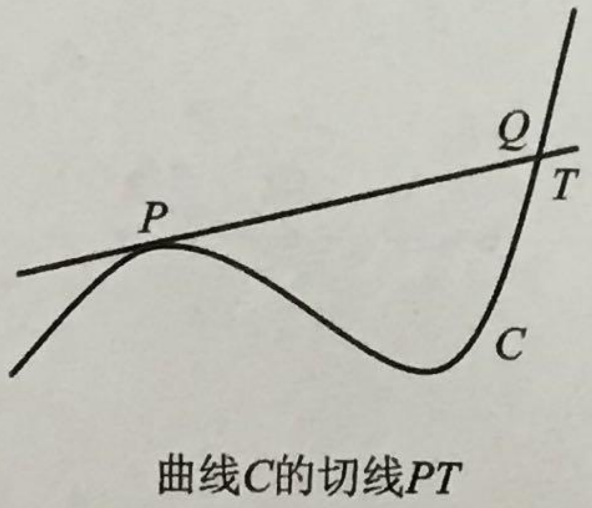
1.3 导数与微分

1.3.1 导数概念

1. 曲线的切线斜率

我们知道,圆的切线定义为与圆相交于唯一点的直线. 但对于一般曲线,切线是不能这样定义的. 例如图 1.28 中曲线在 P 点处的切线,除 P 点外还交曲线于 Q 点.

为确切表达切线的含义,需应用极限的思想. 请看图 1.29.



曲线C的切线PT

图 1.28

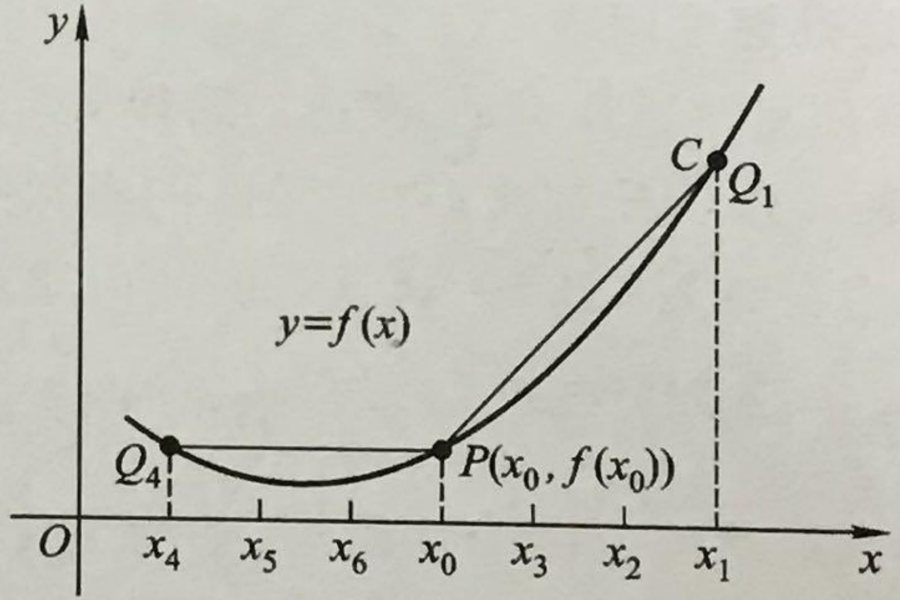


图 1.29

点 $P(x_0, f(x_0)) = P(x_0, y_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上的给定点，点 $Q(x, y) = Q(x, f(x))$ 是曲线上的动点，可在 P 的两侧：在右侧时 $x > x_0$；在左侧时 $x < x_0$. 动直线 PQ 是曲线的割线.

如果动点 Q 无限地逼近定点 P 时，动直线 PQ 有一个极限位置 PT，即 $PT = \lim\limits_{Q \to P} PQ$，则称 PT 为曲线在 P 点的**切线**.

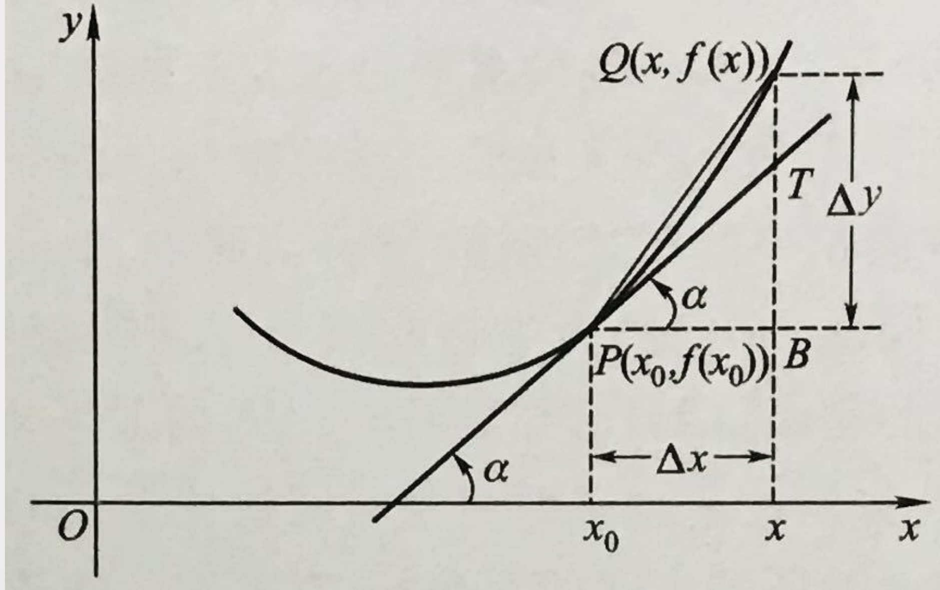


图 1.30

现在割线 PQ 的斜率为$\dfrac{BQ}{PB}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,则切线 PT 的斜率为:

$$k=\lim_{Q\to P}(PQ\text{ 的斜率})=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

由此得切线 PT 的方程是:$y-f(x_0)=k(x-x_0)$.

即要求曲线在任一点的切线转化为求极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

3. 导数的定义

从曲线的切线斜率以及其他有关函数变化速度问题，我们抽象出函数的导数概念.

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域 X 内有定义，$y_0=f(x_0)$. 如果 $x\in X-\{x_0\}$，则称 $\Delta x=x-x_0$（Δ 读作 delta）为**自变量的改变量**，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 为**函数的**（对应）**改变量**，比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 为函数的**平均变化率**. 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **可导**，该极限称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点关于自变量 x 的**导数**，记作 $y'(x_0)=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 因 $\Delta x=x-x_0$，$x=x_0+\Delta x$，故还有

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

此时,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程是

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

注 (1) Δx 可正可负,依 x 大于或小于 x_0 而定.

(2) 从定义可知,若 $y=f(x)$ 在 x_0 可导,必有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,因为否则当 $\Delta x\to 0$ 时,比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不能趋于一个常数.

单选题 1分

设置

设f(x)在x_0点可导， 且$f'(x_o) = 3$，则极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_o - h) - f(x_0)}{h} =$

A –3

B 0

C 3

D 不确定

提交

已知函数f(x)可导，满足f(–x) = –f(x) 且$f'(-x_o)=k$，则$f'(x_0)=$

A –k

B 0

C k

D 不确定

提交

例 1.3.1 求常数函数 $y=c$ 的导数.

解 因 $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=c-c=0$,差商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$,故 $y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$. 此处 x 可为任意实数,即常数函数 $y=c$ 在任意点 x 处的导数为 0.

例 1.3.2 设 n 是正整数,求幂函数 $y=x^n$ 在点 x 处的导数.

解 因

$$y(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n,$$

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n,$$

故

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1}.$$

特别,当 $n=1$ 时,函数 $y=x$ 在任意点 x 处的导数为 1.

例 1.3.3 求曲线 $y=x^3$ 在点 $(2,8)$ 处的切线方程.

解 在上例中取 $n=3$ 可知函数 $y=x^3$ 在点 x 处的导数为 $3x^2$，于是在点 $(2,8)$ 处的切线斜率是：$y'(2)=3\cdot 2^2=12$，故曲线 $y=x^3$ 在 $(2,8)$ 处的切线方程是

$$y-8=12\cdot(x-2)\Leftrightarrow 12x-y-16=0.$$

注 (1) 从上述例子看到,一般情况下,给定函数 $y=f(x)$ 在某个区间 X 内每一点都可导,这样可求出 X 内每一点的导数 $y'(x)$,$x\in X$. 于是 $y'(x)$ 成为 X 内有意义的一个新函数,称它为给定函数 $y=f(x)$ 的**导函数**,且常常省略定义中的字样"在 x 点处关于自变量的",甚至简称 $f(x)$ 的**导数**. 例如我们说常数函数 $y=c$ 的导数是 0, $y=x$ 的导数是 1, $y=x^n$ 的导数是 nx^{n-1} 等等,分别记作 $c'=0$, $x'=1$, $(x^n)'=nx^{n-1}$ 等等.

(2) 关于改变量的记号 Δ,应把它与其后面的变量 x 或 y 看作一个整体,就像 $\sin x$ 中的 sin 一样,绝不能把 Δx 看成 Δ 与 x 的乘积,特别,为避免误解,我们用 $(\Delta x)^2$ 来表示 Δx 的平方而不写 Δx^2.

从导数的定义还可以得出其他一些基本初等函数的导数公式：

例 1.3.4 $y=\sin x$ 的导数是 $(\sin x)'=\cos x$，$y=\cos x$ 的导数是 $(\cos x)'=-\sin x$.

证 $$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\,\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

同理可证，$(\cos x)'=-\sin x$.

例 1.3.5 $y=\log_a x(0<a\neq 1)$的导数是$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

证 $$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\frac{x+\Delta x}{x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

例 1.3.6 指数函数 $y=a^x(0<a\neq 1)$ 的导数是 $(a^x)'=a^x\ln a$.

证 $(a^x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$，令 $t=a^{\Delta x}-1$，则 $\Delta x=\log_a(1+t)$，于是

$$(a^x)'=a^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=a^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{\ln(1+t)}{\ln a}}=a^x\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=a^x\ln a\cdot\frac{1}{\ln e}=a^x\ln a.$$

特别，$(e^x)'=e^x$.

注 上面两例的推导过程中使用了重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

单选题 1分

设置

已知曲线$y = x^2 + x - 2$ 在M点处切线的斜率为3，则M点坐标为

A (1, 0)

B (1, 1)

C (0，–2)

D (2, 4)

提交

1.（1）若已知 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，能否得到极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$

存在的结论？

（2）若已知极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在，能否得出 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处

可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 的结论？

上述两个问题，如结论是肯定的，请给出证明，如结论是否定的，请详细说明

解 （1）肯定。证明如下

$$\lim_{\Delta x->0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\Delta x->0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f'(x_0)+f'(x_0)]=f'(x_0).$$

（2）否定。

因为 $f(x)$ 在 x_0 点不一定连续，不连续必不可导。

例如 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ 在 $x_0=0$ 处不连续，必不可导，

但极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在。

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，求 $f'(1)$.

解：　$\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，极限存在

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

又已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

故 $f(1)=0$

再次利用已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ 及导数定义可知：

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$$

$\therefore \quad f'(1)=2$.

设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{2x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$，且 $f(x),\varphi(x)$ 都在 $x=0$ 点连续，

（1） 求 $\varphi(0)$，　（2） $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 点是否可导？为什么？

解:（1）由 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)}{2x}=2$,

又因 $\lim\limits_{x\to 0}2x=0$，且 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 点连续

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=0=\phi(0)$.

（2）由导数定义，$\phi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)-\phi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)}{2x}=4$,

即 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且 $\varphi'(0)=4$。

1.3.2 微分概念

设函数$y = f(x)$在$x = x_0$处可导

- 记自变量改变量为Δx
- 记函数改变量为$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- 则$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- 微分$dy = f'(x_0)\Delta x$可以用来逼近Δy
- 特别的，对于函数$y = x$, 有$dx = dy = \Delta x$，由此得$dx = \Delta x$

设函数$y=f(x)$在$x=x_0$处可导

- 微分公式一般写为$dy=f'(x_0)dx$
- 记号上，有$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=y'=f'$
- 由$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$极限存在可知，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，其中$x=x_0+\Delta x$ 因此$y=f(x)$在$x=x_0$处可导说明$y=f(x)$在$x=x_0$处连续。
- 计算函数值的近似公式为$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$


可倒一定连续
连续不一定可倒

1.3.3 导数与微分的计算

1. 导数与微分的四则运算

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 为可导函数, c 是常数, 则有

公式 1 $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$.

证
$$[u(x)+v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$=u'(x)+v'(x).$$

又 $\mathrm{d}(u+v)=(u+v)'\mathrm{d}x=u'\mathrm{d}x+v'\mathrm{d}x=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$.

对于减法, 可同样证明.

公式 2 $(uv)'=u'v+uv'$，$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$.

证 $[u(x)v(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)]-[u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)]+[u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$（注意 $v(x)$ 的可导性蕴含了 $v(x)$ 的连续性）.

$\mathrm{d}(uv)=(uv)'\mathrm{d}x=(u'v+uv')\mathrm{d}x=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$.

公式 3 $(cu)'=cu'$，$\mathrm{d}(cu)=c\mathrm{d}u$.

证 $(cu)'=c'u+cu'=0+cu'=cu'$. $\mathrm{d}(cu)=(cu)'\mathrm{d}x=cu'\mathrm{d}x=c\mathrm{d}u$.

公式 4 $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$，$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2}\,(v\neq 0)$.

证 $$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)]-[u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)]}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)}{\Delta x}-\frac{u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[v(x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right]-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)}=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'\mathrm{d}x=\frac{vu'-uv'}{v^2}\mathrm{d}x=\frac{vu'\mathrm{d}x-uv'\mathrm{d}x}{v^2}=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

例 1.3.7 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

同理可得$(\cot x)'=-\csc^2 x$.

例 1.3.8 求 $y=\sec x$ 的导数.

解 $(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=\dfrac{1'\cdot\cos x-1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{0+\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$

同理可得 $(\csc x)'=-\csc x\cot x.$

例 1.3.9 求 $y=(1+4x)(2x^2-3x^3)$ 的导数.

解一 $y'=(1+4x)'(2x^2-3x^3)+(1+4x)(2x^2-3x^3)'$

$=4(2x^2-3x^3)+(1+4x)(2\cdot 2x-3\cdot 3x^2)$

$=8x^2-12x^3+4x-9x^2+16x^2-36x^3=4x+15x^2-48x^3$

解二 因 $y=2x^2+5x^3-12x^4$，故

$$y'=2\cdot 2x+5\cdot 3x^2-12\cdot 4x^3=4x+15x^2-48x^3.$$

例 1.3.10 求函数 $y=(x+\sin x)\ln x$ 的微分.

解
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= \ln x\, \mathrm{d}(x+\sin x)+(x+\sin x)\mathrm{d}\ln x \\
&= \ln x(\mathrm{d}x+\mathrm{d}\sin x)+(x+\sin x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \ln x\cdot(\mathrm{d}x+\cos x\,\mathrm{d}x)+\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\ln x+\cos x\ln x+1+\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

单选题 1分

设置

曲线 $y=1/x$ 在点（1/2， 2）处的切线方程为

A $y=4x$

B $y=-4x+4$

C $y=1/x$

D $y=-4x$

提交