

# 文科高等数学

## 1.5 不定积分

### 1.5.1 原函数与不定积分概念

$$\sin x \xrightarrow{\text{求导}} (\sin x)' = \cos x$$

或

$$\sin x \xrightarrow{\text{微分}} d \sin x = \cos x \, dx;$$

反过来,

$$\cos x \xrightarrow{\text{求导逆运算}} \sin x$$

或

$$\cos x \, dx \xrightarrow{\text{微分逆运算}} d \sin x.$$

这个  $\sin x$  就称为  $\cos x$  的原函数, 意思就是“原来的那个函数”, 其导数是  $\cos x$ , 换句话说, 求原函数的问题即下述形式的“填空题”:

$$(\quad)' = \cos x.$$

但你马上会注意到, 这里填空的答案却有无穷多个:  $\sin x + C$ ,  $C$  是任意实数. 事实上,

$$(\sin x + C)' = \cos x.$$

**定义** 设  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有定义, 若有函数  $F(x)$  使得

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$$

则  $F(x)$  称为  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的一个原函数.

关于给定函数  $f(x)$  的原函数, 需要解决三个问题:

- (1)  $f(x)$  在什么条件下有原函数, 即存在性问题;
- (2) 如果  $f(x)$  有原函数, 有多少个, 即唯一性问题;
- (3) 如何求出  $f(x)$  的全部原函数.

其中第一个问题留在下一节解决; 对于第二个问题, 因为若  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $F(x) + C$  都是  $f(x)$  的原函数,  $C$  可以是任意实常数, 因此原函数有无穷多个(只要有的话); 第三个问题, 设  $F(x), G(x)$  都是  $f(x)$  的原函数, 即  $F'(x) = f(x), G'(x) = f(x)$ , 则  $(F(x) - G(x))' = 0$ ,  $F(x) - G(x) \equiv C$ ,  $F(x) = G(x) + C$ , 显然  $f(x)$  的原函数之间至多相差一个常数, 要求  $f(x)$  的全部原函数只需要求出一个原函数  $F(x)$ , 则  $F(x) + C$  即为全部原函数.

**定义** 若  $f(x)$  有原函数, 则它的全部原函数  $\{F(x) | F'(x) = f(x)\}$  称为  $f(x)$  的不定积分, 记作

$$\int f(x) dx = \{F(x) | F'(x) = f(x)\},$$

其中,  $\int$  称为积分号,  $f(x)$  称为被积函数,  $x$  称为积分变量,  $f(x)dx$  称为被积表达式.

我们常用  $\int f(x)dx = F(x) + C$ ,  $C$  是任意实常数, 来代替  $\{F(x) | F'(x) = f(x)\}$ , 且称  $C$  为积分常数. 求给定函数的不定积分的运算称为积分法(简称积分).

例 1.5.1  $\int \cos x dx = \sin x + C.$

注 “ $C$  是任意实常数”这句话常省略, 并且在一些数学手册或计算机的高级语言中, 连  $C$  都不写, 但读者今后做不定积分的题时, 千万不要忘记写这个常数  $C$ .

$$\int f(x)dx = F(x)$$

+ C

例 1.5.2  $\int \sin x \, dx = ?$

解 因  $(\cos x)' = -\sin x \Leftrightarrow (-\cos x)' = \sin x$ , 故  $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ .

由不定积分的定义可知  $\int f(x) \, dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ . 因此, 要验证一个不定积分  $\int f(x) \, dx = F(x) + C$  是否正确, 只要计算导数, 看  $F'(x) = f(x)$  是否成立.

例 1.5.3  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ . 这是因为  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

但  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , 因而我们又有

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$$

此例表明, 不定积分的答案形式往往不止一个. 其实, 原因就在于那个常数  $C$ . 此例中, 由于  $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$  是个常数,  $\arcsin x + C$  与  $-\arccos x + C_1$  事实上都是原函数, 其中  $C_1 = C + \pi/2$ .

设  $\int f(x) dx = x^2 + c$ , 则  $\int \frac{f(x^2)}{x} dx =$

A

$$x^1 + c$$

B

$$x^2 + c$$

C

$$x^3 + c$$

D

$$x^4 + c$$

提交

设 $f(x)$ 连续,  $F'(x) = f(x)$ , 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 必为奇函数。这种说法:

- A 正确
- B 错误

提交

设 $f(x)$ 连续,  $F'(x) = f(x)$ , 若 $f(x)$ 为单调增函数, 则 $F(x)$ 必为单调增函数。这种说法:

- A 正确
- B 错误

提交

## 1.5.2 基本积分公式表

根据基本初等函数的微分公式与不定积分的定义,我们可得到下面的基本积分公式表:

$$(1) \int 0 dx = C;$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$(3) \int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + C \quad (m \neq -1, x > 0);$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(8) \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(9) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$(12) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$(13) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

注 (1)  $\int \frac{1}{x} dx$  不是  $\int x^m dx$  在  $m = -1$  的特例.

(2)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ,  $\ln$  后面真数  $x$  要加绝对值, 原因是  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ . 事

实上, 对  $x > 0$ ,  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ ; 若  $x < 0$ , 则

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

(3) 要特别注意  $\int x^m dx$  与  $\int a^x dx$  的区别: 前者是幂函数的积分, 后者是指数函数的积分.

### 1.5.3 不定积分的线性运算

$$(1) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx ;$$

$$(2) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx , k \text{ 是非零常数.}$$

例 1.5.4 求  $\int (1 + \sqrt{x})^3 dx$ .

解 原式 =  $\int (1 + 3\sqrt{x} + 3x + \sqrt{x^3}) dx$   
=  $\int dx + 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 3 \int x dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx$   
=  $x + 3 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$   
=  $x + 2x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C.$

注 (1)  $\int dx$  与  $\int 1 dx$  是相同的, 其中 1 可省略.

(2) 此例中化为 4 个积分, 应出现 4 个任意积分常数, 它们的任意性使其可合并成一个任意常数  $C$ , 因此在最后写出一个  $C$  即可.

例 1.5.5 求  $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$ .

解 原式 =  $\int \left( \frac{x^4 - 1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$   
=  $\int \left( x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2}$   
 $= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$

例 1.5.6 求  $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$

解 原式 =  $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx .$   
 $= \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx = -\cot x - \tan x + C .$

例 1.5.7 求  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ .

解 原式 =  $\int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x + C$ .

## 1.5.4 换元法

## 1. 不定积分的第一换元法——凑微分

先看一个例子：

例 1.5.8 求  $\int \frac{x dx}{1 + x^2}$ .

解 因  $(1 + x^2)' = 2x$ , 与被积函数的分子只差常数倍数 2, 如果将分子补成  $2x$ , 即可将原式变形:

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} \quad (\text{令 } u = 1 + x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + C. \quad (\text{代回 } u = 1 + x^2)$$

例 1.5.9 求  $\int (ax + b)^m dx$ , ( $m \neq -1, a \neq 0$ ).

解 原式  $= \frac{1}{a} \int (ax + b)^m d(ax + b)$  (凑微分  $d(ax + b)$ )

$$= \frac{1}{a} \int u^m du$$
 (换元  $u = ax + b$ )

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$
 (积分)

$$= \frac{1}{a(m+1)} (ax + b)^{m+1} + C.$$
 (代回  $u = ax + b$ )

**例 1.5.10** 求  $\int x^2 e^{-x^3} dx$ .

解 原式 =  $-\frac{1}{3} \int e^{-x^3} d(-x^3)$  (凑微分  $d(-x^3) = -3x^2 dx$ )

$$= -\frac{1}{3} \int e^u du = -\frac{1}{3} e^u + C = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C. \quad (\text{换元 } u = -x^3)$$

注 在熟练掌握凑微分法之后, 中间换元  $u = \varphi(x)$  可省略不写, 显得计算过程更简练, 但要做到心中有数.

$$\int \sqrt{2x+1} dx =$$

A

$$\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$$

B

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

C

$$\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

D

$$\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

提交

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx =$$

A

$$\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| + c$$

B

$$x^2 - x + \ln|1+x| + c$$

C

$$\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|1+x| + c$$

D

$$x^2 - x\ln|1+x| + c$$

提交

求不定积分  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$

求不定积分  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$ .

解:  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} d\ln x$

做变换  $u = \ln x$ ,

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} d\ln x &= \int \frac{u}{\sqrt{1+u}} du \\&= \int \frac{u+1}{\sqrt{u+1}} d(u+1) - \int \frac{1}{\sqrt{u+1}} d(u+1) \\&= \frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{u+1} + C \\&= \frac{2}{3}(\ln x + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{\ln x + 1} + C.\end{aligned}$$

## 2. 不定积分的第二换元法

凑微分法是不定积分换元法的第一种形式,另一种是下面的第二换元法.

第一换元法公式的核心是  $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du$ . 从公式的左边演算到右边,就是凑微分换元:  $u = \varphi(x)$ . 如果我们从公式的右边演算到左边,就成为换元的另一种形式,称为第二换元法.

第二换元法常用于被积函数含有根式的情况.

例 1.5.17 求  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ .

解 令  $\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2$  (此处  $\varphi(t) = t^2$ ). 于是

$$\text{原式} = \int \frac{2t dt}{1 + t} = 2 \int \frac{t + 1 - 1}{1 + t} dt$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= 2 \int dt - 2 \int \frac{d(1+t)}{1+t}$$

$$= 2t - 2 \ln|1+t| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C.$$

(代回  $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ )

注 上面的换元  $\sqrt{x} = t$  的目的在于将被积函数中的无理式转换成有理式, 然后积分.

第二换元法除处理形似上例这种根式 $\sqrt{x}$ 以外,还常处理含有根式 $\sqrt{x^2 - a^2}$ ,

$\sqrt{x^2 + a^2}$ ,  $\sqrt{a^2 - x^2}$  ( $a > 0$ ) 的被积函数的积分.

被积函数含根式	换元方法	运用的三角公式	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \tan t$	$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$	$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$1 - \sin^2 t = \cos^2 t$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$

例 1.5.18 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} (a > 0).$

解 令  $x = a \sec t$ , 则  $dx = a \sec t \tan t dt$ , 于是

$$\text{原式} = \int \frac{a \sec t \tan t dt}{a \tan t} = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C_1.$$

到此需将  $t$  代回原积分变量  $x$ , 用到反函数  $t = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}$ , 但这种做法较繁. 下

面介绍一种直观的便于实施的图解法(图 1.49):

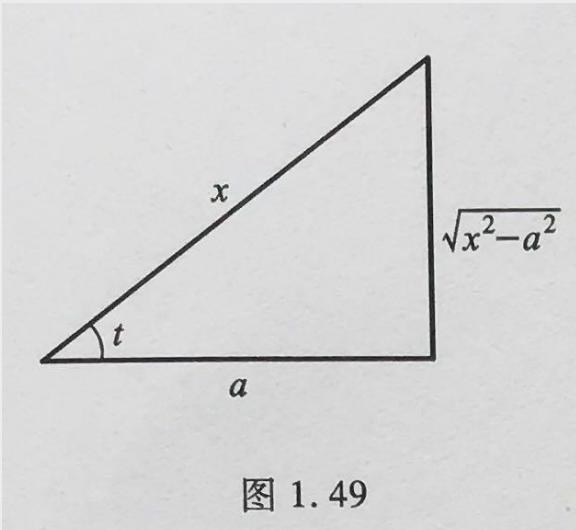


图 1.49

作直角三角形, 其一锐角为  $t$  及三边  $a, x, \sqrt{x^2 - a^2}$  满足:  $\sec t = \frac{x}{a}$ . 由此,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \ln |\sec t + \tan t| + C_1 \\
 &= \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C_1 = \ln \frac{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}{a} + C_1 \\
 &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + (C_1 - \ln a) \stackrel{C = C_1 - \ln a}{=} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.
 \end{aligned}$$

注  $C_1$  是任意常数,  $-\ln a$  是常数, 由此  $C = C_1 - \ln a$  仍是任意常数.

例 1.5.19 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$  ( $a > 0$ ).

解 令  $x = a \tan t$ , 则  $dx = a \sec^2 t dt$ , 于是

$$\text{原式} = \int \frac{a \sec^2 t dt}{a \sec t} = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C_1.$$

图解(图 1.50)换元得:

$$\text{原式} = \ln |\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C_1 = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C_1 - \ln a$$

$$\underline{C = C_1 - \ln a} \quad \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

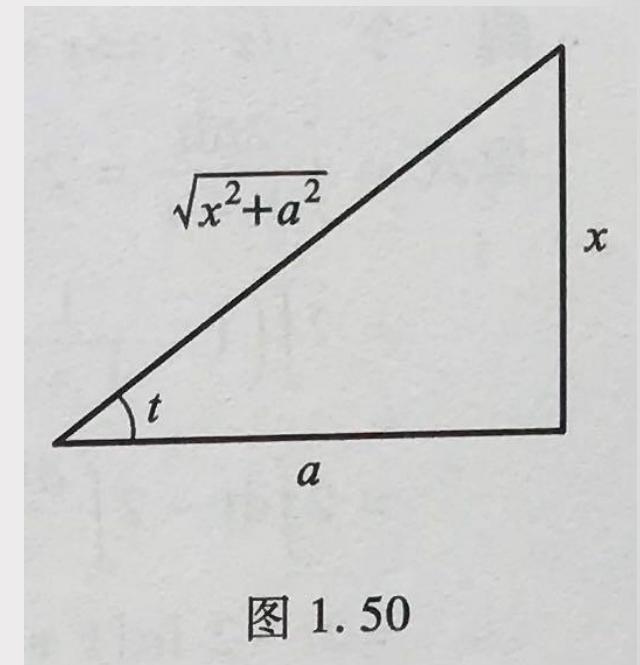


图 1.50

## 1.5.5 分部积分法

从微分公式  $d(uv) = vdu + udv$  两边积分, 即  $\int d(uv) = \int vdu + \int udv$ . 由此导出不定积分的分部积分公式:  $\int u dv = uv - \int v du$  或  $\int uv' dx = uv - \int u' v dx$ .

下面通过例子说明公式的用法.

**例 1.5.21** 求  $\int x^2 \ln x dx$ .

解  $\int x^2 \ln x dx \xrightarrow{\text{凑微分}} \int \ln x d\left(\frac{1}{3}x^3\right)$

用公式:  $u = \ln x, v = \frac{1}{3}x^3$   $\xrightarrow{\quad}$   $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 d \ln x$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \quad (\text{将微分 } d \ln x \text{ 算出})$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

例 1.5.22 求  $\int x^2 \sin x \, dx$ .

解 原式 =  $\int x^2 d(-\cos x)$  (凑微分)

$$= -x^2 \cos x - \int (-\cos x) d(x^2)$$
 (用分部积分公式)
$$= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \, d \sin x$$
 (第二次凑微分)
$$= -x^2 \cos x + 2[x \sin x - \int \sin x \, dx]$$
 (第二次用分部积分公式)
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

例 1.5.23 求  $\int e^x \sin x \, dx$ .

解 
$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= \int \sin x \, d e^x && (\text{凑微分}) \\ &= e^x \sin x - \int e^x \, d \sin x && (\text{用分部积分公式}) \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx && (\text{算出微分}) \\ &= e^x \sin x - \int \cos x \, d e^x && (\text{第二次凑微分}) \\ &= e^x \sin x - \left[ e^x \cos x - \int e^x \, d \cos x \right] && (\text{第二次用分部积分公式}) \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx. && (\text{第二次算出微分}) \end{aligned}$$

由此得：

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) + C_1,$$

因此  $\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$

例 1.5.24 求  $\int \arctan x dx$ .

解 此题被积函数可看作  $x^0 \arctan x, x^0 dx = dx$ , 即适合分部积分公式中  $u = \arctan x, v = x$ , 故

$$\text{原式} = x \arctan x - \int x d(\arctan x) \quad (\text{用分部积分公式})$$

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \quad (\text{算出微分})$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \quad (\text{凑微分})$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

小结：

(1) 分部积分公式常用于被积函数是两种不同类型初等函数之积的情形，例如

$x^3 \arctan x, x^3 \ln x$  幂函数与反正切或对数函数

$x^2 \sin x, x^2 \cos x$  幂函数与正弦,余弦

$x^2 e^x$  幂函数与指数函数

$e^x \sin x, e^x \cos x$  指数函数与正弦,余弦

(2) 在用分部积分法计算时,将哪类函数凑成微分  $dv$ ,一般应选择容易凑的那个. 例如

被积函数

凑微分  $dv$

$x^3 \arctan x, x^3 \ln x$   $\arctan x \, d\left(\frac{1}{4}x^4\right), \ln x \, d\left(\frac{1}{4}x^4\right)$

$x^2 \sin x, x^2 \cos x, x^2 e^x$   $x^2 d(-\cos x), x^2 d \sin x, x^2 d e^x$

$e^x \sin x, e^x \cos x$   $\sin x \, d e^x, \cos x \, d e^x$

下面列出本节已得到的基本积分公式.

$$(1) \int 0 \, dx = C;$$

$$(2) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C;$$

$$(3) \int x^m \, dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + C \quad (m \neq -1, x > 0);$$

$$(4) \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(5) \int e^x \, dx = e^x + C;$$

$$(6) \int \cos x \, dx = \sin x + C;$$

$$(7) \int \sin x \, dx = -\cos x + C;$$

$$(8) \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C;$$

$$(9) \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C;$$

$$(10) \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C;$$

$$(11) \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C;$$

$$(12) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$(13) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C;$$

$$(14) \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$(15) \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$(16) \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$(17) \int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a > 0);$$

$$(18) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$(19) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$(20) \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C;$$

$$(21) \int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

$$\int 5^x e^x dx =$$

A

$$5^x e^x + c$$

B

$$\frac{1}{\ln 5} 5^x e^x + c$$

C

$$\frac{5^x e^x}{1 + \ln 5} + c$$

D

$$(1 + \ln 5) 5^x e^x + c$$

提交

设 $f(x)$ 的一个原函数是 $(\ln x)^2$ , ( $x > 0$ ), 则 $\int xf'(x)dx =$

A  $2 \ln(x) + C$

B  $\frac{2 \ln x}{x}$

C  $(\ln x)^2 + C$

D  $2 \ln(x) - (\ln x)^2 + C$

提交

$$(1) \int \ln(1 + x^2) dx$$

$$(1) \quad \int \ln(1+x^2) dx$$

$$= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C ;$$

设  $f(x)$  有一个原函数  $\frac{\sin x}{x}$ , 求  $\int xf'(x)dx$

设  $f(x)$  有一个原函数  $\frac{\sin x}{x}$ , 求  $\int xf'(x)dx$

解:  $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = \cos x - \frac{2}{x} \sin x + C$$



你不定积分没加C