文科高等数学

1.2 极限

几个故事

以子之矛攻子之盾

禁忌的无理数

龟兔赛跑

兔子追不上乌龟

1.2.2 极限概念

定义 给定数列$\{x_n\}$,若项数n无限增大时(记作$n\to\infty$),通项x_n无限地接近常数A,则称A为数列$\{x_n\}$的**极限**,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,同时说数列$\{x_n\}$**收敛**到$A$.否则称数列$\{x_n\}$**发散**.

注 “$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$”读作“$n$趋于无穷大时$x_n$的极限是$A$”,也简化读作“limit x_n等于A”.

例 1.2.3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}$.

解 因$\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1+\dfrac{(-1)^n}{n}$,其中$\dfrac{(-1)^n}{n}$随$n$无限增大时无限地逼近0,故$1+\dfrac{(-1)^n}{n}$无限地逼近1.因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1$.

有了数列的极限,但是微积分的主要研究对象是函数,数列是自变量取正整数值的特殊函数,不仅要研究数列的变化趋势,更需要研究一般函数在自变量向某个方向变化时函数(因变量)值是如何变化的. 实际上,函数极限是微积分学的最基本工具,它贯穿微积分学的始终. 我们先看两个例子.

例 1.2.6 当 $|x|$ 无限地逼近于 0 时,看函数 $f(x)=x\sin x$ 是如何变化的?

解 我们从图 1.16 看到,x 在 0 的两侧无限地逼近于 0 时,函数值(图像上的点的纵坐标)$x\sin x$ 无限地逼近 0.

这种情况记作 $x\sin x\to 0\ (x\to 0)$ 或 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin x=0$.

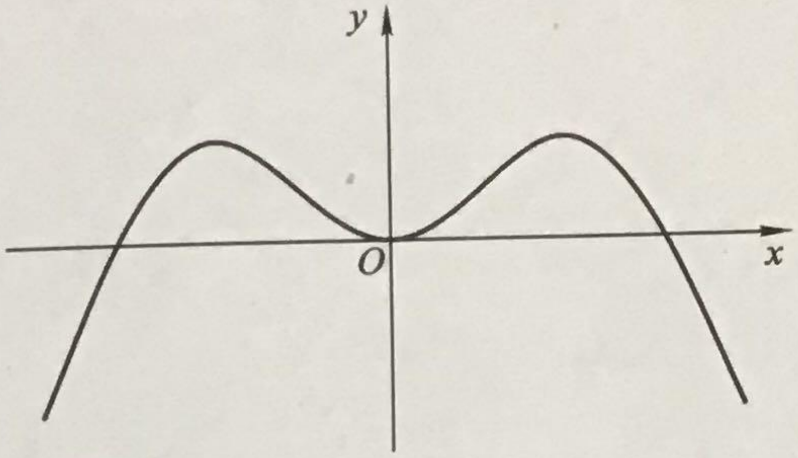


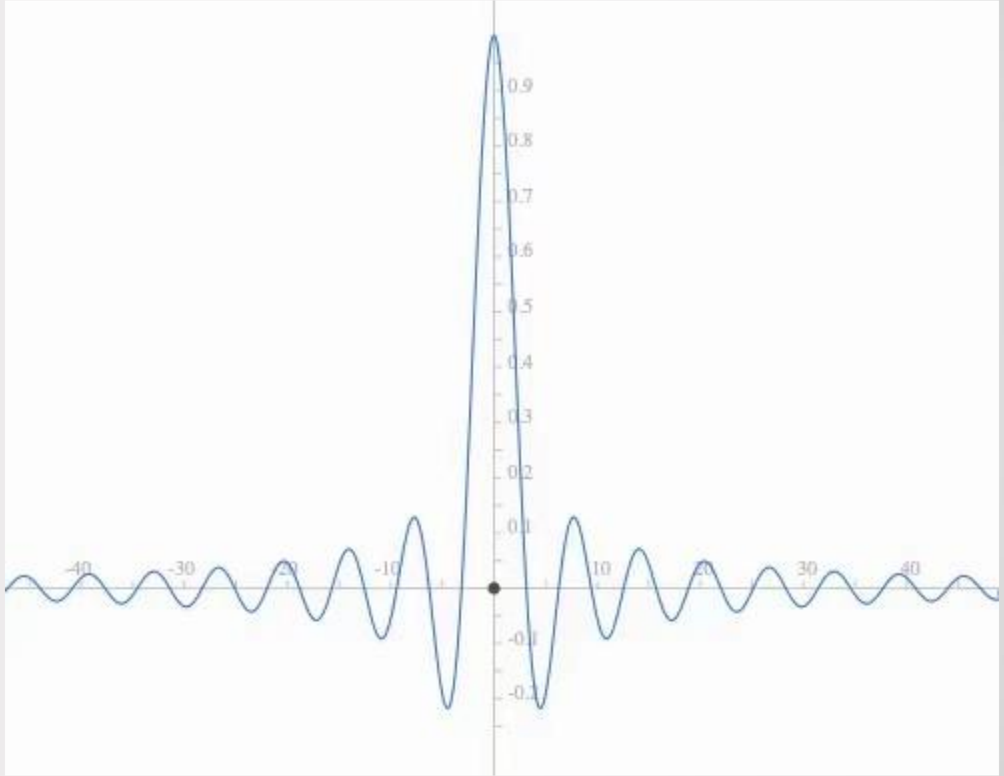
图 1.16

例 1.2.7 当 x 无限增大时，看函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 是如何变化的？

解 我们从图 1.17 看到，x 无限增大时，函数值 $\dfrac{\sin x}{x}$ 无限地逼近 0.

这种情况记作 $\dfrac{\sin x}{x}\to 0\,(x\to+\infty)$

或 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$



仔细观察上述两个例子后，就能理解函数极限的下述直观描述.

函数极限的定义 设 $y=f(x)$ 是给定函数，如果自变量 x 在定义域内按照某种趋势（记作 $x\to\square$）变化时，函数值 $f(x)$ 相应的变化而无限地逼近常数 A，则称 A 为函数在该变化过程中的**极限**，或说 y **收敛**到 A（简称 y **有极限**或 y **收敛**），记作 $\lim\limits_{x\to\square}y=A$，读作 x 趋于□时函数 y 的极限是 A.

这里 $x\to\square$ 表明 x 的变化趋势,有六种不同情况:

1) $x\to a$:x 无限地逼近于 a,读作 x 趋于 a. 比如,例 1.2.6 的 $x\to 0$.

注 x 可大于 a 也可小于 a,即从 a 的左右两侧无限地逼近 a,但 x 能否等于 a 不必计较.

2) $x\to+\infty$:x 的值无限地增大,读作 x 趋于正无穷大. 比如,例 1.2.7 的 $x\to+\infty$.

3）$x \to -\infty$：x 的值无限地减小，读作 x 趋于负无穷大.

例 1.2.8 $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$（图 1.18）

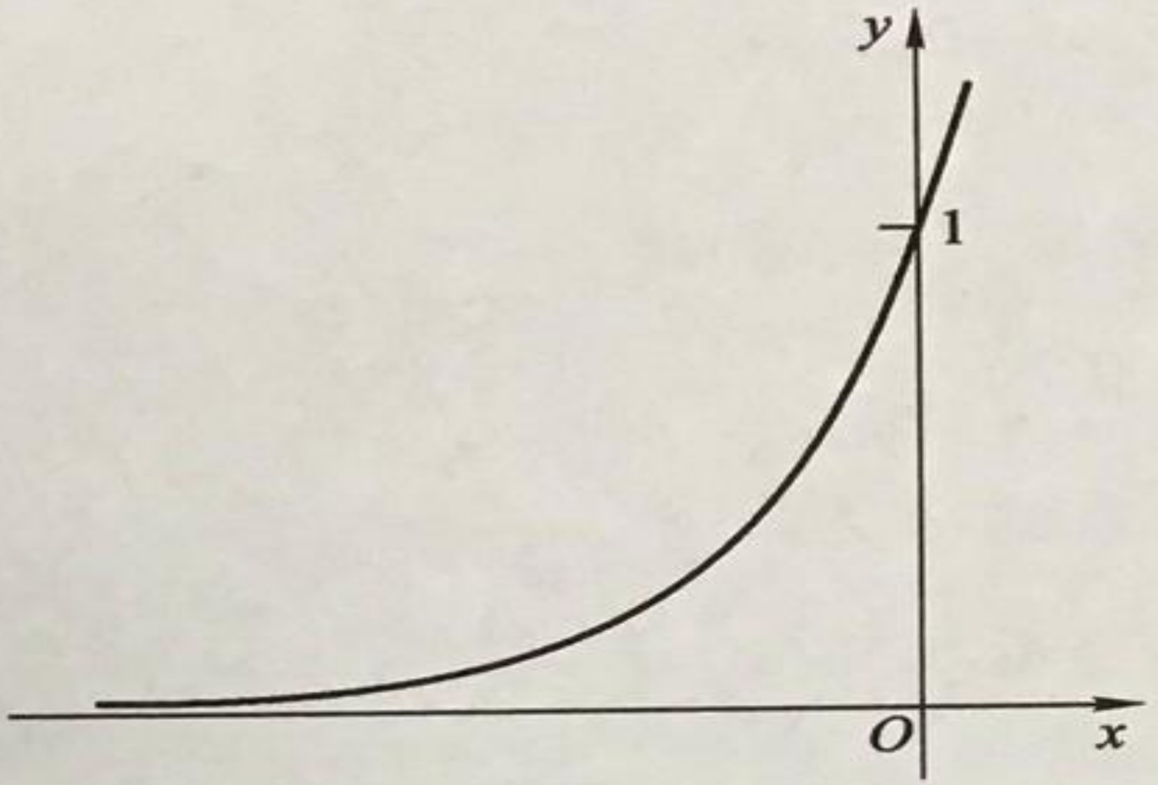


图 1.18

4) $x \to \infty$：$|x|$无限地增大，读作 x 趋于无穷大.

例 1.2.9 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$（图 1.19）.

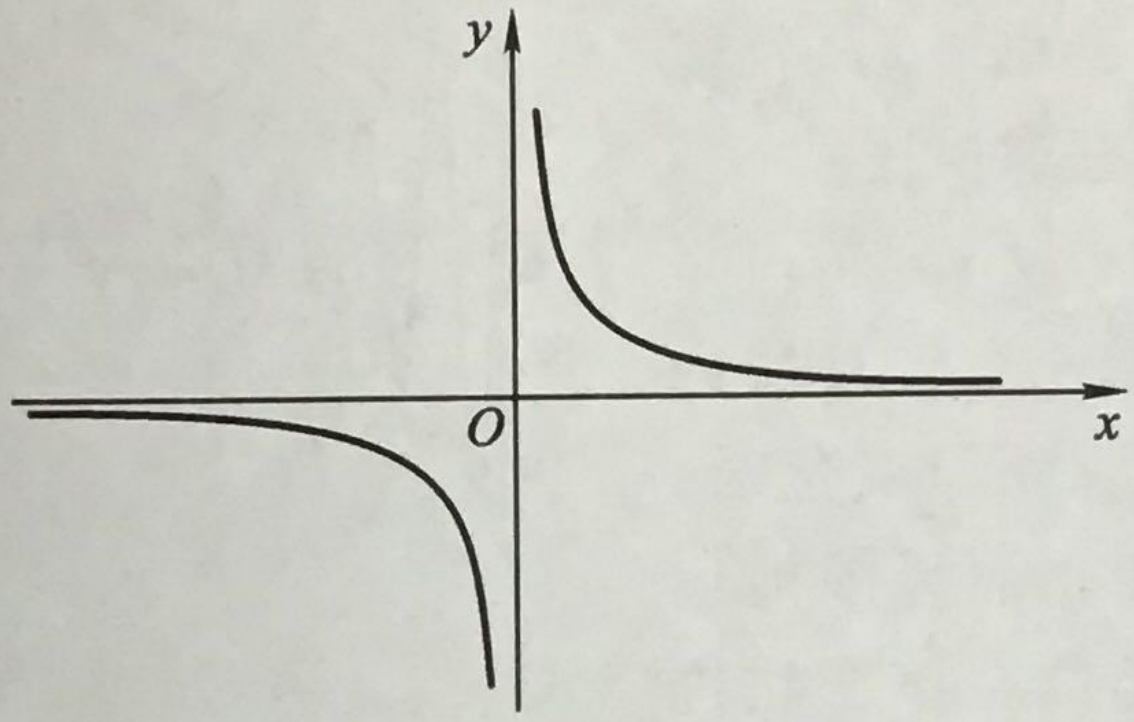


图 1.19

5) $x \to a^+$: x 大于 a 而无限地逼近 a,读作 x 趋于 a 加,称 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 为 $f(x)$ 在 a 点的**右极限**.

6) $x \to a^-$: x 小于 a 而无限地逼近 a,读作 x 趋于 a 减,称 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ 为 $f(x)$ 在 a 点的**左极限**.

注 $f(x)$ 在 a 点的左或右极限中 x 能否等于 a 不必计较.

例 1.2.10 $\lim\limits_{x \to 3^+} [x] = 3$, $\lim\limits_{x \to 3^-} [x] = 2$(图 1.20).

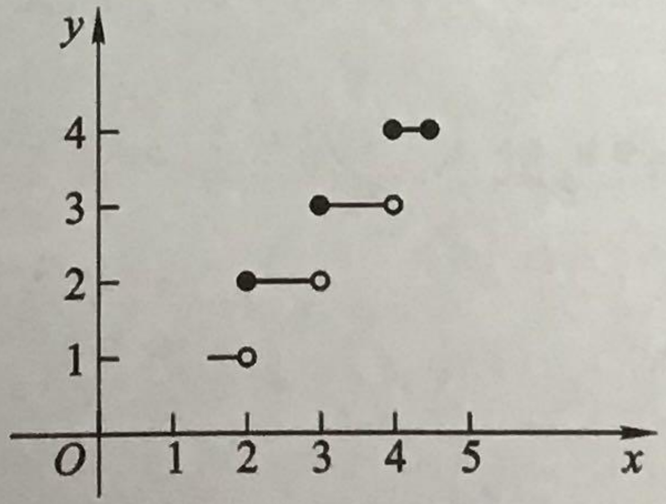


图 1.20

请仔细观察此例中左右极限的差别. 为了进一步理解函数极限的概念,再看三个例子.

例 1.2.11 设 $f(x)=2x, x\in(0,2)$, 则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$(图 1.21).

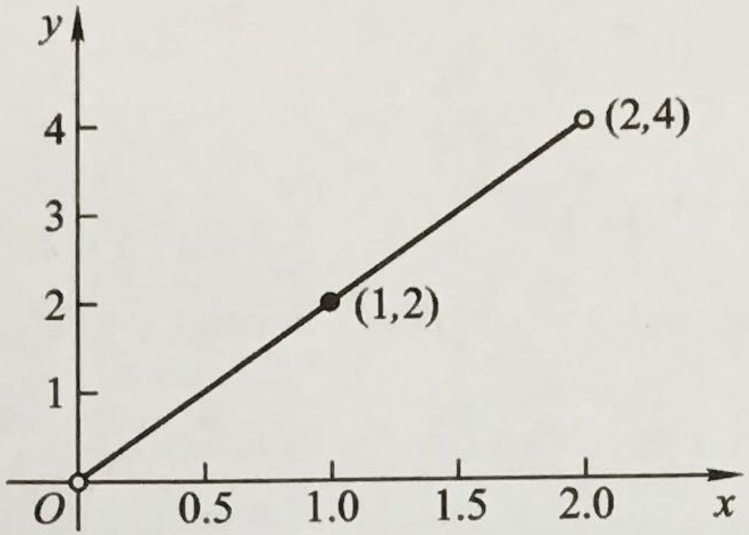


图 1.21

例 1.2.12 设 $g(x)=2x, x\in(0,1)\cup(1,2)$，则 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2$（图 1.22）.

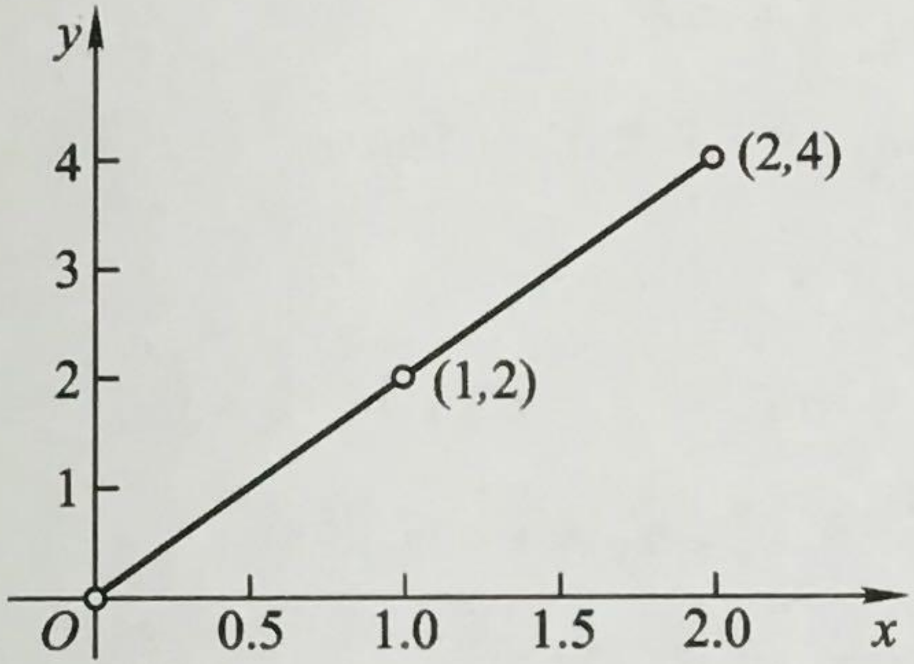


图 1.22

例 1.2.13 设 $h(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 2x, & x\in(0,1)\cup(1,2),\end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to1}h(x)=2$(图 1.23).

上述$f(x)$,$g(x)$,$h(x)$是三个不同的函数,但$x\to1$时的极限都是 2,三个函数的差别在于定义域不同,或在$x=1$处的函数值不同.这说明在自变量$x\to a$时函数$f(x)$的极限与函数值$f(a)$有没有定义,究竟如何定义毫无关系,也就是说,自变量x趋于a并不要求$x=a$,x能否取a值,并不影响极限的存在与等于什么.

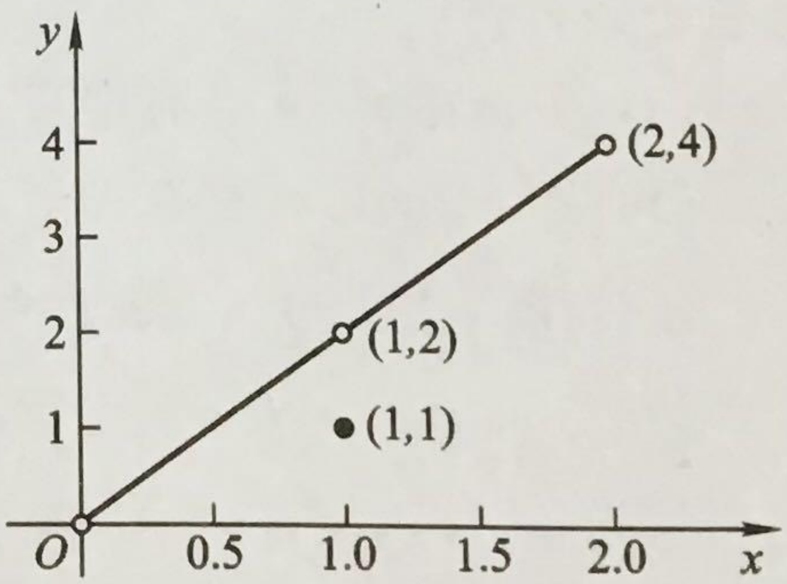


图 1.23

1.2.3 极限的性质

设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)$均存在，$c$为常数，则有

性质 1 $\lim\limits_{x\to\square}c=c.$

性质 2 $\lim\limits_{x\to a}x=a.$

性质 3 $\lim\limits_{x\to\square}cf(x)=c\lim\limits_{x\to\square}f(x).$

性质 4 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\square}f(x)\pm\lim\limits_{x\to\square}g(x).$

性质 5 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to\square}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\square}g(x).$

性质 6 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\square}f(x)}{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}$，此处$\lim\limits_{x\to\square}g(x)\neq 0.$

性质 7 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=A=\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x).$

例 1.2.14 求$\lim\limits_{x \to 1}(x^2+2x-3)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x \to 1} x^2+\lim\limits_{x \to 1} 2x-\lim\limits_{x \to 1} 3=(\lim\limits_{x \to 1} x)^2+2\lim\limits_{x \to 1} x-3=1^2+2 \cdot 1-3=0$.

例 1.2.15 求$\lim\limits_{x \to 1}(x^2+x-2)$.

解 原式 $=(\lim\limits_{x \to 1} x)^2+\lim\limits_{x \to 1} x-2=1^2+1-2=0$.

定义 如果在函数 $y=f(x)$ 的定义域内，

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，则称 $y=f(x)$ 在点 a **连续**（图 1.24）；即 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续，需要满足三个条件：

(i) $f(x)$ 在 $x=a$ 点有定义；

(ii) 极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在；

(iii) 极限值 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 等于函数值 $f(a)$.

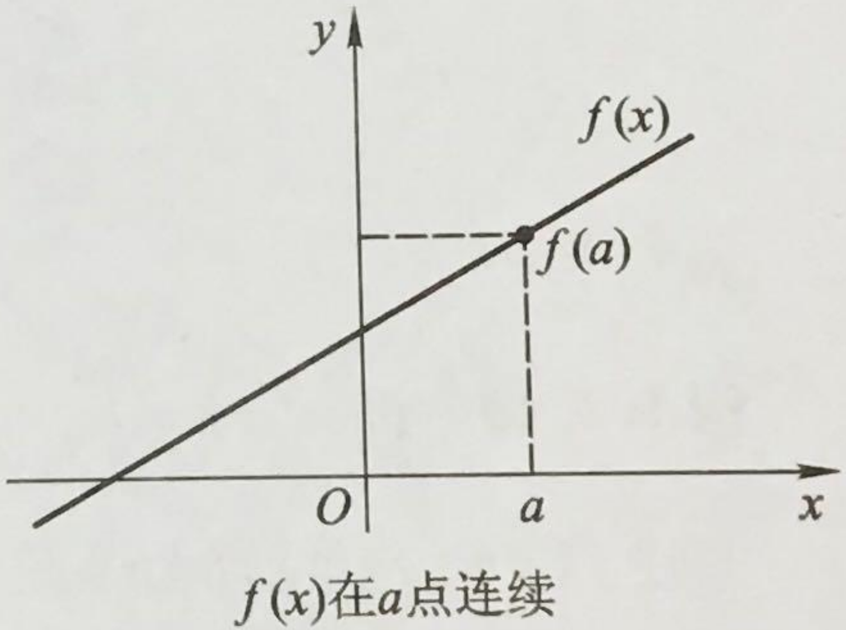


图 1.24

(2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$，则称 $y = f(x)$ 在点 a **右连续**；

(3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$，则称 $y = f(x)$ 在点 a **左连续**.

式子 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ 等价于 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点连续，则称 $f(x)$ 为 (a,b) **内的连续函数**或 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点连续，且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称 $f(x)$ 为**闭区间** $[a,b]$ **上的连续函数**或 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

定理 1.2.1 初等函数是其定义区间内的连续函数.

根据这个特征，初等函数在定义区间内的极限就等于函数值，即若 a 是初等函数 $f(x)$ 的定义区间内一点，则 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. 这为计算初等函数的极限提供了极大的方便.

例 1.2.16 求$\lim\limits_{x \to 2} \lg \sin \dfrac{\pi}{x}$.

解 因 $x=2$ 是初等函数 $\lg \sin \dfrac{\pi}{x}$ 定义域内一点,故

$$原式 = \lg \sin \lim_{x \to 2} \frac{\pi}{x} = \lg \sin \frac{\pi}{2} = 0.$$

单选题 1分 设置

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5\cos(x-1)}{x+2}=$$

A -1

B 0

C 1

D 2

提交


3 rules:
-no wishing for death
-no falling in love
-no bring back dead people
I want to divide by zero
There are 4 rules

例 1.2.17 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.

解 本函数分子与分母的极限均为 0,我们不能运用性质 6 来计算,否则将得$\dfrac{0}{0}$,无法确定其值. 但可以约去分子分母的公因式 $x-1$ 后再行计算:

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}=\frac{1+3}{1+2}=\frac{4}{3}.$$

例 1.2.19 求$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x}+2)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{(4-1)(\sqrt{4}+2)}=\frac{1}{12}.$$

练习：计算下列极限

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^3-x}.$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x(x+1)}=2.$$

（2） $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{1}{6};$$

1. 下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，请说明理由；如果是错的，请给出一个反例说明.

这里的括号需要理解为小括号
并不是取整函数的意思

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；

（2）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 不存在；

（1）正确。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在，则

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}[(f(x)+g(x))-f(x)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim_{x\to x_0} f(x).$$

极限存在，与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在矛盾。

（2）不正确。

前面提到的例1.2.18也是一个不错的例子

设 $f(x)=\sin x, g(x)=-\sin x, x_0=+\infty$，则

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}-\sin x$不存在，但

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to+\infty}[\sin x+(-\sin x)]=\lim_{x\to+\infty}0=0\text{存在。}$$


别打扰我，我只爱高数
高等数学