# 洛谷1月月赛2 & CSGRound 3 题解

## A压岁钱

70% 按题意模拟操作。

对于第三种操作,只要开数组记录即可。

需要注意开 long long。

## B斗牛

#### subtask1

暴力即可。 $2^5$ 枚举所有的数取或不取,再按题意进行判断即可

#### subtask2

运用反向思维进行考虑。显然易见的是,考虑取n-2张和取剩下的两张的情况是一样的。即把所有牌加起来,并取个位数后,枚举是否存在两张牌的和的个位数与之相等即可。

时间复杂度  $O(n^2)$ 

#### subtask3

由于每张牌的大小都为1-10.所以只需要考虑统计1-10的每张牌一共有几张就可以了。判断方法同上。 时间复杂度O(n)

## C游戏

#### subtask1

只有一张牌,显然X满足要求的充要条件是不小于这张牌的权值。

时间复杂度 O(1)

#### subtask2

只要判断一个X是否满足要求。

枚举小Z取几张牌,记和为S。要让小Z赢,则两个人的和不能取到 [2S,X] 的值。预处理即可。

时间复杂度 O(n)

#### subtask3

对每个X分别判断。

时间复杂度 O(nK)

#### subtask4

考虑枚举小Z取的总和, 求出X的可行区间。

合并区间,输出答案。

时间复杂度  $O(n^2)$ 

### subtask5

求X的可行区间可以二分,合并区间只要差分。

时间复杂度  $O(n \lg n)$ 

## D出游

### subtask1

很明显,答案是  $\sum p_i$ 

时间复杂度 O(n)

### subtask2

考虑第i个人第1天会选择参加的概率,即要求第i个人的朋友中至少有一个人在第0天选择了参加。

考虑反面,就是  $1-\prod_{i=1}^{a_i}p_{b_{i,j}}$ 

答案就是把每个人的概率加起来。

时间复杂度  $O(n^2)$ 

### subtask3

直接枚举每个人在第0天选择参加还是不参加。

然后dp算出第 T 天每个人选择参加还是不参加。

与运算和或运算满足矩阵乘法的要求,可以用矩阵乘法快速幂优化。

时间复杂度  $O(2^n n^3 lgT)$ 

#### subtask4

留给各路神仙的神奇做法

### subtask5

把subtask2和subtask3结合起来。

假设已经枚举了第0天的结果,就可以用 $O(n^3 lgT)$ 的时间复杂度算出第T天的结果。

不难发现,不管第0天结果如何,总的转移矩阵是一样的。

直接求出转移矩阵,问题就相当于subtask2。

时间复杂度  $O(n^3 lgT)$ 

#### subtask6

仔细观察矩阵乘法,有一个把一个行向量和一个列向量做对位取或运算的操作。

可以用bitset优化计算。

时间复杂度  $O(\frac{n^3 lgT}{w})$ 

## E仙人掌

## 做法1:

暴力枚举仙人掌,可以过第一个subtask1。说不定加点剪枝可以过subtask2。

## 做法2:

考虑把度数序列中所有元素放进一个multiset,可以发现这样合法的multiset非常少,而每一个合法的multiset对应的所有的度数序列都是合法的。

所以可以用园方树进行dp,这样可以过subtask1,subtask2。或许可以过subtask3。

## 做法3:

对于一棵树的情况,只要所有点度数都至少为1旦和为2n-2即可,所以答案直接可以用组合数算。

## 做法4:

对于n=m的情况,发现只要度数为1的点不超过n-2即可,所以直接组合数算。

## 做法5:

考虑什么情况下仙人掌能构造出来。

定义一个函数

$$f(n) = [n \mod 2 = 0](\frac{3}{2}n - 2) + [n \mod 2 = 1](\frac{3}{2}(n - 1))$$

即n个点仙人掌边数的上界。

可以发现当度数均为偶数时,度数序列合法当且仅当度数和m满足n < m < f(n)。

#### 大致证明如下:

如果边数不在这个范围内,显然不合法。

如果度数和正好等于2n,那么可以直接连一个大环。

否则一定存在3个点使得他们度数和大于6,那么可以将这三个点连一个环,然后视为缩成一个点。

那么之前的条件依然满足,问题变成了一个形式相同,规模更小的子问题,可以归纳证明。

对于存在奇数的情况,可以发现如果合法那么一定存在一种不连环的方案使得把它缩点之后变成全是偶数的情况,且在偶数的情况下合法。

那么消奇数的过程每连一条边就相当于度数和减少2,节点数减少1,可以发现我们只需要使这样的边连得尽量少。那么可以奇数的点两两连边,但是可以发现,如果度数为1的点特别多可能会出问题,因为消完之后出现度数为0的点了,这时候我们只能把度数为1的点两两挂到度数大的偶数点上了。

所以度数序列是否合法只和点数,度数和,奇数度数点的个数,度数为1的点的个数有关,可以直接dp加点优化,可以过subtask1~3,可能能过subtask4。

## 做法6:

用组合数优化做法5,可以直接AC。

remark:

subtask7出题人暂时想不到特殊做法,您们有神仙做法可以来教育出题人。

F

#### 题意:

给定一个序列,每个位置有一种颜色,支持:

- 1.区间染色
- 2.查询区间内, 无序选出两个位置使得颜色相同的方案数

#### 解答:

不妨设询问数和序列长度均为 $B^2$ ;

将序列分为 B块, 每块大小为 B;

每个块有两个状态:

状态1: 块由一些段组成, 每段内颜色相同

状态2:整个块只有一种颜色

在状态1表示的块中,维护一个序列表示依次出现的段的颜色、长度

在状态2表示的块中,维护块的颜色

记 A(x,y) = A1[x,y] + A2[x,y], x < y,表示块 x 到块 y 中,选取两个元素,都在状态1的块中,颜色相同的方案数;

A1, A2 用于辅助计算,A1[x,\*] 和 A2[\*,x] 以 A1[x,x+1..y] 和 A2[y..x-1,x] 的和的形式记录。

记 B[x] 为块 x 内选取两个元素,都在状态1的块中,颜色相同的方案数。

记 t[x,y] 表示块 x 中颜色 y 的元素个数,以 t[1..x,y] 的和的形式记录。

#### 接下来考虑几个基本操作:

(a).在状态1表示下,块x中颜色y的元素个数增加了 z;

$$A1[x, x'] + = t[x', y] * z$$
  
 $A2[x', x] + = t[x', y] * z$   
 $B[x] + = t[x, y] * z$   
 $t[x, y] + = z$ 

(b).将一个块x染色为y,并变为状态2表示;

如果 x 在状态1, 使用不超过 B 次(a)将块内所有颜色清空;

将x设为状态2,并记录颜色为y,修改B数组。

(c).将一个块x从状态2表示变为状态1表示;

使用一次(a)即可。

用基本操作可以组合出题目需要的预处理,修改和查询:

#### (1).预处理

可以将每个块初始置为空,转为不超过  $B^2$  次区间染色。

#### (2).区间染色

区间染色需要在区间端点所在的块进行(a)(c)操作并维护段的情况,在完整块进行(b)操作;

由于每次区间染色只增加 O(1)段,操作(a)的次数是均摊 O(1) 的。

操作(b)(c)除去调用(a)的情况,时间复杂度为O(1)。

每次(a)操作涉及到 A1[x,\*],A2[\*,x],t[x,y]的修改,修改后重新计算前缀和,时间复杂度为 O(B)。

#### (3).区间查询

对于类型1的完整块之间的贡献,需要查A的矩形和(转为A1,A2中 O(B) 次区间和,差分可得),以及B的区间和;

统计零散部分和类型2的块中,查出每种颜色的出现次数,并查询t数组的区间和(单次 O(1)),可以得到其余的贡献。

综上,时空复杂度均为  $O(B^3)$  ,若离线可将空间降至  $O(B^2)$  。