平均ベクトルの推定における分散未知のもとでの許容的でミニマクスな推定量

神戸大学・丸山　祐造

1　はじめに

1.1　問題設定・サマリー

- 推定問題：$X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ の平均ベクトル θ の推定
  - σ^2 未知
  - σ^2 に関連する統計量 $S/\sigma^2 \sim \chi_n^2$
  - 損失関数 $\dfrac{\|\delta - \theta\|^2}{\sigma^2}$
  - リスク関数 $E\left[\dfrac{\|\delta(X,S) - \theta\|^2}{\sigma^2}\right]$
- 正規線形回帰モデル $y = A\beta + \epsilon$ の正準形（$y \in \mathbb{R}^N$, $\beta \in \mathbb{R}^q$, $\epsilon \sim N_N(0, \sigma^2 I_N)$）
  - $p = q$, $n = N - q$
  - $\theta \Leftrightarrow (A^{\mathrm{T}}A)^{1/2}\beta$
  - $X \Leftrightarrow (A^{\mathrm{T}}A)^{1/2}\hat{\beta}$
  - $S \Leftrightarrow \|(I - A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}})y\|^2$
  - $\dfrac{\|\delta - \theta\|^2}{\sigma^2} \Leftrightarrow \dfrac{(\hat{\beta} - \beta)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A(\hat{\beta} - \beta)}{\sigma^2} = \dfrac{\|A\hat{\beta} - A\beta\|^2}{\sigma^2}$
- 以下このノートでは，$\eta = 1/\sigma^2$ とする
- 一般化ベイズ推定量（広義事前分布に対するベイズ推定量）の性質
  - 許容性
    - δ が δ_0 を優越する（改良する） if

$$R(\theta, \eta, \delta) \le R(\theta, \eta, \delta_0) \ \text{ for all values of } \ (\theta, \eta)$$
$$R(\theta, \eta, \delta) < R(\theta, \eta, \delta_0) \ \text{ for at least one value of } \ (\theta, \eta)$$

    - 他の推定量によって優越される推定量は非許容的
    - 他のどのような推定量によっても優越されない推定量は許容的
  - ミニマクス性
- 問題意識
  - 許容的な推定量が欲しいだけなら，狭義事前分布のもとでのベイズ推定量でよい
  - （最尤法，不偏性，不変性，ミニマクス性の保持などの考察から）自然な推定量が与えられたとき，しばしば一般化ベイズ推定量である
    $\Uparrow$ 例：広義事前分布 $\pi(\theta) = 1$ に関する一般化ベイズ推定量 X

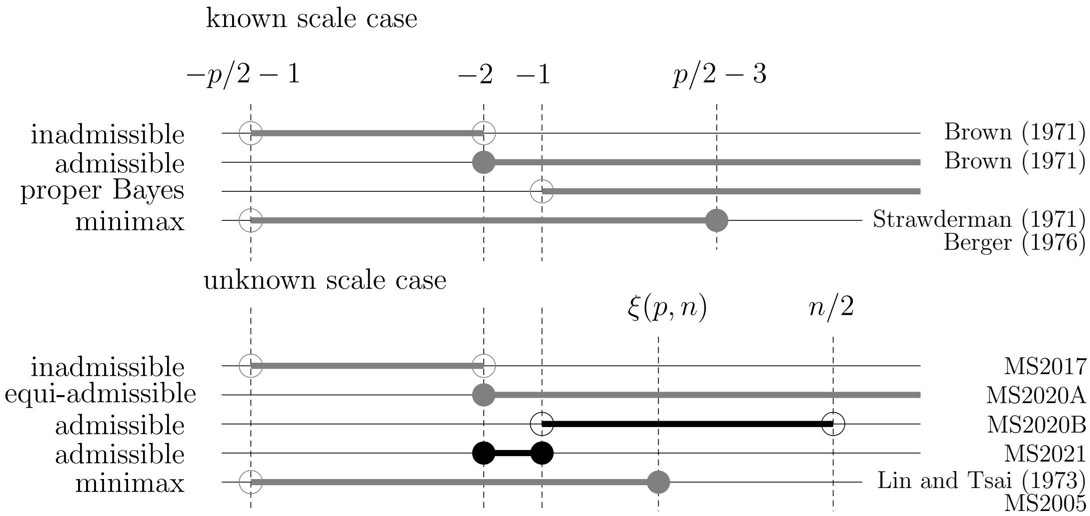

図 1　Ranges of a for admissibility/inadmissibility and minimaxity

- 定数リスクを持つミニマクス推定量 X の許容性は？
- スタイン現象：実は $p \geq 3$ のとき非許容的．改良する推定量の存在．その許容性は？詳細は 1.5 節．

- η が既知の一般化ベイズ推定量の許容性
  - Brown (1971) に尽きる
  - ラフに言えば，広義事前分布が与えられたとき，それに対する一般化ベイズ推定量が許容的か非許容的か判別できる定理
  - Strawderman prior は許容性，非許容性の境界付近でパラメタライズされた狭義広義事前分布（図 1）
- η が未知の一般化ベイズ推定量の許容性
  - 対応する結果が得られてなかった

    ⇑ 許容性の証明に必要な事前分布列の構成が難しかったから
- 最近得られた結果（図 1）
  - 「（狭義・広義）事前分布 $G(\|\mu\|)$ が分散既知の場合に許容的な（一般化）ベイズ推定量を導く事前分布ならば，分散未知の場合に広義事前分布

$$\frac{1}{\eta} \times \eta^{p/2} G(\eta^{1/2}\|\theta\|)$$

    に対する一般化ベイズ推定量は許容的である．」

    ⇑ このことを Strawderman prior で確認した
  - ミニマクス性を併せ持つ（許容性だけだと弱いので，ミニマクス性を併せ持つと良い）
  - 一部の内容が最近 Biometrika にアクセプトされた
- 証明：$\Delta_i = \iiint f_i(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u} \to 0$ を示す．
  - $f_i(\boldsymbol{u}) \to 0$ for fixed $\boldsymbol{u}$
  - 部分積分や三角不等式などにより，$f_i(\boldsymbol{u}) \leq A_i + B_i + C_i + \cdots +$
  - $A_i, B_i, C_i, \ldots,$ をそれぞれ i に依存しない可積分関数で抑える．有界収束定理の適用

- 主定理の証明は退屈．その証明はアイデアにとどめて，問題の背景や，私の過去の研究からの流れ，より設定の簡単な問題（分散既知の問題設定）の説明を中心に行う．
  - $Z \sim N_d(\mu, I_p)$，$\mu \in \mathbb{R}^d$ の推定，$\|\delta - \mu\|^2$

1.2 Blyth (1951 Annals) の方法

- 狭義事前分布に関するベイズ推定量は許容的
- 広義事前分布に対する一般化ベイズ推定量は，そのような保証はない
- Blyth (1951 Annals) の方法：広義事前分布に関する一般化ベイズ推定量が許容的であるための十分条件
- いろいろなバージョンあり．分散既知のケースの一例は以下の通り
- 広義事前密度 $\pi(\mu)$ に関する一般化ベイズ推定量 $\delta_\pi(z)$ が許容的であるための十分条件
  - $\pi(\mu) > 0$
  - 固定した μ に対し，$\begin{cases} \pi_i(\mu) \text{ が } i \text{ の増加関数} \\ \lim_{i\to\infty} \pi_i(\mu) = \pi(\mu) \end{cases}$
  - 任意の μ に対し，$\pi_1(\mu) > 0$
  - 固定した i に対して，$\int_{\mathbb{R}^d} \pi_i(\mu) \mathrm{d}\mu < \infty$
  - 狭義事前密度 $\pi_i(\mu)$ のもとでのベイズ推定量 δ_i，一般化ベイズ推定量 δ_π との（標準化しない）ベイズリスクの差 $\Delta_i \to 0$ ならば，$\delta_\pi(z)$ は許容的

$$\Delta_i = \int_{\mathbb{R}^d} \{R(\delta_\pi, \mu) - R(\delta_i, \mu)\} \pi_i(\mu) \mathrm{d}\mu$$

- 証明
  - 背理法の仮定として，δ_π が非許容的で，δ_* によって優越されるとする．
  - δ_i の π_i のもとでのベイズ性より，

$$\int_{\mathbb{R}^d} R(\delta_i, \mu)\pi_i(\mu)\mathrm{d}\mu < \int_{\mathbb{R}^d} R(\delta_*, \mu)\pi_i(\mu)\mathrm{d}\mu$$

  - よって，

$$\begin{aligned} \Delta_i &> \int_{\mathbb{R}^d} \{R(\delta_\pi, \mu) - R(\delta_*, \mu)\} \pi_i(\mu) \mathrm{d}\mu \\ &> \int_{\mathbb{R}^d} \{R(\delta_\pi, \mu) - R(\delta_*, \mu)\} \pi_1(\mu) \mathrm{d}\mu \\ &> 0 \end{aligned}$$

1.3 正規性のもとで標本平均 $\bar{Z}$ の許容性

$Z_1, \ldots, Z_n \sim N(\mu, 1)$ の μ の推定：$\bar{Z}$ の許容性

- $\bar{Z}$：$\pi(\mu) = 1$ に対する一般化ベイズ
- 定数リスク：$R(\mu, \bar{Z}) = 1/n$

- $\mu \sim N(0, 1/\varphi)$ に対するベイズ推定量 $n\bar{Z}/(n+\varphi)$ のベイズリスク

$$r(\pi, \delta_\pi) = \frac{1}{n+\varphi}$$

- $i = 1/\varphi$ $i = 1, 2, 3, \ldots,$ $\mu \sim N(0, i)$

$$\frac{1}{(2\pi i)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2i}\right), \quad \pi_i(\mu) = \exp\left(-\frac{\mu^2}{2i}\right)$$

$$\Delta_i = (2\pi i)^{1/2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1/i}\right) = \frac{(2\pi i)^{1/2}/i}{n(n+1/i)} = \frac{1}{\sqrt{i}}\frac{(2\pi)^{1/2}}{n(n+1/i)} \to 0$$

$Z_1, \ldots, Z_n \sim N_2(\mu, I_2)$ の μ の推定：$\bar{Z}$ の許容性

- $\bar{Z}$：$\pi(\mu) = 1$ に対する一般化ベイズ
- 定数リスク：$R(\mu, \bar{Z}) = 2/n$
- $\mu \sim N_2(0, I/\varphi)$ に対するベイズ推定量 $n\bar{X}/(n+\varphi)$ のベイズリスク

$$r(\pi, \delta_\pi) = \frac{2}{n+\varphi}$$

- $i = 1/\varphi$ $i = 1, 2, 3, \ldots,$ $\mu \sim N_2(0, iI)$

$$\frac{1}{2\pi i} \exp\left(-\frac{\|\mu\|^2}{2i}\right), \quad \pi_i(\mu) = \exp\left(-\frac{\|\mu\|^2}{2i}\right)$$

$$\Delta_i = 2\pi i\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1/i}\right) = \frac{2\pi i \times 2/i}{n(n+1/i)} \to \frac{4\pi}{n^2}$$

- ２次元の場合も許容性が言えるが，列の選定に工夫が必要

1.4 事前分布列の歴史

- Blyth (1951 Annals)
  - Admissibility of $\bar{Z} \in \mathbb{R}^1$ from $Z_1, \ldots, Z_n \sim N(\mu, 1)$
  - 正規分布列
- Stein (1956 Berkeley)
  - Admissibility of $\bar{Z} \in \mathbb{R}^2$ from $Z_1, \ldots, Z_n \sim N_2(\mu, I_2)$
  - Blyth の方法ではなく，information inequality による
- Stein (1959 Annals)
  - Admissibility of the Pitman location estimator $d = 1$
  - Pitman location estimator は $\pi(\mu) = 1$ に関する一般化ベイズ推定量
  - sequence: Cauchy with scale $\dfrac{1}{1+\mu^2/i}$

- James & Stein (1961 Berkeley)
  - Admissibility of the Pitman location estimator $d = 2$
  - $\pi(\mu) = h_i^2(\|\mu\|)$

$$h_i(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \leq 1 \\ 1 - \dfrac{\log \lambda}{\log i} & 1 \leq \lambda \leq \dfrac{i}{\exp(0.5)} \\ \dfrac{0.5 \exp(-0.5) i (\log i)^{-1}}{\lambda(1.5 + \log \lambda / i)} & \lambda > \dfrac{i}{\exp(0.5)} \end{cases}$$

ESTIMATION WITH QUADRATIC LOSS

W. JAMES
FRESNO STATE COLLEGE
AND
CHARLES STEIN
STANFORD UNIVERSITY

To prove theorem 2 we define π_σ by

$$\pi_\sigma(\xi) = \begin{cases} \dfrac{K_\sigma}{\sigma} \log^2 \sqrt{\sigma}, & \|\xi\|^2 \leqq 1, \\ \dfrac{K_\sigma}{\sigma} \log^2 \left(\dfrac{\sqrt{\sigma}}{\|\xi\|} \right), & 1 \leqq \|\xi\|^2 \leqq M\sigma, \\ \dfrac{K_\sigma}{\sigma} \dfrac{B}{\dfrac{\|\xi\|^2}{\sigma} \log^\beta \left(\dfrac{A\|\xi\|}{\sqrt{\sigma}} \right)}, & \|\xi\|^2 \geqq M\sigma, \end{cases} \tag{64}$$

where $1 < \beta < 1 + \delta$, $0 < M < 1$, $A\sqrt{M} > 1$, and these constants and B are chosen so that π is continuous everywhere and continuously differentiable except at $\|\xi\|^2 = 1$. A computation analogous to that in [16] but much more tedious

- Brown & Hwang (1982 Purdue)
  - 分散既知の正規分布の平均ベクトルの推定
  - 広義事前分布 $\pi(\mu)$ に対する一般化ベイズ推定量の許容性
  - 列 $\pi(\mu) h_i^2(\|\mu\|)$　h_i は James & Stein (1961 Berkeley) に由来

$$h_i(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \leq 1 \\ 1 - \dfrac{\log \lambda}{\log i} & 1 \leq \lambda \leq i \\ 0 & \lambda > i \end{cases}$$

  - h_i の重要な性質 $\lambda \geq 2$ のとき $\sup_i |h_i'(\lambda)| \leq \dfrac{1}{\lambda \log \lambda}$
  - 欠点
    * 最も重要な広義事前分布の 1 つである Stein prior $\|\mu\|^{2-d}$ が含まれない
    * Brown (1971 Annals) とのギャップ

A UNIFIED ADMISSIBILITY PROOF

Lawrence D. Brown[1] and Jiunn Tzon Hwang[2]

Department of Mathematics
Cornell University
Ithaca, New York, U.S.A.

Let

$$h_n(\theta) = \begin{cases} 1 & \|\theta\| \leq 1 \\ 1 - \dfrac{\ln(\|\theta\|)}{\ln(n)} & 1 \leq \|\theta\| \leq n \\ 0 & \|\theta\| \geq n, \end{cases} \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{3.6}$$

1.5 Stein 現象

- 分散既知でも未知でも Z の次元 d や X の次元 p が 3 以上のとき，Z や X（定数リスクを持つミニマクス推定量）は非許容的

- 改良する推定量 James & Stein (1961 Berkeley)

$$\left(1-\frac{d-2}{\|z\|^2}\right)z, \quad \left(1-\frac{(p-2)/(n+2)}{\|x\|^2/s}\right)x$$

- ただし，James-Stein 推定量も非許容的
- それ以上改良されることのないミニマクス推定量（許容的なミニマクス推定量）が望ましい
- 分散既知：1970 年代に十分研究され，許容的なミニマクス推定量の広いクラスが得られた
  - ミニマクスの十分条件 Baranchik (1970 Annals)
  - 一般化ベイズ推定量が許容的であるための十分条件 Brown (1971 Annals)
- ２つの性質を併せ持つ推定量の構築に，いわゆる Strawderman prior (1971 Annals) がそれに大きく貢献した

$$G(\|\mu\|;a,b)=\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^{p/2}g^{d/2}}\exp\left(-\frac{\|\mu\|^2}{2g}\right)\frac{1}{(g+1)^{a+2}}\left(\frac{g}{g+1}\right)^b \mathrm{d}g \tag{1}$$

特別な場合　$a=-2$, $b=0$ Stein Prior $\|\mu\|^{2-d}$
- 分散未知
  - ミニマクスの十分条件 Baranchik (1970 Annals)
  - Strawderman prior の拡張 $\Leftarrow$ 後で紹介する (2)
  - それらを組み合わせたミニマクスな一般化ベイズ推定量のクラスは提案されている
  - 許容性の結果はなかった

1.6 Brown (1971 Annals)

- 分散既知の正規分布の平均ベクトルの推定
- これまで最も使われてきた定理
  - 球面対称な広義事前分布 Π に対する周辺尤度を $m_\Pi(\|z\|)$ とする
  - また一般化ベイズ推定量 δ_Π が $R(\mu,\delta_\Pi)<\infty$ を満たす
  - $m_\Pi(r)$ が $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{r^{d-1}m_\Pi(r)}=\infty$ ならば δ_Π は許容的
- 適用例：Berger (1976 Annals), Kubokawa (1991 JMVA), 久保川（岩波　統計科学のフロンティア３）, Maruyama (1998 JMVA)
- Brown (1971 Annals) の「悪」影響
  - この難しく長い論文を読まないと許容性の証明は出来ないのか？
  - Theorem 6.3.1 や Corollary 6.3.2 は膨大な数学理論の系と位置づけられる．
  - 典型的な事前分布（正規分布の尺度混合事前分布，Strawderman prior）については理解可能で簡単な証明があるべきであった．$\Leftarrow$ Brown & Hwang (1982 Purdue) では不十分
  - それがないと，分散未知のような別の問題設定に応用できない

THEOREM 6.3.1. *Suppose F is spherically symmetric. Hence $f^*(x) = f^*(|x|)$. If*

$$\int_1^\infty (r^{m-1} f_R^*(r))^{-1}\, dr < \infty$$

then δ_F is inadmissible. If this integral is infinite and γ_F is bounded then δ_F is admissible.

COROLLARY 6.3.2. *Suppose $\delta = \delta_F$ is spherically symmetric. If there is a $k > 0$ and $L < \infty$ such that*

$$\gamma(x)\cdot r_x \geqq (2-m+k)/|x| \qquad \text{for } |x| > L$$

then δ is inadmissible. Conversely if

$$\gamma(x)\cdot r_x \leqq (2-m)/|x| \qquad \text{for } |x| > L$$

and γ is bounded then δ is admissible.

2　平均ベクトルの推定　丸山が関係する既存研究

2.1　Maruyama and Strawderman (2005 Annals, 2009 JMVA)

- 分散未知の平均ベクトルの推定 θ　ミニマクスな一般化ベイズ推定量
- 事前分布：(1) で与えられる Strawderman prior $G(\cdot; a, b)$ に対して

$$\eta^c \eta^{p/2} G(\eta^{1/2}\|\theta\|; a, b) \tag{2}$$

  変数変換 $\mu = \eta^{p/2}\theta$ によるヤコビアンが $\eta^{p/2}$
- 一般化ベイズ推定量

$$\left(1 - \frac{\int_0^\infty (g+1)^{-p/2-1}\pi(g;a,b)\{1+w/(g+1)\}^{-p/2-n/2-c-2}\mathrm{d}g}{\int_0^\infty (g+1)^{-p/2-1}\pi(g;a,b)\{1+w/(g+1)\}^{-p/2-n/2-c-2}\mathrm{d}g}\right)x \qquad w = \frac{\|x\|^2}{s} \tag{3}$$

  $\Uparrow$　$\pi(g;a,b) = \dfrac{1}{(g+1)^{a+2}}\left(\dfrac{g}{g+1}\right)^b$

  推定量が well-defined の十分条件
  - $p/2 + a + 1 > 0$
  - $b > -1$
  - $p/2 + n/2 + c + 2 > 0$
- 特に $c = -1$ の場合の結果
  - $-p/2 - 1 < a \le \xi(p,n)$, $b \ge 0$ ならばミニマクス

$$\xi(p,n) = -2 + \frac{(p-2)(n+2)}{2(2p+n-2)}$$

  - $b = n/2 - a - 2$ のとき，一般化ベイズ推定量の簡潔な表現

$$\left(1 - \frac{(p/2+a+1)/(n/2-1-a)}{\|X\|^2/S + 1 + \{(p/2+a+1)/(n/2-1-a)\}}\right)X \tag{4}$$

特に $a=-2$ の場合

$$\left(1-\frac{(p-2)/(n+2)}{\|X\|^2/S+1+(p-2)/(n+2)}\right)X$$

- セールスポイント
  - 積分により表現された (3) の推定量でうまくハイパーパラメータを選べば (4) のような簡潔な表現を持つことを示したこと
  - 回帰分析のリッジ回帰推定量の文脈で意義を強調

2.2 Maruyama and Takemura (2008 JMVA), Maruyama (2009 JMVA)

- $Z \sim f(\|z-\mu\|)$ の $\mu \in \mathbb{R}^d$ の推定
- 広義事前分布 $\pi(\|\mu\|)$ に対する一般化ベイズ推定量の許容性
- 背景
  - Brown and Hwang (1982 Purdue) の十分条件が Stein prior $\|\mu\|^{2-d}$ によって満たされないのを何とかしたかった.
  - Brown (1971 Annals) を理解できないので，Strawderman prior などの簡単な場合で，高等数学を使わずに自分レベルの数学で証明したかった.
  - 正規分布の仮定のもとでの結果では論文にならないので，球面対称分布に拡張した
- そのための事前分布の列を開発 $\pi(\|\mu\|)h_i^2(\|\mu\|)$

$$\begin{aligned} h_i(\lambda) &= \frac{\int_\lambda^\infty e^{(\lambda-r)/i}\beta(r)dr}{\int_\lambda^\infty \beta(r)dr} = \int_\lambda^\infty \left(1-\frac{\int_1^{1+\lambda}\mathrm{d}s/s}{\int_1^{1+r}\mathrm{d}s/s}\right)\frac{1}{i}e^{(\lambda-r)/i}dr \\ &= \int_\lambda^\infty \left(1-\frac{\log(1+\lambda)}{\log(1+r)}\right)\frac{1}{i}e^{(\lambda-r)/i}dr \end{aligned} \tag{5}$$

where

$$\beta(r) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{\left(\int_1^{1+r}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{-1}\right\} = \frac{1}{(r+1)\{\log(r+1)\}^2}$$

- Brown (1979 Annals) の影響：許容性のロバスト性，滑らかな関数列

The Annals of Statistics
1979, Vol. 7, No. 5, 960–994

A HEURISTIC METHOD FOR DETERMINING ADMISSIBILITY OF ESTIMATORS—WITH APPLICATIONS[1]

BY LAWRENCE D. BROWN
Rutgers University

Questions of admissibility of statistical estimators are reduced to considerations involving differential inequalities. The coefficients of these inequalities involve moments of the underlying distributions; and so are, in principle, not difficult to derive.

Admissibility. Suppose γ is a generalized Bayes procedure of the form described above (4) and $b+k-2 \leqslant 0$. Let

(24)
$$\begin{aligned} \zeta_r(\xi) &= 1 \qquad \|\xi\| \leqslant 1 \\ &= \left(1-\frac{\ln\|\xi\|}{\ln r}\right) \qquad 1 < \|\xi\| < r \\ &= 0 \qquad \|\xi\| \geqslant r \end{aligned}$$

and

(25)
$$h_i(\xi) = \left(i^{-1}\int_2^\infty \zeta_r(\xi)e^{(2-r)/i}\,dr\right)^2.$$

- 許容性の十分条件 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^{d-1}\pi(r)} = \infty \Leftarrow$ Brown (1971 Annals) との対応
- これである程度満足して，Bayesian Variable Selection などに軸を移した

2.3 Maruyama and Strawderman (2017 JMVA)

- 分散未知での許容性に関する決定理論を諦めきれず，戻ってくる
- ミニマクスで非許容的な（一般化ベイズ）推定量のクラスを特徴づけることで許容的な推定量の候補集合を小さくする
- 縮小推定量 $\delta_\phi(x,s) = \left(1 - \dfrac{\phi(w)}{w}\right) x$ のリスク関数 $p + (n+2)E\left[D_\phi(W)\right]$

$$D_\phi(w) = \frac{\{\phi(w) - 2c_{p,n}\}\phi(w)}{w} - d_n\phi'(w)\left\{1 + \phi(w)\right\},\ c_{p,n} = \frac{p-2}{n+2},\ d_n = \frac{4}{n+2}$$

- 縮小推定量 $\delta_{\phi+g}(x,s) = \left(1 - \dfrac{\phi(w)+g(w)}{w}\right) x$ とのリスク差

$$R(\delta_\phi,\theta,\sigma^2) - R(\delta_{\phi+g},\theta,\sigma^2) = E\left[(n+2)\{D_\phi(w) - D_{\phi+g}(w)\}\right]$$

- 与えられた ϕ に対して，微分不等式 $D_\phi(w) - D_{\phi+g}(w) \geq 0$ for w となる g が存在すれば

$$R(\delta_\phi,\theta,\sigma^2) - R(\delta_{\phi+g},\theta,\sigma^2) \geq 0$$

  $\delta_{\phi+g}$ が δ_ϕ を優越する．つまり δ_ϕ は非許容的
- 逆にそのような g が存在しないことは，使うべき推定量の最低条件になる quasi-admissibility $\Leftarrow$ Stein の講義ノート，Brown (1988 Purdue) などで考えられてきた
- 縮小推定量 δ_ϕ に対する quasi-admissibility と quasi-inadmissibility の漸近的な境界

$$\phi(w) = \frac{p-2}{n+2} - \frac{d_n(1+c_{p,n})/2}{\ln w}$$

- 一般化ベイズ推定量に対する quasi-admissibility と quasi-inadmissibility の境界

$$\frac{1}{\eta} \times \eta^{p/2} G(\eta^{1/2}\|\theta\|)$$

  - $G(\|\mu\|)$ が分散既知の問題で許容的となる事前分布：quasi-admissible
    - $G(\cdot;a,b)$ では $a \geq -2$
  - $G(\|\mu\|)$ が分散既知の問題で非許容的となる事前分布：quasi-inadmissible
    - $G(\cdot;a,b)$ では $a < -2$

2.4 Maruyama and Strawderman (2020 Annals)

- 縮小推定量 $\delta_\phi(x,s) = \left(1 - \dfrac{\phi(w)}{w}\right) x$ のリスク関数：$\eta^{1/2}\|\theta\|$ の関数
- $\lambda = \eta^{1/2}\|\theta\|$ として，狭義事前分布 $\pi(\lambda)$ に対して，推定量 δ_ϕ のベイズリスクもどきが定義できる．
- 問：与えられた $\pi(\lambda)$ に対して，ベイズリスクを最小にするベイズ解 ϕ，つまり推定量 δ_ϕ は？
- 解：広義事前分布

$$\frac{1}{\eta} \times \eta^{p/2} G(\eta^{1/2}\|\theta\|) \text{ ただし } G(\lambda) = \lambda^{1-p}\pi(\lambda)$$

  に対する一般化ベイズ推定量 $\Leftarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^p} G(\|\mu\|)\mathrm{d}\mu < \infty$ に注意

- この結果の帰結：広義事前分布

$$\frac{1}{\eta} \times \eta^{p/2} G(\eta^{1/2}\|\theta\|) \text{ ただし } \int_{\mathbb{R}^p} G(\|\mu\|)\mathrm{d}\mu < \infty$$

  に対する一般化ベイズ推定量は，比較候補の集合を $\{\delta_\phi(X,S)\}$ と制限したとき許容的.
- このアプローチに Blyth の方法を適用することによる帰結：$G(\|\mu\|)$ を分散既知の問題で許容的となる（狭義・広義）事前分布とする（例えば $G(\cdot;a,b)$ で $a \geq -2$, $b > -1$）．このとき，広義事前分布

$$\frac{1}{\eta} \times \eta^{p/2} G(\eta^{1/2}\|\theta\|)$$

  に対する一般化ベイズ推定量は，比較候補の集合を $\{\delta_\phi(X,S)\}$ と制限したとき許容的.
- この証明のために開発した（再発見した）列 $\Leftarrow$ James-Stein の列の正しい改良

$$h_i(\lambda) = 1 - \frac{\log(\lambda+1)}{\log(\lambda+1+i)} \qquad h_i(\lambda) = 1 - \frac{\log\log(\lambda+e)}{\log\log(\lambda+e+i)}$$

$\Uparrow$ 後で性質を紹介

2.5 Maruyama and Strawderman (2020 Biometrika)

- 機は熟した：$G(\|\mu\|)$ を分散既知の問題で許容的となる（狭義・広義）事前分布とする（例えば $G(\cdot;a,b)$ で $a \geq -2$, $b > -1$）とき，広義事前分布

$$\pi(\theta,\eta) = \frac{1}{\eta} \times \eta^{p/2} G(\eta^{1/2}\|\theta\|)$$

  に対する一般化ベイズ推定量の許容性
- G パートは狭義 Strawderman prior $G(\cdot;a,b)$ for $a > -1$ $b > -1$ とする.
- work した列 $\pi(\theta,\eta)h_i^2(\eta)$

$$h_i(\eta) = \frac{i}{i + |\log\eta|}$$

- 後で説明

2.6 Maruyama and Strawderman (2021) **準備中**

- G パートは広義 Strawderman prior $G(\eta^{1/2}\|\theta\|;a,b)$ for $a \geq -2$ $b > -1$
- 後で説明

3 分散既知の設定における許容性の証明

- 分散既知の設定 $Z \sim N_d(\mu, I_d)$．$\mu \in \mathbb{R}^d$ の推定．$\|\delta - \mu\|^2$
- Brown (1971 Annals) の結果は非常に一般的で分かりにくい
- 典型的な事前分布で一般化ベイズ推定量が許容的であるための十分条件の分かりやすい証明
  - 正規分布の尺度混合型の事前分布（Strawderman prior の一般化）

$$\mu \mid g \sim N_d(0, gI), \quad g \sim \pi(g)$$

– $\int \pi(g)\mathrm{d}g = \infty$ のケースを含むので，$1/(2\pi)^{d/2}$ を除いた事前密度

$$\int_0^\infty g^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|\mu\|^2}{2g}\right) \pi(g)\mathrm{d}g$$

定理 3.1: 許容性

$\pi(g)$ が

$$\int_0^\infty \frac{\pi(g)}{g+1}\mathrm{d}g < \infty \tag{6}$$

または

$$\pi(0) < \infty, \quad \int_0^\infty (g+1)\frac{\{\pi'(g)\}^2}{\pi(g)}\mathrm{d}g < \infty \quad \int_0^\infty \frac{\pi(g)\mathrm{d}g}{(g+2)\{\log(g+2)\}^2} < \infty \tag{7}$$

を満たすとき，に対応する（一般化）ベイズ推定量は許容的である．

- Strawderman prior

$$\pi(g;a,b) = \frac{1}{(g+1)^{a+2}}\left(\frac{g}{g+1}\right)^b$$

  に対して，

$$\{a > -2,\ b > -1\} \text{ or } \{a = -2,\ b \geq 0\}$$

  はこの十分条件を満たす．（$a=-2$，$0<b<1$ の場合に少し修正が必要）
- 頑張れば，Brown (1971 Annals) に対応する条件 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}g}{g\pi(g)} = \infty$ に到達するが，今回はそこまで頑張らない

3.1 新たな関数列 h_i

James & Stein (1961) や Brown and Hwang (1981) の一般化．Maruyama and Takemura (2008) (5) の単純化

$$h_i(\lambda) = 1 - \frac{\log(\lambda+1)}{\log(\lambda+1+i)} \tag{8}$$

補題 3.1: h_i の性質

1. $h_i(\lambda)$ is increasing in i for fixed λ, and decreasing in λ for fixed i. Further $\lim_{i\to\infty} h_i(\lambda) = 1$ for fixed $\lambda \geq 0$.
2. $h_i(\lambda) \leq \dfrac{(1+i)\log(1+i)}{(\lambda+1+i)\log(\lambda+1+i)}$
3. $\sup_i |h_i'(\lambda)| \leq \dfrac{4}{(\lambda+2)\log(\lambda+2)}$

- Note

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty, \quad \int_e^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t\log t} = \infty, \quad \int_{e^e}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^2} < \infty$$

3.2 証明の準備

- 周辺尤度計算のための平方完成

$$\|z-\mu\|^2 + \frac{\|\mu\|^2}{g} = \frac{g+1}{g}\left\|\mu - \frac{g}{g+1}z\right\|^2 + \frac{\|z\|^2}{g+1}$$

- 周辺尤度 m_π

$$m_\pi(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_d(z-\mu)\pi(\mu)\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty (g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g$$

- 一般化ベイズ推定量 $\delta_\pi = \dfrac{\int_{\mathbb{R}^d}\mu\phi_d(z-\mu)\pi(\mu)\mathrm{d}\mu}{\int_{\mathbb{R}^d}\phi_d(z-\mu)\pi(\mu)\mathrm{d}\mu}$

$$\nabla_z m_\pi(z) = \int_{\mathbb{R}^d}(\mu - z)\phi_d(z-\mu)\pi(\mu)\mathrm{d}\mu$$

$$\delta_\pi = z + \frac{\nabla_z m_\pi(z)}{m_\pi(z)} = \left(1 - \frac{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2-1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g}{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g}\right)z \tag{9}$$

- （Blyth の十分条件のための）proper な事前分布列

$$\pi_i(\mu) = \int_0^\infty g^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|\mu\|^2}{2g}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g$$

ここで

$$h_i(g) = 1 - \frac{\log(g+1)}{\log(g+i+1)}$$

  - Part 2 of Lemma 3.1 より，i を任意に固定したとき，

$$\int_0^\infty \pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g < \infty$$

  $\Uparrow$ 事前分布 $\pi_i(\mu)$ は i を任意に固定したとき proper

  - proper prior の作り方として，既存研究では $\pi(\mu)h_i^2(\mu)$ のように外に h_i が考えられてきた．内側に入れたことで計算がかなり簡略化される．

- $\pi_i(\mu)$ のもとでの周辺尤度とベイズ推定量

$$m_i(z) = \int_{\mathbb{R}^d}\phi_d(z-\mu)\pi_i(\mu)\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty (g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g$$

$$\delta_i = \left(1 - \frac{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2-1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g}{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g}\right)z \tag{10}$$

- Δ_i の表現

$$
\begin{aligned}
\Delta_i &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left\{\|\delta_\pi-\mu\|^2-\|\delta_i-\mu\|^2\right\}\phi_d(z-\mu)\pi_i(\mu)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left\{[\|\delta_\pi\|^2-\|\delta_i\|^2]m_i(z)-2(\delta_\pi-\delta_i)^{\mathrm{T}}\int_{\mathbb{R}^d}\mu\phi_d(z-\mu)\pi_i(\mu)\mathrm{d}\mu\right\}\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\|\delta_\pi-\delta_i\|^2 m_i(z)\mathrm{d}z \qquad (11)
\end{aligned}
$$

目標：$\|\delta_\pi-\delta_i\|^2 m_i(z)$ を i に依存しない可積分関数で上からおさえること

3.3 CASE I

- (9), (10), (11) より

$$
\begin{aligned}
&\|\delta_\pi-\delta_i\|^2 m_i(z) \\
&= \|z\|^2\left(\frac{\int_0^\infty(g+1)^{-d/2-1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g}{\int_0^\infty(g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g}-\frac{\int_0^\infty(g+1)^{-d/2-1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g}{\int_0^\infty(g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g}\right)^2 \\
&\quad\times\int_0^\infty(g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g
\end{aligned}
$$

- $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ より

$$
\begin{aligned}
\|\delta_\pi-\delta_i\|^2 m_i(z) \le 2\|z\|^2\Bigg(&\frac{(\int_0^\infty(g+1)^{-d/2-1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g)^2}{\int_0^\infty(g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g} \\
&+\frac{(\int_0^\infty(g+1)^{-d/2-1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g)^2}{\int_0^\infty(g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g}\Bigg)
\end{aligned}
$$

$\Uparrow$ 第二項では，$h_i^2(g)\le 1$ から従う以下の不等式も使った

$$
\frac{\int_0^\infty(g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g}{\int_0^\infty(g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g}\le 1
$$

- 第一項，第二項でそれぞれコーシー・シュワルツの不等式を使い，第一項では $h_i^2\le 1$ にも注意すると

$$
\|\delta_\pi-\delta_i\|^2 m_i(z)\le 4\|z\|^2\int_0^\infty(g+1)^{-d/2-2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g
$$

- 従って，

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\|\delta_\pi-\delta_i\|^2 m_i(z)\mathrm{d}z &\le 4\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty\|z\|^2(g+1)^{-d/2-2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}z\mathrm{d}g \\
&\le 4\int_{\mathbb{R}^d}\|y\|^2\exp\left(-\frac{\|y\|^2}{2}\right)\mathrm{d}y\int_0^\infty\frac{\pi(g)}{g+1}\mathrm{d}g
\end{aligned}
$$

- $\pi(g)$ が improper 従って $\displaystyle\int_0^\infty \pi(g)\mathrm{d}g = \infty$ の場合でも

$$\int_0^\infty \frac{\pi(g)}{g+1}\mathrm{d}g < \infty$$

を満たせば許容的

- Strawderman prior $G(\|\mu\|; a, b)$

$$\pi(g; a, b) = \frac{1}{(g+1)^{a+2}}\left(\frac{g}{g+1}\right)^b$$

では $a > -2, b > -1$ で満たされる．$\Leftarrow$ $a > -1$, $b > -1$ の場合に proper $\displaystyle\int_0^\infty \pi(g)\mathrm{d}g < \infty$

- Stein prior $\|\mu\|^{2-d}$ は $\pi(g; a, b) \equiv 1$（$a = -2$, $b = 0$）なのでぎりぎりダメ

3.4 CASE II

- 被積分関数 $\|\delta_\pi - \delta_i\|^2 m_i(z)$
- アイデア

$$\delta_\pi = \left(1 - \frac{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2-1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g}{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g}\right) z = \left(1 - \frac{d-2}{\|z\|^2} + \star\right) z$$

$$\delta_i = \left(1 - \frac{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2-1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g}{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g}\right) z = \left(1 - \frac{d-2}{\|z\|^2} + \star\star\right) z$$

- δ_i, δ_π のそれぞれの縮小係数の分子に部分積分を適用

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (g+1)^{-d/2-1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g \\
&= \frac{2}{\|z\|^2}\left[(g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\right]_0^\infty \\
&\quad + \frac{d-2}{\|z\|^2}\int_0^\infty (g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g \\
&\quad - \frac{2}{\|z\|^2}\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi'(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g \\
&\quad - \frac{4}{\|z\|^2}\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i(g)h_i'(g)\mathrm{d}g \\
&= -\frac{2\pi(0)}{\|z\|^2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2}\right) + \frac{(p-2)m_i(z)}{\|z\|^2} \\
&\quad - \frac{2}{\|z\|^2}\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi'(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g \\
&\quad - \frac{4}{\|z\|^2}\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i(g)h_i'(g)\mathrm{d}g
\end{aligned} \tag{12}$$

δ_π は $h_i \equiv 1$ とすればよい．また，$h_i(0) = 1$ に注意.

- $\|\delta_\pi - \delta_i\|^2 m_i(z)$

$$\begin{aligned}\|\delta_\pi - \delta_i\|^2 m_i(z) = 4\frac{m_i(z)}{\|z\|^2}\Bigg(&\pi(0)\frac{\exp(-\|z\|^2/2)}{m_\pi(z)} - \pi(0)\frac{\exp(-\|z\|^2/2)}{m_i(z)} \\ &+\frac{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi'(g)\mathrm{d}g}{m_\pi(z)} \\ &-2\frac{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i(g)h_i'(g)\mathrm{d}g}{m_i(z)} \\ &-\frac{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi'(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g}{m_i(z)}\Bigg)^2\end{aligned} \tag{13}$$

- 各成分の絶対値を取る

$$\begin{aligned}\|\delta_\pi - \delta_i\|^2 m_i(z) \le 4\frac{m_i(z)}{\|z\|^2}\Bigg(&\pi(0)\frac{\exp(-\|z\|^2/2)}{m_\pi(z)} + \pi(0)\frac{\exp(-\|z\|^2/2)}{m_i(z)} \\ &+\frac{|\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi'(g)\mathrm{d}g|}{m_\pi(z)} \\ &+2\frac{|\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i(g)h_i'(g)\mathrm{d}g|}{m_i(z)} \\ &+\frac{|\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi'(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g|}{m_i(z)}\Bigg)^2\end{aligned}$$

- $m_1(z) \le m_i(z) \le m_\pi(z)$ に注意すると

$$\begin{aligned}\|\delta_\pi - \delta_i\|^2 m_i(z) \le \frac{4}{\|z\|^2}\Bigg(&2\pi(0)\frac{\exp(-\|z\|^2/2)}{\sqrt{m_1(z)}} + \frac{|\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi'(g)\mathrm{d}g|}{\sqrt{m_\pi(z)}} \\ &+2\frac{|\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i(g)h_i'(g)\mathrm{d}g|}{\sqrt{m_i(z)}} \\ &+\frac{|\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi'(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g|}{\sqrt{m_i(z)}}\Bigg)^2\end{aligned}$$

- 不等式

$$(x+y+z+w)^2 \le 2(x+y)^2 + 2(z+w)^2 \le 4(x^2+y^2+z^2+w^2)$$

- $\|\delta_\pi - \delta_i\|^2 m_i(z)$

$$\|\delta_\pi - \delta_i\|^2 m_i(z) \le \frac{16}{\|z\|^2}\left(4A + B + 4C + D\right) \tag{14}$$

where

$$
\begin{aligned}
A &= \pi(0)^2 \frac{\exp(-\|z\|^2)}{m_1(z)} \\
B &= \frac{(\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \pi'(g) \mathrm{d}g)^2}{m_\pi(z)} \\
C &= \frac{(\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \pi(g) h_i(g) h_i'(g) \mathrm{d}g)^2}{m_i(z)} \\
D &= \frac{(\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \pi'(g) h_i^2(g) \mathrm{d}g)^2}{m_i(z)}
\end{aligned}
$$

- A

$$
\begin{aligned}
\exp(\|z\|^2/2) m_1(z) &= \int_0^\infty (g+1)^{-d/2} \exp(\|z\|^2/2) \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \pi(g) h_1^2(g) \mathrm{d}g \\
&= \int_0^\infty (g+1)^{-d/2} \exp\left(\frac{g\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \pi(g) h_1^2(g) \mathrm{d}g \\
&\geq \int_0^\infty (g+1)^{-d/2} \pi(g) h_1^2(g) \mathrm{d}g
\end{aligned}
$$

より，

$$
A = \pi(0)^2 \frac{\exp(-\|z\|^2)}{m_1(z)} \leq \pi(0)^2 \frac{\exp(-\|z\|^2/2)}{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2} \pi(g) h_1^2(g) \mathrm{d}g} \tag{15}
$$

- B コーシー・シュワルツの不等式より

$$
B \leq \int_0^\infty (g+1)^{-d/2+2} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \frac{\{\pi'(g)\}^2}{\pi(g)} \mathrm{d}g \tag{16}
$$

- D 同様にコーシー・シュワルツの不等式より

$$
\begin{aligned}
D &\leq \int_0^\infty (g+1)^{-d/2+2} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \frac{\{\pi'(g)\}^2}{\pi(g)} h_i^2(g) \mathrm{d}g \\
&\leq \int_0^\infty (g+1)^{-d/2+2} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \frac{\{\pi'(g)\}^2}{\pi(g)} \mathrm{d}g
\end{aligned} \tag{17}
$$

- (16) と (17) より

$$
B + D \leq 2 \int_0^\infty (g+1)^{-d/2+2} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \frac{\{\pi'(g)\}^2}{\pi(g)} \mathrm{d}g \tag{18}
$$

- C：コーシー・シュワルツの不等式より

$$
C \leq \int_0^\infty (g+1)^{-d/2+2} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \pi(g) \{h_i'(g)\}^2 \mathrm{d}g \tag{19}
$$

- (14)，(15)，(18)，(19) より

$$
\begin{aligned}
\|\delta_\pi - \delta_i\|^2 m_i(z) \leq \frac{32}{\|z\|^2} \Bigg(& 2 \frac{\pi(0)^2 \exp(-\|z\|^2/2)}{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2} \pi(g) h_1^2(g) \mathrm{d}g} \\
& + \int_0^\infty (g+1)^{-d/2+2} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \frac{\{\pi'(g)\}^2}{\pi(g)} \mathrm{d}g \\
& + 2 \int_0^\infty (g+1)^{-d/2+2} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right) \pi(g) \{h_i'(g)\}^2 \mathrm{d}g \Bigg)
\end{aligned}
$$

- z に関する積分

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\|z\|^2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{\alpha}\right)\mathrm{d}z &= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\int_0^\infty t^{d/2-1-1}\exp(-t/\alpha)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\Gamma(d/2-1)\alpha^{d/2-1} \\ &= \frac{\pi^{d/2}\alpha^{d/2-1}}{d/2-1}\end{aligned}$$

- 従って,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\|\delta_\pi-\delta_i\|^2 m_i(z)\mathrm{d}z \le 32\frac{\pi^{d/2}2^{d/2-1}}{d/2-1}&\left(\frac{2\{\pi(0)\}^2}{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2}\pi(g)h_1^2(g)\mathrm{d}g}\right. \\ &\left. +\int_0^\infty (g+1)\frac{\{\pi'(g)\}^2}{\pi(g)}\mathrm{d}g + 2\sup_i \int_0^\infty (g+1)\pi(g)\{h_i'(g)\}^2\mathrm{d}g\right)\end{aligned}$$

4 Maruyama and Strawderman (2020 Biometrika)

- δ_π：the generalized Bayes estimator corresponding to $\pi(\theta,\eta)$

$$\pi(\theta,\eta)=\frac{1}{\eta}\times\eta^{p/2}G(\eta^{1/2}\|\theta\|;a,b)$$

- $\delta_{\pi i}$ the proper Bayes estimator corresponding to $\pi_i(\theta,\eta)$

$$\pi_i(\theta,\eta)=\pi(\theta,\eta)h_i^2(\eta),\quad h_i(\eta)=\frac{i}{i+|\log\eta|} \tag{20}$$

- The Bayes risk difference

$$\Delta_i=\int_{\mathbb{R}^p}\int_0^\infty\left\{E\left(\eta\|\delta_\pi-\theta\|^2\right)-E\left(\eta\|\delta_{\pi i}-\theta\|^2\right)\right\}\pi_i(\theta,\eta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\eta$$

- The Bayes estimator $\delta_\pi(x,s)=x-\dfrac{m(\lambda)}{m(1)}x$ where

$$m(\psi)=\int_0^1\int_0^\infty \psi(\lambda,\eta)f_{x,\lambda}(x,\lambda\,|\,\eta)f_s(s\,|\,\eta)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\eta,$$

$$f_{x,\lambda}(x,\lambda\,|\,\eta)=\frac{\eta^{p/2}\lambda^{p/2+a}(1-\lambda)^b}{(2\pi)^{p/2}}\exp\left(-\frac{\lambda\eta}{2}\|x\|^2\right),\ f_s(s\,|\,\eta)=\frac{\eta^{n/2}s^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)2^{n/2}}\exp\left(-\frac{\eta s}{2}\right).$$

- The Bayes risk difference Δ_i の別表現

$$\Delta_i=\int_{\mathbb{R}^p}\int_0^\infty\|x\|^2\left(\frac{m(\lambda)}{m(1)}-\frac{m(\lambda h_i^2)}{m(h_i^2)}\right)^2 m(h_i^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

- The integrand of Δ_i

$$\begin{aligned}\|x\|^2\left(\frac{m(\lambda)}{m(1)}-\frac{m(\lambda h_i^2)}{m(h_i^2)}\right)^2 m(h_i^2) &\le 8\|x\|^2 m(\lambda^2)\left(1-\frac{m(h_i)^2}{m(1)m(h_i^2)}\right) \\ &\le 8\tilde{A}\|x\|^2 m(\lambda^2)h_1^2(s)\end{aligned}$$

最右辺は可積分であると示せる．

- 上の最後の不等式が難しい．ラフに言うと，(13) で上から甘く評価した

$$\begin{aligned}&\frac{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi'(g)\mathrm{d}g}{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)\mathrm{d}g}\\&\quad-\frac{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2+1}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi'(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g}{\int_0^\infty (g+1)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2(g+1)}\right)\pi(g)h_i^2(g)\mathrm{d}g}\\&\le|\cdot|+|\cdot|\end{aligned}$$

  をちゃんと考える感じ．$i\to\infty$ のとき 0 に収束する項なので

定理 4.1: 許容性

The generalized Bayes estimator corresponding to the prior $\pi(\theta,\eta)$ admissible provided

$$-1<a<n/2 \text{ and } b>-1.$$

5 Maruyama and Strawderman (2021) 準備中

- δ_π : the generalized Bayes estimator corresponding to $\pi(\theta,\eta)$

$$\pi(\theta,\eta)=\frac{1}{\eta}\times\eta^{p/2}G(\eta^{1/2}\|\theta\|;a,b)$$

- $\delta_{\pi i}$ the proper Bayes estimator corresponding to $\pi_i(\theta,\eta)$

$$\begin{aligned}\pi_i(\theta,\eta)&=\frac{1}{\eta}\times\eta^{p/2}G_j(\eta^{1/2}\|\theta\|;a,b)h_i^2(\eta)\\G_j(\|\mu\|;a,b)&=\int\frac{1}{g^{p/2}}\exp\left(-\frac{\|\mu\|^2}{2g}\right)\pi(g;a,b)k_j^2(g)\mathrm{d}g\\\pi(g;a,b)&=\frac{1}{(g+1)^{a+2}}\left(\frac{g}{g+1}\right)^b,\quad k_j(g)=1-\frac{\log(g+1)}{\log(g+1+j)}\end{aligned}$$

  つまり，k_j は (8) の h_i と同じ．ここでは，h_i を η の列に使うので，k_j とする
- $-2<a\le-1$ の場合の証明は 3.3 節 CASE I のような感じ．
- $a=-2$ のケース（3.4 節 CASE II に対応）が難しい．（ぎりぎり許容的．$a<-2$ では非許容的）
- 3.4 節 CASE II
  - $\dfrac{d-2}{\|z\|^2}$ を共通にくくりだすために部分積分した (12)
  - またその結果として，ベイズリスク差を上から抑えたときに

$$\int_0^\infty (g+1)\pi(g)\{h_i'(g)\}^2\mathrm{d}g$$

    が登場した．
- 同様に部分積分を適用
  - 一般化ベイズ推定量とベイズ推定量から $\dfrac{p-2}{n+2}\dfrac{s}{\|x\|^2}$ を括りだす

– その結果として，ベイズリスク差を上から抑えたときに

$$\int \frac{h_i^2(\eta)}{\eta}\mathrm{d}\eta \int (g+1)\{k_j'(g)\}^2\mathrm{d}g, \quad \int \eta\{h_i'(\eta)\}^2\mathrm{d}\eta \int \frac{k_j^2(g)}{g+1}\mathrm{d}g$$

が登場する.

補題 5.1: h_i と k_j

1. $\displaystyle\int_0^\infty \eta^{-1}h_i^2(\eta)\mathrm{d}\eta = 2i$
2. $\displaystyle\int_0^\infty \eta\{h_i'(\eta)\}^2\mathrm{d}\eta \le \frac{2}{i}$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{k_j^2(g)}{g+1}\mathrm{d}g \le 2\log(1+j)$
4. $\displaystyle\int_0^\infty (g+1)\{k_j'(g)\}^2\mathrm{d}g \le \frac{5}{\log(1+j)}$

- i も j も ∞ に向かうが,

$$i = \log(1+j)$$

でスピードを制御すると，任意の j について（i は j から決まる）

$$\int \frac{h_i^2(\eta)}{\eta}\mathrm{d}\eta \int (g+1)\{k_j'(g)\}^2\mathrm{d}g < 10, \quad \int \eta\{h_i'(\eta)\}^2\mathrm{d}\eta \int \frac{k_j^2(g)}{g+1}\mathrm{d}g < 4$$

定理 5.1: 許容性

The generalized Bayes estimator corresponding to the prior $\pi(\theta,\eta)$ admissible provided

$$(-2 < a < n/2 \text{ and } b > -1) \quad \text{or} \quad (a = -2 \text{ and } b \ge 0)$$

- 特別な場合
  - $a=-2$, $b=0$ Stein prior $G(\|\mu\|) = \|\mu\|^{2-p}$

$$\pi(\theta,\eta) = \frac{1}{\eta}\eta^{p/2}\|\eta^{1/2}\theta\|^{2-p} = \|\theta\|^{2-p}$$

分散未知の場合の Stein prior に対する一般化ベイズ推定量は，X を改良する（ミニマクス）だけでなく James-Stein 推定量 $\left(1-\dfrac{(p-2)/(n+2)}{\|X\|^2/S}\right)X$ も改良する（Kubokawa (1991 JMVA)）. 今回，さらなる良い性質として「許容性」が追加された

  - $a=-2$, $b=n/2$ simple Bayes

$$\left(1-\frac{(p-2)/(n+2)}{\|X\|^2/S+1+(p-2)/(n+2)}\right)X$$

がミニマクスで許容的

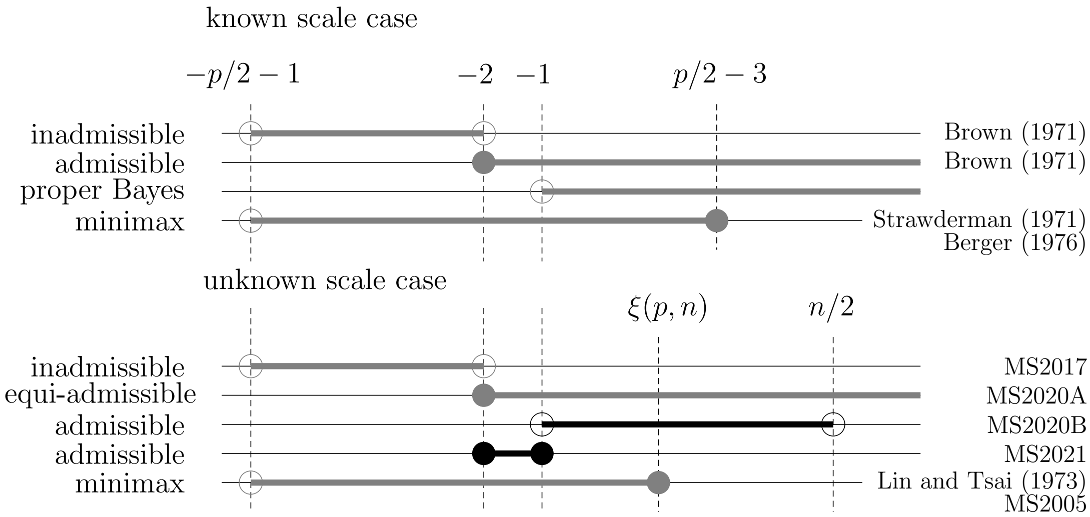

図 2　Ranges of a for admissibility/inadmissibility and minimaxity

6　まとめ

- 「(狭義・広義) 事前分布 $G(\|\mu\|)$ が分散既知の場合に許容的な (一般化) ベイズ推定量を導く事前分布ならば，分散未知の場合に広義事前分布

$$\frac{1}{\eta} \times \eta^{p/2} G(\eta^{1/2}\|\theta\|)$$

に対する一般化ベイズ推定量は許容的である.」

$\Uparrow$ このことを Strawderman prior で確認した

- 1995 年度に修士論文を平均ベクトルの推定をテーマに書いて研究者の道を歩み始めた
- 25 年後に，そのときに認識した許容性に関する未解決問題を解決できたのは大変良かった