代数 /多様体/L-ebge/

2023 年度（令和 5 年度）大学院入試

数 学 問 題 B

実施日時

2022 年（令和 4 年）8 月 24 日（水）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて 7 枚，問題は全部で 6 問である．
- 6 問の中から ちょうど 3 問 を選択して解答すること．下の欄に， 受験番号， 氏名 を記入し，選択した問題の番号を〇で囲め．

受験番号	氏名

選択問題番号						
	1	2	3	4	5	6

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること．
答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれ の答案用紙に 受験番号， 氏名， 問題番号 を記入すること．
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] G を位数が n の有限群とし，$\sigma : G \longrightarrow G$ を群の同型写像として，G の部分集合 I と J を

$$I = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}, \qquad J = \{g \in G \mid \sigma(g) = g^{-1}\}$$

と定義する．I と J の要素の個数をそれぞれ $|I|, |J|$ と表す．$|I| = 1$ かつ $|J| > n/2$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) σ の 2 回の合成 σ^2 は G の恒等写像であることを示せ．

(2) $G = \{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\}$ であることを示せ．

(3) G はアーベル群であることを示せ．

[2] a, b を実数とする．2 変数実多項式環 $\mathbb{R}[x, y]$ の部分集合

$$A = \left\{ f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \;\middle|\; \text{任意の正の整数 } n \text{ で } \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a, b) = 0 \text{ を満たす} \right\}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A は $\mathbb{R}[x, y]$ の部分環であることを示せ．

(2) $(x - a)(y - b)$ で生成される A の単項イデアルを I とする．I が素イデアルであるかないか，理由をつけて答えよ．

(3) A がネーター環であるかないか，理由をつけて答えよ．

[3] M を C^∞ 級多様体，$C^\infty(M)$ を M 上の C^∞ 級関数全体のなす集合とする．M 上の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対して，写像 $[X,Y] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ を

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad f \in C^\infty(M)$$

によって定める．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $f, g \in C^\infty(M)$ に対して，$[X,Y](fg) = f([X,Y]g) + g([X,Y]f)$ となることを示せ．

(2) N を C^∞ 級多様体とする．M から N への C^∞ 級写像 $\varphi : M \longrightarrow N$ が，任意の $p \in M$ で $(d\varphi)_p(X_p) = (d\varphi)_p(Y_p) = 0$ をみたすとする．このとき，N 上の任意の C^∞ 級関数 h に対して，$[X,Y](h \circ \varphi) = 0$ となることを示せ．

[4] ユークリッド平面内において，図 1 のように 3 つの正方形に分割可能な多角形 P を考える．ここで P は境界 ∂P を含むものとする．∂P 上でそれら 3 つの正方形の頂点となっている点を図 1 のように $V_1, V_2, \ldots, V_8$ とおく．

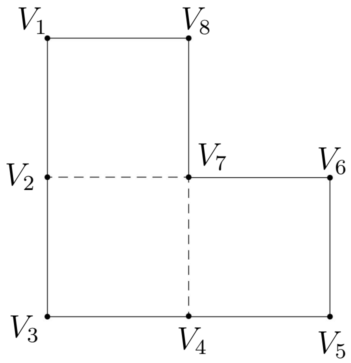

図 1: 多角形 P

位相

境界 ∂P は $V_1, V_2, \ldots, V_8$ によって 8 つの線分に分割されるが，以下，これらの線分はその両端の点も含むとする．これらの線分を，垂直方向の線分は水平方向の平行移動により移り合う線分と同一視し，水平方向の線分は垂直方向の平行移動により移り合う線分と同一視する．つまり，線分 V_2V_1 は線分 V_7V_8 と，線分 V_3V_2 は線分 V_5V_6 と，線分 V_1V_8 は線分 V_3V_4 と，線分 V_7V_6 は線分 V_4V_5 と，それぞれ平行移動によって同一視する．これらの同一視によって得られる P の商空間を S とおく．また，この商写像を $\psi\colon P \longrightarrow S$ で表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 点集合 $\{V_1, V_2, \ldots, V_8\}$ の ψ による像の要素の個数を求めよ．また S のオイラー標数を求めよ．

(2) S が 2 次元位相多様体であることを，多様体の定義に従って示せ．

(3) S のホモロジー群 $H_0(S), H_1(S), H_2(S)$ を求めよ．

抽選

[5] X を空でない集合，$\mathcal{F}$ を X 上の σ-加法族，μ を可測空間 $(X,\mathcal{F})$ 上の測度とする．また g を X 上の非負の μ-可積分関数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 集合関数 $\nu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\nu(A) = \int_A g(x)\,d\mu(x), \quad A \in \mathcal{F}$$

と定義する．ν は可測空間 $(X,\mathcal{F})$ 上の測度であることを示せ．

(2) f を X 上の非負の $\mathcal{F}$-可測関数とするとき，

$$\int_X f(x)\,d\nu(x) = \int_X f(x)g(x)\,d\mu(x)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\mu\left(\{x \in X \mid g(x) = 0\}\right) = 0$ のとき，μ は ν に関して絶対連続であることを示せ．

[6] 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の実数値 C^1 級関数 $f(t,s)$ に対して,

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(t,s)\,ds = f(t,t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(t,s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^1 級関数 $u(t)$ で,

$$\frac{u(t)}{2} = \sin t + \int_0^t u(s)\cos(t-s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

を満たすものを求めよ.