大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

令和５年度大学院前期課程入試問題

（数学）

问题一共5道题！

- 問題用紙は表紙を入れて３枚である．
- 問題数は５題である．
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること．
- 各解答欄の左上に，解答した問題の問題番号を記入すること．
- 解答用紙の裏面は使用しないこと．裏面に書いたものは無効である．

1.关于在实数R上除x0一点外连续的函数f(x)，有以下极限成立：。。。。
该极限存在时，我们可以把它叫做f(x)的积分主值，用p.v.。。。表示，求下面积分的积分主值

1. 実数直線 $\mathbb{R}$ から 1 点 x_0 を除いた集合において連続な関数 $f(x)$ に対して，

$$\lim_{\epsilon \to +0} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\epsilon}^{+\infty} f(x)\,dx \right)$$

が存在するとき，この値を積分の主値（principal value of integration）といい，$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ と表す．次の値を求めよ．

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3-1}\,dx.$$

2. 点 $\mathrm{P}(x,\, y)$ が $\mathbb{R}^2$ 平面上の曲線 $x^2+y^2+2axy=1$ を動くとき，関数

$$f(x,\, y) = xy$$

を考える．以下の問いに答えよ．

2.点P(x,y)在2维平面的曲线。。。。上运动时，考虑函数f(x,y)=xy
回答以下问题：
（1）a=-1/2时，求f的最大最小值
（2）a为正数时的最值

(1) $a = -\dfrac{1}{2}$ のときの f の最大値・最小値を調べよ．

(2) a を正の実数とするときの f の最大値・最小値を調べよ．

3. z_0 を 0 でない複素数として，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を複素数列とする．以下の主張は正
否か，正しければ証明し，誤りであれば反例を挙げよ．

3.z0为非零复数，存在关于an的复数数列{an}，下面命题是否正确？正确的话请证明，不正确的话请举出反例

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ が絶対収束するならば，$|z| \leq |z_0|$ となる任意の複素数 z に対して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する．

。。。级数若绝对收敛，则对于任意满足|z|<=|z0|的复数z,级数。。。也绝对收敛。

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ が収束するならば，$|z| < |z_0|$ となる任意の複素数 z に対して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する．

。。。级数收敛的话，满足|z|<=|z0|的z值，。。。级数绝对收敛。

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ が収束するならば，$|z| = |z_0|$ となる任意の複素数 z に対して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する．

。。。级数收敛，满足|z|=|z0|的任意复数z，。。。级数收敛。

4.实方阵在R3*R3空间中，把A矩阵的范数定义为：。。。.回答以下问题：

(1)

4. 実3次正方行列の集合を $\mathbb{R}^{3\times3}$ で表し，$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ のノルムを $\|A\| = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq 3} a_{ij}^2}$ で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 直交行列を用いて，次の $S \in \mathbb{R}^{3\times3}$ を対角化せよ．

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.用正交变换矩阵将S对角化；
2.证明任意两个能够使得S对角化的2个正交矩阵U,V。有。。。。成立；
3.求解使得等式。。。成立的秩为2的X矩阵

(2) $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ とふたつの任意の直交行列 $U, V \in \mathbb{R}^{3\times3}$ に対して $\|UAV\| = \|A\|$ が成り立つことを示せ．

(3) (1) の S に対して，$\|S - X\| = 1$ となる階数2の $X \in \mathbb{R}^{3\times3}$ をひとつ求めよ．

5. m を正の実数として，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + (x^2 + y^2)^m}$$

とする．以下の問いに答えよ．

m为正整数，在R2空间上的二元函数f，如下：。。。。

1.求f最大值
2.求解以下二重积分收敛的充分必要条件

(1) f が最大値をもつための m に対する必要十分条件を求めよ．

(2) 次の積分が収束するための m に対する必要十分条件を求めよ．

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)|\, dxdy.$$