Lebesgue 積分論の演習

作成者：サボテン (@banbannikoniko)

2021 年 12 月 26 日

目 次

1　はじめに

Notation.

- 位相空間 (X,τ) の点列 (x_n) の部分列とは，ある順序を保つ単射 (order preserving injection) $i:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ (または $i:\mathbf{Z}_{\geq 0}\to\mathbf{Z}_{\geq 0}$；添字の集合は全順序集合であればどうでもよい.) に対して，$(x_{i(n)})_{n=1}^{\infty}$ と表されるものをいう．また，$(i(n))$ を (n) の部分列ともいう．

  点列が $x:\mathbf{N}\to X$ という写像であったことを思い返すと，部分列とは，写像 $x\circ i:\mathbf{N}\to X$ であるといえる．

- 実数 $a\in\mathbf{R}$ に対して，その positive part を a_+ で表す．ここに，

$$a_+ := \max(a,0)$$

  である．このとき，次が成り立つ:

  - $a\leq a_+$,
  - $a\leq b$ ならば $a_+\leq b_+$.

- $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ を開集合とする．連続関数 $u:\Omega\to\mathbf{R}$ に対して，その台 (support) を $\operatorname{supp} u$ と書き，

$$\operatorname{supp} u := \overline{\{x\in\Omega;\ u(x)\neq 0\}}$$

  と定める．ただしこの定義は u が連続関数である場合の定義であって，一般に可測関数の台の定義はそれとは異なることに注意されたい．

- $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ を開集合とする．また，$\partial\Omega$ で Ω の境界を表す．連続関数からなる集合を

$$C(\Omega) := \left\{u:\Omega\to\mathbf{R}^N;\ u \text{ は連続関数}\right\}$$

  と定める．ただし，$C(\Omega)$ の元は非有界であることも許すとする．そこで，$C(\Omega)$ の元であって，一様有界であるものからなる部分集合を $BC(\Omega)$ で表す．

$$BC(\Omega) := \left\{u\in C(\Omega);\ \sup_{x\in\Omega}|u(x)|<+\infty\right\}.$$

  この $BC(\Omega)$ にいわゆる sup ノルムを備えると，Banach 空間になることが示される．このことは認める．さらに，つぎのようにして部分空間を定める．

$$C_0(\Omega) := \left\{u\in C(\Omega);\ u_{|\partial\Omega}\equiv 0\right\},$$
$$C_c(\Omega) := \{u\in C(\Omega);\ \operatorname{supp} u\subset\Omega\}.$$

  ここで，$\operatorname{supp} u$ はいつでも閉集合 (closed) であり，Ω は開集合 (open) であることに注意されたい．

  人によっては，C_c のことを C_0 とする人も多い．しかし，たとえば

$$\sin(\cdot)\in C_0(]0,\pi[)$$

  であるが，

$$\sin(\cdot)\notin C_c(]0,\pi[)$$

であることに鑑みれば，C_c と C_0 ははっきりと区別するほうがいいように思われる．

ただし，上の定義において，

$$C_0(\mathbf{R}^N) := \left\{ u \in C(\mathbf{R}^N);\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \right\}$$

と約束する．これを，"無限遠で退化する関数"のクラスと呼ぶことにする．

- 包含関係としては，

$$C_c(\Omega) \subset C_0(\Omega) \subset BC(\Omega) \subset C(\Omega)$$

である．また，$\|\cdot\|_\infty$ で sup ノルムを表すとすると，

$$C_0(\Omega) := \overline{C_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty}$$

であることが知られている．ただし右辺は sup ノルムによる完備化のことである．ゆえに，$(C_0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ も Banach 空間である．ところが，$(C_c(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ は決して Banach 空間にはならないことが知られている．

- 高階の微分ができるクラスについては，

$$C_0^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega),$$
$$C_c^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega),$$

のように定める．

- この note では，Euclid 空間の Lebesgue 測度も一般の測度も，記号の区別はせず，ともに μ と書くことにする．測度空間は $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と書くことが多い．Ω と書くのは，Euclid 空間の開集合を $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ と書くことがとても多い筆者の習慣のせいである．抽象的には $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と書くべきだった．

定義 (Lebesgue 空間)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を (抽象的な) 測度空間とする．$1 \le p < \infty$ に対して，Lebesgue 空間 $L^p(\Omega; \mathrm{d}\mu)$ は

$$L^p(\Omega;\mathrm{d}\mu) := \left\{ u : \Omega \to \mathbf{C};\ u \text{ は } \mu\text{-可測であり},\ \int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) < +\infty \right\} \Big/ \sim,$$
$$L^\infty(\Omega;\mathrm{d}\mu) := \left\{ u : \Omega \to \mathbf{C};\ u \text{ は } \mu\text{-可測であり},\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| < +\infty \right\} \Big/ \sim,$$

と定義される．ここに，$\sim$ は μ-a.e. で一致する可測関数を同一視する同値関係である．このとき，$L^p(\Omega;\mathrm{d}\mu)$ $(1 \le p \le \infty)$ にはノルムが次のように定まる：

$$\|u\|_{L^p(\Omega;\mathrm{d}\mu)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} & \text{if } p \in [1,\infty[, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

以下では，誤解の余地がない限り，μ や Ω を省略することがある．また，ノルムも，$\|\cdot\|_p$ のように書くこともある (もはやだれもここまで詳しく書く人はいまい)．
よく知られたように，$p \in [1,\infty]$ に対して，ノルム線形空間 $(L^p(\Omega;\mathrm{d}\mu), \|\cdot\|_{L^p(\Omega;\mathrm{d}\mu)})$ は完備であり，Banach 空間である．
また，局所 Lebesgue 空間というクラスを定義する．$p \in [1,\infty]$ に対して，

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathrm{d}\mu) := \left\{ u : \Omega \to \mathbf{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} u \text{ は可測関数}, \\ \text{任意のコンパクト可測集合 } K \subset \Omega \text{ に対して} \\ u \in L^p(K;\mathrm{d}\mu) \end{array} \right\}.$$

局所 Lebesgue 空間にはノルムは定まらない．線形空間ではあるが，ノルム空間ではない．
次に，数列空間 $\ell^p(\mathbf{N})$ を以下で定める：

$$\ell^p(\mathbf{N}) := \left\{ u : \mathbf{N} \to \mathbf{C};\ \|u\|_{\ell^p(\mathbf{N})} < +\infty \right\},$$

where

$$\|u\|_{\ell^p(\mathbf{N})} := \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^\infty |u(n)|^p\right)^{1/p} & \text{if } p \in [1,\infty[, \\ \sup_{n\ge1} |u(n)| < +\infty & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

このとき，$(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_{\ell^p(\mathbf{N})})$ もまた Banach 空間である．また，数列空間も Lebesgue 空間の一種である．測度 μ は $\mathbf{N}$ 上の数え上げ測度 (counting measure) $\mu = \#$ である．完全加法族はベキ集合 $2^{\mathbf{N}}$ である．よって，$\ell^p(\mathbf{N}) = L^p(\mathbf{N};\mathrm{d}\#)$ ともかける．さらに，数列として，$u \in \ell^p(\mathbf{N})$ を $u = (u_n)_n$ とも書く．

———○———○———○———○———○———○———○———○———○———

$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ を開集合とし，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．また，$p \in [1,\infty[$ とする．この note では,

$$C_c(\Omega) \subset L^p(\Omega;\mathrm{d}\mu) \quad \text{densely},$$

つまり，任意の $u \in L^p(\Omega;\mathrm{d}\mu)$ に対して $C_c(\Omega)$ の元でいくらでも良い精度で近似できること，は認めることにする．

———○———○———○———○———○———○———○———○———○———

また，この note では (というよりも解析学全般では)，以下の収束定理はよく使う．

Theorem 1.1 (収束定理)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は測度空間とする．

(i) (単調収束定理，Monotone Convergence Theorem(MCT))

$u_n, u : \Omega \to [0, \infty[$ $(n \in \mathbf{N})$ は可測関数の列とし，μ-a.e. $x \in \Omega$ に対して，$0 \leq u_1(x) \leq u_2(x) \leq \cdots \leq u_n(x) \leq \cdots \to u(x)$ が成り立つとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}\mu$$

が従う (これは両辺が無限大の場合であっても成り立つ)．

(ii) (Fatou の補題，Fatou's Lemma)

$u_n, u : \Omega \to [0, \infty[$ $(n \in \mathbf{N})$ は可測関数の列とする．このとき，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)\,\mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}\mu$$

が従う (これは両辺が無限大の場合であっても成り立つ)．

(iii) (優収束定理，Dominated Convergence Theorem(DCT))

$u_n, u : \Omega \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ は可測関数の列とし，μ-a.e. $x \in \Omega$ に対して，$u_n(x) \to u(x)$ $(n \to \infty)$ が成り立つとする．もしもある可積分関数 $k \in L^1(\Omega)$ が存在して，μ-a.e. $x \in \Omega$ に対して，$|u_n(x)| \leq k(x)$ が成り立つならば，

- (u_n) は $L^1(\Omega)$ の中で有界，i.e., $\sup_{n\geq 1} \int_\Omega |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.
- u は可積分，i.e., $u \in L^1(\Omega)$.
- $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$, i.e.,

$$\int_\Omega |u_n(x) - u(x)|\,\mathrm{d}\mu \to 0 \ (n \to \infty).$$

さらに，

$$\int_\Omega u_n(x)\,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}\mu \ (n \to \infty)$$

が成り立つ．

(iv) (Generalized Fatou's Lemma)

$u_n, u : \Omega \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ は (非負値とは限らない一般の) 可測関数の列とする．また，ある可積分関数 $k \in L^1(\Omega)$ が存在して，

$$k(x) \leq u_n(x) \quad \text{for } \mu\text{-a.e. } x \in \Omega$$

が成り立つとする．このとき，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)\,\mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}\mu$$

が従う (これは両辺が無限大の場合であっても成り立つ)．

注意. 最後の Generalized Fatou's lemma を見るとわかるように，Fatou's lemma の本質は，関数列が下から可積分関数で支えられていることである．

逆に，(u_n) が可積分関数で下から支えられていないときには，Fatou's lemma の主張が成り立たない反例がある (考えてみよ)．答えは，χ_A を集合 A の characteristic function として，

$$u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$
$$u_n(x) = -n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$$

である．詳細は各自検証せよ．

2 Lebesgue 空間の性質

問題 (Lebesgue 空間の層構造).

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．

(i) $\mu(\Omega) < +\infty$ なとき (つまり有限測度空間)，

$$1 \le p < q \le \infty \ \Rightarrow\ L^p(\Omega; \mathrm{d}\mu) \supset L^q(\Omega; \mathrm{d}\mu)$$

であることを示せ．特に，

$$\|u\|_{L^p(\Omega;\mathrm{d}\mu)} \le C\|u\|_{L^q(\Omega;\mathrm{d}\mu)}$$

が成り立つ．ただし，定数 $C > 0$ は u のとり方には依存しないものであり，p, q や Ω, μ には依存する．

> **注意.** ここで，上のように不等式に出てくる定数 C は $C > 0$ であって，着目している元や空間には依存しない generic な定数 (本質的に無害な定数) を意味する．省略記号として，$f \lesssim g$ と書くと，ある定数 $C > 0$ が存在して，$f \le Cg$ なることと定める．また，$f \simeq g$ を $f \lesssim g$ かつ $f \gtrsim g$ なることと定める．

(ii) 一般には，$\mu(\Omega) = \infty$ のときには，$L^p(\Omega; \mathrm{d}\mu)$ と $L^q(\Omega; \mathrm{d}\mu)$ $(1 \le p \ne q \le \infty)$ にはいかなる包含関係も成り立たない．このことを，反例を挙げるなどして示せ．

(iii) 数列空間に対して，

$$1 \le p < q \le \infty \Rightarrow \ell^p(\mathbf{N}) \subset \ell^q(\mathbf{N})$$

が成り立ち，特に，

$$\|u\|_{\ell^q(\mathbf{N})} \le \|u\|_{\ell^q(\mathbf{N})}$$

が成り立つことを示せ．

(iv) $1 \le p \le \infty$ に対して，

$$L^p(\Omega; \mathrm{d}\mu) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathrm{d}\mu)$$

が成り立つ．このことから，積分を考える可測関数のクラスの中で，充分広いクラスが $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathrm{d}\mu)$ であるといえる．

(v) $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathrm{d}\mu)$ に入らない初頭的な関数の例を挙げよ．ただし，測度空間は $(]-1, 1[, \mathcal{B}, \mu)$ で μ は通常の Lebesgue 測度であるとしてよい．

□

3　積分の収束

問題 (Generalized Fatou's Lemma).

Theorem 1.1 における Generalized Fatou's Lemma を証明せよ．ただし，単調収束定理と Fatou's lemma は用いて良い．

問題 (平均収束と概収束).

$-\infty \le a < b \le +\infty$ とし，開区間 $I :=]a, b[$ に Lebesgue 測度 μ を備える．以下を示せ．

(i) $u, u_n \in L^1(I)$ $(n \in \mathbf{N})$ に対して，$u_n \to u$ in $L^1(I)$ とする．すなわち，

$$\int_I |u_n - u| \, \mathrm{d}\mu \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立っているとする．このとき，ある部分列 $(i(n))$ が存在して，

$$u_{i(n)} \to u \quad \mu\text{-a.e. on } I$$

が従う．

> **注意.** これを,「平均収束から概収束する部分列を抜き出す」操作という．積分の意味での収束，言い換えると，L^p-収束を平均収束ということがある．現代の解析学では L^p-強収束ということが多いように思う (弱収束もある)．一方，"ほとんどいたる所の各点収束"を短く概収束と呼ぶことがある．しかし現代の解析学では単に各点収束という人も多い．なぜなら，誰もが，"ほとんど至るところ"の話であることを認識しているからである．

(ii) 上の主張は,「部分列に降りる」操作を省くことはできない．つまり，$u_n \to u$ in $L^1(I)$ であるときに，$u_n \to u$ μ-a.e. on I を導くことはできない．このことを，反例を挙げることで示せ．言い換えると，

$$\begin{aligned} u_n &\to u \quad \text{in } L^1(I), \\ u_n &\not\to u \quad \mu\text{-a.e. on } I, \end{aligned}$$

なる関数列 u_n を挙げればよい． □

問題 (各点収束と強収束).

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．$u, u_n : \Omega \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ を可測関数とし，μ-a.e. $x \in \Omega$ に対して $u_n(x) \to u(x)$ が成り立っているとする．

(i) このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \Big||u_n(x)|-|u_n(x)-u(x)|\Big|\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}\mu$$

を示せ.

(ii) もしも，さらに $\int_\Omega |u_n|\,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega |u|\,\mathrm{d}\mu$ であれば,

$$\int_\Omega |u_n-u|\,\mathrm{d}\mu \to 0\ (n\to\infty)$$

が成り立つことを示せ.

| **Hints.** (i) 優収束定理.

問題 (Brezis-Lieb's lemma).

$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間とする．関数 $j:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は，次を満たすとする：

$$\begin{cases} \bullet\ j\ \text{は連続関数である.} \\ \bullet\ j(0)=0. \\ \bullet\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, C=C_\varepsilon>0 \text{ s.t. } \forall\, a,b\in\mathbf{R}, \\ \qquad\qquad |j(a+b)-j(a)|\le \varepsilon|j(a)|+C|j(b)|. \end{cases}$$

さらに，$u,u_n:\Omega\to\mathbf{R}$ $(n\in\mathbf{N})$ は μ-可測関数の列とし,

$$\begin{cases} \bullet\ u_n\to u \quad \mu\text{-a.e. on } \Omega, \\ \bullet\ \sup_{n\in\mathbf{N}}\int_\Omega |j(u_n)|\,\mathrm{d}\mu<\infty, \end{cases}$$

を満たすとする．このとき,

$$\text{(BL)}\qquad \int_\Omega |j(u_n)-j(u)-j(u_n-u)|\,\mathrm{d}\mu\to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ．これを *Brezis-Lieb's lemma* という.

そこで，以下の順序で Brezis-Lieb の補題を示そう.

(i) $j(u)\in L^1(\Omega;\mathrm{d}\mu)$ である.

(ii) $(j(u_n-u))$ は Banach 空間 $L^1(\Omega;\mathrm{d}\mu)$ の中で有界である．すなわち,

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\int_\Omega |j(u_n-u)|\,\mathrm{d}\mu<+\infty$$

が成り立つ.

(iii) $\varepsilon > 0$ を任意にとって固定する．優収束定理により，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (|j(u_n)-j(u_n-u)-j(u)|-\varepsilon|j(u_n-u)|)_+\,\mathrm{d}\mu = 0$$

が成り立つ．

(iv) 結論 (BL) を示せ．ここで，極限を取る順番は $n\to\infty$ の後に $\varepsilon\to 0_+$ とすればよい．また，$n\to\infty$ の際に，極限が存在するかわからない場合は，ひとまず $\limsup_{n\to\infty}$ とすればよい． □

> **注意.** ちなみに，この Brezis-Lieb の補題は，「refinement of Fatou's lemma」と喩えられることがある．それはなぜであるか？Fatou's lemma と比較して考えてみてほしい．

問題 (Brezis-Lieb's lemma の例).

$1 \le p < \infty$ に対して，$j(t) := |t|^p$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$C = C_\varepsilon > 0$ が存在して，

$$||a+b|^p - |a|^p| \le \varepsilon|a|^p + C|b|^p, \quad \forall\, a, b \in \mathbf{C}$$

が成り立つことを示せ．

ゆえに，Brezis-Lieb's lemma により，$u, u_n : \Omega \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ に対して，

- $u_n \to u$ μ-a.e. on Ω,
- $\sup_{n\in\mathbf{N}}\int_\Omega |u_n|^p\,\mathrm{d}x < +\infty$,

が成り立つとき，

$$\int_\Omega ||u_n|^p - |u|^p - |u_n-u|^p|\,\mathrm{d}x \to 0$$

が成り立つ． □

問題 (Brezis-Lieb's lemma の応用: Lebesgue norm の平行移動連続性).

$(\mathbf{R}^N, \mathcal{F}, \mu)$ を Lebesgue 測度空間とし，$p \in [1, \infty[$ とする．このとき，Lebesgue 空間のノルムは平行移動に関して連続である．つまり，

$$\lim_{\mathbf{R}^N \ni \delta \to 0}\int_{\mathbf{R}^N} |u(x+\delta)-u(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) = 0 \quad \forall\, u \in L^p(\mathbf{R}^N).$$

ここで，極限は $\delta \in \mathbf{R}^N$ が原点に任意の仕方で近づく時のそれである．これを示せ．

Hints. Brezis-Lieb's lemma を使う．$j(u)=|u|^p$ とする．また，証明では $\mathbf{R}^N \ni \delta_n \to 0$ なる任意の点列に関して，$u_n(x) := u(x+\delta_n)$ $(x \in \mathbf{R}^N,\ n \in \mathbf{N})$ という関数列に対して Brezis-Lieb's lemma を適用すれば充分である．

注意． この命題は，そのままでは優収束定理 (DCT) によっては示されないものとして認知されている．普通の証明では，コンパクト台の連続関数で近似をして，一様連続性に帰着させるものが有名である．

———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———

筆者は，優収束定理の一般化について調べていたときに，次の命題を知った．

Proposition 3.1. (Ω,μ) を測度空間とし，$u, u_n : \Omega \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ は可測関数とする．もしもある可積分関数 $k, k_n \in L^1(\mathbf{R}^N)$ $(n \in \mathbf{N})$ が存在して，

- $|u_n| \le k_n$ (μ-a.e., $n \in \mathbf{N}$),
- $k_n \to k$ μ-a.e.,
- $\int_\Omega k_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega k \,\mathrm{d}\mu$ $(n \to \infty)$,

をみたすならば，

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n - u| \,\mathrm{d}\mu = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu,$$

が成り立つ．しかも，これは必要充分であり，すなわち，$u_n \to u$ in $L^1(\mathbf{R}^N)$ ならば，上の性質を全て満たす $k, k_n \in L^1(\mathbf{R}^N)$ $(n \in \mathbf{N})$ が存在する．

つまり，これは DCT(優収束定理) の一般化であり，なおかつ L^1 収束と必要充分であるので，完璧に見える．しかしながら，優関数 k_n に関する 3 番目の条件: $\int k_n \to \int k$ という条件が曲者だと思われる．なぜなら，仮に優関数 k_n が見つかったとして，この 3 番目の条件を確かめるのが現実的ではないと思われるからだ．ここでは k_n の列に対しては DCT は使えない．なぜなら，もしも k_n の優関数が見つかるならば，それは u_n の優関数にもなっているはずであり，直接 u_n に DCT が適用できるからである．ということで，k_n の 3 番目の条件は例えば：(i) 単調収束定理; (ii) $u_n \to u$ の一様収束，によって示されるであろうが，それは現実的とは思えない．ゆえに，上の命題は，必要充分ではあるがあまり現実的ではないように思う．もしもこの命題が充分に現実的であるという考えがあれば，ぜひ教えていただければ幸いである．

そこで，筆者は，Brezis-Lieb's lemma の証明を見直して，それを一般化することで，DCT と B-L lemma を含むより現実的な generalized DCT を得られるだろうと思い，次の問題を作った．その結果，この試みはうまくいき，さらには上の命題とは違った，極限と積分の順序交換に関する必要充分条件を得た．名付けて *ε-ballooned DCT* である．

———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———

問題 (Generalized DCT, ε-ballooned DCT)．

(Ω,μ) を測度空間とし，$u, u_n : \Omega \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ は可測関数であり μ-a.e. $x \in \Omega$ に対して $u_n(x) \to u(x)$ $(n \to \infty)$ が成り立つとする．

以下の 5 つの状況 (i)–(v) を考える．このとき，implication

$$\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)} \Longleftrightarrow \text{(iv)} \Longleftrightarrow \text{(v)}$$

が成り立つことを示せ.

(i) (Original DCT)
ある可積分関数 $k \in L^1(\Omega)$ が存在して，

$$|u_n| \leq k \quad \mu\text{-a.e. on } \Omega \ (n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ.

(ii) (ε-ballooned DCT 1)
ある関数列 $h_n \in L^1(\Omega)$ $(n \in \mathbf{N})$ が存在して次の 3 つをみたす：

- $h_n \to 0$ μ-a.e. on Ω が成り立つ.
- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $k^\varepsilon \in L^1(\Omega)$ が存在して

$$|u_n| \leq \varepsilon h_n + k^\varepsilon \quad \mu\text{-a.e. on } \Omega \ (n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ.
- (h_n) の有界性, i.e.,

$$\sup_{n \geq 1} \int_\Omega |h_n| \, \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

が成り立つ.

(iii) (ε-ballooned DCT 2)
任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$h_n^\varepsilon \in L^1(\Omega)$ $(n \in \mathbf{N})$ と $k^\varepsilon \in L^1(\Omega)$ が存在して，次をみたす：

- $h_n^\varepsilon \to 0$ μ-a.e. on Ω,
- $|u_n| \leq \varepsilon h_n^\varepsilon + k^\varepsilon \quad \mu$-a.e. on Ω $(n \in \mathbf{N})$,
- $\displaystyle\sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{n \to \infty} \int_\Omega \left|h_n^\varepsilon\right| \mathrm{d}\mu < +\infty$.

(iv) (well-known generalized DCT)
ある $k, k_n \in L^1(\Omega)$ $(n \in \mathbf{N})$ が存在して，

- $k_n \to 0 \quad \mu$-a.e. on Ω $(n \to \infty)$,
- $|u_n| \leq k_n + k \quad \mu$-a.e. on Ω $(n \in \mathbf{N})$,
- $\displaystyle\int_\Omega |k_n| \, \mathrm{d}\mu \to 0$ $(n \to \infty)$,

をみたす.

(v) (L^1-convergence)

$u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$, i.e.,

$$\bullet \int_\Omega |u_n - u| \, \mathrm{d}\mu \to 0 \ (n \to \infty)$$
$$\bullet \int_\Omega u_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu \ (n \to \infty),$$

がなりたつ.

Hints. 証明の順序は

$$\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)} \Longrightarrow \text{(v)} \Longrightarrow \text{(iv)} \Longrightarrow \text{(iii)}$$

が一番簡単だと思う．特に (iii)$\Longrightarrow$(v) 以外はすぐにわかるだろう．証明は MCT や Fatou's lemma から DCT を証明した方法にならってなされる．その際，Generalized Fatou's lemma を用いると少し簡単になる．さらに，実数列 $(a_n), (b_n)$ に対して，

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

という事実 (Prove it!) が便利だろう．ε(任意) 付きで不等式を示して，最後に $\varepsilon \to 0$ とする．
また，ここでは original DCT(つまり (i)$\Rightarrow$(v)) さえも主張に入れているので，証明に original DCT を使わず，MCT や Fatou's lemma だけで完成されればなおよい．もちろん，DCT を用いても問題はない．当然のことながらその場合には，oroginal DCT は別途証明されている必要がある．

注意. B-L lemma は"ε-ballooned DCT 1"を使えばすぐに証明できる．
筆者は先に，(iv) はチェックするのが現実的ではない旨のことを書いた．そこでオルタナティブとして (iii) を提案する (応用上は (ii) で充分だとおもう)．こちらは h_n^ε の 3 つ目の条件が確かめやすいことが売りである．このように，$\varepsilon > 0$ の自由度を持たせるとなにかと便利だというのは解析学の知恵である．最後に $\varepsilon \to 0_+$ とすることを見越すのである．こうしたことから，解析学は"不等式の学問である"と筆者は思っている．"ε のゆとりを与えるからその範囲内でうまくやりなさい"というのが多くの解析学者の信条だと思っている (偏見)．ε-δ 論法を思い返すとよいだろう．そこでは，極限という"等式"が，"ε のゆとり"という"不等式"でもって定式化されていた．

問題 (各点収束と強収束).

(Ω, μ) は"有限"測度空間とする, i.e., $\mu(\Omega) < +\infty$. $p \in]1, \infty]$ とし，$u_n, u \in L^p(\Omega)$ $(n \in \mathbf{N})$ は

$$\begin{cases} u_n \to u \quad \mu\text{-a.e. on } \Omega, \\ \sup_{n\ge1} \|u_n\|_{L^p(\Omega)} < +\infty, \ \text{i.e., } u_n \text{ は有界列}, \end{cases}$$

をみたすとする．このとき，任意の $r \in [1, p[$ に対して，

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^r(\Omega)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty, \\ \text{i.e.,} \quad \int_\Omega |u_n - u|^r \, \mathrm{d}\mu \to 0 \quad \text{as } n \to \infty, \end{aligned}$$

を示せ．

> 少なくとも二つの証明方法がある．
>
> **そのまえに．** $L^p(\Omega)$ の関数列を考えているのに，$L^r(\Omega)$ において収束を考えるのは，なぜ許されるか，ちゃんと把握しておくこと．
>
> **方法 1.** ε-ballooned DCT を用いる．優関数を見つけるときには，いわゆる ε-Young's inequality (これは正式なよく認知された不等式の名前) をつかう：$0 \le q < p < r$ or $0 \le r < p < q$ なる (p, q, r) の組みを固定すると，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon > 0$, s.t.
>
> $$|s|^p \le \varepsilon |s|^q + C_\varepsilon |s|^r, \quad s \in \mathbf{R}.$$
>
> 具体的にどういう p, r, q を取るかについてはヒントになりすぎるので…
>
> **方法 2.** Egorov の定理，Hölder の不等式，Minkowski の不等式 (三角不等式) などをを使う．Egorov の定理は，小さい測度をくり抜いた集合上で各点収束が一様収束に化ける，という強さがある一方，Ω が測度有限である必要がある．方法 1 は straightforward である一方で，Egorov の定理の使い方についても理解していただけるとうれしい．
>
> **注意．** この問題の主張は：有限測度空間上の L^p-有界列 $(1 < p \le \infty)$ で各点収束するものは，可積分指数を少しだけ緩めると $(r < p!)$，L^r で強収束する．この命題のおかげで修論の進捗が生まれて嬉しかったので問題にしてみた．
> この手の命題は，探せばどこかの教科書にあるだろうが，名前のつくような有名な定理でもないのでどう調べればよいかもよくわからない．実際の論文等では，おそらく，"Proved by Egorov's theorem."くらいで軽く済まされる．その程度の主張はグッと睨めばパッとわかる，みたいなノリだろう．

4 関数不等式と凸性

定義 (Convex function)．関数 $f:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ が凸 (convex) であるとは，

$$\forall\, t\in[0,1],\ \forall\, x,y\in\mathbf{R}^N,\quad f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$

が成り立つことをいう．

問題 (Jensen's inequality).

(i) $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は凸関数とし，$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ は確率空間 (すなわち，$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ は測度空間であって，$\mu(\Omega)=1$ である) とする．このとき，μ-可積分な関数 $u:\Omega\to\mathbf{R}$ に対して，

$$\phi\left(\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu\right)\le\int_\Omega\phi(u)\,\mathrm{d}\mu$$

が成り立つことを示せ．

Hints. 以下に沿って示すと良い．

(a) (凸関数の基本補題 (supporting hyperplane)) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を凸関数として，次の主張を示せ．

(2) $\quad\forall\,\xi\in\mathbf{R},\ \exists\, r\in\mathbf{R}\ \text{s.t.}\quad\forall\,\eta\in\mathbf{R},\ f(\eta)\ge f(\xi)+r\cdot(\eta-\xi),$

ただし，$\cdot$ は $\mathbf{R}$ の標準内積を表す．この主張は，凸関数のグラフは各点で，ある超平面よりも上側にあるという直感的なことを述べている．

(b) (2) において，$\xi=\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu$, $\eta=u(x)$ $(x\in\Omega)$ として両辺を Ω 上で積分する．

注意 (凸関数の劣微分 (Subdifferential))．$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を凸関数とし，$\xi\in\mathbf{R}$ を固定する．式 (2) を満たすような $r\in\mathbf{R}$ の集合

$$\{r\in\mathbf{R};\ \forall\,\eta\in\mathbf{R},\ f(\eta)\ge f(\xi)+r(\eta-\xi)\}$$

を，f の ξ における劣微分といい，$\partial f(\xi)$ で表す．$\partial f(\xi)$ は一般には集合である．たとえば，凸関数 $f(x)=|x|$ や $f(x)=|x|^2$ の原点における劣微分はどういう集合であるか，考えてみてほしい．

(ii) 以下の主張は Jensen's inequality の直接的な系として得られる．これを示せ．

(a) $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ は有限測度空間 (i.e., $\mu(\Omega)<+\infty$) とし，$\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は凸関数とする．このとき，μ-可積分な関数 $u:\Omega\to\mathbf{R}$ に対して，

$$\phi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu\right)\le\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega\phi(u)\,\mathrm{d}\mu.$$

(b) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．また，$v : \Omega \to [0, \infty[$ は $\int_\Omega v(x)\,\mathrm{d}\mu = 1$ を満たすとする．このとき，$u \in L^1(\Omega; \mathrm{d}\mu)$ に対して，

$$\phi\left(\int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \le \int_\Omega \phi(u(x))v(x)\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{3}$$

□

問題 (Hölder's inequality).

先の Jensen's iequality(及びその系) を使って，次の Hölder's inequality を示せ．

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．$1 \le p, p' \le \infty$ with $1/p + 1/p' = 1$(これを Hölder conjugate の関係という) とする．このとき，$u \in L^p(\Omega; \mathrm{d}\mu)$, $v \in L^{p'}(\Omega; \mathrm{d}\mu)$ に対して，

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |u(x)v(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &\le \left(\int_\Omega |u(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |v(x)|^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p'}. \end{aligned} \tag{4}$$

> **Hints.** 不等式 (3) を使う．
> **注意.** 不等式 (4) は
> $$\|uv\|_1 \le \|u\|_p \|v\|_{p'}$$
> とかける．また，この不等式は，$u \in L^p$, $v \in L^{p'}$ なるとき，uv が可積分であることも主張している．つまり，右辺が有限ならば左辺も有限であることを主張し，また右辺が無限大のときは不等式は自明に正しい，と解釈される．

(ii) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，$1 \le p, q, r \le \infty$ with $1/r = 1/p + 1/q$ とする．このとき，$u \in L^p(\Omega; \mathrm{d}\mu)$, $v \in L^q(\Omega; \mathrm{d}\mu)$ に対して，

$$\|uv\|_r \le \|u\|_p \|v\|_q$$

が成り立つ．

> **注意.** これは不等式 (4) の一般化である．さらに次のように一般化もできる．これは補間不等式と呼ばれ，解析学で多用される．

(iii) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，$p, q, r \in [1, \infty]$, $\theta \in [0, 1]$ は

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$$

なる関係を満たすとする．このとき，

$$\|uv\|_r \le \|u\|_p^{\theta}\|v\|_q^{1-\theta}$$

が成り立つ．

(iv) 帰納法を用いて，次を示せ．$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は測度空間とする．$L \in \mathbf{N}$ とし，$p_l \in [1, \infty]$ $(l = 1, \dots, L)$ と $\theta_l \in [0, 1]$ $(l = 1, \dots, L)$ は

$$\frac{1}{p} = \sum_{l=1}^{L} \frac{\theta_l}{p_l}, \quad 1 = \sum_{l=1}^{L} \theta_l,$$

を満たすとする．このとき，

$$\left\| \prod_{l=1}^{L} u_l \right\|_p \le \prod_{l=1}^{L} \|u_l\|_{p_l}^{\theta_l}$$

が成り立つ． □

問題 (Young's inequality).

(i) Jensen's inequality (3) において，$\phi(t) = -\log t$ $(t > 0)$ とする．また，測度空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\{1, \dots, N\}, 2^{\Omega}, \#)$ とする．さらに，$v = (v_n)_{n=1}^N$ with $v_n = 1/N$ $(n = 1, \dots, N)$ とする．このとき，$u = (u_n)_{n=1}^N \in]0, \infty[^N$, に対して，どんな不等式が得られるか？

(ii) 前問において，$v_n \in \mathbf{R}$ with $\sum_{n=1}^N v_n = 1$ とする (つまり，制限を設けない)．このとき，(i) と同じ問題に答えよ．特に，$N = 2$ の場合の不等式を，Young's inequality という． □

問題 (ε-Young's inequality). 前問 (Young's inequality) を用いるか，あるいは直接計算によって，次を示せ：$0 \le p < q < r$ を固定する．$\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_1 = C_{1,\varepsilon}$, $\exists C_2 = C_{2,\varepsilon} > 0$ s.t.

$$|s|^q \le \varepsilon |s|^p + C_1 |s|^r, \quad s \in \mathbf{R},$$
$$|s|^q \le \varepsilon |s|^r + C_2 |s|^p, \quad s \in \mathbf{R}.$$

> **Hints.** $\varepsilon > 0$ を任意にとって固定する．$C_\varepsilon > 0$ を探せば良い．具体的に C_ε を同定しようとしなくてよい (してはいけない)．C_ε はとても大きな正数でよい．
> "不等式の学問"である解析学では，この手の不等式は息を吸うように使う．またいちいち言及されないことも多い．あるいは，"From an elementary in-

equality ..."などどかかれる．こういう不等式のストックを増やすことが解析学の筋トレの一つである．

5 Convolution と Mollification

−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−

• この章では，$\mathbf{R}^N$ とその上の Lebesgue 測度 μ を測度空間として固定する．さらに，積分をするときの $\mathrm{d}\mu$, $\mathrm{d}\mu(x)$ はともに $\mathrm{d}x$ や $\mathrm{d}y$ のように省略して書くことにする．以降，言及はしない．

$u \in L^p(\mathbf{R}^N)$ と $v \in L^q(\mathbf{R}^N)$ に対して，u と v の畳み込み $u * v$ を

$$(u*v)(x) := \int_{\mathbf{R}^N} u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

と定めたい (積分が可積分かどうかわからないのでまだ定められない)．実際はこれは well-defined であることを示す．

−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−

問題 (Young's inequality for convolutions).

$p, q \in [1, \infty]$ は $1/p + 1/q \geq 1$ を満たすとする．$u \in L^p(\mathbf{R}^N)$ と $v \in L^q(\mathbf{R}^N)$ とする．このとき，a.e. $x \in \mathbf{R}^N$ に対して，写像

$$y \mapsto |u(x-y)||v(y)|$$

は可積分であり，a.e. $x \in \mathbf{R}^N$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}^N} u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y$$

は well-defined である．これを

$$(u*v)(x) := \int_{\mathbf{R}^N} u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y$$

と定義し，これを u と v の畳み込みという．さらに，$u \in L^p(\mathbf{R}^N)$ と $v \in L^q(\mathbf{R}^N)$ に対して，$r \in [1, \infty]$ を

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \tag{5}$$

と定めると ($1/\infty = 0$ と定義する)，$u * v \in L^r(\mathbf{R}^N)$ であり，

$$\|u*v\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q \tag{6}$$

が成り立つ．この不等式 (6) を畳み込みに対する Young's inequality という．

この不等式を以下の手順で示そう．

(i) (Case 1: $p = q = 1$) a.e. $x \in \mathbf{R}^N$ に対して，写像

$$y \mapsto |u(x-y)||v(y)|$$

は可積分であることを示し，さらに Young's inequality $\|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1$ を示せ.

> **Hints.** Fubini の定理を使って可積分性を示す．そのためには,
>
> $$\int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \quad \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
>
> のどれか一つが可積分であることを示せば良い．ここでは,
>
> $$\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y < +\infty$$
>
> を示すことを考えると良い.

(ii) (Case 2: $p = 1,\ q \in [1, \infty[$) a.e. $x \in \mathbf{R}^N$ に対して，写像

$$y \mapsto |u(x-y)||v(y)|$$

は可積分であることを示し，さらに Young's inequality $\|u * v\|_q \leq \|u\|_1 \|v\|_q$ を示せ.

> **Hints.** $|u(x-y)v(y)| = |u(x-y)|^{1/q'} |u(x-y)|^{1/q} |v(y)|$ と Hölder's inequality と前問を用いる.

(iii) (Case 3: $p = 1,\ q = \infty$) a.e. $x \in \mathbf{R}^N$ に対して，写像

$$y \mapsto |u(x-y)||v(y)|$$

は可積分であることを示し，さらに Young's inequality $\|u * v\|_\infty \leq \|u\|_1 \|v\|_\infty$ を示せ.

(iv) (Case 3: $p, q \in [1, \infty[$) a.e. $x \in \mathbf{R}^N$ に対して，写像

$$y \mapsto |u(x-y)||v(y)|$$

は可積分であることを示し，さらに Young's inequality $\|u * v\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q$ を示せ.

Hints.

$$|u(x-y)v(y)| = |u(x-y)|^{p/q'}|v(y)|^{q/p'}\left(|u(x-y)|^{1-p/q'}|v(y)|^{1-q/p'}\right)$$

と Hölder's inequality を用いる．今回は

$$\int_{\mathbf{R}^N \ni x}\left|\int_{\mathbf{R}^N \ni y}|u(x-y)v(y)|\,\mathrm{d}y\right|^r \mathrm{d}x < +\infty$$

を示す.

(v) (Case 4: else cases) 残りの場合について，主張を示せ. □

問題

$u \in L^p(\mathbf{R}^N)$, $v \in L^q(\mathbf{R}^N)$ with $1/p + 1/q = 1$ なるとき，$u * v \in C(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$ であることを示せ. □

Hints. u か v のいずれかを $C_c(\mathbf{R}^N)$ の関数で近似すると，近似された畳み込みは連続になる．極限をとると連続性は遺伝する (Why?).

———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———

さて，ある種の畳み込みには，"関数をなめらかにする (正則化)"という面と"関数を近似する"という面がある．このことを確認する．u, v の畳み込み $u * v$ の微分可能性を考えるには，その各座標方向の差分商 (differential quotient) の極限を計算する必要があるが，畳み込みが積分によって定義されていることを踏まえると，ここでは極限と積分の順序交換が発生する．早い話が，積分記号下の微分である．積分記号下の微分について保証する定理については，各自復習されたい．優収束定理を用いるのであれば，適切な優関数を用意すればよいが，差分商が出てくるので，平均値の定理を見越して，微分が一様な優関数を持てばよいだけのことである.

———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———

問題 (Convolution は関数正則化装置).

$\eta \in C_c^k(\mathbf{R}^N)$, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ とする．このとき，$\eta * u \in C^k(\mathbf{R}^N)$ であることを示せ．また，Young's inequality によれば，さらに $\eta * u \in C^k(\mathbf{R}^N) \cap L^1(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$ であることをチェックせよ. □

問題 (Convlution は関数近似装置).

$\eta \in L^1(\mathbf{R}^N)$ を $\int_{\mathbf{R}^N} \eta(x)\,\mathrm{d}x = 1$ なるものとする．さらに，$n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\eta_n(x) := n^N \eta(nx), \quad x \in \mathbf{R}^N,\ n \in \mathbf{N}$$

と定義する．このとき，以下を示せ.

(i) $\|\eta_n\|_1 = 1$ ($n \in \mathbf{N}$) をチェックせよ．

(ii) $p \in [1, \infty[$ とする．$u \in L^p(\mathbf{R}^N)$ であれば，$\eta_n * u \in L^p(\mathbf{R}^N)$ であって，さらに

$$\eta_n * u \to u \quad \text{in } L^p(\mathbf{R}^N).$$

(iii) $u \in C(\mathbf{R}^N)$ ならば $\eta_n * u \in C(\mathbf{R}^N)$ であり，さらに

$$\eta_n * u \to u \quad \text{locally uniformly (局所一様)},$$

i.e., 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}^N$ に対して，

$$\eta_n * u \to u \quad \text{uniformly on } K.$$

Hints. この問題を通して，次の関係式が key となる：

$$\begin{aligned}\eta_n * u(x) - u(x) &= \int_{\mathbf{R}^N} n^N (u(x-y)\eta(ny) - u(x)\eta(ny))\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} (u(x-y/n) - u(x))\eta(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

よって $p \in [1, \infty]$ に対して，積分型の三角不等式 (Minkowski's inequality) により，

$$\|\eta_n * u(\cdot) - u(\cdot)\|_p \le \int_{\mathbf{R}^N} \|u(\cdot - y/n) - u(\cdot)\|_p |\eta(y)|\,\mathrm{d}y.$$

最後に，$n \to \infty$ のもとで優収束定理を用いる． □

問題 (Mollification and density).

Convolution により，関数をなめらかに近似することを考える (mollification という)．$\rho \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ を

- $\operatorname{supp} \rho = \left\{x \in \mathbf{R}^N;\ |x| \le 1\right\}$,
- $\rho \ge 0 \quad \text{on } \mathbf{R}^N$,
- $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1$,

なるものとする (このような関数 ρ を Friedrichs(フリードリクス，フリードリッヒ) の mollifier という)．

さらに，$\rho_n(\cdot) := n^N \rho(n\cdot)$ と定める．

このとき，以下に答えよ．

(i) 具体的に，以上の性質を満たす ρ を構成せよ．単純な式ではかけないが，初等的に構成することはできる．

(ii) $p \in [1, \infty[$ に対して，

$$C^\infty(\mathbf{R}^N) \cap L^p(\mathbf{R}^N) \subset L^p(\mathbf{R}^N)$$

が稠密であることを示せ．つまり，任意の $u \in L^p(\mathbf{R}^N)$ に対して，$u_n \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \cap L^p(\mathbf{R}^N)$ $(n \in \mathbf{N})$ であって

$$u_n \to u \quad \text{in } L^p(\mathbf{R}^N)$$

なるものが存在することを示せ．

(iii) $p \in [1, \infty[$ に対して，

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \subset L^p(\mathbf{R}^N)$$

が稠密であることを示せ．つまり，任意の $u \in L^p(\mathbf{R}^N)$ に対して，$u_n \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ $(n \in \mathbf{N})$ であって

$$u_n \to u \quad \text{in } L^p(\mathbf{R}^N)$$

なるものが存在することを示せ．

(iv) $C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \subset L^\infty(\mathbf{R}^N)$ が稠密であるかどうか，議論せよ．

(v) $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ を開集合とする．このとき，問 (ii) と問 (iii) が $\mathbf{R}^N$ を Ω に置き換えたものが成り立つことを示せ． □

問題 (Lebesgue's differentiation theorem).

$u \in L^p(\mathbf{R}^N)$ とする．さらに，$p \in \mathbf{R}^N$ と $r > 0$ に対して，$B(p, r) := \left\{x \in \mathbf{R}^N;\ |x - p| \le r\right\}$ と定める．さらに，

$$u_r(x) := \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbf{R}^N,\ r > 0,$$

と定める．このとき，以下を示せ．

(i) $u_r \in C(\mathbf{R}^N) \cap L^p(\mathbf{R}^N)$.

(ii) $u_r \to u$ in $L^p(\mathbf{R}^N)$ as $r \to 0_+$.

(iii) ある部分列 $r_n \to 0_+$ $(\mathbf{N} \ni n \to \infty)$ が存在して，$u_{r_n}(x) \to u(x)$ for a.e. $x \in \mathbf{R}^N$.

注意. 平均収束か概収束を導くならば部分列に降りる操作は省けない．しかし一般に，この概収束は全列収束であることが知られている．証明はより複雑になるらしい．

(iv) さらに $u \in C(\mathbf{R}^N)$ であるとき，$u_r(x) \to u(x)$ for all $x \in \mathbf{R}^N$ (全列収束).

Hints. 適切な関数 $\phi_r \in L^1(\mathbf{R}^N)$ で $u_r = \phi_r * u$ とかけることを示し，さらに Convolution の性質を用いる．

注意. 上の主張を Lebesgue の微分定理という．さらに，問 (ii) によれば，ある集合 E with $|\mathbf{R}^N \setminus E| = 0$ が存在して，適切な部分列に降りれば $u_r(x) \to u(x)$ for $x \in E$ とできる．このような $x \in E$ を Lebesgue point という．

(v) 今，1 次元で考えて，$u \in L^p(\mathbf{R})$ ($p \in [1, \infty[$) とする．このとき，ある部分列 $\delta_n \to 0_+$ が存在して，

$$\frac{1}{\delta_n} \int_t^{t+\delta_n} u(s)\,\mathrm{d}s \to u(t) \quad \text{for a.e. } t \in \mathbf{R}$$

が成り立つことを示せ．さらに，もし $u \in C(\mathbf{R})$ であるとき，上の収束はすべての $t \in \mathbf{R}$ で部分列によらずに成り立つことを示せ． □

Hints. 前問の証明を修正すれば良い．

注意. この問の意味するところは：$u \in L^1(\mathbf{R})$ に対して，その原始関数を

$$F(t) := \int_0^t u(t')\,\mathrm{d}t', \quad t \in \mathbf{R},$$

と定めると，F は連続であり (正確には絶対連続)，ほとんど至るところで微分が存在して，

$$\frac{F(t+\delta) - F(t)}{\delta} \to u(t)$$

となる． □

絶対連続な関数と有界変動な関数

可測関数 $f \in [a,b] \to \mathbf{R}$ がある点 $a \in \mathbf{R}$ で $|f(a)| < +\infty$ を満たすとする．このとき，f が絶対連続であることと，ある可積分関数 g が存在して

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(t')\,\mathrm{d}t', \quad t \in \mathbf{R},$$

とかけることは同値であることが知られている．これを微積分の基本定理という．このとき，Lebesgue の微分定理によって，ほとんどすべての点 $t \in [a,b]$ において微分が存在して，$f'(t) = g(t)$ である．また，もし微分 $f' = g$ が連続関数であれば (当然すべての点で微分ができるということ)，もはや古典的な意味での微積分の基本定理が成り立つことは言うまでもない．ポイントは，絶対連続な関数は，ほとんど至るところで微分ができて，微積分の基本定理が成り立つ，とても性質のいい関数であるということである．

それでは，各点で微分ができるが，微積分の基本定理を成り立たせない関数はなにかというと，例えば Cantor's function というものがある．これは，"狭義単調増大かつほとんど至るところで微分ができ，$f'(t) = 0$ をみたす"というものである．微積分の基本定理が成り立たないことは自明である．このように，ほとんど至るところで微分はできるが微積分の基本定理が成り立つとは限らないクラスに，"有界変動関数"のクラスがある．f が有界変動であるとき，Jordan 分解によって単調増大な２つの関数の差で表すことができる．さらに，単調な関数はほとんど至るところで微分ができるという定理から，f がほとんど至るところで微分ができることがわかる．

6 変分法の基本補題

−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−

ここでは"変分法の基本補題"について考える．これは超関数の理論を整備する際に重要な定理である．ちなみに，古典的な解析学からみて，(良い) 関数を一般化したものを"可測関数"といい，可測関数を一般化した概念が"測度"であり，測度をさらに一般化したものが"超関数"である．

ちなみに，(Schwartz[1]の) 超関数 (distribution) とは，$C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ から係数体への"連続な"線形写像のことである．連続性の意味は，ここでは述べない．超関数の理論では，$C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ を $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ と書くことが多い．さらに，略して $\mathcal{D}$ と書く．よってその"双対 dual"である超関数の空間は $\mathcal{D}'$ と書く．そのとき，$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ の元 u を取ると，

$$\mathcal{D} \ni \phi \mapsto \int_{\mathbf{R}^N} u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

という線形写像が超関数である．ゆえに，$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{D}'$ である．ここで，$\int u\phi$ という計算を，"u を ϕ で test する"という．そのことから，$\mathcal{D}$ をテスト関数の空間と呼ぶことも多い．

ちなみに，いわゆる"デルタ関数"も次の意味で超関数である：

$$\delta : \mathcal{D} \ni \phi \mapsto \phi(0).$$

解析学ではこの超関数を *delta measure*, *Dirac's delta*, *delta mass*, *Dirac's measure*, *Dirac's mass* などという．要はいわゆるデルタ関数はただの測度である．

さて，問題となるのは，超関数の一意性であって，つまり，写像

$$\iota : L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N) \to \mathcal{D}'$$

が単射であることの保証である．これを保証するのが変分法の基本補題である．

すなわち，$\iota(u) = 0$ なるとき $u = 0$ であることを保証するのが変分法の基本補題である．言い換えると，$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ に対して，

$$\left[\forall\,\phi \in \mathcal{D},\ \int_{\mathbf{R}^N} u\phi\,\mathrm{d}x = 0\right] \Longrightarrow \left[u = 0 \quad \text{a.e. on } \mathbf{R}^N\right]$$

という主張である．

超関数の理論を離れて再び積分論に戻る．いま，$\mathcal{M}$ で $\mathbf{R}^N$ 上の可測関数からなる大きな集合を表すとする．さらに $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ とする．もし

$$\int_{\mathbf{R}^N} u\phi\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\,\phi \in \mathcal{M},$$

がなりたつとしよう．このとき，$u = 0$ a.e. on $\mathbf{R}^N$ であることはほとんど自明である．なぜなら，テスト関数として，$\phi = \mathrm{sgn}(u)$ という符号関数を与えると，これは可測関数であって，さらに $\int_{\mathbf{R}^N} |u|\,\mathrm{d}x = 0$ が従うので，$u = 0$ a.e. on $\mathbf{R}^N$ を得る．

[1]超関数の理論の創始者は L. Schwartz であるが，Cauchy-Schwarz の不等式の方は別人であり，spelling も違うので要注意．

しかし，u を調べるのに，$\mathcal{M}$ というクラスでテストするのは馬鹿げている．テスト関数の空間が大きすぎるからである．そこで，テスト関数の空間を小さくしていきたい．これは，なるべく楽なテストをしたいという煩悩である．一方，$\mathcal{D}$ は数多の関数空間の中で稠密になる，なのに結構小さな集合であって，とても扱いやすいクラスであるので，テスト関数の空間として $\mathcal{D}$ を選ぶことができれば幸いである．

そこで，以下の問では，テスト関数の空間をだんだんと小さくしていきながら，変分法の基本補題を示す．当然のことながら，テスト関数の空間が大きいほど，変分法の基本補題は自明に近づき，その反面，テストするのが大変である．

−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−◦−−−

問題 (変分法の基本補題 1).

$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ とする．このとき，

$$\int_{\mathbf{R}^N} u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{for all } \phi \in L^\infty_c(\mathbf{R}^N)$$

が成り立つとき，

$$u = 0 \quad \text{a.e. on } \mathbf{R}^N$$

であることを示せ．ここで，$L^\infty_c(\mathbf{R}^N)$ は，可測関数の意味での support がコンパクトな (本質的に) 有界な関数からなる空間とする． □

> **Hints.** 上の commentary の中にほとんど答えがある．

問題 (変分法の基本補題 2).

$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ とする．このとき，

$$\int_{\mathbf{R}^N} u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{for all } \phi \in C_c(\mathbf{R}^N)$$

が成り立つとき，

$$u = 0 \quad \text{a.e. on } \mathbf{R}^N$$

であることを示せ． □

> **Hints.** 変分法の基本補題 1 に帰着する．そこで，稠密性の議論を用いる．$\phi \in L^\infty_c(\mathbf{R}^N)$ に対して，$\phi_n \in C_c(\mathbf{R}^N)$ であって $\phi_n \to \phi$ in $L^1(\mathbf{R}^N)$ なるものを取る (How?)．そして $n \to \infty$ として極限操作を正当化する (How?)．

問題 (変分法の基本補題 3).

$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ とする．このとき，

$$\int_{\mathbf{R}^N} u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{for all } \phi \in C^\infty_c(\mathbf{R}^N)$$

が成り立つとき,

$$u = 0 \quad \text{a.e. on } \mathbf{R}^N$$

であることを示せ. □

| **Hints.** 稠密性の議論により変分法の基本補題 1 や 2 に帰着させる.

7 Sobolev 空間

———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———

ここで，1 次元の Sobolev 空間を導入する．$p \in [1,\infty[$ とする．$I :=]a,b[$ を開区間とする ($I = \mathbf{R}$ も含むものとする)．1 次元 Sobolev 空間 $W^{1,p}(I)$ を

$$W^{1,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I);\ \exists\, g \in L^p(I) \text{ s.t. } \int_I u(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_I g(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t \ \text{ for all } \phi \in C_c^\infty(I) \right\}$$

によって定義する．このとき，関数 $g \in L^p(I)$ を，u の弱微分，または，超関数微分といい，通常の微分と同じく u' や Du とかく．この弱微分の定義は，部分積分に由来する．当然のことながら，古典的な意味での微分が存在するときには，その微分は弱微分と一致する．そのことは部分積分からすぐにわかる．

また，$W^{1,p}(I)$ にはノルム

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} := \left(\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p \right)^{1/p}, \quad u \in W^{1,p}(I),$$

が定まる．このとき，ノルム空間 $(W^{1,1}(I), \|\cdot\|_{W^{1,1}(I)})$ は Banach 空間である (Why?)．このことは認めて良い．

さて，1 次元 Sobolev 空間は，多次元の場合と大きく異なり，次の著しい性質が成り立つ．これを証明せよ．

———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———◦———

問題 (Sobolev 関数の例).

$u(x) = |x|$ とするとき，$u \in W^{1,1}(]-1,1[)$ であることを示し，その弱微分を与えよ．

問題 (1 次元の Sobolev 空間 $W^{1,p}(I)$ の性質).

(i) (弱導関数の一意性) $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ とする．もしもすべての $\phi \in C_c^\infty(I)$ に対して，

$$\int_I u\phi'\,\mathrm{d}x = 0$$

が成り立つならば，

$$u \equiv \text{const.} \quad \text{a.e. on } I$$

であることを示せ．

> **注意.** この主張の意味は，弱導関数が 0 であるならば，定数しかない，というものであるが，これは自明ではない．なぜなら弱微分は古典的な微分と同じかどうか，わからないからである．
>
> **Hints.** いくつか証明の方法はあるが，たとえば，u を mollifier で mollify して，なめらかに近似したものを (u_n) として，$\int_I u_n\phi'\,\mathrm{d}x = 0$ を示す

と (How?)，そこから $u_n = \mathrm{const.}$ が導かれる (How?)．よって極限をとって $u = \mathrm{const.}$ が得られるだろう．

(ii) (1 次元の Sobolev 関数の絶対連続性) すべての $u \in W^{1,p}(I)$ と $|u(c)| < \infty$ なる $c \in]a, b[$ に対して，

$$u(t) = u(c) + \int_c^t u'(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{for a.e. } t \in]a, b[,$$

が成り立つことを示せ．ただし u' は弱微分である．

Hints. (i) を使う．

注意. この問から，ある絶対連続関数 $\tilde{u} \in C(I)$ が存在して

$$u = \tilde{u} \ \text{ a.e. on } I$$

とできる．さらに，$\tilde{u}$ の a.e. 微分と u の弱微分は一致する．当然，Lebesgue 空間の定義から，u と $\tilde{u}$ は同値類の意味で等しいのであるから，$u = \tilde{u}$ in $W^{1,p}(I)$ である．その意味で，任意の $u \in W^{1,p}(I)$ は絶対連続であり，その a.e. 微分と弱微分が一致するといえる．特に，$W^{1,p}(I) \subset C(I)$ が成り立つことが著しい．

(iii) ($C_c^\infty(\mathbf{R})$ の稠密性) 部分集合として，包含が

$$C_c^\infty(\mathbf{R}) \subset W^{1,1}(\mathbf{R}) \quad \text{densely},$$

であることを示せ．

Hints. 例によって，mollification を使う．しかし，ただ mollify しただけでは，近似関数はコンパクト台にならないので，さらに cut-off をする必要がある．

注意. このように，$C_c^\infty(\mathbf{R})$ はいろんな関数空間の中で稠密になることが極めて多い (正確には，それが稠密になるような関数空間でないと扱いづらい．なぜなら変分法の基本補題が成り立たないと解析に困るから)．

8　積分記号下の微分

−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−

積分記号下の微分については，考えたいパラメータに関する被積分関数の偏微分がそのパラメータによらない優関数を持つとき，優収束定理を用いて正当化されることはよく知られている．ここでは，積分記号下の微分を正当化する別の定理について考える．その動機づけは，被積分関数の偏微分がパラメータによらぬ優関数を持たない場合にも正当化するためである．

−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−∘−−−

問題 (積分記号下の微分).

$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ を開集合，$]a,b[\subset \mathbf{R}$ を開区間とする．$f:\Omega\times]a,b[\to \mathbf{R}$ を可測関数とする．

$$F(t) := \int_\Omega f(x,t)\,\mathrm{d}x, \quad t,c\in]a,b[$$

とし，我々は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$$

となるための，充分条件を見つけたい．以下に，積分記号下の微分を正当化する定理の証明の本質的な計算を記す．以下の計算を正当化するように f の満たすべき条件を求め，積分記号下の微分に関する定理の主張を書き下せ．

証明の一部:

$$\begin{aligned}\int_c^t\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' &= \int_\Omega\int_c^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,t')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\ &= \int_\Omega f(x,t)-f(x,c)\,\mathrm{d}x \\ &= F(t)-F(c).\end{aligned}$$

よって，

$$F(t)-F(c) = \int_c^t\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t'$$

であり，微積分の基本定理から

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ．□

> **Hints.** 各等号の正当化だけでなく，各積分の well-definedness, つまり収束性にも気をつける．

問題 (前問の別証明).

$\Omega\subset\mathbf{R}^N$ を開集合，$]a,b[\subset\mathbf{R}$ を開区間とする．$f:\Omega\times]a,b[\to\mathbf{R}$ を可測関数とする．いま，以下を仮定する：

- 全ての $t\in]a,b[$ に対して，$f(.,t)\in L^1(\Omega)$ である．
- ほとんど全ての $x\in\Omega$ に対して，$f(x,.):]a,b[\to\mathbf{R}$ は class C^1 であり，さらに $\frac{\partial f}{\partial t}\in L^1(\Omega\times]a,b[)$ である．さて，

$$F(t):=\int_\Omega f(x,t)\,\mathrm{d}x,\quad t,c\in]a,b[,$$

と定める．このとき，直接弱微分を計算することにより，$F\in W^{1,1}(]a,b[)$ であることを示し，このことによって，

$$F(t)=F(c)+\int_c^t\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial t}(x,t')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t',\quad t,c\in]a,b[,$$

が成り立つことを示し，よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)=\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x\quad\text{for a.e. }t\in]a,b[,\tag{7}$$

を確かめよ．さらに，関数 $]a,b[\ni t\mapsto\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x\in\mathbf{R}$ が連続関数であるならば，$F\in C^1(]a,b[)$ であり，いたるところで (7) が成り立つことを示せ．

参考文献

[1] Brezis, H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.

[2] Brezis, H., Lieb, E., A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), no. 3, 486–490.

[3] Evans, L.C., Gariepy, R.F., *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[4] Jost, J., *Postmodern analysis. Third edition*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[5] Lieb, E.H., Loss, M., *Analysis. Second edition*, Graduate Studies in Mathematics, **14**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.