

Note of Hörmander's Hypoellipticity

2023 年 8 月 27 日

1 Introduction

首先回顾两个经典 PDE:

- Laplace's equation $\Delta u = 0$.
- Wave equation $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$.

尽管两个方程仅差系数的符号, 解的光滑性天差地别: Laplace 方程的解是无穷次可微的调和函数, 波方程的一般解则不必光滑甚至不必连续。

在分布意义下考虑更一般的椭圆方程 $Pu = f$, 一个基本问题是: 给定 f 后可以对 u 说点什么? 通常期望 u 能从 f 那继承一些性质, 如 f 光滑得到 u 光滑。由椭圆正则性定理, 正系数可保证光滑性, 但椭圆性是充分不必要的, 例如非椭圆的热方程 $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ 的解也是光滑的。光滑性的充要条件暂未找到, 尝试减弱椭圆性, 因此引入亚椭圆概念和亚椭圆微分算子:

定义 1.1. • 所有解都光滑, 则称该 PDE 是亚椭圆的。

- 若 $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, u 的奇异支集 $\text{sing supp}(u)$ 指 Ω 中一个集合, 其上没有让 $u|_U \in C^\infty$ 的开邻域 U 。
- 在任意开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (或某流形) 上有 C^∞ 系数的线性微分算子 P , 若 P 满足对所有 Ω 上的分布 u , 成立 $\text{sing supp}(u) = \text{sing supp}(Pu)$, 即 $Pu \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$, 则 P 是亚椭圆算子。

来看两个例子:

例 1. • 由微积分基本定理 $u(x) = \int_0^x Pu(t)dt + u(0)$, \mathbb{R} 上 $P = \frac{d}{dx}$ 是亚椭圆的。

• \mathbb{R}^2 上 $P = \frac{\partial}{\partial x}$ 非亚椭圆, 取 $u = u(y)$ 并不必光滑。

人们在后续的研究中还定义了最大亚椭圆性、子椭圆性, 目前已知 $Ellipticity \Rightarrow Maximal Hypoellipticity \Rightarrow Subellipticity \Rightarrow Hypoellipticity$, 而在子椭圆性和亚椭圆性之间还有很多东西看不清楚。

Hörmander 关于 2 阶亚椭圆微分算子的一个经典定理回答了光滑性的充要条件, 定理由 Hörmander 本人在 1967 年一篇 Acta [1] 上发表:

定理 1.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 其上有一二阶微分算子

$$P = \sum_{j=1}^r X_j^2 + X_0 + c$$

其中 X_0, \dots, X_r 是 Ω 上有 C^∞ 系数的一阶齐次微分算子 (或 Ω 上的光滑实向量场), $c \in C^\infty$ (或光滑函数)。若由 $\Xi = (X_0, \dots, X_r)$ 生成的 Lie 代数在 Ω 中每点的秩都是 n , 即

$$X_{j_1}, [X_{j_1}, X_{j_2}], [X_{j_1}, [X_{j_2}, X_{j_3}]], \dots, [X_{j_1}, [X_{j_2}, [X_{j_3}, \dots, X_{j_k}]] \dots], j_i = 0, 1, \dots, r$$

中存在 n 个 Ω 任给点处线性无关的算子, 则对任意紧集 $K \subset \Omega$, 都存在一个仅与诸向量场有关的常数 $\delta = \delta_K$ 使得 $Pu \in H_{loc}^s(K) \Rightarrow u \in H_{loc}^{s+\delta}(K)$, 特别地, 这表示 P 是亚椭圆微分算子, 即 $Pu \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$ 。

注解 1.3. • 算子 P 不必要求 X_j 在任何点线性无关, 甚至可以用线性组合重表为 $X'_j = \sum c_{jk} X_k$ 。

• δ 和向量场的依赖关系, 因正则性是局部性质, 假定开集 Ω 足够小, 使对某个 p , $Lie(\Xi)$ 可由诸向量场取至多 p 次 Lie 括号生成, Hörmander 原证明做到 $\delta \sim 1/p$, 即 δ 仅取决于向量组 Ξ 的代数性质。

定理对微分算子提的条件称为 Hörmander 条件。当时已知常系数情况下亚椭圆算子的充要条件, 也知道被一个变系数的“弱算子”扰动后方程仍为亚椭圆 (见 [3]II 卷 11 章及后续), 以 Hörmander 为代表的数学家也做了许多工作。

粗略地说, 原文的参考文献 2 [2] 所给亚椭圆性充分条件指出: 将系数中参数“冻结”在某点 x 处得到的常系数的微分方程是亚椭圆的, 且不随 x 变化

过快, 但离必要条件太远, 例如方程 $\partial_x^2 u + x\partial_y u - \partial_t u = f$ 这个 Kolmogorov 型演化方程就不适合。事实上在 $x = x_0$ 处冻结后, 算子只作用在 2 维平面, 即 $\partial_x^2 u(x_0, y, t) + x_0\partial_y u(x_0, y, t) - \partial_t u(x_0, y, t) = f(x_0, y, t)$, 原因是方程左端算子的象征高度退化, 无论在哪儿“冻结”系数都不可能得到有意义的正则性估计。不过 Kolmogorov 早在 1934 年就构造了该方程的精确基本解, 该解在对角线外是 C^∞ 的, 从而该方程事实上是亚椭圆的。

Kolmogorov 的方法大致如下:

- 对方程 t 之外的变量进行 Fourier 变换
- 为获得某时间切片 t_0 处的基本解, 要求在此刻之前为 0, 试图找到在该时刻及以后的解 U , 满足 t_0 时刻 $U = -e^{-is \cdot \xi}, s = (x, y)$
- 根据特征线方程 $\frac{dt}{-1} = \frac{d\xi_j}{-\sum b_{jk}\xi_k} = \frac{dU}{A(\xi, \xi) - c'} = 1$ 解得 $t = t_0 + \tau, \xi(\tau) = e^{B\tau}\eta, U = -e^{-is \cdot \eta - \int_0^\tau (A(\xi(m), \xi(m)) - c') dm}$ 并代入初值条件得到 $U(t, \xi), t > t_0$, 同时令 $U(t, \xi) = 0, t < t_0$
- U 指数中的二次型半正定, 除非 $A(B^k \xi, B^k \xi) = 0, \forall k$ 成立, 否则二次型正定并且意味着 A 的零空间包含 B 的非平凡不变子空间。反证法: 若不然, Fourier 变换得对角线外 C^∞ 的双边基本解; 固定 $t, t_0, e^{B^T t} x - e^{B^T t_0} y$ 中指数负定二次型的特征值在 $t - t_0 \rightarrow 0$ 时 $\rightarrow -\infty$ (特征值可有不同数量级, 基本解的可微性有各向异性的重要特征), 故除非 A 的零空间包含 B 的非平凡不变子空间, 原方程是亚椭圆的

若借助 Hörmander 定理, 令 $X_0 = -\partial_t + x\partial_y, X_1 = \partial_x \Rightarrow [X_0, X_1] = -\partial_y$, 则 $\text{span}\{X_1, [X_0, X_1]\} = T_x M$ 并可得到想要的正则性估计: 若 $f \in H^s(\Omega)$, 则对任意紧集 $K \subset \Omega$ 都有 $\|u\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(K)} \leq C_K(\|u\|_{H^s(\Omega)} + \|f\|_{H^s(\Omega)})$ 。由此可见 Hörmander 定理:

- 对经典的椭圆正则性理论作了相当程度的推广
- 揭示了微分算子的正则性和代数特性的关联

Hörmander 定理给有实光滑系数的亚椭圆 2 阶微分算子一个几乎完整的刻画, 事实上有如下直观理解: 设在 $x_0 \in \Omega$ 某邻域内, $\text{Lie}(\Xi)$ 的秩在每一点恒小于 n , 根据微分几何的 Frobenius 定理, 在 x_0 的某邻域内有坐标变换 $x \rightarrow y$, 使 P 在新坐标系下的表达式仅包含关于 y^1, \dots, y^{n-1} 的偏导数。故

在每一片叶理 (foliation) $y^n = \text{const}$ 上都可任意定义 u 的值, 如此所得函数可以非常不光滑, 但仍是分布意义下 $Pu = 0$ 的解, 看出 Hörmander 条件

$$\text{rank Lie}(\Xi)(x) = n \quad \forall x \in \Omega$$

是亚椭圆性的必要条件。(在这个方向已经发展出了一套联系分析和代数的理论, 即所谓 Carnot 群, 人们可以研究形如 $(X_0 + \sum_{i,j=1}^r a_{ij} X_i X_j)u = f$ 的方程, 其中 (a_{ij}) 是 Hölder 连续的一致正定的矩阵值函数, 可对这类方程使用 Carnot 群上的调和分析手段证明 Schauder 和 L^p 型先验估计。)

文章结构如下:

- 第 2 节讨论亚椭圆性的一种必要条件
- 第 3 节证明核心定理 1.1 是某些先验估计的产物
- 第 4 节对函数沿一组非交换向量场的可微性进行初步研究, 直到第 5 节才完成证明

2 亚椭圆性的一个必要条件

在证明定理前, 我们给出亚椭圆性的一个必要条件。已知断言: 常系数亚椭圆微分方程非椭圆时, 必有多个特征 [见 [3]II 卷定理 11.1.10], 下面将该结果推广到变系数情形:

定理 2.1. 令 $P(x, D)$ 为 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上系数 C^∞ 的微分算子, 令主象征 $p(x, \xi)$ 取实数。若对某 $x \in \Omega$ 存在实数 $\xi \neq 0$ 使得

$$p(x, \xi) = 0, \text{ but } \frac{\partial p(x, \xi)}{\partial \xi_j} \neq 0 \text{ for some } j,$$

则 P 非亚椭圆。

注解 2.2. • 微分算子: $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, D^\alpha = (-i\partial_{x_1})^{\alpha_1} \dots (-i\partial_{x_n})^{\alpha_n},$

定义算子 $P(x, D)$ 的象征 $p(x, \xi)$ 满足: $\mathcal{F}[P(x, D)u](\xi) = p(x, \xi)\hat{u}(\xi)。$

- 象征: $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, m$ 阶主象征: $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha。$

证明. 不妨取 $x = 0$, 特征方程的经典积分理论 [见 [3]II 卷定理 thm6.4.5] 指出在 0 邻域附近存在实值函数 φ 使得 $\nabla\varphi(0) = \xi, p(x, \nabla\varphi(x)) = 0$, 用 0 邻域替换 Ω , 对方程 $P(x, D)u = 0$ 定义形式解:

$$u = \sum_0^\infty u_j t^{-j} e^{it\varphi}, u_j \in C^\infty, t \text{ is a parameter}$$

则 $P(v e^{it\varphi}) = e^{it\varphi} \sum_0^m c_j t^j$, 其中 $c_m = v p(x, \nabla\varphi(x)) = 0, c_{m-1} = \sum_1^n A_j D_j v + Bv, A_j = p^{(j)}(x, \nabla\varphi(x))$, 故 $Pu = e^{it\varphi} \sum_0^m c_j t^j = t^m \sum_0^\infty a_j t^{-j} e^{it\varphi}, c_m = 0, c_{m-1} = \sum_1^n A_j D_j (\sum_0^\infty u_l t^{-l}) + B(\sum_0^\infty u_l t^{-l})$, 故知 $a_0 = 0, a_1 = \sum_1^n A_j D_j u_0 + Bu_0, \dots, a_k = \sum_1^n A_j D_j u_{k-1} + Bu_{k-1} + L_k, L_k$ 由 u_0, \dots, u_{k-2} 及其导数线性组合而成, 因 A_j 是不全为零实数, 可在 Ω 选一系列原方程的解 u_0, u_1, \dots 满足 $u_0(0) = 1$.

若 $Pu = 0$ 是亚椭圆方程, 断言有先验估计

$$|\nabla u(0)| \leq C(\sup |u| + \sum_{|\alpha| \leq N} \sup |D^\alpha Pu|), u \in C^\infty(\Omega) \quad (2.1)$$

事实上 Ω 上所有自身连续有界且 $\forall \alpha, D^\alpha Pu$ 都连续有界的函数 u 的集合在 $C^\infty(\Omega)$ 中, 则先验估计可由闭图像定理得到. 参考 [吉田耕作 P81, Sec 6, thm 2] Hörmander 比较定理, 只要证明 $T_1 u = D^\alpha Pu$ 是闭算子, $T_2 u = \nabla u(0)$ 是可闭算子且 $D(T_1) \subset D(T_2)$ 则成立 $\|T_2 u\| \leq C(\|T_1 u\|^2 + \|u\|^2)^{1/2}$, 此即先验估计, 事实上这是显然的:

$$\begin{cases} u_n \in D(T_1), \begin{cases} u_n \rightarrow u, \\ T_1 u_n \rightarrow f, \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} u \in D(T_1), \\ T_1 u = f. \end{cases} \\ u_n \in D(T_2), \begin{cases} u_n \rightarrow 0, \\ T_2 u_n \rightarrow f, \end{cases} & \Rightarrow f = 0. \end{cases}$$

用 $u = \sum_0^{k-1} u_j t^{-j} e^{it\varphi}$ 代入先验估计(2.1), 为保证算子 P 二阶, 需级数收敛, 即 $N + m - 2 - (k - 1) = N + m - k - 1 \leq 0$, 故提 $N + m \leq k + 1$ 条件, 从而(2.1)右式在 $t \rightarrow \infty$ 时有界, 但左式不一定有界, 矛盾! \square

推论 2.3. 对一个有实主象征的二阶亚椭圆算子, 主象征必定是半定二次型。

3 Step3: 定理证明的前置准备

令微分算子 P 由定理1.2定义, 则 $T(\Omega)$ 是一个实值函数子集 $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ 的模, 同样地, $T(\Omega)$ 也可看作 Ω 切丛的 C^∞ 节 (连续右逆) 构成的空间。

证明出发点是分部积分得到先验估计。注意到如 $X_j = a(x)\partial_x \Rightarrow \langle X_j u, v \rangle = - \int u \cdot X_j v - \int \partial_x a(x) \cdot uv$, 即 X_j 的伴随算子是 $-X_j + a_j$, $a_j(x) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, 对方程 $Pv = 0$ 关于 v 作内积并取实部, 频繁利用伴随算子得

$$\begin{aligned} -\Re \int v \overline{Pv} dx &= \Re \sum_1^r \int (X_j v - a_j v) \overline{X_j v} dx - \frac{1}{2} \int X_0 |v|^2 dx - \int \Re c |v|^2 dx \\ &= \sum_1^r \int |X_j v|^2 dx + \int \sum_1^r [(X_j a_j - a_j^2) - \frac{1}{2} X_0 - \Re c] |v|^2 dx + \frac{1}{2} \sum_1^r \int a_j \cdot X_j |v|^2 dx \\ &= \dots - \frac{1}{2} \int \sum_1^r (X_j a_j - a_j^2) |v|^2 dx \\ &= \sum_1^r \int |X_j v|^2 dx + \underbrace{\int [\frac{1}{2} \sum_1^r (X_j a_j - a_j^2) - \frac{1}{2} X_0 - \Re c] |v|^2 dx}_d \end{aligned}$$

故只要 $\int (1-d) |v|^2 dx \leq C \|v\|_{L^2}^2$ 就有

$$\sum_1^r \|X_j v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \leq C \|v\|_{L^2}^2 - \Re \int v \overline{Pv} dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(K). \quad (3.1)$$

为(3.1)左式引入范数 $\|v\| := \sum_1^r \|X_j v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2$, 同时为精确估计(3.1)右式, 引入对偶 $\|f\|' := \sup \frac{\int f v dx}{\|v\|}$, $v \in C_0^\infty(\Omega)$, 显然 $\|f\|' \leq \|f\|_{L^2}$, 故 $\|v\| - C \|v\|_{L^2}^2 \leq -\Re \int v \overline{Pv} dx \leq \|v\| \|Pv\|' \leq \frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|Pv\|'^2)$, 得

$$\|v\|^2 \leq C \|v\|_{L^2}^2 + \|Pv\|'^2, \quad \forall v \in C_0^\infty(K) \quad (3.2)$$

因 $\|X_j f\|' = \sup \frac{\int f (-X_j + a_j) v dx}{\|v\|} \leq \frac{\|f\|_{L^2} (\|X_j v\|_{L^2} + \|a_j v\|_{L^2})}{\|v\|} \leq C \|f\|_{L^2}$, 用到 K 是紧集, a_j 有界, 即得

$$\|X_j f\|' \leq C \|f\|_{L^2}, \quad \forall f \in C_0^\infty(K), \quad j = 1, \dots, r$$

故 $\|X_j^2 v\|' \leq C\|X_j v\|_{L^2} \leq C\|v\|, j = 1, \dots, r$, 由(3.2) $\|X_0 v\|' = \|Pv - \sum_{j=1}^r X_j^2 v - cv\|' \leq \|Pv\|' + C_1\|v\| + C_2\|v\|_{L^2} \leq C(\|Pv\|' + \|v\|_{L^2})$, 故得

$$\|v\|^2 + \|X_0 v\|^2 \leq C(\|v\|_{L^2}^2 + \|Pv\|^2), \quad \forall v \in C_0^\infty(K) \quad (3.3)$$

引入分数阶 Hilbert 范数 $\|v\|_{H^s}^2 := (2\pi)^{-n} \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi, v \in C_0^\infty(K)$, 现假设成立 (证明在沿向量场可微性的研究中)

$$\|v\|_{H^\epsilon} \leq C(\|v\| + \|X_0 v\|'), \quad \forall v \in C_0^\infty(K) \quad (3.4)$$

结合(3.3)式, 得

$$\|v\|_{H^\epsilon} \leq C(\|v\|_{L^2} + \|Pv\|'), \quad \forall v \in C_0^\infty(K). \quad (3.5)$$

只要证得(3.5)式, 即知 P 是亚椭圆算子, 从而关键步骤是证明下面命题:

命题 3.1. 假设在 Ω 的紧子集 K 上(3.5)式成立, 则使 $\|Pv\|' < \infty$ 成立的任意 $v \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$ 也在 H^ϵ 中。

- 首先断言(3.5)式对所有在 Ω 有紧支集的 $v \in H^2$

事实上可找到一列 $v_j \in C_0^\infty(K)$, 其中 K 取 $\text{supp}(v)$ 的紧邻域, 使

$$D^\alpha v_j - D^\alpha v \rightarrow 0 \text{ as } j \rightarrow \infty, |\alpha| \leq 2$$

故 $\|Pv_j - Pv\|_{L^2} \rightarrow 0$, 从而 $\|Pv_j - Pv\|' \leq \|Pv_j - Pv\|_{L^2} \rightarrow 0$ 。特别地有

$$\|Pv_j\|' \leq \|Pv_j - Pv\|' + \|Pv\|' \Rightarrow \limsup \|Pv_j\|' \leq \|Pv\|'$$

把(3.5)式用在 v_j 上得 $\limsup \|v_j\|_{H^\epsilon} \leq C(\|v\|_{L^2} + \|Pv\|')$, 即断言成立。

若 v 满足命题3.1, 取 $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ 满足 $0 \leq \chi \leq 1$ 且在 $\text{supp}(v)$ 的邻域 ω 取到 $\chi = 1$, 令 $v_\delta = \chi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} v$, 此处

$$(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} v := \mathcal{F}^{-1}[(1 + \delta^2 |\xi|^2)^{-1} \hat{v}(\xi)](x)$$

显然 $\|v_\delta\|_{H^2}^2 = \|\hat{v}_\delta\|_{H^2}^2 = \int \frac{|\hat{v}|^2 (1 + |\xi|^2)^2}{(1 + \delta^2 |\xi|^2)^2} \lesssim \|v\|_{H^2}^2 < \infty$, 这里用到上述断

言, 故 $v_\delta \in H^2, \text{supp}(v_\delta) \subset \text{supp}(\chi) \subset \subset \Omega$ 且有 $v_\delta \xrightarrow{L^2} v, \text{ as } \delta \rightarrow 0$ 。

对 v_δ 应用(3.5)式, 则

$$C(\|v_\delta\|_{L^2} + \|Pv_\delta\|') \geq \|v_\delta\|_{H^\epsilon} = \int |\hat{v}|^2 \frac{(1 + |\xi|^2)^\epsilon}{(1 + \delta^2 |\xi|^2)^2} \rightarrow \|v\|_{H^\epsilon}$$

这里通过 $|\hat{v}|^2 \frac{(1+|\xi|^2)^\epsilon}{(1+\delta^2|\xi|^2)^2} \leq |\hat{v}|^2(1+|\xi|^2)^2 \in L^1$ 使用 DCT 得到。显然要证 $\|v\|_{H^\epsilon} < \infty$, 只要 $\|Pv_\delta\|' < \infty$, as $\delta \rightarrow 0$, 为此给出以下注解 (先不用看):

注解 3.2. • 偶函数 $K(x) := \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-1}]$ 及其任意阶导数在 ∞ 处指数衰减。事实上设

$$K_\epsilon(x) = \int_\epsilon^\infty \int e^{-\lambda(1+|\xi|^2)+ix\cdot\xi} d^n \xi d\lambda = \int_\epsilon^\infty e^{-\lambda-\frac{|x|^2}{4\lambda}} \left(\int e^{-\lambda|\xi-i\frac{x}{2\lambda}|^2} d^n \xi \right) d\lambda$$

$$\stackrel{\lambda=\frac{|x|}{2}e^t}{=} \pi \left(\frac{2\pi}{|x|} \right)^{\frac{n}{2}-1} \int_{\log \frac{2\epsilon}{|x|}}^\infty e^{-|x| \cosh(t)} e^{-(\frac{n}{2}-1)t} dt \xrightarrow{\text{Bessel}} 2\pi \left(\frac{2\pi}{|x|} \right)^{\frac{n}{2}-1} B_{\frac{n}{2}-1}(|x|)$$

其中 $B_\alpha(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh(t)} \cosh(\alpha t) dt$, Taylor 展开知

$$K \sim \begin{cases} O(\log |x|), & n = 2 \\ O(|x|^{2-n}), & n > 2 \end{cases} \cdot \chi_{|x| < \sqrt{\frac{n}{2}}} + e^{-|x|} \chi_{|x| \geq \sqrt{\frac{n}{2}}}$$

另一方面, 因 $(1-\Delta)^{-1}u(x) = K * u(x)$, 有

$$(1-\delta^2\Delta)^{-1}v(x) \stackrel{t=\delta\xi}{=} (2\pi)^{-n} \int e^{i\frac{x}{\delta}\cdot t} (1+|t|^2)^{-1} \hat{v}\left(\frac{t}{\delta}\right) dt \cdot \delta^{-n}$$

$$= \int K(y) v\left[\delta\left(y + \frac{x}{\delta}\right)\right] dy = \int K\left(\frac{x-y}{\delta}\right) u(y) dy \cdot \delta^{-n}$$

知当 $x \notin \omega$, $\delta \rightarrow 0$ 时, $(1-\delta^2\Delta)^{-1}v(x)$ 任意阶导数比 δ 任意幂次衰减更快。

- 若 Q 是系数 C^∞ 的 $j \leq 2$ 阶微分算子, 则成立

$$\|(1-\delta^2\Delta)^{-1}\delta^j Qu\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}, \quad u \in L^2 \quad (3.6)$$

考虑伴随算子 $\langle K, \delta^j Qu \rangle = \langle Q^* \delta^j K, u \rangle$, $\frac{\delta^j(1+|\xi|)^j}{(1+\delta^2|\xi|^2)^{-1}} \leq C \Rightarrow \|Q^* \delta^j(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}$

- 若 Q 是系数 C^∞ 的 ≤ 1 阶微分算子, 则成立

$$\|[Q, (1-\delta^2\Delta)^{-1}]u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}, \quad \forall u \in C_0^\infty \quad (3.7)$$

事实上记 $w = (1-\delta^2\Delta)^{-1}u$, $u = (1-\delta^2\Delta)w \Rightarrow Qu = (1-\delta^2\Delta)Qw + \delta^2 R w$, $R = [\Delta, Q]$ 是 2 阶微分算子, 两边作用 $(1-\delta^2\Delta)^{-1} \Rightarrow [Q, (1-\delta^2\Delta)^{-1}]u = (1-\delta^2\Delta)^{-1}\delta^2 R w$, 再由估计(3.6)知右端的 L^2 范数 $\leq C\|w\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}$, 此处用了 Fourier 变换。

- 当 $\chi_j \in C_0^\infty(\Omega), j = 1, 2$, 有

$$\|\chi_1(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \chi_2 u\| \leq C \|u\|, u \in C_0^\infty(\Omega)$$

这是因为 $\|[X_j \chi_1, (1 - \delta^2 \Delta)^{-1}] \chi_2 u\| \leq C \|u\|_{L^2}$, 而第二项由(3.6)式取 $Q = \chi_1 \chi_2 X_j$ 即可。还有

$$\|\chi_2(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \chi_1 f\|' \leq C \|f\|', f \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

这是因为 $\int \chi_2 [K * (\chi_1 f)] u = \iint K(x - y) (\chi_1 f)(y) dy (\chi_2 u)(x) dx = \int [K * (\chi_2 u)](y) (\chi_1 f)(y) dy \leq C \|f\|' \|\chi_1 K * (\chi_2 u)\| \leq C \|f\|' \|u\|$, 故 $\|\chi_2(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \chi_1 f\|' \leq C \|f\|'$ 。

证明. 综上分析, 只需证 $\|P v_\delta\|' < \infty$, as $\delta \rightarrow 0$ 。在 $\text{supp}(v)$ 邻域 ω 中有 $(1 - \delta^2 \Delta) v_\delta = v$, 考虑算子 P , 把 $[X_j^2, \Delta]$ 写成 3 阶和 2 阶的组合, 即

$$[X_j^2, \Delta] = X_j [X_j, \Delta] + [X_j, \Delta] X_j = 2X_j [X_j, \Delta] + [[X_j, \Delta], X_j]$$

在 ω 有 $(1 - \delta^2 \Delta) P v_\delta = P v + [(1 - \delta^2 \Delta), P] v_\delta = P v + \delta^2 [P, \Delta] v_\delta$, 取有紧支集的二阶微分算子 B_0, B_j 如下有:

$$(1 - \delta^2 \Delta) P v_\delta = P v + \sum_1^r X_j \delta^2 B_j v_\delta + \delta^2 B_0 v_\delta, \begin{cases} B_0 = [X_0 + c, \Delta] + \sum_1^r [[X_j, \Delta], X_j], \\ B_j = 2[X_j, \Delta], j = 1, \dots, r \end{cases}$$

考虑更大区域, 由注解3.2(1), $(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} v$ 任意阶导衰减迅速, 处处有

$$(1 - \delta^2 \Delta) P v_\delta = P v + \sum_1^r X_j \delta^2 B_j v_\delta + \delta^2 B_0 v_\delta + h_\delta$$

其中 h_δ 在 ω 中为 0, 且 $\text{supp}(h_\delta) \subset \text{supp}(\chi), \|h_\delta\|_{L^2} \rightarrow 0$, as $\delta \rightarrow 0$ 。故有

$$P v_\delta = \chi_1 \{ (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} P v + \sum_1^r (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} X_j \delta^2 B_j v_\delta + (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \delta^2 B_0 v_\delta + (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} h_\delta \} := A + B + D + E$$

其中 $\chi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ 在 $\text{supp}(\chi)$ 上取值 1。

将 $v = \chi v, P v = P \chi v$ 看作注解3.2(4) 的 $\chi_1 f$, 得 $A \mapsto \|\chi_1(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} P v\|' \leq C \|P v\|' < \infty$, 这里用到命题3.1的假设。

注解3.2(2) 分别取 $j = 2, 0, Q = B_0, h_\delta$, 用 h_δ 性质和 Fourier 变换得

$$D + E \mapsto |||D + E|||' \leq C\|D + E\|_{L^2} \leq C\|v_\delta\|_{L^2} + \|h_\delta\|_{L^2} \rightarrow \|v\|_{L^2}, \text{ as } \delta \rightarrow 0$$

重写 B 知

$$(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} X_j \delta^2 B_j v_\delta = X_j (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \delta^2 B_j v_\delta + [(1 - \delta^2 \Delta)^{-1}, X_j] \delta^2 B_j v_\delta$$

由注解3.2(3) 知

$$|||[(1 - \delta^2 \Delta)^{-1}, X_j] \delta^2 B_j v_\delta|||' \leq |||(1 - \delta^2 \Delta)^{-1}, X_j] \delta^2 B_j v_\delta||_{L^2} \leq C\|\delta^2 B_j v_\delta\|_{L^2}$$

故用 $|||X_j f|||' \leq C\|f\|_{L^2}$ 及 Fourier 变换和命题条件得

$$\begin{aligned} B \mapsto ||| \sum_1^r \chi_1 (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} X_j \delta^2 B_j v_\delta |||' &\leq \sum_1^r (|||(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \delta^2 B_j v_\delta||_{L^2} + \|\delta^2 B_j v_\delta\|_{L^2}) \\ &\leq C \sum_1^r \|\delta^2 B_j v_\delta\|_{L^2} \leq C\|v\|_{L^2} < \infty \end{aligned}$$

综上 $|||Pv_\delta|||' \leq C(|||Pv|||' + \|v\|_{L^2}) < \infty$ 。 \square

有了命题3.1, 可得到核心结果:

命题 3.3. 假设对紧子集 $K \subset \Omega$ 成立(3.5)式 $\|v\|_{H^\epsilon} \leq C(\|v\|_{L^2} + |||Pv|||')$, 若 $u \in \mathcal{D}'(\Omega), Pu = f \in H_{loc}^s(\Omega)$, 则 $u \in H_{loc}^{s+\epsilon}(\Omega)$, K 换成 Ω 的开子集亦成立。特别地, P 是亚椭圆算子。

证明. 因问题是局部的, 假设对某个 t 成立 $u \in H_{loc}^t(\Omega)$, 只要证明 $t \leq s$ 时能被 $t + \epsilon$ 替代即可。令 E 为 Ω 中有紧支集的拟微分算子, 有象征 $e(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{t/2}$, 令 $v = \chi Eu, \chi \in C_0^\infty(\Omega)$ 。若知对任意 χ 都有 $v \in H^\epsilon$ 则有 $Eu \in H_{loc}^\epsilon$, 由 E 是椭圆算子知 $u \in H_{loc}^{\epsilon+t}$ 。

显然 $v \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$, 现只需如命题3.1往证 $|||Pv|||' < \infty$ 。注意到

$$s - t \geq 0 \Rightarrow \chi Ef \in L^2, \text{ and } Pv - \chi Ef = (P\chi E - \chi EP)u = [P, \chi E]u$$

因 $[X_j^2, \chi E] = 2X_j[X_j, \chi E] + [[X_j, \chi E], X_j]$, 取阶 $\leq t$ 有紧支拟微分算子得

$$[P, \chi E] = \sum_1^r X_j Q_j + Q_0, \begin{cases} Q_j = 2[X_j, \chi E], j = 1, \dots, r \\ Q_0 = [X_0 + c, \chi E] + \sum_1^r [[X_j, \chi E], X_j] \end{cases}$$

因 $Q_j u \in L^2, j = 0, \dots, r$ 且有紧支, 故由 $\|X_j f\|' \leq C\|f\|_{L^2}$ 得

$$\| [P, \chi E] u \|' \leq C \sum_0^r \|Q_j u\|_{L^2} < \infty$$

从而

$$\begin{aligned} \|Pv\|' &= \|Pv - \chi Ef + \chi Ef\|' \leq C \sum_0^r \|Q_j u\|_{L^2} + \|\chi Ef\|' \\ &\leq C \sum_0^r \|Q_j u\|_{L^2} + \|\chi Ef\|_{L^2} < \infty \end{aligned}$$

□

4 Step1: 沿向量场的可微性

现在剩下(3.4)式 $\|v\|_{H^s} \leq C(\|v\| + \|X_0 v\|')$, $v \in C_0^\infty(K)$ 的证明。

第一步是沿向量场的可微性。不失一般性, 假设 Ω 足够小, 使 $Lie(\Xi)$ 可通过取至多 p 次 Lie 括号生成, Hörmander 的核心思想是:

- 研究 $Lie(\Xi)$ 所生成的局部微分同胚群作用在函数上引起的偏差, 充分利用 $Lie(\Xi)$ 是分次 Lie 代数的事实, 得到非常精确的估计 $\delta \sim 1/p$

值得一提的是这个定理有更加直接的证明, 由 Kohn [4] 和 Radkevich [6](苏联数学家) 同时独立给出, 要义是将向量场的 Lie 括号作为拟微分算子直接计算, 得到 $\delta \sim 1/4^p$, 这比原证明弱很多, 但可以推广到一大类拟微分算子上, 详见 Oleinik(奥尔加·奥列尼克) 和 Radkevich 的工作 [5]。

记 Ω 上光滑实向量场全体为 $T(\Omega)$, 固定紧集 $K \subset \Omega$ 。对 $X \in T(\Omega)$, 考虑 Ω 中由 X 定义的单参数变换群, 令 f 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{df(x, t)}{dt} = X(f(x, t)), \\ f(x, 0) = x. \end{cases}$$

的解 (也可将 $f: \Omega \rightarrow \Omega$ 看作由 X 生成的局部微分同胚群), 存在充分小 $t_0 > 0$ 使得对 $|t| < t_0$ 时 $f: K \times (-t_0, t_0) \rightarrow \Omega$ 是 C^∞ 函数。

对 $u \in C_0^\infty(K)$, 令 $(e^{tX}u)(x) = u(f(x, t))$, 这个式子定义了 $C_0^\infty(K), C_0^\infty(\Omega)$ 间的映射, 取 $u(x) = x\chi_{\{x \in K\}} \Rightarrow f(x, t) = e^{tX}Id_K(x)$, 故由 f 的微分方程:

$$\frac{d(e^{tX}u)}{dt} = \frac{du(f(x, t))}{dt} = \frac{df(x, t)}{dt}(Xu) = X(e^{tX}Id_K(x))(Xu) = e^{tX}(Xu)$$

此外考虑微分定义: $\frac{d(e^{tX}u)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hX}e^{tX}u - e^{tX}u}{h} = Xe^{tX}u$, 即 e^{tX} 是 Ω 上局部单参数变换群且 $\frac{d(e^{tX}u)}{dt} = e^{tX}Xu = Xe^{tX}u$, 当 $u \in C^\infty$ 时在 $t = 0$ 附近有 Taylor 展开 $e^{tX}u \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} u$ 。

考虑在 L^2 范数意义下沿向量场具有 Hölder 连续的函数, 对 $s \in (0, 1], \epsilon \in (0, t_0)$ 定义

- 半范数 $[u]_{X,s}^\epsilon = \sup_{0 < |t| < \epsilon} \|e^{tX}u - u\|_{L^2} |t|^{-s}$, $u \in C_0^\infty(K)$

事实上 ϵ 取不同 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ 时 $|[u]_{X,s}^{\epsilon_1} - [u]_{X,s}^{\epsilon_2}| \leq \frac{1}{\epsilon_1} \sup_{t \in (\epsilon_1, \epsilon_2)} \|u(f(x, t)) - u\|_{L^2} - \sup_{t \in (0, \epsilon_1)} \|u(f(x, t)) - u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}$ 看出等价性, 省略符号 ϵ 。

- 再定义 $[u]_s = \sup_{|h| < \epsilon} \|\tau_h u - u\|_{L^2} |h|^{-s}$, $(\tau_h u)(x) = u(x + t)$

令 e_j 为向量场沿第 j 坐标轴的单位向量, 又向量场 ∂_j 生成的局部群是沿第 j 坐标轴的平移, 即 $e^{t\partial_j} u \sim u(x + te_j)$, 由三角不等式: $\|\tau_h u - u\|_{L^2} = \|u(x + t) - u(x + t - te_n) + u(x + t - te_n) - \dots - u(x + te_1) + u(x + te_1) - u(x)\|_{L^2} \leq \sum_{j=1}^n [u]_{\partial_j, s}$ (这里要注意到平移量在取 L^2 范数后一致无差异), 得 $[u]_s \leq \sum_{j=1}^n [u]_{\partial_j, s}$, 此外显然 $[u]_{X,s} \leq C\|Xu\|_{L^2}$ 。

给出以下性质:

引理 4.1. (1) 若 $\varphi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ 则 $[u]_{\varphi X, s} \leq C[u]_{X, s}$, $u \in C_0^\infty(K)$ 。

(2) 设 $g(x, t)$ 是关于 x 从 K 某邻域到 Ω 的光滑映射, 光滑地依赖于参数 t , 且 $g(x, t) - x = O(t^N)$, as $t \rightarrow 0$, $N > 0$, 则对小的 t 成立

$$\|u(g(x, t)) - u\|_{L^2} \leq C|t|^{Ns} [u]_s, \quad u \in C_0^\infty(K)$$

(注: 取 $N = 1$ 有 $[u]_{X, s} \leq C[u]_s$, $\forall X \in T(\Omega)$, 故 $[u]_s \sim \sum_{j=1}^n [u]_{\partial_j, s}$ 。)

(3) 设 $0 < \sigma < s < 1$, 则 $\|u\|_{H^\sigma} \leq \|u\|_{L^2} + C[u]_s$ 。

证明. (1) 令 $\tau(x, t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \frac{d\tau}{dt} = \varphi(f(x, \tau)), \\ \tau|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解, 得

$$\frac{df(x, \tau)}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{df(x, \tau)}{d\tau} = \varphi(f(x, \tau)) \cdot X(f(x, \tau)) = (\varphi X)(f(x, \tau))$$

从而 $e^{t\varphi^X}u(x) = u(f(x, \tau))$, 于是

$$\|e^{t\varphi^X}u - u\|_{L^2} = \int |u(f(x, \tau(x, t))) - u(x)|^2 dx$$

由于 τ 还依赖 x , 暂时不能和 $[u]_{X,s}$ 比较, 注意到对任意 σ 有

$$|u(f(x, \tau)) - u(x)|^2 \leq 2|u(f(x, \tau)) - u(f(x, \sigma))|^2 + 2|u(f(x, \sigma)) - u(x)|^2$$

关于 x 积分并在 $|\sigma| < |t|$ 内取积分平均得

$$\begin{aligned} & \|e^{t\varphi^X}u - u\|_{L^2}^2 \\ & \leq |t|^{-1} \iint_{|\sigma| < |t|} |u(f(x, \tau)) - u(f(x, \sigma))|^2 dx d\sigma + |t|^{-1} \int_{|\sigma| < |t|} \frac{\|e^{\sigma X}u - u\|_{L^2}^2}{|\sigma|^{2s}} |\sigma|^{2s} d\sigma \\ & \leq |t|^{-1} \iint_{|\sigma| < |t|} |u(f(x, \tau)) - u(f(x, \sigma))|^2 dx d\sigma + |t|^{-1} \int_{|\sigma| < |t|} [u]_{X,s}^2 \cdot |\sigma|^{2s} d\sigma \\ & \leq |t|^{-1} \iint_{|\sigma| < |t|} |u(f(x, \tau)) - u(f(x, \sigma))|^2 dx d\sigma + 2[u]_{X,s}^2 |t|^{2s} \end{aligned}$$

为处理积分项, 引入新变量: $y = f(x, \sigma), f(y, w) = f(x, \tau), i.e. w + \sigma = \tau$.

固定 t , 对 $\sigma = 0$, 对变量关系式微分得 $dy = dx + Xd\sigma, dw = d\tau - d\sigma$, 因

$$t = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow d\tau = 0, \text{ 故对 } t = \sigma = 0, \text{ Jacobian } \frac{\partial(y, w)}{\partial(x, \sigma)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

从而对充分小 σ, t 的 Jacobian 任意接近 -1 . 因

$$\tau = O(t), |\sigma| < |t| \Rightarrow |w| = |\tau - \sigma| \leq O(t) + |t| \leq A|t|$$

故对充分小 t , 积分项有

$$\begin{aligned} & |t|^{-1} \iint_{|\sigma| < |t|} |u(f(x, \tau)) - u(f(x, \sigma))|^2 dx d\sigma \\ & \leq 2|t|^{-1} \iint_{|w| < A|t|} |u(f(y, w)) - u(y)|^2 dy d\sigma \leq 4A(A|t|)^{2s} [u]_{X,s}^2. \end{aligned}$$

(2) 此处证明与 (1) 平行, 令 $y = x + h, y + w = g(x, t)$, 当 $t = 0 \Rightarrow g(x, t) = x$ 则 $y = x + h, w = -h \Rightarrow \frac{\partial(y, w)}{\partial(x, h)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$, 同样对充分小 t , Jacobian 绝对值趋于 1 且 $|w| < A|t|^N$, 于是

$$\begin{aligned} \|u(g(x, t)) - u\|_{L^2}^2 & \leq 2C|t|^{-N} \int_{|w| < A|t|^N} \frac{\|u(y + w) - u(y)\|_{L^2}^2}{|w|^{2s}} |w|^{2s} dx dh \\ & + |t|^{-N} \int_{|h| < |t|^N} \frac{\|\tau_h u - u\|_{L^2}^2}{|h|^{2s}} |h|^{2s} dh \leq 4A(A|t|^N)^{2s} [u]_s^2 + 2[u]_s^2 |t|^{2Ns} \end{aligned}$$

(3) 由待证结论易知 $\|\cdot\|_{L^2} + [\cdot]_s$ 范数弱于 $\|\cdot\|_{H^s}$, 但 $\sigma < s$ 时强于 $\|\cdot\|_{H^\sigma}$, 事实上用到一个势论等式:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &\stackrel{x \mapsto x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x+y) - u(y)|^2}{|x|^{n+2s}} dx dy \\ &\stackrel{\text{Parseval of } y}{=} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |e^{ix \cdot \xi} - 1|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 |x|^{-n-2s} dx d\xi := \int_{\mathbb{R}^n} C_s^{-1} |\xi|^{2s} |\hat{u}|^2 d\xi \end{aligned}$$

其中 $C_s^{-1} = |\xi|^{-2s} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{ix \cdot \xi} - 1|^2 |x|^{-n-2s} dx$, 注意到 C_s^{-1} 中用 tx 代替 x 所得和 $t\xi$ 代替 ξ 一致, 是某种齐次性。易知 $s \rightarrow 0$ 时 (丢给 `mma` 计算或查 Table of Integrals, series etc, P440, 7) 知 $n = 1$ 时

$$4 \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\frac{x}{2})^2}{|x|^{1+2s}} dx = -2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{|x|^{1+2s}} dx = -2 \cos \pi s (-2s) = \frac{1}{s} + O(1)$$

其他维数情况类似, 从而 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_s}{s} = \text{const}$; $s \rightarrow 1$ 时, $\cos \pi s \Gamma(-2s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$ 从而 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_s}{1-s} = \text{const}$, 综上即知 $\lim_{s \rightarrow 0 \text{ or } 1} \frac{C_s}{s(1-s)} = \text{const}$; 另一方面, 显然对给定的 $s \in (0, 1)$, C_s 总是有界的, 命 C_s 为其上界, 故该势论等式有意义。于是我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^\sigma d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \\ &= \|u\|_{L^2}^2 + C_s \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \leq \|u\|_{L^2}^2 + C_s [u]_s^2. \end{aligned}$$

□

5 Step2: 分次李代数特性的应用

定义 5.1. 若 $X \in T(\Omega)$, 定义 $T(\Omega)$ 到 $T(\Omega)$ 的微分算子 $ad_X Y := [X, Y]$, $Y \in T(\Omega)$ 。可看作李代数的线性变换、李代数对自身的伴随作用。

给定一组光滑实向量场 $\Xi = (X_0, \dots, X_r)$, 令多重指标 $I = (i_1, \dots, i_k)$ 满足 $0 \leq i_1, \dots, i_k \leq r$, 命 $|I| = \sum_{j=1}^k i_j = k \neq 0$, 记 $X_I = ad_{X_{i_1}} \dots ad_{X_{i_{k-1}}} X_{i_k}$, Hörmander 证明了:

定理 5.2. 给定 $X_j \in T(\Omega)$, $j = 0, \dots, r$ 和一组数 $\{s_i\}_{i=0}^r \subset (0, 1]$, 定义多重指标 $I = (i_1, \dots, i_k)$ 的函数 $s(I)$ 为 $\frac{1}{s(I)} := \sum_{j=1}^k \frac{1}{s_{i_j}}$ 。命 $T_\Xi^s(\Omega)$ 是满足

$s(I) \geq s$ 的 X_I 所生成的 $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ 子模, 则对 $X \in T_\Xi^s(\Omega), u \in C_0^\infty(K)$ 有

$$[u]_{X,s} \leq C \left(\sum_{i=0}^r [u]_{X_i, s_i} + \|u\|_{L^2} \right) \quad (5.1)$$

其中 $K \subset \Omega$ 是紧集, 常数 $C = C(X, K)$ 。特别地, 在 Hörmander 条件 $\text{rank Lie}(\Xi)(x) = n, \forall x \in \Omega$ 下, 若取 $s_0 = \dots = s_r = 1$, 则有 $T_\Xi^{1/p}(\Omega) = T(\Omega)$ 。再由引理 4.1 中半范数的性质得

$$[u]_{1/p} \leq C \left(\sum_{i=0}^r [u]_{X_i, 1} + \|u\|_{L^2} \right) \quad (5.2)$$

为证(5.1)式, 要从满足(5.2)式的点开始对 s 进行归纳, 在考虑复杂的交换子之前, 给出一个简单的纯代数引理:

引理 5.3. 若 $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \leq \frac{1}{t_3}$, 则有 $[T_\Xi^{t_1}, T_\Xi^{t_2}] \subset T_\Xi^{t_3}$ 。

证明. 令多重指标 I_1, I_2 满足 $s(I_j) \geq t_j, \varphi_j \in C^\infty(\Omega), j = 1, 2$, 我们有

$$[\varphi_1 X_{I_1}, \varphi_2 X_{I_2}] = \varphi_1 (X_{I_1} \varphi_2) X_{I_2} - \varphi_2 (X_{I_2} \varphi_1) X_{I_1} + \varphi_1 \varphi_2 [X_{I_1}, X_{I_2}]$$

因 $t_3 \leq t_j \Rightarrow s(I_j) \geq t_3, j = 1, 2$, 上式右端前两项都属于 $T_\Xi^{t_3}$ 。对第三项, 由 Jacobi 恒等式有

$$ad_{[X,Y]} \cdot = [[X,Y], \cdot] = -[[\cdot, X], Y] - [[Y, \cdot], X] = [X, [Y, \cdot]] - [Y, [X, \cdot]] = [ad_X, ad_Y] \cdot$$

于是把 $[X_{I_1}, X_{I_2}] = ad_{[X_{I_1}]} X_{I_2}$ 精确写开就是 X_J 的线性组合, 其中 $\frac{1}{s(J)} = \frac{1}{s(I_1)} + \frac{1}{s(I_2)}$ 。□

有了引理, 再注意到 $T_\Xi^t(\Omega) \subset T_\Xi^s(\Omega), as s < t$ 及 $\langle \text{Lie}(\Xi) \rangle_{C^\infty(\Omega)} = \oplus_{0 < s \leq 1} T_\Xi^s(\Omega)$, 可看出该定理相当精细地揭示了 $\text{Lie}(\Xi)$ 的分次李代数结构和其解析特性之间的关系。再由 Step1 中半范数的性质 4.1, 得: 对 $u \in C_0^\infty(K), \forall \epsilon > 0$ 有 $\|u\|_{H^{\frac{1}{p}-\epsilon}} \leq C \left(\sum_{i=0}^r \|X_i u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \right)$ 。

证明前先给出 Campbell-Hausdorff 公式阐述:

引理 5.4. x, y 是俩非交换变量, x, y 形式幂级数意义下 $e^x e^y = e^z$, 其中

$$\begin{aligned} z &= \sum_1^\infty (-1)^{n+1} n^{-1} \sum_{\alpha_i + \beta_i \neq 0} (ad_x)^{\alpha_1} (ad_y)^{\beta_1} \dots (ad_x)^{\alpha_n} (ad_y)^{\beta_{n-1}} y / c_{\alpha, \beta} \\ &= x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}([x, [x, y]] - [y, [x, y]]) + \dots, \quad c_{\alpha, \beta} = \alpha! \beta! |\alpha + \beta|. \end{aligned}$$

该公式的证明见附录，应用该公式能完成定理5.2的证明：

证明. 核心用是 *Lie* 代数的 Campbell-Hausdorff 公式进行细致计算。首先对 $X, Y \in T(\Omega)$ ，给定正整数 N 和 $\sigma \in (0, 1)$ 及小的 t ，有引理??的(??)式：

$$\|e^{t(X+Y)}u-u\|_{L^2} \leq C(\|e^{tX}u-u\|_{L^2} + \|e^{tY}u-u\|_{L^2} + \sum_2^{N-1} \|e^{t^j Z_j}u-u\|_{L^2} + t^{\sigma N} [u]_{\sigma})$$

其中向量场 Z_j 由 X, Y 的交换子生成，使得对任意 $u \in C_0^\infty(K)$ 都有

$$e^{t(X+Y)}u = e^{tX}e^{tY}e^{t^2 Z_2} \dots e^{t^{N-1} Z_{N-1}}u + O(t^N), \quad t \rightarrow 0$$

由 Campbell-Hausdorff 公式易知向量场 Z_j 被唯一确定。因此对 $T(\Omega)$ 的子模，只要知道生成元对函数的作用，借助 Step1 中半范数性质引理4.1，就可知子模中任何向量场对函数的作用。由于 $T_\Xi^s(\Omega)$ 的生成元是 $X_I, s(I) \geq s$ ，故现在关键是用 Ξ 表示 X_I 所引起的变化，即控制给定算子 X_j 的交换子。

固定 $\sigma \in (0, 1)$ ，再用 Campbell-Hausdorff 公式唯一确定一组 $\nu = \nu(I)$ 个长度 $> |I|$ 的指标集 $\{I_j\}_{j=1}^\nu$ ，且对 $\forall u \in C_0^\infty(K)$ (见附录引理??) 有

$$e^{t^{\frac{1}{s(I)}} X_I} u = \left(\prod_{i=0}^r e^{\pm t^{\frac{1}{s_i}} X_i} \right) \prod_{j=1}^\nu e^{t^{\frac{1}{s(I_j)}} X_{I_j}} u + O(t^{|I|}), \quad t \rightarrow 0.$$

根据半范数性质的引理4.1(2)：

$$\|e^{t^{\frac{1}{s(I)}} X_I} u - u\|_{L^2} \leq C \sum_{i=0}^r \|e^{t^{\frac{1}{s_i}} X_i} u - u\|_{L^2} + C \sum_{j=0}^\nu \|e^{t^{\frac{1}{s(I_j)}} X_{I_j}} u - u\|_{L^2} + Ct^{\sigma|I|} [u]_{\sigma}.$$

因上式右端第二项和式每项同左端有相同形式，若 $|I_j|\sigma < 1$ 则重复操作，直到所有 $|I_j|\sigma \geq 1$ ，由 $[\cdot]_{\sigma}$ 性质及 $\frac{1}{s(I_j)} \geq |I_j|$ 则有 $\|e^{t^{\frac{1}{s(I_j)}} X_{I_j}} u - u\|_{L^2} \leq Ct[u]_{\sigma}$ ，于是得到对生成元 X_I 的估计

$$\|e^{t^{\frac{1}{s(I)}} X_I} u - u\|_{L^2} \leq C_1 t \sum_{i=0}^r [u]_{X_i, s_i} + C_2 t [u]_{\sigma}.$$

现在当 $s \leq \sigma$ 且 X 是生成 $T_\Xi^s(\Omega)$ 的交换子 X_I ，从上式左端平凡可得

$$[u]_{X, s} \leq C_X \left(\sum_0^r [u]_{X_j, s_j} + [u]_{\sigma} \right), \quad u \in C_0^\infty(K), X \in T_\Xi^s(\Omega). \quad (5.3)$$

由 Step1 半范数性质的引理4.1(1)，(5.3)式对 $X = \varphi X_I, \varphi \in C^\infty(\Omega)$ 也成立。由定义，任何 $X \in T_\Xi^s(\Omega)$ 都是使(5.3)式成立的向量场有限和。

若 $X, Y \in T_{\Xi}^s(\Omega)$ 是使(5.3)式成立的向量场, 令 $\sigma N \geq s$, 由引理5.3, 因 $j \cdot \frac{1}{s} \leq \frac{1}{s/j}$, 故 X, Y 交换子的 j 次因子 $Z_j \in T_{\Xi}^{s/j}$, 对(??)式两端同除 $|t|^s$ 后关于 t 取上确界得 $[u]_{X+Y, s} \leq C([u]_{X, s} + [u]_{Y, s} + \sum_{j=2}^{N-1} [u]_{Z_j, \frac{s}{j}} + [u]_{\sigma})$ 。因为 s 很小时, (5.3)是平凡的, 故可假设 s 用 $\leq \frac{s}{2}$ 的数替换时(5.3)式已证, 进而 $[u]_{Z_j, \frac{s}{j}} \leq C_{Z_j}(\sum_0^r [u]_{X_j, s_j} + [u]_{\sigma})$, 可见再将(5.3)式中 X 用 $X + Y$ 替换仍然成立, 由 $X, X + Y$ 共有的选取任意性知(5.3)式得证。

回顾对某个 $\tau > \sigma, T_{\Xi}^{\tau}(\Omega) = T((\Omega))$, 由 $[u]_{\tau} \leq \sum_1^n [u]_{\partial_j, s}$ 得

$$[u]_{\tau} \leq \sum_1^n [u]_{\partial_j, s} \leq \sum_{i=1}^n C_{\partial_i}(\sum_0^r [u]_{X_j, s_j} + [u]_{\sigma}), \quad u \in C_0^{\infty}(K)$$

因 $[u]_{\sigma} \leq \|u\|_{H^{\sigma}} \leq \delta[u]_{\tau} + C_{\delta}\|u\|_{L^2}$ 。取 $\delta C < \frac{1}{2}$, 可断言 $[u]_{\sigma} \leq [u]_{\tau} \leq C'(\sum_0^r [u]_{X_j, s_j} + \|u\|_{L^2})$, $u \in C_0^{\infty}(K)$, 将此式代入(5.3)右端即证。 \square

6 Step4: 收尾工作

Step2 中我们用 Ξ 对 u 的作用结果控制了 u 的 Sobolev 范数, 而一开始的 Step3 其实是在用 Pu 控制 Ξ 对 u 的作用, 进而证明定理1.2由先验估计(3.4)导出。回顾(3.1)式的能量估计

$$\sum_1^r \|X_j v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \leq C\|v\|_{L^2}^2 - \Re \int v \overline{Pv} dx, \quad \forall v \in C_0^{\infty}(K)$$

由于 X_0 是一阶的, 故 X_0 的信息在能量估计中丢失了, 按 Hörmander 的说法则是 $X_0 u$ 所给信息在更弱的半范数中, 这阻碍了定理5.2的应用, (当然若不存在 X_0 项, 根据 Step2 中的定理5.2的特殊情形及半范数性质引理4.1的(3)知 Pu 的 L^2 范数可以控制 $\|u\|_{H^{\frac{1}{p}-\epsilon}}$, 即 $\|u\|_{H^{\frac{1}{p}-\epsilon}} \leq C(\sum_{i=0}^r \|X_i u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})$ 。)

为此, Hörmander 作出一些退让, 考虑 $f(t) = \|e^{tX_0} u - u\|_{L^2}$ 并关于 t 求导得 $\frac{df(t)^2}{dt} = 2\langle e^{tX_0} X_0 u, e^{tX_0} u - u \rangle$ 。暂时假设 e^{tX_0} 保范数 $\|\cdot\|, \|\cdot\|', \|\cdot\|''$, 接下来将引起矛盾, 事实上沿着假设有

$$\frac{df(t)^2}{dt} \leq 4 \|\cdot\| X_0 u \|\cdot\|' \|u\| \Rightarrow \frac{\|e^{tX_0} u - u\|_{L^2}}{|t|^{\frac{1}{2}}} \leq (\|\cdot\| u \|\cdot\| + \|\cdot\| X_0 u \|\cdot\|')$$

即不得不去控制 $[u]_{X_{0,\frac{1}{2}}}$, 故在 Step2 的定理5.2中取 $s_0 = \frac{1}{2}, s_1 = \dots = s_r = 1$, 期望证明:

定理 6.1. 对 $X \in T_{\Xi}^s(\Omega), u \in C_0^\infty(K)$ 有 $[u]_{X,s} \leq C(\|u\| + \|X_0 u\|')$ 。

证明该定理的想法与 Step2 中定理5.2类似, 通过研究 $\|e^{tX_0}u - u\|_{L^2}$ 的变化来估计 $[u]_{X_{0,1/2}}$, 叙述比较繁琐, 这里简述:

证明. 令 $\mathcal{J} := \{I : \sigma m(I) \leq 1, |I| < m(I) < 2|I|\}$, 第二个条件意味着 I 同时包含 $=0, \neq 0$ 的下标。通过原文 P21 及以后的工作, 知成立

$$[u]_{X_{0,\frac{1}{2}}} \leq C(\|u\| + \|X_0 u\|' + \sum_{I \in \mathcal{J}} [u]_{X_I, s(I)} + [u]_\sigma), \quad u \in C_0^\infty(K). \quad (6.1)$$

由注记A.3思想, 对充分小 η , 根据半范数性质引理4.1的 (1) 知

$$[u]_{X_I, s(I)} \leq \eta[u]_{X_{0,\frac{1}{2}}} + C_\eta \left(\sum_1^r [u]_{X_j, s_j} + [u]_\sigma \right) \leq \eta[u]_{X_{0,\frac{1}{2}}} + C_\eta \left(\sum_1^r \|X_j u\|_{L^2} + [u]_\sigma \right)$$

其中 $I \in \mathcal{J}$, 从而(6.1)推出

$$[u]_{X_{0,\frac{1}{2}}} + \sum_1^r [u]_{X_j, s_j} + \|u\|_{L^2} \leq C'(\|u\| + \|X_0 u\|' + [u]_\sigma)$$

令 $s > \sigma$ 但 $T_{\Xi}^s(\Omega) = T(\Omega)$, 则上式左端应用定理5.2得

$$[u]_s \leq C(\|u\| + \|X_0 u\|' + [u]_\sigma), \quad u \in C_0^\infty(K)$$

由 $[u]_\sigma \leq \delta[u]_s + C_\delta \|u\|_{L^2}$, $\forall \delta > 0 \Rightarrow [u]_s \leq C(\|u\| + \|X_0 u\|')$, $u \in C_0^\infty$, 从而 $\sum_0^r [u]_{X_j, s_j} \leq C(\|u\| + \|X_0 u\|')$, $u \in C_0^\infty(K)$, 至此证毕。 \square

注意到 $\|u\|' \leq \|u\|_{L^2}$, $\|u\|^2 + \|X_0 u\|'^2 \leq C(\|Pu\|'^2 + \|u\|_{L^2}^2)$, 上述定理可得较 Step2 次一级的估计:

$$\bullet \quad \|u\|_{H^{\frac{1}{p+1}-\epsilon}} \leq C(\|Pu\|' + \|u\|_{L^2}) \leq C(\|Pu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}), \quad u \in C_0^\infty(K)$$

这里令 $\delta = \frac{1}{p+1} - \epsilon$, 即证得(3.5)式 $\|u\|_{H^\delta} \leq C(\|Pu\|' + \|u\|_{L^2})$ 。

参考文献

- [1] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Mathematica, 119 (1967), pp. 147 – 171.
- [2] L. HÖRMANDER, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*, Singular integrals, (1967), pp. 138–183.
- [3] ———, *The analysis of linear partial differential operators*, Springer, 2005.
- [4] J. KOHN, *Pseudo-differential operators and hypoellipticity*, Spencer D. C. (ed), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 23 (1973), p. 61.
- [5] R. E. OLEINIK O., *Second-order equations with nonnegative characteristic form*, American Mathematical Society, 1973.
- [6] E. V. RADKEVICH, *On a theorem of l. hörmänder*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 24 (1969), pp. 233–234.
- [7] D. SHAO, *Hörmander 的亚椭圆性定理*. Website, 2018. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/34117281>.
- [8] Z. YANG, *What is Hypoellipticity?*, <https://www.yzpmath.com/post/2020-2/2020-2.pdf>, (2020). <https://www.yzpmath.com/post/2020-2/2020-2.pdf>.

A 附录

关于 Campbell-Hausdorff 公式的引理5.4:

引理 A.1. x, y 是俩非交换变量, x, y 形式幂级数意义下 $e^x e^y = e^z$, 其中

$$\begin{aligned} z &= \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-1} \sum_{\alpha_i + \beta_i \neq 0} (ad_x)^{\alpha_1} (ad_y)^{\beta_1} \dots (ad_x)^{\alpha_n} (ad_y)^{\beta_{n-1}} y / c_{\alpha, \beta} \\ &= x + y + \frac{1}{2} [x, y] + \frac{1}{12} ([x, [x, y]] - [y, [x, y]]) + \dots, \quad c_{\alpha, \beta} = \alpha! \beta! |\alpha + \beta|. \end{aligned}$$

证明. • 断言 G 为 Lie 群, A, B 为 G 的 Lie 代数 g , 则 $e^A B e^{-A} = e^{ad_A} B$
 令 $End(g) := \{a, b \in g : \exists \phi : g \mapsto g \text{ s.t. } \phi(a)\phi(b) = \phi(ab)\}$, $f_A(s)B =$

$e^{sA}Be^{-sA}$, 关于 s 求导得

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}f_A(s)B &= Ae^{sA}Be^{-sA} - e^{sA}BAe^{-sA} = [A, e^{sA}Be^{-sA}] = ad_A f_A(s)B \\ &= e^{sA}ABe^{-sA} - e^{sA}BAe^{-sA} = f_A(s)[A, B] = f_A(s)ad_AB\end{aligned}$$

故得 $f'_A(s) = ad_A f_A(s)$, 同时 $f'_A(s) = f_A(s)ad_A$, 即可交换

- 直觉上有 $f_A(s) = e^{s \cdot ad_A}$

$$\text{事实上 } f_A(s) = \sum_0^\infty \frac{A_n}{n!} s^n, \forall A_n \in \text{End}(g), f'_A(s) = \sum_0^\infty \frac{A_{n+1}}{n!} s^n =$$

$$ad_A \sum_0^\infty \frac{A_n}{n!} s^n, \text{ 则 } A_{n+1} = ad_A A_n, A_0 = f_A(0)I = I \Rightarrow A_n = (ad_A)^n,$$

$$\text{故 } f_A(s) = \sum_0^\infty \frac{(s \cdot ad_A)^n}{n!} = e^{s \cdot ad_A}. \text{ 取 } s = 1, \text{ 即有 } e^{ad_A}B = B +$$

$$[A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots$$

定义 $g(s) := e^{sX}e^{sY}$, 则

$$\begin{aligned}g'(s)e^{sX}Xe^{sY} + e^{sX}e^{sY}Y &= e^{sX}e^{sY}(e^{-sY}Xe^{sY} + Y) \\ &= g(s)(X + Y - s[Y, X] + \frac{s^2}{2!}[Y, [Y, X]] - \dots)\end{aligned}$$

设 $g(s) = e^{h(s)}$, 关于 s 求导得

$$\begin{aligned}e^{-h(s)}\frac{d}{ds}e^{h(s)} &= e^{-h(s)}h'(s)e^{h(s)} = e^{-ad_{h(s)}}h'(s) = h'(s) - [h, h'] + \frac{1}{2!}[h, [h, h']] - \dots \\ &= g(s)^{-1}g'(s) = X + Y - s[Y, X] + \frac{s^2}{2!}[Y, [Y, X]] - \dots\end{aligned}$$

将 $h(s), h(0) = 0$ 在 $s = 0$ 处 Taylor 展开得 $h(s) = \sum_1^\infty h_n s^n, h'(s) =$

$\sum_1^\infty n h_n s^{n-1}$, 于是

$$[h, h'] = [h_1 s + h_2 s^2 + \dots, h_1 + 2h_2 s + 3h_3 s^2 + \dots] = [h_1, h_2]s^2 + \dots$$

从而 $e^{-h(s)}\frac{d}{ds}e^{h(s)} = h_1 + 2h_2 s + 3h_3 s^2 - [h_1, h_2]s^2 + \dots$, 比较得 $h_1 = X + Y, h_2 = [X, Y]/2, \dots$. \square

引理 A.2. (1) 令 $X, Y \in T(\Omega)$, Z_j 为 j 次 X, Y 交换子的线性组合。当

$\sigma \in (0, 1], 2 \geq N \in \mathbb{N}$, 则对小的 t 和 $u \in C_0^\infty(K)$ 成立

$$\begin{aligned} & \|e^{t(X+Y)}u - u\|_{L^2} \\ & \leq C(\|e^{tX}u - u\|_{L^2} + \|e^{tY}u - u\|_{L^2} + \sum_{j=2}^{N-1} \|e^{t^j Z_j}u - u\|_{L^2} + t^{\sigma N}[u]_\sigma). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

(2) 给定 $X_j, s_j, j = 0, \dots, r$ 如定理 5.2, 令 $m_j = \frac{1}{s_j}, m(I) = \frac{1}{s(I)}$. 设 $\sigma > 0$, 则对小的 $t, u \in C_0^\infty(K)$ 和任意多重指标 I 成立

$$\|e^{t^{m(I)}X_I}u - u\|_{L^2} \leq C_1(r, \sigma)t \sum_0^r [u]_{X_j, s_j} + C_2(r, \sigma)t[u]_\sigma. \quad (\text{A.2})$$

证明. 对 (1), 令

$$H_N^t = e^{-t^{N-1}Z_{N-1}} \dots e^{-t^2Z_2} e^{-tY} e^{-tX} e^{t(X+Y)}, \quad H_N^t v(x) := v(h_N(x, t))$$

后者定义了 $K \times 0$ 邻域到 Ω 的 C^∞ 函数 v , 借助展开式 $e^{tX}u \sim \sum_0^\infty \frac{t^k X^k}{k!}u$,

由余项的产生方式知进行到了 N 阶, 即 $H_N^t v - v = O(t^N)$. 取 v 是坐标投影, 得 $h_N(x, t) - x = O(t^N)$, 由半范数性质的引理 4.1(2) 有

$$\|H_N^t v - v\|_{L^2} \leq C|t|^{\sigma N}[v]_\sigma$$

注意对任意有界算子 $S_1, \dots, S_k \in L^2$, 三角不等式得 $\|S_1 \dots S_k u - u\|_{L^2} = \|\sum_{j=1}^k S_1 \dots S_{j-1}(S_j u - u)\|_{L^2} \leq \sum_{j=1}^k \prod_{i=1}^{j-1} \|S_i\|_{L^2} \|S_j u - u\|_{L^2}$, 由于 $e^{t(X+Y)} = e^{tX} e^{tY} e^{t^2 Z_2} \dots e^{t^{N-1} Z_{N-1}} H_N^t$ 且每一项的 L^2 范数关于 t 一致有界, (1) 证毕。

对 (2), 因 $m_j \geq 1 \Rightarrow m(I) \geq |I|$, 故当 $\sigma|I| \geq 1$ 时, Step1 半范数性质的引理 4.1(2)——即 (A.2) 式取 $C_1 = 0$, 故 (A.2) 直接成立。

设 $N \in \mathbb{N}, N\sigma \geq 1, |I| = N$ 向下归纳. Campbell-Hausdorff 得

$$e^{x_{k-1}} e^{x_k} e^{-x_{k-1}} e^{-x_k} = e^{x_{k-1} + x_k + \frac{1}{2}[x_{k-1}, x_k] + O_3} e^{-x_{k-1} - x_k + \frac{1}{2}[x_{k-1}, x_k] + O_3} = e^{[x_{k-1}, x_k] + O_3} = e^{z_{k-1}}$$

再令 $e^{x_j} e^{z_{j+1}} e^{-x_j} e^{-z_{j+1}} = e^{z_j}, j = 1, \dots, k-2$, 由此得一系列形式幂级数 $z_{k-1}, z_{k-2}, \dots, z_1$, 如 $k=3$ 则有

$$\begin{cases} e^{x_2} e^{x_3} e^{-x_2} e^{-x_3} = e^{z_2}, \\ e^{x_1} e^{z_2} e^{-x_1} e^{-z_2} = e^{z_1} \end{cases} \Rightarrow e^{x_1} e^{x_2} e^{x_3} e^{-x_2} e^{-x_3} e^{-x_1} e^{x_3} e^{x_2} e^{-x_3} e^{-x_2} = e^{z_1}$$

$n_3 = 2n_2 + 2 = 10$ 表示算子 $e^{\pm x_j}$ 的项数, 即 e^{z_1} 是 n_k 个因子 $e^{\pm x_j}$ 乘积, 其中 $n_2 = 4, n_{k+1} = 2n_k + 2 \Rightarrow n_k = 3 \cdot 2^{k-1} - 2$, 且 $z_1 = \underbrace{\prod_{j=1}^{k-1} (ad_{x_j}) x_k + \dots}_c$.

再次使用 Campbell-Haudorff 公式, 有余项表达 $e^c = e^{z_1} e^{c_1} e^{c_2} \dots e^{c_v} e^r$. 用 $t^{m_j} X_{i_j}$ 替换变量 x_j 得 $3 \cdot 2^{|I|-1} - 2$ 项因子

$$e^{t^{m(I)} X_I} = \prod_0^r e^{\pm t^{m_j} X_j} \prod_{i=1}^\nu e^{t^{m(I_1)} X_{I_{\text{autocitehormanderHypoellipticSecondOrder1967nu}}}} H_N^t$$

式中指标集长度都 $> |I|$. $H_N^t v(x) = v(h_N(x, t))$ 定义了关于 x 光滑并连续依赖 t 的函数 $h_N(x, t)$, 使 $h_N(x, t) - x = O(t^N)$, $t \rightarrow 0$, 由 Step1 半范数性质的引理4.1(2) 得 $\|H_N^t u - u\|_{L^2} \leq CT^{N\sigma} [u]_\sigma$, $u \in C_0^\infty(K)$, 同理由三角不等式得

$$\|e^{t^{m(I)} X_I} u - u\|_{L^2} \leq 2^{|I|+1} \sum_0^r \|e^{t^{m_j} X_j} u - u\|_{L^2} + 2 \sum_1^\nu \|e^{t^{m(I_j)} X_{I_j}} u - u\|_{L^2} + Ct^{\sigma N} [u]_\sigma$$

因对充分小 t , e 指数算子的算子范数趋于 1, 对上式右端第二项和式进行归纳, 一旦 $|I_j|\sigma < 1$ 则将 I_j 当做 I 再来一遍, 直到找到若干 $|I_j|\sigma \geq 1$, 故 $\sigma N \geq 1$, (A.2)证毕. \square

注解 A.3. 因 C_1 不依赖 X_0, \dots, X_r 的选取, 则 I 包含 ≥ 1 的指标, $\forall \epsilon > 0$, 用 ϵX_0 替换 X_0 , 对合适的 $\gamma > 0, j \geq 1$, 用 $e^{-\gamma} X_j$ 替换 X_j , X_I 并不会发生变化, 从而

$$\|e^{t^{m(I)} X_I} u - u\|_{L^2} \leq \epsilon t [u]_{X_0, s_0} + C_\epsilon t \left(\sum_1^r [u]_{X_j, s_j} + [u]_\sigma \right), \quad u \in C_0^\infty(K).$$