Note of Hörmander's Hypoellipticity

2023 年 8 月 25 日

1 Introduction

首先回顾两个经典 PDE:

- Laplace's equation $\Delta u = 0$.
- Wave equation $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$.

尽管两个方程仅差系数的符号，解的光滑性天差地别：Laplace 方程的解是无穷次可微的调和函数，波方程的一般解则不必光滑甚至不必连续。

在分布意义下考虑更一般的椭圆方程 $Pu = f$，一个基本问题是：给定 f 后可以对 u 说点什么？通常期望 u 能从 f 那继承一些性质，如 f 光滑得到 u 光滑。由椭圆正则性定理，正系数可保证光滑性，但椭圆性是充分不必要的，例如非椭圆的热方程 $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ 的解也是光滑的。光滑性的充要条件暂未找到，尝试减弱椭圆性，因此引入亚椭圆概念和亚椭圆微分算子：

定义 1.1.

- *所有解都光滑，则称该 PDE 是亚椭圆的。*
- *若 $u \in \mathcal{D}(\Omega)$，$u$ 的奇异支集 $sing\ supp(u)$ 指 Ω 中一个集合，其上没有让 $u|_U \in C^\infty$ 的开邻域 U。*
- *在任意开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$（或某流形）上有 C^∞ 系数的线性微分算子 P，若 P 满足对所有 Ω 上的分布 u，成立 $sing\ supp(u) = sing\ supp(Pu)$，即 $Pu \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$，则 P 是亚椭圆算子。*

来看两个例子:

例 1.
- 由微积分基本定理 $u(x)=\int_0^x Pu(t)\mathrm{dt}+\mathrm{u}(0)$，$\mathbb{R}$ 上 $P=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$ 是亚椭圆的。
- $\mathbb{R}^2$ 上 $P=\frac{\partial}{\partial x}$ 非亚椭圆，取 $u=u(y)$ 并不必光滑。

人们在后续的研究中还定义了最大亚椭圆性、子椭圆性，目前已知 $Ellipticity \Rightarrow Maximal\ Hypoellipticity \Rightarrow Subellipticity \Rightarrow Hypoellipticity$，而在子椭圆性和亚椭圆性之间还有很多东西看不清楚。

Hörmander 关于 2 阶亚椭圆微分算子的一个经典定理回答了光滑性的充要条件，定理由 Hörmander 本人在 1967 年一篇 Acta [1] 上发表：

定理 1.2. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为开集，其上有一二阶微分算子

$$P=\sum_{j=1}^{r}X_j^2+X_0+c$$

其中 $X_0,...,X_r$ 是 Ω 上有 C^∞ 系数的一阶齐次微分算子（或 Ω 上的光滑实向量场），$c\in C^\infty$（或光滑函数）。若由 $\Xi=(X_0,...,X_r)$ 生成的 Lie 代数在 Ω 中每点的秩都是 n，即

$$X_{j_1},[X_{j_1},X_{j_2}],[X_{j_1},[X_{j_2},X_{j_3}]],...,[X_{j_1},[X_{j_2},[X_{j_3},...,X_{j_k}]]...],\ j_i=0,1,...,r$$

中存在 n 个 Ω 任给点处线性无关的算子，则对任意紧集 $K\subset\Omega$，都存在一个仅与诸向量场有关的常数 $\delta=\delta_K$ 使得 $Pu\in H^s_{loc}(K)\Rightarrow u\in H^{s+\delta}_{loc}(K)$，特别地，这表示 P 是亚椭圆微分算子，即 $Pu\in C^\infty\Rightarrow u\in C^\infty$。

注解 1.3.
- 算子 P 不必要求 X_j 在任何点线性无关，甚至可以用线性组合重表为 $X'_j=\sum c_{jk}X_k$。
- δ 和向量场的依赖关系，因正则性是局部性质，假定开集 Ω 足够小，使对某个 p，$Lie(\Xi)$ 可由诸向量场取至多 p 次 Lie 括号生成，*Hörmander* 原证明做到 $\delta\sim 1/p$，即 δ 仅取决于向量组 Ξ 的代数性质。

定理对微分算子提的条件称为 Hörmander 条件。当时已知常系数情况下亚椭圆算子的充要条件，也知道被一个变系数的“弱算子”扰动后方程仍为亚椭圆（见 [3]II 卷 11 章及后续），以 Hörmander 为代表的数学家也做了许多工作。

粗略地说，原文的参考文献 2 [2] 所给亚椭圆性充分条件指出：将系数中参数“冻结”在某点 x 处得到的常系数的微分方程是亚椭圆的，且不随 x 变化

过快，但离必要条件太远，例如方程 $\partial_x^2 u + x\partial_y u - \partial_t u = f$ 这个 Kolmogorov 型演化方程就不适合。事实上在 $x = x_0$ 处冻结后，算子只作用在 2 维平面，即 $\partial_x^2 u(x_0, y, t) + x_0\partial_y u(x_0, y, t) - \partial_t u(x_0, y, t) = f(x_0, y, t)$，原因是方程左端算子的象征高度退化，无论在哪点“冻结”系数都不可能得到有意义的正则性估计。不过 Kolmogorov 早在 1934 年就构造了该方程的精确基本解，该解在对角线外是 C^∞ 的，从而该方程事实上是亚椭圆的。

Kolmogorov 的方法大致如下：

- 对方程 t 之外的变量进行 Fourier 变换
- 为获得某时间切片 t_0 处的基本解，要求在此刻之前为 0，试图找到在该时刻及以后的解 U，满足 t_0 时刻 $U = -e^{-is\cdot\xi}, s = (x, y)$
- 根据特征线方程 $\frac{\mathrm{dt}}{-1} = \frac{\mathrm{d\xi_j}}{-\sum b_{jk}\xi_k} = \frac{\mathrm{dU}}{A(\xi,\xi) - c'} = 1$ 解得 $t = t_0 + \tau, \xi(\tau) = e^{B\tau}\eta, U = -e^{-is\cdot\eta - \int_0^\tau (A(\xi(m),\xi(m)) - c')\mathrm{dm}}$ 并代入初值条件得到 $U(t,\xi), t > t_0$，同时令 $U(t,\xi) = 0, t < t_0$
- U 指数中的二次型半正定，除非 $A(B^k\xi, B^k\xi) = 0, \forall k$ 成立，否则二次型正定并且意味着 A 的零空间包含 B 的非平凡不变子空间。反证法：若不然，Fourier 变换得对角线外 C^∞ 的双边基本解；固定 t, t_0, $e^{B^T t}x - e^{B^T t_0}y$ 中指数负定二次型的特征值在 $t - t_0 \to 0$ 时 $\to -\infty$（特征值可有不同数量级，基本解的可微性有各向异性的重要特征），故除非 A 的零空间包含 B 的非平凡不变子空间，原方程是亚椭圆的

若借助 Hörmander 定理，令 $X_0 = -\partial_t + x\partial_y, X_1 = \partial_x \Rightarrow [X_0, X_1] = -\partial_y$，则 $span\{X_1, [X_0, X_1]\} = T_x M$ 并可得想要的正则性估计：若 $f \in H^s(\Omega)$，则对任意紧集 $K \subset \Omega$ 都有 $\|u\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(K)} \le C_K(\|u\|_{H^s(\Omega)} + \|f\|_{H^s(\Omega)})$。由此可见 Hörmander 定理：

- 对经典的椭圆正则性理论作了相当程度的推广
- 揭示了微分算子的正则性和代数特性的关联

Hörmander 定理给有实光滑系数的亚椭圆 2 阶微分算子一个几乎完整的刻画，事实上有如下直观理解：设在 $x_0 \in \Omega$ 某邻域内，$Lie(\Xi)$ 的秩在每一点恒小于 n，根据微分几何的 Frobenius 定理，在 x_0 的某邻域内有坐标变换 $x \to y$，使 P 在新坐标系下的表达式仅包含关于 $y^1, ..., y^{n-1}$ 的偏导数。故

在每一片叶理 (foliation)$y^n = const$ 上都可任意定义 u 的值，如此所得函数可以非常不光滑，但仍是分布意义下 $Pu = 0$ 的解，看出 Hörmander 条件

$$rank\ Lie(\Xi)(x) = n\ \forall x \in \Omega$$

是亚椭圆性的必要条件。（在这个方向已经发展出了一套联系分析和代数的理论，即所谓 Carnot 群，人们可以研究形如 $(X_0 + \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}X_iX_j)u = f$ 的方程，其中 (a_{ij}) 是 Hölder 连续的一致正定的矩阵值函数，可对这类方程使用 Carnot 群上的调和分析手段证明 Schauder 和 L^p 型先验估计。）

文章结构如下：

- 第 2 节讨论亚椭圆性的一种必要条件
- 第 3 节证明核心定理 1.1 是某些先验估计的产物
- 第 4 节对函数沿一组非交换向量场的可微性进行初步研究，直到第 5 节才完成证明

2 亚椭圆性的一个必要条件

在证明定理前，我们给出亚椭圆性的一个必要条件。已知断言：常系数亚椭圆微分方程非椭圆时，必有多个特征 [见 [3]II 卷定理 11.1.10]，下面将该结果推广到变系数情形：

定理 2.1. 令 $P(x, D)$ 为 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上系数 C^∞ 的微分算子，令主象征 $p(x, \xi)$ 取实数。若对某 $x \in \Omega$ 存在实数 $\xi \neq 0$ 使得

$$p(x, \xi) = 0,\ but\ \frac{\partial p(x, \xi)}{\partial \xi_j} \neq 0\ for\ some\ j,$$

则 P 非亚椭圆。

注解 2.2.
- 微分算子:$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, D^\alpha = (-i\partial_{x_1})^{\alpha_1} ... (-i\partial_{x_n})^{\alpha_n}$，定义算子 $P(x, D)$ 的象征 $p(x, \xi)$ 满足：$\mathcal{F}[P(x, D)u](\xi) = p(x, \xi)\hat{u}(\xi)$。
- 象征：$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$，$m$ 阶主象征：$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$。

证明. 不妨取 $x=0$，特征方程的经典积分理论 [见 [3]II 卷定理 thm6.4.5] 指出在 0 邻域附近存在实值函数 φ 使得 $\nabla\varphi(0)=\xi, p(x,\nabla\varphi(x))=0$，用 0 邻域替换 Ω，对方程 $P(x,D)u=0$ 定义形式解:

$$u=\sum_0^\infty u_j t^{-j}e^{it\varphi}, u_j\in C^\infty, t \textbf{ is a parameter}$$

则 $P(ve^{it\varphi})=e^{it\varphi}\sum_0^m c_j t^j$，其中 $c_m=vp(x,\nabla\varphi(x))=0, c_{m-1}=\sum_1^n A_jD_jv+Bv, A_j=p^{(j)}(x,\nabla\varphi(x))$，故 $Pu=e^{it\varphi}\sum_0^m c_jt^j=t^m\sum_0^\infty a_jt^{-j}e^{it\varphi}, c_m=0, c_{m-1}=\sum_1^n A_jD_j(\sum_0^\infty u_lt^{-l})+B(\sum_0^\infty u_lt^{-l})$，故知 $a_0=0, a_1=\sum_1^n A_jD_ju_0+Bu_0, ..., a_k=\sum_1^n A_jD_ju_{k-1}+Bu_{k-1}+L_k, L_k$ 由 $u_0,...,u_{k-2}$ 及其导数线性组合而成，因 A_j 是不全为零实数，可在 Ω 选一系列原方程的解 $u_0,u_1,...$ 满足 $u_0(0)=1$。

若 $Pu=0$ 是亚椭圆方程，断言有先验估计

$$|\nabla u(0)|\leq C(\sup|u|+\sum_{|\alpha|\leq N}\sup|D^\alpha Pu|),\ u\in C^\infty(\Omega) \tag{2.1}$$

事实上 Ω 上所有自身连续有界且 $\forall\alpha, D^\alpha Pu$ 都连续有界的函数 u 的集合在 $C^\infty(\Omega)$ 中, 则先验估计可由闭图像定理得到。参考 [吉田耕作 P81,Sec 6,thm 2]Hörmander 比较定理，只要证明 $T_1u=D^\alpha Pu$ 是闭算子，$T_2u=\nabla u(0)$ 是可闭算子且 $D(T_1)\subset D(T_2)$ 则成立 $\|T_2u\|\leq C(\|T_1u\|^2+\|u\|^2)^{1/2}$，此即先验估计，事实上这是显然的:

$$\begin{cases} u_n\in D(T_1), \begin{cases} u_n\to u, \\ T_1u_n\to f, \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} u\in D(T_1), \\ T_1u=f. \end{cases} \\ u_n\in D(T_2), \begin{cases} u_n\to 0, \\ T_2u_n\to f, \end{cases} & \Rightarrow f=0. \end{cases}$$

用 $u=\sum_0^{k-1}u_jt^{-j}e^{it\varphi}$ 代入先验估计(2.1)，为保证算子 P 二阶，需级数收敛，即 $N+m-2-(k-1)=N+m-k-1\leq 0$，故提 $N+m\leq k+1$ 条件，从而(2.1)右式在 $t\to\infty$ 时有界，但左式不一定有界，矛盾! □

推论 2.3. 对一个有实主象征的二阶亚椭圆算子，主象征必定是半定二次型。

3 Step3: 定理证明的前置准备

令微分算子 P 由定理1.2定义，则 $T(\Omega)$ 是一个实值函数子集 $C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ 的模，同样地，$T(\Omega)$ 也可看作 Ω 切丛的 C^∞ 节（连续右逆）构成的空间。

证明出发点是分部积分得到先验估计。注意到如 $X_j = a(x)\partial_x \Rightarrow \langle X_j u, v\rangle = -\int u\cdot X_j v - \int \partial_x a(x)\cdot uv$，即 X_j 的伴随算子是 $-X_j + a_j, a_j(x) \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$，对方程 $Pv = 0$ 关于 v 作内积并取实部，频繁利用伴随算子得

$$
\begin{aligned}
-\Re\int v\overline{Pv}\mathrm{dx} &= \Re\sum_1^r\int (X_j v - a_j v)\overline{X_j v}\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\int \mathrm{X_0|v|^2dx} - \int \mathrm{\Re c|v|^2dx} \\
&= \sum_1^r \int |X_j v|^2\mathrm{dx} + \int \sum_1^{\mathrm{r}} [(\mathrm{X_j a_j} - \mathrm{a_j^2}) - \frac{1}{2}\mathrm{X_0} - \Re\mathrm{c}]\mathrm{|v|^2dx} + \frac{1}{2}\sum_1^{\mathrm{r}}\int \mathrm{a_j\cdot X_j|v|^2dx} \\
&= \ldots - \frac{1}{2}\int\sum_1^r (X_j a_j - a_j^2)|v|^2\mathrm{dx} \\
&= \sum_1^r\int |X_j v|^2\mathrm{dx} + \int \underbrace{[\frac{1}{2}\sum_1^r (X_j a_j - a_j^2) - \frac{1}{2}X_0 - \Re c]}_{\mathrm{d}}\mathrm{|v|^2dx}
\end{aligned}
$$

故只要 $\int (1-d)|v|^2\mathrm{dx} \le \mathrm{C\|v\|_{L^2}^2}$ 就有

$$
\sum_1^r \|X_j v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \le C\|v\|_{L^2}^2 - \Re\int v\overline{Pv}\mathrm{dx},\ \forall \mathrm{v} \in \mathrm{C_0^\infty(K)}. \tag{3.1}
$$

为(3.1)左式引入范数 $|||v||| := \sum_1^r \|X_j v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2$，同时为精确估计(3.1)右式，引入对偶 $|||f|||' := \sup\frac{\int fv\mathrm{dx}}{|||v|||}$，$v \in C_0^\infty(\Omega)$，显然 $|||f|||' \le \|f\|_{L^2}$，故 $|||v\ ||| - C\|v\|_{L^2}^2 \le -\Re\int v\overline{Pv}\mathrm{dx} \le |||\mathrm{v}\ |||\ |||\mathrm{Pv}|||' \le \frac{1}{2}(|||\mathrm{v}\ |||^2 + |||\ \mathrm{Pv}|||'^2)$，得

$$
|||v|||^2 \le C\|v\|_{L^2}^2 + |||Pv|||'^2,\ \forall v \in C_0^\infty(K) \tag{3.2}
$$

因 $|||X_j f|||' = \sup\frac{\int f(-X_j + a_j)v\mathrm{dx}}{|||v|||} \le \frac{\|f\|_{L^2}(\|X_j v\|_{L^2} + \|a_j v\|_{L^2})}{|||v|||} \le C\|f\|_{L^2}$，用到 K 是紧集，a_j 有界，即得

$$
|||X_j f|||' \le C\|f\|_{L^2},\ \forall f \in C_0^\infty(K),\ j = 1,\ldots,r
$$

故 $|||X_j^2 v|||' \leq C\|X_j v\|_{L^2} \leq C\, |||\, v|||, j=1,...,r$，由(3.2)$|||X_0 v|||' = |||Pv - \sum_1^r X_j^2 v - cv|||' \leq |||Pv\, |||' + C_1\, |||\, v\, ||| + C_2\|v\|_{L^2} \leq C(|||Pv\, |||' + \|v\|_{L^2})$，故得

$$|||v\, |||^2 + |||\, X_0 v|||'^2 \leq C(\|v\|_{L^2}^2 + |||Pv|||'^2),\ \forall v \in C_0^\infty(K) \tag{3.3}$$

引入分数阶 Hilbert 范数 $\|v\|_{H^s}^2 := (2\pi)^{-n}\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi$, $\mathrm{v} \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{K})$，现假设成立（证明在沿向量场可微性的研究中）

$$\|v\|_{H^\epsilon} \leq C(|||v\, ||| + |||\, X_0 v|||'),\ \forall v \in C_0^\infty(K) \tag{3.4}$$

结合(3.3)式，得

$$\|v\|_{H^\epsilon} \leq C(\|v\|_{L^2} + |||Pv|||'),\ \forall v \in C_0^\infty(K). \tag{3.5}$$

只要证得(3.5)式，即知 P 是亚椭圆算子，从而关键步骤是证明下面命题：

命题 3.1. 假设在 Ω 的紧子集 K 上(3.5)式成立，则使 $|||Pv|||' < \infty$ 成立的任意 $v \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$ 也在 H^ϵ 中。

- 首先断言(3.5)式对所有在 Ω 有紧支集的 $v \in H^2$

事实上可找到一列 $v_j \in C_0^\infty(K)$，其中 K 取 $supp(v)$ 的紧邻域，使

$$D^\alpha v_j - D^\alpha v \to 0\ as\ j \to \infty, |\alpha| \leq 2$$

故 $\|Pv_j - Pv\|_{L^2} \to 0$，从而 $|||Pv_j - Pv|||' \leq \|Pv_j - Pv\|_{L^2} \to 0$。特别地有

$$|||Pv_j|||' \leq |||Pv_j - Pv\, |||' + |||\, Pv|||' \Rightarrow \limsup |||Pv_j|||' \leq |||Pv|||'$$

把(3.5)式用在 v_j 上得 $\limsup \|v_j\|_{H^\epsilon} \leq C(\|v\|_{L^2} + |||Pv|||')$，即断言成立。

若 v 满足命题3.1，取 $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ 满足 $0 \leq \chi \leq 1$ 且在 $supp(v)$ 的邻域 ω 取到 $\chi = 1$，令 $v_\delta = \chi(1-\delta^2\Delta)^{-1}v$，此处

$$(1-\delta^2\Delta)^{-1}v := \mathcal{F}^{-1}[(1+\delta^2|\xi|^2)^{-1}\hat{v}(\xi)](x)$$

显然 $\|v_\delta\|_{H^2}^2 = \|\hat{v_\delta}\|_{H^2}^2 = \int \frac{|\hat{v}|^2(1+|\xi|^2)^2}{(1+\delta^2|\xi|^2)^2} \lesssim \|v\|_{H^2} < \infty$，这里用到上述断言，故 $v_\delta \in H^2, supp(v_\delta) \subset supp(\chi) \subset\subset \Omega$ 且有 $v_\delta \xrightarrow{L^2} v,\ as\ \delta \to 0$。

对 v_δ 应用(3.5)式，则

$$C(\|v_\delta\|_{L^2} + |||Pv_\delta|||') \geq \|v_\delta\|_{H^\epsilon} = \int |\hat{v}|^2 \frac{(1+|\xi|^2)^\epsilon}{(1+\delta^2|\xi|^2)^2} \to \|v\|_{H^\epsilon}$$

这里通过 $|\hat{v}|^2\frac{(1+|\xi|^2)^\epsilon}{(1+\delta^2|\xi|^2)^2} \le |\hat{v}|^2(1+|\xi|^2)^2 \in L^1$ 使用 DCT 得到。显然要证 $\|v\|_{H^\epsilon} < \infty$，只要 $|||Pv_\delta|||' < \infty,\ as\ \delta \to 0$，为此给出以下注解（先不用看）：

注解 3.2.

- 偶函数 $K(x) := \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-1}]$ 及其任意阶导数在 ∞ 处指数衰减。事实上设

$$K_\epsilon(x) = \int_\epsilon^\infty \int e^{-\lambda(1+|\xi|^2)+ix\cdot\xi}\mathrm{d}^n\xi \mathrm{d}\lambda = \int_\epsilon^\infty \mathrm{e}^{-\lambda-\frac{|\mathrm{x}|^2}{4\lambda}}(\int \mathrm{e}^{-\lambda|\xi-\mathrm{i}\frac{\mathrm{x}}{2\lambda}|^2}\mathrm{d}^n\xi)\mathrm{d}\lambda$$

$$\overset{\lambda=\frac{|x|}{2}e^t}{=} \pi(\frac{2\pi}{|x|})^{\frac{n}{2}-1}\int_{\log\frac{2\epsilon}{|x|}}^\infty e^{-|x|\cosh(t)}e^{-(\frac{n}{2}-1)t}\mathrm{d}t \xrightarrow{\text{Bessel}} 2\pi(\frac{2\pi}{|\mathrm{x}|})^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{B}_{\frac{n}{2}-1}(|\mathrm{x}|)$$

其中 $B_\alpha(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh(t)}\cosh(\alpha t)\mathrm{d}t$，*Taylor* 展开知

$$K \sim \begin{cases} O(\log|x|),\ n=2 \\ O(|x|^{2-n}),\ n>2 \end{cases} \cdot \chi_{|x|<\sqrt{\frac{n}{2}}} + e^{-|x|}\chi_{|x|\ge\sqrt{\frac{n}{2}}}$$

另一方面，因 $(1-\Delta)^{-1}u(x) = K * u(x)$，有

$$(1-\delta^2\Delta)^{-1}v(x) \overset{t=\delta\xi}{=} (2\pi)^{-n}\int e^{i\frac{x}{\delta}\cdot t}(1+|t|^2)^{-1}\hat{v}(\frac{t}{\delta})\mathrm{d}t\cdot\delta^{-\mathrm{n}}$$
$$= \int K(y)v[\delta(y+\frac{x}{\delta})]\mathrm{d}y = \int \mathrm{K}(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{\delta})\mathrm{u}(\mathrm{y})\mathrm{d}\mathrm{y}\cdot\delta^{-\mathrm{n}}$$

知当 $x \notin \omega$，$\delta \to 0$ 时，$(1-\delta^2\Delta)^{-1}v(x)$ 任意阶导数比 δ 任意幂次衰减更快。

- 若 Q 是系数 C^∞ 的 $j \le 2$ 阶微分算子，则成立

$$\|(1-\delta^2\Delta)^{-1}\delta^jQu\|_{L^2} \le C\|u\|_{L^2},\ u \in L^2 \tag{3.6}$$

考虑伴随算子 $\langle K, \delta^jQu\rangle = \langle Q^*\delta^jK, u\rangle, \dfrac{\delta^j(1+|\xi|)^j}{(1+\delta^2|\xi|^2)^{-1}} \le C \Rightarrow \|Q^*\delta^j(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\|_{L^2} \le C\|u\|_{L^2}$

- 若 Q 是系数 C^∞ 的 ≤ 1 阶微分算子，则成立

$$\|[Q,(1-\delta^2\Delta)^{-1}]u\|_{L^2} \le C\|u\|_{L^2},\ \forall u \in C_0^\infty \tag{3.7}$$

事实上记 $w = (1-\delta^2\Delta)^{-1}u, u = (1-\delta^2\Delta)w \Rightarrow Qu = (1-\delta^2\Delta)Qw + \delta^2Rw$，$R = [\Delta, Q]$ 是 *2* 阶微分算子，两边作用 $(1-\delta^2\Delta)^{-1} \Rightarrow [Q,(1-\delta^2\Delta)^{-1}]u = (1-\delta^2\Delta)^{-1}\delta^2Rw$，再由估计(3.6)知右端的 L^2 范数 $\le C\|w\|_{L^2} \le C\|u\|_{L^2}$，此处用了 *Fourier* 变换。

- 当 $\chi_j \in C_0^\infty(\Omega), j=1,2$，有

$$|||\chi_1(1-\delta^2\Delta)^{-1}\chi_2 u||| \le C\,|||\,u|||,\ u\in C_0^\infty(\Omega)$$

这是因为 $\|[X_j\chi_1,(1-\delta^2\Delta)^{-1}]\chi_2 u\| \le C\|u\|_{L^2}$，而第二项由(3.6)式取 $Q=\chi_1\chi_2 X_j$ 即可。还有

$$|||\chi_2(1-\delta^2\Delta)^{-1}\chi_1 f|||' \le C\,|||\,f|||',\ f\in \mathcal{D}'(\Omega)$$

这是因为 $\int \chi_2[K*(\chi_1 f)]u = \iint K(x-y)(\chi_1 f)(y)\mathrm{dy}(\chi_2\mathrm{u})(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \int [\mathrm{K}*(\chi_2\mathrm{u})](\mathrm{y})(\chi_1\mathrm{f})(\mathrm{y})\mathrm{dy} \le \mathrm{C}\,|||\,\mathrm{f}\,|||'\,|||\chi_1\mathrm{K}*(\chi_2\mathrm{u})||| \le \mathrm{C}\,|||\,\mathrm{f}\,|||'\,|||\mathrm{u}|||$，故 $|||\chi_2(1-\delta^2\Delta)^{-1}\chi_1 f|||' \le C\,|||\,f|||'$。

证明. 综上分析，只需证 $|||Pv_\delta|||' < \infty,\ as\ \delta\to 0$。在 $supp(v)$ 邻域 ω 中有 $(1-\delta^2\Delta)v_\delta = v$，考虑算子 P，把 $[X_j^2,\Delta]$ 写成 3 阶和 2 阶的组合，即

$$[X_j^2,\Delta] = X_j[X_j,\Delta]+[X_j,\Delta]X_j = 2X_j[X_j,\Delta]+[[X_j,\Delta],X_j]$$

在 ω 有 $(1-\delta^2\Delta)Pv_\delta = Pv+[(1-\delta^2\Delta),P]v_\delta = Pv+\delta^2[P,\Delta]v_\delta$，取有紧支集的二阶微分算子 B_0, B_j 如下有：

$$(1-\delta^2\Delta)Pv_\delta = Pv+\sum_1^r X_j\delta^2 B_j v_\delta+\delta^2 B_0 v_\delta,\ \begin{cases} B_0 = [X_0+c,\Delta]+\sum_1^r[[X_j,\Delta],X_j], \\ B_j = 2[X_j,\Delta],\ j=1,...,r \end{cases}$$

考虑更大区域，由注解3.2(1)，$(1-\delta^2\Delta)^{-1}v$ 任意阶导衰减迅速，处处有

$$(1-\delta^2\Delta)Pv_\delta = Pv+\sum_1^r X_j\delta^2 B_j v_\delta+\delta^2 B_0 v_\delta+h_\delta$$

其中 h_δ 在 ω 中为 0，且 $supp(h_\delta)\subset supp(\chi), \|h_\delta\|_{L^2}\to 0,\ as\ \delta\to 0$。故有

$$\begin{aligned} Pv_\delta =& \chi_1\{(1-\delta^2\Delta)^{-1}Pv+\sum_1^r(1-\delta^2\Delta)^{-1}X_j\delta^2 B_j v_\delta+(1-\delta^2\Delta)^{-1}\delta^2 B_0 v_\delta \\ &+(1-\delta^2\Delta)^{-1}h_\delta\} := A+B+D+E \end{aligned}$$

其中 $\chi_1\in C_0^\infty(\Omega)$ 在 $supp(\chi)$ 上取值 1。

将 $v=\chi v, Pv = P\chi v$ 看作注解3.2(4) 的 $\chi_1 f$，得 $A\mapsto |||\chi_1(1-\delta^2\Delta)^{-1}Pv|||' \le C\,|||\,Pv|||' < \infty$，这里用到命题3.1的假设。

注解3.2(2) 分别取 $j=2,0,Q=B_0,h_\delta$，用 h_δ 性质和 Fourier 变换得

$$D+E \mapsto |||D+E|||' \le C\|D+E\|_{L^2} \le C\|v_\delta\|_{L^2}+\|h_\delta\|_{L^2} \to \|v\|_{L^2}, as\ \delta \to 0$$

重写 B 知

$$(1-\delta^2\Delta)^{-1}X_j\delta^2B_jv_\delta = X_j(1-\delta^2\Delta)^{-1}\delta^2B_jv_\delta+[(1-\delta^2\Delta)^{-1},X_j]\delta^2B_jv_\delta$$

由注解3.2(3) 知

$$|||[(1-\delta^2\Delta)^{-1},X_j]\delta^2B_jv_\delta|||' \le \|[(1-\delta^2\Delta)^{-1},X_j]\delta^2B_jv_\delta\|_{L^2} \le C\|\delta^2B_jv_\delta\|_{L^2}$$

故用 $|||X_jf|||' \le C\|f\|_{L^2}$ 及 Fourier 变换和命题条件得

$$\begin{aligned} B \mapsto |||\sum_1^r \chi_1(1-\delta^2\Delta)^{-1}X_j\delta^2B_jv_\delta|||' &\le \sum_1^r(\|(1-\delta^2\Delta)^{-1}\delta^2B_jv_\delta\|_{L^2}+\|\delta^2B_jv_\delta\|_{L^2}) \\ &\le C\sum_1^r\|\delta^2B_jv_\delta\|_{L^2} \le C\|v\|_{L^2}<\infty \end{aligned}$$

综上 $|||Pv_\delta|||' \le C(|||Pv\ |||'+\|v\|_{L^2})<\infty$。 □

有了命题3.1，可得到核心结果：

命题 3.3. 假设对紧子集 $K\subset\Omega$ 成立(3.5)式 $\|v\|_{H^\epsilon} \le C(\|v\|_{L^2}+|||Pv|||')$，若 $u\in\mathcal{D}'(\Omega), Pu=f\in H^s_{loc}(\Omega)$，则 $u\in H^{s+\epsilon}_{loc}(\Omega)$，$K$ 换成 Ω 的开子集亦成立。特别地，P 是亚椭圆算子。

证明. 因问题是局部的，假设对某个 t 成立 $u\in H^t_{loc}(\Omega)$，只要证明 $t\le s$ 时能被 $t+\epsilon$ 替代即可。令 E 为 Ω 中有紧支集的拟微分算子，有象征 $e(\xi)=(1+|\xi|^2)^{t/2}$，令 $v=\chi Eu, \chi\in C_0^\infty(\Omega)$。若知对任意 χ 都有 $v\in H^\epsilon$ 则有 $Eu\in H^\epsilon_{loc}$，由 E 是椭圆算子知 $u\in H^{\epsilon+t}_{loc}$。

显然 $v\in L^2(\Omega)\cap\mathcal{E}'(\Omega)$，现只需如命题3.1往证 $|||Pv|||'<\infty$。注意到

$$s-t\ge 0 \Rightarrow \chi Ef\in L^2,\ and\ Pv-\chi Ef=(P\chi E-\chi EP)u=[P,\chi E]u$$

因 $[X_j^2,\chi E]=2X_j[X_j,\chi E]+[[X_j,\chi E],X_j]$，取阶 $\le t$ 有紧支拟微分算子得

$$[P,\chi E]=\sum_1^r X_jQ_j+Q_0, \begin{cases} Q_j=2[X_j,\chi E],\ j=1,...,r \\ Q_0=[X_0+c,\chi E]+\sum_1^r[[X_j,\chi E],X_j] \end{cases}$$

因 $Q_ju \in L^2, j=0,...,r$ 且有紧支，故由 $|||X_jf|||' \le C\|f\|_{L^2}$ 得

$$|||[P,\chi E]u|||' \le C\sum_0^r \|Q_ju\|_{L^2} < \infty$$

从而

$$|||Pv|||' = |||Pv - \chi Ef + \chi Ef|||' \le C\sum_0^r \|Q_ju\|_{L^2} + |||\chi Ef|||'$$

$$\le C\sum_0^r \|Q_ju\|_{L^2} + \|\chi Ef\|_{L^2} < \infty$$

$\square$

4 Step1：沿向量场的可微性

现在剩下(3.4)式 $\|v\|_{H^\delta} \le C(|||v\,||| + |||\,X_0v|||')$，$v \in C_0^\infty(K)$ 的证明。

第一步是沿向量场的可微性。不失一般性，假设 Ω 足够小，使 $Lie(\Xi)$ 可通过取至多 p 次 Lie 括号生成，Hörmander 的核心思想是：

- 研究 $Lie(\Xi)$ 所生成的局部微分同胚群作用在函数上引起的偏差，充分利用 $Lie(\Xi)$ 是分次 Lie 代数的事实，得到非常精确的估计 $\delta \sim 1/p$

值得一提的是这个定理有更加直接的证明，由 Kohn [4] 和 Radkevich [6](苏联数学家) 同时独立给出，要义是将向量场的 Lie 括号作为拟微分算子直接计算，得到 $\delta \sim 1/4^p$，这比原证明弱很多，但可以推广到一大类拟微分算子上，详见 Oleinik(奥尔加 · 奥列尼克) 和 Radkevich 的工作 [5]。

记 Ω 上光滑实向量场全体为 $T(\Omega)$，固定紧集 $K \subset \Omega$。对 $X \in T(\Omega)$，考虑 Ω 中由 X 定义的单参数变换群，令 f 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{df(x,t)}}{\mathrm{dt}} = X(f(x,t)), \\ f(x,0) = x. \end{cases}$$

的解（也可将 $f: \Omega \to \Omega$ 看作由 X 生成的局部微分同胚群），存在充分小 $t_0 > 0$ 使得对 $|t| < t_0$ 时 $f: K \times (-t_0, t_0) \to \Omega$ 是 C^∞ 函数。

对 $u \in C_0^\infty(K)$，令 $(e^{tX}u)(x) = u(f(x,t))$，这个式子定义了 $C_0^\infty(K), C_0^\infty(\Omega)$ 间的映射，取 $u(x) = x\chi_{\{x\in K\}} \Rightarrow f(x,t) = e^{tX}Id_K(x)$，故由 f 的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d(e^{tX}u)}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{du(f(x,t))}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{df(x,t)}}{\mathrm{dt}}(Xu) = X(e^{tX}Id_K(x))(Xu) = e^{tX}(Xu)$$

此外考虑微分定义：$\dfrac{\mathrm{de^{tX}u}}{\mathrm{dt}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{hX}e^{tX}u-e^{tX}u}{h}=Xe^{tX}u$，即 e^{tX} 是 Ω 上局部单参数变换群且 $\dfrac{\mathrm{d(e^{tX}u)}}{\mathrm{dt}}=e^{tX}Xu=Xe^{tX}u$，当 $u\in C^\infty$ 时在 $t=0$ 附近有 Taylor 展开 $e^{tX}u\sim\sum\limits_0^\infty\dfrac{t^kX^k}{k!}u$。

考虑在 L^2 范数意义下沿向量场具有 Hölder 连续的函数，对 $s\in(0,1],\epsilon\in(0,t_0)$ 定义

- 半范数 $[u]_{X,s}^\epsilon=\sup\limits_{0<|t|<\epsilon}\|e^{tX}u-u\|_{L^2}|t|^{-s}$，$u\in C_0^\infty(K)$

  事实上 ϵ 取不同 $\epsilon_1<\epsilon_2$ 时 $|[u]_{X,s}^{\epsilon_1}-[u]_{X,s}^{\epsilon_2}|\le\dfrac{1}{\epsilon_1}|\sup\limits_{t\in(\epsilon_1,\epsilon_2)}\|u(f(x,t))-u\|_{L^2}-\sup\limits_{t\in(0,\epsilon_1)}\|u(f(x,t))-u\|_{L^2}|\le C\|u\|_{L^2}$ 看出等价性，省略符号 ϵ。

- 再定义 $[u]_s=\sup\limits_{|h|<\epsilon}\|\tau_hu-u\|_{L^2}|h|^{-s},(\tau_hu)(x)=u(x+t)$

  令 e_j 为向量场沿第 j 坐标轴的单位向量，又向量场 ∂_j 生成的局部群是沿第 j 坐标轴的平移，即 $e^{t\partial_j}u\sim u(x+te_j)$，由三角不等式: $\|\tau_hu-u\|_{L^2}=\|u(x+t)-u(x+t-te_n)+u(x+t-te_n)-...-u(x+te_1)+u(x+te_1)-u(x)\|_{L^2}\le\sum\limits_1^n[u]_{\partial_j,s}$（这里要注意到平移量在取 L^2 范数后一致无差异），得 $[u]_s\le\sum\limits_1^n[u]_{\partial_j,s}$，此外显然 $[u]_{X,s}\le C\|Xu\|_{L^2}$。

给出以下性质:

引理 4.1. *(1) 若 $\varphi\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ 则 $[u]_{\varphi X,s}\le C[u]_{X,s}$，$u\in C_0^\infty(K)$。*
(2) 设 $g(x,t)$ 是关于 x 从 K 某邻域到 Ω 的光滑映射，光滑地依赖于参数 t，且 $g(x,t)-x=O(t^N),as\ t\to 0,\ N>0$，则对小的 t 成立

$$\|u(g(x,t))-u\|_{L^2}\le C|t|^{Ns}[u]_s,\ u\in C_0^\infty(K)$$

(注：取 $N=1$ 有 $[u]_{X,s}\le C[u]_s$，$\forall X\in T(\Omega)$，故 $[u]_s\sim\sum\limits_1^n[u]_{\partial_j,s}$。)
(3) 设 $0<\sigma<s<1$，则 $\|u\|_{H^\sigma}\le\|u\|_{L^2}+C[u]_s$。

证明. (1) 令 $\tau(x,t)$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dt}}=\varphi(f(x,\tau)),\\ \tau|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解，得

$$\frac{\mathrm{df(x,\tau)}}{\mathrm{dt}}=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{df(x,\tau)}}{\mathrm{d}\tau}=\varphi(f(x,\tau))\cdot X(f(x,\tau))=(\varphi X)(f(x,\tau))$$

从而 $e^{t\varphi X}u(x)=u(f(x,\tau))$，于是

$$\|e^{t\varphi X}u-u\|_{L^2}=\int|u(f(x,\tau(x,t)))-u(x)|^2\mathrm{dx}$$

由于 τ 还依赖 x，暂时不能和 $[u]_{X,s}$ 比较，注意到对任意 σ 有

$$|u(f(x,\tau))-u(x)|^2\le 2|u(f(x,\tau))-u(f(x,\sigma))|^2+2|u(f(x,\sigma))-u(x)|^2$$

关于 x 积分并在 $|\sigma|<|t|$ 内取积分平均得

$$\begin{aligned}&\|e^{t\varphi X}u-u\|_{L^2}^2\\ \le&|t|^{-1}\iint_{|\sigma|<|t|}|u(f(x,\tau))-u(f(x,\sigma))|^2\mathrm{dxd}\sigma+|\mathrm{t}|^{-1}\int_{|\sigma|<|\mathrm{t}|}\frac{\|\mathrm{e}^{\sigma\mathrm{X}}\mathrm{u}-\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2}^2}{|\sigma|^{2\mathrm{s}}}|\sigma|^{2\mathrm{s}}\mathrm{d}\sigma\\ \le&|t|^{-1}\iint_{|\sigma|<|t|}|u(f(x,\tau))-u(f(x,\sigma))|^2\mathrm{dxd}\sigma+|\mathrm{t}|^{-1}\int_{|\sigma|<|\mathrm{t}|}[\mathrm{u}]_{\mathrm{X,s}}^2\cdot|\sigma|^{2\mathrm{s}}\mathrm{d}\sigma\\ \le&|t|^{-1}\iint_{|\sigma|<|t|}|u(f(x,\tau))-u(f(x,\sigma))|^2\mathrm{dxd}\sigma+2[\mathrm{u}]_{\mathrm{X,s}}^2|\mathrm{t}|^{2\mathrm{s}}\end{aligned}$$

为处理积分项，引入新变量：$y=f(x,\sigma),f(y,w)=f(x,\tau),i.e.\ w+\sigma=\tau$。固定 t，对 $\sigma=0$，对变量关系式微分得 $\mathrm{dy}=\mathrm{dx}+\mathrm{Xd}\sigma,\mathrm{dw}=\mathrm{d}\tau-\mathrm{d}\sigma$，因 $t=0\Rightarrow\tau=0\Rightarrow\mathrm{d}\tau=0$，故对 $t=\sigma=0$，Jacobian$\frac{\partial(y,w)}{\partial(x,\sigma)}=\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=-1$，从而对充分小 σ,t 的 Jacobian 任意接近 -1。因

$$\tau=O(t),|\sigma|<|t|\Rightarrow|w|=|\tau-\sigma|\le O(t)+|t|\le A|t|$$

故对充分小 t，积分项有

$$\begin{aligned}&|t|^{-1}\iint_{|\sigma|<|t|}|u(f(x,\tau))-u(f(x,\sigma))|^2\mathrm{dxd}\sigma\\ &\le 2|t|^{-1}\iint_{|w|<A|t|}|u(f(y,w))-u(y)|^2\mathrm{dyd}\sigma\le 4\mathrm{A}(\mathrm{A}|\mathrm{t}|)^{2\mathrm{s}}[\mathrm{u}]_{\mathrm{X,s}}^2.\end{aligned}$$

(2) 此处证明与 (1) 平行，令 $y=x+h,y+w=g(x,t)$，当 $t=0\Rightarrow g(x,t)=x$ 则 $y=x+h,w=-h\Rightarrow\dfrac{\partial(y,w)}{\partial(x,h)}=\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}=-1$，同样对充分小 t，Jacobian 绝对值趋于 1 且 $|w|<A|t|^N$，于是

$$\begin{aligned}\|u(g(x,t))-u\|_{L^2}^2\le&2C|t|^{-N}\int_{|w|<A|t|^N}\frac{\|u(y+w)-u(y)\|_{L^2}^2}{|w|^{2s}}|w|^{2s}\mathrm{dxdh}\\ &+|t|^{-N}\int_{|h|<|t|^N}\frac{\|\tau_hu-u\|_{L^2}^2}{|h|^{2s}}|h|^{2s}\mathrm{dh}\le 4\mathrm{A}(\mathrm{A}|\mathrm{t}|^{\mathrm{N}})^{2\mathrm{s}}[\mathrm{u}]_{\mathrm{s}}^2+2[\mathrm{u}]_{\mathrm{s}}^2|\mathrm{t}|^{2\mathrm{Ns}}\end{aligned}$$

(3) 由待证结论易知 $\|\cdot\|_{L^2}+[\cdot]_s$ 范数弱于 $\|\cdot\|_{H^s}$，但 $\sigma<s$ 时强于 $\|\cdot\|_{H^\sigma}$，事实上用到一个势论等式：

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{dxdy}\overset{\mathrm{x}\mapsto\mathrm{x-y}}{=}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|\mathrm{u(x+y)-u(y)}|^2}{|\mathrm{x}|^{\mathrm{n+2s}}}\mathrm{dxdy}\\&\overset{\text{Parseval of y}}{=}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|e^{ix\cdot\xi}-1|^2|\hat{u}(\xi)|^2|x|^{-n-2s}\mathrm{dxd}\xi:=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{C_s^{-1}}|\xi|^{2s}|\hat{\mathrm{u}}|^2\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

其中 $C_s^{-1}=|\xi|^{-2s}\int_{\mathbb{R}^n}|e^{ix\cdot\xi}-1|^2|x|^{-n-2s}\mathrm{dx}$，注意到 C_s^{-1} 中用 tx 代替 x 所得和 $t\xi$ 代替 t 一致，是某种齐次性。易知 $s\to 0$ 时 (丢给 mma 计算或查 Table of Integrals,series etc,P440,7) 知 $n=1$ 时

$$4\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(\frac{x}{2})^2}{|x|^{1+2s}}\mathrm{dx}=-2\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|^{1+2s}}\mathrm{dx}=-2\cos\pi\mathrm{s}\,(-2\mathrm{s})=\frac{1}{\mathrm{s}}+\mathrm{O}(1)$$

其他维数情况类似，从而 $\lim_{s\to 0}\frac{C_s}{s}=const$；$s\to 1$ 时，$\cos\pi s\Gamma(-2s)=\frac{1}{s-1}+O(1)$ 从而 $\lim_{s\to 0}\frac{C_s}{1-s}=const$，综上即知 $\lim_{s\to 0\ or\ 1}\frac{C_s}{s(1-s)}=const$；另一方面，显然对给定的 $s\in(0,1)$，C_s 总是有界的，命 C_s 为其上界，故该势论等式有意义。于是我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^\sigma\mathrm{d}\xi\le\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\mathrm{d}\xi\\&\qquad=\|u\|_{L^2}^2+C_s\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{dxdy}\le\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L^2}}^2+\mathrm{C_s}[\mathrm{u}]_{\mathrm{s}}^2.\end{aligned}$$

□

5 Step2: 分次李代数特性的应用

定义 5.1. 若 $X\in T(\Omega)$，定义 $T(\Omega)$ 到 $T(\Omega)$ 的微分算子 $ad_XY:=[X,Y]$，$Y\in T(\Omega)$。可看作李代数的线性变换、李代数对自身的伴随作用。

给定一组光滑实向量场 $\Xi=(X_0,...,X_r)$，令多重指标 $I=(i_1,...,i_k)$ 满足 $0\le i_1,...,i_k\le r$，命 $|I|=\sum_{j=1}^k i_j=k\neq 0$，记 $X_I=ad_{X_{i_1}}...ad_{X_{i_{k-1}}}X_k$，Hörmander 证明了：

定理 5.2. 给定 $X_j\in T(\Omega),j=0,...,r$ 和一组数 $\{s_i\}_{i=0}^r\subset(0,1]$，定义多重指标 $I=(i_1,...,i_k)$ 的函数 $s(I)$ 为 $\frac{1}{s(I)}:=\sum_{j=1}^k\frac{1}{s_{i_j}}$。命 $T_\Xi^s(\Omega)$ 是满足

$s(I)\geq s$ 的 X_I 所生成的 $C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ 子模，则对 $X\in T_\Xi^s(\Omega), u\in C_0^\infty(K)$ 有

$$[u]_{X,s}\leq C(\sum_{i=0}^{r}[u]_{X_i,s_i}+\|u\|_{L^2}) \tag{5.1}$$

其中 $K\subset\Omega$ 是紧集，常数 $C=C(X,K)$。特别地，在 *Hörmander* 条件 $rank\ Lie(\Xi)(x)=n,\ \forall x\in\Omega$ 下，若取 $s_0=...=s_r=1$，则有 $T_\Xi^{1/p}(\Omega)=T(\Omega)$。再由引理*4.1*中半范数的性质得

$$[u]_{1/p}\leq C(\sum_{i=0}^{r}[u]_{X_i,1}+\|u\|_{L^2}) \tag{5.2}$$

为证(5.1)式，要从满足(5.2)式的点开始对 s 进行归纳，在考虑复杂的交换子之前，给出一个简单的纯代数引理：

引理 5.3. 若 $\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\leq\dfrac{1}{t_3}$，则有 $[T_\Xi^{t_1},T_\Xi^{t_2}]\subset T_\Xi^{t_3}$。

证明. 令多重指标 I_1,I_2 满足 $s(I_j)\geq t_j,\varphi_j\in C^\infty(\Omega), j=1,2$，我们有

$$[\varphi_1X_{I_1},\varphi_2X_{I_2}]=\varphi_1(X_{I_1}\varphi_2)X_{I_2}-\varphi_2(X_{I_2}\varphi_1)X_{I_1}+\varphi_1\varphi_2[X_{I_1},X_{I_2}]$$

因 $t_3\leq t_j\Rightarrow s(I_j)\geq t_3, j=1,2$，上式右端前两项都属于 $T_\Xi^{t_3}$。对第三项，由 Jacobi 恒等式有

$$ad_{[X,Y]}\cdot=[[X,Y],\cdot]=-[[\cdot,X],Y]-[[Y,\cdot],X]=[X,[Y,\cdot]]-[Y,[X,\cdot]]=[ad_X,ad_Y]\cdot$$

于是把 $[X_{I_1},X_{I_2}]=ad_{[X_{I_1}]}X_{I_2}$ 精确写开就是 X_J 的线性组合，其中 $\frac{1}{s(J)}=\frac{1}{s(I_1)}+\frac{1}{s(I_2)}$。 □

有了引理，再注意到 $T_\Xi^t(\Omega)\subset T_\Xi^s(\Omega), as\ s<t$ 及 $\langle Lie(\Xi)\rangle_{C^\infty(\Omega)}=\oplus_{0<s\leq 1}T_\Xi^s(\Omega)$，可看出该定理相当精细地揭示了 $Lie(\Xi)$ 的分次李代数结构和其解析特性之间的关系。再由 Step1 中半范数的性质4.1，得：对 $u\in C_0^\infty(K),\ \forall\epsilon>0$ 有 $\|u\|_{H^{\frac{1}{p}-\epsilon}}\leq C(\sum_{i=0}^{r}\|X_iu\|_{L^2}+\|u\|_{L^2})$。

证明前先给出 Campbell-Hausdorff 公式阐述：

引理 5.4. x,y 是俩非交换变量，x,y 形式幂级数意义下 $e^xe^y=e^z$，其中

$$\begin{aligned}z&=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-1}\sum_{\alpha_i+\beta_i\neq 0}(ad_x)^{\alpha_1}(ad_y)^{\beta_1}...(ad_x)^{\alpha_n}(ad_y)^{\beta_{n-1}}y/c_{\alpha,\beta}\\&=x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\frac{1}{12}([x,[x,y]]-[y,[x,y]])+...,\ c_{\alpha,\beta}=\alpha!\beta!|\alpha+\beta|.\end{aligned}$$

该公式的证明见附录，应用该公式能完成定理5.2的证明：

证明. 核心用是 Lie 代数的 Campbell-Hausdorff 公式进行细致计算。首先对 $X, Y \in T(\Omega)$，给定正整数 N 和 $\sigma \in (0,1)$ 及小的 t，有引理**??**的(**??**)式：

$$\|e^{t(X+Y)}u-u\|_{L^2} \le C(\|e^{tX}u-u\|_{L^2}+\|e^{tY}u-u\|_{L^2}+\sum_{2}^{N-1}\|e^{t^j Z_j}u-u\|_{L^2}+t^{\sigma N}[u]_\sigma)$$

其中向量场 Z_j 由 X, Y 的交换子生成，使得对任意 $u \in C_0^\infty(K)$ 都有

$$e^{t(X+Y)}u = e^{tX}e^{tY}e^{t^2 Z_2}...e^{t^{N-1}Z_{N-1}}u + O(t^N),\ t \to 0$$

由 Campbell-Hausdorff 公式易知向量场 Z_j 被唯一确定。因此对 $T(\Omega)$ 的子模，只要知道生成元对函数的作用，借助 Step1 中半范数性质引理4.1，就可知子模中任何向量场对函数的作用。由于 $T_\Xi^s(\Omega)$ 的生成元是 $X_I, s(I) \ge s$，故现在关键是用 Ξ 表示 X_I 所引起的变化，即控制给定算子 X_j 的交换子。

固定 $\sigma \in (0,1)$，再用 Campbell-Hausdorff 公式唯一确定一组 $\nu = \nu(I)$ 个长度 $> |I|$ 的指标集 $\{I_j\}_{j=1}^\nu$，且对 $\forall u \in C_0^\infty(K)$(见附录引理**??**) 有

$$e^{t^{\frac{1}{s(I)}}X_I}u = \left(\prod_{i=0}^r e^{\pm t^{\frac{1}{s_i}}X_i}\right)\prod_{j=1}^\nu e^{t^{\frac{1}{s(I_j)}}X_{I_j}}u + O(t^{|I|}),\ t \to 0.$$

根据半范数性质的引理4.1(2)：

$$\|e^{t^{\frac{1}{s(I)}}X_I}u-u\|_{L^2} \le C\sum_{i=0}^r\|e^{t^{\frac{1}{s_i}}X_i}u-u\|_{L^2}+C\sum_{j=0}^\nu\|e^{t^{\frac{1}{s(I_j)}}X_{I_j}}u-u\|_{L^2}+Ct^{\sigma|I|}[u]_\sigma.$$

因上式右端第二项和式每项同左端有相同形式，若 $|I_j|\sigma < 1$ 则重复操作，直到所有 $|I_j|\sigma \ge 1$，由 $[\cdot]_\sigma$ 性质及 $\frac{1}{s(I_j)} \ge |I_j|$ 则有 $\|e^{t^{\frac{1}{s(I_j)}}X_{I_j}}u - u\|_{L^2} \le Ct[u]_\sigma$，于是得到对生成元 X_I 的估计

$$\|e^{t^{\frac{1}{s(I)}}X_I}u - u\|_{L^2} \le C_1 t\sum_{i=0}^r [u]_{X_i, s_i} + C_2 t[u]_\sigma.$$

现在当 $s \le \sigma$ 且 X 是生成 $T_\Xi^s(\Omega)$ 的交换子 X_I，从上式左端平凡可得

$$[u]_{X,s} \le C_X(\sum_0^r [u]_{X_j, s_j} + [u]_\sigma),\ u \in C_0^\infty(K), X \in T_\Xi^s(\Omega). \tag{5.3}$$

由 Step1 半范数性质的引理4.1(1)，(5.3)式对 $X = \varphi X_I, \varphi \in C^\infty(\Omega)$ 也成立。由定义，任何 $X \in T_\Xi^s(\Omega)$ 都是使(5.3)式成立的向量场有限和。

若 $X, Y \in T_\Xi^s(\Omega)$ 是使(5.3)式成立的向量场，令 $\sigma N \geq s$，由引理5.3，因 $j \cdot \frac{1}{s} \leq \frac{1}{s/j}$，故 X, Y 交换子的 j 次因子 $Z_j \in T_\Xi^{s/j}$，对(**??**)式两端同除 $|t|^s$ 后关于 t 取上确界得 $[u]_{X+Y,s} \leq C([u]_{X,s} + [u]_{Y,s} + \sum_{j=2}^{N-1}[u]_{Z_j,\frac{s}{j}} + [u]_\sigma)$。因为 s 很小时，(5.3)是平凡的，故可假设 s 用 $\leq \frac{s}{2}$ 的数替换时(5.3)式已证，进而 $[u]_{Z_j,\frac{s}{j}} \leq C_{Z_j}(\sum_0^r [u]_{X_j,s_j} + [u]_\sigma)$，可见再将(5.3)式中 X 用 $X+Y$ 替换仍然成立，由 $X, X+Y$ 共有的选取任意性知(5.3)式得证。

回顾对某个 $\tau > \sigma, T_\Xi^\tau(\Omega) = T((\Omega))$，由 $[u]_\tau \leq \sum_1^n [u]_{\partial_j,s}$ 得

$$[u]_\tau \leq \sum_1^n [u]_{\partial_j,s} \leq \sum_{i=1}^n C_{\partial_i}(\sum_0^r [u]_{X_j,s_j} + [u]_\sigma),\ u \in C_0^\infty(K)$$

因 $[u]_\sigma \leq \|u\|_{H^\sigma} \leq \delta[u]_\tau + C_\delta\|u\|_{L^2}$。取 $\delta C < \frac{1}{2}$，可断言 $[u]_\sigma \leq [u]_\tau \leq C'(\sum_0^r [u]_{X_j,s_j} + \|u\|_{L^2})$，$u \in C_0^\infty(K)$，将此式代入(5.3)右端即证。 $\square$

6 Step4：收尾工作

Step2 中我们用 Ξ 对 u 的作用结果控制了 u 的 Sobolev 范数，而一开始的 Step3 其实是在用 Pu 控制 Ξ 对 u 的作用，进而证明定理1.2由先验估计(3.4)导出。回顾(3.1)式的能量估计

$$\sum_1^r \|X_j v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \leq C\|v\|_{L^2}^2 - \Re\int v\overline{Pv}\mathrm{dx},\ \forall \mathrm{v} \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{K})$$

由于 X_0 是一阶的，故 X_0 的信息在能量估计中丢失了，按 Hörmander 的说法则是 $X_0 u$ 所给信息在更弱的半范数中，这阻碍了定理5.2的应用，(当然若不存在 X_0 项，根据 Step2 中的定理5.2的特殊情形及半范数性质引理4.1的(3) 知 Pu 的 L^2 范数可以控制 $\|u\|_{H^{\frac{1}{p}-\epsilon}}$，即 $\|u\|_{H^{\frac{1}{p}-\epsilon}} \leq C(\sum_{i=0}^r \|X_i u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})$。)

为此，Hörmander 作出一些退让，考虑 $f(t) = \|e^{tX_0}u - u\|_{L^2}$ 并关于 t 求导得 $\frac{\mathrm{df(t)}^2}{\mathrm{dt}} = 2\langle e^{tX_0}X_0 u, e^{tX_0}u - u\rangle$。暂时假设 e^{tX_0} 保范数 $|||\cdot|||, |||\cdot|||'$，接下来将引起矛盾，事实上沿着假设有

$$\frac{\mathrm{df(t)}^2}{\mathrm{dt}} \leq 4\,|||\,X_0 u\,|||'\,|||u||| \Rightarrow \frac{\|e^{tX_0}u - u\|_{L^2}}{|t|^{\frac{1}{2}}} \leq (|||u\,||| + |||\,X_0 u|||')$$

即不得不去控制 $[u]_{X_0,\frac{1}{2}}$，故在 Step2 的定理5.2中取 $s_0=\frac{1}{2}, s_1=\ldots=s_r=1$，期望证明：

定理 6.1. 对 $X\in T_{\Xi}^{s}(\Omega), u\in C_0^\infty(K)$ 有 $[u]_{X,s}\le C(|||u\,|||+|||\,X_0u|||')$。

证明该定理的想法与 Step2 中定理5.2类似，通过研究 $\|e^{tX_0}u-u\|_{L^2}$ 的变化来估计 $[u]_{X_0,1/2}$，叙述比较繁琐，这里简述：

证明. 令 $\mathcal{J}:=\{I:\sigma m(I)\le 1, |I|<m(I)<2|I|\}$，第二个条件意味着 I 同时包含 $=0,\neq 0$ 的下标。通过原文 P21 及以后的工作，知成立

$$[u]_{X_0,\frac{1}{2}}\le C(|||u\,|||+|||\,X_0u\,|||'+\sum_{I\in\mathcal{J}}[u]_{X_I,s(I)}+[u]_\sigma),\ u\in C_0^\infty(K).\tag{6.1}$$

由注记A.3思想，对充分小 η，根据半范数性质引理4.1的 (1) 知

$$[u]_{X_I,s(I)}\le\eta[u]_{X_0,\frac{1}{2}}+C_\eta(\sum_1^r[u]_{X_j,s_j}+[u]_\sigma)\le\eta[u]_{X_0,\frac{1}{2}}+C_\eta(\sum_1^r\|X_ju\|_{L^2}+[u]_\sigma)$$

其中 $I\in\mathcal{J}$，从而(6.1)推出

$$[u]_{X_0,\frac{1}{2}}+\sum_1^r[u]_{X_j,s_j}+\|u\|_{L^2}\le C'(|||u\,|||+|||\,X_0u\,|||'+[u]_\sigma)$$

令 $s>\sigma$ 但 $T_{\Xi}^{s}(\Omega)=T(\Omega)$，则上式左端应用定理5.2得

$$[u]_s\le C(|||u\,|||+|||\,X_0u\,|||'+[u]_\sigma),\ u\in C_0^\infty(K)$$

由 $[u]_\sigma\le\delta[u]_s+C_\delta\|u\|_{L^2}$，$\forall\delta>0\Rightarrow[u]_s\le C(|||u\,|||+|||\,X_0u|||')$，$u\in C_0^\infty$，从而 $\sum_0^r[u]_{X_j,s_j}\le C(|||u\,|||+|||\,X_0u|||')$，$u\in C_0^\infty(K)$，至此证毕。 □

注意到 $|||u|||'\le\|u\|_{L^2}, |||u\,|||^2+|||\,X_0u|||'^2\le C(|||Pu\,|||'^2+\|u\|_{L^2}^2)$，上述定理可得较 Step2 次一级的估计：

- $\|u\|_{H^{\frac{1}{p+1}-\epsilon}}\le C(|||Pu\,|||'+\|u\|_{L^2})\le C(\|Pu\|_{L^2}+\|u\|_{L^2})$，$u\in C_0^\infty(K)$

这里令 $\delta=\frac{1}{p+1}-\epsilon$，即证得(3.5)式 $\|u\|_{H^\delta}\le C(|||Pu\,|||'+\|u\|_{L^2})$。

参考文献

[1] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Mathematica, 119 (1967), pp. 147 – 171.

[2] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*, Singular integrals, (1967), pp. 138–183.

[3] ——, *The analysis of linear partial differential operators*, Springer, 2005.

[4] J. Kohn, *Pseudo-differential operators and hypoellipticity*, Spencer D. C. (ed), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 23 (1973), p. 61.

[5] R. E. Oleinik O., *Second-order equations with nonnegative characteristic form*, American Mathematical Society, 1973.

[6] E. V. Radkevich, *On a theorem of l. hörmander*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 24 (1969), pp. 233–234.

[7] Z. Yang, *What is Hypoellipticity?*, https://www.yzpmath.com/post/2020-2/2020-2.pdf, (2020).

A 附录

关于 Campbell-Hausdorff 公式的引理5.4:

引理 A.1. x, y 是俩非交换变量，x, y 形式幂级数意义下 $e^x e^y = e^z$，其中

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-1}\sum_{\alpha_i+\beta_i\neq 0}(ad_x)^{\alpha_1}(ad_y)^{\beta_1}...(ad_x)^{\alpha_n}(ad_y)^{\beta_{n-1}}y/c_{\alpha,\beta}\\
&= x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\frac{1}{12}([x,[x,y]]-[y,[x,y]])+...,\ c_{\alpha,\beta}=\alpha!\beta!|\alpha+\beta|.
\end{aligned}
$$

证明.

- 断言 G 为 Lie 群, A, B 为 G 的 Lie 代数 g, 则 $e^A B e^{-A} = e^{ad_A} B$

  令 $End(g) := \{a, b \in g : \exists \phi : g \mapsto g\ s.t.\ \phi(a)\phi(b) = \phi(ab)\}$，$f_A(s)B = e^{sA}Be^{-sA}$，关于 s 求导得

  $$
  \begin{aligned}
  \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f_A(s)B &= Ae^{sA}Be^{-sA} - e^{sA}BAe^{-sA} = [A, e^{sA}Be^{-sA}] = ad_A f_A(s)B\\
  &= e^{sA}ABe^{-sA} - e^{sA}BAe^{-sA} = f_A(s)[A,B] = f_A(s)ad_A B
  \end{aligned}
  $$

  故得 $f_A'(s) = ad_A f_A(s)$，同时 $f_A'(s) = f_A(s)ad_A$，即可交换

- 直觉上有 $f_A(s)=e^{s\cdot ad_A}$

  事实上 $f_A(s)=\sum_0^\infty \frac{A_n}{n!}s^n$，$\forall A_n\in End(g), f_A'(s)=\sum_0^\infty \frac{A_{n+1}}{n1}s^n = ad_A\sum_0^\infty \frac{A_n}{n!}s^n$，则 $A_{n+1}=ad_A A_n, A_0=f_A(0)I=I\Rightarrow A_n=(ad_A)^n$，故 $f_A(s)=\sum_0^\infty \frac{(s\cdot ad_A)^n}{n!}=e^{s\cdot ad_A}$。取 $s=1$，即有 $e^{ad_A}B=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+...$

  定义 $g(s):=e^{sX}e^{sY}$，则

$$
\begin{aligned}
g'(s)e^{sX}Xe^{sY}+e^{sX}e^{sY}Y&=e^{sX}e^{sY}(e^{-sY}Xe^{sY}+Y)\\
&=g(s)(X+Y-s[Y,X]+\frac{s^2}{2!}[Y,[Y,X])-...)
\end{aligned}
$$

设 $g(s)=e^{h(s)}$，关于 s 求导得

$$
\begin{aligned}
e^{-h(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}e^{h(s)}=e^{-h(s)}h'(s)e^{h(s)}&=e^{-ad_{h(s)}}h'(s)=h'(s)-[h,h']+\frac{1}{2!}[h,[h,h']]-...\\
&=g(s)^{-1}g'(s)=X+Y-s[Y,X]+\frac{s^2}{2!}[Y,[Y,X]]-...
\end{aligned}
$$

将 $h(s),h(0)=0$ 在 $s=0$ 处 Taylor 展开得 $h(s)=\sum_1^\infty h_n s^n, h'(s)=\sum_1^\infty nh_n s^{n-1}$，于是

$$
[h,h']=[h_1s+h_2s^2+...,h_1+2h_2s+3h_3s^2+...]=[h_1,h_2]s^2+...
$$

从而 $e^{-h(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}e^{h(s)}=h_1+2h_2s+3h_3s^2-[h_1,h_2]s^2+...$，比较得 $h_1=X+Y, h_2=[X,Y]/2,...$。 □

引理 A.2. *(1)* 令 $X,Y\in T(\Omega)$，Z_j 为 j 次 X,Y 交换子的线性组合。当 $\sigma\in(0,1], 2\geq N\in\mathbb{N}$，则对小的 t 和 $u\in C_0^\infty(K)$ 成立

$$
\begin{aligned}
&\|e^{t(X+Y)}u-u\|_{L^2}\\
\leq& C(\|e^{tX}u-u\|_{L^2}+\|e^{tY}u-u\|_{L^2}+\sum_2^{N-1}\|e^{t^jZ_j}u-u\|_{L^2}+t^{\sigma N}[u]_\sigma). \quad (A.1)
\end{aligned}
$$

(2) 给定 $X_j, s_j, j = 0, ..., r$ 如定理5.2，令 $m_j = \frac{1}{s_j}, m(I) = \frac{1}{s(I)}$。设 $\sigma > 0$，则对小的 t，$u \in C_0^\infty(K)$ 和任意多重指标 I 成立

$$\|e^{t^{m(I)}X_I}u - u\|_{L^2} \le C_1(r,\sigma)t\sum_0^r [u]_{X_j,s_j} + C_2(r,\sigma)t[u]_\sigma. \tag{A.2}$$

证明. 对 (1)，令

$$H_N^t = e^{-t^{N-1}Z_{N-1}}...e^{-t^2Z_2}e^{-tY}e^{-tX}e^{t(X+Y)},\ H_N^t v(x) := v(h_N(x,t))$$

后者定义了 $K \times 0$ 邻域到 Ω 的 C^∞ 函数 v，借助展开式 $e^{tX}u \sim \sum_0^\infty \frac{t^kX^k}{k!}u$，由余项的产生方式知进行到了 N 阶，即 $H_N^t v - v = O(t^N)$。取 v 是坐标投影，得 $h_N(x,t) - x = O(t^N)$，由半范数性质的引理4.1(2) 有

$$\|H_N^t v - v\|_{L^2} \le C|t|^{\sigma N}[v]_\sigma$$

注意对任意有界算子 $S_1, ..., S_k \in L^2$，三角不等式得 $\|S_1...S_k u - u\|_{L^2} = \|\sum_{j=1}^k S_1...S_{j-1}(S_j u - u)|_{L^2} \le \sum_{j=1}^k\prod_{i=1}^{j-1}\|S_i\|_{L^2}\|S_j u - u\|_{L^2}$，由于 $e^{t(X+Y)} = e^{tX}e^{tY}e^{t^2Z_2}...e^{t^{N-1}Z_{N-1}}H_N^t$ 且每一项的 L^2 范数关于 t 一致有界，(1) 证毕。

对 (2)，因 $m_j \ge 1 \Rightarrow m(I) \ge |I|$，故当 $\sigma|I| \ge 1$ 时，Step1 半范数性质的引理4.1(2)——即(A.2)式取 $C_1 = 0$，故(A.2)直接成立。

设 $N \in \mathbb{N}$，$N\sigma \ge 1$，$|I| = N$ 向下归纳。Campbell-Hausdorff 得

$$e^{x_{k-1}}e^{x_k}e^{-x_{k-1}}e^{-x_k} = e^{x_{k-1}+x_k+\frac{1}{2}[x_{k-1},x_k]+O_3}e^{-x_{k-1}-x_k+\frac{1}{2}[x_{k-1},x_k]+O_3} = e^{[x_{k-1},x_k]+O_3} = e^{z_{k-1}}$$

再令 $e^{x_j}e^{z_{j+1}}e^{-x_j}e^{-z_{j+1}} = e^{z_j}, j = 1, ..., k-2$，由此得一系列形式幂级数 $z_{k-1}, z_{k-2}, ..., z_1$，如 $k = 3$ 则有

$$\begin{cases} e^{x_2}e^{x_3}e^{-x_2}e^{-x_3} = e^{z_2}, \\ e^{x_1}e^{z_2}e^{-x_1}e^{-z_2} = e^{z_1} \end{cases} \Rightarrow e^{x_1}e^{x_2}e^{x_3}e^{-x_2}e^{-x_3}e^{-x_1}e^{x_3}e^{x_2}e^{-x_3}e^{-x_2} = e^{z_1}$$

$n_3 = 2n_2 + 2 = 10$ 表示算子 $e^{\pm x_j}$ 的项数，即 e^{z_1} 是 n_k 个因子 $e^{\pm x_j}$ 乘积，其中 $n_2 = 4, n_{k+1} = 2n_k + 2 \Rightarrow n_k = 3 \cdot 2^{k-1} - 2$，且 $z_1 = \underbrace{\prod_{j=1}^{k-1}(ad_{x_j})}_{c}x_k + ...$。

再次使用 Campbell-Haudorff 公式，有余项表达 $e^c = e^{z_1}e^{c_1}e^{c_2}...e^{c_v}e^r$。用 $t^{m_j}X_{i_j}$ 替换变量 x_j 得 $3 \cdot 2^{|I|-1} - 2$ 项因子

$$e^{t^{m(I)}X_I} = \prod_0^r e^{\pm t^{m_j}X_j}\prod_{i=1}^{\nu}e^{t^{m(I_1)}X_{I_{autocitehormanderHypoellipticSecondOrder1967nu}}}H_N^t$$

式中指标集长度都 $>|I|$。$H_N^t v(x)=v(h_N(x,t))$ 定义了关于 x 光滑并连续依赖 t 的函数 $h_N(x,t)$，使 $h_N(x,t)-x=O(t^N)$，$t\to 0$，由 Step1 半范数性质的引理4.1(2) 得 $\|H_N^t u-u\|_{L^2}\le CT^{N\sigma}[u]_\sigma$，$u\in C_0^\infty(K)$，同理由三角不等式得

$$\|e^{t^{m(I)}X_I}u-u\|_{L^2}\le 2^{|I|+1}\sum_0^r\|e^{t^{m_j}X_j}u-u\|_{L^2}+2\sum_1^\nu\|e^{t^{m(I_j)}X_{I_j}u-u}\|_{L^2}+Ct^{\sigma N}[u]_\sigma$$

因对充分小 t，e 指数算子的算子范数趋于 1，对上式右端第二项和式进行归纳，一旦 $|I_j|\sigma<1$ 则将 I_j 当做 I 再来一遍，直到找到若干 $|I_j|\sigma\ge 1$，故 $\sigma N\ge 1$，(A.2)证毕。 □

注解 A.3. 因 C_1 不依赖 $X_0,...,X_r$ 的选取，则 I 包含 ≥ 1 的指标，$\forall\epsilon>0$，用 ϵX_0 替换 X_0，对合适的 $\gamma>0,j\ge 1$，用 $e^{-\gamma}X_j$ 替换 X_j，X_I 并不会发生变化，从而

$$\|e^{t^{m(I)}X_I}u-u\|_{L^2}\le\epsilon t[u]_{X_0,s_0}+C_\epsilon t(\sum_1^r[u]_{X_j,s_j}+[u]_\sigma),\ u\in C_0^\infty(K).$$