Note of Wu(et al.)'s Stability;Couette flow;2D-Boussinesq;vertical dissipation

2023 年 9 月 7 日

1 Introduction

近来 2 维 Boussinesq 方程在两种物理的重要稳态下的稳定性研究势头强劲，一是流体静力平衡，另外则是今天介绍的剪切流。主要考虑只有垂直耗散 2 维 Boussinesq 方程在 Couette 流附近的非线性稳定性。因浮力存在，标准的 Boussinesq 方程的能量可随时间增长。文章 [4] 指出正是摄动方程中线性非自伴算子 $y\partial_x - \nu\partial_{yy}$ 产生的增强耗散效应使非线性稳定性成为可能，事实上它是一种亚椭圆算子。文章证明当来自 Couette 流 $(y, 0)$ 的初值扰动不超过粘性的适当幂次 (在 $H^b, b > \frac{4}{3}$) 时，$\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上只有垂直耗散的二维 Boussinesq 系统的解在相同阶下依然靠近 Couette 流。显然该结果可退化到 2 维 NS 方程情形。

用 $\sigma = 1, 0$ 分别全耗散和仅有垂直耗散，则二维 Boussinesq 系统如下：

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\partial_x + v\partial_y)u = -\partial_x p + \nu(\sigma\partial_{xx} + \partial_{yy})u, \\ \partial_t v + (u\partial_x + v\partial_y)v = -\partial_y p + \nu(\sigma\partial_{xx} + \partial_{yy})v + \theta, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \\ \partial_t \theta + (u\partial_x + v\partial_y)\theta = \mu(\sigma\partial_{xx} + \partial_{yy})\theta, \end{cases} \tag{1.1}$$

式中 $\overrightarrow{u} = (u, v)$ 是二维速度场，p 是压力，θ 是温度，ν 为粘度 (通篇都认为较小)，μ 是热扩散率。空间区域 $\Omega := \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \mathbb{T} = [0, 2\pi]$。在合适的物理条件或标度下 Boussinesq 系统可退化为仅有垂直耗散。

Couette 流 $u_{sh}=(y,0)$，$p_{sh}=0$，$\theta_{sh}=0$ 显然是两种 σ 下(1.1)系统的稳定解，目标是了解 Couette 流附近扰动的稳定性和大时间行为。作扰动 $\tilde{u}=u-y$，$\tilde{v}=v$，$\tilde{p}=p$，$\tilde{\theta}=\theta$ 并省去波浪号得差方程：

$$\begin{cases}\partial_t u+y\partial_x u+v+(\overrightarrow{u}\cdot\nabla)u=-\partial_x p+\nu(\sigma\partial_{xx}+\partial_{yy})u,\\ \partial_t v+y\partial_x v+(\overrightarrow{u}\cdot\nabla)v=-\partial_y p+\nu(\sigma\partial_{xx}+\partial_{yy})v+\theta,\\ \partial_x u+\partial_y v=0,\\ \partial_t\theta+y\partial_x\theta+(\overrightarrow{u}\cdot\nabla)\theta=\mu\Delta\theta,\end{cases}\tag{1.2}$$

对应扰动涡度 $\tilde{\omega}=\partial_x\tilde{v}-\partial_y\tilde{u}$ 将在稳态 $\omega_{sh}=-1$ 附近，同样忽略波浪号，有涡度差方程：

$$\begin{cases}\partial_t\omega+y\partial_x\omega+(\overrightarrow{u}\cdot\nabla)\omega=\nu(\sigma\partial_{xx}+\partial_{yy})\omega+\partial_x\theta,\\ \partial_t\theta+y\partial_x\omega+(\overrightarrow{u}\cdot\nabla)\theta=\mu(\sigma\partial_{xx}+\partial_{yy})\theta,\\ u=-\nabla^{\perp}(-\Delta)^{-1}\omega,\end{cases}\tag{1.3}$$

事实上 Brandolese 和 Schonbek 在 [1] 中指出即使对 (光滑、速降或某强范数中小的) 好初值，对全耗散情形 $\sigma=1$，(1.2)系统速度的 L^2 范数也会随时间增长 ($c(1+t)^{\frac{1}{4}}\leq\|u(t)\|_{L^2}\leq C(1+t)^{\frac{1}{4}}$，$t\gg 1$)。这样看来(1.3)的线性部分，即非自伴算子 $y\partial_x-\nu\partial_{yy}$ 产生的增强耗散能与同属线性部分的浮力项达成某种平衡。作者指出，即使 $y\partial_x-\nu\partial_{yy}$ 仅有垂直耗散，但其实部与虚部之间的非交换性在水平方向上产生了光滑效应 (即某些初值条件推出解光滑)，该现象被称为亚椭圆性，Hörmander 在 [5] 给出了一些刻画。

增强耗散现象最早的严谨结果之一由 Constantin 等在扩散混合的增强方面给出，此后 NS 方程关于剪切流的稳定性也得到深入研究。Boussinesq 系统关于剪切流的稳定性则较晚近，如 Villani 发展的“method of hypocoercivity”。与 NS 不同，Boussinesq 动量方程中浮力项可驱动能量或 Sobolev 范数增长，退化到仅有垂直耗散时非线性项更难控制。下面作些形式计算：

- 标准热方程 $\begin{cases}\partial_t f=\nu\Delta f, x\in\mathbb{T}\times\mathbb{R},\ t>0\\ f(x,0)=f_0,\end{cases}$ 通过 Fourier 变换有解 $\hat{f}=e^{-\nu(|\xi|^2+k^2)t}\hat{f}_0$。其耗散时间尺度为 $O(\nu^{-1})$，亦即在该尺度之外解迅速耗散为 0。
- 显式求解漂移扩散方程 $\begin{cases}\partial_t f+y\partial_x f=\nu(\sigma\partial_{xx}+\partial_{yy})f,\\ f(x,y,0)=f_0(x,y),\end{cases}$，其中 σ 是

否为零对应两种耗散情形。定义 Fourier 变换

$$\hat{f}(k,\xi)=\mathcal{F}(f)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{y\in\mathbb{R}}\int_{x\in\mathbb{T}}f(x,y)e^{-i(kx+\xi y)}\mathrm{dxdy}$$

得 $\begin{cases}\partial_t\hat{f}-k\partial_\xi\hat{f}=-\nu(\sigma k^2+|\xi|^2)\hat{f},\\ \hat{f}(k,\xi,0)=\hat{f}_0(k,\xi),\end{cases}$,由输运方程或特征线法知 $\dfrac{\mathrm{dt}}{1}=\dfrac{\mathrm{d}\xi}{-k}$，故作自然变换 $\eta:=\xi+kt$，$H(k,\eta,t):=\hat{f}(k,\xi,t)$，代入上式知 $\begin{cases}\partial_tH(k,\eta,t)=-k\partial_\xi H=-\nu(\sigma k^2+(\eta-kt)^2)H(k,\eta,t),\\ H(k,\eta,t=0)=\hat{f}(k,\eta-k\cdot[t=0],t=0)=\hat{f}_0(k,\eta),\end{cases}$ ，积分得

$$\begin{aligned}\hat{f}(k,\xi,t)&=\hat{f}_0(k,\eta)e^{-\nu\int_0^t(\sigma k^2+(\eta-k\tau)^2)\mathrm{d}\tau}\\&=\hat{f}(k,\xi+kt)e^{-\nu(\sigma k^2+|\xi|^2)t}e^{-\frac{1}{3}\nu k^2t^3-\nu k\xi t^2}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

上述显式表征反映了增强耗散，即使 $\sigma=0$，解在两方向都是耗散和正则的。上式耗散的时间尺度是 $O(\nu^{-\frac{1}{3}})$，比标准热方程 $O(\nu^{-1})$ 耗散快。易知耗散率依赖频率 k，是变化不均匀的。

1.1 main result

该文给出三个主要结果，两种耗散情形下所得非线性稳定性结果可相互比较：

- 结果一建立在两耗散情形下 Boussinesq 系统线性部分，所得上界精确且最优。
- 结果二估计了全耗散 Boussinesq 系统的非线性稳定性、长时间行为。
- 结果三是针对仅有垂直耗散的 Boussinesq 系统给出的稳定性结果。

改写两种耗散下涡度差方程线性部分：

$$\begin{cases}\partial_t\omega+y\partial_x\omega=\nu(\sigma\partial_{xx}+\partial_{yy})\omega+\partial_x\theta,\\ \partial_t\theta+y\partial_x\theta=\mu(\sigma\partial_{xx}+\partial_{yy})\theta,\\ \omega|_{t=0}=\omega^{(0)},\ \theta|_{t=0}=\theta^{(0)},\end{cases}\tag{1.5}$$

对 $f(x,y)$，$(x,y)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R},k\in\mathbb{Z}$ 定义 $f_k(y):=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}f(x,y)e^{-ikx}\mathrm{dx}$，并记 $D=\frac{1}{i}\partial$，(1.5)式线性稳定性结果表述如下：

命题 1.1. 设 (ω,θ) 是初值 $(\omega^{(0)},\theta^{(0)})$ 下(1.5)式的解。假设对某正常数 L 成立 $\nu\le L\mu$，存在 $c_N>0, C_N>0$ 使得对 $\forall k\in\mathbb{Z}, t>0$ 成立

$$\|\theta_k(t)\|_{L^2_y}\le C\|\theta_k^{(0)}\|_{L^2_y}e^{-\frac{1}{16}\mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t},$$
$$\|\omega_k(t)\|_{L^2_y}\le C(\|\omega_k^{(0)}\|_{L^2_y}+(\nu\mu)^{-\frac{1}{6}}|k|^{\frac{1}{3}}\|\theta_k^{(0)}\|_{L^2_y})e^{-c\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}. \tag{1.6}$$

更一般地，对任意整数 $N\ge 0$，$\exists c_N>0, C_N>0$，使对 $\forall k\in\mathbb{Z}, t>0$ 成立

$$\|D_y^N\theta_k(t)\|_{L^2_y}\le C_Ne^{-c_N\mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}(\|D_y^N\theta_k^{(0)}\|_{L^2_y}+(\mu^{-1}|k|)^{\frac{N}{3}}\|\theta_k^{(0)}\|_{L^2_y}),$$
$$\|D_y^N\omega_k(t)\|_{L^2_y}\le C_Ne^{-c_N\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\Big(\|D_y^N\omega_k^{(0)}\|_{L^2_y}+(\nu\mu)^{-\frac{1}{6}}|k|^{\frac{1}{3}}\|D_y^N\theta_k^{(0)}\|_{L^2_y}$$
$$+(\nu^{-1}|k|)^{\frac{N}{3}}(\|\omega_k^{(0)}\|_{L^2_y}+(\nu\mu)^{-\frac{1}{6}}|k|^{\frac{1}{3}}\|\theta_k^{(0)}\|_{L^2_y})\Big). \tag{1.7}$$

命题1.1的估计可写得更优雅。(1.4)清楚揭示了零模态 $k=0$ 和非零模态 $k\neq 0$ 之间的区别，引导我们定义

$$f_0:=(\mathbb{P}_0f)(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(x,y)\mathrm{d}x,\ \mathrm{f}_{\neq}:=\mathbb{P}_{\neq}\mathrm{f}=\mathrm{f}-\mathbb{P}_0\mathrm{f}$$

分别表示在零频段、非零频段上的投影。推导(1.4)时，有一个变换 $\eta=\xi+kt$，自然引出依赖时间的椭圆算子的定义：对 $t\ge 0$，$\Lambda_t^2=1-\partial_x^2-(\partial_y+t\partial_x)^2$，其象征 $\Lambda_t^2(k,\xi)=1+k^2+(\xi+tk)^2$。一般而言，用 Λ_t^b，$b\in\mathbb{R}$ 来表示 Fourier 乘子，其象征 $\Lambda_t^b(k,\xi)=(1+k^2+(\xi+tk)^2)^{\frac{b}{2}}$。易知算子 Λ_t^b 同变系数微分算子 $\partial_t+y\partial_x$ 可交换，故 Λ_t^b 算子能在不破坏线性化方程(1.5)结构情况下得到导数估计。另外 Λ 与标准分数阶 Laplacian 算子类似，我们整合成引理：

引理 1.2. 上面定义算子 Λ_t^b 满足 *(1)* 对 $\forall b\in\mathbb{R}$，Λ_t^b 与 $\partial_t+y\partial_x$ 可交换，即 $\Lambda_t^b(\partial_t+y\partial_x)=(\partial_t+y\partial_x)\Lambda_t^b$；*(2)*

$$\|\Lambda_t^b(fg)\|_{L^2}\le\|f\|_{L^\infty}\|\lambda_t^bg\|_{L^2}+\|g\|_{L^\infty}\|\Lambda_t^bf\|_{L^2},\ \forall b>0$$
$$\|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C\|\hat{f}(t)\|_{L^1(\Omega)}\le C\|\Lambda_t^bf(t)\|_{L^2(\Omega)},\ \forall b>1.$$

故 $\|\Lambda_t^b(fg)\|_{L^2}\le C\|\Lambda_t^bf\|_{L^2}\|\Lambda_t^bg\|_{L^2}$。

定义水平分数阶导数 $\widehat{|D_x|^\gamma f}(k,\xi)=|k|^\gamma\hat{f}(k,\xi)$ 来精确表述第二个线性稳定性结果，注意命题1.1结果可转换为物理空间中的估计：

命题 1.3. 设 (ω,θ) 是初值 $(\omega^{(0)},\theta^{(0)})$ 下(1.5)式的解，则存在 $C>0$ 使得对 $b\in\mathbb{R}$ 成立

$$\begin{aligned}&\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^\infty(L^2)}+\nu^{\frac12}\|D_y\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}+\sigma\nu^{\frac12}\|D_y\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}+\nu^{\frac16}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}\\&+(\nu\mu)^{-\frac16}\Big(\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}+\mu^{\frac12}\|D_y|D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}+\sigma\mu^{\frac12}\||D_x|^{\frac43}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}\\&+\mu^{\frac16}\||D_x|^{\frac23}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}\Big)\le C(\|\omega^{(0)}\|_{H^k}+(\nu\mu)^{-\frac16}\||D_x|^{\frac13}\theta^{(0)}\|_{H^k}).\end{aligned}$$

简单起见，设 $\nu=\mu$。为直接比较，分开叙述两种耗散情形。注意耗散退化时必须对初值作更严格假设，全耗散稳定性与大时间行为结果如下：

定理 1.4. 假设 $b>1,\beta\ge\frac12,\delta\ge\beta+\frac13,\alpha\ge\delta-\beta+\frac23$，对充分小 $\epsilon>0$，初值 $(\omega^{(0)},\theta^{(0)})$ 满足

$$\|\omega^{(0)}\|_{H^b}\le\epsilon\nu^\beta,\ \|\theta^{(0)}\|_{H^b}\le\epsilon\nu^\alpha,\ \||D_x|^{\frac13}\theta^{(0)}\|_{H^b}\le\epsilon\nu^\delta,$$

则全耗散 $\sigma=1$ 系统(1.3)的解满足

$$\begin{aligned}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^\infty(L^2)}+\nu^{\frac12}\|\nabla\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}+\nu^{\frac16}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}+\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}&\le C\epsilon\nu^\beta,\\\|\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}+\nu^{\frac12}\|\nabla\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}+\nu^{\frac16}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}+\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}&\le C\epsilon\nu^\alpha,\\\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}+\nu^{\frac12}\|\nabla|D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}+\nu^{\frac16}\||D_x|^{\frac23}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}&\\+\|(-\Delta)^{-\frac12}|D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}&\le C\epsilon\nu^\delta.\end{aligned}$$

仅有垂直耗散时稳定性和大时间行为结果如下：

定理 1.5. 假设 $b>\frac43,\beta\ge\frac23,\delta\ge\beta+\frac13,\alpha\ge\delta-\beta+\frac23$，对充分小 $\epsilon>0$，初值 $(\omega^{(0)},\theta^{(0)})$ 满足

$$\|\omega^{(0)}\|_{H^b}\le\epsilon\nu^\beta,\ \|\theta^{(0)}\|_{H^b}\le\epsilon\nu^\alpha,\ \||D_x|^{\frac13}\theta^{(0)}\|_{H^b}\le\epsilon\nu^\delta,$$

则仅有垂直耗散 $\sigma=0$ 的系统(1.3)的解满足

$$\begin{aligned}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^\infty(L^2)}+\nu^{\frac12}\|D_y\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}+\nu^{\frac16}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}+\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}&\le C\epsilon\nu^\beta,\\\|\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}+\nu^{\frac12}\|D_y\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}+\nu^{\frac16}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}+\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}&\le C\epsilon\nu^\alpha,\\\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}+\nu^{\frac12}\|D_y|D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}+\nu^{\frac16}\||D_x|^{\frac23}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}&\\+\|(-\Delta)^{-\frac12}|D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}&\le C\epsilon\nu^\delta.\end{aligned}$$

显然当 $\theta=0$ 时退化为 2 维 NS 情形，而 2 维 Couette 流或靠近 Couette 流的剪切流稳定性问题在全耗散 2 维 NS 方程上已作研究。作者指

出因选用的乘子不同，这里获得的 1/3 水平正则性优于另一篇文章的增强耗散量 $\|\Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}$。另外仅考虑垂直耗散的 2 维 NS 方程稳定性结果是新的，可作推论。即 $\theta = 0$，系统退化为仅有垂直耗散的 2 维 NS 涡度方程：

$$\begin{cases} \partial_t \omega + y\partial_x \omega + (\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\omega = \nu \partial_{yy}\omega, \\ \overrightarrow{u} = -\nabla^{\perp}(-\Delta)^{-1}\omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

定理1.5给出(1.8)如下稳定性结果：

推论 1.6. 令 $b > \frac{4}{3}$，$\beta \geq \frac{2}{3}$，假设对充分小 $\epsilon > 0$，初值 $\omega^{(0)}$ 满足 $\|\omega^{(0)}\|_{H^b} \leq \epsilon\nu^{\beta}$，则(1.8)对应解 ω 满足

$$\|\Lambda_t^b \omega\|_{L_t^\infty(L^2)} + \nu^{\frac{1}{2}}\|D_y \Lambda_t^b \omega\|_{L_t^2(L^2)} + \nu^{\frac{1}{6}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b \omega\|_{L_t^2(L^2)} + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)} \leq C\epsilon\nu^{\beta}.$$

注解 1.7.

- *Couette* 流部分工作在坐标变换 $X = x - yt, Y = y$ 下完成，原论文也可转到 (X, Y) 上，但想突出非自伴算子 $y\partial_x - \nu\partial_{yy}$ 的作用，故在标准物理变量中工作。后文(1.9)中定义的乘子 $\mathcal{M}_1$ 允许我们证明 *Sharp* 的增强耗散估计，它由线性算子一阶括号结构构造的。

- 有文献指出可证明两种耗散情况下非零模态的指数收敛性。

- *C.Zillinger* 的工作利用显式解得到 *2* 维 *Boussinesq* 系统部分耗散关于 *Couette* 流的线性稳定性和较弱增强耗散项，此文优势则是仔细选择的乘子可以很好地表征 1/3 水平导数的增益。

1.2 证明框架

定理1.4和1.5并非平凡，因浮力项存在，若不充分利用涡度方程中 $y\partial_x\omega, \partial_{yy}\omega$ 与温度方程中 $y\partial_x\theta, \partial_{yy}\theta$ 组合产生的增强耗散，则无法建立所需稳定性结果。如何提取非自伴算子 $y\partial_x - \nu\partial_{yy}$ 产生的增强耗散，特别是水平方向上的正则性？下面设计一个 Fourier 乘子 $\mathcal{M}$：

- 取实值非递减函数 $\varphi \in C^\infty$ 满足 $0 \leq \varphi \leq 1$，$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in (-\infty, -2], \\ 1, & \tau \in [2, \infty), \end{cases}$ 且 $[-1, 1]$ 上 $\varphi' = \frac{1}{4}$。定义 Fourier 乘子 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(D_x, D_y) = \mathcal{M}_1 +$

$\mathcal{M}_2+1$，其中象征有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_1(k,\xi) &= \varphi(\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{-\frac{1}{3}}sgn(k)\xi),\ k\neq 0\\
\mathcal{M}_2(k,\xi) &= \frac{1}{k^2}\left(\arctan\frac{\xi}{k}+\frac{\pi}{2}\right),\ k\neq 0,\\
\mathcal{M}_1(0,\xi) &= \mathcal{M}_2(0,\xi)=0.
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

则 $\mathcal{M}$ 是作用于 $L^2(\Omega)$ 上的自伴 Fourier 乘子，显然 $1\leq\mathcal{M}\leq 2+\pi$。

- 乘子 $\mathcal{M}$ 的构造受到 Oseen 涡周围 2 维 NS 方程 (非自伴) 线性算子的研究 [3] 和 [2] 的启发???。

采用 Lie 括号 (交换子)$[A,B]=AB-BA$, 注意到对 L^2 上自伴算子 $A=A^*$ 和斜自伴算子 $B=-B^*$ 有

$$
2\Re\langle Af,Bf\rangle_{L^2}=\langle Af,Bf\rangle_{L^2}+\langle Bf,Af\rangle_{L^2}=\langle B^*Af+A^*Bf,f\rangle_{L^2}=\langle[A,B]f,f\rangle_{L^2}.
$$

取 $(y\partial_x-\nu\partial_{yy})\omega,\mathcal{M}\omega$ 内积得 $R:=2\Re\langle y\partial_x\omega,\mathcal{M}\omega\rangle_{L^2}-2\nu\Re\langle\partial_{yy}\omega,\mathcal{M}\omega\rangle_{L^2}$, 我们关注其下界。因 $\mathcal{M}$ 自伴，$y\partial_x$ 斜自伴，通过 Plancherel 定理我们有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{[\mathcal{M},y\partial_x]\omega\right\}&=\mathcal{M}(k,\xi)(-k\partial_\xi\hat{\omega})+k\partial_\xi(\mathcal{M}(k,\xi)\hat{\omega})=k\hat{\omega}\partial_\xi\mathcal{M}(k,\xi),\\
2\Re\langle y\partial_x\omega,\mathcal{M}\omega\rangle_{L^2}&=\langle[\mathcal{M},y\partial_x]\omega,\omega\rangle_{L^2}=\langle\mathcal{F}\left\{[\mathcal{M},y\partial_x]\omega\right\},\hat{\omega}\rangle_{L^2}=\sum_k\int_{\mathbb{R}}(k\partial_\xi\mathcal{M})|\hat{\omega}(k,\xi)|^2\mathrm{d}\xi,\\
R&=\sum_k\int_{\mathbb{R}}(k\partial_\xi\mathcal{M}+2\nu\mathcal{M}|\xi|^2)|\hat{\omega}(k,\xi)|^2\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

构造 $\mathcal{M}_1$ 是为捕捉水平方向的正则性：由 $\mathcal{M}_1$ 定义，对 $\forall k\neq 0,\ \xi\in\mathbb{R}$ 有

$$
k\partial_\xi\mathcal{M}_1(k,\xi)=\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\varphi'(\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{-\frac{1}{3}}sgn(k)\xi)
$$

自然 $|\xi|\leq(\dfrac{\nu}{|k|})^{\frac{1}{3}}$ 时 $\varphi'=\frac{1}{4}$，上式为 $\frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}$；当 $|\xi|>(\frac{\nu}{|k|})^{\frac{1}{3}}$ 时，因 $\varphi'(>1)>0$，得一重要不等式

$$
\nu|\xi|^2+k\partial_\xi\mathcal{M}_1\geq\frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}},\ \forall\xi\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}.
$$

乘子 $\mathcal{M}_1$ 并非唯一，如取 $\varphi(\cdot)=c\arctan(\cdot)+C$。Fourier 乘子 $\mathcal{M}_2$ 用来控制非线性项中的速度，因为我们有 $k\partial_\xi\mathcal{M}_2(k,\xi)=\frac{1}{k^2+|\xi|^2}$。综上可得：

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_k \int_{\mathbb{R}} (k\partial_\xi\mathcal{M}_1+\nu|\xi|^2+k\partial_\xi\mathcal{M}_2+\nu(2\mathcal{M}-1)|\xi|^2)|\hat{\omega}|^2\mathrm{d}\xi \\
&\geq \sum_k \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{k^2+|\xi|^2}+\nu|\xi|^2)|\hat{\omega}|^2\mathrm{d}\xi \\
&\gtrsim \frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\omega\|_{L^2}^2+\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\omega_{\neq}\|_{L^2}^2+\nu\|\partial_y\omega\|_{L^2}^2. \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

(1.10)可导出对 ω 的 $\frac{1}{3}$ 水平导数的控制，也是我们可能控制浮力和非线性项的主要原因。还注意到，上式右端指数 $\frac{1}{3}$ 在某种意义下是 Sharp 的，因为 $\exists c>0,\omega_\nu\in L^2\Rightarrow\|(y\partial_x-\nu\partial_{yy})\omega_\nu\|_{L^2}\|\omega_\nu\|_{L^2}=c\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\omega_\nu\|_{L^2}^2$，$\forall\nu\in(0,1)$，该结果可参考 [3] 中的处理。这是算子 $y\partial_x-\nu\partial_{yy}$ 的亚椭圆性带来的。

命题1.1指出标准 Sobolev 能量估计会破坏结构而失效，我们用算子 Λ_t^b，它允许不破坏系统线性结构下对两种耗散系统(1.3)进行微分，再用乘子 $\mathcal{M}$ 获得高阶导数所需的增强耗散。

涡度方程浮力项 $\partial_x\theta$ 包含整个水平导数，估计 $\|\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}$ 时浮力项可封上界：$|\langle\partial_x\Lambda_t^b\theta,\mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2}|\leq\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}$，式中含 θ 的 $\frac{2}{3}$ 水平导数。因 $\|\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}$ 估计产生的增强耗散只含 $\frac{1}{3}$ 水平导数耗散，必须估计 $\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}$ 来控制浮力项,这解释了为何把 $\|\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}$, $\|\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}$, $\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}$ 结合在一起。

大部分努力将花在给非线性项合适上界，这是微妙的，特别是仅有垂直耗散。下面叙述估计非线性项 $\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta$ 时所遇困难与处理方法。速度 u 可用 Biot-Savart 定律由 ω 表示为 $\overrightarrow{u}=-\nabla^\perp(-\Delta)^{-1}\omega$。为区分零模态和非零模态的不同行为，利用零模态与 x 无关性质分解速度

$$
\overrightarrow{u}=u_0+u_{\neq}=\begin{pmatrix}u_0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_{\neq}\\v_{\neq}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\partial_y(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq}\\-\partial_x(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq}\end{pmatrix},
$$

其中 $u_0=\partial_y(-\partial_y^2)^{-1}\omega_0$。相应地，$\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta$ 被分解为三部分：

$$
\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta=u_0\partial_x\theta+\partial_y(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq}\partial_x\theta-\partial_x(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq}\partial_y\theta.
$$

因水平方向缺乏耗散，不可直接得出上式前两项的界，为克服困难，估计标量积 $H:=\langle\Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta),\mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2}$。

在 Fourier 乘子 $\mathcal{M}$ 帮助下频率空间被划分为不同的子域促使消去现象和得到导数分布。交换子估计被用来切换导数，这使非线性项能被控制。原文余下分三部分，第 2 节证明命题1.1和1.3线性稳定性，第 3 节证明定理1.4，第 4 节证明定理1.5。

2 命题1.1和1.3的证明

这些结果对两种耗散都有效。注意线性系统(1.5)两方程是解耦的，故可类似由 Fourier 变换得显式解表达。计算知

$$\hat{\theta}(k,\xi,t)=\hat{\theta}_0(k,\xi+kt)e^{-\mu\int_0^t(\sigma k^2+(\xi+kt-k\tau)^2)\mathrm{d}\tau},$$

$$\hat{\omega}(k,\xi,t)=\hat{\omega}_0(k,\xi+kt)e^{-\nu\int_0^t(\sigma k^2+(\xi+kt-k\tau)^2)\mathrm{d}\tau}+ik\int_0^t e^{-\nu\int_0^{t-s}(\sigma k^2+(\xi+kt-k\tau)^2)\mathrm{d}\tau}\hat{\theta}(k,\xi,s)\mathrm{ds}.$$

从而可直接得俩命题的界。这里提及乘子理论使命题更易用在非线性情形。构造乘子则是为从非自伴算子 $y\partial_x-\nu\partial_{yy}, y\partial_x-\mu\partial_{yy}$，此外乘子法较灵活，可用于更一般 (如无显式解) 的模型。

Proof of 命题1.1. 记 $D=\frac{1}{i}\partial$，将(1.5)投影到每个频率上，得只含 y 变量：

$$\begin{cases}\partial_t\omega_k+\nu(D_y^2+\sigma k^2)\omega_k+iky\omega_k=ik\theta_k,\\ \partial_t\theta_k+\mu(D_y^2+\sigma k^2)\theta+iky\theta_k=0,\\ \omega_k|_{t=0}=\omega_k^{(0)},\ \theta_k|_{t=0}=\theta_k^{(0)},\end{cases}\tag{2.1}$$

$\sigma=1,0$ 分别对应两种耗散情形。因 ω_k,θ_k 可为复值，L_y^2 内积定义为 $\langle f,g\rangle_{L_y^2}=\int_{\mathbb{R}}f(y)\bar{g}(y)\mathrm{dy}$。作能量估计，将 θ_k 与 $(2.1)_2$ 作 L_y^2 内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\theta_k\|_{L_y^2}^2+\mu\|D_y\theta_k\|_{L_y^2}^2+\sigma\mu k^2\|\theta_k\|_{L_y^2}^2=0.\tag{2.2}$$

为进一步估计，定义 Fourier 乘子：若 $k>0$，设 $M_k\theta_k:=\varphi((\frac{\mu}{|k|})^{\frac{1}{3}}D_y)\theta_k$，其中 φ 在 1.2 节证明框架中定义。显然 $\mathcal{M}_k$ 是自伴非负 Fourier 乘子，将 $M_k\theta_k$ 与 $(2.1)_2$ 作 L_y^2 内积得

$$2\Re\langle\partial_t\theta_k,M_k\theta_k\rangle_{L_y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle M_k\theta_k,\theta_k\rangle_{L_y^2},$$

$$2\Re\langle\mu(D_y^2+\sigma k^2)\theta_k,M_k\theta_k\rangle_{L_y^2}=\langle 2\mu(D_y^2+\sigma k^2)M_k\theta_k,\theta_k\rangle_{L_y^2},$$

$$2\Re\langle iky\theta_y,M_k\theta_k\rangle_{L_y^2}=\langle[M_k,iky]\theta_k,\theta_k\rangle_{L_y^2},$$

上式用到 M_k 自伴、iky 是斜自伴。沿用上文交换子记号，注意到

$$[M_k, iky] = [\varphi((\frac{\mu}{|k|})^{\frac{1}{3}}D_y), iky] = \varphi'((\frac{\mu}{k})^{\frac{1}{3}}D_y)(\mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\frac{i}{i}) = \mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\varphi'((\frac{\mu}{|k|})^{\frac{1}{3}}D_y)$$

整理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle M_k\theta_k, \theta_k\rangle_{L^2_y} + \langle 2\mu(D_y^2+\sigma k^2)\varphi((\frac{\mu}{|k|})^{\frac{1}{3}}D_y)\theta_k, \theta_k\rangle_{L^2_y} + \langle \mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\varphi'(\mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}D_y)\theta_k, \theta_k\rangle_{L^2_y} = 0.$$

与(2.2)式一同有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\|\theta_k\|^2_{L^2_y} + \langle M_k\theta_k, \theta_k\rangle_{L^2_y}\right) + \langle\left(2\mu(D_y^2+\sigma k^2)(1+\varphi((\frac{\mu}{|k|})^{\frac{1}{3}}D_y)) + \mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\varphi'((\frac{\mu}{|k|})^{\frac{1}{3}}D_y)\right)\theta_k, \theta_k\rangle_{L^2_y} = 0.$$

选择适当 φ，对 $\forall k>0, \mu>0$, 有

$$\mu(|\xi|^2+\sigma k^2)(1+2\varphi((\frac{\mu}{|k|})^{\frac{1}{3}}\xi)) + \mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\varphi'((\frac{\mu}{|k|})^{\frac{1}{3}}\xi) \geq \frac{1}{4}\mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle(1+M_k)\theta_k, \theta_k\rangle_{L^2_y} + \mu\|D_y\theta_k\|^2_{L^2_y} + \sigma\mu k^2\|\theta_k\|^2_{L^2_y} + \frac{1}{4}\mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\|\theta_k\|^2_{L^2_y} \leq 0. \tag{2.3}$$

对 t 积分，由 M_k 性质得到 $k>0$ 时 $(1.6)_1$ 式。当 $k<0$，定义乘子 $M_k\theta_k := \varphi(-(\frac{\mu}{|k|})^{\frac{1}{3}}D_y)\theta_k$，并令 $M_0=0$ 依然可推出 $(1.6)_1$ 式。

$(1.7)_1$ 式可用归纳法证明。将 $(2.1)_2$ 式关于 y 微分 N 次得

$$\partial_t D_y^N\theta_k + \mu(D_y^2+\sigma k^2)D_y^N\theta_k + ikyD_y^N\theta_k + kND_y^{N-1}\theta_k = 0.$$

将上式与 $(1+M_k)D_y^N\theta_k$ 作 L^2_y 内积得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle(1+M_k)D_y^N\theta_k, D_y^N\theta_k\rangle_{L^2_y} + \mu\|D_y^{N+1}\theta_k\|^2_{L^2_y} + \sigma\mu k^2\|D_y^N\theta_k\|^2_{L^2_y} + \frac{1}{4}\mu^{\frac{1}{3}}\|D_y^N\theta_k\|^2_{L^2_y}\\
&\leq -2\Re\langle kND_y^{N-1}\theta_k, (1+M_k)D_y^N\theta_k\rangle_{L^2_y}\\
&\leq \frac{1}{8}\mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\|D_y^N\theta_k\|^2_{L^2_y} + 32N^2\mu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{4}{3}}\|D_y^{N-1}\theta_k\|^2_{L^2_y}.
\end{aligned}$$

对 t 积分得

$$\|D_y^N\theta_k(t)\|^2_{L^2_y} \leq 2\|D_y^N\theta_k^{(0)}\|^2_{L^2_y}e^{-\frac{1}{16}\mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t} + C_N\mu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{4}{3}}\int_0^t\|D_y^{N-1}\theta_k(s)\|^2_{L^2_y}e^{-\frac{1}{16}\mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}(t-s)}\mathrm{ds}.$$

归纳得 $(1.7)_1$ 式。为处理 $(1.6)_2$ 式。对 $k\neq 0$ 定义 $\bar{M}_k := \varphi((\frac{\nu}{|k|})^{\frac{1}{3}}D_y)$，$M_0 = 0$，并将 $(2.1)_1$ 式乘上 $(1+\bar{M}_k)\omega_k$，Young 不等式得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle(1+\bar{M}_k)\omega_k,\omega_k\rangle_{L^2_y}+\nu\|D_y\omega_k\|^2_{L^2_y}+\sigma\nu k^2\|\omega_k\|^2_{L^2_y} \qquad (2.4)\\
&\leq 2\Re\langle ik\theta_k,(1+\bar{M}_k)\omega_k\rangle_{L^2_y}-\frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\|\omega_k\|^2_{L^2_y}\leq 32\nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{4}{3}}\|\theta_k\|^2_{L^2_y}-\frac{1}{8}\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\|\omega_k\|^2_{L^2_y}.
\end{aligned}$$

因 $\nu\leq L\mu$，取充分小 $c\leq\frac{1}{8}$，$c\nu^{\frac{1}{3}}\leq\frac{1}{32}\mu^{\frac{1}{3}}$，对上式作用积分因子 $e^{c\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}$ 并用 $(1.6)_1$ 式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\langle(1+\bar{M}_k)\omega_k,\omega_k\rangle_{L^2_y}e^{c\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\right)\leq 32\nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{4}{3}}\|\theta_k\|^2_{L^2_y}e^{c\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}\leq C\nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{4}{3}}\|\theta_k^{(0)}\|^2_{L^2_y}e^{(c\nu^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{8}\mu^{\frac{1}{3}})|k|^{\frac{2}{3}}t}.$$

对 t 积分得 $\|\omega_k(t)\|^2_{L^2_y}\leq C\left(\|\omega_k^{(0)}\|^2_{L^2_y}+(\nu\mu)^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\|\theta_k^{(0)}\|^2_{L^2_y}\right)e^{-c\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}t}$。现对 $(2.1)_1$ 式微分并用 θ_k 的估计，则在 $\nu\leq L\mu$ 假设下可推出 $(1.7)_2$ 式. □

命题1.3是1.1推论。利用 Λ_t^b 与 $\partial_t+y\partial_x$ 可交换的事实：

Proof of 命题1.3. 对 $\forall b\in\mathbb{R}$，将 Λ_t^b 作用于方程(1.5)，由可交换性，若在命题1.1中分别用 $\Lambda_t^b\omega,\Lambda_t^b\theta$，所得估计仍有效。类似地，因任何水平导数与(1.5)中线性方程交换，$|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta$ 与 θ 的估计相似。特别地，如(2.3)，有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}&\langle(1+M_k)|D_x|^{\frac{1}{3}}(\Lambda_t^b\theta)_k,|D_x|^{\frac{1}{3}}(\Lambda_t^b\theta)_k\rangle_{L^2_y}+\mu\|D_y|D_x|^{\frac{1}{3}}(\Lambda_t^b\theta)_k\|^2_{L^2_y}\\
&+\sigma\mu k^2\||D_x|^{\frac{1}{3}}(\Lambda_t^b\theta)_k\|^2_{L^2_y}+\frac{1}{4}\mu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}(\Lambda_t^b\theta)_k\|^2_{L^2_y}\leq 0.
\end{aligned}$$

对 t 积分，并将所得对 $k\in\mathbb{Z}$ 求和，我们发现

$$\begin{aligned}
\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^\infty_t(L^2)}+\mu\|D_y|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2_t(L^2)}+\sigma\mu\||D_x|^{\frac{4}{3}}\Lambda_t^b\theta\|^2_{L^2_t(L^2)}\\
+\frac{1}{4}\mu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta\|^2_{L^2_t(L^2)}\leq 2\||D_x|^{\frac{1}{3}}\theta^{(0)}\|^2_{H^b}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

虽与(2.4)相似，但我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}&\langle(1+\bar{M}_k)(\Lambda_t^b\omega)_k,(\Lambda_t^b\omega)_k\rangle_{L^2_y}+\nu\|D_y(\Lambda_t^b)\omega_k\|^2_{L^2_y}+\sigma\nu k^2\|(\Lambda_t^b\omega)_k\|^2_{L^2_y}\\
&+\frac{1}{8}\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\|(\Lambda_t^b\omega)_k\|^2_{L^2_y}\leq 32\nu^{-\frac{1}{3}}|k|^{\frac{4}{3}}\|(\Lambda_t^b\theta)_k\|^2_{L^2_y}.
\end{aligned}$$

对 t 积分，并将所得对 $k\in\mathbb{Z}$ 求和，利用(2.5)式我们有

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda_t^b\omega\|^2_{L^\infty_t(L^2)}+\nu\|D_y\Lambda_t^b\omega\|_{L^2_t(L^2)}+\sigma\nu\||D_x|\Lambda_t^b\omega\|^2_{L^2_t(L^2)} \qquad (2.6)\\
&\quad+\frac{1}{8}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|^2_{L^2_t(L^2)}\leq 2\|\omega^{(0)}\|^2_{H^b}+32\nu^{-\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta\|^2_{L^2_t(L^2)}\\
&\quad\leq 2\|\omega^{(0)}\|^2_{H^b}+C(\nu\mu)^{-\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\theta^{(0)}\|^2_{H^b}
\end{aligned}$$

通过将 $(\nu\mu)^{-\frac{1}{3}} \times$ (2.5) 与(2.6)加和，可得命题1.3期望的估计。注意到系数 $(\nu\mu)^{-1}$ 有助于统一初值的界。命题1.3证毕。 $\square$

3 Proof of 定理1.4

定理1.4将证明(1.3)的非线性稳定性，论证框架是 Bootstrap，有两个主要步骤：一是建立先验估计，二是通过先验估计应用和完成 Bootstrap Argument。如引言所述，封闭估计一重要想法是构造合适的 Fourier 乘子提取增强的耗散，另一则是对非线性项进行约束。为此，将水平零模态与非零模态区分，并利用 Sharp 的交换子估计。

回顾引理1.2，我们将频繁使用。另外对 $\forall s \geq 0,\ b > 1$ 成立

$$\||D_x|^s \Lambda_t^b (fg)\|_{L^2} \leq C(\||D_x|^s \Lambda_t^b f\|_{L^2} \|\Lambda_t^b g\|_{L^2} + \|\Lambda_t^b f\|_{L^2} \||D_x|^s \Lambda_t^b g\|_{L^2}). \tag{3.1}$$

事实上由 Plancherel 定理有

$$\begin{aligned}
\||D_x|^s \Lambda_t^b (fg)\|_{L^2}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2s} \int_{\mathbb{R}} (\Lambda_t^b(k,\xi))^2 \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k-l,\xi-\eta)\hat{g}(l,\eta)\mathrm{d}\eta \right)^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq C_s \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} (\Lambda_t^b(k,\xi))^2 \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} (|k-l|^s + |l|^s) \times \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k-l,\xi-\eta)\hat{g}(l,\eta)\mathrm{d}\eta \right)^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq C_s (\|\Lambda_t^b (g|D_x|^s f)\|_{L^2}^2 + \|\Lambda_t^b (f|D_x|^s g)\|_{L^2}^2),
\end{aligned}$$

由上式和引理1.2可推出(3.1)式。回顾 $\mu = \nu$、Fourier 乘子 $\mathcal{M}$ 定义及零、非零模态的分解：

Proof of 定理1.4. 将 Λ_t^b 作用到(1.3)，由引理1.2中 Λ_t^b 性质有

$$\begin{cases}
\partial_t \Lambda_t^b \omega + y\partial_x \Lambda_t^b \omega - \nu\Delta\Lambda_t^b \omega + \Lambda_t^b((\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\omega) = \partial_x \Lambda_t^b \theta, \\
\partial_t \Lambda_t^b \theta + y\partial_x \Lambda_t^b \theta - \nu\Delta\Lambda_t^b \theta + \Lambda_t^b((\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\theta) = 0.
\end{cases} \tag{3.2}$$

将上述方程分别乘上 $\overline{\mathcal{M}\Lambda_t^b \omega}$ 和 $\overline{\mathcal{M}\Lambda_t^b \theta}$，在 $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上积分，$y\partial_x - \nu\Delta$ 的组合增强了耗散。正如引言所述，垂直耗散已足够解决问题。由实部与交换子的关系，以及 $\mathcal{M}$ 自伴、$y\partial_x$ 斜伴随得 $2\Re\langle y\partial_x f, \mathcal{M}f \rangle_{L^2} = \langle [\mathcal{M}, y\partial_x] f, f \rangle_{L^2} =$

$\langle (k\partial_\xi \mathcal{M})(D)f, f\rangle_{L^2}$，代入刚才的积分式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\sqrt{\mathcal{M}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + 2\nu\|\nabla\sqrt{\mathcal{M}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + \langle (k\xi\mathcal{M})(D)\Lambda_t^b\theta, \Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2} + 2\Re\langle \Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta), \mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2} = 0. \tag{3.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\sqrt{\mathcal{M}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}^2 + 2\nu\|\nabla\sqrt{\mathcal{M}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}^2 + \langle (k\xi\mathcal{M})(D)\Lambda_t^b\omega, \Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2} + 2\Re\langle \Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\omega), \mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2} = 2\Re\langle \partial_x\Lambda_t^b\theta, \mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2}. \tag{3.4}$$

将 $(3.2)_2$ 式与 $\mathcal{M}|D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta$ 作 L^2 内积得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\sqrt{\mathcal{M}}|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + 2\nu\|\nabla\sqrt{\mathcal{M}}|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + \langle |D_x|^{\frac{2}{3}}(k\partial_\xi\mathcal{M})(D)\Lambda_t^b\theta, \Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2} + 2\Re\langle \Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta), |D_x|^{\frac{2}{3}}\mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2} = 0. \tag{3.5}$$

由 $\mathcal{M}$，对于 $k\neq 0, \xi\in\mathbb{R}$ 有

$$k\partial_\xi\mathcal{M}(k,\xi) = \nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}\varphi'((\frac{\nu}{|k|})^{\frac{1}{3}}sgn(k)\xi) + \frac{1}{k^2+\xi^2} \tag{3.6}$$

这意味着对 $k\neq 0$, $\xi\in\mathbb{R}$ 有

$$2\nu(\xi^2+k^2)\mathcal{M}(k,\xi) + k\partial_\xi\mathcal{M}(k,\xi) \geq \nu(\xi^2+k^2) + \frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\xi^2+k^2}$$

$$2\nu\|\nabla\sqrt{M}f\|_{L^2}^2 + \langle (k\partial_\xi\mathcal{M})(D)f, f\rangle_{L^2} \geq \nu\|\nabla f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}f\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f_{\neq}\|_{L^2}^2.$$

综合(3.4),(3.3)和(3.5)整合成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\sqrt{\mathcal{M}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}^2 \leq 2\Re\underbrace{\langle \partial_x\Lambda_t^b\theta, \mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2}}_{=I_1} - 2\Re\underbrace{\langle \Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\omega), \mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2}}_{=I_2}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\sqrt{\mathcal{M}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2 \leq -2\Re\underbrace{\langle \Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta), \mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2}}_{=I_3}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\sqrt{\mathcal{M}}|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2 \leq -2\Re\underbrace{\langle \Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta), |D_x|^{\frac{2}{3}}\mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2}}_{=I_4}, \tag{3.9}$$

由 $\mathcal{M}$ 有 L^2 有界性

$$|I_1| = |\langle \partial_x \Lambda_t^b \theta, \mathcal{M}\Lambda_t^b \omega\rangle_{L^2}| \le \||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}. \tag{3.10}$$

- $\underline{I_2 \text{ 和 } I_3 \text{ 的估计}}$

由 Bios-Savart $\overrightarrow{u} = -\nabla^{\perp}(-\Delta)^{-1}\omega = \begin{pmatrix} \partial_y(-\Delta)^{-1}\omega, \\ -\partial_x(-\Delta)^{-1}\omega \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，因速度可分解为 $\overrightarrow{u_0}$ 和 $\overrightarrow{u_{\neq}}$，即

$$\overrightarrow{u_0} = \mathbb{P}_0\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_0 = \partial_y(-\partial_y^2)^{-1}\omega_0,$$
$$\overrightarrow{u_{\neq}} = \mathbb{P}_{\neq}\overrightarrow{u} = -\nabla^{\perp}(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq} = \begin{pmatrix} \partial_y(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq} \\ -\partial_x(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\neq} \\ v_{\neq} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

因此可写出

$$\begin{aligned} I_2 &= \langle \Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\omega), \mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2} \\ &= \langle \Lambda_t^b(\overrightarrow{u_{\neq}}\cdot\nabla\omega), \mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2} + \langle \Lambda_t^b(\overrightarrow{u_0}\cdot\nabla\omega), \mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2} =: I_{21} + I_{22} \end{aligned}$$

由 $\mathcal{M}$ 有界性和引理1.2，当 $b>1$ 有

$$|I_{21}| \le \|\Lambda_t^b(\overrightarrow{u_{\neq}}\cdot\nabla\omega)\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L^2} \le C\|\Lambda_t^b\overrightarrow{u_{\neq}}\|_{L^2}\|\nabla\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}.$$

由(3.11)知 $\|\Lambda_t^b\overrightarrow{u_{\neq}}\|_{L^2} \le \|\nabla^{\perp}(-\Delta)^{-1}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2} \le \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}$，故当 $b>1$ 时有

$$|I_{21}| \le C\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\nabla\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}.$$

估计 I_{22} 是关键，简化记号记 $\mathcal{M}_t^b = \sqrt{\mathcal{M}}\Lambda_t^b$ 或

$$\mathcal{M}_t^b(k,\xi) := \sqrt{\mathcal{M}(k,\xi)}\Lambda_t^b(k,\xi) = \sqrt{\mathcal{M}(k,\xi)}(1+k^2+(\xi+kt)^2)^{\frac{b}{2}}. \tag{3.12}$$

由(3.11)知 ω_0 与 x 无关，故 $\overrightarrow{u_0}\cdot\nabla\omega = u_0\partial_x\omega = u_0\partial_x\omega_{\neq}$。因

$$\langle \mathcal{M}_t^b(u_0\partial_x\omega_{\neq}), \mathcal{M}_t^b\omega_0\rangle_{L^2} = 0 = \langle u_0\partial_x(\mathcal{M}_t^b\omega_{\neq}), \mathcal{M}_t^b\omega_{\neq}\rangle_{L^2}$$

从而

$$\begin{aligned} I_{22} &= \langle \Lambda_t^b(\overrightarrow{u_0}\cdot\nabla\omega), \mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2} = \langle \mathcal{M}_t^b(u_0\partial_x\omega_{\neq}), \mathcal{M}_t^b\omega\rangle_{L^2} \\ &= \langle \mathcal{M}_t^b(u_0\partial_x\omega_{\neq}), \mathcal{M}_t^b\omega_{\neq}\rangle_{L^2} = \langle \mathcal{M}_t^b(u_0\partial_x\omega_{\neq}) - u_0\partial_x(\mathcal{M}_t^b\omega_{\neq}), \mathcal{M}_t^b\omega_{\neq}\rangle_{L^2} \end{aligned}$$

根据 Plancherel 定理有

$$
\begin{aligned}
I_{22} &= \sum_{k\neq 0}\iint (\mathcal{M}_t^b(k,\xi)-\mathcal{M}_t^b(k,\xi-\eta))\hat{u}(0,\eta)ik\hat{\omega}(k,\xi-\eta)\mathcal{M}_t^b(k,\xi)\overline{\hat{\omega}(k,\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
&= -\sum_{k\neq 0}\iint (\mathcal{M}_t^b(k,\xi)-\mathcal{M}_t^b(k,\xi-\eta))\frac{1}{\eta}\hat{\omega}(0,\eta)k\hat{\omega}(k,\xi-\eta)\mathcal{M}_t^b\overline{\hat{\omega}(k,\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

再由 Taylor 公式

$$
|\mathcal{M}_t^b(k,\xi)-\mathcal{M}_t^b(k,\xi-\eta)|\leq \int_0^1 |\partial_\xi \mathcal{M}_t^b(k,\xi-s\eta)||\eta|\mathrm{ds}.
$$

利用 $\mathcal{M}_t^b$ 的显示表达，可推导出

$$
|\partial_\xi \mathcal{M}_t^b(k,\xi)|\leq C((\frac{\nu}{|k|})^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{|k|})(1+k^2+(\xi+kt)^2)^{\frac{b}{2}}. \tag{3.13}
$$

故

$$
\begin{aligned}
|I_{22}| \leq& \sum_{k\neq 0} C(\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}+1)\iint \Big((1+k^2+(\xi+kt)^2)^{\frac{b}{2}}+(1+k^2+(\xi-\eta+kt)^2)^{\frac{b}{2}}\Big) \\
&\times |\hat{\omega}(0,\eta)||\hat{\omega}(k,\xi-\eta)|\mathcal{M}_t^b(k,\xi)|\hat{\omega}(k,\xi)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
&\leq C\nu^{\frac{1}{3}}\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}^2+C\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
|I_2| \leq& C\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\nabla\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L^2} \\
&+C\nu^{\frac{1}{3}}\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}^2+C\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}^2 \\
\leq& C\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\nabla\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}+C\nu^{\frac{1}{3}}\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}^2 \\
&+C\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\nabla\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

I_3 的估计与 I_2 类似,记 $I_3=\langle\Lambda_t^b(\overrightarrow{u_{\neq}}\cdot\nabla\theta),\mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2}+\langle\Lambda_t^b(\overrightarrow{u_0}\cdot\nabla\theta),\mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2}=:$ $I_{31}+I_{32}$，可得如下的界

$$
\begin{aligned}
|I_3| \leq& C\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\nabla\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta\|_{L^2} \\
&+C\nu^{\frac{1}{3}}\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_0\|_{L^2}^2+C\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2} \\
\leq& C\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\nabla\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}+C\nu^{\frac{1}{3}}\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 \\
&+C\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|\nabla\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

- I_4 的估计

首先分解 $I_4=\langle\Lambda_t^b(\overrightarrow{u_{\neq}}\cdot\nabla\theta),|D_x|^{\frac23}\mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2}+\langle\Lambda_t^b(\overrightarrow{u_0}\cdot\nabla\theta),|D_x|^{\frac23}\mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2}=:$ $I_{41}+I_{42}$。I_{42} 的估计与 I_{22} 类似

$$I_{42}\le C\nu^{\frac13}\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\||D_x|^{\frac23}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2+C\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2.$$

对 I_{41}，由(3.1)知

$$\begin{aligned}|I_{41}|&\le\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b(\overrightarrow{u_{\neq}}\cdot\nabla\theta)\|_{L^2}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}\\&\le(\|\Lambda_t^b\overrightarrow{u_{\neq}}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\nabla\theta\|_{L^2}+\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\overrightarrow{u_{\neq}}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\nabla\theta\|_{L^2})\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}\\&\le(\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\nabla\theta\|_{L^2}+\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\nabla\theta\|_{L^2})\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}.\end{aligned}$$

因此我们推断

$$\begin{aligned}|I_4|\le&C\nu^{\frac13}\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\||D_x|^{\frac23}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2+C\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2\\&+C\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\nabla\theta\|_{L^2}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}\\&+C\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\nabla\theta\|_{L^2}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

- 封闭能量估计

将上界(3.10)、(3.14)、(3.15)、(3.16)代入(3.7)、(3.8)和(3.9)中，对 t 积分得

$$\begin{aligned}&\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^\infty(L^2)}^2+\nu\|\nabla\Lambda_t\omega\|_{L_t^2(L^2)}^2+\frac18\nu^{\frac13}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}^2+\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}^2\\\le&2\|\Lambda_t^0\omega^{(0)}\|_{L^2}^2+8\nu^{-\frac13}\||D_x|^{\frac23}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}^2+C_1\nu^{\frac13}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^\infty(L^2)}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}^2\\&+C_1\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}\|\nabla\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^\infty(L^2)},\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}&\|\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}^2+\nu\|\nabla\Lambda_t\theta\|_{L_t^2(L^2)}^2+\frac14\nu^{\frac13}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}^2+\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}^2\\\le&2\|\Lambda_t^0\theta^{(0)}\|_{L^2}^2+C_2\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}\|\nabla\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}\|\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}\\&+C_2\nu^{\frac13}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^\infty(L^2)}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}^2\\&+C_2\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^\infty(L^2)}\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}\|\nabla\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)},\end{aligned}\tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}&\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}^2+\nu\|\nabla|D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}^2+\frac14\nu^{\frac13}\||D_x|^{\frac23}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}^2+\|(-\Delta)^{-\frac12}|D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}^2\\\le&2\||D_x|^{\frac13}\Lambda_0^b\theta^{(0)}\|_{L^2}^2+C_3\nu^{\frac13}\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^\infty(L^2)}\||D_x|^{\frac23}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^2(L^2)}^2+C_3\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L_t^\infty(L^2)}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}^2\\&+C_3\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L_t^2(L^2)}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\nabla\theta\|_{L_t^2(L^2)}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}\\&+C_3\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\omega\|_{L_t^2(L^2)}\|\Lambda_t^b\nabla\theta\|_{L_t^2(L^2)}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

(3.17)、(3.18)和(3.19)先验估计允许我们用 Bootstrap 论证定理1.4。回顾初值假设，对充分小 ϵ 及

$$\beta \geq \frac{1}{2},\ \delta \geq \beta + \frac{1}{3},\ \alpha \geq \delta - \beta + \frac{2}{3} \tag{3.20}$$

$$\Rightarrow \|\omega^{(0)}\|_{H^b} \leq \epsilon\nu^{\beta},\ \|\theta^{(0)}\|_{H^b} \leq \epsilon\nu^{\alpha},\ \||D_x|^{\frac{1}{3}}\theta^{(0)}\|_{H^b} \leq \epsilon\nu^{\delta}. \tag{3.21}$$

为用 Bootstrap 论证，做一个 Ansatz(拟设)：对 $T \leq \infty$，(1.3)的解满足

$$\begin{aligned}&\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_T^\infty(L^2)} + \nu^{\frac{1}{2}}\|\nabla\Lambda_t^b\omega\|_{L_T^2(L^2)} + \nu^{\frac{1}{6}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L_T^2(L^2)}\\ &\qquad + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega\|_{L_T^2(L^2)} \leq C\epsilon\nu^{\beta},\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}&\|\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^\infty(L^2)} + \nu^{\frac{1}{2}}\|\nabla\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^2(L^2)} + \nu^{\frac{1}{6}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^2(L^2)}\\ &\qquad + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^2(L^2)} \leq C\epsilon\nu^{\alpha},\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}&\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^\infty(L^2)} + \nu^{\frac{1}{2}}\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^2(L^2)} + \nu^{\frac{1}{6}}\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^2(L^2)}\\ &\qquad + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_T^2(L^2)} \leq \tilde{C}\epsilon\nu^{\delta}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

可证(3.22)、(3.23)和(3.24)在 $C, \tilde{C}$ 分别被 $\frac{C}{2}, \frac{\tilde{C}}{2}$ 取代时仍成立。事实上在(3.17)、(3.18)和(3.19)中插入初值条件(3.21)和 ansatz(3.22)、(3.23)和(3.24)可得

$$\begin{aligned}&\|\Lambda_t^b\omega\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \nu\|\nabla\Lambda_t^b\omega\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \frac{1}{8}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L_T^2(L^2)}^2\\ \leq& 2\epsilon^2\nu^{2\beta} + 8\tilde{C}^2\epsilon^2\nu^{2\delta-\frac{2}{3}} + C_1C^3\epsilon^3(\nu^{3\beta} + \nu^{3\beta-\frac{1}{2}}),\\ &\|\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \nu\|\nabla\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_T^2(L^2)}^2\\ \leq& 2\epsilon^2\nu^{2\alpha} + C_2C^3\epsilon^3(2\nu^{\beta+2\alpha-\frac{1}{2}} + \nu^{\beta+2\alpha}),\\ &\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \nu\|\nabla|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L_T^2(L^2)}^2\\ &+ \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L_T^2(L^2)}^2 \leq 2\epsilon^2\nu^{2\delta} + C_3C\tilde{C}\epsilon^3(1\tilde{C}\nu^{\beta+2\delta} + \frac{C}{\tilde{C}}\nu^{\beta+2\alpha-\frac{1}{3}} + 2C\nu^{\beta+\alpha+\delta-\frac{2}{3}}).\end{aligned}$$

调用(3.20)并取 $\tilde{C} \geq 8,\ C \geq 32\tilde{C},\ \epsilon = \min\left(\frac{1}{128C_1C}, \frac{1}{128C_2C}, \frac{\tilde{C}}{64C_3C}\right)$，则不等式(3.22)和(3.23)在 C 替换成 $\frac{C}{2}$、(3.24)在 $\tilde{C}$ 被替换成 $\frac{\tilde{C}}{2}$ 时分别成立。 □

4 Proof of 定理1.5

取 $\sigma=0$ 得仅有垂直耗散系统

$$\begin{cases}\partial_t\omega+y\partial_x\omega+(\overrightarrow{u}\cdot\nabla)\omega=\nu\partial_{yy}\omega+\partial_x\theta,\\ \partial_t\theta+y\partial_x\theta+(\overrightarrow{u}\cdot\nabla)\theta=\nu\partial_{yy}\theta,\\ \overrightarrow{u}=-\nabla^{\perp}(-\Delta)^{-1}\omega,\\ \omega(x,0)=\omega^{(0)},\theta(x,0)=\theta^{(0)}.\end{cases}$$

因缺乏水平耗散，而 Fourier 乘子与完全耗散时相同，但非线性变得难以控制。下面结合各种技术：分解水平零模态和非零模态、对切换导数应用交换子估计、将频率空间划分为不同子域方便消去和获得导数分布。

Proof of 定理1.5. 将 Λ_t^b 作用于垂直耗散系统，由 Λ_t^b 与 $\partial_t+y\partial_x$ 可交换得

$$\begin{cases}\partial_t\Lambda_t^b\omega+y\partial_x\Lambda_t^b\omega-\nu\partial_{yy}\Lambda_t^b\omega+\Lambda_t^b((\overrightarrow{u}\cdot\nabla)\omega)=\partial_x\Lambda_t^b\theta,\\ \partial_t\Lambda_t^b\theta+y\partial_x\Lambda_t^b\theta-\nu\partial_{yy}\Lambda_t^b\theta+\lambda_t^b((\overrightarrow{u}\cdot\nabla)\theta)=0.\end{cases}\tag{4.1}$$

分别用 $\mathcal{M}\Lambda_t^b\omega$、$\mathcal{M}\Lambda_t^b\theta$ 及 $\mathcal{M}|D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta$ 与 $(4.1)_1,(4.1)_2,(4.1)_2$ 作 L^2 内积，所得仅与(3.4)、(3.3)和(3.5)相差各式耗散项中 ∇ 换成 D_y，例如 $2\nu\|\nabla\mathcal{M}_t^b\omega\|\to 2\nu\|D_y\mathcal{M}_t^b\omega\|$。同样用

$$2\nu|\xi|^2\mathcal{M}(k,\xi)+k\partial_\xi\mathcal{M}(k,\xi)\geq\nu|\xi|^2+\frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{|\xi|^2+k^2}.$$

可得

$$2\nu\|D_y\sqrt{\mathcal{M}}f\|_{L^2}^2+\langle(k\partial_\xi\mathcal{M})(D)f,f\rangle_{L^2}\geq\nu\|D_yf\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}f\|_{L^2}^2+\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f_{\neq}\|_{L^2}^2.$$

代入能量表达式，产生与定理1.4一样的四项待估计右端项

$$I_1:=\langle\partial_x\Lambda_t^b\theta,\mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2},\qquad I_2:=\langle\Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\omega),\mathcal{M}\Lambda_t^b\omega\rangle_{L^2},$$
$$I_3:=\langle\Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta),\mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2},\qquad I_4:=\langle\Lambda_t^b(\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta),|D_x|^{\frac{2}{3}}\mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2}.$$

由 $\mathcal{M}$ 的 L^2 有界性直接有

$$\begin{aligned}|I_1|&\leq\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}\\&\leq\frac{1}{32}\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega\|_{L^2}^2+8\nu^{-\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.2}$$

I_2, I_3 结构相同,同样分解 $\overrightarrow{u}\cdot\nabla\theta = u_0\partial_x\theta + \partial_y(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq}\partial_x\theta - \partial_x(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq}\partial_y\theta$,故 I_3 分解为

$$
\begin{aligned}
I_3 = &-\langle\Lambda_t^b(\partial_x(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq}\partial_y\theta), \mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2} + \langle\Lambda_t^b(u_0\partial_x\theta), \mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2} \\
&+ \langle\Lambda_t^b(\partial_y(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq}\partial_x\theta), \mathcal{M}\Lambda_t^b\theta\rangle_{L^2} =: I_{31} + I_{32} + I_{33}.
\end{aligned}
$$

直接有

$$
\begin{aligned}
I_{31} &\le \|\Lambda_t^b(\partial_x(-\Delta)^{-1}\omega_{\neq}\partial_y\theta)\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta\|_{L^2} \\
&\le \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|D_y\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

I_{32}, I_{33} 的估计则要仔细得多,因为水平方向只有 $\frac{1}{3}$ 阶导数的增强耗散,不足以直接控制 $\partial_x\theta$。同样用 $\theta = \theta_0 + \theta_{\neq}$、$\theta_0$ 独立于 x,有消去关系

$$
\langle\mathcal{M}_t^b(u_0\partial_x\theta_{\neq}), \mathcal{M}_t^b\theta_0\rangle_{L^2} = 0 = \langle u_0\partial_x(\mathcal{M}_t^b\theta_{\neq}), \mathcal{M}_t^b\theta_{\neq}\rangle_{L^2}.
$$

故用 Plancherel 定理可写

$$
\begin{aligned}
I_{32} =& \langle\mathcal{M}_t^b(u_0\partial_x\theta_{\neq}) - u_0\partial_x(\mathcal{M}_t^b\theta_{\neq}), \mathcal{M}_t^b\theta_{\neq}\rangle_{L^2} \\
=& -\sum_{k\neq 0}\iint(\mathcal{M}_t^b(k,\xi) - \mathcal{M}_t^b(k,\xi-\eta))\frac{1}{\eta}\hat{\omega}(0,\eta)k\hat{\theta_{\neq}}(k,\xi-\eta)\mathcal{M}_t^b(k,\xi)\overline{\hat{\theta_{\neq}}(k,\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
\le& \sum_{k\neq 0}C(\nu^{\frac{1}{3}}|k|^{\frac{2}{3}} + 1)\iint(\Lambda_t^b(k,\xi-\eta) + \Lambda_t^b(0,\eta))|\hat{\omega}(0,\eta)||\hat{\theta_{\neq}}(k,\xi-\eta)|\Lambda_t^b(k,\xi)|\hat{\theta_{\neq}}(k,\xi)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
\lesssim& \left(\nu^{\frac{1}{3}}\|\hat{\omega_0}\|_{L^1}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2 + \nu^{\frac{1}{3}}\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\|\widehat{|D_x|^{\frac{1}{3}}\theta_{\neq}}\|_{L^1}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\right) \\
&+ \left(\|\hat{\omega_0}\|_{L^1}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2 + \|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\|\hat{\theta_{\neq}}\|_{L^1}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\right) \\
\lesssim& \nu^{\frac{1}{3}}\|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}^2 + \|\Lambda_t^b\omega_0\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

这里可看出算子 $\mathcal{M}_t^b$ 的差形式把 $\partial_x \sim |k|$ 次数降去了 $\frac{1}{3}$。若无此作差,则难以借用中值定理 (or Taylor 展开) 与 $\partial_\xi\mathcal{M}_t^b, \partial_k\mathcal{M}_t^b$ 产生联系。同样利用消去关系 $\langle\overrightarrow{u_{\neq}}\cdot\nabla(\mathcal{M}_t^b\theta), \mathcal{M}_t^b\theta\rangle_{L^2} = 0$ 可写

$$
I_{33} = \langle\mathcal{M}_t^b(u_{\neq}\partial_x\theta) - u_{\neq}\partial_x(\mathcal{M}_t^b\theta), \mathcal{M}_t^b\theta\rangle_{L^2} - \langle v_{\neq}\partial_y(\mathcal{M}_t^b\theta), \mathcal{M}_t^b\theta\rangle_{L^2} =: J + J'.
$$

直接有

$$
|J'| \le \|v_{\neq}\|_{L^\infty}\|D_y\mathcal{M}_t^b\theta\|_{L^2}\|\mathcal{M}_t^b\theta\|_{L^2} \le \|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|D_y\Lambda_t^b\theta\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta\|_{L^2} \tag{4.5}
$$

$$
J = \langle\mathcal{M}_t^b(u_{\neq}\partial_x\theta_{\neq}) - u_{\neq}\partial_x(\mathcal{M}_t^b\theta_{\neq}), \underbrace{\mathcal{M}_t^b\theta_{\neq}}_{=:J_1} + \underbrace{\mathcal{M}_t^b\theta_0}_{=:J_2}\rangle. \tag{4.6}
$$

因 $\mathcal{M}(k,\xi),\mathcal{M}_t^b(k,\xi)$ 在 $k=0$ 处不光滑，划分频率空间

$$
A_1=\{k>0,\ k-l>0\},\qquad A_2=\{k<0,\ k-l<0\},
$$
$$
A_3=\{k>0,\ k-l<0\},\qquad A_4=\{k<0,k-l>0\}.
$$

同时 J_1 也分解成四部分：$J_{1i}:=-\sum_{(k,l)\in A_i}\cdots$，用上 Taylor 公式

$$
|\partial_k\Lambda_t^b(k,\xi)|\le C\Lambda_t^{b-2}(k,\xi)(|k|+|\xi+kt||t|),\ |t|\le\frac{1}{|k|}(|\xi|+\Lambda_t^1(k,\xi))
$$
$$
\Rightarrow|\partial_k\mathcal{M}_t^b(k,\xi)|\le(\frac{1}{k}+\frac{|\xi|}{k^2})\Lambda_t^b(k,\xi),\ \forall k>0
$$
$$
|\mathcal{M}_t^b(k,\xi)-\mathcal{M}_t^b(k-l,\xi-\eta)|\le\int_0^1|\partial_\xi\mathcal{M}_t^b(k-sl,\xi-s\eta)||\eta|\mathrm{ds}+\int_0^1|\partial_\mathrm{k}\mathcal{M}_\mathrm{t}^\mathrm{b}(\mathrm{k}-\mathrm{sl},\xi-\mathrm{s}\eta)||\mathrm{l}|\mathrm{ds}
$$
$$
=\int_0^1(\frac{\nu^{\frac13}|\eta|}{(k-sl)^{\frac13}}+\frac{|\eta|+|l|}{k-sl}+\frac{|\xi-s\eta||l|}{(k-sl)^2})\Lambda_t^b(k-sl,\xi-s\eta)\mathrm{ds}
$$
$$
\lesssim(\frac{\nu^{\frac13}|\eta|}{\min(k-l,k)^{\frac13}}+\frac{|\eta|+|l|}{\min(k-l,k)}+\frac{(|\xi|+|\xi-\eta|)|l|}{(k-l)k})(\Lambda_t^b(k-l,\xi-\eta)+\Lambda_t^b(l,\eta)).
$$

由卷积不等式及 $(k-l)^{\frac23}\le(k-l)^{\frac13}k^{\frac13}$，$k>0,k-l>0,l>0$，类似 I_{32} 的(4.4)式有

$$
\begin{aligned}
|J_{11}^{(1)}|\lesssim&\sum_{\substack{(k,l)\in A_1\\ l>0}}\iint(\nu^{\frac13}(k-l)^{\frac23}+1+\frac{|\xi|+|\xi-\eta|}{(l^2+\eta^2)^{\frac12}})(\Lambda_t^b(k-l,\xi-\eta)+\Lambda_t^b(l,\eta))\\
&\times|\hat{\omega_{\neq}}(l,\eta)\hat{\theta_{\neq}}(k-l,\xi-\eta)\Lambda_t^b(k,\xi)\hat{\theta_{\neq}}(k,\xi)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\
\lesssim&\|\hat{\omega_{\neq}}\|_{L^1}(\nu^{\frac13}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2+\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2)+\|(-\Delta)^{-\frac12}\omega_{\neq}\|_{L^1}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|D_y\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\\
&+\|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}(\nu^{\frac13}\|\widehat{|D_x|^{\frac13}\theta_{\neq}}\|_{L^1}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}+\|\hat{\theta_{\neq}}\|_{L^1}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2})\\
&+\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}(\|\hat{\theta_{\neq}}\|_{L^1}\|D_y\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}+\|\widehat{D_y\theta_{\neq}}\|_{L^1}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2})\\
\lesssim&\|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac13}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2+\|(-\Delta)^{-\frac12}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|D_y\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

而当 $k\ge1,l<0$ 时有不等式

$$
\frac{k-l}{k^{\frac13}}\le\min((k-l)^{\frac13}k^{\frac13}+(k-l)^{\frac13}|l|^{\frac23},2(k-l)^{\frac23}|l|^{\frac13}),
$$
$$
\frac{k-l}{k}\le2\min((k-l)^{\frac13}|l|^{\frac23},(k-l)^{\frac23}|l|^{\frac13}).
$$

使用 $\|\widehat{|D_x|^{\frac{2}{3}}\omega_{\neq}}\|_{L^1} \le \||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}$，$\forall b > \dfrac{4}{3}$ 有

$$
\begin{aligned}
|J_{11}^{(2)}| \lesssim & \sum_{\substack{(k,l)\in A_1 \\ l<0}} \iint \Big((\nu^{\frac{1}{3}}(k-l)^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}} + |\xi| + |\xi-\eta|)(\Lambda_t^b(k-l,\xi-\eta) + \Lambda_t^b(l,\eta)) \\
& \quad + (k-l)^{\frac{1}{3}}|l|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b(k-l,\xi-\eta) + (k-l)^{\frac{2}{3}}|l|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b(l,\eta) \Big) \\
& \quad \times |\hat{\omega_{\neq}}(l,\eta)\hat{\theta_{\neq}}(k-l,\xi-\eta)\Lambda_t^b(k,\xi)\hat{\theta_{\neq}}(k,\xi)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
\lesssim & \|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}(\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|D_y\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}) + \||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

可得 J_{11} 估计，J_{12} 同理。

$$
\begin{aligned}
J_{11} \lesssim & \|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}(\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2 + \|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|D_y\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}) \\
& + \||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

注意到 $k>0, k-l<0$ 或 $k<0, k-l>0$ 时有 $|k-l|<|l|$，可估计 J_{13}, J_{14}

$$
|J_{13}+J_{14}| \lesssim \|\hat{\omega_{\neq}}\|_{L^1}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2 + \|\hat{\theta_{\neq}}\|_{L^1}\|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2} \lesssim \|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2.
$$

至此完成 J_1 的估计

$$
\begin{aligned}
J_1 \lesssim & \|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}(\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2 + \|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|D_y\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}) \\
& + \||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

为估计 J_2，注意到 $\Lambda_t^b(0,\xi) \le C(\Lambda_t^b(l,\eta) + \Lambda_t^b(-l,\xi-\eta))$，由 Plancherel 定理

$$
\begin{aligned}
|J_2| \lesssim & \sum_{l\neq 0} \iint (\Lambda_t^b(-l,\xi-\eta) + \Lambda_t^b(l,\eta))\frac{|l||\eta|}{l^2+\eta^2}|\hat{\omega_{\neq}}(l,\eta)\hat{\theta_{\neq}}(-l,\xi-\eta)\Lambda_t^b\hat{\theta}(0,\xi)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
\lesssim & \|\hat{\omega_{\neq}}\|_{L^1}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_0\|_{L^2} + \|\hat{\theta_{\neq}}\|_{L^1}\|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_0\|_{L^2} \\
\lesssim & \|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_0\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

综合 J_1, J_2 得

$$
\begin{aligned}
J \lesssim & \|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}(\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2 + \|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|D_y\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2} + \|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_0\|_{L^2}) \\
& + \||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

故与(4.5)一同完成 I_{33} 的估计

$$|I_{33}| \lesssim \|\Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta\|_{L^2}^2 + \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \omega\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta\|_{L^2} \|\Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2} \tag{4.7}$$

$$+ \|\Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} \|\Lambda_t^b \theta\|_{L^2} (\|D_y \Lambda_t^b \theta\|_{L^2} + \|\Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2}). \tag{4.8}$$

(4.3)、(4.4)和(4.7)知

$$|I_3| \lesssim \|\Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta\|_{L^2}^2 + \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \omega\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta\|_{L^2} \|\Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2} \tag{4.9}$$

$$+ \|\Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} \|\Lambda_t^b \theta\|_{L^2} (\|D_y \Lambda_t^b \theta\|_{L^2} + \|\Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2}). \tag{4.10}$$

I_2 的上界估计也类似

$$|I_2| \lesssim \|\Lambda_t^b \omega\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \omega\|_{L^2}^2 + \|\Lambda_t^b \omega\|_{L^2} \|\Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} \|D_y \Lambda_t^b \omega\|_{L^2}. \tag{4.11}$$

- I_4 的估计

和 I_3 估计类似，分解 I_4

$$I_4 = \underbrace{\langle \Lambda_t^b (v_{\neq} \partial_y \theta), |D_x|^{\frac{2}{3}} \mathcal{M} \Lambda_t^b \theta \rangle_{L^2}}_{I_{41}} + \underbrace{\langle \Lambda_t^b (u_0 \partial_x \theta), |D_x|^{\frac{2}{3}} \mathcal{M} \Lambda_t^b \theta \rangle_{L^2}}_{I_{42}} + \underbrace{\langle \Lambda_t^b (u_{\neq} \partial_x \theta), |D_x|^{\frac{2}{3}} \mathcal{M} \Lambda_t^b \theta \rangle_{L^2}}_{I_{43}}$$

同样有

$$\begin{aligned} I_{41} &\lesssim \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b (v_{\neq} \partial_y \theta)\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta\|_{L^2} \qquad (4.12) \\ &\lesssim (\||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b v_{\neq}\|_{L^2} \|D_y \Lambda_t^b \theta\|_{L^2} + \|\Lambda_t^b v_{\neq}\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} D_y \Lambda_t^b \theta\|_{L^2}) \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta\|_{L^2}. \end{aligned}$$

设 $\mathcal{N}_t^b = |k|^{\frac{1}{3}} \mathcal{M}_t^b$，可写 $I_{42} = \langle \mathcal{N}_t^b (u_0 \partial_x \theta_{\neq}) - u_0 \partial_x \mathcal{N}_t^b \theta_{\neq}, \mathcal{N}_t^b \theta_{\neq} \rangle_{L^2}$，其估计与 I_{32} 相似

$$|I_{42}| \lesssim \nu^{\frac{1}{3}} \|\Lambda_t^b \omega_0\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{2}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2}^2 + \|\Lambda_t^b \omega_0\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2}^2. \tag{4.13}$$

为估计 I_{43} 项，分解为

$$I_{43} = \langle \mathcal{N}_t^b (u_{\neq} \partial_x \theta) - u_{\neq} \partial_x (\mathcal{N}_t^b \theta), \mathcal{N}_t^b \theta \rangle_{L^2} - \langle v_{\neq} \partial_y (\mathcal{N}_t^b \theta), \mathcal{N}_t^b \theta \rangle_{L^2} =: K + K'.$$

其中直接有

$$\begin{aligned} |K'| &\leq \|v_{\neq}\|_{L^\infty} \|\partial_y \mathcal{N}_t^b \theta\|_{L^2} \|\mathcal{N}_t^b \theta\|_{L^2} \qquad (4.14) \\ &\lesssim \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} \|D_y |D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta\|_{L^2}. \end{aligned}$$

对 K，因 θ_0 与 x 无关，即 $K=\langle\mathcal{N}_t^b(u_{\neq}\partial_x\theta_{\neq})-u_{\neq}\partial_x(\mathcal{N}_t^b\theta_{\neq}),\mathcal{N}_t^b\theta_{\neq}\rangle_{L^2}$，用 Plancherel 定理并将 K 依频率空间划分成

$$K_i:=-\sum_{(k,l)\in A_i}\iint(\mathcal{N}_t^b(k,\xi)-\mathcal{N}_t^b(k-l,\xi-\eta))\frac{\eta(k-l)}{l^2+\eta^2}\hat{\omega_{\neq}}(l,\eta)\hat{\theta_{\neq}}(k-l,\xi-\eta)\mathcal{N}_t^b(k,\xi)overline\hat{\theta_{\neq}}(k,\xi)\mathrm{d}$$

利用 $k\neq 0$ 时

$$\begin{aligned}\partial_\xi\mathcal{N}_t^b&=|k|^{\frac{1}{3}}\partial_\xi\mathcal{M}_t^b(k,\xi)\lesssim(\nu^{\frac{1}{3}}+|k|^{-\frac{2}{3}})\Lambda_t^b(k,\xi)\\|\partial_k\mathcal{N}_t^b(k,\xi)|&=|k|^{-\frac{2}{3}}\mathcal{N}_t^b(k,\xi)+|k|^{\frac{1}{3}}|\partial_k\mathcal{M}_t^b(k,\xi)|\lesssim(|k|^{-\frac{2}{3}}+|k|^{-\frac{5}{3}}|\xi|)\Lambda_t^b(k,\xi).\end{aligned}$$

同样在 $k>0,k-l>0$ 时用 Taylor 公式

$$|\mathcal{N}_t^b(k,\xi)-\mathcal{N}_t^b(k-l,\xi-\eta)|\lesssim(\nu^{\frac{1}{3}}|\eta|+\frac{|l|+|\xi-\eta|+|\xi|+|\eta|}{\min(k-l,k)^{\frac{2}{3}}})(\Lambda_t^b(k-l,\xi-\eta)+\Lambda_t^b(l,\eta))$$

并用卷积不等式和 $k-l\leq(k-l)^{\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{3}}$，$k>0,k-l>0,l>0$ 可得

$$|K_1^{(1)}|\lesssim\|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}(\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2+\|D_y|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}).$$

另一方面对 $k>0,l<0$ 有

$$k-l\leq(k-l)^{\frac{2}{3}}(k^{\frac{1}{3}}+|l|^{\frac{1}{3}}),\ \frac{k-l}{k^{\frac{2}{3}}}\leq 2(k-l)^{\frac{2}{3}}|l|^{\frac{1}{3}},\ \frac{k-l}{k^{\frac{2}{3}}|l|}\leq 2(k-l)^{\frac{1}{3}}$$

可得 (K_2 同理)

$$\begin{aligned}|K_1^{(2)}|\lesssim&\|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}(\nu^{\frac{1}{3}}\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2+\|D_y|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2})\\&+\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}.\end{aligned}$$

为估计 K_3,K_4 项，注意到 $k>0,k-l<0$ 或 $k<0,k-l>0$ 有 $|k-l|<|l|$，故

$$\begin{aligned}|K_3+K_4|\lesssim&\sum_{(k,l)\in A_3\cup A_4}\iint((|k|^{\frac{1}{3}}+|k-l|^{\frac{1}{3}})\Lambda_t^b(k-l,\xi-\eta)+|k|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b(l,\eta))\\&\times|\hat{\omega_{\neq}}(l,\eta)\hat{\theta_{\neq}}(k-l,\xi-\eta)\mathcal{N}_t^b\hat{\theta_{\neq}}(k,\xi)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&\lesssim\|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}(\|\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}+\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2)\end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned}|K|\lesssim&\|\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}(\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}^2+\|D_y|D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2})\\&+\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\omega_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{2}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}\||D_x|^{\frac{1}{3}}\Lambda_t^b\theta_{\neq}\|_{L^2}.\end{aligned}$$

与(4.14)一起得

$$
\begin{aligned}
|I_{43}| \lesssim & \|\Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} (\||D_x|^{\frac{2}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2}^2 + \|D_y |D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2}) \\
& + \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{2}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2}. \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

由(4.12)、(4.13)和(4.15)式可完成 I_4 的估计

$$
\begin{aligned}
|I_4| \lesssim & \|\Lambda_t^b \omega\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{2}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2}^2 + \|\Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} \|D_y |D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2} \\
& + \||D_x|^{\frac{1}{3}} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} \|D_y \Lambda_t^b \theta\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta\|_{L^2} \\
& + \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{2}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2} \||D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \theta_{\neq}\|_{L^2}. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

后续与定理1.4所用 Bootstrap 论证方法一致，不再赘述。 □

注解 4.1. *文章特别提到审稿人给了一篇参考文献 [6]，其中观察到一旦有了增强耗散项的界，就可推导出两种耗散系统非零模态的显式指数收敛。以垂直耗散 $\sigma = 0$ 为例，将 ¶$_{\neq}$ 投影作用于系统(4.1)，分别作与 $\mathcal{M}\Lambda_t^b \omega_{\neq}, \mathcal{M}\Lambda_t^b \theta_{\neq}$ 的 L^2 内积，并对所得能量不等式乘上权重 $e^{2\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t}$ 可得*

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \|e^{\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} \mathcal{M}_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2}^2 + \nu \|e^{\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} D_y \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2}^2 + \|e^{\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \frac{1}{4} \nu^{\frac{1}{3}} \|e^{\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} |D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2}^2 - 2\gamma\nu^{\frac{1}{3}} \|e^{\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} \mathcal{M}_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2}^2 \\
\leq & 2e^{2\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} \Re \langle \partial_x \Lambda_t^b \theta_{\neq}, \mathcal{M}\Lambda_t^b \omega_{\neq} \rangle_{L^2} - 2e^{2\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} \Re \langle \Lambda_t^b (\overrightarrow{u} \cdot \nabla \omega)_{\neq}, \mathcal{M}\Lambda_t^b \omega_{\neq} \rangle_{L^2}
\end{aligned}
$$

$\theta_{\neq}$ 也有类似的不等式。取充分小的 $\gamma > 0$，可推断 ($\theta_{\neq}$ 也有类似的界)

$$
\begin{aligned}
& \|e^{\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^\infty(L^2)} + \nu^{\frac{1}{2}} \|e^{\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} D_y \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2(L^2)} + \nu^{\frac{1}{6}} \|e^{\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} |D_x|^{\frac{1}{3}} \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2(L^2)} \\
& \qquad + \|e^{\gamma\nu^{\frac{1}{3}}t} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \Lambda_t^b \omega_{\neq}\|_{L^2(L^2)} \lesssim \nu^{\beta}.
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] L. Brandolese and M. Schonbek, Large time decay and growth for solutions of a viscous boussinesq system, Transactions of the American Mathematical Society, 364 (2012), pp. 5057–5090.

[2] W. Deng, Pseudospectrum for oseen vortices operators, International Mathematics Research Notices, 2013 (2013), pp. 1935–1999.

[3] ——, Resolvent estimates for a two-dimensional non-self-adjoint operator., Communications on Pure & Applied Analysis, 12 (2013).

[4] W. Deng, J. Wu, and P. Zhang, Stability of couette flow for 2d boussinesq system with vertical dissipation, Journal of Functional Analysis, 281 (2021), p. 109255.

[5] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Mathematica, 119 (1967), pp. 147 – 171.

[6] K. Liss, On the sobolev stability threshold of 3d couette flow in a uniform magnetic field, Communications in Mathematical Physics, 377 (2020), pp. 859–908.

A 附录