The Note

Note of Masmoudi(et al.)'s Enhanced dissipation for 2D couette flow in critical space

Luo Zekai

Beijing Normal University

Contents

Chapter 1

Introduction

今天介绍 Masmoudi 和赵老师的文章 [1]。考虑 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 上二维不可压缩 NS 方程，涡度初值在 $H_x^{\log}L_y^2$ 中以 δ 速率趋于 -1(Couette 流 $(y,0)$ 的涡度)，文章将证明 $\delta \ll \nu^{\frac{1}{2}}$，其中 ν 是粘性系数，则 NS 的解在时间 $t \gg \nu^{-\frac{1}{3}}$ 时通过"混合增强耗散效应"，接近一个在 Couette 流附近的剪切流，并在 $t\to+\infty$ 时收敛回 Couette 流。特别地，文章给出几乎临界空间 $H_x^{\log}L_y^2 \subset L_{x,y}^2$ 上非线性增强耗散和无粘阻尼结果。[1].

§1.1 Preliminaries

$\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 上的 Littlewood-Paley 定理

令函数 $\Phi(x,y),\Phi_0(x,y)\in C^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$ 使得他们的 Fourier 变换满足

$$supp\widetilde{\Phi}\subset\{\xi=(k,\eta):\frac{3}{4}\le|\xi|\le\frac{8}{3}\},\ supp\widetilde{\Phi_0}\subset\{\xi=(k,\eta):|\xi|\le\frac{4}{3}\}$$
$$\widetilde{\Phi_0}(\xi)+\sum_{j\ge1}\widetilde{\Phi}_j(\xi)=1,\ \text{where } \widetilde{\Phi}_j(\xi):=\widetilde{\Phi}(2^{-(j-1)}\xi), j=1,2,\ldots$$

由于 $supp\widetilde{\Phi}_j(\xi)\subset[\frac{3}{4}2^{j-1},\frac{8}{3}2^{j-1}]$，知 $\frac{8}{3}2^{j-1}\le\frac{3}{4}2^{j'-1}$ 或 $\frac{3}{4}2^{j-1}\ge\frac{8}{3}2^{j'-1}$ 时，即 $|j-j'|\ge 2$ 时 $supp\widetilde{\Phi}_j\cap supp\widetilde{\Phi}_{j'}=\emptyset$.

$\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 上的 Littlewood-Paley 算子 $\Delta_j(j\ge0)$ 定义为

$$\Delta_j u:=\Phi_j * u=\int_{\mathbb{R}}\sum_k \widetilde{u}(k,\eta)\widetilde{\Phi}_j(k,\eta)e^{ikx+i\eta y}\mathrm{d}\eta.$$

引入 Bernstein 不等式

Lemma 1.1.1: Bernstein 不等式

$\mathscr{C},B$ 分别是原点为中心的环和球。存在常数 $C>0$ 使得对任意整数 $k\ge0$、任意度为 m 的光滑齐次函数 $\sigma(x)$，对任意实数 $b\ge a\ge1$ 及任意 L^a 函数 u 有

[1] 这篇文章并非开创性工作，但用简单想法 Improve 了结果

如下估计:

$$\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^b(\mathbb{R}^d)} \le C^{k+1}\lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}, \qquad supp\hat{u}\subset\lambda B,$$

$$C^{-k-1}\lambda^K\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)} \le \sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)} \le C^{k+1}\lambda^k\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}, \qquad supp\hat{u}\subset\lambda\mathscr{C},$$

$$\|\sigma(D)u\|_{L^b(\mathbb{R}^d)} \le C_{\sigma,m}\lambda^{m+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}, \qquad supp\hat{u}\subset\lambda\mathscr{C}.$$

Bernstein 不等式可得如下结果 (可理解为 $L^\infty\to L^2$，即 $b=\infty, a=2$，尺度指标为 $\lambda^{2\cdot\frac{1}{2}}=2^j$)。直接推导也能得到:

$$\begin{aligned}\|\Delta_j u\|_{L^\infty_{x,y}} &= \|\Phi_j * u\|_{L^\infty_{x,y}} \le \|\Phi_j\|_{L^2_{x,y}}\|\mathcal{F}^{-1}(\widetilde{u}\cdot 1_{supp\widetilde{\Phi}_j})\|_{L^2_{x,y}} \\ &= C2^j\left(\iint\widetilde{\Phi}(2^{-(j-1)}\xi)\mathrm{d}2^{-(\mathrm{j}-1)}\xi\right)^{\frac{1}{2}}\|\sum_{|k-j|\le 2}\Delta_k u\|_{L^2_{x,y}} \le C2^j\sum_{|k-j|\le 2}\|\Delta_k u\|_{L^2_{x,y}}.\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$\mathbb{T}$ 上的 Littlewood-Paley 定理

令函数 $\phi,\phi_0\in C^\infty(\mathbb{T})$ 使 $supp\hat{\phi}\subset\{\frac{3}{4}\le|\xi|\le\frac{8}{3}\}$，$supp\hat{\chi}\subset\{|\xi|\le\frac{4}{3}\}$ 且 $\hat{\chi}(\xi)+\sum_{j\ge 0}\hat{\phi}(2^{-j}\xi)=1$，则 $\mathbb{T}$ 上 Littlewood-Paley 算子 $\Delta_j, S_j, (j\ge 0)$ 定义为

$$\Delta_j u=(\phi_j*u)(x)=\int_{\mathbb{T}}\phi_j(x-x_1)u(x_1)\mathrm{dx}_1,\ \mathrm{j}\ge 0,\ \phi_\mathrm{j}(\mathrm{x})=2^\mathrm{j}\phi(2^\mathrm{j}\mathrm{x})$$

$$S_j u=\sum_{l=-1}^{j-1}\Delta_l u=(\chi_j*u)(x),\ \Delta_{-1}u=(\chi*u)(x),\ \|\chi_j\|_{L^2}\le C2^{\frac{j}{2}}.$$

进一步，有 Bony 分解: $T_f g=\sum_{j\ge 1}S_{j-1}f\Delta_j g$，$T_g^* f=fg-T_f g=\sum_{j\ge 1}S_{j+2}g\Delta_j f$(当然也有 $fg=T_f g+T_g f+R(f,g)$)。会用到如下 Bernnstein 型不等式:

$$\|\log(e+|D_x|)T_f g\|_{L^2_x}+\|\log(e+|D_x|)T_f^* g\|_{L^2_x}\le C\|f\|_{L^\infty_x}\|\log(e+|D_x|)g\|_{L^2_x} \tag{1.1.2}$$

$$\|\log(e+|D_x|)T_f g\|_{L^2_x}\le C\|f\|_{L^2_x}\||D_x|^{\frac{1}{2}}\log(e+|D_x|)g\|_{L^2_x} \tag{1.1.3}$$

$$\|\log(e+|D_x|)T_{\partial_x f}g\|_{L^2_x}\le C\|f\|_{L^\infty_x}\|\log(e+|D_x|)\partial_x g\|_{L^2_x}. \tag{1.1.4}$$

Proof. 注意到 $supp\widehat{S_{j-1}u}\sim\{\xi||\xi|\le\frac{4}{3}2^{j-1}\}$，$supp\widehat{\Delta_j u}\sim\{\xi|\frac{3}{4}2^j\le|\xi|\le\frac{8}{3}2^j\}$，

知 $supp\widehat{S_{j-1}u\Delta_j}v \sim \{\xi|\frac{1}{12}w^j \le |\xi| \le \frac{10}{3}2^j\} = 2^j\widetilde{\mathscr{C}},\ \widetilde{\mathscr{C}} = B_{\frac{2}{3}}(0) + \mathscr{C}$。

$$\log(e+2^k) \sim k \sim \langle k\rangle$$

$$\begin{aligned}
&\|\log(e+|D_x|)T_f g\|_{L^2_x} + \|\log(e+|D_x|)T_f^* g\|_{L^2_x}\\
&\le C\left(\sum_{k\ge -1}\|\langle k\rangle\Delta_k(\sum_{j\ge 1}S_{j-1}f\Delta_j g)\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}} + C\left(\sum_{k\ge -1}\|\langle k\rangle\Delta_k(\sum_{j\ge 1}S_{j+2}f\Delta_j g)\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\left(\sum_{k\ge -1}\langle k\rangle^2\sum_{|j-k|\le 2}\sup_{j\le k+2}\|S_{j-1}f\|^2_{L^\infty_x}\|\Delta_j g\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}} + C\left(\sum_{k\ge -1}\langle k\rangle^2\sum_{|j-k|\le 2}\sup_{j\le k+2}\|S_{j+2}f\|^2_{L^\infty_x}\|\Delta_j g\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\|f\|_{L^\infty_x}\left(\sum_{k\ge -1}\langle k\rangle^2\|\Delta_k g\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|f\|_{L^\infty_x}\|\log(e+|D_x|)g\|_{L^2_x}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\log(e+|D_x|)T_f g\|_{L^2_x} &\le C\left(\sum_{k\ge -1}\|\langle k\rangle\Delta_k(\sum_{j\ge 1}S_{j-1}f\Delta_j g)\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\left(\sum_{k\ge -1}\langle k\rangle^2\sum_{|j-k|\le 2}\sup_{j\le k+2}\|S_{j-1}f\|^2_{L^\infty_x}\|\Delta_j g\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\left(\sum_{k\ge -1}\langle k\rangle^2\sum_{|j-k|\le 2}2^j\sup_{j\le k+2}\|S_{j-1}f\|^2_{L^2_x}\|\Delta_j g\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\|f\|_{L^2_x}\left(\sum_{k\ge -1}\langle k\rangle^2 2^k\|\Delta_k g\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|f\|_{L^2_x}\||D_x|^{\frac{1}{2}}\log(e+|D_x|)g\|_{L^2_x}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\log(e+|D_x|)T_{\partial_x f} g\|_{L^2_x} &\le C\left(\sum_{k\ge -1}\|\langle k\rangle\Delta_k(\sum_{j\ge 1}S_{j-1}\partial_x f\Delta_j g)\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\left(\sum_{k\ge -1}\langle k\rangle^2\sum_{|j-k|\le 2}\sup_{j\le k+2}\|S_{j-1}\partial_x f\|^2_{L^\infty_x}\|\Delta_j g\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\left(\sum_{k\ge -1}\langle k\rangle^2\sum_{|j-k|\le 2}2^{2j}\sup_{j\le k+2}\|S_{j-1}f\|^2_{L^2_x}\|\Delta_j g\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\|f\|_{L^2_x}\left(\sum_{k\ge -1}\langle k\rangle^2 2^{2k}\|\Delta_k g\|^2_{L^2_x}\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|f\|_{L^2_x}\|\log(e+|D_x|)\partial_x g\|_{L^2_x}.
\end{aligned}$$

■

泛函不等式

著名的 $\mathbb{R}$ 上 Gagliardo-Nirenberg 不等式：设 $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$，则存在常数 C 使得

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}\|\partial_y u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.5}$$

Minkowski 积分不等式: 设 $(S_1,\mu_1),(S_2,\mu_2)$ 是俩 $\sigma-finite$ 测度空间, $F(x,y)$: $S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ 可测，则对 $p>1$ 有

$$\begin{aligned}\|F\|_{L^p(\mathrm{d}\mu_2,\mathrm{L}^1(\mathrm{d}\mu_1))} &\overset{def}{=} \left(\int_{S_2}\left|\int_{S_1} F(x,y)\mathrm{d}\mu_1(\mathrm{x})\right|^p \mathrm{d}\mu_2(\mathrm{y})\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_{S_1}\left(\int_{S_2}|F(x,y)|^p \mathrm{d}\mu_2(\mathrm{y})\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\mu_1(\mathrm{x}) \overset{\mathrm{def}}{=} \|\mathrm{F}\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{d}\mu_1,\mathrm{L}^p(\mathrm{d}\mu_2))}.\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

再介绍离散 Schur 判别法, Schur 是一位俄国出生、几乎终生在德国工作的数学家、Frobenius 的学生。令 $K(j,j')$ 是 $\mathbb{N}^2$ 上非负函数且 $T(f)(j)=\sum_{j'\in\mathbb{N}}K(j,j')f(j')$，则若存在常数 $C>0$ 使核 $K(j,j')$ 满足

$$\sup_{j\geq 0}\sum_{j'\in\mathbb{N}}K(j,j')\leq C,\ sup_{j'\geq 0}\sum_{j\in\mathbb{N}}K(j,j')\leq C$$

则成立

$$\left|\sum_{j\in\mathbb{N}}T(f)(j)g(j)\right| \leq C\|f\|_{l^2}\|g\|_{l^2} \tag{1.1.7}$$

Proof. $LHS \leq \|T(f)\|_{l^2}\|g\|_{l^2}$，只需证 $\|T(f)\|_{l^2} \leq C\|f\|_{l^2}$，由 Cauchy-Schwarz

$$|T(f)(j)|^2 = \left|\sum_{j'\in\mathbb{N}}K(j,j')f(j')\right|^2 \leq \left(\sum_{j'\in\mathbb{N}}K(j,j')\right)\left(\sum_{j'\in\mathbb{N}}K(j,j')f(j')^2\right)$$

由 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_{l^2}^2 &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j'\in\mathbb{N}}K(j,j')\right)\left(\sum_{j'\in\mathbb{N}}K(j,j')f(j')^2\right) \\ &\leq \left(\sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{j'\in\mathbb{N}}K(j,j')\right)\left(\sup_{j'\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}}K(j,j')\right)\|f\|_{l^2}^2 \leq C\|f\|_{l^2}^2.\end{aligned}$$

■

§1.2 Problem and Main result

在 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 上考虑 2 维不可压 NS 方程:

$$\begin{cases}\partial_t U + U\cdot\nabla U + \nabla P - \nu\Delta U = 0, \\ \nabla\cdot U = 0, \\ U|_{t=0} = U_{in}(x,y).\end{cases} \tag{1.2.1}$$

其中 $U=(U^1,U^2)$ 表示流体速度，P 表示流体压力。设二维涡度 $\Omega=\partial_1U^2-\partial_2U^1$，满足涡度方程

$$\Omega_t+U\cdot\nabla\Omega-\nu\Delta\Omega=0. \tag{1.2.2}$$

Couette 流 $(y,0)$ 是(1.2.1)的稳定解，此时 $\Omega=-1$。作扰动 $U=(y,0)+V$，$\Omega=-1+\omega$，得差方程

$$\begin{cases}\partial_t\omega+y\partial_x\omega-\nu\Delta\omega=-V\cdot\nabla\omega,\\ V=\nabla^{\perp}(-\Delta)^{-1}\omega,\\ \omega|_{t=0}=\omega_{in}(x,y),\end{cases} \tag{1.2.3}$$

$$\begin{cases}\partial_tV+y\partial_xV-\nu\Delta V=-V\cdot\nabla V-(V_2,0),\\ \nabla\cdot V=0,\\ V|_{t=0}=V_{in}(x,y),\end{cases} \tag{1.2.4}$$

熵守恒定律 $\|\omega(t)\|_{L^2}^2+2\nu\int_0^t\|\nabla\omega(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s=\|\omega_{\mathrm{in}}\|_{\mathrm{L}^2}^2$ 可推出：若初值涡度在 L^2 上依 δ 逼近 -1，(1.2.1)的解亦将在 L^2 上依 δ 逼近 Couette 流。这篇文章关注 2 维 Couette 流的渐进稳定性。对线性化系统

$$\begin{cases}\partial_t\omega+y\partial_x\omega-\nu\Delta\omega=0,\\ \omega|_{t=0}=\omega_{in}(x,y),\end{cases} \tag{1.2.5}$$

易得 (后续会讲)$\|\omega_{\neq}\|_{L^2_{x,y}}\le C\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}e^{-c\nu t^3}$(增强耗散)和 $\|V_{\neq}\|_{L^2_{t,x,y}}\le C\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}$(无粘阻尼)，这里记号 $f_{\neq}(t,x,y)=f(t,x,y)-\frac{1}{|\mathbb{T}|}\int_{\mathbb{T}}f(t,x,y)\mathrm{d}x$。

然而非线性相互作用可能影响系统的线性行为，进而导致增强耗散和无粘阻尼对扰动的正则性和/或小性敏感。于是有个有趣的问题可从以下两种方式提出：

Problem 1.
- *给定范数 $\|\cdot\|_X(X\subset L^2)$，找一个 $\beta=\beta(X)$ 使涡度初值满足 $\|\omega_{in}\|_{L^2}\ll\nu^{\beta}$，并对 $t>0$ 关于 NS 方程(1.2.3)成立*

$$\|\omega_{\neq}\|_{L^2_{x,y}}\le C\|\omega_{in}\|_Xe^{-c\nu^{\frac{1}{3}}t}\ \textit{and}\ \|V_{\neq}\|_{L^2_{t,x,y}}\le C\|\omega_{in}\|_X, \tag{1.2.6}$$

$$\text{或弱增强耗散型估计}\ \|\omega_{\neq}\|_{L^2_{t,x,y}}\le C\nu^{-\frac{1}{6}}\|\omega_{in}\|_X. \tag{1.2.7}$$

- *给定 β，是否存在最优函数空间 $X\subset L^2$ 使若涡度初值满足 $\|\omega_{in}\|_X\ll\nu^{\beta}$，则(1.2.6)和(1.2.7)关于 NS 方程(1.2.3)成立?*

上述俩问题 (找最小的 β 或找最大函数空间 X) 是彼此相关的，因为当初值扰动充分小时，可通过标准时间加权论证得到短时正则性。

- 对 $\beta=0$, 2016 年 Berdrossian, Masmoudi 和 Vicol[2],[3] 指出若 X 取 $Gevery-m$，$m<2$ 则(1.2.7)成立

- 对 $\beta=\frac{1}{2}$，2018 年 Berdrossian, Vicol 和 Wang[4] 证明了在涡度初值的扰动在 H^s，$s>1$ 时的非线性增强耗散和无粘阻尼估计成立
- 对 $\beta=\frac{1}{3}$，2022 年 Masmoudi[5] 证明了在 Sobolev 空间 $H^s, s>40$ 时的非线性增强耗散和无粘阻尼估计保持成立

该问题也与 Couette 流的稳定性转捩问题相关，2D 情形详见 [5-7]，3D 情形详见 [8-11]。我们的主要目标是证明当涡度初值在 $H_x^{\log}L_y^2 \overset{def}{=} \{f : \|f\|_{H_x^{\log}L_y^2} \overset{def}{=} \|\log(e+|D_x|)f\|_{L^2_{x,y}} < \infty\}$ 依 $\nu^{\frac{1}{2}}$ 逼近 -1 时，非线性增强耗散和无粘阻尼估计(1.2.6)成立。主要结果如下：

Theorem 1.2.1

设 ω 是(1.2.3)的解，$\nu<1$，则 $\exists\epsilon_0>0$ 使若 $\|V_{in}\|_{L^2_{x,y}}+\|\omega_{in}\|_{H_x^{\log}L_y^2}\le\epsilon_0\nu^\beta$ 对 $\beta\ge\frac{1}{2}$ 成立，则

$$\|\omega_{\neq}(t)\|_{H_x^{\log}L_y^2}\le Ce^{-c\nu^{\frac{1}{3}}t}\|\omega_{in}\|_{H_x^{\log}L_y^2},\ \|\omega_0(t)\|_{L_y^2}\le C\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}.$$

其中 $\omega_0(t,y)=\dfrac{1}{\mathbb{T}}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\omega(t,x,y)\mathrm{dx}$，$\omega_{\neq}=\omega(\mathrm{t,x,y})-\omega_0(\mathrm{t,y})$。进一步有无粘阻尼型估计，其中 c,C 独立于 ν。

$$\int_0^{+\infty}\|V^2_{\neq}(s)\|^2_{L^\infty_{x,y}}\mathrm{ds}+\int_0^{+\infty}\||\mathrm{D_x}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{V}^2_{\neq}(s)\|^2_{\mathrm{L^2_xL^\infty_y}}\mathrm{ds}+\int_0^{+\infty}\|\partial_{\mathrm{x}}\mathrm{V}^1_{\neq}\|^2_{\mathrm{L^2_{x,y}}}\mathrm{ds}\le\mathrm{C}\|\omega_{\mathrm{in}}\|_{\mathrm{H_x^{\log}L_y^2}}.$$

经过同样论证，对 $\forall\epsilon>0$，将上述定理中 $H_x^{\log}$ 换成 H_x^ϵ 也成立，即原文推论 1.1。

通过时间加权论证，可知存在独立于 ν 的 $T>0$，使对 $\|\omega_{in}\|_{L^2}\le\epsilon_0\dfrac{\nu^{\frac{1}{2}}}{|\log(\nu)|}$，对 $t\le T$ 都有

$$\|\log(|D_x|+e)\omega(t)\|_{L^2_{x,y}}\le C\log((\nu t)^{-1}+e)\|\omega_{in}\|_{L^2}$$

进而得 $\|\log(|D_x|+e)\omega(T)\|_{L^2_{x,y}}\le C\log((\nu t)^{-1}+e)\|\omega_{in}\|_{L^2}\le C\epsilon_0\nu^{\frac{1}{2}}$。详见引理2.2.4。而对 $t\ge T$ 应用定理1.2.1，可得把前提条件换为 $\|V_{in}\|_{L^2_{x,y}}+\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}\le\epsilon_0\nu^{\frac{1}{2}}|\log(\nu)|^{-1}$，则 $H_x^{\log}$ 换为 L_x^2 也成立，即原文推论 1.2。可继续推出在 $\beta>\frac{1}{2}$ 时，X 空间可取 L^2 并成为最大空间。

定理1.2.1的证明思路是：存在时间 $t\sim\nu^{-\frac{1}{3}}$ 使对任意 $\tau\ge0$，非零模态 $\omega_{\neq}$ 的能量 $E(\tau)$ 满足 $E(t+\tau)\le\frac{1}{2}E(\tau)$，从而存在不依赖 t,τ 的常数 C 使对任意 $s\in[\tau,t+\tau]$，$E(s)\le CE(\tau)$。

作者给了一个形式的启发性论证：主要困难是控制非线性增长，有三个非线性项 $V_0^1\partial_x\omega_{\neq}$，$V^2_{\neq}\partial_y\omega_0$ 和 $V_{\neq}\cdot\nabla\omega_{\neq}$。

- 对第一项，因 $V_0^1(s)$ 的行为在 $|\tau-s|\le\nu^{-\frac{1}{3}}$(即 $t\sim\nu^{-\frac{1}{3}}$) 时与 $V_0^1(\tau)$ 类似；$\partial_x\omega_{\neq}(s)$ 在 $s\in[\tau+1,\tau+t]$ 时因增强耗散而与 $\nu^{-\frac{1}{2}}(s-\tau)^{-\frac{3}{2}}\omega_{\neq}(\tau+1)(\ge$

$\omega_{\neq}(\tau+1)$) 行为类似，而从时间 τ 到 $\tau+t$ 的非线性相互作用效应 (见(2.2.9)式) 造成了 $\nu^{-\frac{1}{2}}$ 增长。

- 对第二项，因涡度初值在 L_y^2 中，我们只能得到 $\|\partial_y\omega_0(s)\|_{L^2(\tau,\tau+t)L_y^2} \leq C\nu^{-\frac{1}{2}}$，故非线性相互作用效应依然造成了 $\nu^{-\frac{1}{2}}$ 的增长 (见(2.2.5)式)。第三项同理 ((2.2.7)-(2.2.10)式)。

然而，因 Sobolev 嵌入在 $H^1 \hookrightarrow L^\infty$ 在 2 维无效，需要额外假设涡度初值在 x 方向具有 log 型正则性 (见(2.1.7),(2.1.10)和2.1.2)。最后为抵消 $\nu^{-\frac{1}{2}}$ 增长，假设初始扰动是和 $\nu^{\frac{1}{2}}$ 同级小的。

Remark 1.2.0

x 方向上的 log 型正则性不是最优的。事实上通过类似论证，可用 $[\log(e+|D_x|)]^\gamma$ 或 $[\log(e+|D_x|)]^{\frac{1}{2}}[\log\log(e+|D_x|)]^\gamma$，$\gamma > \frac{1}{2}$ 等。

Chapter 2

enhanced dissipation and inviscid damping

§2.1 Linear result

我们考虑在 $(y,0)$ 附近的线性化 NS 系统:

$$\begin{cases} \partial_t\omega + y\partial_x\omega - \nu\Delta\omega = 0, \\ \omega|_{t=0} = \omega_{in}(x,y), \end{cases} \tag{2.1.1}$$

作 x 方向 Fourier 变换得

$$\begin{cases} \partial_t\hat{\omega} + iky\hat{\omega} - \nu(\partial_y^2 - k^2)\hat{\omega} = 0, \\ \hat{\omega}|_{t=0} = \hat{\omega}_{in}(k,y). \end{cases} \tag{2.1.2}$$

下面介绍线性化系统(2.1.2)的关键引理，描述了线性化系统的增强耗散:

Lemma 2.1.1

设 ω 是初值满足 $\int_{\mathbb{T}}\omega_{in}(x,y)\mathrm{d}x = 0$ 的线性化 NS 方程(1.2.5)的解，则存在 c, C 使对 $\forall t \geq 0$ 成立

$$\|\omega(t,x,y)\|_{H_x^{\log}L_y^2} \leq Ce^{-c\nu^{\frac{1}{3}}t}\|\omega_{in}(x,y)\|_{H_x^{\log}L_y^2}, \tag{2.1.3}$$

$$\|\nabla\omega(t,x,y)\|_{L_t^2(H_x^{\log}L_y^2)} \leq C\nu^{-\frac{1}{2}}\|\omega_{in}(x,y)\|_{H_x^{\log}L_y^2}, \tag{2.1.4}$$

$$\|\partial_x\omega(t,x,y)\|_{L_t^1(H_x^{\log}L_y^2)} \leq C\nu^{-\frac{1}{2}}\|\omega_{in}(x,y)\|_{H_x^{\log}L_y^2}, \tag{2.1.5}$$

$$\|\log(|D_x|+e)\omega(t,x,y)\|_{L_t^2L_{x,y}^\infty} \leq C\nu^{-\frac{1}{2}}\|\omega_{in}(x,y)\|_{H_x^{\log}L_y^2}. \tag{2.1.6}$$

不等式(2.1.3)是线性增强耗散，(2.1.4)和(2.1.6)是热耗散结果，(2.1.5)则使用了增强耗散与热耗散两者。

下述引理给出线性化系统的无粘阻尼估计:

Lemma 2.1.2

设 ω 是初值满足 $\int_{\mathbb{T}} \omega_{in}(x,y)\mathrm{dx}=0$ 的线性化 NS 方程(1.2.5)的解。取 ψ 为流函数，使 $V=(\partial_y\psi,-\partial_x\psi)$，$-\Delta\psi=\omega$，则对 $\forall t\geq 0$ 成立

$$\|\partial_x\psi(t,x,y)\|_{L_t^2L_{x,y}^\infty}\leq C\|\omega_{in}(x,y)\|_{H_x^{\log}L_y^2}, \tag{2.1.7}$$

$$\||D_x|^{\frac{1}{2}}\log(|D_x|+e)\partial_x\psi(t,x,y)\|_{L_t^2L_x^2L_y^\infty}\leq C\|\omega_{in}(x,y)\|_{H_x^{\log}L_y^2}, \tag{2.1.8}$$

$$\|\partial_y\partial_x\psi(t,x,y)\|_{L_t^2(H_x^{\log}L_y^2)}\leq C\|\omega_{in}(x,y)\|_{H_x^{\log}L_y^2}. \tag{2.1.9}$$

进一步由 Sobolev 嵌入得

$$\|\partial_y\psi(t,x,y)\|_{L_t^\infty L_{x,y}^\infty}\leq C\|\omega_{in}(x,y)\|_{H_x^{\log}L_y^2}. \tag{2.1.10}$$

Proof. 令 $\widetilde{\omega}(t,k,\eta)=\int_{\mathbb{R}}\hat{\omega}(t,k,y)e^{-i\eta y}\mathrm{dy}$ 是 $\hat{\omega}$ 关于 y 的 Fourier 变换，从而对(2.1.2)作用 y 方向的 Fourier 变换得

$$\begin{cases}\partial_t\widetilde{\omega}-k\partial_\eta\widetilde{\omega}+\nu(\eta^2+k^2)\widetilde{\omega}=0,\\ \widetilde{\omega}|_{t=0}=\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta).\end{cases}$$

由输运结构或特征线法 $\frac{\mathrm{dt}}{1}=\frac{\mathrm{d}\eta}{-k}$, $\frac{\mathrm{dt}}{1}=\frac{\mathrm{dx}}{y}$，看到自然变换 $C_1=\eta+kt$, $C_2=x-yt$，令 $W(t,x,y)=\omega(t,x+yt,y)$，则有

$$\begin{aligned}&\hat{W}(t,k,y)=\hat{\omega}(t,k,y)e^{ikyt}\\ \Rightarrow\ &\widetilde{W}(t,k,\eta)=\int_{\mathbb{R}}\hat{\omega}(t,k,y)e^{ikyt}e^{-i\eta y}\mathrm{dy}=\widetilde{\omega}(t,k,\eta-kt)\end{aligned}$$

易知 $\partial_t\widetilde{W}+\nu(k^2+(\eta-kt)^2)\widetilde{W}=0$，从而

$$\begin{aligned}&\widetilde{W}(t,k,\eta)=e^{-\nu(\frac{1}{3}k^2t^3-\eta kt^2+\eta^2t+k^2t)}\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta)\\ \Rightarrow\ &|\widetilde{\omega}(t,k,\eta)|=e^{-\nu(\frac{1}{3}k^2t^3+\eta kt^2+\eta^2t+k^2t)}|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|\\ &=e^{-\nu(\frac{1}{21}k^2t^3+t(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\eta+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}kt)^2+\frac{1}{8}\eta^2t+k^2t)}|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|\\ &\leq e^{-\nu(\frac{1}{21}k^2t^3+k^2t+\frac{1}{8}\eta^2t)}|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|.\end{aligned}$$

这里通过配方 $(a\eta+bkt)^2\to\begin{cases}2ab=1,\\ a^2\leq 1\ \&\ b^2\leq\frac{1}{3},\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\leq a\leq 1$，取平方平均

$a=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}+1}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ 把 ηk 交叉项去掉。由 Plancherel 定理得

$$\begin{aligned}
\|\hat{\omega}(t,k,y)\|_{L_y^2} &\le Ce^{-c\nu(k^2t^3+k^2t)}\|\hat{\omega}_{in}(k,y)\|_{L_y^2},\\
\|(\partial_y,k)\hat{\omega}(t,k,y)\|_{L_t^2L_y^2} &\le \nu^{-\frac{1}{2}}\left(\int e^{-2c\nu k^2t^3}\int \nu(k^2+\eta^2)e^{-2c\nu(k^2+\eta^2)t}|\widetilde{\omega}_{in}|^2\mathrm{d}\eta\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\nu^{-\frac{1}{2}}\|\hat{\omega}_{in}(k,y)\|_{L_y^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\log(|D_x|+e)\nabla\omega(t,x,y)\|_{L^2_{t,x,y}}\le C\nu^{-\frac{1}{2}}\|\log(|D_x|+e)\omega_{in}(x,y)\|_{L^2_{x,y}}.$$

下证(2.1.5)式：

$$\begin{aligned}
&\|\log(|D_x|+e)\partial_x\omega(t,x,y)\|_{L_t^1L_{x,y}^2}\\
\le& C\int_0^1\left(\sum_{k\neq 0}\|k\log(|k|+e)\hat{\omega}(t,k,y)\|_{L_y^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{dt}\\
&+C\int_1^T\left(\sum_{k\neq 0}\int k^2\log(|k|+e)^2e^{-\nu k^2t^3}|\widetilde{\omega}_{in}|^2\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{dt}\\
\le& C\left(\int_0^1\sum_{k\neq 0}\|k\log(|k|+e)\hat{\omega}(t,k,y)\|_{L_y^2}^2\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 1+\int_1^T\frac{C}{t^{\frac{3}{2}}\nu^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{k\neq 0}\|\log(|k|+e)\hat{\omega}_{in}(k,y)\|_{L_y^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{dt}\\
\le& C\nu^{-\frac{1}{2}}\|\log(|k|+e)\hat{\omega}_{in}(k,y)\|_{l_k^2L_y^2}
\end{aligned}$$

下证(2.1.6)式，会用到 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 上的 Littlewood-Paley 定理，回顾记号

$$\Delta_j u=\Phi_j*u=\int_{\mathbb{R}}\sum_k\widetilde{u}(k,\eta)\widetilde{\Phi}_j(k,\eta)e^{ikx+i\eta y}\mathrm{d}\eta,\ \mathrm{W(t,x,y)=\omega(t,x+yt,y)}$$

用(1.1.1)$\|\Delta_j u\|_{L^\infty_{x,y}}\le C2^j\sum_{|k-j|\le 2}\|\Delta_k u\|_{L^2_{x,y}}$ 和(1.1.7)$\left|\sum_{j\in\mathbb{N}}T(f)(j)g(j)\right|\le C\|f\|_{l^2}\|g\|_{l^2}$

得

$$
\begin{aligned}
&\|\omega(t,x,y)\|_{L^2_tL^\infty_{x,y}} \le C\|\omega(t,x+yt,y)\|_{L^2_tL^\infty_{x,y}}\\
&\le \left\|\sum_{j\ge 0}\|\Delta_j W(t,x,y)\|_{L^\infty_{x,y}}\right\|_{L^2_t} \overset{Bernstein}{\le} C\left\|\sum_{j\ge 0}2^j\|\Delta_j W(t,x,y)\|_{L^2_{x,y}}\right\|_{L^2_t}\\
&\le C\left\|\sum_{j\ge 0}2^j\|\widetilde{W}(t,k,\eta)\widetilde{\Phi}_j(k,\eta)\|_{l^2_kL^2_\eta}\right\|_{L^2_t}\\
&= C\left(\int_0^\infty\sum_{j'\ge 0}\sum_{j\ge 0}2^{j'}2^j\|\widetilde{W}(t,k,\eta)\widetilde{\Phi}_j(k,\eta)\|_{l^2_kL^2_y}(t)\|\widetilde{W}(t,k,\eta)\widetilde{\Phi}_{j'}(k,\eta)\|_{l^2_kL^2_y}(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\left(\int_0^\infty\sum_{j\ge 0}\sum_{j'\ge 0}2^j2^{j'}e^{-c\nu(2^{2j}+2^{2j'})t}\|\Delta_j\widetilde{\omega}_{in}\|_{L^2_{x,y}}\|\Delta_{j'}\widetilde{\omega}_{in}\|_{L^2_{x,y}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\left(\nu^{-1}\sum_{j\ge 0}\sum_{j'\ge 0}\frac{2^j2^{j'}}{2^{2j}+2^{2j'}}\|\Delta_j\widetilde{\omega}_{in}\|_{L^2_{x,y}}\|\Delta_{j'}\widetilde{\omega}_{in}\|_{L^2_{x,y}}\right)^{\frac{1}{2}} \le C\nu^{-\frac{1}{2}}\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}.
\end{aligned}
$$

最后的不等式用到核函数 $K(j,j')=\frac{2^j2^{j'}}{2^{2j}+2^{2j'}}$ 满足 Schur 判别

$$
\sup_{j'\ge 0}\sum_{j\ge 0}\frac{2^j2^{j'}}{2^{2j}+2^{2j'}}+\sup_{j\ge 0}\sum_{j'\ge 0}\frac{2^j2^{j'}}{2^{2j}+2^{2j'}}\le C.
$$

同样的方法论证可得

$$
\|\log(e+|D_x|)\omega(t,x,y)\|_{L^2_tL^\infty_{x,y}}\le C\nu^{-\frac{1}{2}}\|\log(e+|D_x|)\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}.
$$

■

下证引理2.1.2：

Proof. 对(2.1.8)，由于 $\widetilde{\psi}(t,k,\eta)=(k^2+\eta^2)^{-1}\widetilde{\omega}(t,k,\eta)$ 及对 x,y 都作 Fourier 变换后所得涡度不等式知 $|k\widetilde{\psi}(t,k,\eta)|\le C\dfrac{|k|}{|\eta|^2+k^2}|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|$。再由 Minkowski

积分不等式(1.1.6)知

$$
\begin{aligned}
&\||D_x|^{\frac{1}{2}}\log(|D_x|+e)\partial_x\psi(t,x,y)\|_{L_t^2L_x^2L_y^\infty} \\
&\leq \|k^{\frac{3}{2}}\log(|k|+e)\widetilde{\psi}(t,k,\eta)\|_{l_k^2L_t^2L_\eta^1} \overset{Minkowski}{\leq} \|k^{\frac{3}{2}}\log(|k|+e)\widetilde{\psi}(t,k,\eta)\|_{l_k^2L_\eta^1L_t^2} \\
&\leq C\left(\sum_{k\neq 0}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{|k|^{\frac{2}{3}}\log(|k|+e)}{|\eta|^2+k^2}\left(\int_0^T|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|^2\frac{\mathrm{d}(\eta+\mathrm{kt})}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\eta\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\sum_{k\neq 0}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{|k|\log(|k|+e)}{|\eta|^2+k^2}\|\widetilde{\omega}_{in}(k,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}\eta\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\sum_{k\neq 0}\|\log(|k|+e)\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta)\|_{L_\eta^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|\log(|D_x|+e)\omega_{in}(x,y)\|_{L_{x,y}^2}.
\end{aligned}
$$

利用(2.1.8)和如下 Sobolev 嵌入结果可得(2.1.7)式:

$$
\begin{aligned}
&\left\|f-\frac{1}{|2\pi|}\int_{\mathbb{T}}f(x)\mathrm{dx}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\
&\leq\left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{|k|\log(|k|+e)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k\neq 0}\left(\frac{1}{2\pi}e^{ikx}\int_{\mathbb{T}}|k|^{\frac{1}{2}}\log(|k|+e)f(s)e^{-iks}\mathrm{ds}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\||D_x|^{\frac{1}{2}}\log(|D_x|+e)f\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
\Rightarrow&\|\partial_x\psi\|_{L_t^2L_x^\infty L_y^\infty}\leq\||D_x|^{\frac{1}{2}}\log(|D_x|+e)\partial_x\psi\|_{L_t^2L_x^2L_y^\infty} \\
&\leq C\|\log(|D_x|+e)\omega_{in}(x,y)\|_{L_{x,y}^2}=C\|\omega_{in}(x,y)\|_{H_x^{\log}L_y^2}.
\end{aligned}
$$

下面证明(2.1.9)式,我们有:

$$
\begin{aligned}
&\||k|\log(|k|+e)\partial_y\hat{\psi}(t,k,y)\|_{L_{t,k,y}^2}\leq\||k|\log(|k|+e)i\eta\widetilde{\psi}(t,k,\eta)\|_{L_{t,x,\eta}^2} \\
&\leq C\left(\sum_{k\neq 0}\int_{\mathbb{R}}\int_0^T\left(\frac{|k|\log(|k|+e)|\eta|}{k^2+|\eta|^2}|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|\right)^2\frac{\mathrm{d}(\eta+\mathrm{kt})}{k}\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\sum_{k\neq 0}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{|k||\eta|}{k^2+|\eta|^2}\right)^2|k|^{-1}\mathrm{d}\eta\|\log(|\mathrm{k}|+\mathrm{e})\widetilde{\omega}_{\mathrm{in}}(\mathrm{k},\cdot)\|_{\mathrm{L}^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|\log(|k|+e)\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta)\|_{l_k^2L_\eta^2}.\quad\left(\overset{\eta/k=s}{=}\int_{\mathbb{R}}(\frac{s}{1+s^2})^2\mathrm{ds}\leq\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

最后由 Gagliardo-Nirenberg 不等式(1.1.5)知

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_y\hat{\psi}(t,k,y)\|_{L_t^\infty l_k^1 L_y^\infty} \overset{(1.1.5)}{\leq} \left\|\|\partial_y\hat{\psi}(t,k,y)\|_{L_y^2}^{\frac12}\|\partial_y\hat{\psi}(t,k,y)\|_{H_y^1}^{\frac12}\right\|_{L_t^\infty l_k^1}\\
\leq& C\left\||k|^{-\frac12}(\log(|k|+e))^{-1}\left\||k|\log(|k|+e)\partial_y\hat{\psi}(t,k,y)\right\|_{L_y^2}^{\frac12}\left\|\log(|k|+e)\partial_y\hat{\psi}(t,k,y)\right\|_{H_y^1}^{\frac12}\right\|_{L_t^\infty l_k^1}\\
\leq& C\left\|\||k|^{-\frac12}\log(|k|+e)^{-1}\|_{l_k^2}\left\|\|\log(|k|+e)\partial_y\hat{\psi}(t,k,y)\|_{L_y^2}^{\frac12}\right\|_{l_k^4}\left\|\|\log(|k|+e)\partial_y\hat{\psi}(t,k,y)\|_{H_y^1}^{\frac12}\right\|_{l_k^4}\right\|_{L_t^\infty}\\
\leq& C\left\|\|\log(|k|+e)\frac{|\eta|}{k^2+\eta^2}\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta)\|_{L_\eta^2}\right\|_{l_k^2}^{\frac12}\left\|\|\log(|k|+e)\frac{|\eta|^2}{k^2+\eta^2}\widetilde{\omega}_{in}(k,y)\|_{L_y^2}\right\|_{l_k^2}^{\frac12}\\
\leq& C\|\log(|k|+e)\hat{\omega}_{in}(k,y)\|_{L_{k,y}^2}.
\end{aligned}
$$

■

§2.2 Nonlinear result

对 $t>s$，令 $S(t,s)f$ 是线性方程 $\begin{cases}\partial_t\omega+y\partial_x\omega-\nu\Delta\omega=0,\\ \omega|_{t=s}=f(x,y),\end{cases}$ 的解，其中 $\int_{\mathbb{T}}f(x,y)\mathrm{dx}=0$。考虑非线性方程

$$
\begin{cases}
\partial_t\omega_{\neq}+y\partial_x\omega_{\neq}-\nu\Delta\omega_{\neq}=-\mathcal{N}_1-\mathcal{N}_2-\mathcal{N}_3,\\
\omega_{\neq}|_{t=0}=P_{\neq 0}\omega_{in}(x,y),
\end{cases}\tag{2.2.1}
$$

因 $(V_0^1\partial_x\omega_{\neq})_0=0=(V_{\neq}^2\partial_y\omega_0)_0=V_0^2$，定义

$$
(V\cdot\nabla\omega)_{\neq}(t,x,y)=\underbrace{(V_{\neq}^1\partial_x\omega_{\neq})_{\neq}+(V_{\neq}^2\partial_y\omega_{\neq})_{\neq}}_{\mathcal{N}_1}+\underbrace{V_0^1\partial_x\omega_{\neq}}_{\mathcal{N}_2}+\underbrace{V_{\neq}^2\partial_y\omega_0}_{\mathcal{N}_3}
$$

而 $\omega_0(t,y)$ 则满足

$$
\begin{cases}
\partial_t\omega_0-\nu\partial_y^2\omega_0=-(V_{\neq}^1\partial_x\omega_{\neq})_0(t,y)-(V_{\neq}^2\partial_y\omega_{\neq})_0(t,y),\\
\omega_0|_{t=0}=P_0\omega_{in}(y),
\end{cases}\tag{2.2.2}
$$

$V_0^1(t,y)$ 满足方程

$$
\begin{cases}
\partial_tV_0^1-\nu\partial_y^2V_0^1=-(V_{\neq}^1\partial_xV_{\neq}^1)_0(t,y)-(V_{\neq}^2\partial_yV_{\neq}^1)_0(t,y),\\
V_0^1|_{t=0}=P_0V_{in}^1(y).
\end{cases}\tag{2.2.3}
$$

L^2 能量估计易得熵守恒律

$$
\|\omega(t)\|_{L_{x,y}^2}^2+2\nu\int_0^t\|\nabla\omega(s)\|_{L_{x,y}^2}^2\mathrm{ds}=\|\omega_{\mathrm{in}}\|_{\mathrm{L_{x,y}^2}}^2,\tag{2.2.4}
$$

把第一项扔掉，且 $\partial_x\omega$ 因为周期边界消失，推出

$$
\int_0^t\|\partial_y\omega_{\neq}(s)\|_{L_{x,y}^2}^2\mathrm{ds}+\int_0^{\mathrm{t}}\|\partial_{\mathrm{y}}\omega_0(\mathrm{s})\|_{\mathrm{L_y^2}}^2\mathrm{ds}\leq\frac{1}{2\nu}\|\omega(0)\|_{\mathrm{L_{x,y}^2}}^2.\tag{2.2.5}
$$

我们还有 $\|e^{t\nu\partial_y^2}f\|_{L^2_{x,y}} \le \|f\|_{L^2_{x,y}}$ 以及

$$\int_s^\infty \|\partial_y e^{(t-s)\nu\partial_y^2} f\|^2_{L^2_{x,y}}\mathrm{dt} = \int_\mathrm{s}^\infty \sum_\mathrm{k}\int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-(\mathrm{t-s})\nu\eta^2}|\widetilde{\mathrm{f}}|^2\mathrm{d}\eta\frac{\mathrm{d(t-s)}\nu\eta^2}{\nu} \le \frac{1}{\nu}\|\mathrm{f}\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

$$V_0^1(t,y) = e^{t\nu\partial_y^2}V^1_{in}(y) - \int_0^t e^{(t-s)\nu\partial_y^2}\left((V^1_{\neq}\partial_x V^1_{\neq})_0(s,y) + (V^2_{\neq}\partial_y V^1_{\neq})_0(s,y)\right)\mathrm{ds}$$

$$\omega_{\neq}(\tau+t,k,y) = S(t,0)\omega_{\neq}(\tau,k,y) - \int_0^t S(t,s)(\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2+\mathcal{N}_3)(s+\tau)\mathrm{ds}.$$

定理1.2.1的证明基于 Bootstrap 论证，假设 $\|\log(|D_x|+e)\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}} + \|V_{in}\|_{L^2_{x,y}} \le \epsilon_0\nu^\beta$，且对任意 $\tau, t+\tau \in [0,T]$ 及 $t \ge 0$ 假设成立

- V_0^1 的一致有界

$$\|V_0^1(\tau)\|_{L^2_y} \le 8C_0\epsilon_0\nu^\beta; \tag{2.2.6}$$

- 增强耗散

$$\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(t+\tau)\|_{L^2_{x,y}} \le 8C_1 e^{-c_1\nu^{\frac{1}{3}}t}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}} \tag{2.2.7}$$

$$\left(\int_t^T \|\log(|D_x|+e)\nabla\omega_{\neq}(s)\|^2_{L^2_{x,y}}\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}} \le 8C_2\nu^{-\frac{1}{2}}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}} \tag{2.2.8}$$

$$\int_\tau^T \|\log(|D_x|+e)\partial_x\omega_{\neq}\|_{L^2_{x,y}}\mathrm{ds} \le 8\mathrm{C}_3\nu^{-\frac{1}{2}}\|\log(|\mathrm{D_x}|+\mathrm{e})\omega_{\neq}(\tau)\|_{\mathrm{L^2_{x,y}}} \tag{2.2.9}$$

$$\left(\int_\tau^T \|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(s)\|^2_{L^\infty_{x,y}}\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}} \le 8C_4\nu^{-\frac{1}{2}}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}. \tag{2.2.10}$$

- 无粘阻尼

$$\left(\int_\tau^T \|V^2_{\neq}(s)\|^2_{L^\infty_{x,y}}\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}} \le 8C_5\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}, \tag{2.2.11}$$

$$\left(\int_\tau^T \||D_x|^{\frac{1}{2}}\log(|D_x|+e)V^2_{\neq}(s)\|^2_{L^2_x L^\infty_y}\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}} \le 8C_6\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}, \tag{2.2.12}$$

$$\left(\int_\tau^T \|\log(|D_x|+e)\partial_x V^1_{\neq}(s)\|^2_{L^2_{x,y}}\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}} \le 8C_7\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}. \tag{2.2.13}$$

- $V^1_{\neq}$ 的一致有界

$$\sup_{s\in[\tau,T)}\|V^1_{\neq}(s)\|_{L^\infty_{x,y}} \le 8C_8\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}. \tag{2.2.14}$$

这些假设分别来自线性部分的引理2.1.1和2.1.2扩展的拟设。常数 c_1, ϵ_0, $C_k \geq 1, k = 0, 1, 2, ..., 8$ 待定。分别令 $t = \tau, \tau = 0$ 代入(2.2.7)得

$$\|\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}} \leq \|\log(|D_x| + e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}} \leq 8C_1\epsilon_0\nu^{\beta}. \tag{2.2.15}$$

Proposition 2.2.1

令 $\beta \geq \frac{1}{2}$，设 $\|\omega_{in}\|_{H^{\log}_x L^2_y} + \|V_{in}\|_{L^2_{x,y}} \leq \epsilon_0\nu^{\beta}$，并对某 $T > 0$，估计(2.2.6)-(2.2.14)在 $[0, T]$ 上都成立，则存在 ν_0 使对只依赖 $c_1, C_k(k = 0, ..., 8)$(特别地，独立于 t) 且充分小 $\nu < \nu_0$ 和 ϵ_0，以上拟设在把右式的 8 换成 4 依然成立。

该命题经标准的 Bootstrap 论证可推出定理1.2.1。下证命题2.2.1，先给出一些引理：

Lemma 2.2.1

在 Bootstrap 假设(2.2.6)和(2.2.7)成立的前提下，存在独立于 $C_1, c_1, \epsilon_0, \nu$ 的常数 M_1 使得

$$\|V^1_0(t)\|_{L^2_y} \leq M_1\|V_{in}\|_{L^2_{x,y}} + M_1\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}\epsilon_0\nu^{\beta-\frac{1}{3}}C_1/c_1.$$

Proof. 根据 V^1_0 的表达式与拟设中的一致有界估计有

$$\begin{aligned}\|V^1_0(t)\|_{L^2_y} &\leq \|e^{t\nu\partial^2_y}V^1_{in}(0)\|_{L^2_y} + \left\|\int_0^t e^{(t-s)\nu\partial^2_y}((V^1_{\neq}\partial_x V^1_{\neq})_0 + (V^2_{\neq}\partial_y V^1_{\neq})_0)\mathrm{ds}\right\|_{L^2_y} \\ &\overset{Minkowski+Plancherel}{\leq} C\|V_{in}\|_{L^2_{x,y}} + \|(V_{\neq}\cdot\nabla V^1_{\neq})_0\|_{L^1_t L^2_y}\end{aligned}$$

由 0 模态有 $\|(V_{\neq}\cdot\nabla V^1_{\neq})_0\|_{L^2_y} \leq \|V_{\neq}\|_{L^2_x L^\infty_y}\|\nabla V^1_{\neq}\|_{L^2_{x,y}} \leq \|\omega_{\neq}\|^2_{L^2_{x,y}}$、Bootstrap 假设(2.2.7)($\tau = 0, t = s$)、(2.2.15)和熵守恒律(2.2.4)得

$$\begin{aligned}\|(V_{\neq}\cdot\nabla V^1_{\neq})_0\|_{L^1_t L^2_y} &\leq C\int_0^t \|\omega_{\neq}(s)\|^2_{L^2_{x,y}}\mathrm{ds} \leq \mathrm{C}\int_0^{\mathrm{t}} \|\omega_{\mathrm{in}}\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{x,y}}} 8\mathrm{C}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{c}_1\nu^{\frac{1}{3}}\mathrm{s}}\|\omega_{\neq}(0)\|_{\mathrm{H}^{\log}_{\mathrm{x}}\mathrm{L}^2_{\mathrm{y}}}\mathrm{ds} \\ &\leq 8C\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}\epsilon_0\nu^{\beta-\frac{1}{3}}C_1/c_1.\end{aligned}$$

∎

Lemma 2.2.2

在 Bootstrap 假设(2.2.6)-(2.2.14)成立的前提下，存在独立于 $C_k(k = 0, ..., 8), \epsilon_0, \nu$

的常数 M_2 使对 $\forall t,\tau>0,t+\tau<T$ 成立

$$\sum_{k=1}^{3}\|\log(|D_x|+e)\mathcal{N}_k(s+\tau)\|_{L^1_s([0,t];L^2_{x,y})}$$
$$\le M_2\epsilon_0\nu^{\beta-\frac12}C_1(C_2C_5+C_6C_2+C_2C_0^{\frac12}+C_4C_7+C_3C_8)\|\log(|D_x|+e)\omega(\tau)\|_{L^2_{x,y}}.$$

Proof. 回顾 $\mathbb{T}$ 上的 Littlewood-Paley 定理和 Bony 分解，分解 $\mathcal{N}_1=V^1_{\neq}\partial_x\omega_{\neq}+V^2_{\neq}\partial_y\omega_{\neq}$ 为四项 $(T_{\partial_x\omega_{\neq}}V^1_{\neq}+T^*_{V^1_{\neq}}\partial_x\omega_{\neq})+(T^*_{V^2_{\neq}}\partial_y\omega_{\neq}+T_{\partial_y\omega_{\neq}}V^2_{\neq})$，进而

$$\begin{aligned}
&\|\log(|D_x|+e)\mathcal{N}_1(s+\tau)\|_{L^1_s([0,t],L^2_{x,y})}=\int_0^t\|\log(|D_x|+e)\mathcal{N}_1(s+\tau)\|_{L^2_{x,y}}\mathrm{ds}\\
\le& C\|\log(|D_x|+e)T_{\partial_x\omega_{\neq}}V^1_{\neq}\|_{L^1_s([0,t];L^2_{x,y})}+C\|\log(|D_x|+e)T^*_{V^1_{\neq}}\partial_x\omega_{\neq}\|_{L^1_s([0,t];L^2_{x,y})}\\
&+C\|\log(|D_x|+e)T^*_{V^2_{\neq}}\partial_y\omega_{\neq}\|_{L^1_s([0,t];L^2_{x,y})}+C\|\log(|D_x|+e)T_{\partial_y\omega_{\neq}}V^2_{\neq}\|_{L^1_s([0,t];L^2_{x,y})}\\
=:&N_{1,1}+N_{1,2}+N_{1,3}+N_{1,4}.
\end{aligned}$$

由(1.1.4)$\|T_{\partial_x f}g\|_{H^{\log}_x}\le C\|f\|_{L^\infty_x}\|\partial_x g\|_{H^{\log}_x}$ 及 Bootstrap 假设(2.2.10)、(2.2.13)和(2.2.15)得

$$\begin{aligned}
N_{1,1}&\overset{(1.1.4)}{\le}C\|\log(|D_x|+e)\partial_xV^1_{\neq}(s+\tau)\|_{L^2_s([0,t],L^2_{x,y})}\|\omega_{\neq}(s+\tau)\|_{L^2_s([0,t];L^\infty_{x,y})}\\
&\overset{(2.2.13)+(2.2.10)}{\le}CC_7C_4\nu^{-\frac12}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|^2_{L^2_{x,y}}\\
&\overset{(2.2.15)}{\le}CC_1C_7C_4\epsilon_0\nu^{\beta-\frac12}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}.
\end{aligned}$$

由(1.1.2)$\|T^*_fg\|_{H^{\log}_x}\le C\|f\|_{L^\infty_x}\|g\|_{H^{\log}_x}$ 及 Bootstrap 假设(2.2.9)和(2.2.14)得

$$\begin{aligned}
N_{1,2}&\overset{(1.1.2)}{\le}C\|V^1_{\neq}(s+\tau,\beta,y)\|_{L^\infty_sL^\infty_{x,y}}\|\log(|D_x|+e)\partial_x\omega_{\neq}(s+\tau)\|_{L^1_s([0,t];L^2_{x,y})}\\
&\overset{(2.2.14)+(2.2.9)}{\le}C\epsilon_0\nu^{\beta-\frac12}C_1C_8C_3\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}.
\end{aligned}$$

由(1.1.2)$\|T^*_fg\|_{H^{\log}_x}\le C\|f\|_{L^\infty_x}\|g\|_{H^{\log}_x}$ 及 Bootstrap 假设(2.2.8)和(2.2.11)得

$$\begin{aligned}
N_{1,3}&\overset{(1.1.2)}{\le}C\|V^2_{\neq}(s+\tau)\|_{L^2_s([0,t];L^\infty_{x,y})}\|\log(|D_x|+e)\partial_y\omega_{\neq}(s+\tau)\|_{L^2_s([0,t];L^2_{x,y})}\\
&\overset{(2.2.11)+(2.2.8)}{\le}C\epsilon_0\nu^{\beta-\frac12}C_1C_5C_2\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}.
\end{aligned}$$

由(1.1.3)$\|T_fg\|_{H^{\log}_x}\le C\|f\|_{L^2_x}\||D_x|^{\frac12}\log(|D_x|+e)g\|_{L^2_x}$ 及 Bootstrap 假设(2.2.8)和(2.2.12)得

$$\begin{aligned}
N_{1,4}&\overset{(1.1.3)}{\le}C\||D_x|^{\frac12}\log(|D_x|+e)V^2_{\neq}(s+\tau)\|_{L^2_s([0,t];L^2_xL^\infty_y)}\|\partial_y\omega_{\neq}\|_{L^2_s([0,t];L^2_{x,y})}\\
&\overset{(2.2.12)+(2.2.8)}{\le}C\epsilon_0\nu^{\beta-\frac12}C_1C_6C_2\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}.
\end{aligned}$$

这里仅在 $N_{1,2},N_{1,3}$ 处用到 log 型不等式，因为 $V_{\neq}$ 是关于 x 的频率较低部分 (意味着正则性较低)，需要 $L^\infty_{x,y}$ 范数控制 $V_{\neq}$。对 $N_{1,2}$ 我们使用增强耗散结果，$N_{1,3}$ 的估计则用到了无粘阻尼结果，$\mathcal{N}_1$ 估计完成。

下面估计 $\mathcal{N}_2$,0 模态和涡度关于 t 递减有 $\forall\tau<t$ 时 $\|\omega_0(t,y)\|_{L^2_y}\le\|\omega(t,x,y)\|_{L^2_{x,y}}\le\|\omega(\tau,x,y)\|_{L^2_{x,y}}$ 及 Bootstrap 假设(2.2.6)和(2.2.9)得

$$
\begin{aligned}
&\|\log(|D_x|+e)\mathcal{N}_2(s+\tau)\|_{L^1_s([0,t];L^2_{x,y})}\\
&\le C\int_0^t\|V_0^1(s+\tau,y)\|_{L^\infty_{x,y}}\|\log(|D_x|+e)\partial_x\omega_{\neq}(s+\tau)\|_{L^2_{x,y}}\mathrm{ds}\\
&\overset{\text{Sobolev 嵌入}}{\le} C\|V_0^1(\cdot+\tau,y)\|^{\frac12}_{L^\infty_tL^2_y}\|\partial_yV_0^1(\cdot+\tau)\|^{\frac12}_{L^\infty_tL^2_y}\|\log(|D_x|+e)\partial_x\omega_{\neq}(s+\tau,x,y)\|_{L^1_s([0,t];L^2_{x,y})}\\
&\overset{fact}{\le} C\|V_0^1(\tau,y)\|^{\frac12}_{L^2_y}\|\omega_{in}(x,y)\|^{\frac12}_{L^2_{x,y}}\|\log(|D_x|+e)\partial_x\omega_{\neq}(s+\tau,x,y)\|_{L^1_s([0,t];L^2_{x,y})}\\
&\overset{\text{初始假设}+(2.2.6)+(2.2.9)}{\le} CC_0^{\frac12}C_2\epsilon_0\nu^{\beta-\frac12}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau,x,y)\|_{L^2_{x,y}}.
\end{aligned}
$$

最后处理 $\mathcal{N}_3$，利用 Bootstrap 假设 (2.2.12) 及关于 0 模态的事实得

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_y\omega_0(s+\tau,\cdot)\|_{L^2_s([0,t],L^2_y)}\le\|\partial_y\omega(s+\tau,x,y)\|_{L^2_s([0,t];L^2_{x,y})}\le C\nu^{-\frac12}\|\omega_{in}(\tau,x,y)\|_{L^2_{x,y}},\\
&\|\log(|D_x|+e)\mathcal{N}_3(s+\tau)\|_{L^1_s([0,t],L^2_{x,y})}\\
&\le C\|\log(|D_x|+e)V^2_{\neq}(s+\tau,x,y)\|_{L^2_s([0,t];L^2_xL^\infty_y)}\|\partial_y\omega_0(s+\tau,y)\|_{L^2_s([0,t];L^2_{x,y})}\\
&\overset{(2.2.12)+fact}{\le} CC_6\epsilon_0\nu^{\beta-\frac12}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau,x,y)\|_{L^2_{x,y}}.
\end{aligned}
$$

■

下面证明命题2.2.1：

Proof. 在 Bootstrap 假设(2.2.6)-(2.2.14)成立的前提下，存在独立于 $C_k(k=0,...,8),\epsilon_0,\nu$ 的常数 M，使对 $\forall t,\tau>0,t+\tau<T$ 成立 (注意这里的幂从原线性解出发，而非拟设，因此用了 c)，其中 $X=\max\{C_0^{\frac12},C_2,C_3,C_4,...,C_8\}$。

$$
\begin{aligned}
&\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(t+\tau)\|_{L^2_{x,y}} \qquad (2.2.16)\\
\le&Me^{-c\nu^{\frac13}t}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}+\\
&+MC_1(\epsilon_0\nu^{\beta-\frac12}\left(C_2C_5+C_2C_6+C_2C_0^{\frac12}+C_4C_7+C_3C_8\right))\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}\\
\le&M(e^{-c\nu^{\frac13}t}+5C_1\epsilon_0\nu^{\beta-\frac12}X^2)\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}.
\end{aligned}
$$

由拟设(2.2.6)-(2.2.14)和引理2.2.2得

$$
\begin{aligned}
&\nu^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^T \|\log(|D_x|+e)\nabla\omega_{\neq}(s)\|_{L^2_{x,y}}^2 \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}+\nu^{\frac{1}{2}}\int_\tau^T \|\log(|D_x|+e)\partial_x\omega_{\neq}(s)\|_{L^2_{x,y}}\mathrm{ds}\\
&+\nu^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^T \|\omega_{\neq}(s)\|_{L^\infty_{x,y}}^2 \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_\tau^T \|V^2_{\neq}(s)\|_{L^\infty_{x,y}}^2 \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+\left(\int_\tau^T \||D_x|^{\frac{1}{2}}\log(|D_x|+e)V^2_{\neq}(s)\|_{L^2_xL^\infty_y}^2 \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_\tau^T \|\log(|D_x|+e)\partial_x V^1_{\neq}(s)\|_{L^2_{x,y}}^2 \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+\sup_{s\in[\tau,T]}\|V^1_{\neq}(s)\|_{L^\infty_{x,y}}\\
\leq&\nu^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^\infty \|\log(|D_x|+e)\nabla S(t,\tau)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}^2 \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}+\nu^{\frac{1}{2}}\int_\tau^\infty \|\log(|D_x|+e)\partial_x S(t,\tau)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}\mathrm{dt}\\
&+\nu^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^\infty \|S(t,\tau)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^\infty_{x,y}}^2 \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_\tau^\infty \|\partial_x(-\Delta)^{-1}S(t,\tau)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^\infty_{x,y}}^2 \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+\left(\int_\tau^\infty \||D_x|^{\frac{1}{2}}\log(|D_x|+e)\partial_x(-\Delta)^{-1}S(t,\tau)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_xL^\infty_y}^2 \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+\left(\int_\tau^\infty \|\log(|D_x|+e)\partial_x\partial_y(-\Delta)^{-1}S(t,\tau)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}^2 \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}+\sup_{t\in[s,\infty)}\|\partial_y(-\Delta)^{-1}S(t,\tau)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^\infty_{x,y}}\\
&+\sum_{k=1}^3\|\log(|D_x|+e)\mathcal{N}_k\|_{L^1_s([0,t];L^2_{x,y})}\\
\leq&M_3(1+\epsilon_0\nu^{\beta-\frac{1}{2}}C_1\left(C_2C_5+C_2C_6+C_2C_0^{\frac{1}{2}}+C_4C_7+C_3C_8\right))\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}\\
\leq&M_3(1+5\epsilon_0\nu^{\beta-\frac{1}{2}}C_1X^2)|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}},
\end{aligned}
$$

不失一般性，设 $M_1\leq M_3$，由引理2.2.1得

$$
\|V_0^1(t)\|_{L^2_y}\leq M_1(1+\epsilon_0\nu^{\beta-\frac{1}{3}}C_1/c_1)\epsilon_0\nu^\beta \tag{2.2.17}
$$

最后我们取定一些在 Bootstrap 论证中待定的常数，命题将在我们如下选取常数 $C_k(k=0,1,...8),\epsilon_0,c_1$ 后成立：

$$
\begin{aligned}
&C_k=\max\{M_3,1\}=X,(k=0,2,...,8);\ C_1=5\max\{M,1\},\\
&c_1=\frac{c\log 2}{\log 4M};\ \epsilon_0=10^{-2}(\max\{M_3,1\})^{-2}(\max\{M,1\})^{-2}c,\ \text{M from(2.2.16)}.
\end{aligned}
$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}&\nu^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^T \|\log(|D_x|+e)\nabla\omega_{\neq}(s)\|_{L^2_{x,y}}^2\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}+\nu^{\frac{1}{2}}\int_\tau^T\|\log(|D_x|+e)\partial_x\omega_{\neq}(s)\|_{L^2_{x,y}}\mathrm{ds}\\&+\nu^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^T\|\omega_{\neq}(s)\|_{L^\infty_{x,y}}^2\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_\tau^T\|V^2_{\neq}(s)\|^2_{L^\infty_{x,y}}\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}\\&+\left(\int_\tau^T\||D_x|^{\frac{1}{2}}\log(|D_x|+e)V^2_{\neq}(s)\|^2_{L^2_xL^\infty_y}\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}\\&+\left(\int_\tau^T\|\log(|D_x|+e)\partial_xV^1_{\neq}(s)\|^2_{L^2_{x,y}}\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}+\sup_{s\in[\tau,T]}\|V^1_{\neq}(s)\|_{L^2_{x,y}}\\ \leq&M_3(1+5\epsilon_0\nu^{\beta-\frac{1}{2}}C_1X^2)\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}\\ \leq&4X\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}.\end{aligned}\tag{2.2.18}$$

故(2.2.8)-(2.2.14)在将各拟设右边的 8 换成 4 后依然成立。由(2.2.16)知存在 $t_0=(\log 4M)(c\nu^{\frac{1}{3}})^{-1}$，从而对 $\forall\tau,\tau+t_0\in[0,T]$ 成立

$$\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau+t_0)\|_{L^2_{x,y}}\overset{(2.2.16)}{\leq}\underbrace{M(\frac{1}{4M}+\frac{\nu^{\beta-\frac{1}{2}}c}{20C_1})}_{\leq\frac{1}{2}\ \text{if}\ c\leq 25\max\{M,1\}}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}\tag{2.2.19}$$

且对 $\forall 0<s\leq t_0$ 和 $\tau,\tau+s\in[0,T]$ 成立

$$\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau+s)\|_{L^2_{x,y}}\overset{(2.2.16)}{\leq}\underbrace{M(1+\frac{\nu^{\beta-\frac{1}{2}}c}{20C_1})}_{\leq 2M\ \text{if}\ c\leq 100\max\{M,1\}}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau+s)\|_{L^2_{x,y}}.\tag{2.2.20}$$

对 $\forall t+\tau,\tau\in[0,T]$，$t\geq 0$，用 t_0 分割 t，设 $t=nt_0+s,n=[t/t_0]\geq 0$，$s\in(0,t_0]$。因此由(2.2.19)，对 $\forall t+\tau,\tau\in[0,T]$，$t\geq 0$ 成立

$$\begin{aligned}&\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau+\tau)\|_{L^2_{x,y}}=\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(nt_0+s+\tau)\|_{L^2_{x,y}}\\&\overset{(2.2.19)}{\leq}\frac{1}{2}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}((n-1)t_0+s+\tau)\|_{L^2_{x,y}}\\&\overset{[t/t_0]-1\text{次}(2.2.19)}{\leq}\frac{1}{2^{[t/t_0]}}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau+s)\|_{L^2_{x,y}}\\&\overset{(2.2.20)}{\leq}\frac{M}{2^{[t/t_0]-1}}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}\ (=2Me^{-[t/t_0]\log 2}\leq 2Me^{-(t/t_0-1)\log 2})\\&\leq 2Me^{-(\log 2)\frac{t}{t_0}+1}\|\log(|D_x|+e)\omega_{\neq}(\tau)\|_{L^2_{x,y}}.\end{aligned}\tag{2.2.21}$$

由 c_1,C_1 定义，对 $\forall t>0$ 都有

$$2Me^{-\frac{\log 2}{\log 4M}c\nu^{\frac{1}{3}}t}=2Me^{-(\log 2)t/t_0+1}\leq 4\cdot 5\max\{M,1\}e^{-\frac{\log 2}{\log 4M}c\nu^{\frac{1}{3}}t}=4C_1e^{-c_1\nu^{\frac{1}{3}}t}$$

故(2.2.21)可推出将(2.2.7)右式的 8 换成 4 依然成立。最后，只要 $c \geq (375\log 2)^{-1}$，我们有

$$M_1 + M_1\epsilon_0\nu^{\beta-\frac{1}{3}}C_1/c_1 = M_1(1+10^{-2}(\max\{M_3,1\})^{-2}(5\max\{M,1\})^{-1}\nu^{\beta-\frac{1}{3}}\frac{\log 4M}{\log 2}c^{-1})$$
$$\leq X(1+\frac{1}{125}(c\log 2)^{-1}) \leq 4X = 4C_0$$

由(2.2.17)式可推出(2.2.6)右式的 8 换成 4 依然成立，证毕。 ■

下面给出局部时间的估计和粘性项的正则性

Lemma 2.2.3

令 $\beta = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\epsilon$，$\epsilon > 0$，设 ω 是(1.2.4)的解，其初值 ω_{in} 满足 $\|\omega_{in}\|_{L^2} \leq \nu^\beta$，则存在独立于 ν 的 $T > 0$ 使对 $\forall t \leq T$ 成立

$$\||D|^\epsilon\omega(t)\|_{L^2_{x,y}} \leq C(t\nu)^{-\epsilon/2}\|\omega_{in}\|_{L^2}.$$

Proof. 回顾线性方程,知若 ω 有初值 ω_{in} 且为线性方程的解,则 $\omega(t)$ 满足 $|\widetilde{\omega}(t,k,\eta)| \leq e^{-c\nu(k^2t^3+k^2t+\eta^2t)}|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|$，故得

$$\begin{aligned}
&\|(t\nu|D|^2)^{\epsilon/2}\omega(t)\|_{L^2_{x,y}} + \nu^{\frac{1}{2}}\|(t\nu|D|^2)^{\epsilon/2}\nabla\omega(t)\|_{L^2([0,\infty),L^2_{x,y})}\\
\leq& \left(\sum_k\int(t\nu)^\epsilon(k^2+\eta^2)^\epsilon e^{-2c\nu(k^2t^3+k^2t+\eta^2t)}|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|^2\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+\nu^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty\sum_k\int(t\nu)^\epsilon(k^2+\eta^2)^{\epsilon+1}e^{-2c\nu(k^2t^3+k^2t+\eta^2t)}|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|^2\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\
\leq& \left(\sum_k\int|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|^2\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^\infty t^{-1}e^{-2c\nu t^3}\sum_k\int|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|^2\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}
\end{aligned}$$

故 $\omega(t) = \widetilde{S}(t,0)\omega_{in} - \int_0^t\widetilde{S}(t,s)(V\cdot\nabla\omega)(s)\mathrm{d}s$ 且 $\|(t\nu|D|)^{\epsilon/2}\widetilde{S}(t,s)f\|_{L^2_{x,y}} \leq C\|f\|_{L^2_{x,y}}$。因为有

$$\begin{aligned}
\nu^{\frac{1}{2}}\|\nabla\omega\|_{L^2_t(L^2)} &= \nu^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\sum_k\int(k^2+\eta^2)\widetilde{\omega}_{in}^2\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \nu^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T t^{-1}\sum_k\int|\widetilde{\omega}_{in}|^2\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|\omega_{in}\|_{L^2}
\end{aligned}$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\|V\|_{L^\infty} = \|\nabla^\perp(-\Delta)^{-1}\omega\|_{L^\infty} \\
&\le \sum_k \int \|(\eta^2+k^2)^{-\frac{1}{2}}(1+k^2+\eta^2)^{-\epsilon/2}((1+k^2+\eta^2)^{\epsilon/2}\widetilde{\omega})\mathrm{d}\eta \\
&\le \|\omega\|_{H^\epsilon}\left(\sum_k \frac{1}{k^{1+2\epsilon}}\int \frac{1}{\eta'^2(1+\eta'^2)^\epsilon}\mathrm{d}\eta'\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|\omega\|_{H^\epsilon} \\
&\sup_{t\in[0,T]}\|(t\nu|D|^2)^{\epsilon/2}\omega(t)\|_{L^2_{x,y}} \\
&\le C\sup_{t\in[0,T]}\|(t\nu|D|^2)^{\epsilon/2}\widetilde{S}(t,0)\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}} + C\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t \|V\nabla\omega(s)\|_{L^2}\mathrm{ds} \\
&\le C\|\omega_{in}\|_{L^2} + \|\nabla\omega\|_{L^2_tL^2}\left(\int_0^t (s\nu)^{-\epsilon}\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}\sup_{s\in[0,T]}\|\omega(s)\|_{H^\epsilon}(s\nu)^{\epsilon/2} \\
&\le C\|\omega_{in}\|_{L^2}\left(1+T^{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}}\nu^{-\frac{\epsilon}{2}}\nu^{-\frac{1}{2}}\sup_{t\in[0,T]}\|(t\nu|D|^2)^{\epsilon/2}\omega(t)\|_{L^2_{x,y}}\right)
\end{aligned}
$$

由假设 $\|\omega_{in}\|_{L^2} \le \nu^{\frac{1+\epsilon}{2}}$,知存在 $T>0$ 使 $CT^{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \le \frac{1}{2}$,则 $\sup_{t\in[0,T]}\|(t\nu|D|^2)^{\epsilon/2}\omega(t)\|_{L^2_{x,y}} \le C\|\omega_{in}\|_{L^2}$。 ∎

Lemma 2.2.4

令 ω 有初值 ω_{in} 且是(1.2.4)的解，满足 $\|\omega_{in}\|_{L^2} \le \frac{\nu^{\frac{1}{2}}}{|\log\nu|}$，则存在独立于 ν 的 $T>0$ 使对 $\forall t\le T$ 成立

$$
\|\log(|D|+e)\omega(t)\|_{L^2_{x,y}} \le C|\log((\nu t)^{-1}+e)|\|\omega_{in}\|_{L^2}.
$$

Proof. 回顾线性方程,知 ω 有初值 ω_{in} 且是线性化方程的解,则 $\omega(t)$ 满足 $|\widetilde{\omega}(t,k,\eta)| \le e^{-c\nu(k^2t^3+k^2t+\eta^2t)}|\widetilde{\omega}_{in}(k,\eta+kt)|$。令光滑函数 χ 支在 $|k|\le(\nu t)^{-1}$,其中 $|k|\le\frac{1}{2}(\nu t)^{-1}$ 时 $\chi(k)=1$，可得

$$
\begin{aligned}
&\|\log(|D|+e)\chi(D)\omega(t)\|_{L^2} + \nu^{\frac{1}{2}}\|\log(|D|+e)\chi(D)\nabla\omega(t)\|_{L^2([0,\infty),L^2_{x,y})} \\
\le& C\log((\nu t)^{-1}+e)\left(\sum_{|k|\le(\nu t)^{-1}}\int\left(\frac{\log(e+|k|)}{\log(e+(\nu t)^{-1})}\right)^2\chi(k)^2e^{-2c\nu(k^2+\eta^2)t}|\widetilde{\omega}_{in}|^2\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+C\log((\nu t)^{-1}+e)\left(\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dt}\sum_{|\mathrm{k}|\le(\nu t)^{-1}}\int\left(\frac{\log(\mathrm{e}+|\mathrm{k}|)}{\log(\mathrm{e}+(\nu t)^{-1})}\right)^2\chi(\mathrm{k})^2\right. \\
&\left.\times[\nu(k^2+\eta^2)t]^{\frac{1}{2}}e^{-2c\nu(k^2+\eta^2)t}|\widetilde{\omega}_{in}|^2\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}} \\
\le& C|\log((\nu t)^{-1}+e)|\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}
\end{aligned}
$$

因 $\dfrac{\log(|k|+e)}{\log((t\nu)^{-1}+e)}(1-\chi(k))e^{-\nu k^2 t} \le Cke^{-k} \le C,\ \nu t \ge k^{-1}$，得

$$
\begin{aligned}
&\|\log(|D|+e)(1-\chi(D))\omega(t)\|_{L^2_{x,y}} + \nu^{\frac{1}{2}}\|\log(|D|+e)(1-\chi(D))\nabla\omega(t)\|_{L^2([0,\infty),L^2_{x,y})}\\
\le& C\log((\nu t)^{-1}+e)\left(\left(\sum_k\left\|\frac{\log(|k|+e)}{\log((\nu t)^{-1}+e)}(1-\chi(k))e^{-c\nu k^2 t}\widetilde{\omega}_{in}\right\|^2_{L^2_\eta}\right)^{\frac{1}{2}}\right.\\
&\left.+\left(\sum_k\left\|\frac{\log(|k|+e)}{\log((\nu t)^{-1}+e)}(1-\chi(k))[\nu(k^2+\eta^2)]^{\frac{1}{2}}e^{-c\nu(k^2+\eta^2)t}\widetilde{\omega}_{in}\right\|^2_{L^2_\eta L^2_t}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
\le& C\log((\nu t)^{-1}+e)\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}.
\end{aligned}
$$

考虑原方程 $\omega(t) = \widetilde{S}(t,0)\omega_{in} - \int_0^t \widetilde{S}(t,s)(V\cdot\nabla\omega)(s)\mathrm{d}s$，补充一个注解

Remark 2.2.0

设 ψ 是方程 $\Delta\psi=\omega$ 的解，则成立 $\|\nabla\psi\|_{L^\infty_{x,y}} \le C\|\omega\|_{H^{\log}_x L^2_y}$。

Proof.

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\psi\|_{L^\infty_{x,y}} &= \|\partial_y(-\Delta)^{-1}\omega\|_{L^\infty_{x,y}} \le \sum_k\int|\frac{\eta}{\eta^2+k^2}\hat{\omega}|\mathrm{d}\eta\\
&\le \left[\sum_k\int|\log(e+k)\hat{\omega}|^2\mathrm{d}\eta\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_k\frac{1}{k\log(e+k)^2}\int\frac{\eta'^2}{1+\eta'^2}\mathrm{d}\eta'\right]^{\frac{1}{2}} \le C\|\omega\|_{H^{\log}_x L^2_y}
\end{aligned}
$$

■

① $\left\|\dfrac{\log(|D|+e)}{\log([\nu(t-s)]^{-1}+e)}\widetilde{S}(t,s)f\right\|_{L^2_{x,y}} \le C\|f\|_{L^2_{x,y}}$ ② $\|\nabla\psi\|_{L^\infty_{x,y}} \le C\|\omega\|_{H^{\log}_x L^2_y}$

③$\nu^{\frac{1}{2}}\|\nabla\omega\|_{L^2_t L^2_{x,y}} = \left(\int_0^T\sum_k\int\nu(k^2+\eta^2)e^{-2c\nu(k^2+\eta^2)t}|\widetilde{\omega}_{in}|^2\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}$.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \sup_{t\in[0,T]}\|\frac{\log(|D|+e)}{\log((\nu t)^{-1}+e)}\omega(t)\|_{L^2_{x,y}}\\
&\le C\sup_{t\in[0,T]}\|\frac{\log(|D|+e)}{\log((\nu t)^{-1}+e)}\widetilde{S}(t,0)\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}} + C\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t\|V\nabla\omega(s)\|_{L^2_{x,y}}\mathrm{d}s\\
&\overset{①}{\le} C\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}} + \|V\|_{L^2_t L^\infty_{x,y}}\|\nabla\omega\|_{L^2_t L^2_{x,y}}\\
&\overset{②+③}{\le} C\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}} + C\nu^{-\frac{1}{2}}\|\log(|D|+e)\omega(s)\|_{L^2_t L^2_{x,y}}\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}\\
&\overset{T^{\frac{1}{2}}\text{来自时间积分 + 上面不等式}}{\le} C\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}} + C\nu^{-\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}\log((\nu T)^{-1}+e)\|\omega_{in}\|^2_{L^2_{x,y}} \le C\|\omega_{in}\|_{L^2_{x,y}}
\end{aligned}
$$

最后因假设 $\|\omega_{in}\|_{L^2} \le \dfrac{\nu^{\frac{1}{2}}}{|\log(\nu)|}$，$\exists T>0$ 使 $CT^{\frac{1}{2}}\dfrac{\log((\nu T)^{-1}+e)}{\log(\nu^{-1}+e)} \le \dfrac{1}{2}$。 ■

Bibliography

[1] Nader Masmoudi and Weiren Zhao. "Enhanced dissipation for the 2D couette flow in critical space". In: Communications in Partial Differential Equations 45.12 (2020), pp. 1682–1701. DOI: 10.1080/03605302.2020.1791180. URL: https://doi.org/10.1080/03605302.2020.1791180.

[2] Jacob Bedrossian, Nader Masmoudi, and Vlad Vicol. "Enhanced dissipation and inviscid damping in the inviscid limit of the Navier–Stokes equations near the two dimensional Couette flow". In: Archive for Rational Mechanics and Analysis 219 (2016), pp. 1087–1159.

[3] Jacob Bedrossian and Nader Masmoudi. "Inviscid damping and the asymptotic stability of planar shear flows in the 2D Euler equations". In: Publications mathématiques de l'IHÉS 122.1 (2015), pp. 195–300.

[4] Jacob Bedrossian, Vlad Vicol, and Fei Wang. "The Sobolev stability threshold for 2D shear flows near Couette". In: Journal of Nonlinear Science 28 (2018), pp. 2051–2075.

[5] Nader Masmoudi and Weiren Zhao. "Stability threshold of two-dimensional Couette flow in Sobolev spaces". In: Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Analyse Non Lineaire. Vol. 39. 2. Elsevier Masson SAS. 2022, pp. 245–325.

Appendix

Lemma 0.0.5

$\mathscr{C}, B$ 分别是原点为中心的环和球。存在常数 $C>0$ 使得对任意整数 $k\ge 0$、任意度为 m 的光滑齐次函数 $\sigma(x)$，对任意实数 $b\ge a\ge 1$ 及任意 L^a 函数 u 有如下估计：

$$\begin{aligned}
\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^b(\mathbb{R}^d)} &\le C^{k+1}\lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}, && \mathit{supp}\hat{u}\subset\lambda B,\\
C^{-k-1}\lambda^K\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)} \le \sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)} &\le C^{k+1}\lambda^k\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}, && \mathit{supp}\hat{u}\subset\lambda\mathscr{C},\\
\|\sigma(D)u\|_{L^b(\mathbb{R}^d)} &\le C_{\sigma,m}\lambda^{m+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}, && \mathit{supp}\hat{u}\subset\lambda\mathscr{C}.
\end{aligned}$$

Proof. (1) 取 $\hat\phi(\xi)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 满足 $\begin{cases}\hat\phi(\xi)=1,\ \xi\in B,\\ \hat\phi(\xi)=0,\ \xi\in\mathbb{R}^d\backslash 2B,\end{cases}$ 易知 $\hat{u}=\hat\phi\hat{u}(\xi)$, $\mathit{supp}\hat{u}(\xi)\subset B$，故 $u(x)=\phi*u(x)\Rightarrow\partial^\alpha u=\partial^\alpha\phi*u$。由 Fourier 变换、插值、$\hat\phi$ 有紧支

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha\phi(x)\|_{L^c} &\le \|\partial^\alpha\phi\|_{L^\infty}+\|\partial^\alpha\phi\|_{L^1}\le C_d\|(1+|x|^2)^d\partial^\alpha\|_{L^\infty}\le C_d\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}\|\Delta^j(\xi^\alpha\hat\phi(\xi))\|_{L^1}\\
&\le C_d\sup_{\substack{0\le|\beta|\le|\alpha|\\ 0\le|\sigma|\le 2n-|\beta|}}\|\partial_\xi^\beta(\xi^\alpha)\partial_\xi^\sigma\hat\phi\|_{L^1}\le C_dC^k\sup_{0\le|\sigma|\le 2n}\|\partial_\xi^\sigma\hat\phi\|_{L^1}=:C^{k+1},\ 1\le c\le\infty
\end{aligned}$$

故 $\|\partial^\alpha u\|_{L^b}\le\|\partial^\alpha\phi\|_{L^c}\|u\|_{L^a}\le C^{k+1}\|u\|_{L^a}$，$\dfrac{1}{b}+1=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}$，两边取上确界即得 $\lambda=1$ 情形。再用尺度变换，事实上 $\hat{u}(\xi)=\hat\phi(\frac{\xi}{\lambda})\hat{u}(\xi)$，$\forall\xi\in\lambda B$，有

$$u(x)=\lambda^d\phi(\lambda\cdot)*u(\cdot)\Rightarrow\partial^\alpha u=\lambda^d\partial^\alpha=\lambda^d\partial^{\alpha_x}(\phi(\lambda\cdot))*u(\cdot),$$

又 $\|\lambda^d\partial_x^\alpha\phi(\lambda x)\|_{L^c}=\lambda^{k+\frac{(c-1)d}{c}}\|\partial_x^\alpha\phi(x)\|_{L^c}=\lambda^{d(1-\frac{1}{c})+k}C^{k+1}$，由 Young 不等式及 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1-\frac{1}{c}$ 可推出

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^b}\le\lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}C^{k+1}\|u\|_{L^a},\ \mathit{supp}\hat{u}\subset\lambda B$$

关于 $|\alpha|=k$ 取上确界即得。

(2) 取 $\hat{\psi}(\xi) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ 且 $\begin{cases} \hat{\psi}(\xi) = 1,\ \xi \in \mathscr{C}, \\ \hat{\psi}(\xi) = 0,\ dist(\xi, \mathscr{C}) \geq \dfrac{d(0,\mathscr{C})}{2}. \end{cases}$ 利用代数恒等式 $|\xi|^{2k} = \sum\limits_{1 \leq j_1, j_2, \ldots, j_k \leq d} \xi_{j_1}^2 \ldots \xi_{j_k}^2 = \sum\limits_{|\alpha|=k} (i\xi)^\alpha (-i\xi)^\alpha$ 有 $\sum\limits_{|\alpha|=k} \dfrac{(i\xi)^\alpha (-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}} = 1$。用 $\hat{\psi}(\xi)$ 取代 $\hat{\phi}(\xi)$ 的位置，类似 (1) 中推导即可证明第二不等式的第二部分。而第一部分：

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}} \hat{\psi}(\xi) (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi),\ supp\hat{u} \subset \mathscr{C}, \\ u(x) &= \sum_{|\alpha|=k} g_\alpha * \partial^\alpha u,\ g_\alpha(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}} \hat{\psi}(\xi) \right) \in L^1(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

$\lambda \neq 1$ 时，我们有

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}} \hat{\psi}(\frac{\xi}{\lambda}) (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) = \lambda^{-k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(-i\xi/\lambda)^\alpha}{(|\xi|/\lambda)^{2k}} \hat{\psi}(\frac{\xi}{\lambda}) (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi),$$

由此知 $u(x) = \lambda^{-k} \sum\limits_{|\alpha|=k} \lambda^d g_\alpha(\lambda x) * \partial^\alpha u$，直接估计

$$\|u\|_{L^a} \leq \sum_{|\alpha|=k} \|g_\alpha\|_{L^1} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \leq \#\{|\alpha| = k\} \cdot \max_{|\alpha|=k} \|g_\alpha\|_{L^1} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} =: C^{k+1} \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a}$$

$$\Rightarrow C^{-k-1} \|u\|_{L^a} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a},\ supp\hat{u} \subset \mathscr{C}$$

用 $u(x) = \lambda^{-k} \sum\limits_{|\alpha|=k} \lambda^d g_\alpha(\lambda x) * \partial^\alpha u$ 代替 $u(x) = \sum\limits_{|\alpha|=k} g_\alpha * \partial^\alpha u$ 可得。

(3) 注意到 $\sigma(\xi)\hat{u} = \hat{\psi}(\xi)\sigma(\xi)\hat{u}(\xi)$ 得

$$\sigma(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\psi}(\xi)\sigma(\xi)) * u = g_\sigma(x) * u,\ supp\hat{u} \subset \mathscr{C},$$

因 $\sigma(\xi)$ 是 m 阶齐次函数，易知 $\sigma(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{\psi}(\frac{\xi}{\lambda})\sigma(\xi)\hat{u}(\xi) = \lambda^m \hat{\psi}(\frac{\xi}{\lambda})\sigma(\frac{\xi}{\lambda})\hat{u}(\xi)$，故 $\sigma(D)u = \lambda^m \lambda^d g_\sigma(\lambda x) * u(x)$，由此推出

$$\begin{aligned} &\|\sigma(D)u\|_{L^b} \leq \underbrace{\|g_\sigma(x)\|_{L^c}}_{C_{\sigma,m}} \|u\|_{L^a},\ 1 + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, && supp\hat{u}(\xi) \subset \mathscr{C}, \\ &\|\sigma(D)u\|_{L^b} \leq \lambda^{m + d(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})} C_{\sigma,m} \|u\|_{L^a}, && supp\hat{u}(\xi) \subset \lambda\mathscr{C}. \end{aligned}$$

■