1. **Question**: 我看到的比较简单的数值应用流程是：手解方程 ⇒ 分析出一些解性质 ⇒ 用 MATLAB 等画图观察参数变化下解对应图像的变化 ⇒ 分析获得的性质与观察结合，对问题作出更深刻理解。比如首先是分析部分：

$$(I_\epsilon)\begin{cases}-u_\epsilon''+\epsilon u_\epsilon=f,\ 0<x<1,\\ u_\epsilon(0)=u_\epsilon(1)=0.\end{cases} \tag{0.1}$$

$$(II_\epsilon)\begin{cases}-\epsilon u_\epsilon''+u_\epsilon=f,\ 0<x<1,\\ u_\epsilon(0)=u_\epsilon(1)=0;\end{cases} \tag{0.2}$$

$$(III_\epsilon)\begin{cases}-\epsilon u_\epsilon''-u_\epsilon'=f,\ 0<x<1,\\ u_\epsilon(0)=u_\epsilon(1)=0.\end{cases} \tag{0.3}$$

(' 表示求导) 以上三个系统解的存在性和唯一性容易得到，如对 $(I)_\epsilon$ 系统定义弱解

$$(I)\begin{cases}u_\epsilon\in H_0^1(0,1),\\ B[u_\epsilon,v]:=(u_\epsilon',v')+\epsilon(u_\epsilon,v)=(f,v),\ \forall v\in H_0^1(0,1),\end{cases}$$

泛函保证了唯一存在 (I) 定义的解。再倒腾不等式得到

$$\|u_\epsilon'\|_{L^2(0,1)}^2+\epsilon\|u_\epsilon\|_{L^2(0,1)}^2\le C\|f\|_{L^2(0,1)}^2$$

看出 u_ϵ' 在 $L^2(0,1)$ 中关于 ϵ 一致有界 (界不依赖参数 ϵ)⇒ 结合 u_ϵ 的定义看出更多信息：u_ϵ 在 $H_0^1(0,1)$ 中关于 ϵ 一致有界 ⇒ 泛函保证存在子列 $\epsilon'\to 0,\ u_0\in H_0^1(0,1)$ 使得

$$u_{\epsilon'}\rightharpoonup u_0\ in\ H_0^1(0,1)\ weakly.$$

令 $\epsilon'\to 0$，Passing to the limit(术语，大意为对某个系统取极限，并允许在过程中交换一些次序) 得极限系统的弱解 $(I')\begin{cases}u_0\in H_0^1(0,1),\\ (u_0',v')=(f,v),\ \forall v\in H_0^1(0,1).\end{cases}$，对应极限系统：

$$(I_0)\begin{cases}-u_0''=f,\ 0<x<1,\\ u_0(0)=u_0(1)=0.\end{cases} \tag{0.4}$$

$$(II_0)\begin{cases}u_0=f,\ 0<x<1,\\ \text{no boundary conditions here;}\end{cases} \tag{0.5}$$

$$(III_\epsilon)\begin{cases}-u_0'=f,\ 0<x<1,\\ Somehow.\end{cases} \tag{0.6}$$

泛函保证 (I_0) 存在唯一的按 (I') 定义的弱解 u_0，再倒腾不等式可以得到

$$\|u_\epsilon - u_0\|_{L^2(0,1)} \leq C\epsilon \|u_0\|_{L^2(0,1)}, \quad \|u_\epsilon - u_0\|_{H^1(0,1)} \leq C\epsilon \|u_0\|_{L^2(0,1)}$$

这意味着 (I_ϵ) 的解 u_ϵ 可被零阶项 u_0 一致逼近 (另外两个系统略有不同)。
手解方程 + 数值观察：挑选 $\epsilon \to 0$ 过程中若干值刻画系统 $(I_\epsilon), (II_\epsilon), (III_\epsilon)$ 的精确解。

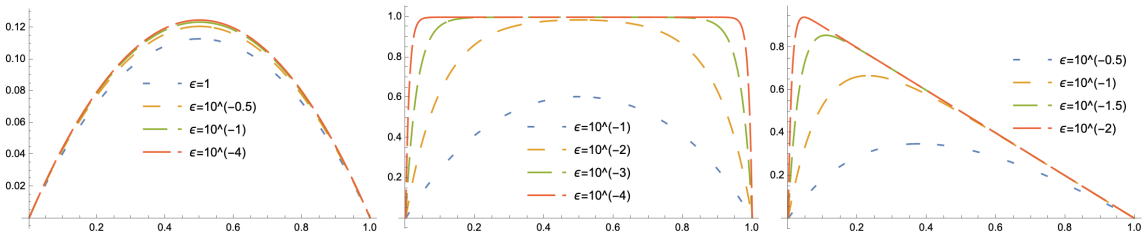

图 1: $(I_\epsilon) u_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{1+e^{-\sqrt{\epsilon}} - e^{-\sqrt{\epsilon}x} - e^{-\sqrt{\epsilon}(1-x)}}{1+e^{-\sqrt{\epsilon}}}$，$(II_\epsilon) u_\epsilon = 1 - \frac{e^{-x/\sqrt{\epsilon}} + e^{-(1-x)/\sqrt{\epsilon}}}{1+e^{-1/\sqrt{\epsilon}}}$，$(III_\epsilon) u_\epsilon = -x + \frac{1-e^{-x/\epsilon}}{1-e^{-1/\epsilon}}$

更深理解：某块区域附近发生了 Sharp transitions(急剧变化)，导致所谓边界层 (术语) 出现，试图用严谨的数学去刻画这个现象 (PS: 当前边界层问题尚未能严格处理)。

需求：系统普遍手解困难甚至无显式解，需借助数值计算。据我所知数值求解和出图经典算法是容易的，用户希望能用求解器进行探索观察数值证据。于是问：神经网络能否稳定得到数值结果？结果的正确性如何保证 (在未知精确解情况下，难以度量数值解和精确解的误差；另外一些问题尚无对应的物理实验，故无法提供真实数据)？

2. **Question**：最近 Thomas Y. Hou 老师的一篇文章（axriv 2210.07191），大致如图：

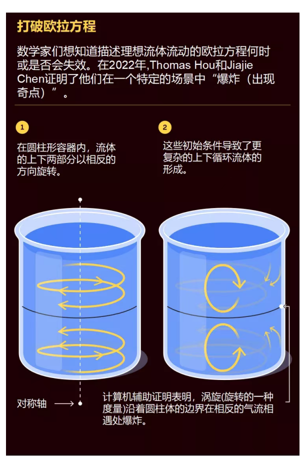

图 2: axriv2210.07191 自媒体总结图

这篇文章从 13 年 Luo Guo 老师关于 3D-Euler 方程潜在奇异性的“数值证据”中构造了某种 (自相似) 解，用数学手段证明了：假设初值光滑并满足有限能量和一些边界条件时，2D-Boussinesq 方程和三维轴对称 Euler 方程的有限时间 blow up(大意是在某种范数意义下随时间 $t \to t_0$ 而趋于无穷大)。我还未细看他们的工作，脑测他们是从数值计算中看到区域某个位置的解 (比如速度场) 在某种度量下非常大、甚至导致计算不收敛。

传统流体工业软件如 Ansys fluent、OpenFOAM 等用有限元算法能做到：你把模型建好 (比如一个水槽)⇒ 设置软件计算方法 (比如求解器、边界条件、一些常数如雷诺数或液体密度)⇒ 软件告诉你计算是否收敛，收敛则算出数值 ⇒ 导入建的模型 (方程的区域) 并进行后处理 (比如得到往容器里面倒水、大气环流、物体运动时周边空气流场的数值模拟视频)。但这些大公司的软件学习成本很高，基本做 CFD 的才会全精力投入学习，且自由度不高，体现在可求解方程有限 (只能求解流体方程，不能解薛定谔)、初值或边值条件等自定义的方式有限等等。另外有限元算法用 CPU 有优势，GPU 算法应有更大优势才有市场。

需求：我想利用电脑的计算力，一定程度上模拟流体过程，我这样的用户希望对一个有物理意义的方程进行研究，比如大名鼎鼎的不可压 Navier-Stokes 方程，未知数：速度 u(t,x)、压力 p(t,x)

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = 0, \ (t,x) \in [0,\infty) \times \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \tag{0.7}$$

- 用户给定 2 维或者 3 维 (在流体问题中更高维度通常没什么物理意义) 区域 Ω，需要有一定的定义这个区域的自由度 (函数描绘的形状，不过纯数 pde 一般研究的区域形状比较规则，至少会选数学物理上具有代表性、可刻画的，另外能否考虑无界区域？比如全空间、周期域 (这个很多经典算法已经实现)、半平面、带状域)
- 方程的解在边界满足的条件被用户给定 (如在边界速度为 0，i.e. $u|_{\partial\Omega} = 0$)，需要有一定的定义自由度 (用户可自己输入约束关系，不过考虑物理现实，流体 NS 而言，边界条件至少有那么几种：non-slip、Navier-slip、混合情形)
- 方程的解在初始时刻被用户完全给出，i.e. $u(t=0,x) = u_0(x)$，求解方程；或增加一些自由度，比如要求初值 $u_0(x)$ 的某种积分收敛 ($\|u_0(x)\|_{L^2} < \infty$)，或小于某个小参数 $\|u_0(x)\|_{L^2} \le C\epsilon$(这个我看来很难实现，但可以退一步用户自己找满足约束的特定初值让神经网络来算)
- 定完整个系统所需信息，数值结果需要便于分析 (比如你能跟踪速度场 u 的某个积分 $\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x$ 的值随时间的变化等等)，甚至希望能够可视化 (模拟真实流体运动过程)，从而更好地启发用户

总之想有一个有一定自由度的工具，试图找一些数值预言，给理论证明一点方向，这可能很有趣。