

Aufgabe 2: Vollgeladen

Team-ID: 00067

Team-Name: Panic! at the Kernel

Bearbeiter/-innen dieser Aufgabe:
Christopher Besch

21. November 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Abstract	1
2 Lösungsidee	1
2.1 Berechnung der Tabellen	2
3 Umsetzung und Quellcode	2
4 Beispiele	4

1 Abstract

Es werden zwei Tabellen erstellt:

- Eine mit der minimalen Bewertung des optimalen Weges zu jedem Hotel nach d Tagen und
- eine mit dem jeweiligen Vorgänger auf diesem optimalen Weg.

Anschließend werden diese beiden Tabellen benutzt, um den optimalen Weg zum Ziel zu bestimmen. Wenn dieser existiert, wird die minimale Bewertung und die besuchten Hotels berechnet. Schlussendlich wird die Lösungsidee in C++ implementiert und Spezialfälle mit Beispieleingaben erläutert.

2 Lösungsidee

Für jedes Hotel x lässt sich sagen, ob es innerhalb von d Tagen erreicht werden kann. Ist dies für ein d der Fall, kann die minimale Bewertung aller Hotels, die auf dem optimalen Weg zu x liegenden, angegeben werden. Dieser optimale Weg benötigt genau d Tage. Er ist in dem Sinne optimal, dass kein anderer Weg existiert, der in d Tagen das Hotel erreicht und eine besserer minimale Bewertung aufweist. Daher weist der optimale Weg immer die **beste minimale Bewertung** aller Hotels auf diesem Weg auf.

Diese Werte können in einer Tabelle—der Minimumstabelle—dargestellt werden und werden minimale Webbewertung genannt:

		min rating at day:					
idx	rating	0	1	2	3	4	5
===	=====	=	=	=	=	=	=
0	inf	inf					
1	4.3		4.3				
2	4.8		4.8	4.3			
3	2.7		2.7	2.7	2.7		
4	2.6		2.6	2.6	2.6	2.6	
5	3.6			3.6	3.6	2.7	2.6

6	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
11 7	4.4	2.7	3.6	3.6	2.7
8	2.8		2.7	2.8	2.8
13 9	2.6		2.6	2.6	2.6
10	2.1			2.1	2.1
15 11	2.8			2.7	2.8
12	3.3				2.7
17 13	inf				2.7

Neben den Hotels werde hier mit dem Index 0 der Startort und mit 13 das Ziel gelistet. Dessen Bewertung ist nie schlechter als die eines beliebigen Hotels, weshalb sie als unendlich angesehen wird. Da eine Fahrt, die länger als fünf Tage dauert nicht zulässig ist, werden diese Optionen weggelassen.

Anhand dieser Daten lässt sich recht leicht die minimale Bewertung auf dem Weg zu jedem beliebigen Hotel ausgeben. Interessant ist dieser Wert für das Ziel. Es muss lediglich das Minimum aller Werte in der letzten Zeile bestimmt werden. Die Reise endet dann am sogenannten optimalen Tag.

Um nun die einzelnen Hotels, die optimal zum Ziel führen, zu bestimmen, wird eine zweite Tabelle—die Vorgängertabelle—benötigt. Diese weist die gleichen Dimensionen auf, gibt allerdings für jedes Hotel x und Tag d das Hotel, das am vorherigen Tag ($d - 1$) zuletzt besucht wurde, an. So kann vom Ziel am optimalen Tag ausgehend immer das zuletzt besuchte Hotel bestimmt werden. Dieser Vorgang endet, wenn man am Startort angekommen ist.

2.1 Berechnung der Tabellen

Als Taglänge wird die Strecke verstanden, die an einem Tag zurückgelegt werden kann. Zu jedem Hotel x kann man am Tag d von allen Hotels, die maximal eine Taglänge vor x liegen und innerhalb von genau $d - 1$ Tagen erreichbar sind, gelangen. Diese Hotels bilden die Menge Y . Alle Hotels, die hinter x liegen, sind nicht zu verwenden.

Die minimale Bewertung a zum Hotel x nach d Tagen entspricht mit

- dem Minimum b der minimalen Wegbewertungen zu allen Hotels aus Y für den Tag $d - 1$ und
- der Bewertung c des Hotels x :

$$a = \min(b, c)$$

a wird in der Minimumstabelle gespeichert. Der entsprechende Wert in der Vorgängertabelle entspricht dem Index des Hotels dessen minimale Wegbewertung gewählt wurde.

Da so immer nur die Information von Hotels, die vor dem aktuellen liegen, benötigt werden, kann das Prinzip der dynamischen Programmierung verwendet werden. Hierbei werden die Tabellen anfangend beim Startort Hotel für Hotel gefüllt. Jedes weitere Hotel benötigt ausschliesslich die bereits berechnete Information.

3 Umsetzung und Quellcode

Die Lösungsidee wird in C++ implementiert. Zur Repräsentation der Tabellen werden mehrdimensionale vectors benutzt:

```
1 // min_ratings[x][y] -> min rating till hotel x requiring y days to get to
  // -1 -> impossible
3 std::vector<std::vector<float>>> min_ratings(n + 2, std::vector<float>(DAYS + 1, -1));
  std::vector<std::vector<int>>> last_hotel(n + 2, std::vector<int>(DAYS + 1, -1));
```

DAYS entspricht der Anzahl an Tagen, die die Reise maximal dauern darf. Diese Konstante wird an allen relevanten Stellen respektiert, weshalb leicht eine Berechnung für mehr (oder weniger) als fünf Tage durchgeführt werden kann.

Nun kann mit der Funktion `populate_tables` diese Tabellen der Lösungsidee nach füllen.

```
void populate_tables(
2     const std::vector<std::pair<int, float>>>& hotels,
    std::vector<std::vector<float>>>& min_ratings,
4     std::vector<std::vector<int>>>& last_hotel)
{
```

```

6 // the "first" (virtual) hotel never has the worst rating
min_ratings[0][0] = inf;
8 // go through all but "first" hotels
for(auto cur = hotels.begin() + 1; cur != hotels.end(); ++cur) {
10     int cur_idx = cur - hotels.begin();
    // first hotel, 'cur' can be reached from
12     auto prev = std::lower_bound(hotels.begin(), hotels.end(),
                                   std::make_pair(cur->first - DAY_LEN, .0f));
14     for(; prev != cur; ++prev) {
        int prev_idx = prev - hotels.begin();
16         // go through past days when prev can be reached
        // call ride off after 'DAYS' days
18         for(int prev_day = 0, cur_day = 1; prev_day < DAYS; ++prev_day, ++cur_day) {
            // if the hotel 'prev' can't be reached in 'prev_day' days
20             if(min_ratings[prev_idx][prev_day] == -1)
                continue;
22             float new_min = std::min(min_ratings[prev_idx][prev_day], cur->second);
            // update when better
24             if(new_min > min_ratings[cur_idx][cur_day]) {
                min_ratings[cur_idx][cur_day] = new_min;
26                 last_hotel[cur_idx][cur_day] = prev_idx;
            }
28         }
    }
30 }
}

```

Diese Funktion ist die Aufwändigste der Implementation. Obwohl sie drei verschachtelte Schleifen enthält ist die Laufzeit der gesamten Implementation für fünf Tage linear, wenn davon ausgegangen wird, dass der Abstand zwischen zwei Hotels in etwa immer gleich ist. Durch diese Annahme benötigen die inneren Schleifen unabhängig von der Anzahl an Hotels immer gleich lange. Es bleibt nur die Äussere.

Wenn die Tabellen produziert wurde, können mit `get_best_day` die Werte des „Zielhotels“ in der Minimumstabelle linear nach dem Optimum durchsucht werden. Wenn es nicht möglich ist, unter den gegebenen Anforderungen das Ziel zu erreichen, wird `-1` zurückgegeben.

```

int get_best_day(const std::vector<std::vector<float>>& min_ratings, int n)
2 {
    int best_day {-1};
    float best_min_rating {-1};
    for(int i = 0; i < DAYS + 1; ++i) {
        if(min_ratings[n + 1][i] > best_min_rating) {
            best_min_rating = min_ratings[n + 1][i];
            best_day = i;
        }
    }
10     return best_day;
12 }

```

Wurde festgestellt, dass es einen Weg zum „Zielhotel“ innerhalb von fünf Tagen gibt, kann der optimale Weg mithilfe der Funktion `construct_path` bestimmt werden:

```

void construct_path(
2     const std::vector<std::vector<int>>& last_hotel,
    int best_day,
4     int n,
    std::vector<int>& path)
6 {
    int cur_idx = last_hotel[n + 1][best_day];
    for(int cur_day = best_day - 1; cur_day; --cur_day) {
        path.push_back(cur_idx);
10         cur_idx = last_hotel[cur_idx][cur_day];
    }
12     std::reverse(path.begin(), path.end());
}

```

Hierbei wird `cur_idx` immer so aktualisiert, dass immer das jeweilig vorhergehende Hotel referenziert wird. Die Suche wird beendet, wenn der Startort erreicht wurde.

Zum Schluss werden die beiden Tabellen und der finale, optimale Weg ausgegeben.

4 Beispiele

Das Pythonscript `tabs.py` wird benutzt, um tabs korrekt zu formatieren. Da es für die Lösung der Aufgabe nicht von Nöten ist, ist es in der Abgabe nicht enthalten. Es kann hier heruntergeladen werden.

Neben dem optimalen Weg wird ebenfalls die Minimumstabelle abgedruckt. Die + Zeichen zeigen, dass dieses Hotel im optimalen Weg enthalten ist.

Hotels 1

```
./tabs.py <(cat examples/hotels1.txt | ./a.out)
```

idx	distance	rating	min rating at day:						
			0	1	2	3	4	5	6
0	0	inf	inf						
1	12	4.3		4.3					
2	326	4.8	+	4.8	4.3				
3	347	2.7			2.7	2.7			
4	359	2.6			2.6	2.6	2.6		
5	553	3.6	+		3.6	3.6	2.7	2.6	
6	590	0.8			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
7	687	4.4	+		2.7	3.6	3.6	2.7	2.6
8	1007	2.8	+			2.7	2.8	2.8	2.7
9	1008	2.6				2.6	2.6	2.6	2.6
10	1321	2.1					2.1	2.1	2.1
11	1360	2.8	+				2.7	2.8	2.8
12	1411	3.3						2.7	2.8
13	1680	inf						2.7	2.8

These hotels should be used with min rating 2.8:

idx	location	rating	min rating till here
2	326	4.8	4.8
5	553	3.6	3.6
7	687	4.4	3.6
8	1007	2.8	2.8
11	1360	2.8	2.8

Hotels 2

```
./tabs.py <(cat examples/hotels2.txt | ./a.out)
```

idx	distance	rating	min rating at day:						
			0	1	2	3	4	5	6
0	0	inf	inf						
1	340	1.6		1.6					
2	341	2.2		2.2	1.6				
3	341	2.3	+	2.3	2.2	1.6			
4	342	2.1		2.1	2.1	2.1	1.6		
5	360	1.9		1.9	1.9	1.9	1.9	1.6	
6	361	4.4			2.3	2.2	2.1	1.9	1.6
7	362	3.1			2.3	2.3	2.2	2.1	1.9
8	442	5			2.3	2.3	2.3	2.2	2.1
9	567	4.9			2.3	2.3	2.3	2.3	2.2
10	700	3	+		2.3	2.3	2.3	2.3	2.3
11	710	2.9			1.9	2.3	2.3	2.3	2.3
12	718	1.4			1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
13	987	4.6				2.3	2.3	2.3	2.3
14	1051	2.3	+			2.3	2.3	2.3	2.3
15	1053	4.8				2.3	2.3	2.3	2.3
16	1057	0.2				0.2	0.2	0.2	0.2
17	1199	5					2.3	2.3	2.3
18	1279	5					2.3	2.3	2.3
19	1367	4.5					2.3	2.3	2.3
20	1377	1.8					1.8	1.8	1.8
21	1377	1.6					1.6	1.6	1.6
22	1377	2					2	2	2
23	1378	2.1					2.1	2.1	2.1
24	1378	2.2					2.2	2.2	2.2

```

25      1380      5      +
31 26      1737      inf
33 These hotels should be used with min rating 2.3:
    idx      location      rating min rating till here
35 ===      =====      =====
37 3      341      2.3      2.3
14 10      700      3      2.3
14 14      1051      2.3      2.3
39 25      1380      5      2.3

```

Hotels 3

```

1 ./tabs.py <(cat examples/hotels3.txt | ./a.out)
  these hotels should be used with min rating 0.3:
3 idx      location      rating min rating till here
  ===      =====      =====
5 97      358      2.5      2.5
196      717      0.3      0.3
7 297      1075      0.8      0.3
401      1433      1.7      0.3

```

Aufgrund von 500 Hotels wird für dieses Beispiel die Minimumstabelle nicht abgedruckt.

Hotels 5

```

./tabs.py <(cat examples/hotels5.txt | ./a.out)
2 These hotels should be used with min rating 5:
  idx      location      rating min rating till here
4 ===      =====      =====
6 242      280      5      5
581      636      5      5
913      987      5      5
8 1168      1271      5      5

```

Hier wird die Minimumstabelle ebenfalls weggelassen.

Unmögliches Beispiel

```

./tabs.py <(cat examples/my_hotels0.txt | ./a.out)
2 min rating at day:
  idx      distance rating 0 1 2 3 4 5 6
4 ===      =====
0 0 inf inf
6 1 1680 inf
8 It is impossible to reach the destination in 6 days without draining the phones' batteries.
  Maybe read a book instead.

```

Dieses Beispiel enthält kein einziges Hotel, weshalb die gesamte Fahrzeit von 1680 Minuten nicht ohne geladene Smartphones überstanden werden kann.

Mögliches Beispiel nach sechs Tagen

```

1 ./tabs.py <(cat examples/my_hotels1.txt | ./a.out)
  min rating at day:
3 idx      distance rating 0 1 2 3 4 5
  ===      =====
5 0 0 inf inf
1 300 5 5
7 2 600 5 5

```

```

3         900      5
9 4         1200   5
5         1500   5
11 6        1800  inf

```

```

13 It is impossible to reach the destination in 5 days without draining the phones' batteries.
    Maybe read a book instead.

```

Es zeigt sich, dass die Hotels geradeso nicht ausreichen, um das Ziel innerhalb von fünf Tagen zu erreichen. Wenn allerdings die Konstante `DAYS` auf 6 gesetzt wird, ist das Beispiel lösbar:

```

./tabs.py <(cat examples/my_hotels1.txt | ./a.out)
2
min rating at day:
4 idx      distance rating  0    1    2    3    4    5    6
  ===      =====
0         0         inf    inf
6 1         300      5      +    5
  2         600      5      +    5
8 3         900      5      +    5
  4         1200     5      +    5
10 5         1500     5      +    5
  6         1800     inf    5
12
These hotels should be used with min rating 5:
14 idx      location      rating min rating till here
  ===      =====
16 1         300          5      5
  2         600          5      5
18 3         900          5      5
  4         1200         5      5
20 5         1500         5      5

```