

Projet Monte Carlo

Yves Leconte, Agathe Wittoeck

Decembre 2022

1 Exercice 1

1.1 Méthode de Monte Carlo n°1

1.1.1 Question 1

Les variables X et Y étant indépendantes, nous pouvons les simuler indépendamment. Les simulations suivant une loi gamma étant directement disponibles dans la librairie R, nous utiliserons cette fonctionnalité.

En ce qui concerne la variable Y, nous utiliserons la méthode de la fonction inverse. Nous pouvons donc commencer par déterminer sa fonction de répartition pour ensuite calculer la fonction quantile associée.

fonction de répartition:

En supposant $\mu = -13$ et $b = 2$, on a que Y est à valeurs dans $[-17; +\infty[$.

$\forall t \in [-17; +\infty[$,

$$\begin{aligned} G(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) \\ &= \int_{-17}^{\infty} g(y) dy \\ &= \int_{-17}^t \frac{y+17}{16} \mathbb{1}_{(y \in [-17, -13])} + \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) \mathbb{1}_{(y > -13)} dy. \end{aligned}$$

Si $t \leq \mu$,

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{-17}^t \frac{y+17}{16} dy \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{y^2}{2} - 17y \right]_{-17}^t \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{t^2}{2} - 17t - \frac{17^2}{2} + 17^2 \right) \\ &= \frac{1}{32} \left(t + 17 \right)^2. \end{aligned}$$

Si $t > \mu$,

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{-17}^t g(y) dy \\ &= \int_{-17}^{\mu} \frac{y+17}{16} dy + \int_{\mu}^t \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \\ &= \frac{1}{2} + \int_{\mu}^t \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[-2 \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) \right]_{-13}^t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(2 - 2 \exp\left(-\frac{t+13}{2}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t+13}{2}\right). \end{aligned}$$

On calcule ensuite la fonction quantile G^{\leftarrow} :

Cette dernière est strictement croissante. De plus on constate que $G(\mu) = \frac{1}{2}$.
Donc $\forall \beta \in [0, \frac{1}{2}]$, $G^{\leftarrow}(\beta) \in [-17, \mu]$. De même, $\forall \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$, $G^{\leftarrow}(\beta) \in [\mu, +\infty]$.

Pour $\beta \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{32} \left(t + 17 \right)^2 \\ \implies \sqrt{32\beta} &= t + 17 \\ \implies t &= \sqrt{32\beta} - 17.\end{aligned}$$

Pour $\beta > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\beta &= 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t+13}{2}\right) \\ \implies -\frac{t+13}{2} &= \ln(2(1-\beta)) \\ \implies -t &= \ln(2(1-\beta)) + 13 \\ \implies t &= -13 - 2 \ln(2(1-\beta)).\end{aligned}$$

On obtient donc:

$$G^{\leftarrow}(\beta) = \left(\sqrt{32\beta} - 17 \right) \mathbb{1}_{(\beta \leq \frac{1}{2})} + \left(-13 - 2 \ln(2(1-\beta)) \right) \mathbb{1}_{(\beta > \frac{1}{2})}.$$

Nous pouvons désormais simuler Y. En effet, d'après le cours, pour U suivant une uniforme $U([0, 1])$, $G^{\leftarrow}(U)$ suit la même loi que Y.

Comme on sait simuler n uniformes dans R à l'aide de la commande `runif(n)`, on peut désormais simuler n variables aléatoires de densité g.

```
# Soit l'inverse generalise de la fonction de repartition de Y,

fct_inv_Y <-function(x) {
  return((sqrt(8 * 4 * x) - 17) * (x < (1 / 2)) + (-13 - 2 * log(2 * (1 - x))) * (x > (1 / 2)))
}

# Pour simuler la var Y,

ech_Y <-function(n) {
  return(fct_inv_Y(runif(n)))
}

# Pour simuler X,

ech_X <-function(n) {
  return(rgamma(n, shape = 3, scale = 2))
}

# Pour simuler maintenant Z=(X,Y),

simu <-function(n) {
  return(rbind(ech_X(n), ech_Y(n)))
}

# On pose n=1000.
# On gardera cette affectation par la suite, sauf mention contraire explicite.

n <-1000

# On simule Y et X.
# On utilisera ces echantillons par la suite, sauf mention contraire explicite.

Y <-ech_Y(n)
X <-ech_X(n)
```

1.1.2 Question 2

Comme nous avons simulé X à l'aide de la loi gamma de R, il est inutile de vérifier que l'échantillon qui en découle suit bien une loi gamma. Nous nous contentons ici de vérifier que les simulations de Y sont correctes. Pour cela, nous allons construire un histogramme de l'échantillon simulé puis y superposer la densité g . Les deux constructions graphiques semblent coïncider. Nous pouvons donc confirmer que notre méthode et notre code pour simuler Y sont corrects.

```
# On utilise viridisLite pour avoir une representation graphique plus accessible.
library(viridisLite)
c_pal <-viridis(2)

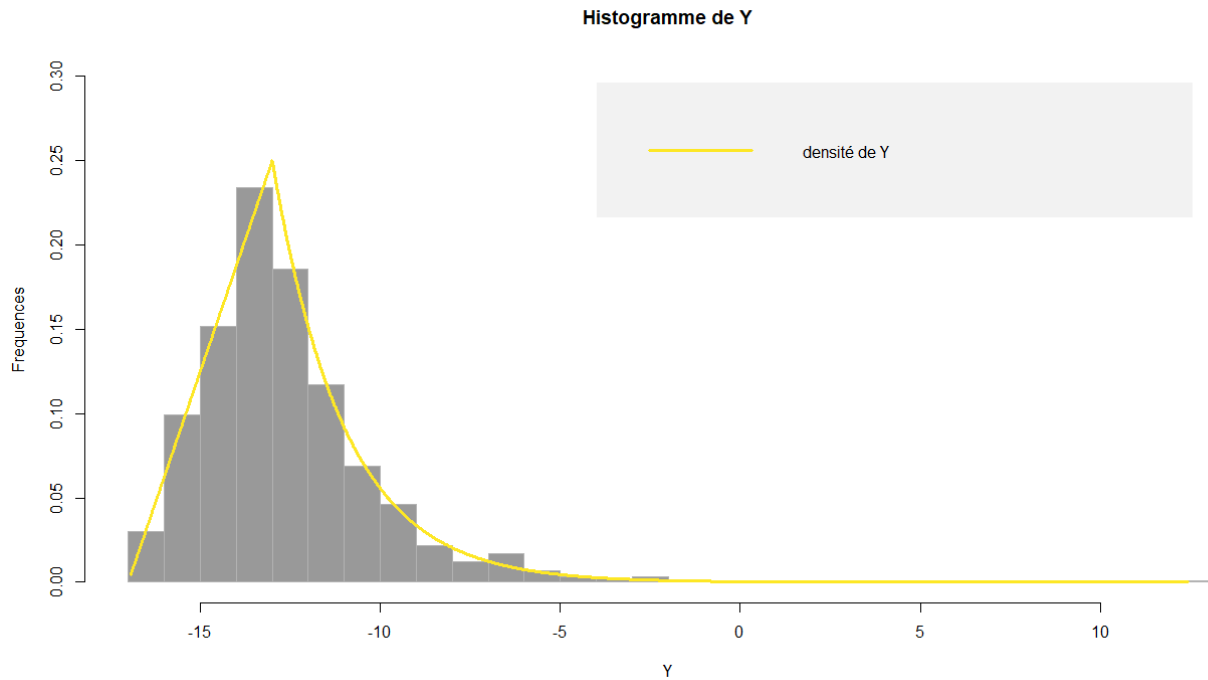
# On definit la fonction g densite de Y
g <-function(x) {
  return(((x + 17) / 16) * (x > (-17) &
    x < (-13)) + (exp(-(x + 13) / 2) / 4) * (x > (-13)))
}

par(mfrow = c(1, 1))

# On cree un histogramme pour représenter les realisations empiriques de Y
hist(
  Y,
  freq = FALSE,
  col = 'grey60',
  border = 'grey70',
  breaks = 30,
  main = 'Histogramme de Y',
  ylim = c(0, 0.3),
  ylab = 'Frequences'
)

# On represente les realisations theoriques de Y
lines(y <-seq(min(Y), max(Y), 0.01), g(y), col = c_pal[2], lwd = 3)

legend(
  'topright',
  "densite de Y",
  col = c_pal[2],
  lwd = 3,
  box.lty = 0,
  bg = 'gray95',
  inset = .05
)
```



1.1.3 Question 3

Sachant que $\delta = \mathbb{P}(X + Y > t)$, avec $t = 0$, l'estimateur de Monte Carlo classique associé est:

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(X_k, Y_k),$$

avec $(X_k, Y_k) \sim (X, Y)$ (iid) et $h(x, y) = \mathbb{1}_{(x+y) > t}$.

```
# On definit la fonction h utilisee dans l'estimateur MC classique
h <-function(x_1, x_2) {
  return(1 * ((x_1 + x_2) > 0))
}
```

1.1.4 Question 4

Nous implémentons dans cette question un code R qui, pour $n = 1000$, une estimation de δ , de l'erreur quadratique moyenne de \hat{p}_n et un intervalle de confiance asymptotique bilatère pour δ de niveau 95%.

\hat{p}_n étant un estimateur de Monte Carlo, il est par définition sans biais. L'erreur quadratique moyenne correspond donc à la variance de cet estimateur. Nous pouvons ainsi le calculer avec la commande `var()` de R.

Construisons dès à présent l'intervalle de confiance asymptotique.

La suite $h(X_k, Y_k)$ est indépendante identiquement distribuée suivant la loi de $h(X, Y)$, et admet un moment d'ordre 2, la suite étant une suite de variables aléatoires simples.

D'après le Théorème Central limite,

$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - \delta) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où σ^2 est la variance de $h(X, Y)$, que l'on peut estimer par: $\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (h(X_k, Y_k) - \hat{p}_n)^2$.

D'après le cours (Slutsky + LGN):

$$\sigma_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$$

En utilisant le théorème de Slutsky, on trouve donc:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_n^2}}(\hat{p}_n - \delta) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1)$$

Pour Z suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ on trouve:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_n^2}}|\hat{p}_n - \delta| \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Z| \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Pour avoir un intervalle asymptotique de taille 95%, on veut que $1-\alpha$ soit égal à 0.95, donc: $\alpha = 0.05$ En réarrangeant les termes, on trouve donc que:

$$\mathbb{P}\left(\delta \in \left[\hat{p}_n \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\sigma_n^2}}{\sqrt{n}}\right]\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \alpha = 95\%$$

On obtient donc l'intervalle de confiance suivant:

$$IC = \left[\hat{p}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\sigma_n^2}}{\sqrt{n}}, \hat{p}_n + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\sigma_n^2}}{\sqrt{n}}\right]$$

```
# On peut calculer h(X,Y) a partir des realisations empiriques de X et Y
pn_hat_simu<-function(n){
  Y <-ech_Y(n)
  X <-ech_X(n)
  return(h(X,Y))
}

pn_hat_ech<-pn_hat_simu(n)
# On peut calculer le resultat de l'estimateur MC classique
pn_hat = mean(pn_hat_ech)

# L'estimateur de Monte Carlo etant sans biais, l'erreur quadratique correspond
# a la variance de l'estimateur

MSE_4 <-var(pn_hat_ech) / n

# Estimateur de la variance:

estimateur_variance_4 <-mean((pn_hat_ech - pn_hat) ** 2) * (n / (n - 1))

# L'intervalle de confiance asymptotique:

Intervalle <-
  pn_hat + c(-1, 1) * qnorm(0.975) * sqrt(estimateur_variance_4 / n)
```

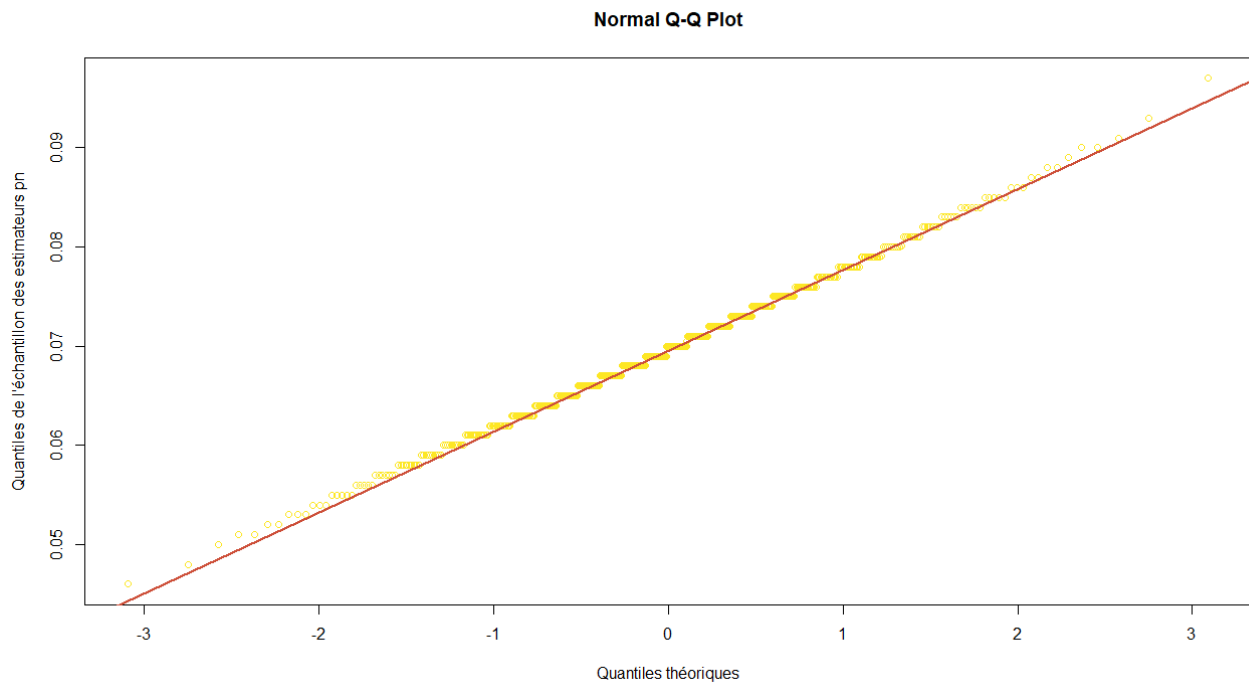
1.1.5 Question 5

```
# Verifions si notre estimateur est asymptotiquement normal:

p <-ppoints(500)
# On va simuler 10000 fois l'estimateur pn_hat pour ensuite montrer qu'il suit asymptotiquement une
  loi normale
echantillon_pn<-colMeans(matrix(pn_hat_simu(1000*10000), nrow=1000))

qqnorm(quantile(echantillon_pn, p), main = "Normal Q-Q Plot", xlab = "Quantiles theoriques", ylab =
  "Quantiles de l echantillon des estimateurs pn",col=c_pal[2])
qqline(echantillon_pn, col='tomato3', lwd=2)

# Comme nous pouvons le voir, les points sont alignes sur le graphique, donc notre estimateur est
  asymptotiquement normal.
```



1.1.6 Question 6

On a $\delta = \mathbb{P}(X + Y > t)$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \delta &= 1 - \mathbb{P}(X + Y \leq t) \\
 &= 1 - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x+y \leq t\}} f_{X,Y}(x, y) dy dx \\
 &\stackrel{!}{=} 1 - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x+y \leq t\}} f_X(x) f_Y(y) dy dx.
 \end{aligned}$$

Les fonctions f_X et f_Y étant positives, on peut utiliser le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \delta &= 1 - \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) \int_0^{t-y} f_X(x) dx dy \\
 &= 1 - \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) F(t - y) dy \\
 &= E[1 - F(t - Y)].
 \end{aligned}$$

On peut donc construire l'estimateur suivant,

$$\hat{\delta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{h}(U_i)$$

où on pose $\tilde{h} : x \mapsto 1 - F(t - G^{\leftarrow}(x))$ et F la fonction de répartition de X avec $U_i \stackrel{iid}{\sim} U([0,1])$ et G^{\leftarrow} la fonction de répartition inverse associée à la densité g , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1.1.7 Question 7

```

# On peut definir la fonction h associee a l'estimateur MC de la question 6
h_7 <-function(n) {
  return(1 - pgamma(-ech_Y(n), shape = 3, scale = 2))
}

h_tilde<-function(x){
  return(1 - pgamma(-x, shape = 3, scale = 2))
}

```

```

}

# On calcule le resultat de ce nouvel estimateur MC
ech_7 <-h_7(n)
delta_n_hat <-mean(ech_7)

# Erreur quadratique moyenne:
# L'estimateur etant non biaise, cette derniere est egale a la variance
MSE_7 <-var(ech_7) / n

# Estimateur de la variance:

estimateur_variance_7 <-mean((ech_7 - delta_n_hat) ** 2) * (n / (n - 1))

# Intervalle de confiance asymptotique de niveau 95%:

Intervalle_7 <-
  delta_n_hat + c(-1, 1) * qnorm(0.975) * sqrt(estimeur_variance_7 / n)

```

1.1.8 Question 8

On peut montrer que l'on a toujours $Var(\hat{\delta}_n) \leq Var(\hat{p}_n)$,

$$\begin{aligned}
 Var(\hat{\delta}_n) &= \frac{1}{n} Var(1 - F(t - G^{\leftarrow}(U_1))) \\
 &= \frac{1}{n} (E((1 - F(t - G(U_1)))^2) - E((1 - F(t - G(U_1))))^2) \\
 &= \frac{1}{n} (E((1 - F(t - G(U_1)))^2) - \delta^2).
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 E((1 - F(t - G(U_1)))^2) &= E(1 + F(t - G^{\leftarrow}(U_1))^2 - 2F(t - G^{\leftarrow}(U_1))) \\
 &= \delta + E(F(t - G^{\leftarrow}(U_1))^2 - F(t - G^{\leftarrow}(U_1))).
 \end{aligned}$$

Or $F(t - G^{\leftarrow}(U_1)) \in [0, 1]$, et $u : x \mapsto x^2 - x$ est telle que $u(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, d'où $E((1 - F(t - G(U_1)))^2) \leq \delta$.

Ainsi,

$$Var(\hat{\delta}_n) \leq \frac{1}{n} (\delta - \delta^2).$$

Or $Var(\hat{p}_n) = \frac{1}{n} (E(\mathbb{1}_{X+Y>t}) - E(\mathbb{1}_{X+Y>t})^2) = \frac{1}{n} (\delta - \delta^2)$. D'où $Var(\hat{\delta}_n) \leq Var(\hat{p}_n)$.

1.2 Méthode de Monte Carlo n°2

1.2.1 Question 9

On peut construire l'estimateur de la variable antithétique suivant:

$$\hat{\delta}_n^A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{h}(U_i) + \tilde{h} \circ A(U_i)}{2}$$

pour $U_i \stackrel{iid}{\sim} U([0,1]) \forall i \in [1, n]$ et $A: x \mapsto 1 - x$.

On a,

$$\begin{aligned}
 Var(\hat{\delta}_n^A) &= \frac{1}{n} Var\left(\frac{\tilde{h}(U_1) + \tilde{h} \circ A(U_1)}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{4n} (Var(\tilde{h}(U_1)) + Var(\tilde{h} \circ A(U_1)) + 2Cov(\tilde{h}(U_1), \tilde{h} \circ A(U_1))) \\
 &= \frac{1}{2n} (Var(\tilde{h}(U_1)) + Cov(\tilde{h}(U_1), \tilde{h} \circ A(U_1))) \\
 &= \frac{1}{2} Var(\hat{\delta}_n) + \frac{1}{2n} Cov(\tilde{h}(U_1), \tilde{h} \circ A(U_1)).
 \end{aligned}$$

De plus, \tilde{h} est croissante sur $[0,1]$ car G^{\leftarrow} est croissante. On a également que A est décroissante, et donc que $\tilde{h} \circ A$ est décroissante sur $[0,1]$. Ainsi, étant donné que $\tilde{h}(U_1)$ et $\tilde{h} \circ A(U_1)$ sont de même loi et de carré intégrable, on a que $Cov(\tilde{h}(U_1), \tilde{h} \circ A(U_1)) < 0$.

On obtient,

$$\frac{1}{2}Var(\hat{\delta}_n) + \frac{1}{2n}Cov(\tilde{h}(U_1), \tilde{h} \circ A(U_1)) \leq \frac{1}{2}Var(\hat{\delta}_n).$$

D'où

$$Var(\hat{\delta}_n^A) \leq Var(\hat{\delta}_n).$$

1.2.2 Question 10

```
# On implemente une fonction qui renvoie l'echantillon permettant de ceer
# ensuite l'estimateur de la variable antithetique associee a la fonction A

A <-function(x) {
  return(1 - x)
}

ech_h_antithetique <-function(n) {
  u <-runif(n)
  return((h_7(fct_inv_Y(u)) + h_7(fct_inv_Y(A(
    u
  )))) / 2)
}

ech_h_ant <-ech_h_antithetique(n)

# Resultat de l'estimateur MC de la variable antithetique
delta_A_n_hat <-mean(ech_h_ant)

# Erreur quadratique moyenne associee a ce nouvel estimateur
MSE_anthitetic <-var(ech_h_ant) / n

# Estimateur de la variance:
estimateur_variance_anth <-mean((ech_h_ant - delta_A_n_hat) ** 2) * (n / (n - 1))

# Intervalle de confiance associe a ce nouvel estimateur
Intervalle_10 <-
  delta_A_n_hat + c(-1, 1) * qnorm(0.975) * sqrt(estimateur_variance_anth/n)
```

1.3 Méthode de Monte Carlo n°3

1.3.1 Question 11

Soit h_0 la fonction de variable de contrôle utilisée, on a l'estimateur de variable de contrôle pour

$h : x \mapsto 1 - F(t - x)$

$$\hat{\delta}_n^{cont} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(Y_k) - b(h_0(Y_k) - m)$$

où $m = E[h_0(Y_1)]$ pour Y_k iid.

On a,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\delta}_n^{cont}) &= \frac{1}{n} Var(h(Y_1) - b(h_0(Y_1) - m)) \\ &= \frac{1}{n} (Var(h(Y_1) + b^2 Var(h_0(Y_1)) - 2bCov(h(Y_1), h_0(Y_1))). \end{aligned}$$

On prend $b^* = \frac{Cov(h(Y_1), h_0(Y_1))}{Var(h_0(Y_1))}$ par minimisation d'un polynôme de degré 2.

On obtient,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\delta}_n^{cont*}) &= \frac{1}{n}(Var(h(Y_1)) + \frac{Cov(h(Y_1), h_0(Y_1)))^2}{Var(h_0(Y_1))} - 2\frac{Cov(h(Y_1), h_0(Y_1))^2}{Var(h_0(Y_1))}) \\ &= \frac{1}{n}(Var(h(Y_1)) - \frac{Cov(h(Y_1), h_0(Y_1))^2}{Var(h_0(Y_1))}) \\ &= Var(\hat{\delta}_n) - \frac{1}{n} \frac{Cov(h(Y_1), h_0(Y_1))^2}{Var(h_0(Y_1))}. \end{aligned}$$

On remarque que plus la covariance est élevée en valeur absolue, plus la variance est petite. On prend donc la fonction pour laquelle la covariance avec $h(Y_1)$ est la plus élevée.

$$Var(\hat{\delta}_n^{cont*}) = Var(\hat{\delta}_n)(1 - \rho(h, h_0)^2)$$

On prend donc la fonction pour laquelle la corrélation $\rho(h(Y_1), h_0(Y_1))$ est la plus proche de 1, en valeur absolue.

Après avoir déterminé les corrélations pour chacune des fonctions sur R , nous en avons conclu qu'il est préférable de choisir la fonction $h_{0,1}$.

L'estimateur associé $\hat{\delta}_n^{cont}$ s'écrit donc:

$$\hat{\delta}_n^{cont} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(Y_k) - b^*(h_{0,1}(Y_k) - m)$$

où $m = \mathbb{E}[Y]$.

Déterminons m .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \int_{\mu-2b}^{\mu} y \frac{y-\mu+2b}{4b^2} dy + \int_{\mu}^{+\infty} y \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{y-\mu}{b}\right) dy \\ &= \int_{-17}^{-13} y \frac{y+17}{16} dy + \int_{-13}^{+\infty} y \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \\ &= \frac{1}{16} \int_{-17}^{-13} y^2 + 17y dy + \frac{1}{4} \left(\left[-2y \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) \right]_{-13}^{+\infty} + 2 \int_{-13}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(\left[\frac{y^3}{3} \right]_{-17}^{-13} + 17 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-17}^{-13} \right) + \frac{1}{4} \left(-26 + 2 \left[-2 \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) \right]_{-13}^{+\infty} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{3}(13^3 - 17^3) + \frac{17}{2}(13^2 - 17^2) \right) + \frac{1}{4} \left(-26 + 2(2 \exp(0)) \right) \\ &= -\frac{38}{3}. \end{aligned}$$

1.3.2 Question 12

Pour determiner le coefficient optimal `b_etoile`, on utilise la strategie 1 du cours.

On commence par choisir pour quel `l` on implemente la strategie.

Pour cela, on regarde a partir de quelle valeur de `l` `b_hat` defini dans le cours stagne.

```
choix_l_opti ← function(k){
  y ← ech_Y(k)
  return(cumsum((y+ (38/3)) *(h_tilde(y)-mean(h_tilde(y))))/(sum((y+ (38/3))*(y + (38/3)))))
}
```

```
plot(choix_l_opti(27), col='tomato3', type='b', main='valeur de b* en fonction de l')
```

```
ech_h_controle ← function(n, l=16) {
```

```

y <-ech_Y(n)
h<-h_tilde(y)
b_l_opti_hat<-sum((y[1:l]+ (38/3) )*(h[1:l]-mean(h[1:l])))/(sum((y[1:l]+ (38/3))*(y[1:l]+ (38/3))))
return(h[n-l:n] - b_l_opti_hat * (y[n-l:n] + (38 / 3)))
}

ech_h_cont <-ech_h_controle(n)

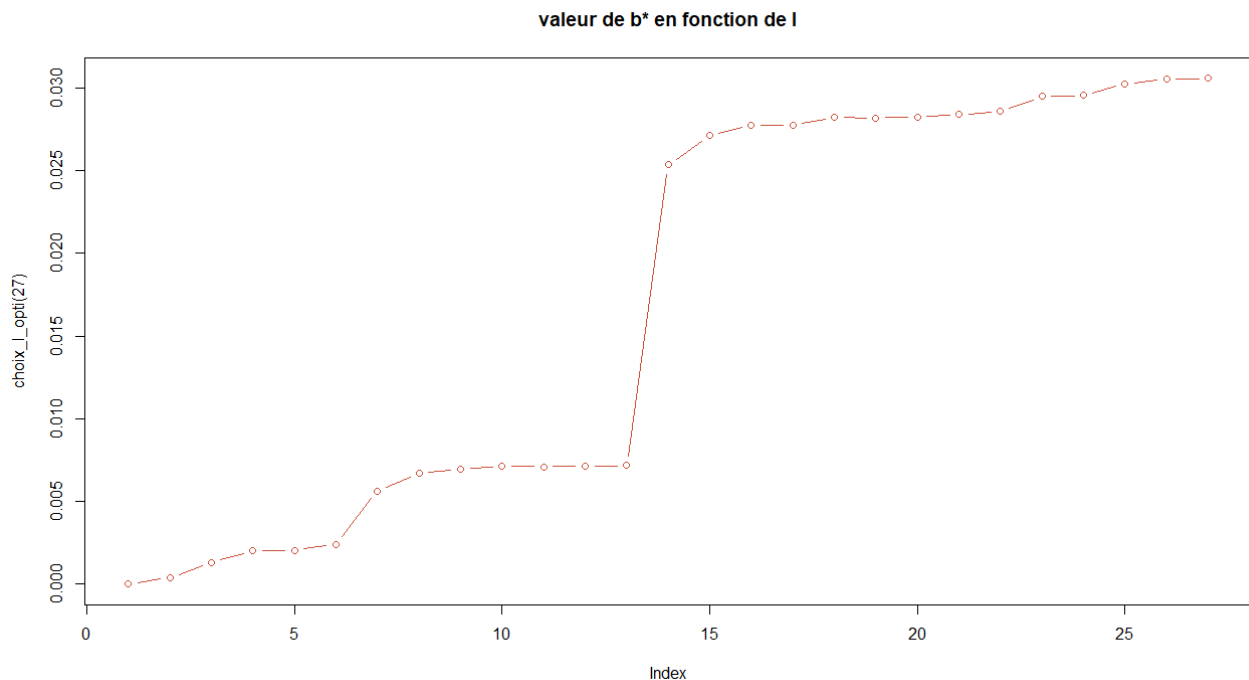
# Resultat de l'estimateur MC de la variable de controle
delta_cont_n_hat <-mean(ech_h_cont)

# Erreur quadratique moyenne associee a cet estimateur sans biais
MSE_cont <-var(ech_h_cont) / n

# Estimateur de la variance:
estimateur_variance_cont <-mean((ech_h_cont - delta_cont_n_hat) ** 2) * (n / (n - 1))

# Intervalle de confiance associe a cet estimateur de la variable de controle
Intervalle_12 <-delta_cont_n_hat + c(-1, 1) * qnorm(0.975) * sqrt(estimateur_variance_cont/n)

```



1.3.3 Question 13

On a d'une part,

$$\text{Var}(\hat{\delta}_n) = \frac{1}{n} \text{Var}(1 - F(t - G^{\leftarrow}(U_1))) = \frac{1}{n} \text{Var}(F(t - G^{\leftarrow}(U_1))).$$

et par transformations mesurables de vaïid

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\delta}_n(\beta)) &= \frac{1}{n} (Var(F(t - Y_1) - \beta_1(Y_1 - E[Y_1]) - \beta_2(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon} - \mathbb{P}(Y \geq t - q_\epsilon)))) \\
&= \frac{1}{n} (Var(F(t - Y_1)) + Var(-\beta_1(Y_1 - E[Y_1]) - \beta_2(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon} - \mathbb{P}(Y \geq t - q_\epsilon)))) \\
&\quad + 2Cov(F(t - Y_1), -\beta_1(Y_1 - E[Y_1]) - \beta_2(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon} - \mathbb{P}(Y \geq t - q_\epsilon))) \\
&= \frac{1}{n} (Var(F(t - Y_1)) + Var(\beta_1(Y_1 - E[Y_1])) + Var(\beta_2(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon} - \mathbb{P}(Y \geq t - q_\epsilon))) \\
&\quad + 2Cov(\beta_1(Y_1 - E[Y_1]), \beta_2(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon} - \mathbb{P}(Y \geq t - q_\epsilon))) \\
&\quad - 2Cov(F(t - Y_1), \beta_1(Y_1 - E[Y_1]) + \beta_2(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon} - \mathbb{P}(Y \geq t - q_\epsilon))) \\
&= \frac{1}{n} (Var(F(t - Y_1)) + Var(\beta_1 Y_1) + Var(\beta_2 \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon})) \\
&\quad + 2\beta_1 \beta_2 Cov(Y_1, \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}) - 2\beta_1 Cov(F(t - Y_1), Y_1) - 2\beta_2 Cov(F(t - Y_1), \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon})) \\
&= \frac{1}{n} Var(F(t - Y_1)) + \frac{1}{n} (\beta_1^2 Var(Y_1) + \beta_2^2 Var(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}) + 2\beta_1 \beta_2 Cov(Y_1, \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon})) \\
&\quad - 2\beta_1 Cov(F(t - Y_1), Y_1) - 2\beta_2 Cov(F(t - Y_1), \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon})).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$2 < \beta, C > = 2(\beta_1 Cov(F(t - Y_1), Y_1) + \beta_2 Cov(F(t - Y_1), \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}))$$

et

$$< \beta, \Sigma \beta > = \beta_1^2 Var(Y_1) + 2\beta_1 \beta_2 Cov(Y_1, \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}) + \beta_2^2 Var(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n} (2 < \beta, C > - < \beta, \Sigma \beta >) &= -\frac{1}{n} (2(\beta_1 Cov(F(t - Y_1), Y_1) + \beta_2 Cov(F(t - Y_1), \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon})) - \beta_1^2 Var(Y_1) \\
&\quad - 2\beta_1 \beta_2 Cov(Y_1, \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}) - \beta_2^2 Var(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon})) \\
&= \frac{1}{n} (\beta_1^2 Var(Y) + \beta_2^2 Var(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}) + 2\beta_1 \beta_2 Cov(Y_1, \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}) - 2\beta_1 Cov(F(t - Y_1), Y_1) \\
&\quad - 2\beta_2 Cov(F(t - Y_1), \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon})).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\delta}_n) - \frac{1}{n} (2 < \beta, C > - < \beta, \Sigma \beta >) &= Var(\hat{\delta}_n) + \frac{1}{n} (\beta_1^2 Var(Y) + \beta_2^2 Var(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}) \\
&\quad + 2\beta_1 \beta_2 Cov(Y_1, \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}) - 2\beta_1 Cov(F(t - Y_1), Y_1) - 2\beta_2 Cov(F(t - Y_1), \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon})) \\
&= \frac{1}{n} Var(F(t - Y_1)) + \frac{1}{n} (\beta_1^2 Var(Y) + \beta_2^2 Var(\mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}) + 2\beta_1 \beta_2 Cov(Y_1, \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon}) \\
&\quad - 2\beta_1 Cov(F(t - Y_1), Y_1) - 2\beta_2 Cov(F(t - Y_1), \mathbb{1}_{Y_1 \geq t - q_\epsilon})).
\end{aligned}$$

D'où l'égalité

$$Var(\hat{\delta}_n(\beta)) = Var(\hat{\delta}_n) - \frac{1}{n} (2 < \beta, C > - < \beta, \Sigma \beta >).$$

1.3.4 Question 14

Calculons explicitement Σ .

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(Y) & Cov(Y, \mathbb{1}_{(y \geq t - q_\epsilon)}) \\ Cov(Y, \mathbb{1}_{(y \geq t - q_\epsilon)}) & Var(\mathbb{1}_{(y \geq t - q_\epsilon)}) \end{pmatrix}$$

Déterminons coefficient par coefficient les valeurs obtenues.

- $Var(Y)$

D'après la question 11, $\mathbb{E}(Y) = -\frac{38}{3}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y) dy \\
&= \int_{-17}^{-13} y^2 \frac{y+17}{16} + \int_{-13}^{+\infty} y^2 \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{16} \int_{-17}^{-13} (y^3 + 17y^2) dy + \frac{1}{4} \int_{-13}^{+\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{16} \left(\left[\frac{y^4}{4} \right]_{-17}^{-13} + 17 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-17}^{-13} \right) + \frac{1}{4} \left(\left[-2y^2 \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) \right]_{-13}^{+\infty} + \int_{-13}^{+\infty} 4y \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \right) \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{13^4 - 17^4}{4} + 17 \frac{17^3 - 13^3}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(2 \times 13^2 \exp(0) \right) + \left(\left[-2y \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) \right]_{-13}^{+\infty} + 2 \int_{-13}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \right) \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{13^4 - 17^4}{4} + 17 \frac{17^3 - 13^3}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(2 \times 13^2 \right) + \left(2 \times (-13) \right) + 2 \left[-2 \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) \right]_{-13}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{13^4 - 17^4}{4} + 17 \frac{17^3 - 13^3}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(2 \times 13^2 \right) - 26 + 2 \times 2 \\
&= \frac{497}{3}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
Var[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\
&= \frac{497}{3} - \frac{38^2}{3} \\
&= \frac{47}{9}
\end{aligned}$$

• $Var(\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon})$ Commençons par déterminer l'espérance de $\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}$. Pour $\epsilon = 0.6$, on a que le quantile d'ordre ϵ de la loi de X est égal à: $q_\epsilon = 6.210757$.

Donc, $-q_\epsilon > \mu$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}] &= \int_{\mu}^{+\infty} \mathbb{1}_{y \geq -q_\epsilon} \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \\
&= \int_{-q_\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{4} \left[-2 \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) \right]_{-q_\epsilon}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{4} \times 2 \exp\left(\frac{q_\epsilon - 13}{2}\right) \\
&= 0.0167766
\end{aligned}$$

Nous pouvons désormais nous concentrer sur la variance.

$$\begin{aligned}
Var(\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}^2) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon})^2 \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon})^2 \\
&= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{q_\epsilon - 13}{2}\right) - \frac{1}{4} \exp(q_\epsilon - 13) \\
&= 0.01650
\end{aligned}$$

• $Cov(Y, \mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon})$

Nous avons la formule suivante:

$$Cov(Y, \mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}) = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}] - \mathbb{E}[Y] \mathbb{E}[\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}]$$

Il nous reste donc à déterminer $\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}] &= \int_{-13}^{+\infty} y\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon} f_Y(y) dy \\
&= \int_{-q_\epsilon}^{+\infty} y \times \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{4} \left(\left[-2y \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) \right]_{-q_\epsilon}^{+\infty} + 2 \int_{-q_\epsilon}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) dy \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\left(-2q_\epsilon \exp\left(\frac{q_\epsilon-13}{2}\right) \right) + 2 \left[-2 \exp\left(-\frac{y+13}{2}\right) \right]_{-q_\epsilon}^{+\infty} \right) \\
&= -\frac{1}{2} q_\epsilon \exp\left(\frac{q_\epsilon-13}{2}\right) + \exp\left(\frac{q_\epsilon-13}{2}\right) \\
&\approx -0.0706423
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$Cov(Y, \mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}) \approx -0.0706423 + \frac{38}{3} \times 0.0167766$$

Donc,

$$\begin{aligned}
Det(\Sigma) &= Var(Y)Var(\mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon}) - Cov(Y, \mathbb{1}_{Y \geq t-q_\epsilon})^2 \\
&\approx \frac{47}{9} \times 0.01650 - 0.0201246 \\
&\approx 0.066
\end{aligned}$$

Le déterminant de Σ est différent de 0, donc la matrice est bien inversible.

1.3.5 Question 15

On a par la question 13,

$$Var(\hat{\delta}_n(\beta)) = Var(\hat{\delta}_n) - \frac{1}{n}(2 \langle \beta, C \rangle - \langle \beta, \Sigma \beta \rangle).$$

On veut minimiser $Var(\hat{\delta}_n(\beta))$ en β :

$$\partial_\beta Var(\hat{\delta}_n(\beta)) = -\frac{1}{n}2C + \frac{1}{n}2\Sigma\beta$$

et

$$\partial_\beta^2 Var(\hat{\delta}_n(\beta)) = 2\Sigma$$

où Σ est définie positive, donc $Var(\hat{\delta}_n(\beta))$ est convexe en β .

On peut donc minimiser en β .

$$\partial_\beta Var(\hat{\delta}_n(\beta)) = 0 \iff \frac{2}{n}C = \frac{2}{n}\Sigma\beta \iff \beta^* = \Sigma^{-1}C.$$

On a,

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\delta}_n(\beta^*)) &= Var(\hat{\delta}_n) - \frac{1}{n}(2 \langle \Sigma^{-1}C, C \rangle - \langle \Sigma^{-1}C, \Sigma \Sigma^{-1}C \rangle) \\
&= Var(\hat{\delta}_n) - \frac{1}{n}(2 \langle \Sigma^{-1}C, C \rangle - \langle \Sigma^{-1}C, C \rangle) \\
&= Var(\hat{\delta}_n) - \frac{1}{n} \langle \Sigma^{-1}C, C \rangle.
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{n} \langle \Sigma^{-1}C, C \rangle = \frac{1}{n} \|C\|_{\Sigma^{-1}}^2 \geq 0.$$

D'où

$$Var(\hat{\delta}_n(\beta^*)) \leq Var(\hat{\delta}_n).$$

1.3.6 Question 16

Pour cette question, notons $\hat{\delta}_n(b^*)$ l'estimateur basé sur la variable de contrôle en utilisant $h_0 : y \mapsto h_{0,1}(y) + h_{0,2}(y)$

$$\hat{\delta}_n(b^*) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(Y_k) - b^*(h_0(Y_k) - m)$$

où

$$m = \mathbb{E}(h_0(Y_k))$$

$$h : x \mapsto 1 - F(t - x).$$

D'après l'énoncé, $\forall \beta \in \mathbb{R}^2$,

$$\hat{\delta}_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(F(t - Y_k) - \langle \beta, U \rangle \right)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} h_{0,1}(Y_k) - \mathbb{E}(h_{0,1}(Y)) \\ h_{0,2}(Y_k) - \mathbb{E}(h_{0,2}(Y)) \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\hat{\delta}_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(h(Y_k) - \beta_1(h_{0,1}(Y_k) - \mathbb{E}(h_{0,1}(Y))) - \beta_2(h_{0,2}(Y_k) - \mathbb{E}(h_{0,2}(Y))) \right).$$

En prenant $b^* = \beta_1 = \beta_2$, on trouve que

$$\hat{\delta}_n(b^*) = \hat{\delta}_n(\beta).$$

Or, par définition de β^* , $\text{Var}(\hat{\delta}_n(\beta^*)) \leq \text{Var}(\hat{\delta}_n(\beta)) \forall \beta \in \mathbb{R}^2$.

En particulier, $\text{Var}(\hat{\delta}_n(\beta^*)) \leq \text{Var}(\hat{\delta}_n(b^*))$.

L'estimateur $\hat{\delta}_n(\beta^*)$ est donc bien préférable en terme de variance à $\hat{\delta}_n(b^*)$.

1.3.7 Question 17

```
ech_h_17 <-function(n) {
  sample <-ech_Y(n)
  a <-exp((q_epsilon - 13) / 2)
  sigma <-
    matrix(c(
      47 / 9,
      a - q_epsilon * a / 2,
      a - q_epsilon * a / 2,
      a / 2 - exp(q_epsilon - 13) / 4
    ), nrow = 2)
  fdr <-pgamma(-sample, scale = 2, shape = 3)
  C <-c(cov(fdr, sample), cov(fdr, 1 * (sample > q_epsilon)))
  beta_opti <-solve(sigma) %*% C
  return(1 - fdr - beta_opti[1] * (sample + 38 / 3) - beta_opti[2] *
    (h_0_2(sample) - a / 2))
}

ech_h_question_17 <-ech_h_17(n)

# Resultat de l'estimateur MC de la question 16
delta_n_beta_hat <-mean(ech_h_question_17)

MSE_beta <-
  var(ech_h_question_17) / n

# Estimateur de la variance:
estimateur_variance_17 <-mean((ech_h_question_17 - delta_n_beta_hat) ** 2) * (n / (n - 1))

Intervalle_17 <-delta_n_beta_hat + c(-1, 1) * qnorm(0.975) * sqrt(estimateur_variance_17/n)
```

1.4 Méthode de Monte Carlo n°4

1.4.1 Question 18

Soit $(U_k)_{k \geq 1}$ variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$.

On a d'une part,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k-1+U_k}{n}\right)\right) &\stackrel{=}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}\left(h\left(\frac{k-1+U_k}{n}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 h\left(\frac{k-1+x}{n}\right)^2 dx - \left(\int_0^1 h\left(\frac{k-1+x}{n}\right) dx \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(y)^2 dy \right) - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 h\left(\frac{k-1+x}{n}\right) dx \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n} \int_0^1 h(y)^2 dy - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E\left[h\left(\frac{k-1+U_k}{n}\right)\right]^2 \\
 &= \frac{1}{n} E[h(U_1)^2] - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E\left[h\left(\frac{k-1+U_k}{n}\right)\right]^2.
 \end{aligned}$$

On a d'autre part,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(U_k)\right) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(h(U_k)) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \int_0^1 h(x)^2 dx - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 h(x) dx \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n} E[h(U_1)^2] - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E[h(U_k)]^2.
 \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a,

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(x) dx \right)^2 &\leq \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(x) dx \right)^2 \sum_{k=1}^n 1^2 \\
 \iff n \left(\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(x) dx \right)^2 &\leq n \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(x) dx \right)^2 \sum_{k=1}^n 1^2 \\
 \iff n \left(\int_0^1 h(x) dx \right)^2 &\leq n^2 \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(x) dx \right)^2 \\
 \iff \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 h(x) dx \right)^2 &\leq \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 h\left(\frac{k-1+x}{n}\right) dx \right)^2 \\
 \iff \sum_{k=1}^n E[h(U_k)]^2 &\leq \sum_{k=1}^n E\left[h\left(\frac{k-1+U_k}{n}\right)\right]^2.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{n} E[h(U_1)^2] - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E\left[h\left(\frac{k-1+U_k}{n}\right)\right]^2 \leq \frac{1}{n} E[h(U_1)^2] - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E[h(U_k)]^2.$$

On a bien montré l'inégalité

$$\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k-1+U_k}{n}\right)\right) \leq \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(U_k)\right).$$

1.4.2 Question 19

On peut définir l'estimateur suivant à partir du résultat précédent,

$$\hat{\Delta}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{h}\left(\frac{k-1+U_k}{n}\right)$$

où \tilde{h} et $(U_i)_{i \geq 1}$ défini dans la question 6.

1.4.3 Question 20

Si on suppose que la suite $\left(\frac{k-1+U_k}{n}\right)_{1 \leq k \leq n}$ est iid, on peut implémenter le code suivant:

```
ech_h_18 <-function(n) {
  k <-1:n
  return(h_7(fct_inv_Y((k - 1 + runif(
    n
  )) / n)))
}

ech_h_question_18 <-ech_h_18(n)
delta_n_hat_18 <-mean(ech_h_question_18)
MSE_18 <-var(ech_h_question_18) / n
estimeur_variance_18 <-
  mean((ech_h_question_18 - delta_n_hat_18) ** 2) * (n / (n - 1))

Intervalle_18 <-
  delta_n_hat_18 + c(-1, 1) * qnorm(0.975) * sqrt(estimeur_variance_18 /
    n)
```

1.4.4 Question 21

La formule de l'efficacité relative d'un estimateur $\hat{\delta}_{1,n}$ par rapport à un autre estimateur $\hat{\delta}_{2,n}$ est donnée par:

$$R(\hat{\delta}_{1,n}, \hat{\delta}_{2,n}) = \frac{c_1 \text{Var}(\hat{\delta}_{1,n})}{c_2 \text{Var}(\hat{\delta}_{2,n})}$$

Où c_1 et c_2 sont respectivement les coûts de calcul de $\hat{\delta}_{1,n}$ et de $\hat{\delta}_{2,n}$. Or, pour un estimateur de Monte Carlo \bar{h}_n , $\text{Var}(\bar{h}_n) = \frac{\text{Var}(h(X))}{n}$, où la valeur δ à estimer est telle que $\delta = \mathbb{E}[h(X)]$. On peut donc simplifier la formule. Dans notre code, nous utilisons ainsi:

$$R(\hat{\delta}_{1,n}, \hat{\delta}_{2,n}) = \frac{c_1 \text{Var}(h_1(X))}{c_2 \text{Var}(h_2(X))}$$

```
# On calcule ici le cout pour construire chaque echantillon des differentes methodes,
# car il suffit ensuite de determiner la moyenne de chaque echantillon pour avoir ensuite
# l'estimateur associe, donc le cout restant pour determiner chaque estimateur est identique
# et ne va donc pas modifier les efficacites relatives si on les comptabilise.
```

```
library(microbenchmark)
microbenchmark(pn_hat_simu(n),
  h_7(n),
  ech_h_antithetique(n),
  ech_h_controle(n),
  ech_h_17(n))

c_pn<-mean(microbenchmark(pn_hat_simu(n))$time)
c_7<-mean(microbenchmark(h_7(n))$time)
c_anth<-mean(microbenchmark(ech_h_antithetique(n))$time)
c_cont<-mean(microbenchmark(ech_h_controle(n))$time)
c_17<-mean(microbenchmark(ech_h_17(n))$time)
c_18<-mean(microbenchmark(ech_h_18(n))$time)

outer(c(c_pn*estimeur_variance_4,c_7*estimeur_variance_7,c_anth*estimeur_variance_anth,
c_cont*estimeur_variance_cont,c_17*estimeur_variance_17,
  c_18*estimeur_variance_18),c(c_pn*estimeur_variance_4,c_7*estimeur_variance_7,
c_anth*estimeur_variance_anth,c_cont*estimeur_variance_cont,c_17*estimeur_variance_17,
  c_18*estimeur_variance_18), '/')
```

On obtient la matrice suivante:

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]
[1,]	1.00000000	6.5272763	5.9462613	10.243103	0.19855252	4.7991644
[2,]	0.15320326	1.00000000	0.9109866	1.569277	0.03041889	0.7352476
[3,]	0.16817290	1.0977110	1.00000000	1.722612	0.03339115	0.8070894
[4,]	0.09762667	0.6372363	0.5805137	1.0000000	0.01938402	0.4685264
[5,]	5.03645092	32.8743069	29.9480533	51.588883	1.00000000	24.1707557
[6,]	0.20836961	1.3600860	1.2390201	2.134351	0.04137231	1.0000000

D'après notre code, en se basant sur les différentes efficacités relatives obtenues, on obtient le classement des estimateurs suivant:

1. δ_n^{cont}
2. $\hat{\delta}_n$ (estimateur de la question 6)
3. $\hat{\delta}_n^A$
4. $\hat{\delta}_n(\beta^*)$
5. \hat{p}_n
6. $\hat{\Delta}_n$

2 Exercice 2

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{2, \dots, m-1\}$. On considère la densité suivante:

$$\Psi(x) = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} G(x)^{k-1} [1 - G(x)]^{m-k} g(x)$$

où G et g sont respectivement la fonction de répartition et la densité de Y défini dans l'exercice 1.

2.0.1 Question 1

On veut implémenter un algorithme du rejet qui simule n réalisations suivant la densité Ψ . Il semble naturel de choisir g comme densité instrumentale. Le principe de l'algorithme du rejet est alors le suivant:

- Trouver M tel que $\Psi(x) \leq M g(x) \forall x \in \mathbb{R}$
- On simule suivant une loi uniforme $U([0, 1])$ et suivant Y .
- En posant $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq \frac{\Psi(Y_n)}{M g(Y_n)}\}$, on a que Y_N a pour densité Ψ .

M correspondant au temps moyen pour simuler une variable aléatoire de densité Ψ , on veut prendre M le plus petit possible. On choisit donc:

$$M = \sup\left\{\frac{\Psi(x)}{g(x)}, x \in \mathbb{R}\right\}$$

Déterminons M .

On notera $\Phi : x \mapsto \frac{\Psi(x)}{g(x)}$ et $C_{k,m} = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}$.

Maximiser Φ sur \mathbb{R} revient à maximiser $\zeta : x \mapsto x^{k-1}(1-x)^{m-k}$ sur $[0, 1]$. En effet, G est une fonction continue et càdlàg, elle est donc bijective sur $[0, 1]$ (si on parvient à trouver le supremum de cette fonction sur $[0, 1]$, alors le x^* pour lequel il est atteint est tel que: $\exists t^* \in \mathbb{R}$ tel que $x^* = G(t^*)$, sous réserve que x^* soit différent de 1). De plus $C_{k,m}$ est déterministe et strictement positif.

Maximisons donc ζ .

$$\begin{aligned} \zeta'(x) &= (k-1)x^{k-2}(1-x)^{m-k} - (m-k)(1-x)^{m-k-1}x^{k-1} \\ &= x^{k-2}(1-x)^{m-k-1} \left[(k-1)(1-x) - (m-k)x \right] \end{aligned}$$

Or, $x^{k-2}(1-x)^{m-k-1} > 0$ sur $]0, 1[$. Donc ζ' est du signe de $x \mapsto (k-1)(1-x) - (m-k)x$ sur $[0, 1]$.

Cette fonction est positive sur $[0, \frac{k-1}{m-1}]$ et négative sur $[\frac{k-1}{m-1}, 1]$ (on a bien $\frac{k-1}{m-1} < 1$). Le maximum est donc atteint en $x^* = \frac{k-1}{m-1}$ et:

$$M = C_{k,m} \left(\frac{k-1}{m-1} \right)^{k-1} \left(\frac{m-k}{m-1} \right)^{m-k}$$

Il suffit dès à présent d'implémenter l'algorithme du rejet pour cette valeur.

```

# On a la densite de psi
psi <-function(x,m,k){
  return((factorial(m)/(factorial(k-1)*factorial(m-k)))*G(x)^(k-1)*(1-G(x))^(m-k)*g(x))
}

# On a la fonction de repartition G de l'exercice 1
G <-function(x) {
  return((x > (-17) &
    x < (-13)) * ((1 / 32) * (x + 17) ^ 2) + (x >= (-13)) *
    (1 - (1 / 2) * exp((-x - 13) / 2)))
}

# On peut mettre en place un algorithme du rejet pour simuler des realisations suivant Psi
simulation_rejet_psi <-function(n, m, k) {
  ech <-c()
  while (length(ech) < n) {
    u <-runif(n)
    y <-ech_Y(n)
    ech <-
      c(ech, y[u < ((m - 1) / (k - 1)) ^ (k - 1) * ((m - 1) / (m - k)) ^ (m -
        k) * G(y) ^ (k - 1) * (1 - G(y))
        ^ (m - k)])
  }
  return(ech[1:n])
}

```

2.0.2 Question 2

```

# On definit un echantillon de reference pour la representation graphique
simulations_exo_2 <-simulation_rejet_psi(1000, 15, 7)

# On represente les realisations empiriques de notre algorithme du rejet
hist(
  simulations_exo_2,
  freq = FALSE,
  col = 'grey60',
  border = 'grey70',
  breaks = 30,
  main = 'Histogramme de Psi',
  ylim = c(0, 1),
  ylab = 'Frequences'
)

# On represente les realisations theoriques de Psi
lines(y <-
  seq(min(simulations_exo_2), max(simulations_exo_2), 0.01),
  psi(y, 15, 7),
  col = c_pal[2],
  lwd = 3)

legend(
  'topright',
  "densite de Psi",
  col = c_pal[2],
  lwd = 3,
  box.lty = 0,
  bg = 'gray95',
  inset = .05,
  cex = 0.7
)

```

