TP7 – Option A

1 Calculs, simplifications, vérifications, résolutions

Exercice 1

Trouver un contre-exemple à une conjecture de Fermat : "Tout entier de la forme $2^{2^n}+1$, avec $n \in \mathbb{N}$ est premier."

$\hookrightarrow$ *Utiliser par exemple les méthodes* `is_prime` *et* `factor`.

Exercice 2

Factoriser les expressions suivantes :

1. $49x^5 + 294x^4 - 56x^3 - 336x^2 + 16x + 96$
2. $x^6 - \sin(y)^3$

Exercice 3

Vérifier les formules suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$
3. $\displaystyle\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} = (x+y)^n.$
4. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
5. $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$
6. $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$ pour $j = e^{2\pi i/3}$

Exercice 4

On considère le polynôme de Tchebychev d'ordre n

$$P_n(t) = \cos(n \arccos t)$$

1. Vérifier pour les 10 premières valeurs de n que $P_n(t)$ est un polynôme en t de degré n.
2. Donner la valeur exacte prise en $t = 2$ par le polynôme de Tchebychev d'ordre 5.

Exercice 5

Calculer l'intégrale suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(u)}{u^2+x^2} du$$

$\hookrightarrow$ *Utiliser les fonctions* `assume` *et* `forget`.

Exercice 6

On considère la fonction suivante définie pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

Vérifier que f est harmonique, c'est à dire que l'on a

$$\Delta f(x,y) = 0,\ (x,y) \neq (0,0).$$

Exercice 7

On considère u_n tel que

$$u_n = \sum_{0\leq k\leq n} a\, q^k$$

Calculer la limite de u_n lorsque n tend vers ∞ en fonction de la valeur de q.

Exercice 8

On considère la formule de Ramanujan suivante :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k\geq 0} \frac{(4k)!\,(1103+26390k)}{(k!)^4\, 396^{4k}}$$

À combien de chiffres significatifs cette formule est-elle vraie en utilisant les 12 premiers termes de la série ?

$\hookrightarrow$ *Utiliser la méthode* `n(digits=...)` *(voir l'aide).*

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'axes Ox et Oy. Déterminer les points d'intersection de deux cercles $C1$ et $C2$ (de rayons respectifs $R1$ et $R2$) d'équations

$$(C1) : x^2 + y^2 = R_1^2$$
$$(C2) : (x - R_1)^2 + y^2 = R_2^2$$

Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n-1} = 2\dfrac{u_n(u_n+1)}{u_n^2+4}$.

1. Trouver l'expression de u_n en fonction de u_{n-1}.

2. Calculer les deux valeurs de u_n possibles pour $u_{n-1} = -1$.
3. Récupérer ces valeurs en utilisant la commande `.rhs()`.

Exercice 11

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels définies par la donnée de leurs premiers termes (u_0, v_0) et les formules de récurrence suivantes

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{9}{10}u_n + \dfrac{2}{5}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n + \dfrac{3}{5}v_n \end{cases}$$

1. Calculer u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 12

Soit $0 < b < a$. On considère les suites imbriquées définies par

$$\begin{cases} u_0 = a, & v_0 = b \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & v_{n+1} = 2\dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que si (u_n) et (v_n) convergent, elles ont la même limite.
2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2} - \frac{(u_n - v_n)v_n}{u_n + v_n}$$
3. En déduire (mathématiquement) que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 < u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$
4. Caculer les quantités pertinentes pour montrer par récurrence que (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.
5. En déduire (mathématiquement) que les deux suites sont adjacentes.
6. Pour $a = 2$ et $b = 1$, quelle semble être la valeur de la limite de (u_n) et (v_n) ?
7. Tracer les deux suites pour $n \leq 10$ à l'aide de la commande `point`.

---

2 Problèmes divers

Exercice 1 - Problèmes de milliardaires

Trois milliardaires X, Y et Z décident de se redistribuer leurs fortunes de la manière suivante : X versera la moitié de sa fortune à Y, puis Y versera la moitié de sa fortune à Z, puis Z versera la moitié de sa fortune à X. Ensuite, ils renouvelleront ce cycle de trois opérations jusqu'à ce que leurs fortunes se stabilisent. Lequel des trois milliardaires a proposé cette méthode de partage saugrenue ?

$\hookrightarrow$ *On pourra noter x_n, y_n et z_n les fortunes respectives de X, Y et Z après n cycles de transactions, calculer x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et n, puis passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$.*

Exercice 2 - Nombres de Hamming

La suite de Hamming est constituée des entiers naturels de la forme $2^a\,3^b\,5^c$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$, rangés par ordre croissant : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18$ etc.

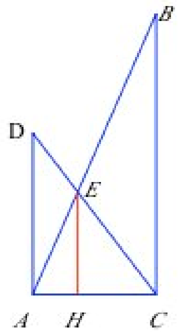
1. En remarquant que tout nombre de Hamming, excepté 1, est égal au double, au triple ou au quintuple d'un nombre de Hamming qui le précède, écrire une fonction récursive `suiv(x)` qui, pour un entier x quelconque, renvoie le plus petit nombre de Hamming qui soit $> x$.
2. Écrire une procédure qui affiche le 101-ième terme de la suite de Hamming.

Exercice 3 - C'est à boire qu'il nous faut

Calculer le nombre de façons de vider un fût de 7 litres de bière à l'aide d'un demi (quart de litre), d'un sérieux (demi-litre) et d'un formidable (un litre) en tenant compte de l'ordre des opérations. Attention, les contenants doivent être remplis entièrement à chaque étape : un contenant d'un demi litre ne peut être utilisé pour vider un quart de litre !

Exercice 4 - Un problème d'échelle

Deux échelles, l'une longue de six mètres, l'autre longue de quatre mètres, sont appuyées sur deux murs verticaux opposés, conformément à la figure ci-contre.



1. Le point de croisement des deux échelles étant à deux mètres du sol, calculer la distance entre les deux murs.
2. Récupérer la valeur de l'unique solution admissible.
3. Tracer la configuration obtenue à l'aide de la commande `line` pour retrouver la figure ci-contre.

Exercice 5 - Tour de magie

Le prestidigitateur (B) demande à un spectateur (A) de choisir un nombre entre 0 et 15. Le prestigitateur pose sept questions à A, qui peut répondre par oui (1) ou par non (0), et peut mentir au plus une fois. Le prestidigitateur peut alors dire au public le nombre que A avait choisi, s'il a menti, et dans ce cas à quelle question.

Voici le procédé du tour de magie.

— *Pensez à un nombre entre 0 et 15.*

— *Répondez aux questions suivantes (vous pouvez mentir une fois)*

1. Est-il ≥ 8 ?
2. Est-il dans $\{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$?
3. Est-il dans $\{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}$?
4. Est-il impair ?
5. Est-il dans $\{1, 2, 4, 7, 9, 10, 12, 15\}$?
6. Est-il dans $\{1, 2, 5, 6, 8, 11, 12, 15\}$?
7. Est-il dans $\{1, 3, 4, 6, 8, 10, 13, 15\}$?

— *Vérifiez s'il y a eu mensonge.* Pour cela, on note $m_i = 1$ ou 0 suivant que la réponse à la i-ème question est oui ou non, et $m = (m_1, \dots, m_7)$ le vecteur de $\mathbb{F}_2^7$ correspondant. Soit k l'entier dont la représentation binaire est $\overline{cba}$ avec

$$a = m_1 + m_3 + m_5 + m_7 \mod 2$$

$$b = m_2 + m_3 + m_6 + m_7 \mod 2$$

$$c = m_4 + m_5 + m_6 + m_7 \mod 2$$

Si $k = 0$, il n'y a pas eu mensonge. Sinon, la k-ième réponse est fausse. On corrige alors m en changeant la k-ième réponse.

— *Calculer le nombre.* La représentation en base 2 du nombre cherché est donnée par les quarte première composantes de m.

Programmer le tour de magie.

Exercice 6 - Fractions rationnelles

On rappelle qu'il existe deux méthode pour définir des polynômes en Sage :

— En récupérant directement les indéterminés

```
X = polygen(RR, 'X')
P = X^2 - 1

# polynôme de deux variables
# GF(5) = Z/5Z
U, V = polygens(GF(5), 'U, V')
F = U^10 + 2*U*V^3 - V^2
```

— En définissant les anneaux de polynômes

```
A = PolynomialRing(ZZ, 'X')
X = A.gen()
P = X^2 - 1
```

1. Définir le polynôme $P(X) = X^4 + 11X^3 + 42X^2 + 65X + 37$ dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Ce polynôme est-il irreductible (utiliser `is_irreducible()`) ?
3. Dresser la liste des 20 premiers nombres premiers p tels que P est irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (utiliser `next_prime()`).
4. Définir les polynômes $F(X) = X^3 + 4X^2 + 4X + 3$ et $G(X) = X^3 + 5 * X^2 + 8 * X + 6$ et tester les commandes `gcd`, `mod`, `quo_rem` et `xgcd`. Que font-elles ?
5. Définir les polynômes $P(X) = X^2 + 3 * X + 2$ et $Q(X) = X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$ sur $\mathbb{Q}[X]$, puis la fraction $R = P/Q$. Tester les commandes `R.numerator()` et `R.denominator()`.
6. Définir `A` comme l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
7. Définir `Q` comme l'espace quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$. On pourra utiliser la fonction `quotient` de `A`.
8. L'espace quotient Q est-il un corps ?
9. Quelle est la classe d'équivalence de X^2 dans Q ?
10. Comment s'écrivent les éléments de Q ? Que vaut le produit de deux éléments de Q ?
11. Q est isomorphe à un corps bien connu, lequel ?
