

Bericht Numerik Projekt 4

Schaltungsmodellierung und -simulation 2

2222.05.2022

ET20a - Numerik

Dozent: Dr. Simon Iwan Stingelin

1 Einleitung

Die Schaltung aus Abbildung 1 wird unter anderem auch als Modell für Perowskit-Solarzellen verwendet. Diese Schaltung wird in den folgenden Aufgaben zuerst mathematisch beschrieben und anschliessend mit numerischen Methoden analysiert.

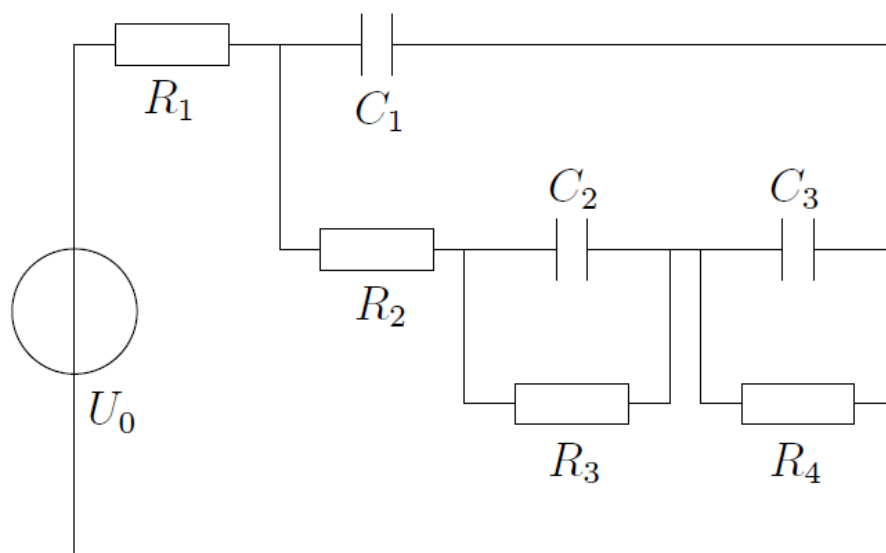


Abbildung 1: Vorgegebene Schaltung

2 Aufgaben und Lösungen

2.1 Mathematische Beschreibung

2.1.1 Aufgabenstellung

Leiten Sie mithilfe der Kirchhoffschen Regeln ein System von zwei linearen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung zur mathematischen Beschreibung dieser Schaltung her. Die unbekannten zeitabhängigen Funktionen seien dabei die Spannungen $U_{C1}(t)$, $U_{C2}(t)$, $U_{C3}(t)$ [V] über den Kondensatoren. Die Spannung an der Quelle ist eine beliebige zeitabhängige Funktion $U_0(t)$ [V]. Als definierende Gleichungen für die beiden Arten von Bauteilen verwenden Sie: $U_R = R \cdot I_R$ (Widerstand), $I_C = C \cdot \dot{U}_C$ (Kondensator).

2.1.2 Lösung

Im ersten Schritt werden die Maschen M und Knoten K in die Schaltung eingezeichnet:

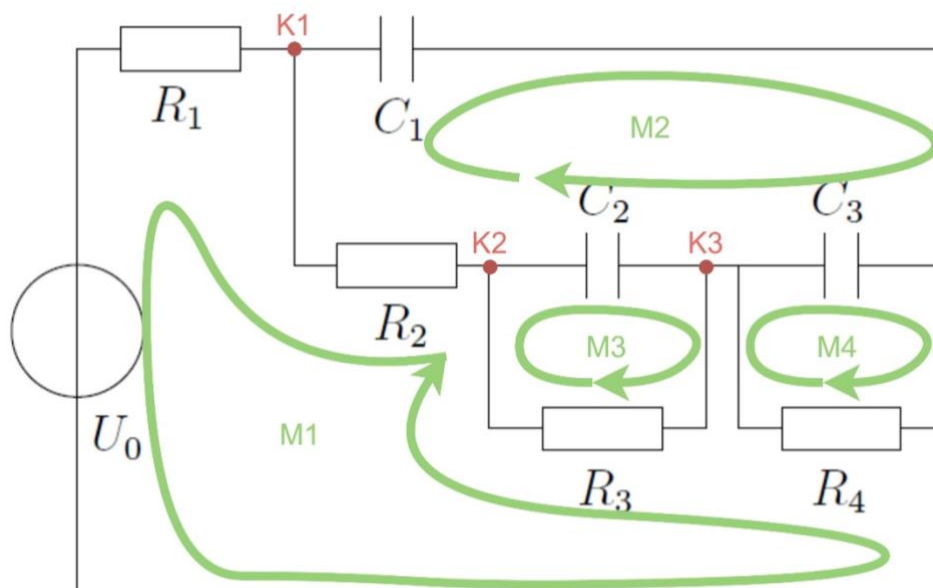


Abbildung 2: 2 Schaltung mit Maschen und Knoten

Daraus werden die folgenden Gleichungen erstellt:

$$K1: \quad I_{R1} = I_{C1} + I_{R2} \quad (1)$$

$$K2: \quad I_{R2} = I_{C2} + I_{R3} \quad (2)$$

$$K3: \quad I_{R3} + I_{C2} = I_{R4} + I_{C3} \quad (3)$$

$$M1: \quad U_0 = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} + U_{R4} \quad (4)$$

$$M2: \quad U_{C1} = U_{R2} + U_{C2} + U_{C3} \quad (5)$$

$$M3: \quad U_{C2} = U_{R3} \quad (6)$$

$$M4: \quad U_{C3} = U_{R4} \quad (7)$$

Aus diesen Maschen- und Knotengleichungen werden folgende Differentialgleichungen aufgestellt:

$$\text{M2 \& K1:} \quad \dot{U}_{C1} = \frac{(U_0 - U_{C1}) \cdot R_2 - (U_{C1} - U_{C2} - U_{C3})}{C_1 \cdot R_1 \cdot R_2} \quad (8)$$

$$\text{M3 \& K2:} \quad \dot{U}_{C2} = \frac{(U_{C1} - U_{C2} - U_{C3}) \cdot R_3 - U_{C2} \cdot R_2}{R_2 \cdot C_2 \cdot R_3} \quad (9)$$

$$\text{M4 \& K3} \quad \dot{U}_{C3} = \frac{(U_{C1} - U_{C2} - U_{C3}) \cdot R_4 - U_{C3} \cdot R_2}{R_2 \cdot C_3 \cdot R_4} \quad (10)$$

2.2 Lösung mit explizite und implizite Euler-Verfahren

2.2.1 Aufgabenstellung

Verwenden Sie zur numerischen Lösung dieses Systems das explizite und implizite Euler-Verfahren. Testen Sie Ihre Implementierung durch Lösen einiger Testfälle, für die Sie die exakte Lösung kennen.

2.2.2 Lösung

Um dieses System lösen zu können wurde die Jakobi Matrix mit den drei Gleichungen (8, 9, 10) aufgestellt.

$$f(U_{C1}, U_{C2}, U_{C3}) = \begin{pmatrix} \dot{U}_{C1} \\ \dot{U}_{C2} \\ \dot{U}_{C3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(U_0 - U_{C1}) \cdot R_2 - (U_{C1} - U_{C2} - U_{C3})}{C_1 \cdot R_1 \cdot R_2} \\ \frac{(U_{C1} - U_{C2} - U_{C3}) \cdot R_3 - U_{C2} \cdot R_2}{R_2 \cdot C_2 \cdot R_3} \\ \frac{(U_{C1} - U_{C2} - U_{C3}) \cdot R_4 - U_{C3} \cdot R_2}{R_2 \cdot C_3 \cdot R_4} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$J_f(U_{C1}, U_{C2}, U_{C3}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_{C1}} & \frac{\partial f_1}{\partial U_{C2}} & \frac{\partial f_1}{\partial U_{C3}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial U_{C1}} & \frac{\partial f_2}{\partial U_{C2}} & \frac{\partial f_2}{\partial U_{C3}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial U_{C1}} & \frac{\partial f_3}{\partial U_{C2}} & \frac{\partial f_3}{\partial U_{C3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2}{C_1 \cdot R_2 \cdot R_3} & \frac{R_1}{C_1 \cdot R_2 \cdot R_3} & \frac{R_1}{C_1 \cdot R_2 \cdot R_3} \\ \frac{1}{C_2 \cdot R_2} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{C_2 \cdot R_2} \\ \frac{1}{C_3 \cdot R_2} & -\frac{1}{C_3 \cdot R_2} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Aus den drei Gleichungen 8, 9, 10 und der Jakobi Matrix wurde folgende Sprungantwort generiert.

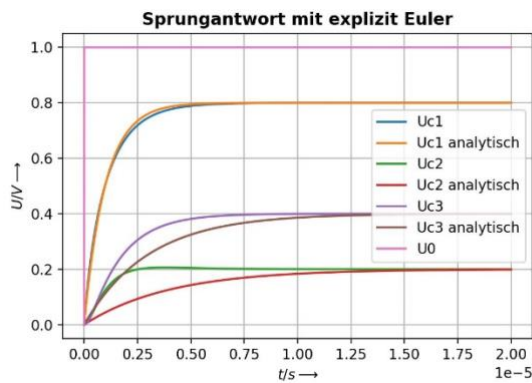


Abbildung 33: Sprungantwort mit explizit Euler

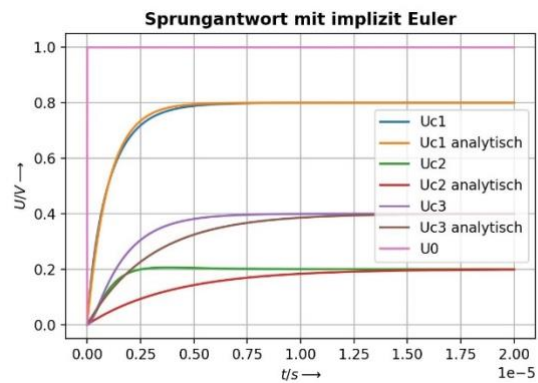


Abbildung 44: Sprungantwort mit implizit Euler

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1k\Omega$$

$$R_4 = 2k\Omega$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 1nF$$

$$U_{C1} = U_{C2} = U_{C3} = 0V (t = 0)$$

2.2.3 Zusätzlich

Als Zusätzlicher Aspekt wurde hier dieselbe Schaltung in LTspice simuliert. Wie auf dem Bild unten zu erkennen ist, sind die Berechnungen und die Simulation beinahe identisch.

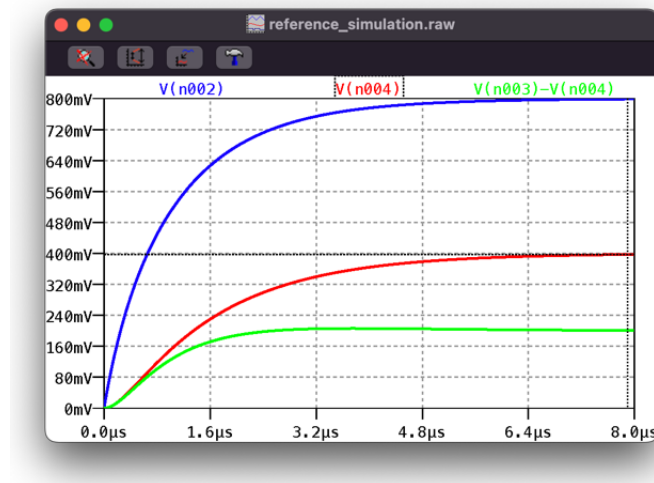


Abbildung 5:5 LTspice Simulation

2.3 Simulation Ein- und Ausschaltvorgang

2.3.1 Aufgabenstellung

Simulieren Sie Ein- und Ausschaltvorgänge für diese Schaltung. Dabei ist U_0 eine Sprungfunktion oder eine Rechteckfunktion. Probieren Sie verschiedene Kombinationen der Parameter $R_1, R_2, R_3, R_4, C_1, C_2, C_3$ aus.

2.3.2 Lösung

Sprungantwort:

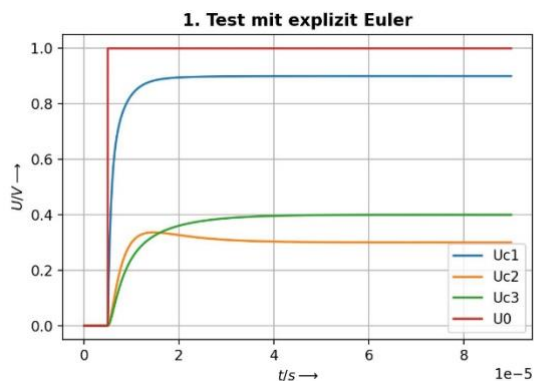


Abbildung 66: 1. Test mit explizit Euler

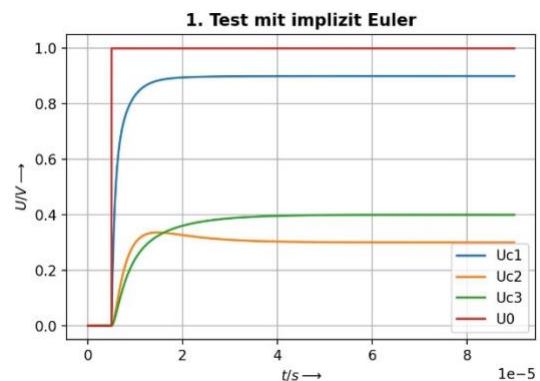


Abbildung 77: 1. Test mit implizit Euler

Rechteckfunktion:

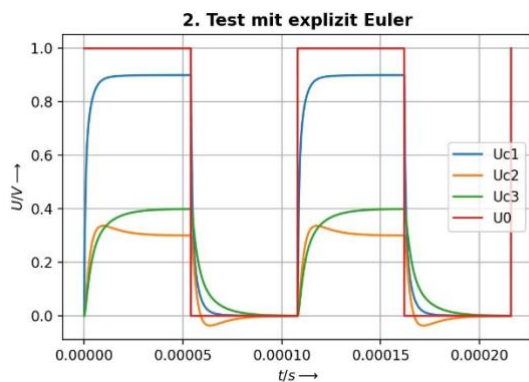


Abbildung 88: 2. Test mit explizit Euler

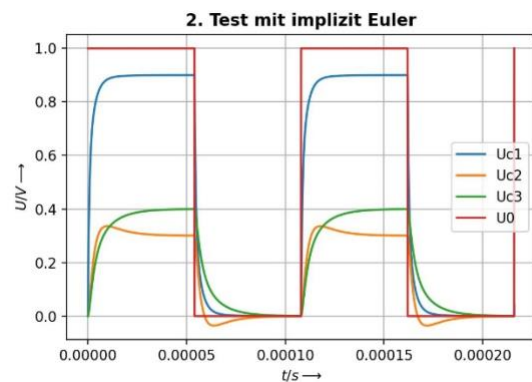


Abbildung 99: 2. Test mit implizit Euler

Bauteilgrößen:

$$R_1 = 4k\Omega$$

$$R_2 = 3k\Omega$$

$$R_3 = 2k\Omega$$

$$R_4 = 1k\Omega$$

$$C_1 = 1nF$$

$$C_2 = 2nF$$

$$C_3 = 3nF$$

$$U_{C1} = U_{C2} = U_{C3} = 0V \text{ (t = 0)}$$

2.3.3 Zusätzlich

Zusätzlich wurde der Fall mit einer Angangsbedingung untersucht. In diesem Fall ist der Kondensator C2 zu Beginn auf 0.5V geladen.

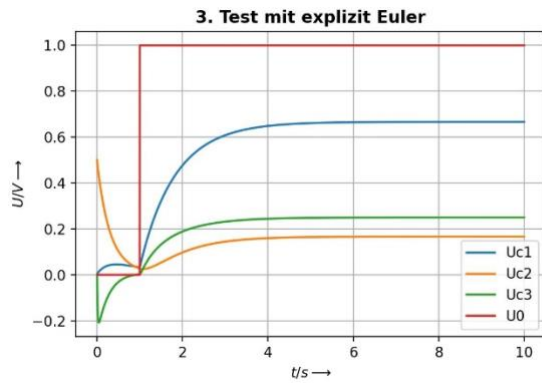


Abbildung 1010: 3. Test mit explizit Euler

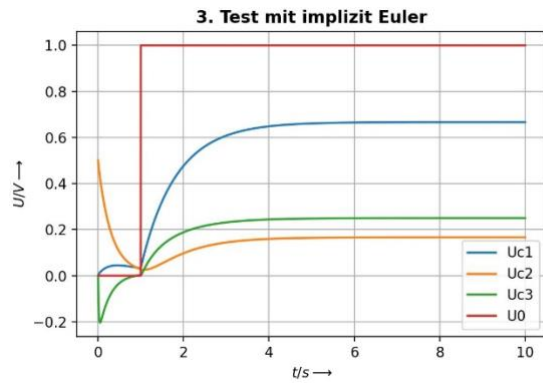


Abbildung 1111: 3. Test mit implizit Euler

Bauteilgrößen:

$$R_1 = 400k\Omega$$

$$R_2 = 300k\Omega$$

$$R_3 = 200k\Omega$$

$$R_4 = 300k\Omega$$

$$C_1 = 3\mu F$$

$$C_2 = 2\mu F$$

$$C_3 = 100nF$$

$$U_{C1} = U_{C3} = 0V, U_{C2} = 0.5V (t = 0)$$

2.4 Berechnung stationärer Zustand

2.4.1 Aufgabenstellung

Berechnen Sie für $U_0 = \text{const.}$ analytisch den konstanten stationären Zustand x_∞ des Systems $\dot{x} = \underline{A}x + b$ aus dem ersten Schritt, d. h. die Lösung mit $x'_\infty = 0_2$. Wenn Sie für $U_0 = \text{const.}$ mit $x_0 \neq x_\infty$ anfangen, wie lange dauert es dann, bis die Lösung bis auf 1% an den konstanten stationären Zustand herangekommen ist? Untersuchen Sie, wie diese Zeitdauer von den Parametern abhängt.

2.4.2 Lösung

Der stationäre Zustand wurde analytisch ermittelt und ist im Plot als schwarz gestrichelte Linie dargestellt. Für die analytische Lösung wurde der Spannungsteiler bei vorgegebener Spannung U_0 berechnet.

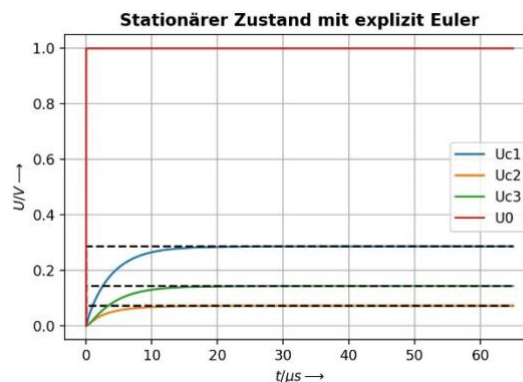


Abbildung 1212: Stationärer Zustand mit explizit Euler

Bauteilgrößen:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1k\Omega$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 1nF$$

$$R_4 = 2k\Omega$$

$$U_{C1} = U_{C2} = U_{C3} = 0V \text{ (} t = 0 \text{)}$$

Analytische Lösung bei $t = \infty$:

$$U_{C1} = U_0(t) \cdot \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad (13)$$

$$U_{C2} = U_0(t) \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad (14)$$

$$U_{C3} = U_0(t) \cdot \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad (15)$$

2.5 Berechnung periodischer stationärer Zustand

2.5.1 Aufgabenstellung

Berechnen Sie für $U_0(t) = \hat{U}_0 \sin(\omega t)$ die analytische Lösung des periodischen stationären Zustandes (daher die partikuläre Lösung). Sie können diese Lösung mit der Ansatzmethode oder Fourier-Transformation berechnen. Illustrieren Sie in einer numerischen Simulation das Erreichen dieses Zustands nach dem Einschwingvorgang.

2.5.2 Lösung

Test der beiden Verfahren mit einer sinusförmigen Wechselspannung von 50kHz und einer Amplitude von 1V.

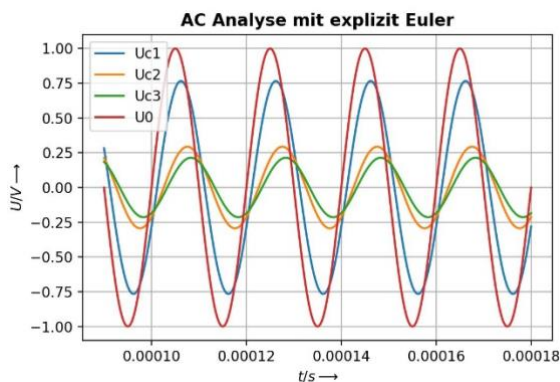


Abbildung 1313: AC Analyse mit explizit Euler

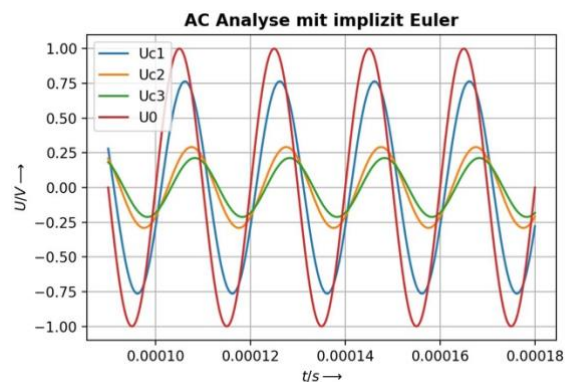


Abbildung 14: AC Analyse mit implizit Euler

Beiteilgrößen:

$$R_1 = 1k\Omega$$

$$R_2 = 2k\Omega$$

$$R_3 = 3k\Omega$$

$$R_4 = 4k\Omega$$

$$C_1 = 1nF$$

$$C_2 = 2nF$$

$$C_3 = 3nF$$

$$U_{C1} = U_{C2} = U_{C3} = 0V \text{ (t = 0)}$$

2.5.3 Zusätzlich

Als zusätzlicher Aspekt wurde die numerische Lösung mit explizit Euler mit der analytischen Lösung in Form eines Netzwerks aus komplexen Impedanzen verglichen.

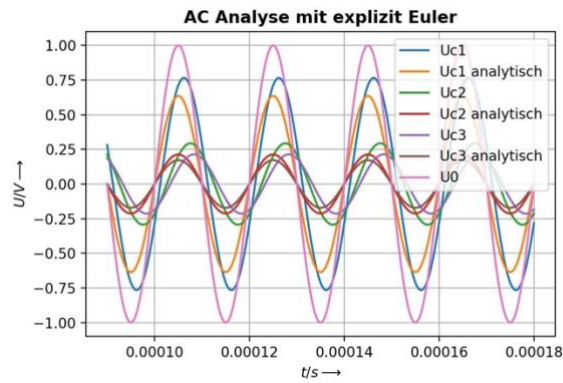


Abbildung 1514: Vergleich AC Analyse explizit Euler

Beiteilgrößen:

$$R_1 = 1k\Omega$$

$$R_2 = 2k\Omega$$

$$R_3 = 3k\Omega$$

$$R_4 = 4k\Omega$$

$$C_1 = 1nF$$

$$C_2 = 2nF$$

$$C_3 = 3nF$$

$$U_{C1} = U_{C2} = U_{C3} = 0V \text{ (t = 0)}$$

2.6 Implizite Trapezregel

2.6.1 Aufgabenstellung

Verwenden Sie die implizite Trapezregel zur Lösung Ihres linearen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen aus 1. Erstellen Sie ein Genauigkeits-Aufwand-Diagramm für die bisher verwendete implizite Mittelpunkts- und die implizite Trapezregel.

2.6.2 Lösung

Für die Lösung mit dem impliziten Trapez-Verfahren wurde, die zuvor im Praktikum erarbeitete Methode verwendet.

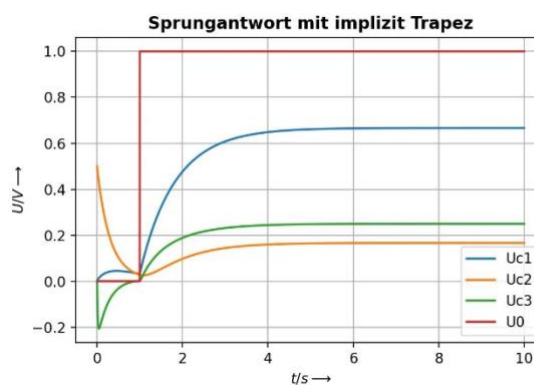


Abbildung 1615: Sprungantwort mit implizit Trapez

Beiteilgrößen:

$$R_1 = 400k\Omega$$

$$R_2 = 300k\Omega$$

$$R_3 = 200k\Omega$$

$$R_4 = 300k\Omega$$

$$C_1 = 3\mu F$$

$$C_2 = 2\mu F$$

$$C_3 = 100nF$$

$$U_{C1} = U_{C2} = U_{C3} = 0V \text{ (t = 0)}$$

3 Fazit

Zusammenfassend kann aus vorhergehenden Ergebnissen geschlossen werden, dass die Beschreibung dieser Schaltung mit Differentialgleichungen sehr gute numerische Lösungen liefert. In den durchgeführten Simulationen konnte keine Abweichung zwischen den beiden Methoden «Explizit Euler» und «Implizit Euler» erkannt werden. Einzig der Vergleich mit einem Netzwerk aus komplexen Impedanzen lieferte sichtbare Unterschiede.

4 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Vorgegebene Schaltung	2
Abbildung 2: Schaltung mit Maschen und Knoten	3
Abbildung 3: Sprungantwort mit explizit Euler	5
Abbildung 4: Sprungantwort mit implizit Euler	5
Abbildung 5: LTspice Simulation	5
Abbildung 6: 1. Test mit explizit Euler	6
Abbildung 7: 1. Test mit implizit Euler	6
Abbildung 8: 2. Test mit explizit Euler	6
Abbildung 9: 2. Test mit implizit Euler	6
Abbildung 10: 3. Test mit explizit Euler	7
Abbildung 11: 3. Test mit implizit Euler	7
Abbildung 12: Stationärer Zustand mit explizit Euler	8
Abbildung 13: AC Analyse mit explizit Euler	9
Abbildung 15: Vergleich AC Analyse explizit Euler	10
Abbildung 16: Sprungantwort mit implizit Trapez	11

5 Formelverzeichnis

- (1) Knoten 1
- (2) Knoten 2
- (3) Knoten 3
- (4) Masche 1
- (5) Masche 2
- (6) Masche 3
- (7) Masche 4
- (8) Differentialgleichung 1
- (9) Differentialgleichung 2
- (10) Differentialgleichung 3
- (11) Gleichungssystem
- (12) Jakobimatrix
- (13) Analytische Lösung UC1 bei $t=0$
- (14) Analytische Lösung UC2 bei $t=0$
- (15) Analytische Lösung UC3 bei $t=0$