Projekt 4: Schaltungsmodellierung und -simulation 2

Christoph Kirsch
editiert Simon Stingelin (stiw@zhaw.ch)

28. April 2022

1 Lerninhalt

- Schaltungsmodellierung mit Hilfe von gewöhnlichen Differentialgleichungen
- Anwenden numerischer Methoden für Anfangswertprobleme
- Entwickeln numerischer Methoden in python/matlab
- Dokumentieren und graphisch veranschaulichen der Resultate

2 Einführung

Wir betrachten die folgenden Schaltung mit einer idealen Spannungsquelle, vier ohmschen Widerständen R_1, R_2, R_3, R_4 $[\Omega]$ und drei Kondensatoren mit Kapazitäten C_1, C_2, C_3 [F]. Sie wird unter anderem als Modell für neuartige Perowskit-Solarzellen verwendet:

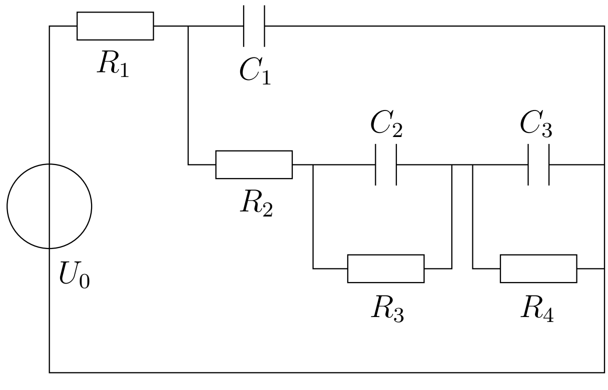

Abbildung 1: Schema

3 Aufgaben

1. Leiten Sie mithilfe der Kirchhoffschen Regeln ein System von drei linearen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung zur mathematischen Beschreibung dieser Schaltung her (vgl. Appedix A). Die unbekannten zeitabhängigen Funktionen seien dabei die Spannungen $U_{C_1}(t), U_{C_2}(t), U_{C_3}(t)$ [V] über den Kondensatoren. Die Spannung an der Quelle ist eine beliebige zeitabhängige Funktion $U_0(t)$ [V]. Als definierende Gleichungen für die beiden Arten von Bauteilen verwenden Sie:

$$U_R = RI_R \text{ (Widerstand)}, \quad I_C = C\dot{U}_C \text{ (Kondensator)}.$$

2. Verwenden Sie zur numerischen Lösung dieses Systems das explizite und implizite Euler-Verfahren. Testen Sie Ihre Implementierung durch Lösen einiger Testfälle, für die Sie die exakte Lösung kennen.

3. Simulieren Sie Ein- und Ausschaltvorgänge für diese Schaltung. Dabei ist U_0 eine Sprungfunktion oder eine Rechteckfunktion. Probieren Sie verschiedene Kombinationen der Parameter R_1, R_2, R_3, R_4, C_1, C_2, C_3 aus.

4. Berechnen Sie für $U_0 =$ const. analytisch den konstanten stationären Zustand $\boldsymbol{x}_\infty$ des Systems $\dot{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ aus dem ersten Schritt, d. h. die Lösung mit $\dot{\boldsymbol{x}}_\infty = \boldsymbol{0}_2$.

   Wenn Sie für $U_0 =$ const. mit $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{x}_\infty$ anfangen, wie lange dauert es dann, bis die Lösung bis auf 1 % an den konstanten stationären Zustand herangekommen ist? Untersuchen Sie, wie diese Zeitdauer von den Parametern abhängt.

5. Berechnen Sie für $U_0(t) = \hat{U}_0 \sin(\omega t)$ die analytische Lösung des periodischen stationären Zustandes (daher die partikuläre Lösung). Sie können diese Lösung mit der Ansatzmethode oder Fourier-Transformation berechnen. Illustrieren Sie in einer numerischen Simulation das Erreichen dieses Zustands nach dem Einschwingvorgang.

6. Verwenden Sie die implizite Trapezregel zur Lösung Ihres linearen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen aus 1. Erstellen Sie ein Genauigkeits-Aufwand-Diagramm für die bisher verwendete implizite Mittelpunkts- und die implizite Trapezregel.

4 Abgabe

Dokumentieren Sie Ihre Arbeit in Form eines Kurzberichts und kommentierten python/matlab Skripts. Die Bewertung erfolgt im Rahmen der auf moodle kommunizierten Bewertungsschema.

A Schaltungsmodellierung mit gewöhnlichen Differentialgleichungen

Wir betrachten die folgende Schaltung mit einer idealen Spannungsquelle, einem ohmschen Widerstand R [Ω], einem Kondensator mit Kapazität C [F] und einer Induktivität L [H]:

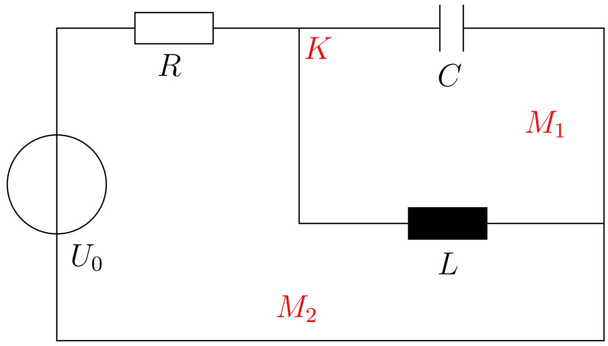

Abbildung 2: Schema mit einem Knoten und zwei Maschen

1. Wir definieren die beiden zeitabhängigen Unbekannten $U_C(t)$ [V] (Spannung über dem Kondensator) und $I_L(t)$ [A] (Strom durch die Induktivität). Wir wollen zwei lineare gDgln 1. Ordnung für U_C und I_L herleiten.

2. Wir verwenden die Kirchhoffschen Regeln am Knoten K und in den Maschen M_1, M_2:

   (a) Nach der Knotenregel am Knoten K gilt $I_R = I_C + I_L$.

   (b) Nach der Maschenregel in der Masche M_1 gilt $U_C = U_L$.

   (c) Nach der Maschenregel in der Masche M_2 gilt $U_0 = U_R + U_L$.

3. Aus 2(b) und 2(c) erhalten wir $U_0 = U_R + U_C \Rightarrow U_R = U_0 - U_C$. Aus der definierenden Gleichung $U_R = RI_R$ für den Widerstand erhalten wir $I_R = \frac{1}{R}U_R = \frac{U_0 - U_C}{R}$, und damit aus 2(a):

$$\frac{U_0 - U_C}{R} = I_R \overset{2(a)}{=} I_C + I_L = C\dot{U}_C + I_L, \tag{1}$$

   wobei wir im letzten Schritt die definierende Gleichung $I_C = C\dot{U}_C$ für den Kondensator verwendet haben. Dies ist eine lineare gDgl, die nur noch U_0, U_C und I_L enthält. Eine zweite derartige gDgl erhalten wir direkt aus 2(b), mit der definierenden Gleichung $U_L = L\dot{I}_L$ für die Induktivität:

$$U_C \overset{2(b)}{=} U_L = L\dot{I}_L. \tag{2}$$

4. Wir schreiben (1), (2) als lineares System von zwei gDgln 1. Ordnung für (U_C, I_L):

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_C \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C}\left(\frac{U_0 - U_C}{R} - I_L\right) \\ \frac{1}{L}U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_C \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{U_0}{CR} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses System ist von der Form $\dot{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$, wobei $\boldsymbol{b}(t)$ die Quellenspannung $U_0(t)$ enthält, die eine beliebige zeitabhängige Funktion ist. Die Einträge der Matrix $\underline{\boldsymbol{A}}$ sind hingegen zeitunabhängig.