

第1章 基础：逻辑和证明

1.1 命题逻辑

1.1 命题逻辑

- 形式逻辑：采用抽象符号表示推理过程
 - 利用符号，可以把人的推理过程分解成一些简单、原始、机械的步骤
 - 使得用计算机代替人进行推理成为可能

1.1 命题逻辑

- 程序设计时，需要把整个推理及计算过程，丝毫不漏地全盘考虑到，并统统编入程序，机器才能依次执行
 - 必须有足够的数理逻辑训练，熟悉推理过程的全部细节，才能做好程序设计

1.1 命题逻辑

- 程序设计是一个细致而麻烦的工作
 - 如何设计正确的程序?
 - 逻辑正确是程序(段)正确的必要条件
 - 如何防止在计算过程中出现错误? 如何很快地发现这种错误而及时加以改正?
 - 逻辑可以帮助证明程序(段)的正确性

1.1 命题逻辑

- 基本概念

- 命题、真值
- 逻辑运算符(联接词)
 - 非、与、或、蕴含、双蕴含

- 基础工具

- 真值表

- 相关应用

- 逻辑表达式、布尔检索、逻辑难题、位运算

1.1.2 命题(proposition)

- 定义1：一个命题就是一条陈述句
 - 陈述的事情能够判别其真假
 - 要么真、要么假，不能既真又假
- 定义2：命题的真假叫做命题的真值
 - 只有两种真值：真、假
 - True、False; 1、0; T、F

1.1.2 命题

- 一个命题就是一条陈述句
 - 陈述的事情能够判别其真假
 - P1 例 1
- 非陈述句不是命题 为什么？
 - 感叹句、祈使句、疑问句 无法判断真假
 - P2 例2, “真好啊！”

1.1.2 命题

- 一个命题就是一条或真或假陈述句
- 每条陈述句都是一个命题 正确吗？
 - P1 例1 是命题吗？能够判断其真假吗？
 - $1+1=2$ 为真，那么 $1+1=10$ 为假吗？ 二进制加法
 - 当明确了规则后，上述语句才是命题
 - 注意：在判断命题(陈述句)真假时，需要其所在的场景(即上下文)

1.1.2 命题

- 在判断命题(陈述句)真假时，需要明确其所在的场景(即上下文)
 - 例3 “今天是星期五”是命题吗？
 - 今天是哪一天？语句的真假能被明确判断吗？
 - 当明确了时间后，上述语句才是命题

1.1.2 命题

- 在判断命题(陈述句)真假时，需要明确其所在的场景(即上下文)
 - “这块黑板上没有写字”是命题吗？
 - 如果我站在隔壁教室说话呢？
 - 当明确了说话的地点后，上述语句才是命题

1.1.2 命题

- 在判断命题(陈述句)真假时, 需要明确其所在的场景(即上下文)
 - “这盘菜是咸的” 是命题吗?
 - 如果说话的人是自贡人?
 - 当明确了说话的人后, 上述语句才是命题

1.1.2 命题

- 在判断命题(陈述句)真假时, 需要明确其所在的场景(即上下文)
 - P2 例2 中3、4 真的就不能是命题吗?
 - 当 $x=1$ 时, $x+1=2$ 是命题吗?
 - 当 $x=y=2$ 、 $z=3$ 时, $x+y=z$ 是命题吗?
 - 如果变量被赋值后, 上述语句可以是命题

1.1.2 命题

- 一个命题就是一条(明确了其上下文的)陈述句
 - “飞碟来自外星球”是命题吗?
 - “哥德巴赫猜想是正确的”是命题吗?
 - ∴虽真假未知, 但真假可知
 - ∴都是命题!

1.1.2 命题

- 一个命题就是一条(明确了其上下文的)陈述句 **“悖论” 不是命题!**

– 剃头匠说: “我只给不自己剃须的人刮胡子” 请问: 他给自己刮胡子吗?

- 这条已明确了上下文的陈述句是命题吗?

悖论2: 本语句为假 请判断这条陈述句的真假

1.1.2 命题

- 一个命题就是一条(明确了其上下文的)陈述句
 - 要么真、要么假，不能既真又假
 - “我是高兴的”是真还是假?
 - 因为没有确定其真假的方法，所以无法判断
 - 这样的陈述句不在本书范围内：“三值”逻辑
 - 命题逻辑是一种“二值”逻辑

1.1.2 命题

- 一个命题就是一条(明确了其上下文的)陈述句：要么真、要么假，不能即真又假
 - “雪花是形状规则、重量小、无色、无味、冰凉、冬天才有的水合物”是命题吗？
 - 是真还是假？
 - 你需要分几步，才能完成对其真假的判断

1.1.2 命题

- 你能一次就能完成对其真假的判断吗？
 - “雪花是形状规则、重量小、无色、无味、冰凉、冬天才有的水合物”

复合命题
 - “雪花是水合物”：可以独立的一次完成
- 原子命题：其真假独立于其它命题
 - 命题的基本单位

练习1

- 以下哪些陈述句是命题？其真值是什么？

① 能整除 7 的整数只有 1 和 7 本身 是, T

② 对于每个正整数 n , 存在一个大于 n 的素数 是, T

③ 宇宙中地球是惟一有生命的星球 是, 未知

(原子)命题的符号化表示

- (原子)命题变元: p, q, r, s, \dots
- 真值: 真=T, 假=F
- 为什么要符号化表示?
 - 缺点: 抽象不具体
 - 好处: ? 字少写得快? 概念形式化

复合命题(compound proposition)

- 定义：已有命题用逻辑运算符组合成的新命题
 - “雪花是形状规则、重量小、无色、无味、冰凉、冬天才有的水合物” 就是一个复合命题
 - “雪花是形状规则的”：p “雪花是重量小的”：q
 - “雪花是无色的”：r “雪花是无味的”：s
 - “雪花是冰凉的”：t “雪花是冬天才有的”：u
 - “雪花是水合物”：v
 - 复合命题的符号化表示： $p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \wedge u \wedge v$

逻辑运算符

逻辑运算符

- 组合命题的符号：也叫联结词
 - 否定、合取、析取、蕴涵、双蕴涵
 - 表示原子命题之间的逻辑关系

否定命题(negation)

- 命题 p 的否定: $\neg p$
 - \neg : 非运算符
- 否定命题的真值
 - 当 p 为假时, $\neg p$ 为真

真值表(truth table)

- 枚举命题真值的所有取值情况

否定命题的真值表

p	$\neg p$
T	F
F	T

合取命题(conjunction)

- p与q的合取: $p \wedge q$
 - 当p与q同时为真时, $p \wedge q$ 为真, 否则为假

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

练习2

- 符号化以下命题
 - 王华既用功又聪明
 - 王华虽然用功，但是不聪明
 - 王华不仅用功而且聪明
- 王华用功： p ，王华聪明： q $p \wedge q$

练习3

- 符号化以下命题

① 王华与张兰都是好学生

② 王华是好学生，并且张兰是好学生

③ 虽然 $1+1=3$ ，但是一个世纪是一百年

④ 既有 $2+3=5$ ，又有天正在下雨

⑤ 王华与张兰是同学

析取命题(disjunction)

- p与q的析取: $p \vee q$
 - 当p与q同时为假时, $p \vee q$ 为假, 否则为真

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

同或(inclusive or)

“或”的两种含义

- 异或(exclusive or): 记号 \oplus

- 当p、q中恰有一个为真时， $p \oplus q$ 为真

- 小元元只能拿一个苹果或一个梨
 - 王小红生于1975年或1976年

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

1.1.3 蕴涵(implication)

- 蕴涵命题 $p \rightarrow q$
 - 当p为真q为假时, $p \rightarrow q$ 为假
 - p: 假设(premise)、前项(antecedent)、前提(hypothesis)
 - q: 结论(conclusion)、推论(consequence)
 - 也称为条件语句(conditional statement)

1.1.3 蕴涵(implication)

- 蕴涵命题 $p \rightarrow q$

- 当 p 为真 q 为假时, $p \rightarrow q$ 为假

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

1.1.3 蕴涵(implication)

- $p \rightarrow q$ 的自然语句描述

- 如果 p , 那么 q vs. q 如果 p
- p 仅当 q vs. q 每当 p
- p 推出 q vs. q 由 p 推出
- 只要 p , 就有 q vs. 只有 q , 才有 p
- p 的必要条件是 q vs. q 的充分条件是 p

1.1.3 蕴涵(implication)的特殊性

- 当 p 为假时, $p \rightarrow q$ 为真? ? ?

1. 当前提为假时, 任意结论都可能

- 如果太阳从西方出, 雪就是黑的
- 如果太阳从西方出, 我就不姓黄
- 如果地球会飞, 则地球有翅膀

2. 前提虽然为假, 但可能正确推导出结论

1.1.3 蕴涵(implication)的特殊性

- 当 p 为假时, $p \rightarrow q$ 为真? ? ?

1. 当前提为假时, 任意结论都可能
2. 前提虽然为假, 却可能正确推导出结论

$$0=1 \rightarrow 3=9$$

$$\textcircled{1} \quad 0=1$$

$$\textcircled{2} \quad 1=2 \quad \textcircled{1} + 1$$

$$\textcircled{3} \quad 3=6 \quad \textcircled{2} \times 3$$

$$\textcircled{4} \quad 0=3 \quad \textcircled{1} \times 3$$

$$\textcircled{5} \quad 3=9 \quad \textcircled{3} + \textcircled{4}$$

$$0=1 \rightarrow 4=4$$

$$\textcircled{1} \quad 0=1$$

$$\textcircled{2} \quad 4=5 \quad \textcircled{1} + 4$$

$$\textcircled{3} \quad 0=-1 \quad \textcircled{2} \times -1$$

$$\textcircled{4} \quad 4=4 \quad \textcircled{2} + \textcircled{3}$$

1.1.3 蕴涵(implication)的特殊性

- $p \rightarrow q$ (实质蕴涵)

- 可以不是因果关系

- 如果天下雨, 那么 $2+3=5$

- 可以不是条件与结论

- 如果我去商店, 就给你买苹果

- 若我没去商店, 但仍然可以买苹果

1.1.3 蕴涵(implication)的特殊性

- 实际逻辑 vs. 命题逻辑
 - 实际含义 vs. 形式语义
 - 形式逻辑：抽象化实际逻辑
 - “重结构、轻内容”
 - 只处理真假关系，可以不关心内容、意义

形式化符号串 ← 形式化处理

1.1.3 蕴涵(implication)的特殊性

- 蕴涵与 if 语句之间有所不同
 - **if (p) s;**
 - **if (2+3==5) x=x+1;**
 - 程序设计语言中的 if 语句是动作控制结构
 - 条件和动作之间有因果关系
 - 命题逻辑中的蕴涵是逻辑关系结构
 - 前提和结论之间不一定非要有因果关系

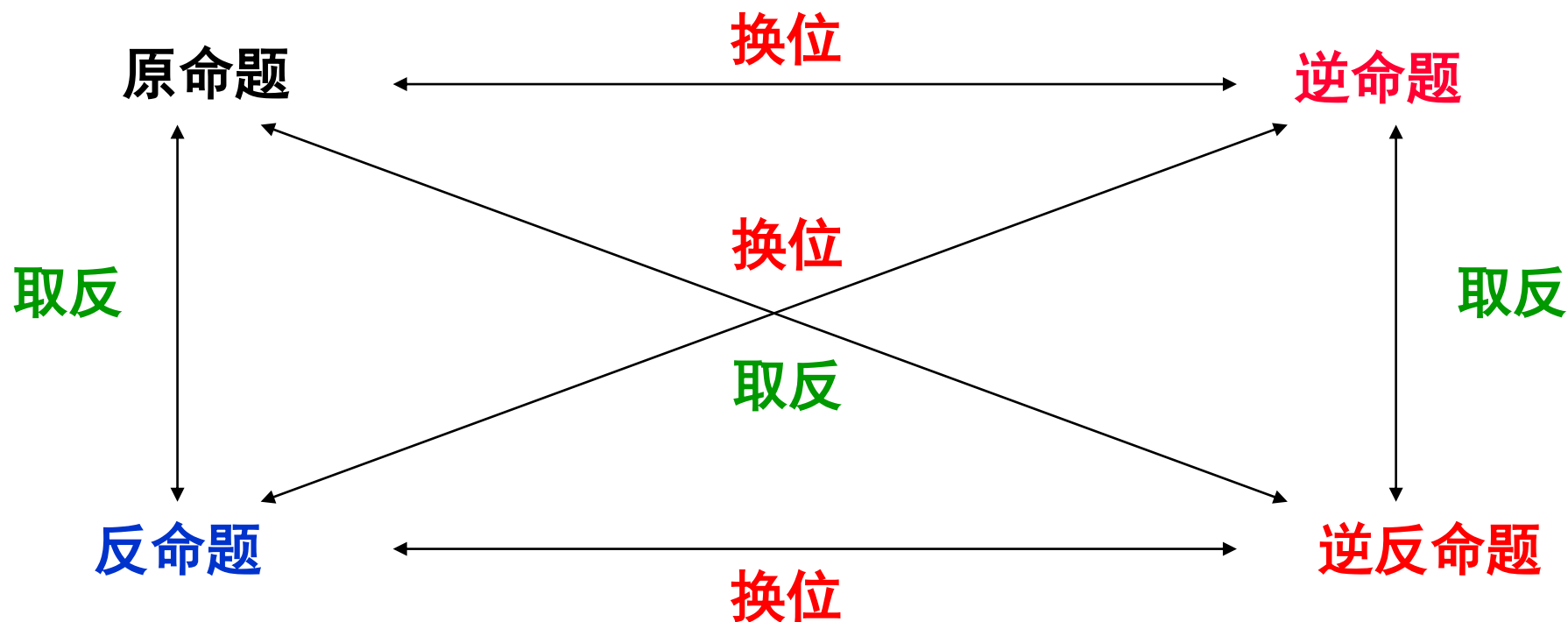
1.1.3 蕴涵(implication)

- $p \rightarrow q$ 的形式意义
 - 其中的符号 p, q 可表示任何命题
 - 命题变量 / 命题变元
 - 其中的蕴涵 \rightarrow 可表示现实不存在的关系
 - 实质蕴涵

蕴涵的逆、反、倒置

- 原命题: $p \rightarrow q$ 练习: P10 , 14
 - 逆(converse): $q \rightarrow p$ (换位)
 - 反(inverse): $\neg p \rightarrow \neg q$ (取反)
 - 倒置(contrapositive): $\neg q \rightarrow \neg p$ (换位、取反)
 - 也称为逆反命题
 - 注意: $p \rightarrow q$ 与 $\neg q \rightarrow \neg p$ 真值相同(等价)

蕴涵的逆、反、倒置



1.1.3 蕴涵(implication)

- 练习

p	q	$\neg p \vee q$

1.1.3 蕴涵(implication)

- 练习

p	q	$\neg p \vee q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

双蕴含(biconditional)

- 双蕴含命题 $p \leftrightarrow q$

- 当 $p \rightarrow q$ 、 $q \rightarrow p$ 同真时， $p \leftrightarrow q$ 为真

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

双蕴含(biconditional)

- $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系: p 、 q 之间互为充要条件

- 示例 **iff**

– $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$

– $2 + 2 = 4$ 当且仅当 3 是偶数

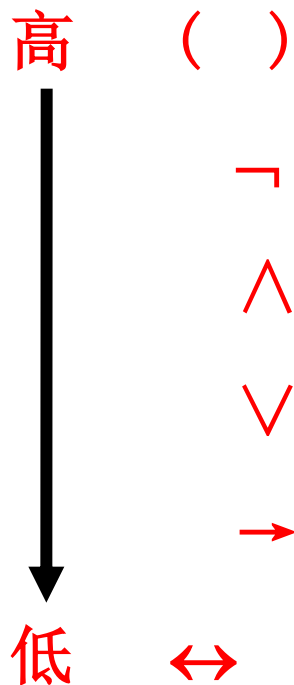
– $2 + 2 = 4$ 当且仅当 太阳从东方升起

– $2 + 2 = 4$ 当且仅当 美国位于非洲

– 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的 充要条件 是它在 x_0 连续

1.1.5 逻辑运算符的优先级

- 优先级相同时左结合(约定)



1.1.6 逻辑运算和位运算

- 二进制位：0/1→真/假
- 布尔变量
 - 位(bit)表示

1.1.6 逻辑运算和位运算

- C语言的位运算(bit operation)
 - 与：&、或：|、非：^、异或：-
- 位串运算
 - 逐位进行

1.1.6 逻辑运算和位运算

练习：P10,22

逻辑运算符	符号	C 语言中的逻辑表达式
Negation(否定)	$\neg p$!p
Conjunction(合取)	$p \wedge q$	p && q
Disjunction(析取)	$p \vee q$	p q
Exclusive or(异或)	$p \oplus q$	(p q) && (!p !q)
Conditional(蕴涵)	$p \rightarrow q$	if (p) q;
Biconditional(等值)	$p \leftrightarrow q$	(p && q) (!p && !q)

小结

- 进展

- 原子命题：表示陈述句中的最小成分
- 运算符：表示命题之间的逻辑关系
- 命题 + 运算符：可以表示任意的陈述句
- 命题 + 运算符 + 优先级：能确定任意陈述句的真假

- 不足

- 无法确定两个命题之间是否存在联系
- 无法从陈述的已有事实推出合理的未知结论

1.2.1 翻译语句

- 将陈述句翻译为逻辑表达式的目的
 - ① 消除歧义
 - ② 确定真值
 - ③ 逻辑推理

1.2.1 翻译语句

- 将陈述句翻译为逻辑表达式的**步骤** **例1**
 - ① 分解成分
 - ② 逐一表示
 - ③ 确定算符
- 将陈述句翻译为逻辑表达式的**方法**
 - 语法、语义分析

1.2.1 翻译语句

- P11, 例2

- ① 分解成分, 逐一表示

- q: 你能乘坐过山车
 - r: 你身高不足 4 英尺
 - s: 你已满 16 周岁

- ② 确定算符

- 除非 A, 否则 B 描述的是什么逻辑关系?

1.2.1 翻译语句

- 例13

- q : 你能乘坐过山车

- s : 你已满 16 周岁, r : 你身高不足 4 英尺

- 除非 s , 否则 $r \rightarrow \neg q$

$$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$$

练习

设命题

P: 明天上午七点下雨;

Q: 明天上午七点下雪;

可符号化为: R

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee$$

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

可符号化为: $\neg (P \wedge Q) \rightarrow R$

可符号化为: $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

可符号化为: $(P \vee Q) \rightarrow \neg R$

1.2.2 系统规范(system specification)

- 判断一致性 例3

- 每条规范说明，就是一个命题
- 规范集合是一致的
 - 全部规范都能够得到满足
 - 全部对应命题真值都为真

1.2.2 系统规范(system specification)

- 每条规范是一个命题，所有规范应一致
 - 存在一组命题的赋值，使得全部命题都为真

● 例4

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	1
0	0	0	1	1

例5

全1行

1.2.3 布尔搜索(boolean search)

- 搜索引擎：Google、Baidu
 - 可视化逻辑运算符
 - 布尔搜索表达式
 - 北京 AND 四合居 AND 照片 OR 视频
 - 北京 AND 四合居 AND (照片 OR 视频)

1.2.4 逻辑难题(puzzle)

- 示例

- P13 例7, 例8