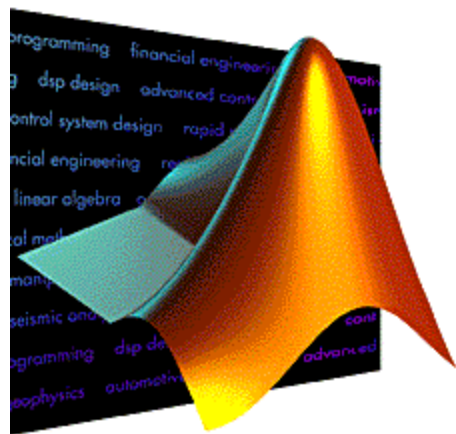

Matlab 程序设计与应用

第3章：Matlab矩阵分析与处理

伍振海



September 24, 2017

Autumn, @swpu

第3章 Matlab矩阵分析与处理



本章要点

- **3.1 特殊矩阵**
- **3.2 矩阵结构变换**
- **3.3 矩阵求逆与线性方程组求解**
- **3.4 矩阵求值**
- **3.5 矩阵的特征值与特征向量**
- **3.6 矩阵的超越函数**

3.1 特殊矩阵

1. 通用的特殊矩阵

➤ **zeros**: 产生全0矩阵(零矩阵)

——常用于初始化大型矩阵

zeros(m): $m \times m$; **zeros(m,n)**: $m \times n$

➤ **sparse**: 稀疏矩阵(减小存储空间)

➤ **ones**: 产生全1矩阵(幺矩阵)。

——**ones(size(A))**: 生成和A等大的1矩阵

➤ **eye**: 产生单位矩阵（主对角线为1，其余为0）。

```
>> A=sparse(100,200);  
>> A(3,2)=0.9  
A =  
    (3,2)    0.9000
```

```
>> eye(3,4)  
ans =  
    1    0    0    0  
    0    1    0    0  
    0    0    1    0
```

3.1 特殊矩阵

2. 随机矩阵

➤ **rand**: 产生0~1间均匀分布的随机矩阵。

➤ **randn**: 产生均值为0，方差为1的标准正态分布 (Gaussian) 随机矩阵

——方差: 矩阵中各数与平均值之差的平方的平均

➤ **random**: 可以生成更多分布的随机矩阵
(help: **doc random**)

3.1 特殊矩阵

- 改变随机数区间:

- » `y=rand(1,100)*10+5;`

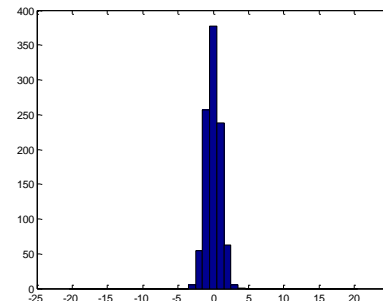
- 生成**5~15**区间内的**1X100**随机矩阵

- » `y=floor(rand(1,100)*10+6);`

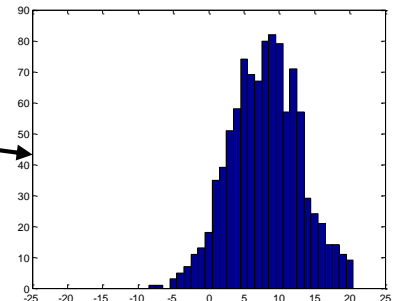
- 生成**6~15**区间内的随机整数

- **floor** or **ceil** is better to use here than **round**

- » `y=randn(1,1000)`
——方差为1, 均值为0



- » `y2=y*5+8`
——方差为5, 均值为8



3.1 特殊矩阵

3. 用于专门学科的特殊矩阵(自学)

(1) 魔方矩阵

`magic(n)`:生成一个 n 阶魔方阵

每行、每列及两条对角线上的元素和都相等。对于 n 阶魔方阵，其元素由 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 共 n^2 个整数组成。

例3.1 将101~125等25个数填入一个5行5列的表格中，使其每行每列及对角线的和均为565。

```
>> a=magic(5);
```

```
>> b=sum(a(:,1))    → b =    65
```

故每个元素都+100后，每行（列）之和变为565

```
>> M=100+magic(5)
```

3.1.2 用于专门学科的特殊矩阵

(2) 范得蒙矩阵

范得蒙(Vandermonde)矩阵：最后一列全为1,倒数第二列为一个指定的向量，其他各列是其后列与倒数第二列的点乘积。可以用一个指定向量生成一个范得蒙矩阵。

vander(V):生成以向量V为基础向量的范得蒙矩阵。

A=vander([1;2;3;5]): 生成[1;2;3;5]为基础向量的范得蒙矩阵。

```
>> A=vander([1;2;3;5])
```

A =

```
1   1   1   1
8   4   2   1
27  9   3   1
125 25   5   1
```

3.1.2 用于专门学科的特殊矩阵

(3) 希尔伯特矩阵

每个元素满足 $h(i,j)=1/(i+j-1)$ 的矩阵。

hilb(n): 生成n阶希尔伯特矩阵

希尔伯特矩阵的逆矩阵：使用一般方法求逆会因为原始数据的微小扰动而产生不可靠的计算结果。MATLAB中，有一个专门求希尔伯特矩阵的逆的函数**invhilb(n)**，其功能是求n阶的希尔伯特矩阵的逆矩阵。

例3.4 求4阶希尔伯特矩阵及其逆矩阵。

命令如下：

```
format rat    %以有理形式输出
```

```
H=hilb(4)
```

```
H=invhilb(4)
```


3.1.2 用于专门学科的特殊矩阵

(4) 托普利兹矩阵

托普利兹(Toeplitz)矩阵：除第一行第一列外，其他每个元素都与左上角的元素相同。

`toeplitz(x,y)`：生成一个以`x`为第一列，`y`为第一行的托普利兹矩阵。这里`x`, `y`均为向量，两者不必等长。

`toeplitz(x)`用向量`x`生成一个对称的托普利兹矩阵。例如
`T=toeplitz(1:6)`

3.1.2 用于专门学科的特殊矩阵

(5) 伴随矩阵

定义： p42

MATLAB生成伴随矩阵的函数是`companion(p)`，其中`p`是一个多项式的系数向量，高次幂系数排在前，低次幂排在后。

例如，为了求多项式的 x^3-7x+6 的伴随矩阵，可使用命令：

`p=[1,0,-7,6];`

`companion(p)`

3.1.2 用于专门学科的特殊矩阵

(6) 帕斯卡矩阵

我们知道，二次项 $(x+y)^n$ 展开后的系数随 n 的增大组成一个三角形表，称为杨辉三角形。由杨辉三角形表组成的矩阵称为帕斯卡(Pascal)矩阵。

pascal(n): 生成一个 n 阶帕斯卡矩阵。

例3.5 求 $(x+y)^5$ 的展开式。

在MATLAB命令窗口，输入命令：

pascal(6)

矩阵次对角线上的元素1,5,10,10,5,1即为展开式的系数。

3.2.1 对角阵与三角阵

1. 对角阵

对角矩阵： 只有对角线上有非0元素的矩阵

数量矩阵： 对角线上的元素相等的对角矩阵

单位矩阵： 对角线上的元素都为1的对角矩阵

1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	-1	0
0	0	0	4

2	0	0	0
0	2	0	0
0	0	2	0
0	0	0	2

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

3.2.1 对角阵与三角阵

(1) 提取矩阵的对角线元素：**diag(A)** (diagonal)

diag(A)：提取矩阵A主对角线元素，并保存到列向量中。

diag(A,k)：提取第k条对角线的元素。

```
>> A=magic(4)
```

```
A =
```

```
16    2    3   13
 5   11   10    8
 9    7    6   12
 4   14   15    1
```

```
>> diag(A)
```

```
ans =
```

```
16
11
 6
 1
```

```
>> diag(A,1)
```

```
ans =
```

```
2
10
12
```

3.2.1 对角阵与三角阵

(2) 构造对角矩阵：**diag(V)**

V——具有m个元素的向量

diag(V)：产生一个对角矩阵，主对角线为向量V的元素。

diag(V,k)：产生一个对角阵，第k条对角线元素即为向量V的元素。

```
>>A= diag([1,2,-1,4])
```

A=

1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	-1	0
0	0	0	4

```
>> B=diag(1:3,-1)
```

B =

0	0	0	0
1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	3	0

3.2.1 对角阵与三角阵

例3.6 先建立5阶魔方阵A，然后将A的第一行元素乘以1，第二行乘以2，...，第五行乘以5。

```
A=magic(5);
```

```
D=diag(1:5);
```

```
D*A
```

```
%用D左乘A，对A的每行乘以一个指定常数
```

3.2.1 对角阵与三角阵

2. 三角阵: 上三角阵、下三角阵。

(1) **上三角阵**: 矩阵对角线以下元素全为0的一种矩阵

triu(A): 求矩阵A的上三角矩阵。

triu(A,k): 求矩阵A的第k条对角线以上的元素

(2) **下三角阵**: 矩阵的对角线以上的元素全为0的一种矩阵

tril(A): 求矩阵A的下三角矩阵

tril(A,k): 求矩阵A的第k条对角线以下的元素

3.2.2 矩阵的转置与旋转

1. 矩阵的转置:

行变成列, $m \times n \rightarrow n \times m$

转置运算符是单撇号: '

```
>> A=[1,2; 3,4]
```

```
A =
```

```
1 2
3 4
```

```
>> B=A'
```

```
B =
```

```
1 3
2 4
```

2. 矩阵的旋转

rot90(A,k): 将矩阵A旋转90°的k倍

——当k为1时可省略, 旋转方向为逆时针!

```
>> C=rot90(A)
```

```
C =
```

```
2 4
1 3
```

```
>> D=rot90(A,-1)
```

```
D =
```

```
3 1
4 2
```

3.2.2 矩阵的转置与旋转

3. 矩阵的左右翻转: `fliplr(A)`

将原矩阵的第一列和最后一列调换，第二列和倒数第二列调换，...，依次类推。

4. 矩阵的上下翻转: `flipud(A)`

```
>> A=[1,2; 3,4]
```

```
A =
```

```
1    2
```

```
3    4
```

```
>> fliplr(A)
```

```
ans =
```

```
2    1
```

```
4    3
```

```
>> flipud(A)
```

```
ans =
```

```
3    4
```

```
1    2
```

3.3.1 矩阵的逆与伪逆

1. 矩阵的逆: $\text{inv}(A)$ (inverse matrix)

逆矩阵: 对于一个**方阵A**，如果存在一个与其同阶的方阵**B**，使得：

$A \cdot B = B \cdot A = I$ (I 为单位矩阵)，
则称**B**为**A**的逆矩阵，当然，**A**也是**B**的逆矩阵。

$\text{inv}(A)$: 求**方阵A**的逆矩阵。

3.3.1 矩阵的逆与伪逆

2. 矩阵的伪逆（广义逆）： $\text{pinv}(\mathbf{A})$

如果矩阵 \mathbf{A} 不是一个方阵，或者 \mathbf{A} 是一个非满秩的方阵时，矩阵 \mathbf{A} 没有逆矩阵，但可以找到一个与 \mathbf{A} 的转置矩阵 \mathbf{A}' 同型的矩阵 \mathbf{B} ，使得：

$$\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B}$$

则称矩阵 \mathbf{B} 为矩阵 \mathbf{A} 的伪逆，也称广义逆矩阵。

$\text{pinv}(\mathbf{A})$ ：求矩阵 \mathbf{A} 的广义逆矩阵

3.3.2 用矩阵求逆方法求解线性方程组

由包含n个未知数，n个方程组成的线性方程组如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

将其写为矩阵形式： **$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$**

其中 \mathbf{A} 为左端方程组系数构成的矩阵， \mathbf{b} 为右端的结果构成的矩阵，则其解为：

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

3.3.2 用矩阵求逆方法求解线性方程组

$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 在matlab中表示为: $\mathbf{x}=\text{inv}(\mathbf{A})*\mathbf{b}$

也可使用左除运算符: $\mathbf{x}=\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$

例3.8 用求逆矩阵的方法解线性方程组(p48)。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x + 4y + 9z = -2 \\ x + 8y + 27z = 6 \end{cases}$$

$\mathbf{x} =$
23.0000
-14.5000
3.6667

```
A=[1 2 3;1 4 9;1 8 27];  
b=[5 -2 6]';  
x=inv(A)*b  
  
% x=A\b
```

3.4.1 方阵的行列式值

方阵的行列式:

把一个方阵看作一个行列式，并对其按行列式的规则求值，这个值就称为矩阵所对应的行列式的值。

det(A): 求方阵的行列式的值 (determinant)

```
>>A=rand(5)
```

```
>>B=det(A)
```

3.4.2 矩阵的秩与迹

1. 矩阵的秩: $\text{rank}(\mathbf{A})$

矩阵线性无关的行数与列数称为矩阵的秩。

2. 矩阵的迹: $\text{trace}(\mathbf{A})$

矩阵的迹等于矩阵的对角线元素之和，也等于矩阵的特征值之和。

3.4.3 向量和矩阵的范数

矩阵或向量的范数：

用来度量矩阵或向量在某种意义下的长度。
范数有多种方法定义，其定义不同，范数值也就不同。

向量和矩阵的3种常用范数：

- (1) **$\text{norm}(V)$ 或 $\text{norm}(V,2)$** ：计算向量 V 的2范数。
- (2) **$\text{norm}(V,1)$** ：计算向量 V 的1范数。
- (3) **$\text{norm}(V,\text{inf})$** ：计算向量 V 的 ∞ 范数。

3.4.4 矩阵的条件数

良性矩阵：解不因系数矩阵的微小扰动而发生大的变化

病态矩阵：与良性矩阵相反

条件数：描述矩阵衡量良性与病态性能的参数

——条件数越接近于1，性能越好，反之性能越差

计算矩阵A的3种条件数的函数：

(1) **cond(A,1)** 计算A的1—范数下的条件数。

(2) **cond(A)**或**cond(A,2)** 计算A的2—范数数下的条件数。

(3) **cond(A,inf)** 计算A的 ∞ —范数下的条件数。

3.5 矩阵的特征值与特征向量

- **$E=\text{eig}(A)$** : 求矩阵A的全部特征值，构成向量E。
- **$[V,D]=\text{eig}(A)$** : 求矩阵A的全部特征值，构成对角阵D，并求A的特征向量构成V的列向量。

例3.9 用求特征值的方法解方程。

分析：多项式 $p(x)$ 的伴随矩阵的特征值即为 $p(x)=0$ 的根
法一：

```
p=[3,-7,0,5,2,-18];
```

```
A=compan(p);           %A的伴随矩阵
```

```
x1=eig(A)               %求A的特征值
```

法二：

```
x2=roots(p)             %直接求多项式p的零点
```

3.6 矩阵的超越函数

- 一般数学函数：作用在矩阵的各元素上（基于元素运算）
- **超越函数**：直接作用于矩阵的函数，要求矩阵必须是方阵函数的一般形式

常用函数名+m

1. 矩阵平方根 **sqrtm(A)**：计算矩阵A的平方根。
2. 矩阵对数 **logm(A)**：计算矩阵A的自然对数。
3. 矩阵指数 **expm(A)**：求矩阵指数 e^A 。
4. 普通矩阵函数**funm**

funm(A, 'fun')用来计算直接作用于矩阵A的由 'fun'指定的超越函数值。

$$\text{funm}(A, 'sqrt') == \text{sqrtm}(A)$$