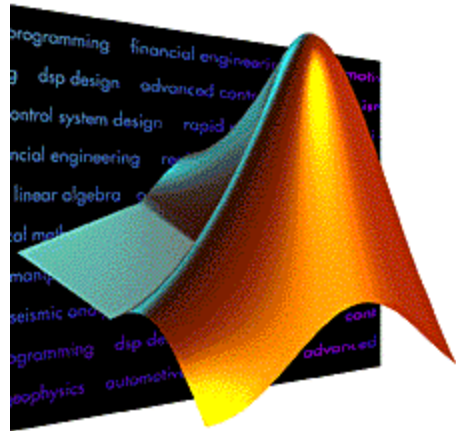

Matlab 程序设计与应用

第7章: Matlab符号运算

伍振海



September 24, 2017
Autumn, @swpu

第7章 MATLAB符号运算



- ◆ MATLAB符号对象
- ◆ MATLAB符号微积分
- ◆ MATLAB符号级数
- ◆ MATLAB符号方程求解

符号工具箱

- 代替繁琐公式的手动推导!
- 符号运算 vs. 数值运算

	优势	缺点
符号运算	<ul style="list-style-type: none">• 可求得解析解• 可得解的直观表达	<ul style="list-style-type: none">• 有些问题无法求解• 解的表达式可能非常复杂
数值运算	<ul style="list-style-type: none">• 总能求解• 可使解非常精确• 编程容易	<ul style="list-style-type: none">• 难以揭示深层次的理解• 有时数值方法也会失败• 有时候运算量非常大

7.1.1 符号对象

- 符号对象是一种数据类型，与 **double** , **char** 一样
- **sym**: 申明符号对象，必须先申明才能使用
 - » **a=sym('1/3');**
 - 分数依然保持分数形式
 - » **mat=sym([1 2;3 4]);** %符号矩阵
 - » **c=sym('c');**
- **syms**: 同时申明多个符号对象
 - » **syms a b c d**
 - 等价于 **a=sym('a'); b=sym('b');...**
 - 变量名上不要加字符串分界符(' ')
 - 变量间用空格而**不要用逗号**分隔

7.1.1 符号对象

- 运算:

» `a=sym('1/3'); b=sym('4/5'); c=sym('c');`

» `d=a*b`

➤ **$1/3 * 4/5 = 4/15$**

**$d =$
 $4/15$**

» `e=(a-c)^2;`

➤ 乘方

**$e =$
 $(c - 1/3)^2$**

- 注意与数值计算的不同:

**`x=1/3;`
`v=x*x*x`
`v =`
 0.0370**

7.1.1 符号对象

例：作符号计算：
$$\begin{cases} ax-by=1 \\ ax+by=5 \end{cases}$$
 a,b,x,y均为符号运算量。

```
syms a b x y;
```

```
[x,y]=solve(a*x-b*y-1,a*x+b*y-5,x,y)
```

```
% 以a,b为符号常数，x,y为符号变量
```

```
% 即可得到方程组的解：
```

```
x = 3/a
```

```
y = 2/b
```

引用符号运算函数时，用户可以指定函数执行过程中的变量参数；若用户没有指定变量参数，则使用**findsym**函数默认的变量作为函数的变量参数。

7.1.1 符号对象

● **符号表达式**：含有符号对象的表达式

(1) 利用单引号来生成符号表达式

➤ `y='1/sqrt(2*x)'`

➤ 其实质是一个字符串，但可以参与符号运算

(2) 用sym函数建立符号表达式

➤ `U=sym('a+b*c')`

(3) 使用已经定义的符号变量组成符号表达式

➤ `syms x;`

➤ `v=1/sqrt(2*x)`

7.1.2 符号运算：四则运算

- 符号表达式的四则运算： $+$ 、 $-$ 、 $*$ 、 $/$ 、 $^$

```
syms x y z;  
f=2*x+3/y+z;  
g=4/z+3*y;  
f+g
```


7.1.2 符号运算: 因式分解与展开

● 符号表达式的因式分解与展开

- **factor(s)**: 对符号表达式s分解因式

```
>> syms a b
```

```
>> x=a^2-b^2;
```

```
>> y=factor(x)
```

```
y =
```

```
(a - b)*(a + b)
```

- **expand(s)**: 对符号表达式 s 进行展开。

```
>> x=expand(y)
```

```
x =
```

```
a^2 - b^2
```

7.1.2 符号运算:合并同类项

- 合并同类项:

collect(s): 对符号表达式s合并同类项

collect(s,v): 对符号表达式s按变量v合并同类项

» **syms x y;**

» **z=collect(3*x+4*y-1/3*x^2-x+3/2*y)**

z =

- x^2/3 + 2*x + (11*y)/2

7.1.2 符号对象:化简

● 符号表达式的化简

simplify(s): 应用函数规则对s进行化简

simple(s): 新版本中已移除, 统一使用**simplify**

```
syms x y;
```

```
s=(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2
```

```
v=simplify(s)
```

```
s = (x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2
```

```
v = 2*x^4 + 2*y^4
```

7.1.2 符号运算: 数学形式表达式

- 使表达式看起来更像数学形式: **pretty(s)**

```
>>s=sym('- x^2/3 + 2*x + (11*y)/2')
```

```
s = - x^2/3 + 2*x + (11*y)/2
```

```
>> pretty(s)
```

```
>> pretty(s)
      2
      x      11 y
-  -- + 2 x + ----
      3          2
```

7.1.2 符号运算: Matlab→Latex→Mathtype

- 将符号运算的结果转换为Mathtype公式:

```
syms x y;
```

```
f=sin(x)*exp(y)+log(y)*cos(x);
```

```
f=diff(diff(f,x,2),y,2)
```

```
fs=latex(f)
```

```
f = -sin(x)*exp(y)+1/y^2*cos(x)
```

```
fs = -\sin \left( x \right) \left\{ e^{\left\{ y \right\}} + \left\{ \frac {\cos \left( x \right) }{\left\{ y \right\}^{\left\{ 2 \right\}}} \right\}
```

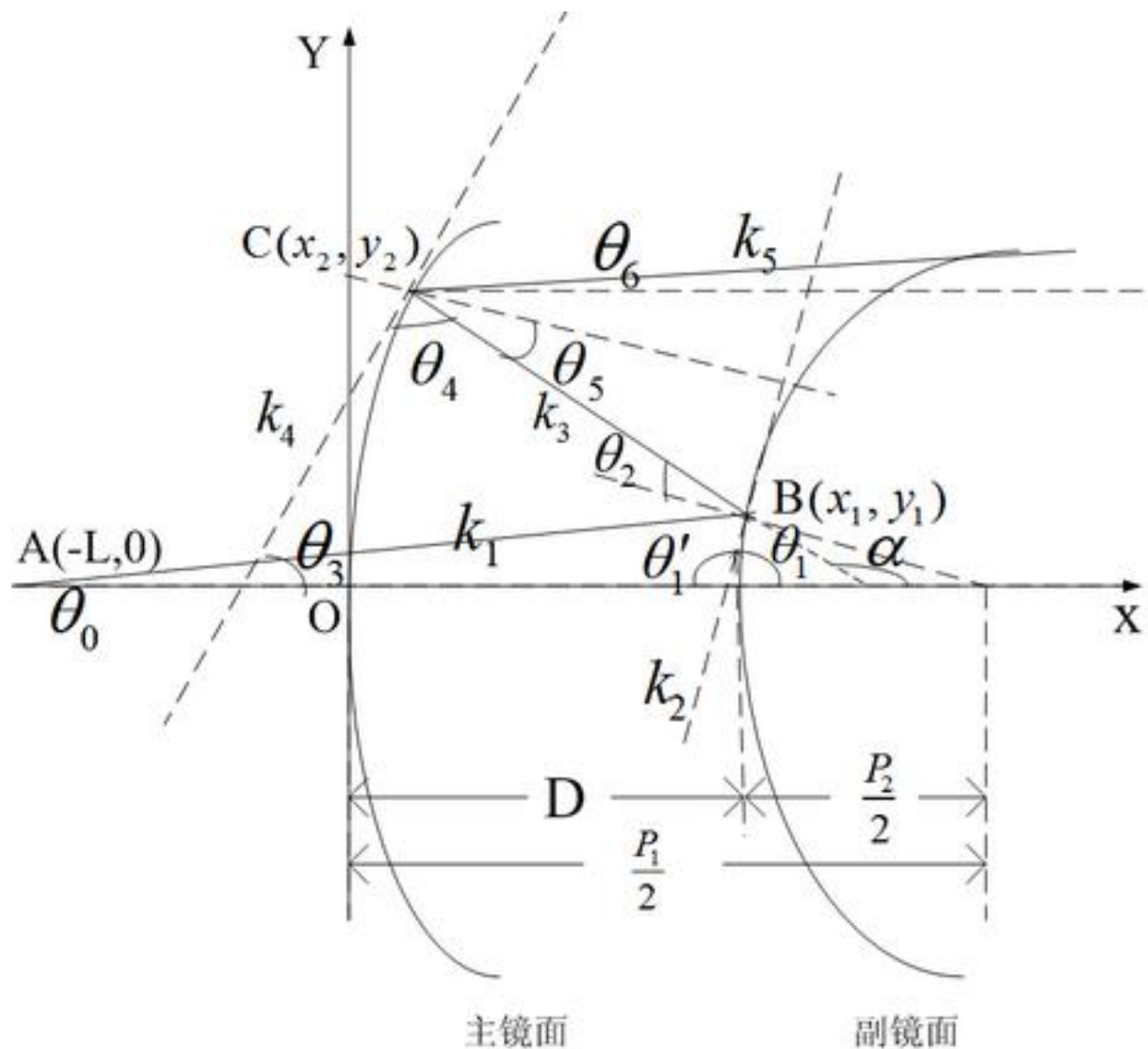
将fs的结果复制到Mathtype窗口即可！

或将fs前后加上\$, 粘贴到word中, 按Alt+\

$$\frac{\cos(x)}{y^2} - e^y \sin(x)$$

7.1.2 符号运算:实例

例：求双抛物面卡塞格伦光学天线出射角与入射角的函数关系。



7.1.2 符号运算:实例

$$\theta_6 = -2B + \theta_0$$

$$+2 \arctan\left(\frac{2P_1 \tan(2B - \theta_0)}{(2p_1 - (4p_1^2 - 8 \tan(2B - \theta_0)(1/2 \frac{A}{\tan \theta_0} + L \tan \theta_0 - 1/2 \frac{\tan(2P_2 - \theta_0)}{2 \tan \theta_0})p_1)^{\frac{1}{2}})}\right)$$

$$\begin{cases} A = 2p_2 - 2 \tan^2 \theta_0 L - ((2 \tan^2 \theta_0 L - 2p^2)^2 - 4 \tan^2 \theta_0 (L^2 \tan^2 \theta_0 + 2p_2(1/2 p_1 - 1/2 p_2)))^{1/2} \\ B = \arctan\left(\frac{p_2}{1/2 \frac{A}{\tan \theta_0} + L \tan \theta_0}\right) \end{cases}$$

7.1.2 符号运算:数据类型的转换

- 符号表达式→数值表达式: **eval, numeric**

syms a b

x=a^2-b^2

a=2;b=1;

z=eval(x)

z = 3

- 数值表达式→符号表达式: **sym**

sym(1.5)

ans =3/2

7.1.2 符号运算:数据类型的转换

- 符号表达式→字符串: **char**

```
syms a b
```

```
x=a^2-b^2
```

```
z=char(x)
```

```
whos x z
```

- 字符串→符号表达式: **sym**

```
z='sin(x)*e(x)'
```

```
x=sym(z)
```

```
whos x z
```

7.1.3 符号对象:变量的确定

●符号表达式中变量的确定

➤ **findsym(s,n)** : 函数返回符号表达式s中的n个符号变量, 若没有指定n, 则返回s中的全部符号变量。

```
syms a b;
```

```
y = (a - b)*(a + b)
```

```
findsym(y)
```

```
ans = a,b
```

●**Note:** **findsym**将被移除, 使用**symvar**代替!

```
symvar(y)
```

```
ans =[ a, b]
```

7.1.3 符号对象:变量的确定

●符号表达式中的变量与常数

书写: 排在字母表中前面的字母表示变量的系数, 而用排在后面的字母表示变量, 如:

$$g = \sin(a*t + b)$$

根据数学式中表示自变量的习惯, 默认**a,b,c**为符号常数, **x**为符号变量。

Matlab: 按离**x**最近原则确定默认变量, 如

```
syms a b t;  
g=sin(a*t+b)  
findsym(g)
```

```
ans =  a,b,t
```

```
findsym(g,1)
```

```
ans =  t
```

```
diff(g)
```

```
ans =  a*cos(b + a*t)
```

7.1.3 符号对象:变量的确定

例如, 数学表达式 $f = x * n$

$$g = \sin(a * t + b)$$

根据数学式中表示自变量的习惯, 默认 a, b, c 为符号常数, x 为符号变量。

```
syms a b t;  
g=sin(a*t+b)  
findsym(g)
```

```
ans = a,b,t
```

```
findsym(g,1)
```

```
ans = t
```

```
diff(g)
```

```
ans = a*cos(b + a*t)
```

7.1.4 符号矩阵

- 符号矩阵也是一种符号表达式，可以使用数值矩阵的函数和运算：

» `mat=sym(' [a b;c d] ');`

» `mat2=mat*[1 3;4 -2];` →

```
mat2 =  
[      a+4*b,  3*a-2*b]  
[      c+4*d,  3*c-2*d]
```

➤ 矩阵乘法

» `d=det(mat)` →

```
d =  
a*d-b*c
```

➤ 计算行列式的值

» `i=inv(mat)` →

```
i =  
[  d/(a*d-b*c), -b/(a*d-b*c)]  
[ -c/(a*d-b*c),  a/(a*d-b*c)]
```

➤ 计算逆矩阵

- 引用矩阵元素：

» `i(1,2)` →

```
ans =  
-b/(a*d-b*c)
```

7.2.1 符号极限

●符号极限：limit

- **limit(f,x,a)**: 求变量 x 趋于常数 a 时 $f(x)$ 的极限值
 - f :符号函数, x :变量, a :常数 (缺省值=0)
- **limit(f,a)**: 求符号函数 $f(x)$ 的极限值
 - 没有指定自变量, 按离 x 最近原则确定默认变量
- **limit(f)**: 求符号函数在系统默认变量趋于0时的极限
- **limit(f,x,a, 'right')**: 求符号函数 f 的右极限
- **limit(f,x,a, 'left')**: 求符号函数 f 的左极限

7.2.1 符号极限

例7.2求下列极限。

$$(1): \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a}$$

$$(2): \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$$

```
syms a m x;
```

```
f=(x*(exp(sin(x))+1)-2*(exp(tan(x))-1))/(x+a);
```

```
limit(f,x,a)
```

```
ans =(1/2*a*exp(sin(a))+1/2*a-exp(tan(a))+1)/a
```

```
syms x;
```

```
f=x*(sqrt(x^2+1)-x);
```

```
limit(f,x,inf,'left')
```

```
ans = 1/2
```

7.2.2 符号导数

- 符号导数: **diff**

- 作用于向量或矩阵: 求差分

- 作用于符号表达式: 求导数

- **diff(s,'v')**: 对符号表达式s求一阶导数,v为自变量
- **diff(s,'v',n)**: 对符号表达式s求n阶导数
- **diff(s)**: 按默认变量对符号表达式s求一阶导数。
- **diff(s,n)**: 按默认变量对符号表达式s求n阶导数

7.2.2 符号导数

例：分别求 $\cos(xy)$ 对 x 和 y 的层数

```
syms x y
```

```
a=cos(x*y);
```

```
diff(a)
```

```
ans = -y*sin(x*y)
```

```
diff(a,y)
```

```
ans = -x*sin(x*y)
```

```
diff(a,y,2)
```

```
ans = -x^2*cos(x*y)
```

7.3 符号积分

● 符号积分 : `int`

- `int(s,v)`: 对被积函数`s`求不定积分, `v`为自变量
- `int(s,v,a,b)`: 求被积函数`s`在区间`[a,b]`上的定积分
 - `a`、`b`: 可以是数值、符号表达式、无穷(`inf`)。
- `int(s)`: 按默认变量对被积函数`s`求不定积分

例: 求 $\cos(xy)$ 对 y 的不定积分及区间 $[\pi, 2\pi]$ 上定积分

```
syms x y
a = cos(x*y)
int(a,y)
      ans = sin(x*y)/x
int(a,y,pi,2*pi)
      ans = -(sin(pi*x) - sin(2*pi*x))/x
```

7.4 级数

- 级数符号求和: **symsum**
- **symsum(s,v,n,m)**: 求级数s的和
 - s: 级数的通项, 是一个符号表达式。
 - v: 求和变量, v省略时使用系统的默认变量。
 - n,m: 求和的开始项和末项。

例7.12 求下面级数之和。(p208)

$$s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

```
>>syms n;  
>>s1=symsum(1/n^2,n,1,inf)  
s1 = pi^2/6
```

7.4 级数

- 函数的泰勒级数: **taylor**

- **taylor(f,v,n,a)**

- 将函数 f 按变量 v 展开为泰勒级数
- n : 展开到第 n 项变量 v 的 $n-1$ 次幂)为止 (缺省=6)
- v : 变量, 缺省值按系统默认
- a : 指定将函数 f 在自变量 $v=a$ 处展开(缺省值=0)

7.5 符号方程求解

- 符号代数方程求解

- **solve(s,v)**: 求符号表达式s的代数方程, 求解变量为v
- **solve(s1,s2,...,sn,v1,v2,...,vn)**: 求解符号表达式s1,s2,...,sn 组成的代数方程组, 求解变量分别v1,v2,...,vn。

7.5 符号常微分方程求解

● 符号常微分方程求解

- 常微分方程的表示：用大写字母**D**表示**导数**。

$$y' \rightarrow Dy$$

$$y'' \rightarrow D^2y$$

$$y'(0)=5 \rightarrow Dy(0)=5$$

$$y''' + y'' + y' - x + 5 = 0 \rightarrow D^3y + D^2y + Dy - x + 5 = 0$$

7.5 符号常微分方程求解

- 符号常微分方程求解: **dsolve**
- **dsolve(e,c,v)**: 求解常微分方程
 - **e**: 常微分方程e
 - **v**: 方程中的自变量, 省略时按缺省原则处理
 - **c**: 初值条件, 若没有给出, 则求方程的通解
- **dsolve(e1,e2,...,en,c1,...,cn,v1,...,vn)**
 - 求常微分方程组: **e1, e2, e3, ...en**

7.5 符号常微分方程求解

例7.16: 求微分方程的通解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$$

```
>> y=dsolve('Dy-(x^2+y^2)/x^2/2','x')
```

```
y =
```

```
-x*(1/(C4 + log(x)/2) - 1)
```