Chap7 —4

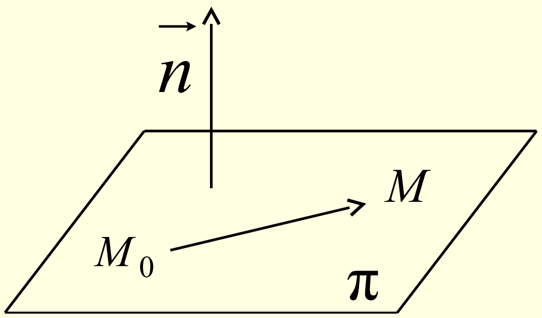
平面与直线

7.4.1 平面

确定一个平面需要什么?

设平面 **π** 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 且其法向量为

$\vec{n}(A,B,C)$



$$M(x,y,z)\in\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$ 点法式方程

向量形式 $\quad n\cdot(r-r_0)=0 \qquad r_0, r: M_0, M$ 的定位向量

三元一次方程

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$ 一般方程

问题： 系数 A,B,C,D 有些为零时平面的特点?

设平面 π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 且其平行于

两个不共线的向量 $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3), \vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0}$$ 标准方程

确定一个平面方程，需要

一个点加上 —— 一个法向量 / 两个平行于平面的不共线向量

例　求过不共线三点 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2),P_3(x_3,y_3,z_3)$ 的平面方程

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$$

三点式方程

例　平面在三坐标轴上的截矩分别为 a, b, c

$(abc \neq 0)$ 求平面方程

例　求下列平面的方程

(1) 求过点 $A(1,1,1), B(2,2,2)$ 且垂直于平面 $x+y-z=4$ 的平面

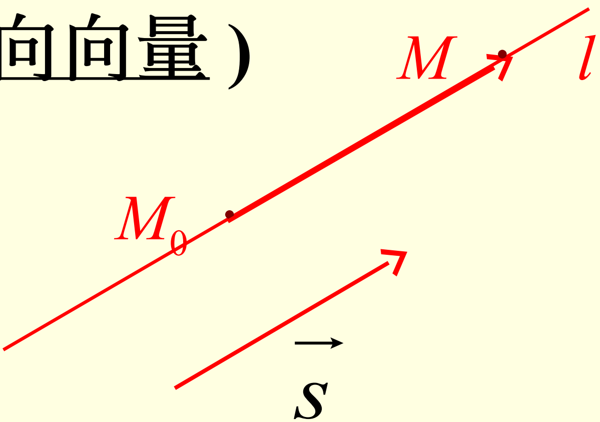
(2) 平行于 xy 平面，过点 $(2,-5,3)$ 的平面

(3) 过 x 轴和点 **$(1,3,-2)$,**

7.4.2 直线

确定一条直线需要什么?

设直线 l 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且平行于非零向量 $\vec{s}=(m,n,p)$ (称为直线的方向向量)



$M(x,y,z)\in l$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \,//\, \vec{s}$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

标准方程

分式分母为零时，意味着其分子也为零

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$ 参数方程

向量形式 $r = r_0 + ts$ （r_0, r. M_0, M 的定位向量）

例　求符合下列条件的直线方程

(1) 过点 $(1,1,1)$ 和 $(2,3,4)$

(2) 过点 $(-3,2,-5)$ 且与平面 $x-4z-3=0$ 及平面 $2x-y-5z-2=0$ 均平行

(3) 过 $(-3,2,-5)$, 与坐标轴夹角依次为 $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$

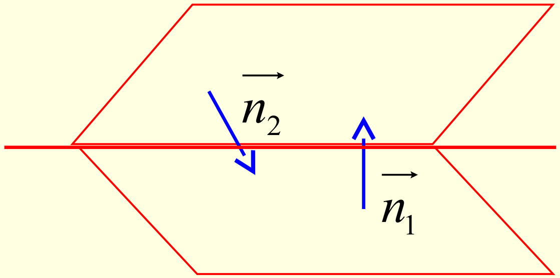
$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$

一般方程

是两平面的交线

满足一般方程的任一点 (x_0, y_0, z_0) 是直线上点，直线的方向：

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$



平面束方程

平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

的交线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

过此交线的平面集合称为平面束，其方程为

$$\boxed{(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}$$

平面束方程

λ 是参数，注意方程中不包括 π_2 的方程

例　求过平面 $2x-y-2z+1=0$ 与平面 $x+y+4z-2=0$ 的交线的下列平面

(1) 垂直于平面　$x-3y+z-2=0$

(2) 在 y,z 上轴有相同的非零截矩

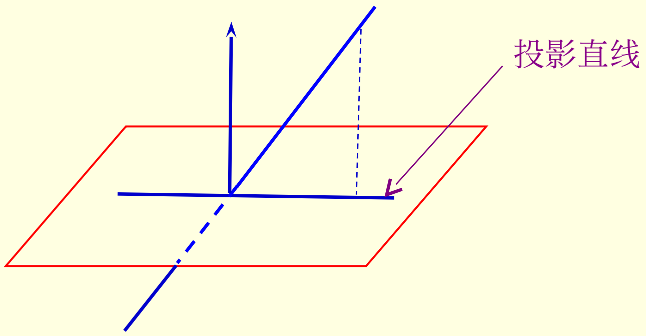
例　求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上投影直线的方程

若要求一点，需解三元方程，故可求一

般方程，已有一个平面，另一个如何求?

可用过已知直线且

垂直已知平面的平面



1）平面束

2）法向量垂直

H.W

习题 7

32 (3)(5)(7)(9)(11)

34 (2)(4)(8）

36 (2)

7.4.3 平面、直线和点的位置关系

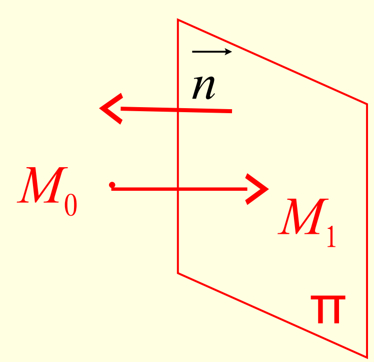
一．点到平面的距离

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是空间一点，平面 **π** 方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

M_0 到的 **π** 距离：M_0 到垂足 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 间的距离 $d=\left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\|$

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\left|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)\right|$$



$$\Longrightarrow \boxed{d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

例　两平行平面为 $\pi_1: 4x-3y+12z-11=0$

$\pi_2: 4x-3y+12z-17=0$

求位于两个平面之间到 π_1, π_2 的距离之比为

为 **1:2** 的平面

二. 两平面间的夹角

$$\left.\begin{aligned}\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}\right\}\text{的夹角}$$

$$\boxed{\text{法向量间的锐夹角}: \theta=\min\left((\vec{n}_1\widehat{,}\vec{n}_2), \pi-(\vec{n}_1\widehat{,}\vec{n}_2)\right)}$$

例　求过直线 $l\begin{cases}x+2z+1=0\\x-y-z+1=0\end{cases}$ 且与平面

π: $x+y+2z-4=0$ 成 $\pi/3$ 夹角的平面方程

三. 两直线的夹角及共面

直线 l_1 过点 M_1 且方向向量为 $\vec{s_1}$，直线 l_2 过点 M_2 且方向向量为 $\vec{s_2}$，l_1 与 l_2 的夹角为

方向向量间的锐夹角

$$\varphi=\min((\widehat{\vec{s_1},\vec{s_2}}),\pi-(\widehat{\vec{s_1},\vec{s_2}}))$$

利用混合积

l_1, l_2 共面 $\xleftrightarrow{\text{充分必要条件}}$ $[s_1, s_2, M_1M_2] = 0$

例 求过 (1,2,-2) 且与直线 $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{1}$

垂直相交的直线

例 入射光线沿直线 $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$ 至平面

$x+y+z+1 = 0$ 上反射，求反射光线的直线方程

法 1： 交点，反射方向 (n,m,p)

(n,m,p) 、入射向与平面法向共面、夹角同

法 2： 交点，入射光线上一点的对称点

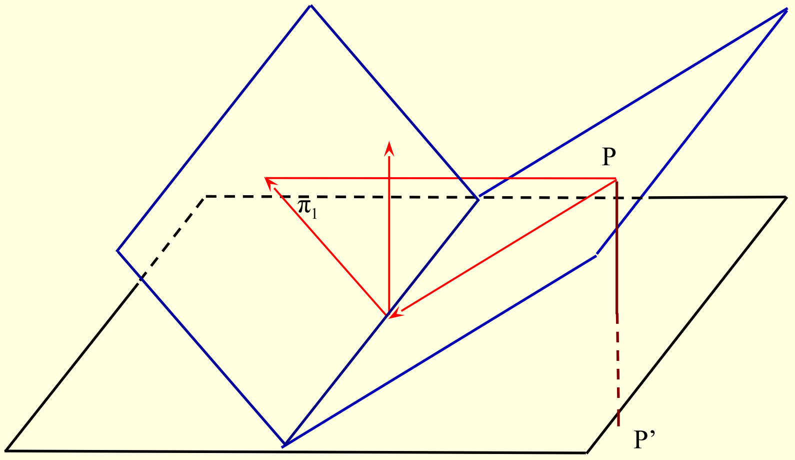
对称点在平面垂线上、且到平面等距 (较好)

法 3： 不求交点，为两个平面交线

其一 (π_1) 由入射、反射线确定 (标准式) ;

另一与 π_1 垂直，用平面束求

(由交线方向＝入射向×法向导出入射线与交线确定的平面)



例 直线 l_1 和 l_2 的方程分别为

$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ 和 $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{0}$，试求它们的公垂线方程

方法 1 分别求公垂线与 l_1、l_2 的相交平面

(先求公垂线方向，再求平面)

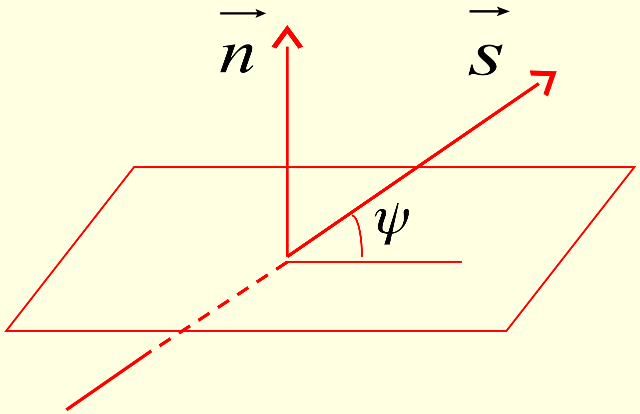
方法 2 求公垂线与 l_1、l_2 的交点

(两交点分别在 l_1、l_2 上(参数形式), 距离最小)

四. 直线与平面的夹角

设直线 l 方向向量 $\vec{s}$, 平面 π 的法向量为 $\vec{n}$, 为 l 与 π 的夹角

$$\boxed{\psi = \left|\frac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{s},\vec{n}})\right|}$$



计算 ψ 可用

$$\sin\psi = \cos(\widehat{s,n})$$

H.W

习题 7

38 (1)(3)(4) 39 (1)(2)

40 (1)(2) 41 (2)(3)(4)

42 45 (1)(3)(6) 46(2)