# Chap 2.5

# 函数的连续

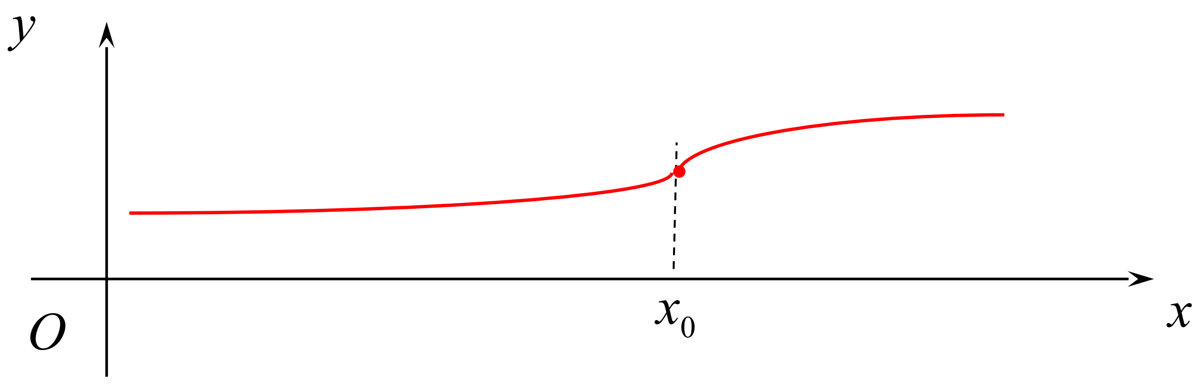
# 2.5.1　连续的概念

- 连续　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

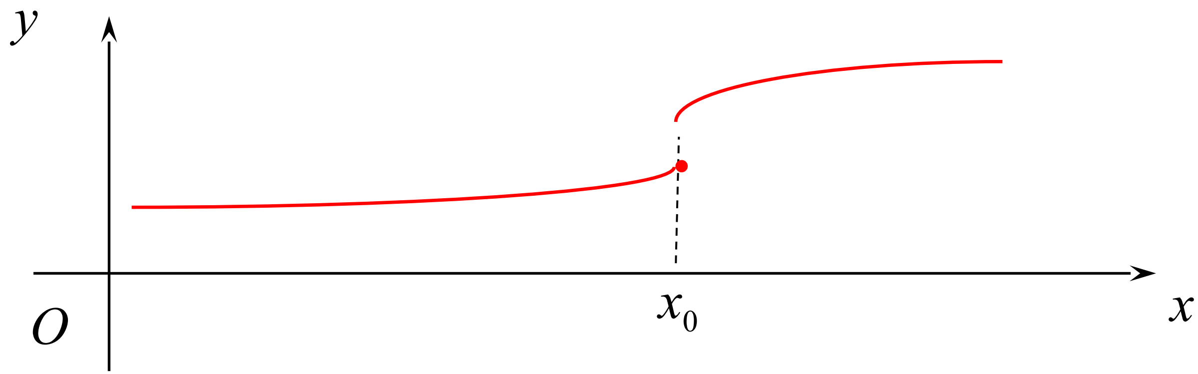
则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续，否则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 间断

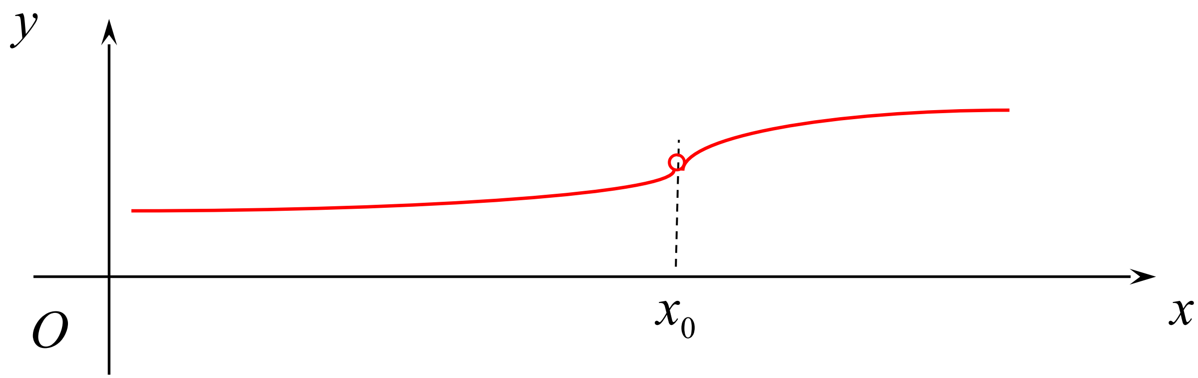
➢ 几何上很直观：反映曲线“连”或“断”

连续



# 间断




- 连续意味着

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在 (2) $f(x_0)$ 存在 (3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

记 $\Delta x = x - x_0$, 为自变量的增量

相应有 $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ 为函数的增量，则

$f$ 在 $x_0$ 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

- 说明在连续处，当自变量变化→ 0，函数值变化也→ 0

例 证明函数 $f(x) = \sin x$ 在 $x_0 \in \mathbf{R}$ 连续

类似可得
cos$x$ 连续

- **单侧连续**

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 右连续 （类似有左连续概念）

➢ $f(x)$ 在 $x_0$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $x_0$ 左连续且右连续

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

**例** 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，求 $a$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & x > 0 \\ a\cos x & x \le 0 \end{cases}$$

**例** 考察 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & x \ne 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 的连续性

## 函数在区间上的连续

若 $f(x)$ 在区间 $I$ 内每点连续，且在 $I$ 的闭端点单侧连续，称 $f$ 在区间 $I$ 连续，记为

$$f(x) \in C(I)$$

- 注意在闭端点是单侧连续

我们已有：

$$\sin x \in C(-\infty,+\infty), \quad \ln x \in C(0,+\infty), \quad a^x \in C(\mathbf{R})$$

$$\cos x \in C(-\infty,+\infty)$$

## 2.5.2 间断点的分类

- 第一类间断点

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ 与 } \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ 均存在}$$

➢ 情况 1( 可去间断点 )

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) \quad \text{或} \quad f(x_0) \text{ 无定义}$$

例 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$

➢ 情况 ( 跳跃间断点 )

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

例 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ 在 $x = 0$

■ 第二类间断点

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 至少有一个不存在

➢ 无穷型

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，称 $x_0$ 无穷间断点

例 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$

➢ 其他型

例 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$

## 2.5.3 连续函数的运算

- 四则运算

若 $f(x), g(x)$ 在 $x_0$ 连续， 则

$f(x) \pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$f(x)/g(x)$ （$g(x_0) \neq 0$） 在 $x_0$ 也连续

- 复合

若 $g(x)$ 在 $x_0$ 连续， $f(u)$ 在 $u_0 = g(x_0)$ 连续，

则复合函数 $f(g(x))$ 在 $x_0$ 连续

➢ 这意味着此时

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(g(x_0))$$

极限号通过函数符号

- 反函数

若 $f(x)$ 在区间 I 严格单调连续，则其反函数 $f^{-1}(x)$ 在 $f$ 的值域 $R(f)$ 也严格单调连续

例 由于 $\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 严格单调连续，可知 $\arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 连续

**H.W**

习题 2 33 (1) (2) (5) (7) 36

## 2.5.3 初等函数的连续性

- 定理 初等函数 $f(x)$ 在定义域内连续

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

例 求下列极限

$$(1)\ \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x + \tan x)$$

$$(2)\ \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \qquad (3)\ \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

$$(4)\ \lim_{x \to 0} (1 + \arctan 2x)^{\csc 3x} \qquad (5)\ \lim_{x \to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\cot(x-a)} \quad a \in (0, \frac{\pi}{2})$$

例　讨论下列函数的连续性

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x>0\\[2ex] \dfrac{e^{2x}-1}{x} & x<0\\[2ex] 2 & x=0\end{cases}$$

$$(2)\quad f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n+1}-1}{x^{2n+1}+1}$$

H.W　　习题 2　　**37** (1) (2)　　**38**