Chap 10 - 4

Gauss 公式

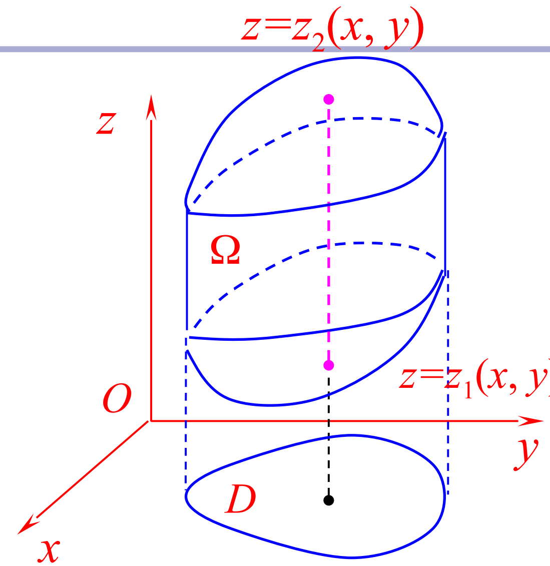
10.4.1. Gauss 公式

设函数 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有连续偏导数， Ω 的边界是分片光滑的闭曲面，则有公式

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV}$$

(三重积分与在其边界上的第二型曲面积分的关系)

证明的思路



类似 **Green** 公式的证明

先证 $\oiint\limits_{S^+} R\,dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV$

1）考虑Ω是 xy 型区域

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

2）再考虑Ω是一般区域

将Ω 分割成几个正规区域应用 1）的结论

同理证关于 P,Q 的等式

高斯 Guass.Carl Friedrich

(1777 – 1855)

- 数学神童，聪颖过人
- 尺规作正十七边
- 博士论文：代数基本定理
- 涉猎广泛，成果丰硕 — 数学：分析、数论、复变函数代数、非欧几何、统计数学等，以其名定义的数学名词多达数十个；天文学、物理
- 献身科学 精益求精 追求完美

“ 宁可发表少些，但要的是成熟的成果”

“ 假如别人和我一样专心和持久的思考数学真理，他也会作出同样的发现 .”

- 最伟大的数学家

如果我们把十八世纪数学家想象成为一系列高山峻岭，那么最后一座使人肃然起敬的峰巅就是高斯

能从九霄云外的高度按照某种观点掌握浩瀚星空和深奥数学的天才

在邮票、钱币上的数学家

例　计算曲面积分

$$I=\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$$

其中 S 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧

例　计算 $I=\iint_S xdydz+2xydzdx-2zdxdy$

其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2},(0\le z\le h)$ 的下侧

（需要加一块曲面使之成为封闭曲面）

例　计算

$$\iint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{x^2+y^2+z^2}\,dS$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是其外法向量的方向余弦

H.W　习题 10

29 (2) (4) (6) (7)

由于

$$\iint_{S^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^0\,dS$$

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV$$

得到 **Guass** 公式的向量形式

$$\boxed{\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\underbrace{\boldsymbol{n}^0\,dS}_{d\boldsymbol{S}} = \iiint_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV}$$

（与 Green 公式形式完全一致）

10.4.2. 通量与散度

若给定向量场 $\boldsymbol{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

那么称曲面积分

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}^0 dS$$

为向量函数 $\boldsymbol{F}$ 的通过定侧曲面 $\boldsymbol{S}$ 的**通量**

而称

$$div\boldsymbol{F} \stackrel{def}{=} \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量函数 $\boldsymbol{F}$ 的 **散度**

例　设向量$\boldsymbol{F}=(x^2y, y^2z, z^2x)$，求散度

$$div\boldsymbol{F}\Big|_{(2,1,-2)}$$

H.W

习题　10

31（2）　　32（2）（4）

10.4.3 Stokes 公式 *

设双侧曲面 S 的边界为空间闭曲线 C^+，C^+ 的
正方向与 S 的正侧成右手系

设 S 是分片光滑的双侧曲面，闭曲线 C^+ 是其
边界，向量值函数 $F=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

在包含 S 的空间区域内有连续偏导数，则

$$\oint_{C^+} Pdx+Qdy+Rdz$$
$$=\iint_{S^+}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

借助行列式，公式可记为

$$\oint_{C^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S^+} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

例 计算 $\oint_C zdx + xdy + ydz$，其中 C 是平面 $2x+3y+z=6$ 被三个坐标平面所截的三角形 S 的边界，其正向与 S 上侧成右手系

例　计算

$$I = \int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

曲线 C 为 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x+z=R \end{cases}$，积分方向从 x 轴的正向看沿逆时针

H.W　习题 10

34　(2) (3)

10. 4. 4　旋度

对向量场　$\boldsymbol{F}=(P, Q, R)$，定义

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ Q & R\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x}\\ R & P\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}\right)$$

为函数　$\boldsymbol{F}$　的**旋度**

若 L　为 F　定义区域内的定向曲线，则称

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

为　$\boldsymbol{F}$　沿 $\boldsymbol{L}$ 的**环量**

例　求向量场 $\boldsymbol{F}=\{xy.yz,-y^2\}$ 在点（1, −1, 3）的旋度

➢ **Stokes 公式的向量形式**

若记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，那么 $d\boldsymbol{r}=(dx,dy,dz)$，这样

Stokes 公式可以写成形式

$$\oint_{C^+}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_{S^+}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^0 dS$$

H.W

习题 10

36（1）

37 （ 2 ） （ 3 ）