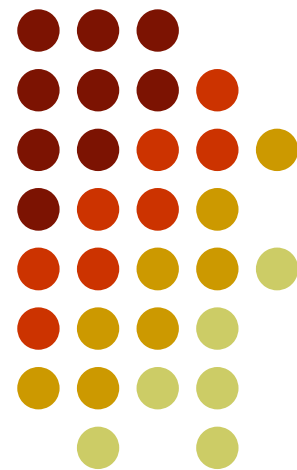


Chap 4 .2

L'Hospital 法则



■ 定理 ($\frac{0}{0}$ 型)

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

(2) $f(x)$, $g(x)$ 在 a 点邻域可导
且 $g'(x) \neq 0$

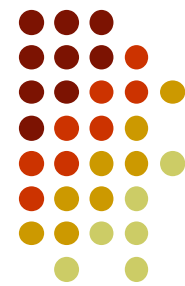
$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \text{ 可以为 } \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

➤ 法则意味着 $\frac{0}{0}$ 型的极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

在右端有意义的情况下成立



- 证明方法：怎样应用 Cauchy 定理？
- $x \rightarrow a^+$ (或 a^-, ∞ 等) 法则仍适用
- 应用法则时勿忘等价无穷小替换
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在并不意味着 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在

■ 推论

在定理的条件中 $x \rightarrow a$ 改为 $x \rightarrow \infty$ ，有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

■ 定理 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

(1) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

(2) $f(x), g(x)$ 在 a 的邻域可
且 $g'(x) \neq 0$ 导

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 可以为 ∞)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

➤ $x \rightarrow a^+$ (或 a^- , ∞ 等) 法则仍适用

■ $0 \cdot \infty, \infty \pm \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型 化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 处理



例 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{1-x} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} \quad (a > 1, \alpha > 0)$$

(3) (4) 两题
说明什么?

$$(5) \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \ln x \quad (\alpha > 0)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$



$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^2 \sin x}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\sin \frac{1}{x}}$$

例 $f(x)$ 在点 a 有二阶导数, 求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$



本节要点

洛必达法则是求极限最重要方法之一
但使用时必须注意

- 是否适合法则的条件
- 使用前考虑能否进行等价无穷小替换法则
- 当分子分母求导后极限不存在，原式不一
- 一定极限不存在，应考虑尝试其他方法



H.W 习题 4

21 (2) (3) (5) (6) (8) (9) (12) (13) (15)
(16) (19) (20)

22