Chap 4 .2

L'Hospital 法则

- 定理 ($\dfrac{0}{0}$ 型)

(1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

(2) $f(x)$, $g(x)$ 在 a 点邻域可导

且 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 可以为∞)

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

- 法则意味着 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

在右端有意义的情况下成立

- 证明方法：怎样应用 Cauchy 定理?
- $x\to a^{+}$（或 a^{-}, ∞ 等）法则仍适用
- 应用法则时勿忘等价无穷小替换
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在并不意味着 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在

- **推论**

在定理的条件中 $x\to a$ 改为 $x\to\infty$，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

■ 定理 ($\frac{\forall}{\infty}$ 型)

(1) $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

(2) $f(x)$, $g(x)$ 在 a 的邻域可导

且 $g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 可以为∞)

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

➢ $x\to a^{+}$ (或 a^{-}, ∞ 等) 法则仍适用

■ $0\cdot\infty$, $\infty\pm\infty$, 0^0, 1^{∞}, ∞^0 型 化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 处理

例　求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}\quad(\alpha>0)$

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}}\quad(a>1,\alpha>0)$

(3)(4) 两题说明什么?

(5) $\lim\limits_{x\to +0}x^{\alpha}\ln x\quad(\alpha>0)$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{x}}{x^{2}\sin x}$ (8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ (10) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\sin\frac{1}{x}}$

例 $f(x)$ 在点 a 有二阶导数，求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^{2}}$$

本节要点

洛必达法则是求极限最重要方法之一

但使用时必须注意

- 是否适合法则的条件
- 使用前考虑能否进行等价无穷小替换法则
- 当分子分母求导后极限不存在，原式不一定极限不存在，应考虑尝试其他方法

H.W 习题 4

21 (2) (3) (5) (6) (8) (9) (12) (13) (15)

(16) (19) (20)

22