Chap6—6

微分方程数值解
—Euler 法

微分方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t,x,y) \end{cases}$

初始条件 $x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$

Euler 方法十分简单，就是用差商代替微商，即

$$\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k}, \quad \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k}$$

通常取 Δt 为常数 τ, 就得到由第 k 步的值到第 k+1 步的值之间的关系式

Euler 迭代格式

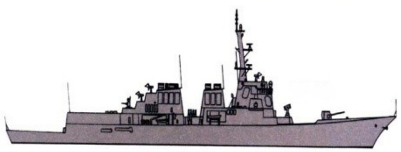
$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \tau f(t_k, x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \tau g(t_y, x_k, y_k) \end{cases}$$

其中 $\tau = \Delta x,\ t_k = t_0 + k\tau$

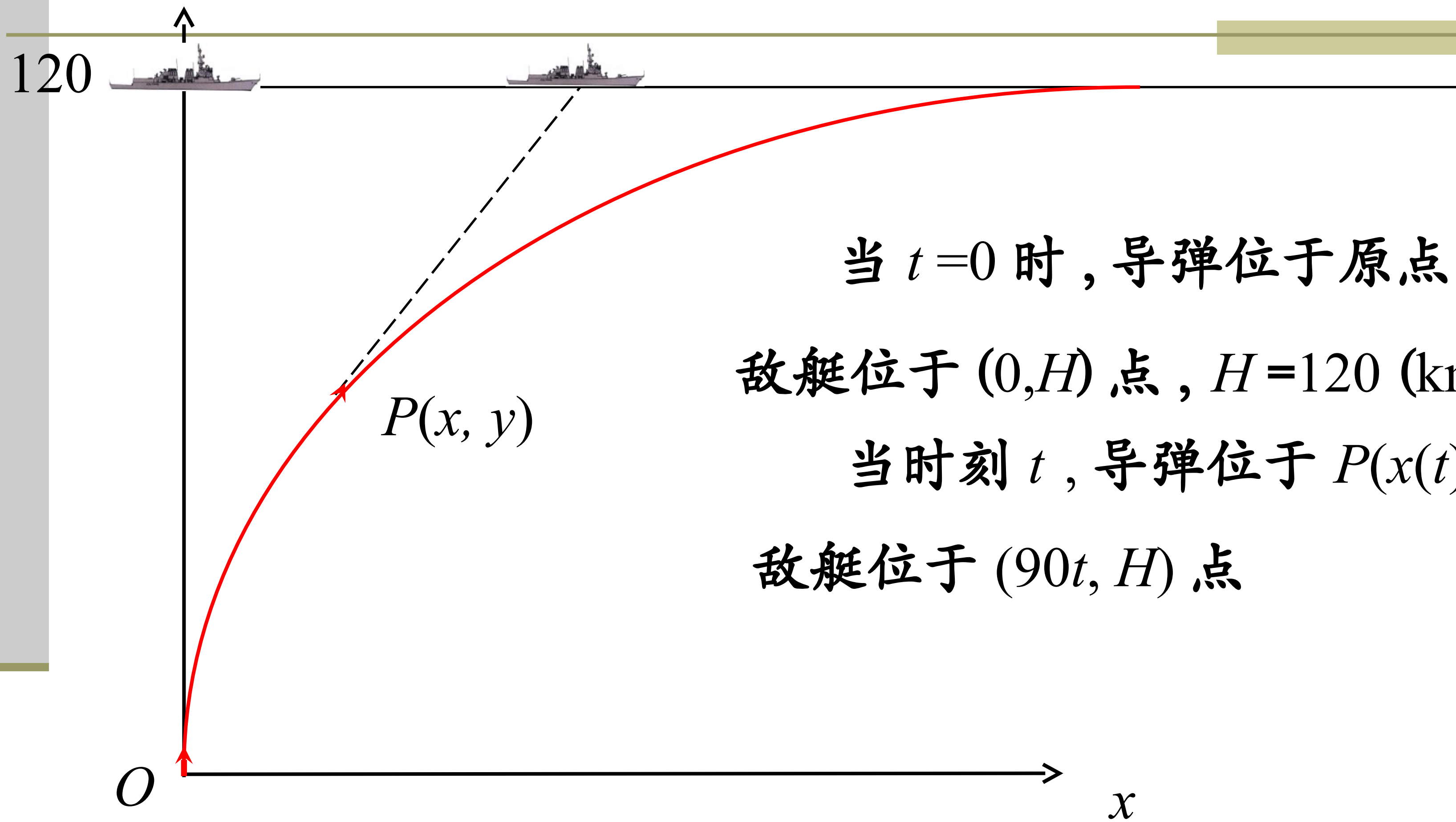
由初值（x_0, y_0）可以逐步求出一系列的（x_k, y_k）

导弹追踪问题

　　某军的一导弹基地发现正北方向 120 km 处海面上有敌艇一艘以 90 km/h 的速度向正东方向行驶．该基地立即发射导弹跟踪追击敌艇，导弹速度为 450 km/h， 自动导航系统使导弹在任一时刻都能对准敌艇.试问导弹在何时何处击中敌艇？



- 如图建立坐标系



当 $t=0$ 时，导弹位于原点 O,

敌艇位于 $(0,H)$ 点，$H=120$ (km).

当时刻 t，导弹位于 $P(x(t),y(t))$

敌艇位于 $(90t, H)$ 点

数学模型

时刻 t 导弹的位置为 $P(x(t),y(t))$, 其速度可由水平分速度与垂直分速度合成

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=v_w^2$$

导弹方向指向敌艇，故有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{H-y}{v_e t-x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{120-y}{90t-x}\right)$$

$V_w=450$ (km/h) $V_e=90$ (km/h)

微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{450}{\sqrt{1+(\dfrac{120-y}{90t-x})^2}} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{450}{\sqrt{1+(\dfrac{90t-x}{120-y})^2}} \\ x(0)=0 \quad y(0)=0 \end{cases}$$

Euler 迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \dfrac{450\tau}{\sqrt{1+(\dfrac{120-y_k}{90t_k-x_k})^2}} \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{450\tau}{\sqrt{1+(\dfrac{90t_k-x_k}{120-y_k})^2}} \\ x_0=0, \quad y_0=0 \end{cases}$$

t_{k+1} 时导弹位于 $(x_{k+1}，\ y_{k+1})$

计算到 $y_{k-1}<H$，$y_k \geq H$ 停止，取 $L \approx x_k$

- 利用 Matlab

当 $\tau = 0.05$，$L \approx x_6 = 29.195$ $T \approx 0.3244$

当 $\tau = 0.001$，$L \approx x_{278} = 25.049$ $T \approx 0.27833$

关于微分方程数值方法

大多数微分方程－即使形式十分简单，也可能无法用解析方法求解，因此数值方法极其重要