



# Chap 2.6

## 闭区间连续函数的性质

## ■ 有界性定理

若  $f(x) \in C[a, b]$  , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  有界

➤ 联系函数曲线考虑, 开区间行不行?

## ■ 最值定理

若  $f(x) \in C[a, b]$  , 则  $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$  , 使得  
$$f(\xi_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(\xi_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x),$$

## ■ 零点存在定理

若  $f(x) \in C[a, b]$  ,  $f(a)f(b) < 0$  , 则  $\exists \xi \in (a, b)$  ,  
使得

$$f(\xi) = 0$$

## ➤ 推论

若  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $M, m (M > m)$  分别是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值和最小值, 则  $\forall \mu \in (m, M)$ ,  $\exists \xi \in (a, b)$  使得

$$f(\xi) = \mu$$

想一想  
怎样证明推论?

例  $f(x) \in C[a, b]$ , 当  $x \in [a, b]$ ,  $a < f(x) < b$ , 试证:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = \xi$

例  $f(x) \in C[0, a] (a > 0)$ ,  $f(a) = f(0) = 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, a)$  恒正, 试证:  $\forall l \in (0, a)$ ,  $\exists \xi \in (0, a-l)$ , 使

$$f(\xi) = f(\xi + l)$$

例  $f(x) \in C[a, +\infty)$ ,  $f(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > 0$   
试证:  $\leq 0$ ,  $\exists \xi \in (a, +\infty)$ , 使得  
$$f(\xi) = 0$$

例 试确定方程  $x^3 + 2x^2 - 5x + 1 = 0$  实根的个数和大致范围

**H.W** 习题 2

39 41 42

## 本章要点

1. 理解极限的概念，知道其定义的含义，了解自变量不同趋势时 ( $x \rightarrow \infty$  ,  $x \rightarrow a$  , 双侧、单侧) 各种极限的区别，用  $\varepsilon - \delta$  (或  $N$ ) 语言做证明并非要求的重点。
2. 了解各类型极限的性质和运算法制，会应用这些法则，重要的是求复合函数极限
3. 会用夹逼定理和单调有界极限存在定理求某些极限


4. 了解两个重要极限，但注意不必过分注重把函数化为这两种形式来求极限的方法，这两个极限告诉我们

$$x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x$$

5. 重视求极限的重要方法：利用等价无穷小替换  
但是只有式子中无穷小因子才能进行替换

$$\sin \Delta \sim \Delta, \quad 1 - \cos \Delta \sim \frac{1}{2} \Delta^2, \quad \tan \Delta \sim \Delta$$

$$\ln(1+\Delta) \sim \Delta, \quad e^\Delta - 1 \sim \Delta, \quad (1+\Delta)^\alpha - 1 \sim \alpha \Delta$$


$$\arcsin \Delta \sim \Delta, \quad \arctan \Delta \sim \Delta$$

由上述等价无穷小，还可了解一些无穷小的阶

- 6. 连续的函数，极限符号可以通过函数符号
- 7. 应该了解闭区间上连续函数的性质，但应用的重点是零点存在定理