Chap8 — 3

偏 导 数

8.3.1 偏导数的概念

一．定义

对二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 给 x 以增量 Δx

相应地函数有增量（偏增量）

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

函数 f 在点 (x_0,y_0) 处**对 x 的偏导数**

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

偏导数也可记为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

- 对变量 y 的偏导数类似

- 多元函数的偏导数是其对某一自变量的变化率

函数 f 在区域 D 上每一点都存在偏导数，则这些偏导数是 D 上的二元函数，称为偏导函数，记为

$$f_x(x,y),\ f_y(x,y) \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

二． 二元函数偏导数求法

把 y 固定在 y_0，求一元函数 $f(x, y_0)$ 在 x_0 处的导数，就得到偏导数 $f_x(x_0, y_0)$，同样方法可以计算偏导数 $f_y(x_0, y_0)$

例　求函数 $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的偏导数 $z_x(0,1)$,

$z_y(0,1)$

例　求函数 $u = x^y \quad (x > 0)$ 的偏导数

例　$f(x,y) = e^{x+y}[x^{\frac{1}{3}}(y-1) + y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}]$ 求在

点（0, 1）处的偏导数 （往年试题）

H.W

习题 8

9

10 (2) (5) (7) (8) (10)

三． 连续与可偏导的关系

- 可偏导未必连续

例 考察

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在（0, 0）的情况

（能否再举一例）

- 连续未必可偏导

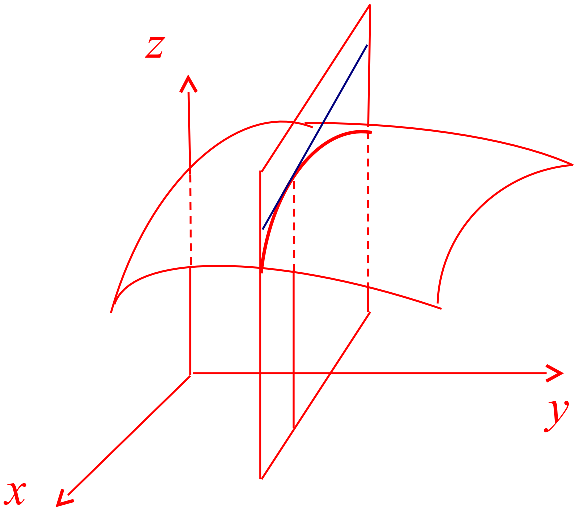
例 考察 $f(x,y)=|x|+|y|$ 在（0, 0）的情况

8.3.2 二元函数偏导数的几何意义

曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的交线

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad z = f(x, y_0)$$

（平面 $y=y_0$ 上的曲线）



$f_x(x_0, y_0)$ 是上述曲线在

(x_0, y_0) 点处的切线关于

x 轴的斜率

例　求曲线 $\begin{cases} z = \dfrac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在 (2, 4, 5) 处的切线

及其与 x 轴的夹角

要求出切线方向

H.W

习题 8

11 （ 2 ） （ 3 ）

8.3.3 高阶偏导数

$f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域内的偏导数 $f_x(x, y)$，

$f_y(x,y)$ 的偏导数称为 f 在 (x_0, y_0) 点处的二阶偏导数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

类似地；二阶偏导数的偏导数为三阶偏导数

例如

$$f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$$

例　求函数 z 的所有二阶偏导数

$$1)\quad u = \ln x + \sin(xe^y)$$

$$2)\quad u = x^y$$

例　证明函数

$$r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

满足 Laplace（拉普拉斯）方程:

$$\Delta r \overset{def}{=} r_{xx} + r_{yy} + r_{zz} = 0$$

- 混合偏导数是否总与求导次序无关?

例　设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy, & |x| \quad |y|, \\ -xy, & |x|<|y|, \end{cases}$$

求　$f_{xy}(0,0),\ f_{yx}(0,0)$

搞清楚先求哪个一阶导数?

- 混合偏导数与求导次序无关的充分条件

若函数 $f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数在点 (x,y) 连续，则

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(y,x)$$

H.W

习题 8

12 (1) (2) (4)

13 (2) (3)

14 (2) (3)