

# Chap 5.6



## 定积分的应用

## 5.6.1 微元法

---

某个量分布在区间  $[a,b]$  上, 如果有

$$dF = f(x)dx$$

那么

$$F = \int_a^b f(x)dx$$

问题是: 我们怎样得到  $f(x)$  ?

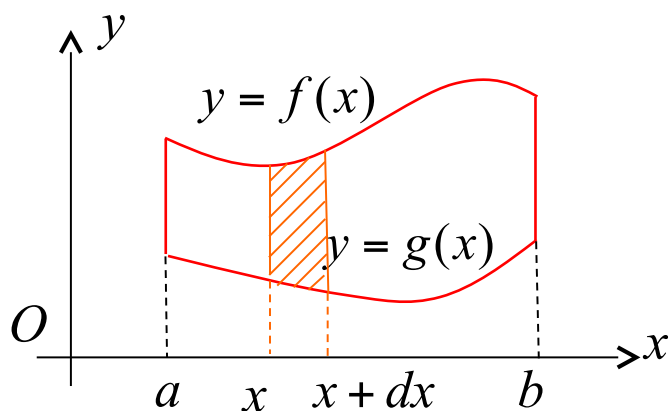
■ 微元法: 分析在小区间分布的部分量

$\Delta F$  的线性主部  $dF$  来得到  $f(x)dx$

➤  $\Delta F$  与  $dF$  的差是高阶无穷小  $o(\Delta x)$

## 5.6.2 几何应用－面积

### ■ 直角坐标系



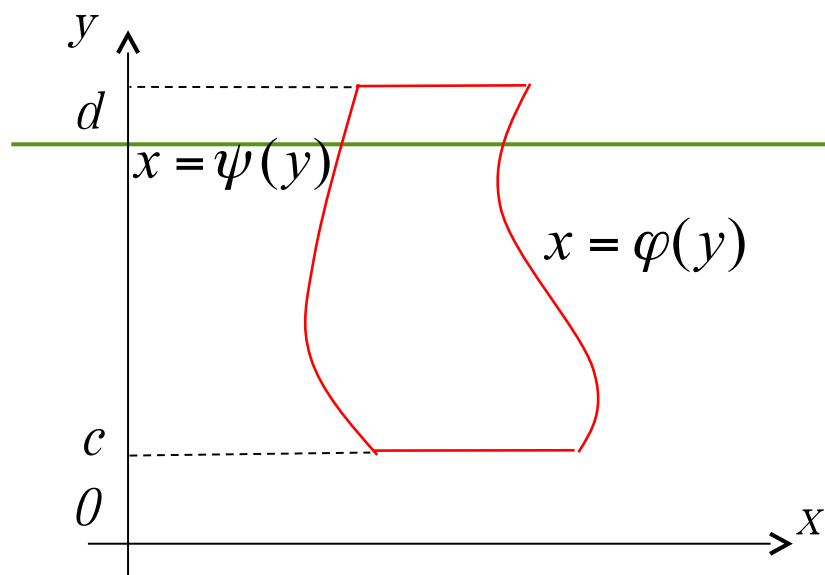
若  $f(x), g(x) \in C[a, b]$ ,  $f(x) > g(x)$   
求由  $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$   
所围图形面积

考虑  $[x, x+dx]$  上的面积

$$\Delta A \approx [f(x) - g(x)]dx$$

$$\Rightarrow A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

如左图的图形，面积=？



$$A = \int_c^d [\varphi(y) - \psi(y)] dy$$

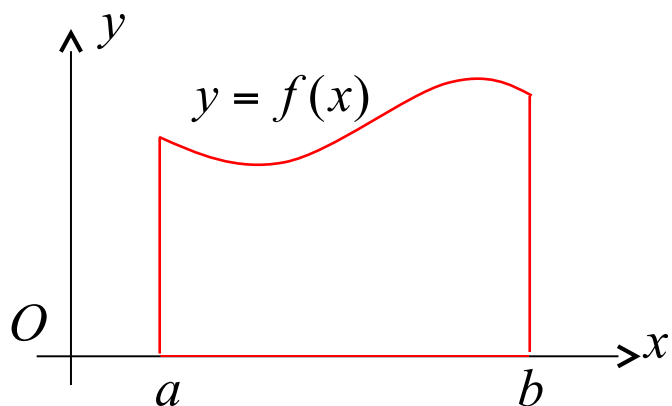
例 求下列图形的面积

(1)  $y = x^2$  与  $y = x$  所围图形

(2)  $y^2 = -4(x-1)$  与  $y^2 = -2(x-2)$  所围图形

## ■ 参数方程形式

若曲边梯形的曲边方程为参数形式,



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

(其中  $a = x(\alpha)$ ,  $b = x(\beta)$  )

则曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt$$

例 求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的面积

---

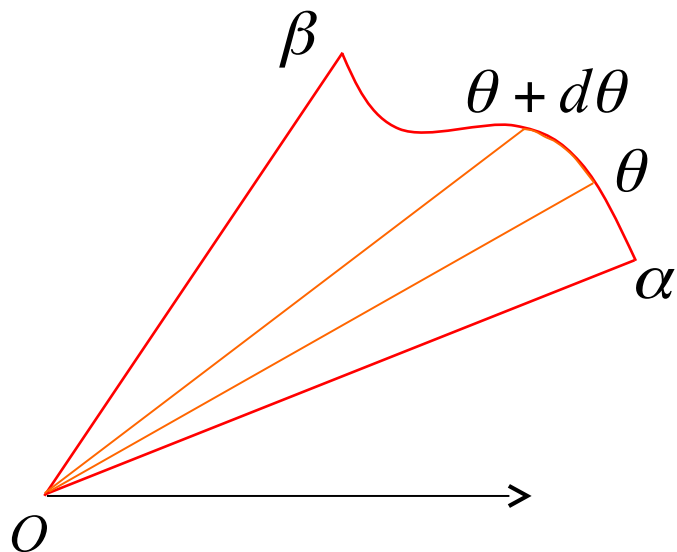
■ 极坐标形式

由曲线  $r = r(\theta)$ , 射线  $\theta = \alpha$ ,  $\theta = \beta$  所围成的

图形面积  $A = ?$

考虑  $[\theta, \theta + d\theta]$  上的面积

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$



⇒

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$

例 求心脏线  $r = a(1 + \cos \theta)$  所围面积

---

例 求双纽线  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  所围图形的面积

例 求双纽线  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  所围平面图形  
在圆  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$  内部分的面积

例 求由射线  $\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$  与曲线  $\theta = r \arctan r$  所围  
图形的面积

## H.W 习题 5

---

**40 (1) (2) (3)(6)**

**41(2) 42**

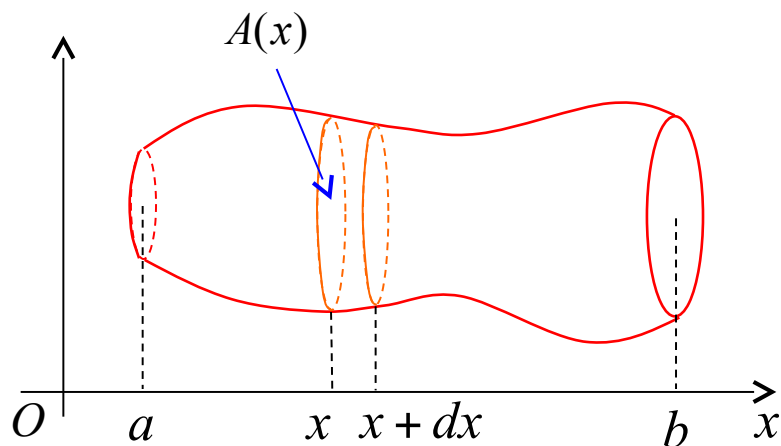
**43 (1) 44(2)**

**45(1)**

**46 (1)(2) 47**

# 几何应用－体积

## ■ 已知截面积的几何体



若几何体的底面与  $x$  轴垂直，而在  $x$  处平行底面的截面面积为  $A(x)$ ，求其体积  $V$  ( $a \leq x \leq b$ )

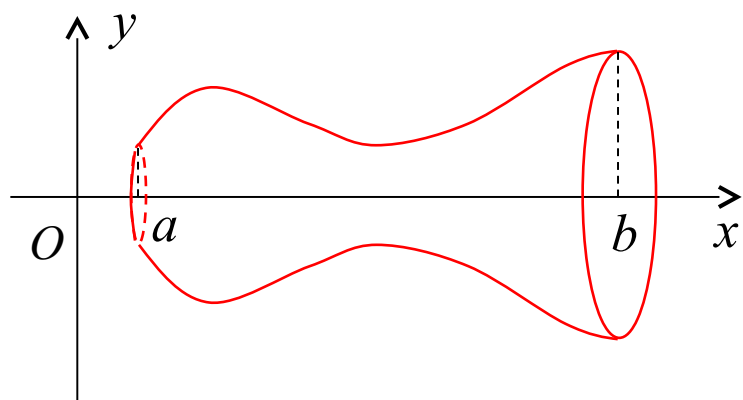
考虑  $[x, x+dx]$  上的体积

$$\Delta V \approx A(x)dx$$

$$\Rightarrow V = \int_a^b A(x)dx$$

例 半径为  $a$  的圆柱体被底面平面和过底面直径而与底面成  $\alpha$  角的平面截得一个圆柱楔  
求其体积

■ 旋转体



由曲线  $y = f(x) (\geq 0)$ ，直线  $x = a, x = b$  和  $x$  轴围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转所得几何体 (旋转体) 的体积

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

➤ 曲线  $x=x(y)(\geq 0)$  绕  $y$  轴所得旋转体体积？

---

例 分别求  $y=x^2$  与  $x=1$  所围平面图形绕  $x$  轴所得旋转体的体积

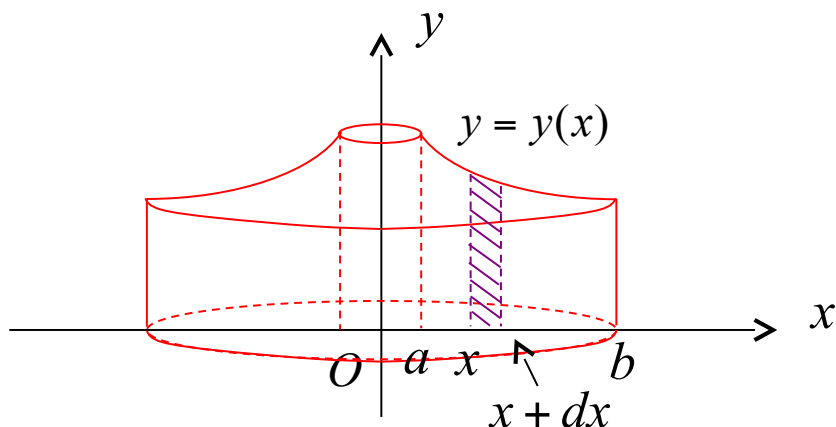
例 求椭圆  $x=a \cos t, y=b \sin t, (0 \leq t \leq 2\pi)$  所围图形绕  $x$  轴旋转所得旋转体的体积

例 求  $y=\sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 与  $x$  轴所围图形分别绕  $x$  轴,  $y$  轴旋转所得旋转体的体积

## ➤ 求旋转体的薄壳法

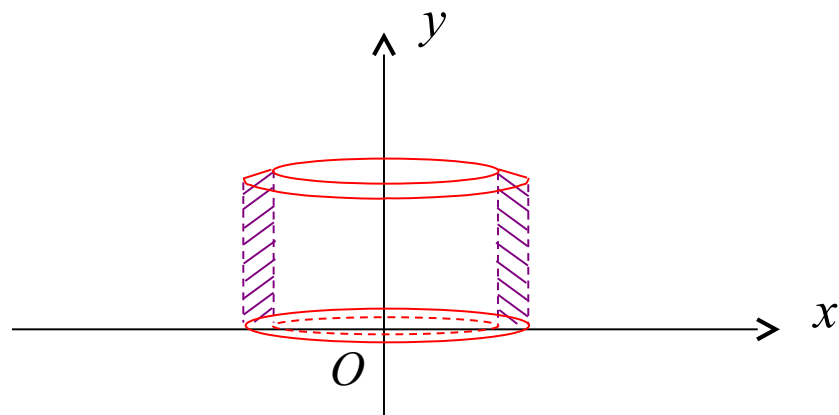
求曲线  $y = y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ )

下方的曲边梯形绕  $y$  轴  
旋转所得几何体的体积



考虑对应  $[x, x+dx]$  上的曲边梯形旋转出的体积

$$\Delta V \approx 2\pi y x dx$$



$\Rightarrow$

$$V = \int_a^b 2\pi x y(x) dx$$

---

## **H.W 习题 5**

**48**

**49 (1)(3)**

**50 (1) 51(1) 52**

# 几何应用－弧长和旋转体侧面积

## ■ 弧长

求曲线  $y = y(x)$  上  $a \leq x \leq b$  一段的弧长  $s$

回顾弧微分

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

$$\Rightarrow s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

若曲线弧段为  $x = x(t), y = y(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ )

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \Rightarrow s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

例 求抛物线  $y=x^2$  上  $-1 \leq x \leq 1$  的一段弧长

---

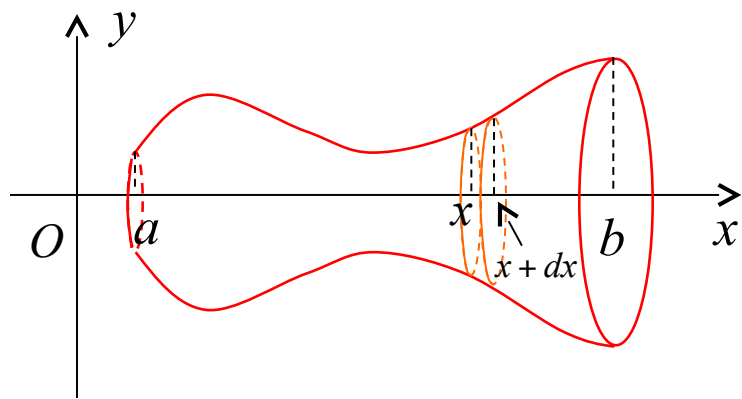
例 求星形线  $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$   
之长 ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )

例 求极坐标方程形式的曲线  $r = r(\theta)$  上  
 $\alpha \leq \theta \leq \beta$  的一段弧长

**H.W 习题 5**

**55 (1) (2) (3)(4) (5)**

## ■ 旋转体的侧面积



由曲线  $y = y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ )  
下方的曲边梯形绕  $x$  轴旋  
转得旋转体的侧面积  $S = ?$

考虑  $[x, x+dx]$  上曲线所对应的部分侧面积

➤ 能不能看成圆柱侧面  $\Delta S \approx 2\pi y dx$  ← 并非线性主部

➤  $\Delta S \approx 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$

$$\Rightarrow S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

例 求曲线  $y = \sqrt{x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 绕  $x$  轴

---

旋转形成的曲面面积

考虑：若曲线是参数方程形式给出的，那么  
侧面面积公式怎样？

( 从  $\Delta S \approx 2\pi y ds$  出发 )

**H.W 习题 5**

**53(2)**

**54**

### 5.6.3 物理应用

---

例 （做功问题） 内半径 1 米的半球形水池，将满池水抽尽，需做功多少？

例 （压力问题） 底长为  $a$  高为  $h$  ( 单位为  $m$ ) 的三角形薄板铅直地放入水中，底边恰在水表平面中，求薄板一个侧面上所受压力

例 (引力问题) 均匀细棒长  $2l$ , 质量为  $M$ ,

---

(1) 单位质量的质点  $A$  在棒的延长线上距棒中心  $O$  点  $a$  处; (2) 单位质量的质点  $B$  在棒的垂直平分线上距  $O$  点  $a$  处; 求细棒分别对  $A, B$  的引力. (万有引力常数为  $G$ )

**H.W 习题 5**

**57—60 63**