Chap 11

级 数

Chap 11 － 1

级数的概念和性质

11. 1. 1　级数的概念

设 $\boldsymbol{u_1, u_2, \ldots, u_n}, \cdots$ 是一个数列，则和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数），和式中的每一项称为级数的项， $\boldsymbol{u_n}$ 称为级数的通项 (或一般项），而

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为级数的前 $\boldsymbol{n}$ 项部分和

若存在 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且收敛于 $\boldsymbol{S}$ ， $\boldsymbol{S}$ 称为级数的和;

记为 $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，称

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = S - S_n$$

为级数的余和，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

例　讨论级数的收敛性

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a > 0)$　　2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

11.1.2　级数的基本性质

一．基本性质

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛到 S，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛到 $\boldsymbol{T}$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n \pm \beta v_n)$ 收敛到 $\alpha S + \beta T$　（线性）

2. 将级数增加、删减或改换有限项，不改变级数的敛散性

3. 若级数收敛于和 $\boldsymbol{S}$，则将相邻若干项相加作一项而组成的新级数仍然收敛于 $\boldsymbol{S}$.

二． 级数收敛的必要条件

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$ （一般项是无穷小）

注意:

$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 或不存在 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 不一定能导出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

例 讨论级数的敛散性

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

H.W

习题 11

2　　3 （1）　（3）　（5）　（8）

3　　（6）　（7）