

Chap 5.6



定积分的应用

5.6.1 微元法

某个量分布在区间 $[a,b]$ 上，如果有

$$dF = f(x)dx$$

那么

$$F = \int_a^b f(x)dx$$

问题是：我们怎样得到 $f(x)$?

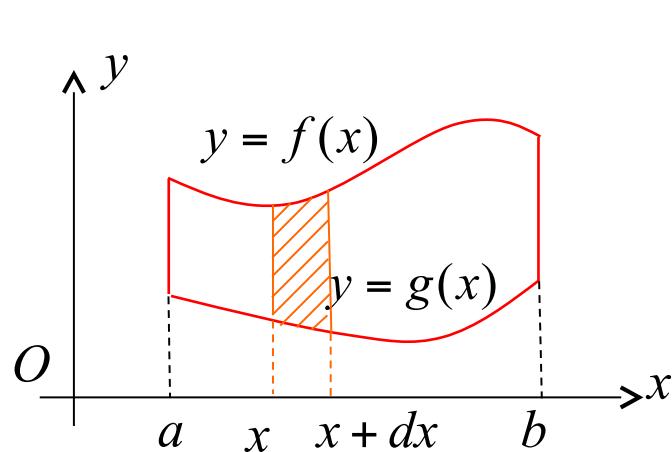
- 微元法：分析在小区间分布的部分量

ΔF 的线性主部 dF 来得到 $f(x)dx$

- ΔF 与 dF 的差是高阶无穷小 $o(\Delta x)$

5.6.2 几何应用 – 面积

■ 直角坐标系

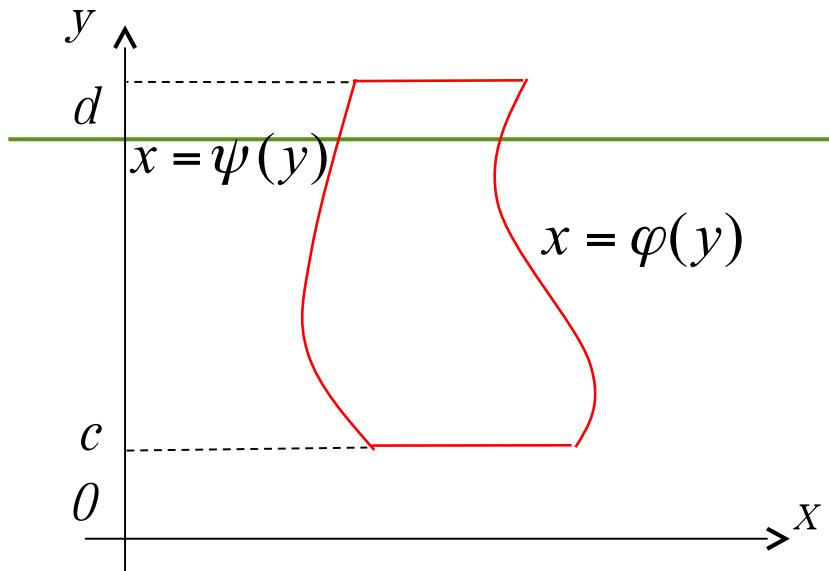


若 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, $f(x) > g(x)$
求由 $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$
所围图形面积

考慮 $[x, x+dx]$ 上的面積

$$\Delta A \approx [f(x) - g(x)]dx$$

$$\Rightarrow A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



如左图的图形，面积 = ?

$$A = \int_c^d [\varphi(y) - \psi(y)] dy$$

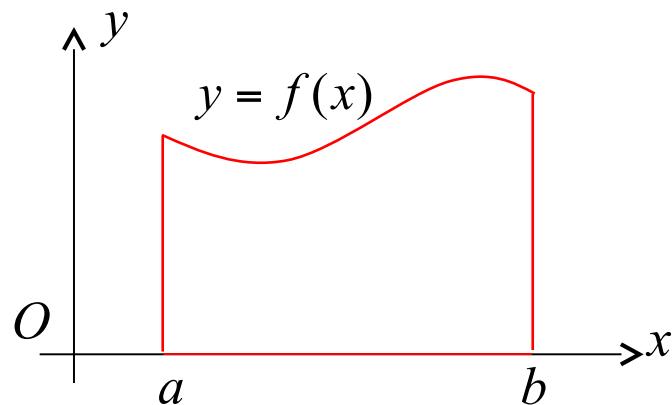
例 求下列图形的面积

(1) $y = x^2$ 与 $y = x$ 所围图形

(2) $y^2 = -4(x - 1)$ 与 $y^2 = -2(x - 2)$ 所围图形

■ 参数方程形式

若曲边梯形的曲边方程为参数形式,



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

(其中 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$)

则曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt$$

例 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积

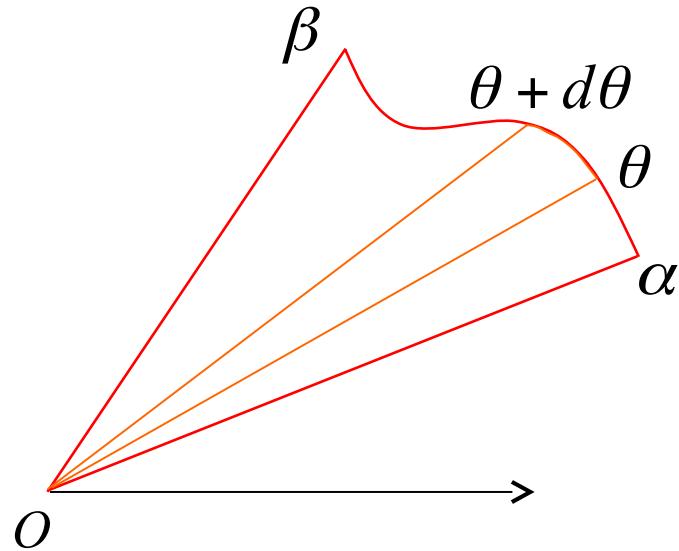
■ 极坐标形式

由曲线 $r = r(\theta)$, 射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围成的

图形面积 $A = ?$

考虑 $[\theta, \theta+d\theta]$ 上的面积

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$



$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$

例 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 所围面积

例 求双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所围图形的面积

例 求双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所围平面图形

在园 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 内部分的面积

例 求由射线 $\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ 与曲线 $\theta = r \arctan r$ 所围图形的面积

H.W 习题 5

40 (1) (2) (3)(6)

41(2) 42

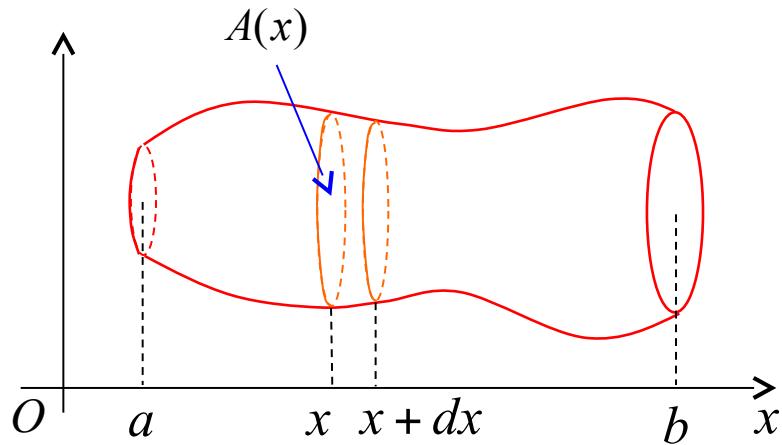
43 (1) 44(2)

45(1)

46 (1)(2) 47

几何应用 – 体积

■ 已知截面积的几何体



若几何体的底面与 x 轴垂直，而在 x 处平行底面的截面面积为 $A(x)$ ，求体积 V ($a \leq x \leq b$)

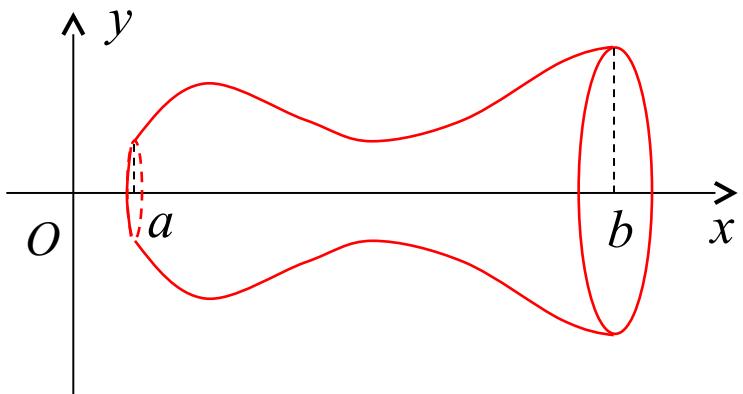
考虑 $[x, x+dx]$ 上的体积

$$\Delta V \approx A(x)dx$$

$$\Rightarrow V = \int_a^b A(x)dx$$

例 半径为 a 的圆柱体被底面平面和过底面直径而与底面成 α 角的平面截得一个圆柱楔求其体积

■ 旋转体



由曲线 $y = f(x) (\geq 0)$, 直线 $x = a, x = b$ 和 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转所得几何(旋转体)的体积

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

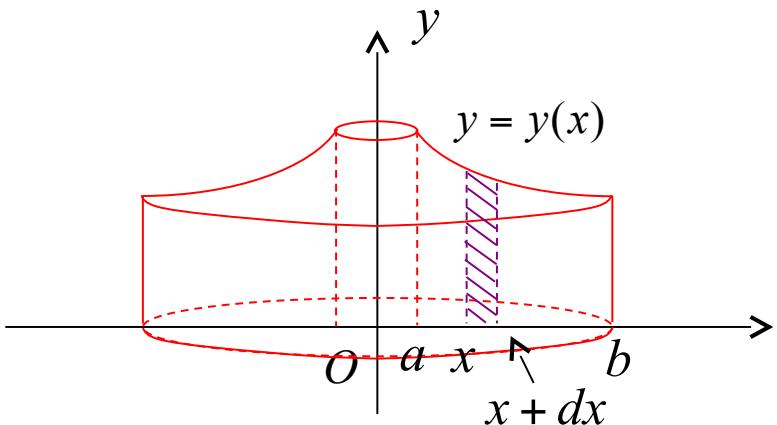
➤ 曲线 $x=x(y)(\geq 0)$ 绕 y 轴所得旋转体体积？

例 分别求 $y = x^2$ 与 $x = 1$ 所围平面图形绕 x 轴所得旋转体的体积

例 求椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t, (0 \leq t \leq 2\pi)$ 所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

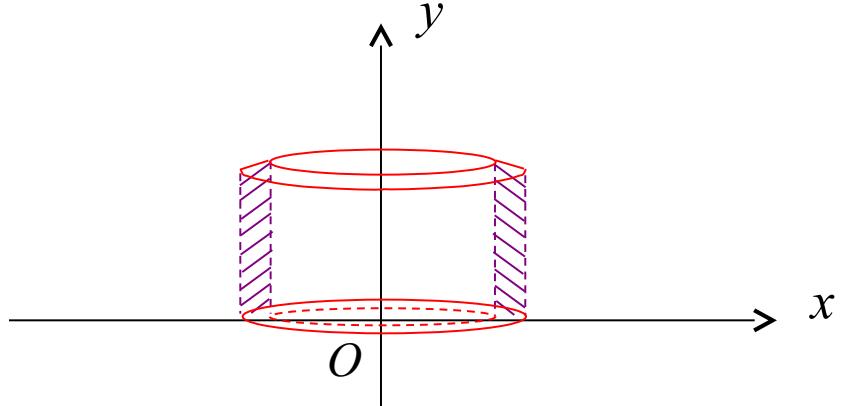
例 求 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴所围图形分别绕 x 轴, y 轴旋转所得旋转体的体积

➤ 求旋转体的薄壳法



求曲线 $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$)
下方的曲边梯形绕 y 轴
旋转所得几何体的体积

考虑对应 $[x, x+dx]$ 上的曲边梯形旋转出的体积



$$\Delta V \approx 2\pi y x dx$$

$$V = \int_a^b 2\pi x y(x) dx$$

H.W 习题 5

48

49 (1)(3)

50 (1) 51(1) 52

几何应用 – 弧长和旋转体侧面积

■ 弧长

求曲线 $y = y(x)$ 上 $a \leq x \leq b$ 一段的弧长 s

回顾弧微分

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

$$\Rightarrow s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

若曲线弧段为 $x = x(t), y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$)

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \Rightarrow s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

例 求抛物线 $y=x^2$ 上 $-1 \leq x \leq 1$ 的一段弧长

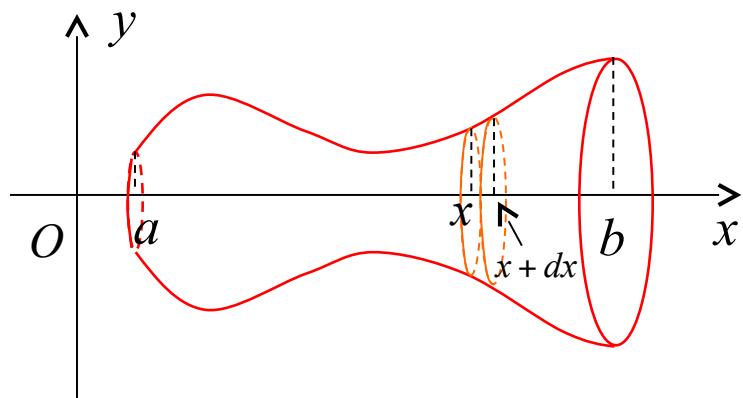
例 求星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$
之长 ($0 \leq t \leq 2\pi$)

例 求极坐标方程形式的曲线 $r = r(\theta)$ 上
 $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 的一段弧长

H.W 习题 5

55 (1) (2) (3)(4) (5)

■ 旋转体的侧面积



由曲线 $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$)
下方的曲边梯形绕 x 轴旋转
所形成的旋转体的侧面积 $S = ?$

考虑 $[x, x+dx]$ 上曲线所对应的部分侧面积

- 能不能看成圆柱侧面 $\Delta S \approx 2\pi y dx$ ← 并非线性主部
- $\Delta S \approx 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$

$$\Rightarrow S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

例 求曲线 $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$) 绕 x 轴

旋转形成的曲面面积

考虑：若曲线是参数方程形式给出的，那么
侧面面积公式怎样？

(从 $\Delta S \approx 2\pi y ds$ 出发)

H.W 习题 5

53(2)

54

5.6.3 物理应用

例（做功问题）内半径 1 米的半球形水池，将满池水抽尽，需做功多少？

例（压力问题）底长为 a 高为 h （单位为 m）的三角形薄板铅直地放入水中，底边恰在水表平面中，求薄板一个侧面上所受压力

例 (引力问题) 均匀细棒长 $2l$, 质量为 M ,

(1) 单位质量的质点 A 在棒的延长线上距棒中心 O 点 a 处; (2) 单位质量的质点 B 在棒的垂直
延长线上距 O 点 a 处; 求细棒分别对 A, B 的引力.(万
有引力常数为 G)

H.W 习题 5

57—60 63