Chap 10

曲线积分和曲面积分

Chap 10 - 1

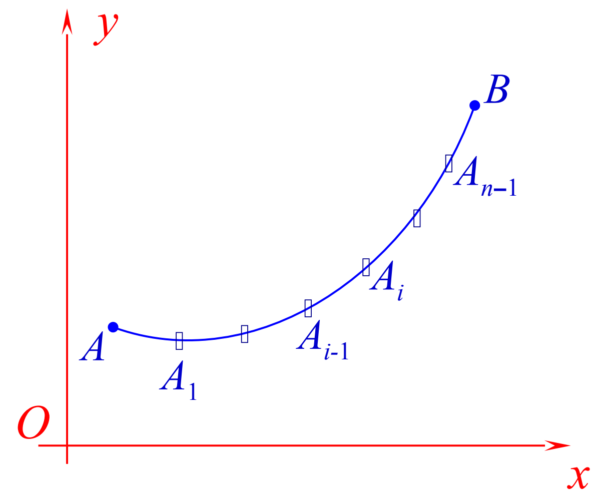
第一类曲线积分和曲面积分

10.1.1 数量值函数的曲线积分

一．概念

问题：怎样求一段曲线弧状的质线的质量?

设 xy 平面的曲线弧为 C，端点 A,B，其上 (x,y) 处的线密度为 $\mu(x,y)$



用分点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$, 将 C 分成 n 小段，记 $A_0 = A, A_n = B$，第 i 个小弧段 $A_{i-1}A_i$ 的长度为 Δs_i

第 i 个小弧段上任取一点 (ξ_i, η_i), 小弧段的质量近似 $\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$， 质线的质量近似为

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$, 若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

存在，那么此极限给出了弧状质线的质量

试一试

去掉物理背景，取代密度 $\mu\,(x,y)$ **为**定义在曲线

C 上的有界函数 $f\,(x,y)$ ，给出数量值函数曲线积分

$$\int_C f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

的定义

数量值曲线积分又称第一类曲线积分

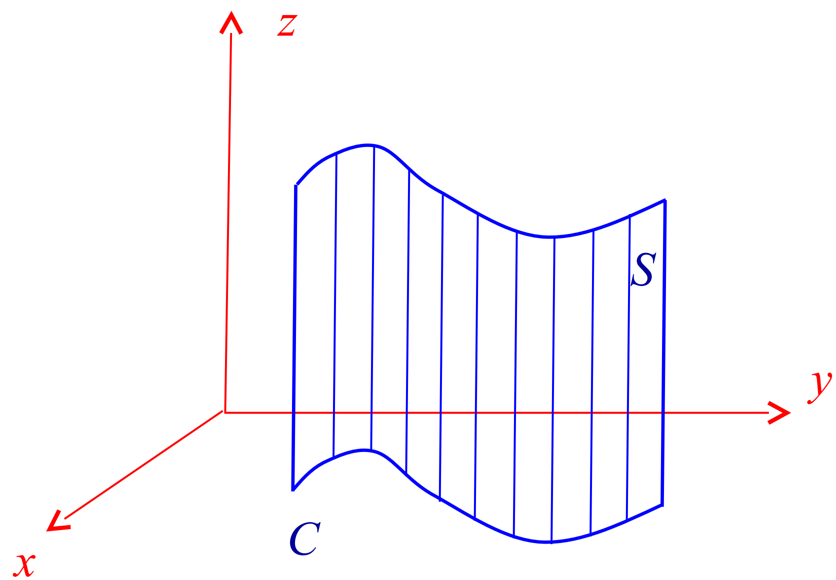
几何问题：求一块柱面的面积

设 C 是 xy 平面上曲线， S 是以 C 为准线，母线垂直 xy 平面的柱面，柱面高度为 $f(x,y)$，求 xy 平面以上这部分柱面 S 的面积

结论

$$\boxed{A=\int_C f(x,y)ds}$$

（曲线积分的几何意义）



二． 性质

与曲线方向无关　　若曲线 C 为 AB，则

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds$$

还有类似定积分的性质，例如

线性

$$\int_C [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]ds = \alpha \int_C f(x,y)ds + \beta \int_C g(x,y)ds$$

可加性　设曲线段 C_1 与 C_2 首尾相接成曲线 C

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds$$

中值定理 设函数 f 在光滑曲线段 C 上连续，

则存在 $(\xi,\eta)\in C$，使得

$$\int_C f(x,y)ds = f(\xi,\eta)\cdot s_c$$

其中 s_c 为曲线段 C 的长度.

10.1.2 数量值函数曲线积分的计算

设函数 $f(x,y)$ 在曲线 C 上连续， C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta]$$

$x(t),y(t)$ 均有连续导数

那么可得

$$\boxed{\int_C f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\underbrace{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt}_{}}$$

ds 弧微分

由于这积分中的 ds 是弧长，取正值，故右端积分限应 $\alpha \le \beta$

当曲线形式为 $y = y(x), \quad x \in [a,b]$

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx}$$

例　计算曲线积分 $\int_C x ds$，其中 C 是抛物线 $y = x^2$ 上自点 $O(0, 0)$ 到 $B(1, 1)$ 的弧段

例　计算曲线积分 $\int_C x ds$，其中 C 是自点 $O(0, 0)$ 至 $A(1, 0)$ 再至 $B(1, 1)$ 的折线段

例　质线的线密度为 $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$，其曲线 C 为半圆周 $y = \sqrt{4x - x^2}$，$x \in [0,4]$，求质线的质量

回顾在极坐标 $r = r(\theta)$ 时，$\boxed{ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta}$

例　求函数 $f(x,y)=x^3y$ 在条件

$$3x+4y=12 \quad (0\le x\le 4)$$

下的最大值，并 证明不等式

$$5e^{-\frac{9}{2}} \le \int_C e^{-\sqrt{x^3y}}ds \le 5$$

其中 C 是直线 $3x+4y=12$ 在两坐标轴间的一段

思考或猜测

对于空间曲线 $\boldsymbol{L}$：

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

第一型曲线积分 $\int_L f(x, y, z) ds$ 的概念与计算式如何?

例　计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中曲线 $\boldsymbol{L}$ 是曲面

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $z + x = 2$ 的交线

（将 L 的方程视为参数

方程，可选 x 为参数）

$$\begin{cases} z'_x = -1 \\ y'_x = \dfrac{z - x}{y} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2_x + z'^2_x} = \sqrt{\frac{2}{2x - x^2}}$$

H.W

习题 10

1　（2）（5）（7）（10）

2　（2）（3）　4

10.1.3 数量值函数的曲面积分

- 问题：怎样求一块曲面的质量?

设 函数 $f(x,y,z)$ 定义在分片光滑的曲面 S 上，试

将 $f(x,y,z)$ 视为面密度，采用分割、求和、取极限的

来求这曲面质量，从而导出第一型曲面积分的定义

其记号为

$$\iint_S f(x,y,z)dS$$

- 第一型曲面积分有类似于第一型曲线积分的

性质，如线性和可加性

10.1.4 第一类曲面积分计算法

回顾在重积分一章，我们已经得知：曲面 $\boldsymbol{S}$ 为

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D$$

则有

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy,$$

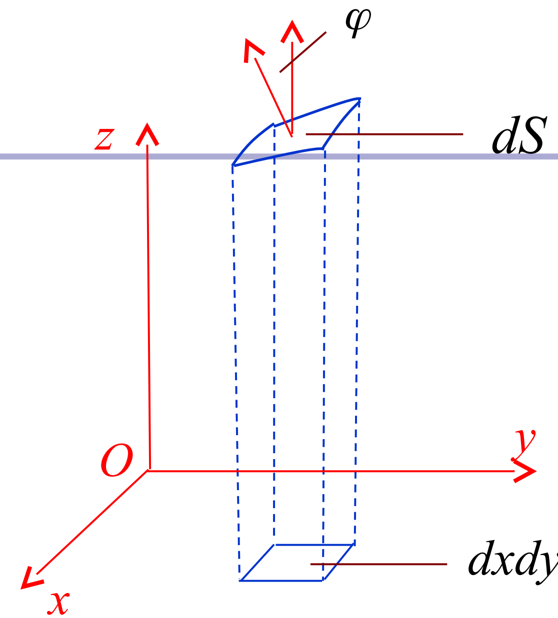
从而

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy}$$

公式的导出

$$|\cos\varphi| = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

φ是 dS 上的法向量与 z 方向的夹角



那么当曲面 S 为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

注意 dS 的法向量

$$(x_u, y_u, z_u)\times(x_v, y_v, z_v)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right) \overset{\text{记为}}{=} (A, B, C)$$

$$\Rightarrow \qquad dS = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|} dxdy$$

回顾 $dxdy$ 与 $dudv$ 关系，$dxdy = |C| dudv$，故得

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

其中

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

因此曲面积分计算公式为

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_D f[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv}$$

例分　计算曲面积

$$I = \iint_S (x + y + z) dS$$

其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

（注意区域的对称性）

例在　把半径 R 的球放入水中，使球上顶端恰水面，求球面承受的水的压力

（注意压力有方向）

怎样选择坐标系才好?

例　　计算曲面积分

$$I = \iint_S z dS$$

其中 S 是螺旋面的一部分：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = \theta \end{cases} \qquad 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\int \sqrt{1+r^2}\,dr = \frac{1}{2} r\sqrt{1+r^2} + \frac{1}{2}\ln(r + \sqrt{1+r^2}) + \mathrm{c}$$

H.W

习题 10　　6 (1) (3) (5)