Chap7 —2

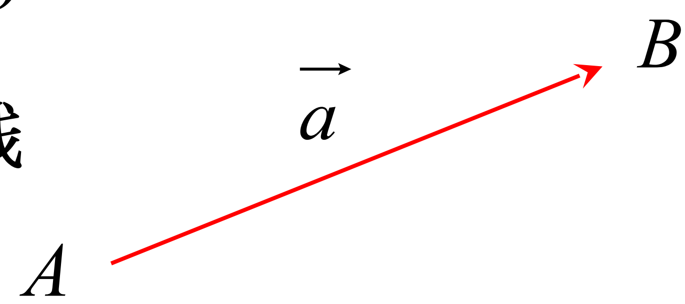
向量及其线性运算

7.2.1 向量的概念

不仅有数值大小、而且有方向的量称为**向量**

- **几何表示**　用既有长度又有方向的线段(有向线段)来表示　(不唯一)

起点 A, 终点 B 的有向线段



其长度表示向量大小、

方向表示向量方向

记为 $\overrightarrow{AB}$, 或小写字母表示，例 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{i}$

➢ 向量的模（或长度）

表示向量的有向线段的长度，记为 $|a|$

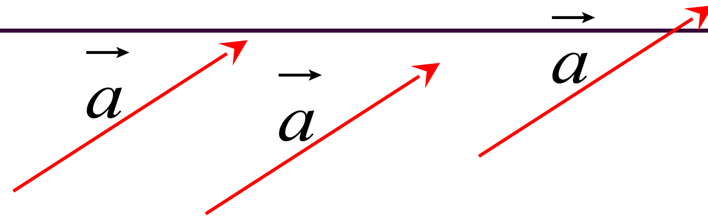
模为 1 的向量称为单位向量_

模为零的向量称为零向量，记为 $\vec{0}$，零向量的方向规定为任意的，可据情况任意指定

➢ 相等　若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的大小和方向均相同，称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等，记为

$$a = b$$

向量相等的定义意味着：向量有平移不变性



有时 有向线段和它表示的向量不做严格区分

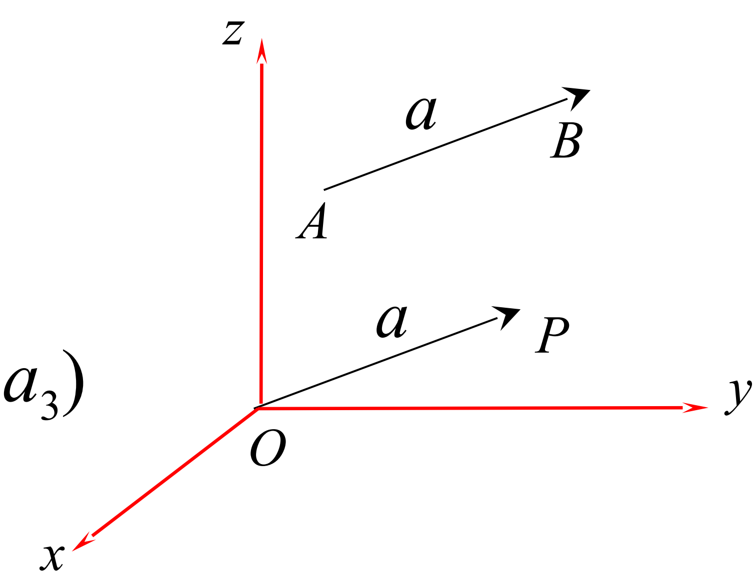
➢ 向量的坐标

向量 $a \xleftrightarrow{1-1} OP \xleftrightarrow{1-1}$

P 点 $\xleftrightarrow{1-1}$ P 的坐标 (a_1,a_2,a_3)

1 − 1 对应

向量的坐标



$a=(a_1,a_2,a_3)$ 称为点 $P=(a_1,a_2,a_3)$ 的**定位向量**

向量 a $=(a_1,a_2,a_3)$ **的模**

$$|a| = |OP| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

H.W

习题 7

1 3

7.1.2 向量的线性运算

- 向量的加法

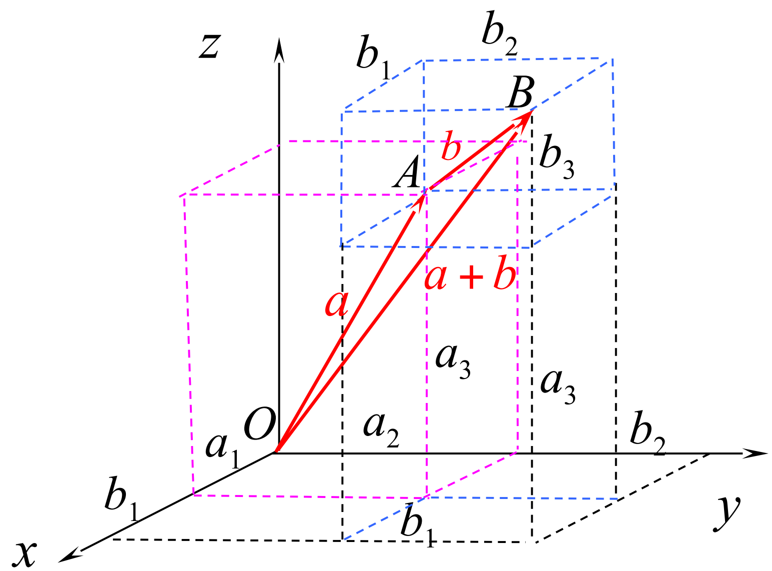
设向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3), \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$， 定义

$$\vec{a}+\vec{b} \overset{def}{=} (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

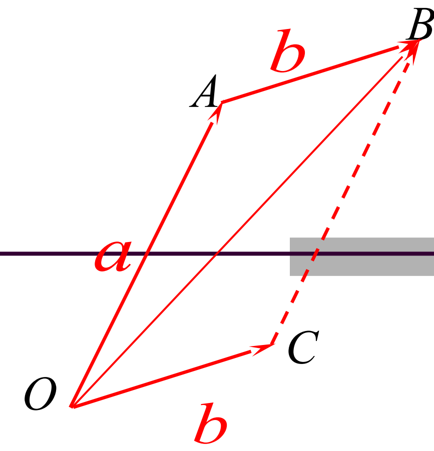
为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**和**，这运算称为向量的**加法**

- 几何意义

$\boxed{\text{三角形法则}}$



平行四边形法则



- 减法_

若 $a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3)$

定义 $-a=(-a_1,-a_2,-a_3)$ 称为 $-a$ 的**负向量**

从而 $\vec{b}-\vec{a}\overset{def}{=}(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$

若 $\boldsymbol{A}(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{B}(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，则

$$\boxed{AB=OB-OA=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)}$$

加法运算律

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ （交换律）

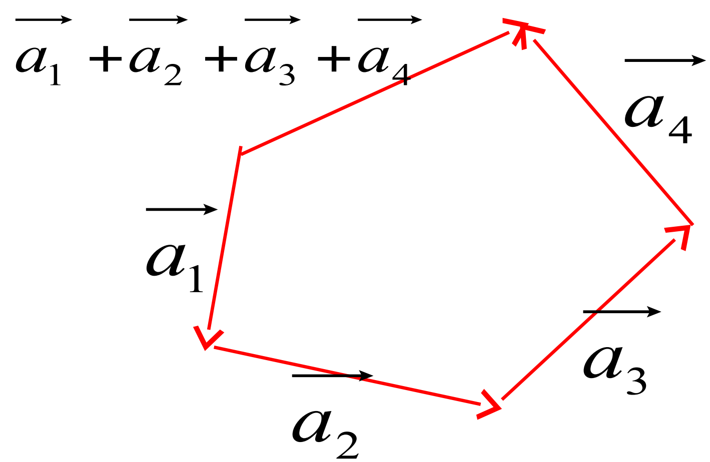
(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ （结合律）

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

由加法的结合律，故可写出向量连加形式

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$$



向量的数乘

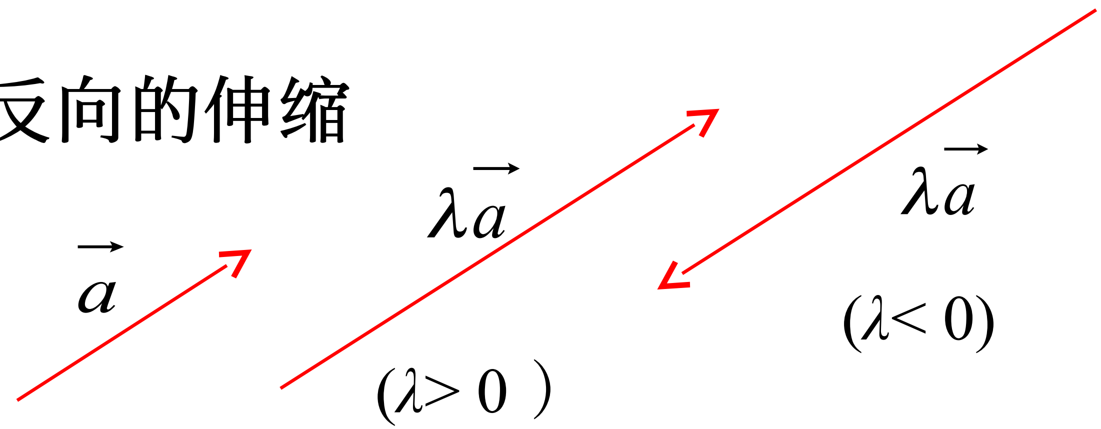
设向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, λ 为实数，定义

$$\lambda\vec{a} \overset{def}{=} (\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),$$

λ 与向量$\underline{a}$ 的数乘向量，这运算称为λ 与向量的数乘运算

几何意义_

向量沿同向或反向的伸缩



数乘的模 $\left|\lambda a\right| = \left|\lambda\right| \cdot \left|a\right|$

- 向量平行

向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的方向相同或相反，称它们平行或共线，记为 $\vec{b} \,//\, \vec{a}$

命题　若 $a \neq 0$

$$\boxed{\vec{b} \,//\, \vec{a} \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \text{存在数 } \lambda\text{, 使 } \vec{b} = \lambda \vec{a}}$$

推论

$$\vec{b} \,//\, \vec{a} \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} \text{ 或 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

数乘的运算律

(1) $1\vec{a} = \vec{a}$

(2) $\mu(\lambda\vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}$ (结合律)

(3) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (对数的分配律)

(4) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (对向量的分配律)

简单事实：若 $\vec{a} \neq 0$

$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 是与 $\vec{a}$ 平行的单位向量 （单位化）

记为 $\overrightarrow{a^0}$

若向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$,

$$\overrightarrow{a^0}=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}(a_1,a_2,a_3)$$

- 标准 (正交) 基

$$i=(1,0,0),\quad j=(0,1,0),\quad k=(0,0,1)$$

任一向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 可以表示为

$$\boxed{a=a_1 i+a_2 j+a_3 k}$$

例 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，

点 M 位于过 M_1,M_2 的直线上且使 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$

求点 M 的坐标 (x,y,z)

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}}$$

例 $\vec{a}$ 与起点置于同一点的向量 $\vec{b}=(-2,-1,2)$

和 $\vec{c}=(7,-4,-4)$ 的角平分线平行，且 $\|a\|=6\sqrt{6}$

求 $\vec{a}$

共面

若将向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的起点移至同一点，它们的起点与终点都在同一平面，称这些向量**共面**

- 若 a, b 不共线

$\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ 共面 $\xLeftrightarrow{\text{充分必要条件}}$ 存在数 λ,μ，使 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

- 若 c, a, b 不共面

则任一向量 d $\longrightarrow$ 存在数 λ,μ,ν 使 $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$

线性组合

H.W

习题 7

4　6(2)　7　8

10　11