



Chap8 — 6

方向导数与梯度

8. 6. 1 方向导数

一. 定义

非零向量 l 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta$ 函数

$z=f(x,y)$ 沿 l 的**方向导数**

$$\frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

偏导数是函数在沿坐标轴方向上的变化率

方向导数则是沿其他方向的变化率

二. 充分条件和计算公式

若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 可微，向量 l 的方
余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta$ ，则在 P_0 点存在方向导数

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos\alpha + f_y(x_0, y_0) \cos\beta$$

例 求函数 $u = 3x^2 + 2y^2 - z^2$ 在 $(0,2,-1)$ 处沿
 $l = (2, -1, -2)$ 的方向导数

8.6.2 梯度

函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x,y)$ 的梯度为

$$\nabla f|_{(x_0,y_0)} = \text{grad } f|_{(x_0,y_0)} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$$

简记为

$$\nabla f = (f_x, f_y) \quad (\text{可推广至三维情况})$$

利用梯度的符号，得到

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot l^0$$

$\Rightarrow (\nabla f, \hat{l}) = 0$ 时，方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 取得最大值 $|\nabla f|$

梯度的方向是方向导数取最大值时的方向，
也即函数变化率最大的方向，它的模是方向
导数的最大值

例 求函数 $u = x^2 + y^2 - 2xz + 2y - 3$ 在 $(1, -1, 2)$
处方向导数的最大值
(往年试
题)

运算符号 ∇ — 梯度算子

$$1) \quad \nabla(c_1 u + c_2 v) = c_1 \nabla u + c_2 \nabla v, \quad (c_1, c_2 \text{ 是常数});$$

$$2) \quad \nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v \quad \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$$

$$3) \quad \nabla(f(u)) = f'(u) \nabla u \quad \nabla(g(u, v)) = g_u \nabla u + g_v \nabla v$$

当 u 是一个物理量时, ∇u 是它的梯度场

它不依赖坐标系的选择. 例如 u 是电位时 $= \frac{q}{4\pi\epsilon r}$

那么 $\nabla u = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ 给出了电场强度

(其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, r 是它的模)

H.W

习题 8

40 (1) (3)

41 (2) (3)

42