Chap3 — 6

高阶导数

3.6.1 高阶导数的概念

1 定义 设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处的

$$f''(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

二阶导数

- 二阶导数也可记为 $y''(x_0), \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$.

- 二阶导(函)数 $f''(x)=(f'(x))'$

- 物理意义 若位移为 $s(t)$, 则加速度 $a(t)=s''(t)$.

◆ 一般地, $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶导数

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}}$$

高阶导数 二阶及以上的导数.

约定 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 分别称为 $f(x)$ 的一阶和零阶导数

记号 $C^{(n)}(I)$: 在 I 上具有 n 阶连续导数的函数全体

$C^{(\infty)}(I)$: 在 I 上具有任意阶导数的函数全体

1 设 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

2 隐函数的二阶导数

设方程 $F(x,y)=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，则 y'' 的求法有：

方法一 由隐函数求导法求出 y'，再用求导法则对 y' 关于 x 求导，仍视 y 为隐函数 $y(x)$.

方法二 视 y 为隐函数 $y(x)$，方程两端对 x 求导两次，分别解出 y' 和 y''.

例 2 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y}=1$ 确定，求 $y''(0)$.

$$\boxed{y(0)=1,\ y'(0)=e,\ y''(0)=2e^{2}}$$

3 参数方程确定的函数的二阶导数

设方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 确定函数 $y=y(x)$，则对应参数为 t 的 x 处的二阶导数为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}.}$$

例3 设 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$$\boxed{\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}}$$

■ 方程变换

例 4 令 $x=\cos t$, 将 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{1-x^2}=0$

变换为 y 关于 t 的方程.

■ 递归法——高阶导数求法之一

例 5 设 $y=x^\alpha$, α 是实数，求 y 的 n 阶导数.

思考 若 $y=x^n$, 则 $y^{(n)}=?\ y^{(n+1)}=?$

多项式的高阶导数有何规律?

例 6 证明公式

$$\boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).}$$

猜一猜 $(\cos x)^{(n)} = ?$

例 7 求下列函数的 n 阶导数

(1) $y = \ln(1+x)$　　(2) $y = \dfrac{1}{ax+b}$, $(a \neq 0)$

$$\boxed{y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}}$$

$$\boxed{y^{(n)} = (-1)^n \frac{a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}.}$$

3.6.2 Leibniz 法则——高阶导数求法之二

定理　设函数 u, v 有 n 阶导数，则

(1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$；

$(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$，其中 c 为常数

(2) $(uv)^{(n)} = \mathrm{C}_n^0 u^{(n)} v + \mathrm{C}_n^1 u^{(n-1)} v' + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + \mathrm{C}_n^n u v^{(n)}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

例8 设$f(x)=\dfrac{1}{x^2+11x+30}$，求$f^{(100)}(0)$.

$$\boxed{100!\left(\frac{1}{5^{101}}-\frac{1}{6^{101}}\right).}$$

例9 设$y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，求$y^{(n)}(0)$.

$$\boxed{y^{(2k)}(0)=0,\ y^{(2k+1)}(0)=[(2k)!!]^2.}$$