

# Chap 11 - 4

函数项级数

## 11.4.1 函数项级数及其收敛性

设  $u_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是定义在数集  $X$  上的函数列，则称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  为 **函数项级数**，  
若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  收敛，称  $x_0$  是  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的一个 **收敛点**，否则称  
 $x_0$  是  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的 **发散点**

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的全体收敛点组成的集合  $I$  称为它的 **收敛域**，在收敛域  $I$  的每个  $x$ ，  
 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  称为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的 **和函数**

与数项级数类似

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

称为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的部分和（函数），在收敛域

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

而将

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

称为函数项级数的余和，显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$

例 考察函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$  的收敛域

## 例 讨论函数项级数的收敛域：

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^n$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

(采用讨论数项级数敛散性的方法)

H.W

习题 11 14 (1) (2) (3)