Chap8 —4

全微分

8.4.1 全微分的概念

一． 定义

回顾一元情况，若 $\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$,

微分 $df = A \cdot \Delta x$ 是增量 Δf 在 x_0 的线性主部

对函数 z =$f(x, y)$，若全增量

$$\Delta z = \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

可写为 $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$

A,B，常数，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称 f 在$P_0(x_0, y_0)$ 可微，

而 $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ 为函数 f 在 $P_0(x,y)$ 点处的全微分，

- 记为 $dz\big|_{(x_0,y_0)} = df\big|_{(x_0,y_0)} = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$

增量 Δf 的线性主部

- 若 $f(x,y)$ 在区域 D 每点处都可微，则称 f 是 D 内的可微函数

二． 可微与连续及可偏导的关系

- 可微必连续
- 可微必可偏导

函数 f 有 $df\big|_{(x_0,y_0)} = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$

$$\Rightarrow \quad f_x(x_0,y_0) = A,\ f_y(x_0,y_0) = B$$

由 $dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$ 得到

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

- 有连续偏导数则可微

$$\boxed{\text{偏导数连续} \Rightarrow \text{可微} \Rightarrow \begin{cases}\text{连续}\\ \text{可偏导}\end{cases}}$$

例　求函数 $z = x^y$ 在点（1, 1）的全微分

例　求函数 $z = \arctan\dfrac{y}{x}$ 的全微分

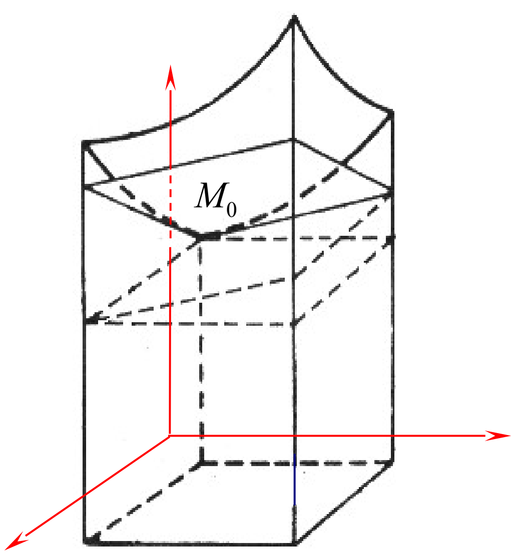
三． 全微分的几何意义

微分 $A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$ 是 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 的线性主部，这意味着可用 $A(x-x_0)+B(y-y_0)$ 近似 $\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$

从几何上看，微分就是在就是在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的附近存在近似曲面的平面

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)$$

这实际上是曲面的**切平面**



8.4.2 全微分的应用

近似 $\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y,$

例 求 $(1.04)^{1.98}$ 的近似值

H.W

习题 8

15 16 (2), (3)

17(1) 19