

# Chap8 — 6

## 方向导数与梯度

## 8.6.1 方向导数

### 一. 定义

非零向量  $l$  的方向余弦为  $\cos \alpha, \cos \beta$  函数  $z=f(x,y)$  沿  $l$  的方向导数

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

偏导数是函数在沿坐标轴方向上的变化率  
方向导数则是沿其他方向的变化率

## 二. 充分条件和计算公式

若  $z=f(x,y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  可微, 向量  $l$  的方向余弦为  $\cos \alpha, \cos \beta$ , 则在  $P_0$  点存在方向导数

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$$

例 求函数  $u = 3x^2 + 2y^2 - z^2$  在  $(0, 2, -1)$  处沿  $l = (2, -1, -2)$  的方向导数

## 8.6.2 梯度

函数  $f(x,y)$  在点  $P_0(x,y)$  的**梯度**为

$$\nabla f|_{(x_0,y_0)} = \text{grad } f|_{(x_0,y_0)} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$$

简记为

$$\nabla f = (f_x, f_y) \quad (\text{可推广至三维情况})$$

利用梯度的符号，得到

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot l^0$$

$\Rightarrow (\nabla f, \hat{l}) = 0$  时，方向导数  $\frac{\partial f}{\partial l}$  取得最大值  $|\nabla f|$

梯度的方向是方向导数取最大值时的方向，  
也即函数变化率最大的方向，它的模是方向  
导数的最大值

例 求函数  $u = x^2 + y^2 - 2xz + 2y - 3$  在  $(1, -1, 2)$   
处方向导数的最大值

( 往年试  
题 )

## 运算符号 $\nabla$ — 梯度算子

$$1) \quad \nabla(c_1 u + c_2 v) = c_1 \nabla u + c_2 \nabla v, \quad (c_1, c_2 \text{ 是常数});$$

$$2) \quad \nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v \quad \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$$

$$3) \quad \nabla(f(u)) = f'(u) \nabla u \quad \nabla(g(u, v)) = g_u \nabla u + g_v \nabla v$$

当  $u$  是一个物理量时,  $\nabla u$  是它的**梯度场**

它不依赖坐标系的选择. 例如  $u$  是电位时  $= \frac{q}{4\pi\epsilon r}$

那么  $\nabla u = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  给出了电场强度

(其中  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $r$  是它的模)

# H.W

---

## 习题 8

40 (1) (3)

41 (2) (3)

42