Chap 9 —2

二重积分的计算

上海交大乐经良

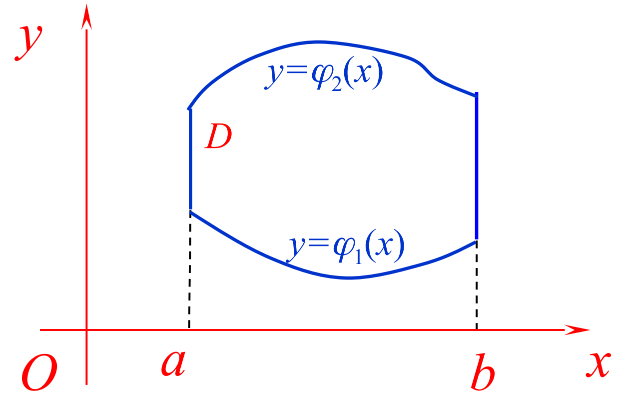
9.2.1　直角坐标系下的计算

设 区域 $D=\{(x,y)\big|a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$

x 型正则区域

二重积分

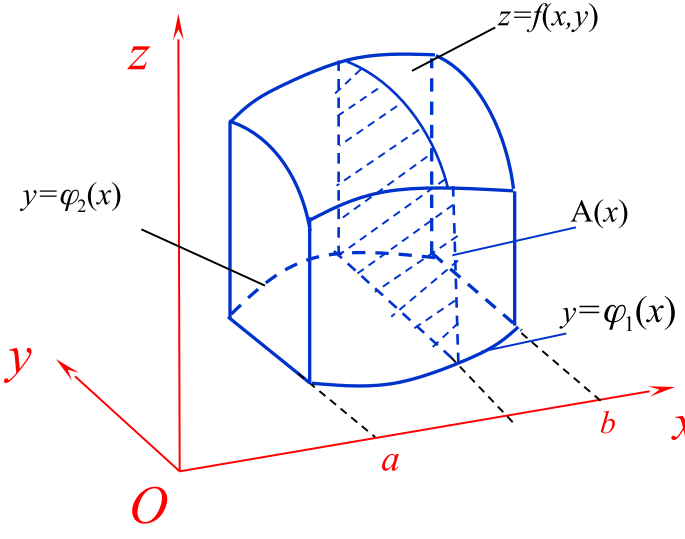
$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad (d\sigma = dxdy)$$



的值等于以 ***D*** 为底，以曲面 **S:** $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积

利用定积分来求体积

考虑垂直 x 轴过 x 处的平面截曲顶柱体所得截面积 **A**(x)



乐

截面曲边梯形的面积 $\mathbf{A(x)}$

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

$\Rightarrow$ 曲顶柱体的体积

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

导出

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

写成

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$$

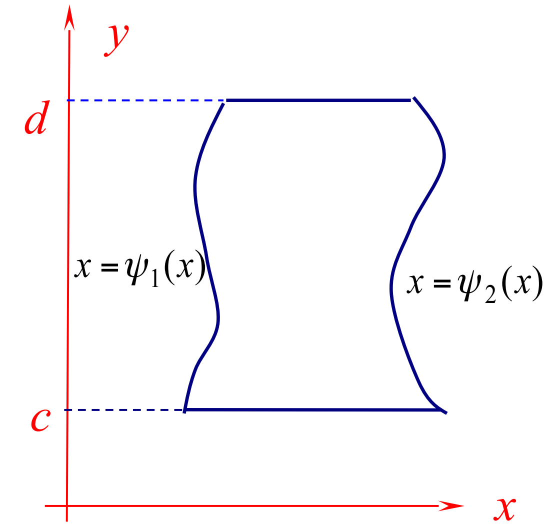
若积分区域

$$D=\{(x,y)|\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y), c\le y\le d\}$$

y 型正则区域

则有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$



对于一般区域的二重积分

可将其分成若干个正则子区域,

利用积分的可加性，分别在各子区域积分后求和

乐

例　计算二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$

其中 $D=\{0\le x\le 2, 0\le y\le x^2\}$

例　计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$

其中 $\boldsymbol{D}$ 是由抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x-2$ 所围区域

例　计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy$

其中 $\boldsymbol{D}$ 是由抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x$ 所围区域

乐

例　交换以下累次积分的次序

(1) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$

(2) $\int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$

- 当积分区域关于 x 轴或 y 轴对称时，注意被积函数是否有奇偶性从而使积分简化（对称性非常重要！）

例　计算二重积分 $I = \iint\limits_D (y + y^2 \sin^3 x)dxdy$

其中 D 是上半圆域 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \quad 0\}$

例　计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$

其中区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

（往年考研试题）

例　设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，求积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$

（往年考研题）

乐

H.W

习题 9

3 (2) (3)　　5

7 (1) (3)　　8 (2) (5) (6) (7) (8)

10 (1) (2) (4)　　11 (1), (2), (4)

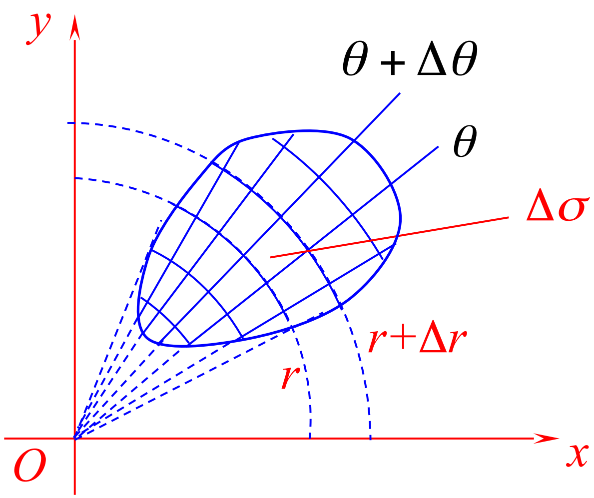
12 (1) (2)

乐

9.2.2　　极坐标系下的计算公式

当积分区域的边界曲线或被积函数用极坐标表示较为简单时，二重积分有时可用极坐标来计算

我们来考虑面积元素 $\Delta\sigma$ 在极坐标下的形式



用 r 为常数所表示的圆周族和 $\boldsymbol{\theta}$ 为常数所表示的射线族分割区域 $\boldsymbol{D}$,那么小区域面积

$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}[(r+\Delta r)^2\Delta\theta-r^2\Delta\theta]=\frac{1}{2}[2r\Delta r+(\Delta r)^2]\Delta\theta$$

$$\Rightarrow\qquad d\sigma=rdrd\theta$$

乐

从直角坐标变换为极坐标时的二重积分的变换公式

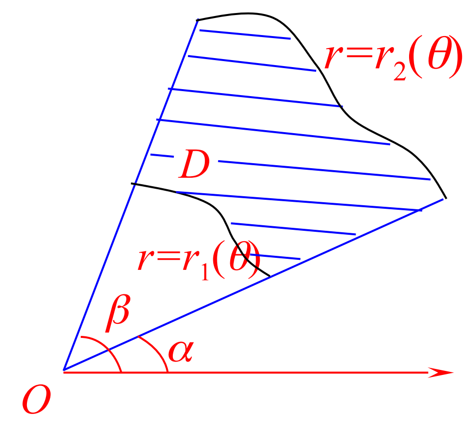
$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta}$$

若区域 $D=\{(r,\theta)\mid r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$

二重积分化为累次积分

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rd\theta$$



例 计算二重积 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

分

化为极坐标系下的累次积分，其中 D 为

1）由直线 $y=x$，上半圆周 $x^2+y^2=4x$, 及 $x^2+y^2=8x$ 围成

2）由直线 $y=x, y=0$ 和 $x=1$ 所围成

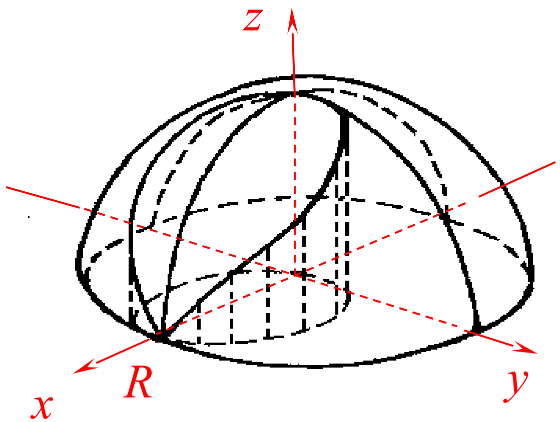
例 计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$

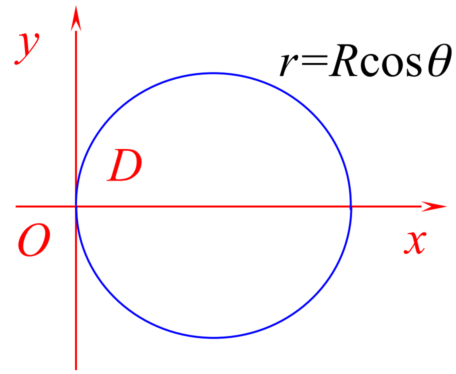
其中区域 $D=\{x^2+y^2\le 2x\}$

例 交换积分次序 $\int_0^1 dr\int_{-\arccos r}^{\arccos r} f(r,\theta)d\theta$

乐

例　求球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所割下部分的体积 V





例　求双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所围区域的面积

例　求二次积分 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \arctan\frac{y}{x} dx$

例　求积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

9.2.3　二重积分的变量代换

设变换 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 有连续偏导数，且

满足

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

而 $f(x,y) \in C(D)$，那么

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J\right|dudv$$

uv 平面小矩形 $A'B'C'D' \longrightarrow xy$ 平面曲边四边形 $ABCD$

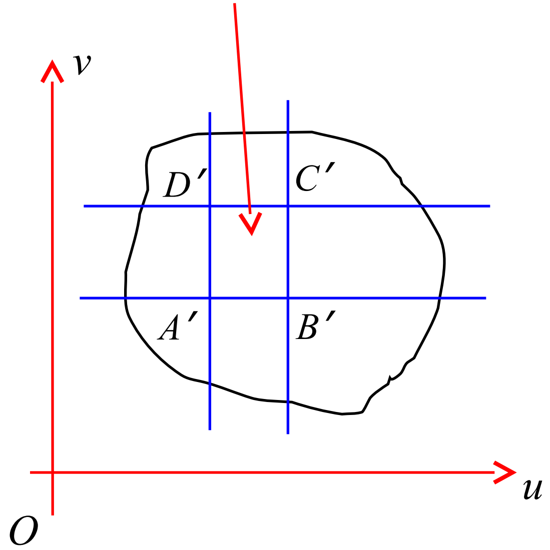
$$A'(u,v) \to A(x(u,v), y(u,v)),$$

$$B'(u+\Delta u, v) \to B(x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v))$$

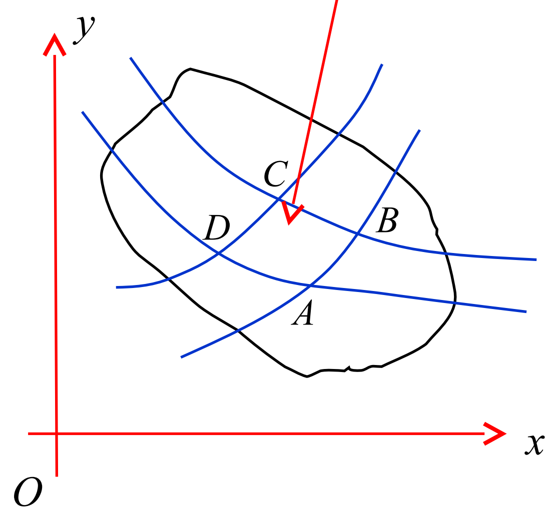
$$C'(u+\Delta u, v+\Delta v) \to C(x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v))$$

$$D'(u, v+\Delta v) \to D(x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v))$$

$\Delta\sigma' = \Delta u \Delta v$



变换后 $\Delta\sigma = ?$



乐

- $ABCD$ 近似于平行四边形

  只需求出一组邻边的向量表示

$$\overrightarrow{AB} \approx (x_u(u,v)\Delta u, y_u(u,v)\Delta u)$$

$$\overrightarrow{AD} \approx (x_v(u,v)\Delta v, y_v(u,v)\Delta v)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Delta\sigma \approx \left\| \begin{matrix} x_u(u,v)\Delta u & x_v(u,v)\Delta u \\ y_u(u,v)\Delta v & y_v(u,v)\Delta v \end{matrix} \right\|$$

$$= \left|J\right| \Delta u \Delta v$$

$$\boxed{d\sigma = \left|J\right| dudv}$$

例分 计算二重积 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$

其中区域 D 为 $x^2+y^2 \le x+y+1$

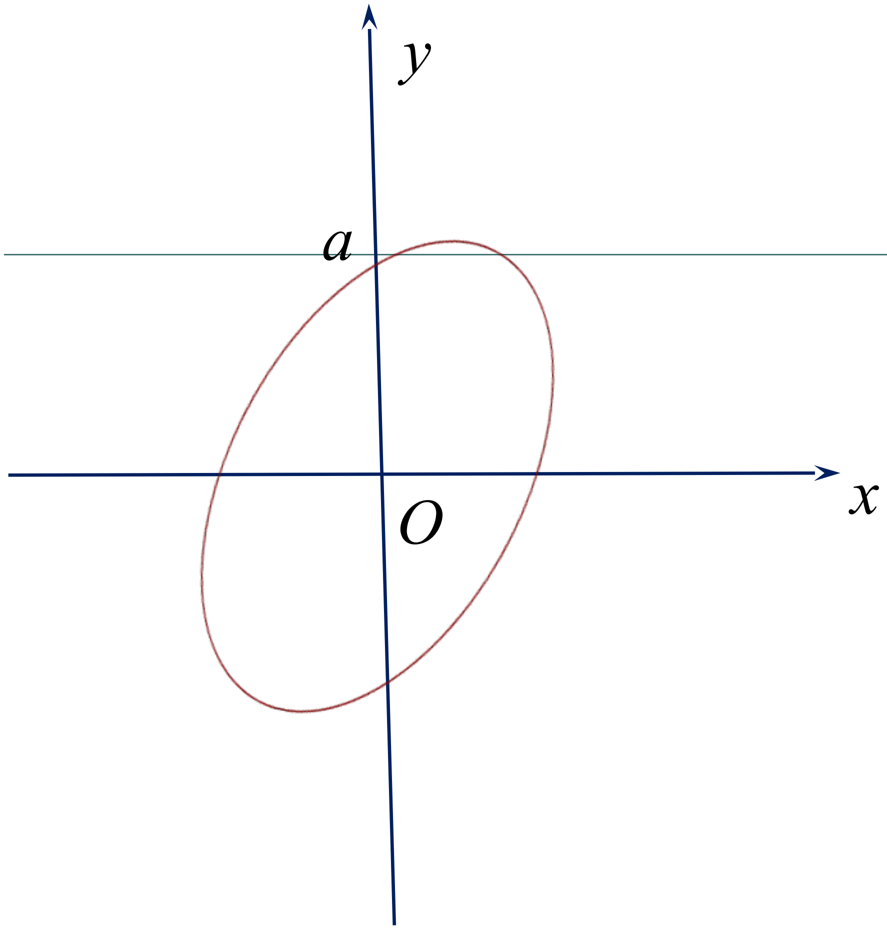
（往年考研题）

思考：若 D 改为 $\dfrac{(x-2)^2}{a^2}+\dfrac{(y+1)^2}{b^2} \le 1$ 如何?

例 计算积分 $\iint\limits_D xydxdy$ ，其中 D 为由曲线 $xy=1$，$xy=2, y=x$ 和 $y=4x$ 在第一象限所围成的区域

例 计算 $I=\iint\limits_D |x|dxdy$，其中区域 D 为 $2x^2-2xy+y^2 \le 1$

乐



图形如左

注意区域 D

$$x^2 + (x - y)^2 \le 1$$

引进变换？

H.W

习题 9

13　(1) (3) (5)

14　(1) (2) (3)

15　(1)　　16　(1) (2)

17　(1) (2)　　18*

乐

例　分别用两种变换

(1) $u=x+y, v=x-y$　　　(2) $u=x^2+y^2, v=xy$

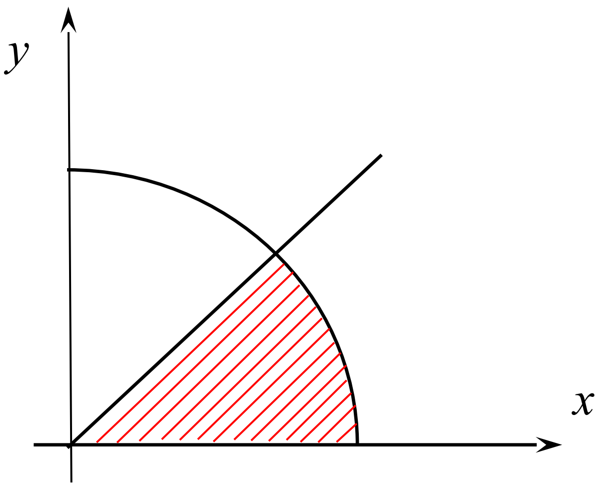
计算二重积分

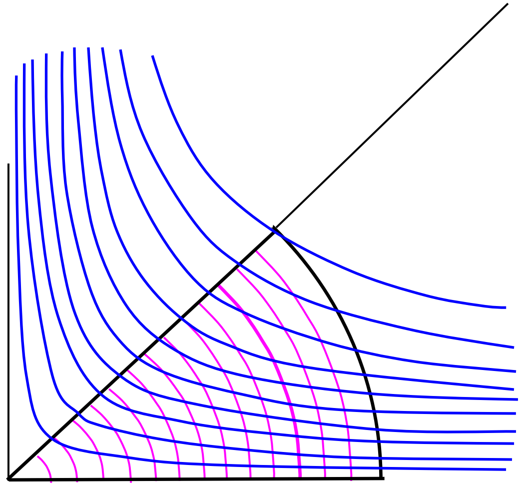
$$\iint_D (x^2-y^2)\mathrm{e}^{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中区域

$$D=\left\{(x,y)\middle| y\le x\le\sqrt{1-y^2}, 0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

三条边界线方程变何形式？





v 常数－双曲线

u 常数－圆周

乐

区域可表示为

$$x - y \quad 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \quad 0$$

经过变量的替换，它们分别的变化情况?