Chap 9 —3

三重积分

9. 3. 1　三重积分的定义

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$$ 你能说出它的含义吗？

- 概念联系的问题

一个占据三维空间中区域 **Ω** 的几何体，其密度为 $f(x,y,z)$，那么其质量为多少?

回顾定积分和二重积分的概念

求在三维区域上分布率非均匀的某种物理量（或其它量）的总量

分割 —— 求和 —— 求极限

一．定义　设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的有界闭区域，函数

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ 在 Ω 上定义，I 为实数，若将 $\boldsymbol{\Omega}$ 任意划分成 $\boldsymbol{n}$ 个小区域 $\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\cdots,\Delta\Omega_n$，任取 $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\in\Delta\Omega_i$，作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta V_i,\ (\Delta V_i\text{是}\Delta\Omega_i\text{的体积})$$

总有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta V_i = I$$

（其中 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$，$d_i$ 是小区域 $\Delta\Omega_i$ 的直径），则称函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 可积，$\boldsymbol{I}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 的三重积分，记为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV$$

体积元素

乐

一种物理意义（三维物体的质量）

若 $f(x,y,z)$ 表示占有三维空间区域 **Ω** 的物体的质量密度函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$$ 给出了物体的质量

二． 性质

类似二重积分，有线性、可加性、单调性和中值定理，还有

$$\iiint_{\Omega} 1dV = V_{\Omega} \qquad (\Omega\text{的体积})$$

9.3.2 在直角坐标系下的计算公式

直角坐标系下

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

一．柱线法

设 Ω 是以曲面 $z=z_1(x, y)$ 为底，曲面 $z=z_2(x, y)$ 为顶而侧面是母线平行 z 轴的柱面所围成的区域

设 **Ω** 在 ***x y*** 平面上的投影区域为 ***D***，则 **Ω** 可表示为

$$\{(x,y,z) \mid z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y) \in D\}$$

$\boxed{\text{xy 型正则区域}}$

乐

从质量角度求三重积分，则

$f(x,y,z)$ 为密度，对$(x,y)\in D$,

$$\mu(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

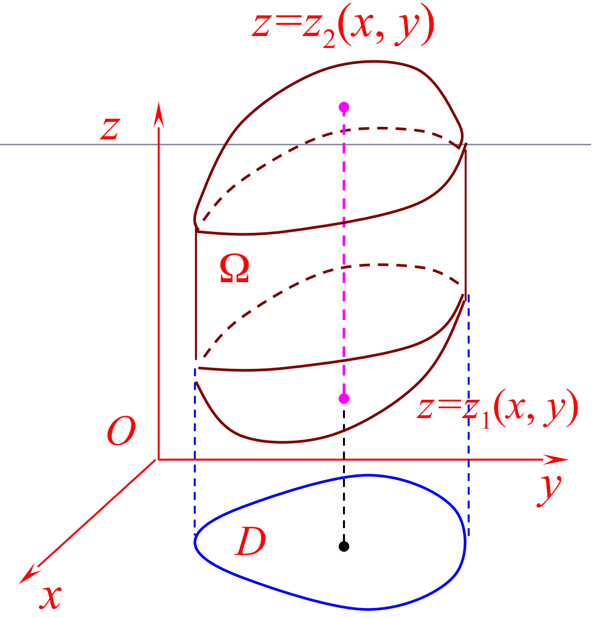
给出了 **Ω** 内由 $z_1(x,y)$ 到 $z_2(x,y)$ 的线段上所分布的质量密度

物体的总质量就是

$$\iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y.z)dz\right)dxdy$$

从而

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y.z)dz}$$



二． 截面法

设区域 **Ω** 在 z 轴上投影区间为 $[h_1, h_2]$，即 **Ω**

介于平面 $z=h_1$ 与 $z=h_2$ 之间，垂直 z 轴过 z 处的平面截

Ω 所得截面为区域 D_z，则

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y)\in D_z, h_1 \le z \le h_2\}$$

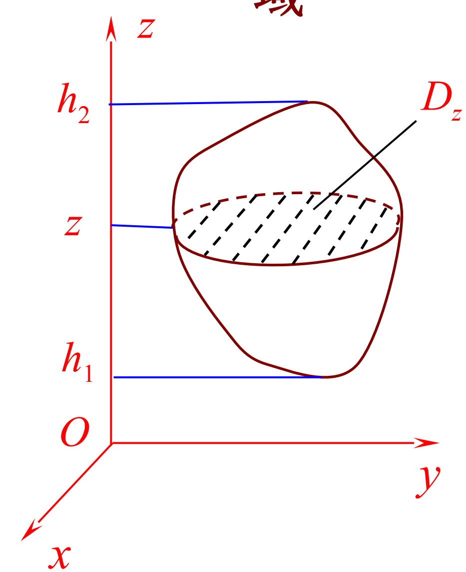
z 型空间区域

仍从质量角度考虑，对 $z\in[h_1,h_2]$，

二重积分

$$F(z) = \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy.$$

给出了物体在截面 D_z 上所分布的质量



乐

物体的总质量为

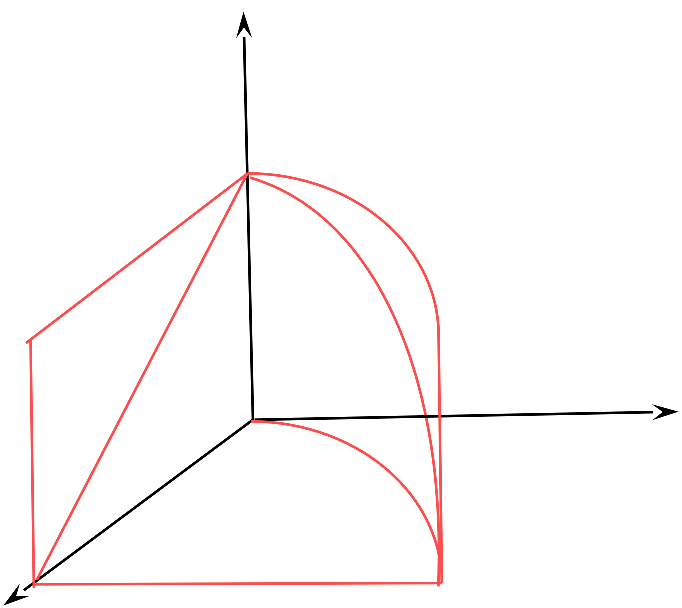
$$\int_{z_1}^{z_2} (\iint_{D_z} f(x, y, z)dxdy)dz$$

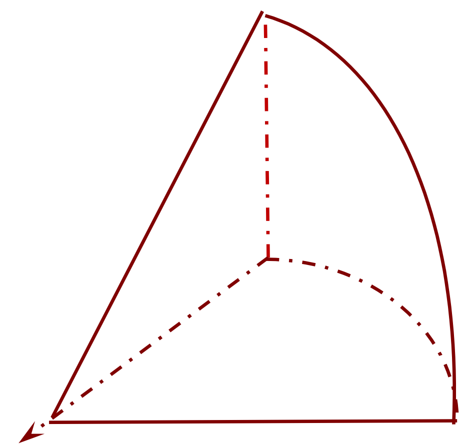
从而

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dV = \int_{h_1}^{h_2} dz \iint_{D_x} f(x, y, z)dxdy$$

例　计算 $I = \iiint_{\Omega} (x + z^2)dxdydz$，其中 **Ω** 由旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 2$ 围成　　（注意对称性）

例　计算积分 $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\,dxdydz$ ，其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 由抛物柱面 $y=\sqrt{x}$ 及平面 $\boldsymbol{y}=0, \mathbf{z}=0$ 和 $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 围成





例　　物体位于 $\Omega: z \quad \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4$

其密度 $\mu = |z|$ **，求此物体的质量**

Ω 由球面与园锥面围成

注意交线在何处?

H.W

习题 9

24 (2) (3) (4)

25 (1) (2) (4) (5) (6) (7)

9.3.3 三重积分变量代换

与二重积分的变量代换类似

设变换 $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 有连续偏导数，且

满足

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} \neq 0$$

而 $f(x,y,z) \in C(\Omega)$，那么

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw}$$

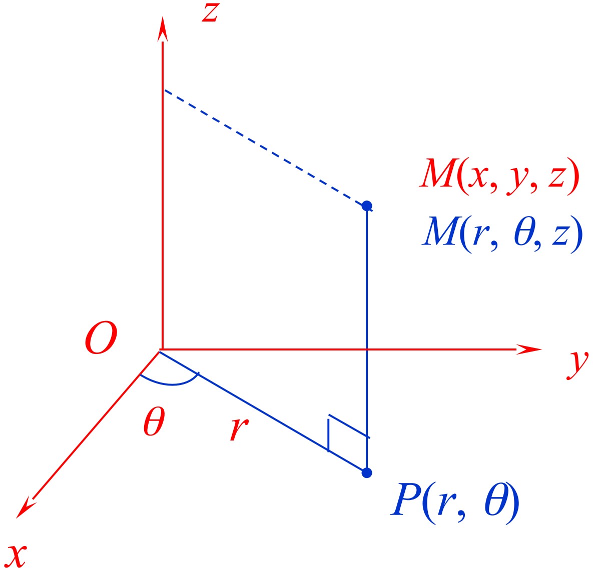
乐

一． 柱面坐标系下的三重积分

这个坐标系实际上就是 $x\,y$ 坐标转变为极坐标

即变换公式为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \quad z = z \end{cases}$$



由于

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

得到柱坐标积分公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz.$$

注意

事实上，在具体计算时，可以用柱线法或截面法得到 $\boldsymbol{D}$（或 $\boldsymbol{D}_z$）的二重积分，再转化为极坐标

例　计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dV$，其中 **Ω** 是由曲面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围区域

（往年考研题）

例　计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2dV$，其中 **Ω** 是

曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴一周而得到的曲面与平面 z=2,

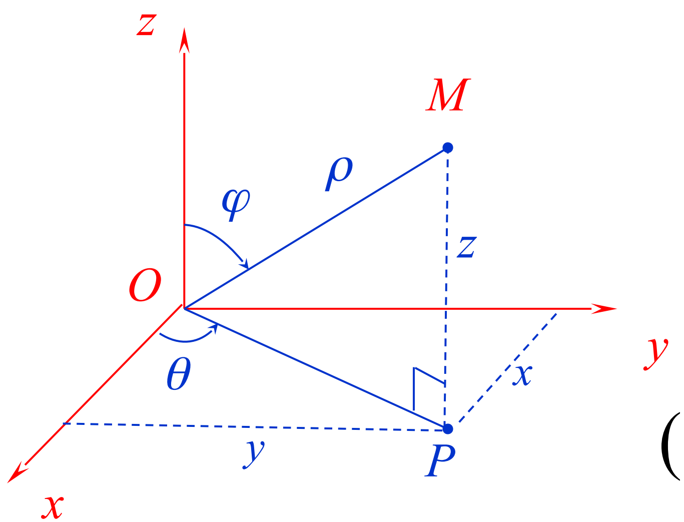
z=8 所围成的区域 $(z\quad 2)$

（往年考研题修改）

乐

二． 球面坐标系下的三重积分

设点 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ 是空间一点，引进球坐标(ρ, φ, θ)



$$\rho = \left\| \overrightarrow{OM} \right\|$$

φ: $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向的夹角

θ : $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向的夹角

$$(0 \le \rho \le +\infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

或$-\pi \le \theta \le \pi$

坐标变换关系式 $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}}$

由于 *Jacobi* 行列式

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\rho^2\sin\varphi$$

导出

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV\\ =&\iiint_{\Omega^*} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta\end{aligned}}$$

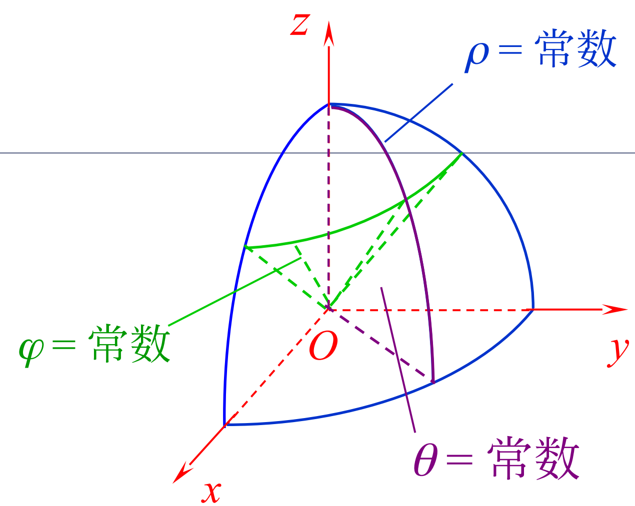
乐

使用球坐标时

$\rho =$ 常数：**球面** 中心在原点

$\varphi =$ 常数：**锥面**

$\theta =$ 常数：**平面** 过 z 轴



- 围成区域的部分曲面有上述特点，或被积函数含 $x^2+y^2+z^2$，可考虑用球坐标

例　计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$，其中 **Ω** 是由半球面 $x^2+y^2+z^2 = 2z\ (z\quad 0)$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围区域

乐

例　计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} (x-a)^2 dV$，其中

$\Omega = \left\{ (x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2 \le R^2 \right\}$， R,a 为常数

（利用对称性　！）

例　函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且 $f(0)=0$，求极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^4} \iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$$，其中区域 Ω 是

$x^2+y^2+z^2 \le t^2$　　$(\pi f'(0))$

乐

例　试计算位于 $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 而密度函数为

$\mu = z^2+1$ 的物体的质量

H W　习题　9

26（2）（3）（4）　　27（2）（5）（6）

28（1）（3）　　29　（ 2 ）（ 4 ）

28（5）　（广义球坐标）