Chap 5.4

不定积分

5.4.1 不定积分的概念与性质

- **定义**

$f(x)$ 在 I 的全体原函数称为 $f(x)$ 在 I 的不定积分

记为

$$\int f(x)dx$$

- 与 $\int_a^x f(t)dt$ 以及 $\int_a^b f(x)dx$ 的区别
- 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

性质

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ 或 $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

  $\int f'(x)dx = f(x) + C$ 或 $\int df(x) = f(x) + C$

- $f(x)$, g(x) 有原函数，$\forall\, k\in\mathbf{R}$，则

  $$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

  $$\int [k f(x)]dx = k\int f(x)dx$$

5.4.2 积分表

$$\int 0dx = C$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^{x}dx = \frac{1}{\ln a}a^{x} + C \qquad \int e^{x}dx = e^{x} + C$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C \qquad \int \cos xdx = \sin x + C$$

$$\int \sec^{2} xdx = \tan x + C \qquad \int \csc^{2} xdx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan xdx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot xdx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| \sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right| + C$$

- 象小学生背九九表一样地背出积分表!

例　求下列不定积分

(1) $\int(\sqrt{x}+2e^x+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$

(2) $\int\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}dx$　　(3) $\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)}$

(4) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

(5) $\int(3^x-2^{x-1})dx$

例　求下列定积分

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$

(2) $\int_{0}^{2} |x-1| dx$

(3) $\int_{2}^{3} \frac{3x^4+2x^2+1}{x^2+1} dx$

H.W　习题 5

16 (3)-(6)

(8) (9) (11)(14)

17

29 (2)(3)(5)

5.4.3 凑微分法(第一换元法)

- 不定积分的凑微分法

若 $\int f(x)dx = F(x)+C$, $\varphi(x)$可导，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))+C$$

- 过程 $= \int f(\varphi(x))d\varphi(x) =$
- 观察哪部分可凑成$\varphi' dx = d\varphi$，而使得微分号

前剩下的部分恰好是 φ 的可积表达式

例 求不定积分

$$\int \sin^5 x \cos x dx$$

注意

$\cos x dx = d \sin x$

例　求不定积分

(1) $\int xe^{x^2}dx$

(2) $\int \cot x dx$

(3) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

(4) $\int (2x+3)^{10}dx$

(5) $\int \frac{dx}{\cos x}$

(6) $\int \frac{5x-2}{x^2+4}dx$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(8) $\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{2-2x+x^2}}dx$

(10) $\int \sin x \cos 3x dx$

(11) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx$

(12) $\int \frac{dx}{2+e^x}$

例设 $f'(\cos x + 2) = \sin^2 x + \tan^2 x,$

求 $f(x)$

H.W　习题 5

18　(1) − (4)　(6) − （10）

(12) − (15)　(17) − (19)

21　（1）　　　**(** 第 (2) 题中应为 cos2x**)**

22

5.4.4 第二换元法

- 不定积分的第二换元法

若$\int f(\psi(t))\psi'(t)dt = F(t)+C$,且$\psi$单调可导,$\psi' \neq 0$

则

$$\int f(x)dx = F(\psi^{-1}(x))+C$$

- 对$\int f(x)dx$ 作变量代换 $x=\psi(t)$

$\Rightarrow \int f(\psi(t))\psi'(t)dt$ 可积 $\Rightarrow$ $F(t)+C$

$\boxed{t=\psi^{-1}(x)}$

例　求下列不定积分

(1) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}, \ (a>0)$

(2) $I=\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx, \ (a>0)$

(3) $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+2x-1}} \quad (x>0)$

(4) $I=\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+3}}$　　(5) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

H.W　习题 5

19 (1) － (6) (8) (10)

(11)

5.4.3 分部积分法

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad uv' = (uv)' - u'v$$

导出(在u',v'可积时)

- 分部积分法(不定积分)

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\downarrow \qquad\qquad \uparrow$$

- 过程 $\int udv = uv - \int vdu$
- 如何选择 v'

一般而言，次序： $e^{\alpha x}$, $\sin ax(\cos ax)$, x^m

例　求下列不定积分

(1) $\int x\sin x dx$

(2) $\int x^2 e^x dx$

(3) $\int x\ln x dx$

(4) $\int \arctan x dx$

(5) $I=\int e^{2x}\sin x dx$

(6) $I=\int \sec^3 x dx$

H.W 习题 5

20 (1) - (3) (5)-(9) (11)- (15)

(18) (19)

5.4.4 某几种函数的积分法

- 有理函数的积分

形式 $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

其中 $P(x), Q(x)$ 均为多项式

- 步骤

(1) 化假分式＝多项式＋真分式

(2) 分母分解为一次式或二次三项式

(3) 分式分解为一些最简分式之和后逐项积分

最简分式的形式

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \qquad \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^k}$$

- $$\int \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^k}dx$$

$$= \frac{C}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}dx + \int \frac{D-\frac{Cp}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx$$

可以求出不定积分

配方后分部得递推公式

例　计算下列积分

(1) $\int \frac{x^5 - x^3 - 2x^2 + 7x}{x^4 - x^2 - 2x + 2} dx$

$$\frac{x^5 - x^3 - 2x^2 + 7x}{x^4 - x^2 - 2x + 2} = x + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1/5}{(x-1)} - \frac{x/5 + 8/5}{x^2 + 2x + 2}$$

(2) $\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx$　　(3) $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$

- 三角函数的积分

➢ 尽量用凑微分法，例如函数各项均含 $\sin x$ (或 $\cos x$) 的奇次幂；或各项含 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的幂次数和均为偶数

例　求下列积分

(1) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

(2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$

(3) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

- 万能代换公式

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

例　求积分 $\int \frac{dx}{4-3\sin x}$

- 无理函数的积分

被积函数中形如

$\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 可直接设为 t(换元)

例　求积分 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$

初等函数的原函数未必有初等函数形式

例如

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx,$$

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$$

H.W 习题 5

26 (3)-(7))

27 (2)-(6) (8)(9)

28 (1)-(4) (6) (7)