


Chap 5.7



反常积分

5.7.1 无穷区间的反常积分

■ 定义

$\forall b > a, f(x)$ 在 $[a, b]$ 均可积, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

称为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 的**反常积分**

➤ 上述极限存在时, 称反常积分**收敛**; 否则称反常积分**发散**

➤ 类似地定义 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$

➤
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

两项都收敛, 左端才收敛

■ 计算法

连续函数 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a)$$

↑

引进记号 $F(x)\Big|_a^{+\infty}$

例 计算下列反常积分

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad (2) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (a > 0)$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \quad (a, b > 0)$$

$$(4) \int_5^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}}$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)} \quad (\text{注意: } \frac{dx}{1+x^2} = d \arctan t)$$

例 天使加百利 (Gabriel) 是上帝的信使
他有一支天堂的号角，设这号角曲面是曲线
 $y = \frac{1}{x} (1 \leq x < +\infty)$ 绕 x 轴旋转而成的，试求这
号角的侧面积和所围的体积

例 （第二宇宙速度） 在地球表面发射火箭，

初速度多少才能脱离地球引力？

H.W 习题 5

64 (2)——(7)

5.7.2 无界函数的反常积分

■ 定义

$f(x)$ 在 b 的左邻域无界 (称 b 为瑕点 $\forall \varepsilon > 0$,
 $f(x)$ 在 $[a, b - \varepsilon]$ 可积, 则

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的反常积分

- 上述右端极限存在时, 称反常积分收敛;
否则称此反常积分发散
- 类似地可定义左端点 a 为瑕点的反常积分

➤ 当瑕点在积分区间内，需分为两个

反常积分之和

■ 计算法

$F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的原函数, b 是瑕点,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a)$$

例 计算下列积分

(1) $\int_0^1 \ln x dx$

(2) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(3) \int_0^1 x^\lambda dx$$

$$(4) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$(5) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(6) \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} \quad (\text{三角变换})$$

H.W 习题 5

65 (2) (4) (5) (7)