Chap 11 - 5

幂级数

11.5.1 幂级数及其收敛半径

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数 ，$a_1,a_2,\ldots$ 称为系数

Abel 定理

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 收敛， 则当 $|x| < |x_0|$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 发散， 则当 $|x| > |x_0|$ 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散

推论 （幂级数收敛域的情况）

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛仅有三种可能情况:

(1)　仅在 $x=0$　收敛;

(2)　在以原点为中心的长度为 $2R$ 的区间 $(-R, R)$ 绝对收敛，而在 $|x| > R$ 发散

(3)　$(-\infty, +\infty)$ 收敛

在三种情况可看作是以原点为中心的区间，区间长度的一半称为收敛半径

幂级数收敛半径的求法（比值法）

对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \quad (\rho \text{ 可以是 } +\infty)$$

则其收敛半径 $\boldsymbol{R}$:

$$1)\ \rho = +\infty \quad \Rightarrow \quad R = 0$$

$$2)\ 0 < \rho < +\infty \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{\rho}$$

$$3)\ \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad R = +\infty$$

可简记为 $$\boxed{R = \frac{1}{\rho}}$$

例　求下列幂级数的收敛区间

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n+2}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n-1}}{2^n n}$

求幂级数收敛半径的根值法

对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

那么收敛半径 R 满足 $R = \frac{1}{\rho}$

例　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{n})^{n^2} x^n$ 的收敛区间

H.W

习题 11

15　(1) (2) (4) (5) (6)

11.5.2　幂级数的分析性质

连续性　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R 则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 连续；若级数在收敛域的端点 $x=R$ (或 $-R$) 也收敛，则和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ (或 $-R$) 单侧连续

可导性　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R 则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 可导；且有

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ 的收敛半径仍为 R

可积性　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $\boldsymbol{R}$，

则其和函数 $\boldsymbol{S(x)}$ 在 $(-\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ 内的任何区间可积；且

对 $\forall x \in (-R, R)$

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

例子

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}, \quad (-1 < x < 1)$$

$$\overset{\text{可导性}}{\Longrightarrow} \quad -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \cdots = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad (-1 < x < 1)$$

可积性

$$\Rightarrow \quad x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\ln(1+x), \qquad (-1<x<1)$$

由于当 $x=1$ 时，上式右边级数收敛，

连续性

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2,$$

导出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\ln(1+x), \qquad (-1<x\le 1)$$

例　求下列级数的和

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$　　2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)4^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+n+1}{2^n}$

4)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$

H.W

习题 11

17 (2) (4) (5)

18 (1) (2) (3)

11.5.3 Taylor 级数

幂级数形式简单，运算方便，函数 $f(x)$ 能否由幂级数来表示?

回顾 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$+R_n(x)$$

幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 ***Taylor* 级数**

($x_0=0$ 时称为 ***Maclaurin* 级数**)

一． 函数与它的 Taylor 公式

若函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区域 I 内有任意阶导

则在数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \quad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

说明 $f(x)$ 并非总是等于它的 Taylor 级数

二． 函数的幂级数形式惟一

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$， 必有 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

11.5.4　常用初等函数的幂级数

1) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

2) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

3) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

$$4)\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$(-1 < x \le 1)$$

$$5)\ (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

利用以上幂级数展开式可求其他一些初等函数的幂级数展开式 .

例　将下列函数在 x_0 展成幂级数

1) $\arctan x,\ \ x_0 = 0$　　2) $\dfrac{x}{x^2 - 2x - 3},\ \ x_0 = 2$

3) $\dfrac{x^2 - x + 2}{x^3 - 2x^2}$, $x_0 = 1$

（02 年试题）

幂级数的应用举例

1）近似计算

例　计算 π 的近似值

2）计算积分

例　计算积分$\int_0^1 \dfrac{e^x - 1}{x} dx$

利用幂级数，可以推出 Euler 公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

取 $x = \pi$,

$$e^{i\pi} = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

（数学中“最美”的等式）

H.W　　习题 11

19　(3)　(5)　(6)　(8)

21　(3)