Chap 2.4

函数的极限

2.4.1 函数极限的定义

- $x \to +\infty$ 的情况

设 $f(x)$ 定义在 $[a,+\infty)$，$\exists A \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0,$

$\exists X > a,$ 当 $x > X,$

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

称当 x 趋于正无穷时， $f(x)$ 的极限为 A， 或收敛于 A

记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A, (x \to +\infty)$$

- 注意将此情况与数列极限比较
- 考虑 $x \to -\infty$ 时函数极限的定义

例 试用定义验证下列极限

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\ (a\in(0,1))\ ;\quad 2)\ \lim_{x\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$$

类似地易有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0\ (a>1) \qquad \lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

- $x\to\infty$ 的情况

设 $f(x)$ 定义在 $|x|>a$，$\exists A\in\mathbf{R}$，$\forall\varepsilon>0$，

$\exists X>a$，当 $|x|>X$，

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称当 x 趋于无穷时，$f(x)$ 的极限为 A，或收敛于 A，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A, (x \to \infty)$$

- 从定义可知

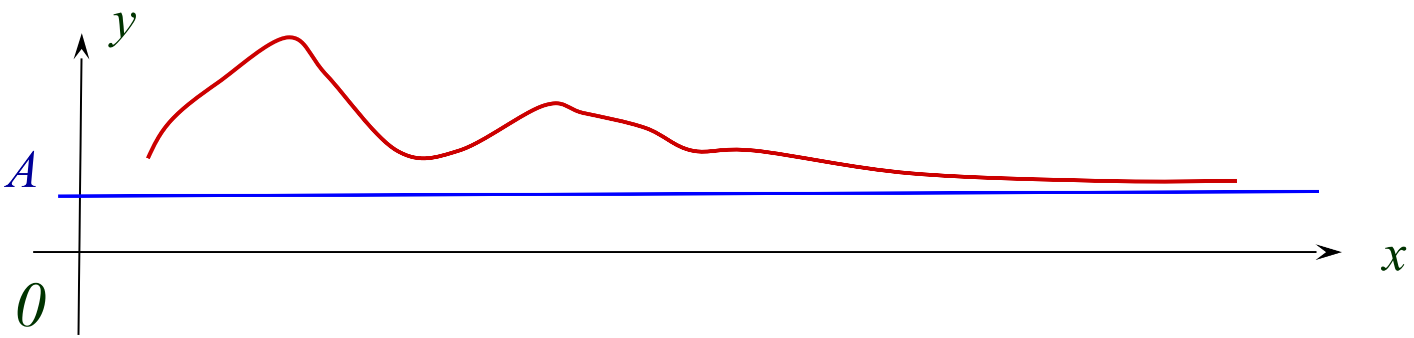
$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty} f(x) = A}$$

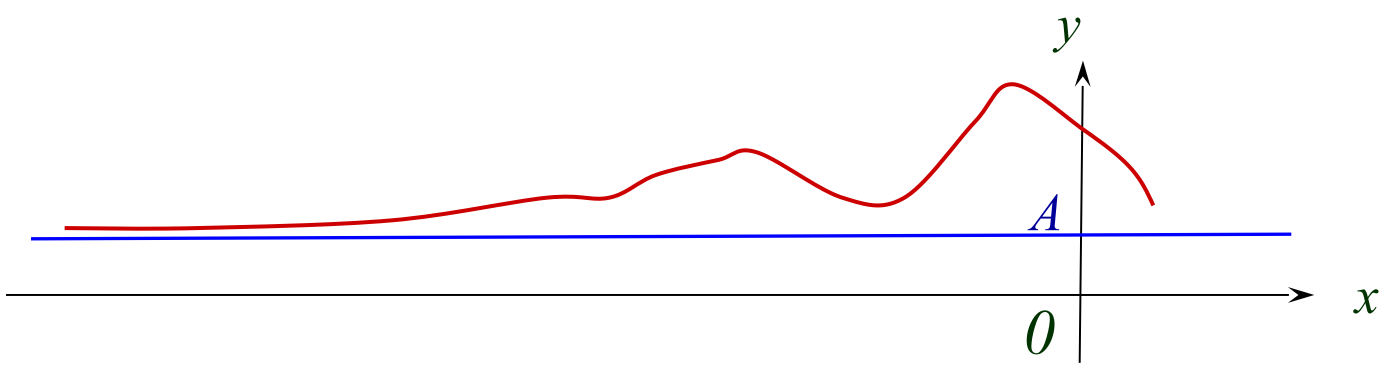
- 由此充要条件可知

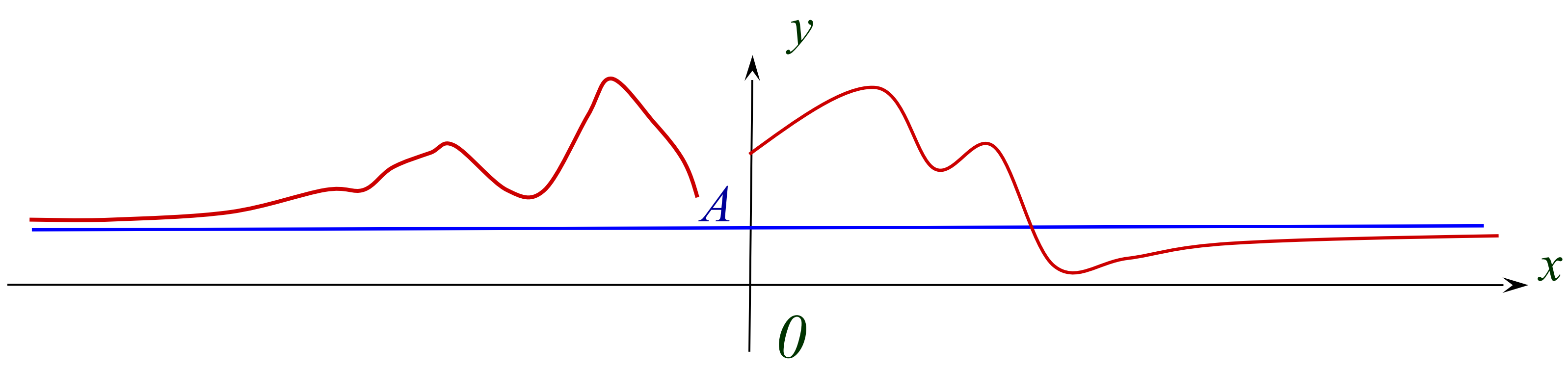
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \arctan x \text{ 不存在}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ 存在否?

$x \to \pm\infty$ 和 ∞ 的极限







$x \to a$ 的情况

设 $f(x)$ 定义在 a 的去心邻域，若存在实数 A，

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x-a| < \delta,$

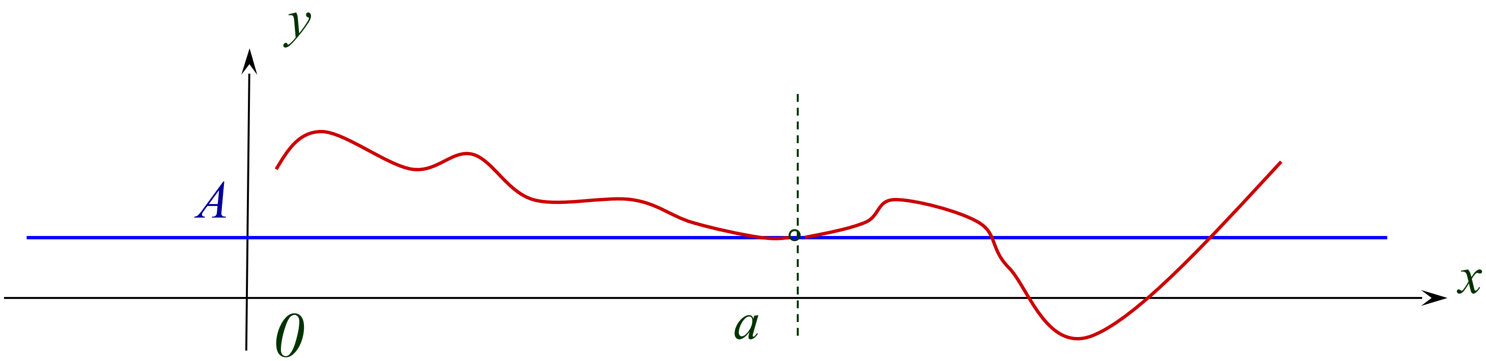
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

称当 x 趋于 a 时，$f(x)$ 的极限为 A，或收敛于 A

记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A, (x \to a)$$

- 从定义知，此极限与 $f(x)$ 在 a 点的定义无关，也与 $f(x)$ 在 a 的邻域外的值无关



- $x \to a$ 时的极限是一种双侧极限

例 用定义验证

$$\boxed{1)\ \lim_{x\to 1}\ln x = 0};\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{2}{x^2+x}=\frac{1}{3};$$

- $x \to a^{+}$ （或 $a+0$）的情况（单侧极限）

设 $\eta > 0$，$f(x)$ 定义在 $(a, a+\eta)$，若存在实数

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < x - a < \delta$，

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$$

称 $f(x)$ 在 a 点的右**极限**为 A，记为

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A, (x \to a^{+}) \quad 或 \ f(a+0) = A$$

- 考虑 $x \to a^{-}$（或 $a-0$）的情况

- 显然有

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x\to a^-} f(x) = A}$$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 存在吗?

H.W

习题 2　18(2)　21(1)　20(1)　22*　23*

函数极限时的无穷小与无穷大

若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, 则称当 $x \to a$ 时， $f(x)$ 为无穷小

可记为

$$f(x) = o(1) \quad (x \to a)$$

- 显然有

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - A \text{ 为无穷小}$$

设 $f(x)$ 定义在 $\overset{\circ}{U}(a)$, $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$,

$$|f(x)| > M$$

则称当 $x \to a$ 时， $f(x)$ 为无穷大，记为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

- 显然 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$
- 仍然有 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的情况，注意差别

例＊ 验证

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty,$$

H.W

习题 2

24*

函数极限与数列极限的关系

Heine 定理

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \{x_n\}, x_n \to a, \text{则} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

例　讨论下列极限的存在性

1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} D(x)$, 其中 $D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{有理数} \\ 0, & x\text{无理数} \end{cases}$

2.4.2 函数极限的性质、运算法则和判别法

- 性质

  - 惟一性

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} f(x) = B, \Rightarrow A = B$$

  - 局部有界性

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \exists\delta > 0, M > 0 : |f(x)| \le M, (x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta))$$

  - 局部保号性

  - 保序性

试一试　　尝试叙述局部保号性和保序性

运算法则

- 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, $h(x)$ 有界, 则

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = AB$, $\quad \lim\limits_{x \to a} f^m(x) = A^m$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)h(x) = 0$, $(A = 0)$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

4) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{A} \quad \left(\begin{array}{l} f(x) \quad 0\text{时}, \ m \in \mathbf{N}_+ \\ f(x) \le 0\text{时}, \ m\text{为奇数} \end{array} \right)$

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+2x}{2x^3+x-3}$

可推出

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots+b_k}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & m=k\\ 0 & m<k\\ \infty & m>k\end{cases}$$

例　求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-x-3}$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}{x^2-1}$

复合运算法则

$$\lim_{u\to l} f(u) = A,\ \lim_{x\to a}\varphi(x) = l,\ \varphi(x) \neq l\ (x\in \mathring{U}(a)),$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = A$$

复合运算法则意味着

若 $\lim_{x\to a}\varphi(x) = l, \varphi(x) \neq l\ (x\in \mathring{U}(a)$时)，则

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) \overset{u=\varphi(x)}{=} \lim_{u\to l} f(u)$$

（极限运算中可以作变量代换）

例 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to a} \ln x \quad (a>0)$

（ ln$x$: 极限＝函数值）

H.W

习题 2

20 (3)(4)

25 (1)(4)(6)(8)(9)(10)(12)

极限存在判别法

- 夹逼准则

$$\begin{array}{l} 在\ \overset{\circ}{U}(a)内,\ g(x) \le f(x) \le h(x) \\ 且\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = A$$

- 单调有界函数单侧极限存在定理

在 $(a-\delta, a)$ 内，$f(x)$ 单调有界，则 $f(x)$ 在 a 点的左极限 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 存在

（注意 在 a 点右侧有类似的结论 ）

例　求证

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \quad (a>1)$$

例　求　(1) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x$　　（a^x：极限＝函数值）

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$

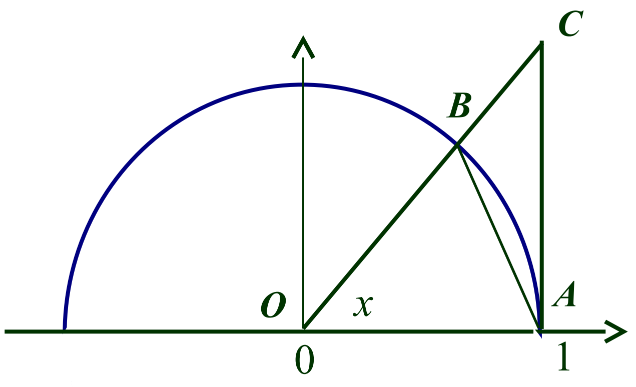
2.4.3 两个重要的极限

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

引理

$$\boxed{当\ 0<|x|<\frac{\pi}{2}\ 时，\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1}$$

- 利用几何图形



附带的结论：

$$|\sin x|\le|x|$$

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0\qquad\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \mathrm{e}$

- 利用夹逼定理和$\lim\limits_{n}(1+\dfrac{1}{n})^n = \mathrm{e}$

- 记 $n = [x]$，当 $x > 1$

时有

$$n \le x < n+1$$

- $x \to -\infty$ 时，作变换 $y = -x$

- 利用简单的变换，立刻得到

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

- 如果联系复合函数的极限就得到

若当$x\to a$时，$\Delta\to 0$，则

$$\frac{\sin\Delta}{\Delta}\to 1 \qquad (1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\to \mathrm{e}$$

例　求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\alpha}{x})^{\beta x}$　（α，β 有理数）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n+1})^{n}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{\sin 3(x-a)}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2^2}\cdots\cos\dfrac{a}{2^n}$　$(0<a<\pi)$

H.W

习题 2

26 (3) (7) (10)

27 (1) (2) (7)

29 (1) (2) (4)

2.4 前一部分要点

- 了解函数极限的概念、性质和运算法则及判别法，

1）函数极限 x 的变化有多种情况，应该对它们有比较直观的了解、

2) 复习时把函数的概念、性质等与数列的相应概念、性质作比较，看一看相同和不同点

3) 知道两个重要极限，和相关类型习题的做法

2.4.4 无穷小的比较

一．比较

设 $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$, 且 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = l$

当 $l = 0$ 时，称 $x \to a$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小

记为

$$\beta(x) = o(\alpha(x)), \quad x \to a$$

当 $l \neq 0$ 时，称 $x \to a$ 时 $\beta(x)$ 是与 $\alpha(x)$ 同阶的无穷小

特别 $l = 1$ 时，称 $x \to a$ 时 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 等价的无穷小

记为

$$\beta(x) \sim \alpha(x), \quad x \to a$$

例 比较下列无穷小

(1) 当 $x \to +\infty$ 时, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(2) 当 $x \to 0$ 时, $\sin x$ 与 x, $1-\cos x$ 与 x^2

➢ 命题

当 $x \to a$ 时

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x)-\beta(x)=0(\alpha(x))$$

二． 无穷小的阶

$$设 \lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}\beta(x)=0, 且\exists C\neq 0, k>0:$$

$$\beta(x)\sim C\alpha^k(x),\quad (x\to a)$$

则称当 $x\to a$ 时， $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小，

$C\alpha^k(x)$ 称为 $\beta(x)$ 的主部

➤ 在无穷小进行运算或比较时，常取一个形式简单的无穷小作为“标准”

$$x\to 0时，取 x,\ x\to\infty时，取 \frac{1}{x}$$

例如 在 $x \to 0$ 时

$$\boxed{\sin x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \tan x \sim x}$$

还有

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

以及 *

$$\arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x$$

➢ 这意味着

若当 $x \to a$ 时，$\Delta \to 0$，那么

$$\sin\Delta \sim \Delta, \quad 1-\cos\Delta \sim \frac{1}{2}\Delta^2, \quad \tan\Delta \sim \Delta$$

$$\ln(1+\Delta) \sim \Delta, \quad e^{\Delta}-1 \sim \Delta, \quad (1+\Delta)^{\alpha}-1 \sim \alpha\Delta$$

$$\arcsin\Delta \sim \Delta, \quad \arctan\Delta \sim \Delta$$

三．利用等价无穷小替换求极限

➢ 求极限时，可将式子分子或分母的无穷小因子用等价无穷小替换

例 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{e^{2x}-1}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(2x^2)}{\ln(\cos x)}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1+\sin x}{x}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ $\left(\cancel{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}\ ?\right)$

例 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是比 x 高阶的 k 阶无穷小，

又有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$$

试求 k ，且求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}$$

H.W　习题　2

28 (2) (3) (4) (5) (7)

29 (5) (7)

30 (1) (2) (3) (5) (7) (8)

31 (1) (2)

2.4 节的后一部分要点

- 这一部分内容很重要，无穷小的比较不仅使我们了解无穷小量级的高低，而且给出了处理有关习题的方法

通常选择标准无穷小(例如 x)后，应该知晓其它无穷小与标准无穷小的关系(等价否？、多少阶？)

等价无穷小的替换十分有用，但何时可以应用？必须重视