Chap 2.2

数列极限的
性质与运算法则

2.2.1 性质

- 惟一性

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,\quad \lim_{n\to\infty} x_n = B \quad \Rightarrow A = B$$

- 有界性

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \Rightarrow \quad \exists M > 0 : \left|x_n\right| < M \quad (\forall n \in \mathbf{N}_+)$$

- 保号性

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists N \in \mathbf{N}_+ : \ \forall n > N,\ x_n > \frac{A}{2}$$

- 推论(保序性)

若 $\{x_n\}$ ， $\exists$ $N \in \mathbf{N}_+$ ： 当 $n > N$ 时， x_n 0， 且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \Rightarrow \quad A \quad 0$$

1) $x_n \quad y_n, \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \ \Rightarrow \ A \quad B$

2) 问题 条件中 $\boldsymbol{x_n}$ 0 改为 $x>0$，结论能否 $A>0$？

子列 数列 $\{x_n\}$ 中的无穷项，它们下标依次为

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

则称数列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$ 为 $\{x_n\}$ 的子列，记为 $\{x_{n_k}\}$

- 归并性

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A$$

➢ 命题常应用于说明极限不存在. 例如：$x_n = (-1)^n$

- **命题**

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = A \text{ 且 } \lim_{k\to\infty} x_{2k} = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = A$$

H.W

习题 2

3　　　6　　　7

选做题

试证 数列极限的性质：有界性

2.2.2 运算法则

- 加减法

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = B \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$$

- 乘法

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = B \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = AB$$

推论(幂)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n^m = A^m$$

- 除法

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = B \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$$

- 开方运算

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{A} \quad \left(\begin{array}{l} x_n \quad 0\text{时}，\ m \in N_+ \\ x_n < 0\text{时}，\ m\text{为奇数} \end{array}\right)$$

例　求以下数列的极限

$$(1)\ x_n = \frac{2n^3 - n + 4}{3n^3 - 5n^2 + n}; \qquad (2)\ x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

可导出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + a_k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & m = k \\ 0 & m < k \\ \infty & m > k \end{cases}$$

(3) $x_n = \dfrac{4^n + (-3)^n}{4^{n+1} + 3^{n+1}}$; (4) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(5) $x_n = (1 - \dfrac{1}{2^2})(1 - \dfrac{1}{3^2})\cdots(1 - \dfrac{1}{n^2})$

(6) $x_n = \dfrac{\sin n^2}{n}$

H.W

习题 2 12 (1) (3) (4) (5) (8)

补：$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2-1})$

本节要点

- 极限的性质

  重点是了解这些性质的含义

- 熟练掌握与应用极限运算法则

- 了解典型习题的结论和做法 （变无穷为有穷）

1）改变表达式

2）在∞/∞ 类型时，找出分子、分母中的最大量级项，通过除法去掉∞