Chap3 — 4

隐函数与参数方程求导法

3.4.1 隐函数的导数

原则　方程 $F(x, y) = 0$ 两端对 x 求导，视 y 为隐函数 $y(x)$，再解出 $y'(x)$.

例 1　设 $y = f(x)$ 是由方程 $xy + \ln y = 1$ 所确定的隐函数

(1) 求 $f'(x)$;　**(2)** 若 $g(x) = f(\ln x)e^{f(x)}$，求 $g'(1)$.

$$y' = -\frac{y^2}{1+xy}$$

$$g'(1) = -e^2\left\{e + \frac{1}{2}\right\}$$

3.4.2 参数方程确定的函数的导数

定理 设方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 确定函数 $y=y(x)$，则对应参数为 t 的 x 处导数

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.}$$

例 2 已知星形线的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases} \quad (a>0)$

， 试证：其上任一点处的切线被坐标轴所截得

- 曲线的斜率是 y 对 x 的导数，而非 y 对 t 的导数.

3.4.3 极坐标方程表示的函数的导数

设曲线的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, 化为参数方程 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, 极角为θ的点处切线斜率

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta}.}$$

例 3 求曲线 $r = a\sin 2\theta$ (a 为常数) 在$\theta = \pi/4$ 处的切线和法线方程.

$$\boxed{\text{切线}\, x + y = \sqrt{2}a,\ \text{法线}\, x - y = 0}$$