这门课首要的是

教我们学会如何思考

— G· polya

Chap8 —1

多元函数的基本概念

8.1.1 平面点集

一． 邻域

在二维空间中，点 $\boldsymbol{P}$(x, y) 与 $\boldsymbol{P}_0$(x$_0$, y$_0$,) 的距
记为 离

$$d(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

集合

$$U(P_0,\delta)=\{P(x,y)\,|\,d(P,P_0)<\delta\}$$

称为 P_0 的 **δ 邻域**（不强调半径时为邻域 $U(P_0)$
）

$$\overset{\circ}{U}(P_0,P)=\{P(x,y)\,|\,0<d(P,P_0)<\delta\}$$

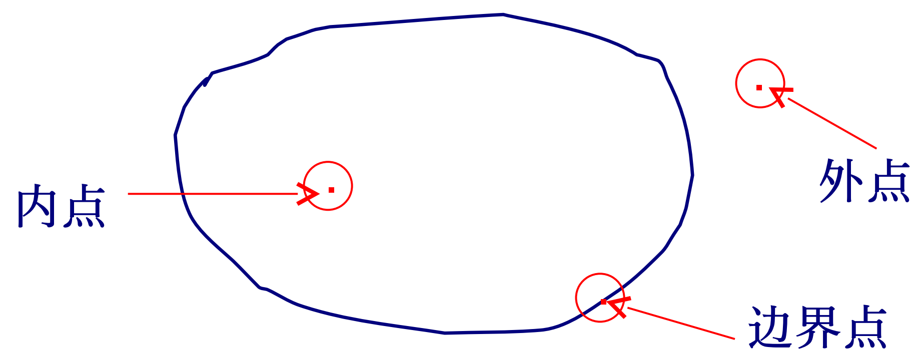
称为 P_0 的去心 **δ** 邻域

二．开集与区域

E 是平面 $\mathbf{R}^2$ 中的集合， P_0 是平面中的点

若存在 δ>0， 使 $U(P_0,\delta)\subset E$, 称 P_0 为 E 的内点;

若对任意 δ， 在 $U(P_0,\delta)$ 内既有属于 E 的点又有不属于 E 的点，称 P_0 为 E 的边界点



若集合 E 中每个点都是 E 的内点，称 E 为开集；开集 E 的余集 $\mathbf{R}^2-E$ 称为闭集

若集合 E 中任意两点都能用完全属于 E 的折线

连接起来，则称 E 是连通的；连通的开集称为区域

E 的所有的边界点组成的集合称为 E 的边界

区域连同其边界称为闭区域

若存在 R，集 $E \subset \{(x,y) \mid x^2+y^2<R^2\}$, 称 E 有界

合

例　下列集合是否开集、区域、连通、有界

$$D_1=\{(x,y) \mid x^2+y^2<4\},\quad D_2=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 4\},$$

$$D_3=\{(x,y) \mid xy>0\},\quad D_4=\{x\quad 0, y\quad 0\}$$

$$D_5=\{(x,y) \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1, y\quad 0\}$$

8.1.2　多元函数

简单说，函数依赖的自变量多于一个称为**多元函数**

设 D 是平面的非空集，f 是 $D\to\mathbf{R}$ 的映射，则称 f 是定义在 D 上的**二元函数**，记为

$$f:D\to\mathbf{R}$$

或者

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

与一元情况类似，二元函数包括两个要素

（**定义域、对应关系**）

例　已知 $f(x+y, xy) = x^3 + y^3$，求 $f(x, y)$

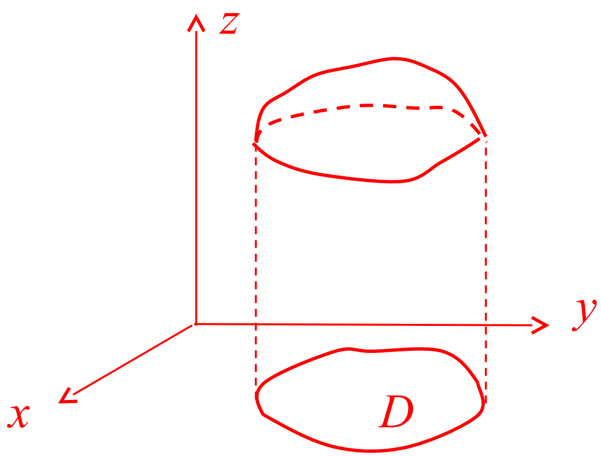
例　$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - y)$，且 $z\big|_{y=1} = x - 1$，求函数 z 的表达式

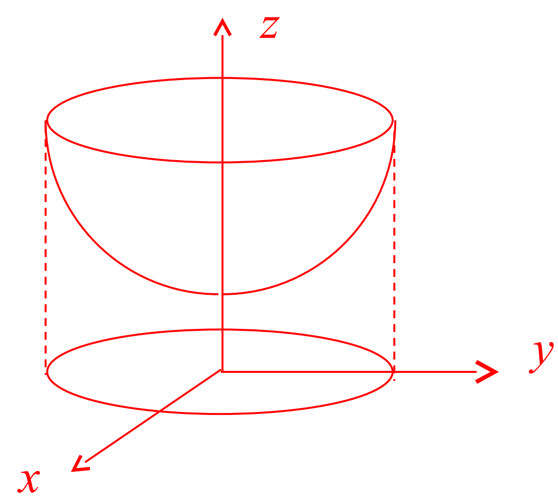
例　求 $z = \ln[x\ln(y-x)]$ 的定义域

二元函数图形（图象）

集合 $\{(x,y,z) \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\}$ 所对应

几何图形称为二元函数的图形，一般而言是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个曲面；曲面在 ***xy*** 面上的投影区域就是函数的定义域 D





思考

- 试将本小节中的概念（平面点集和二元函数等相关概念）推广到三维
- 其实可以将此类概念推广至 n 维