Chap 6 — 4

线性微分方程解的结构

n 阶线性微分方程标准形式

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)}$$

$p_1(x), \cdots, p_n(x)$—— 方程的系数　　$f(x)$ —— 非齐次项

特点：方程中

各项关于未知函数及其导数均不超过一次

$f(x) \equiv 0$时，得到

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0}$$

称为对应的齐次线性微分方程

线性方程叠加原理

$y_1(x)$ 是方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f_1(x)$$的解

$y_2(x)$ 是方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f_2(x)$$ 的解

$\Longrightarrow$ $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$是方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$$

的解 （$c_{1,}c_2$ 为任意常数）

推论 (齐次线性方程的性质)

$y_1(x),\ y_2(x)$ 是方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$ 的解

$\Rightarrow$

$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ (c_1,c_2是任意常数)

也是此方程的解 .

6.4.1 二阶齐次线性微分方程解的结构

二阶齐次线性方程标准形式

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (HL)}$$

1. 线性相关与无关

对函数 $y_1(x), y_2(x)$, 若有不全为零常数 c_1, c_2, 使

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0$$

则称 $y_1(x), y_2(x)$ 线性相关，否则称它们线性无关

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 $\xleftrightarrow{\text{充分必要条件}}$ 其中一个是另一个的常数倍

2. 解的结构定理

若 $y_1(x)$、 $y_2(x)$ 是方程 (HL) 的两个线性无关的解（称它们为方程的基本解组），那么通解

$$c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) \qquad （c_1, c_2 \text{ 任意常数}）$$

给出了方程（HL）的所有解.

(HL) 的所有解构成了一个二维线性空间，基本解组是它的一组基.

求解二阶齐次线性方程归结为:

求出两个线性无关的解 (即基本解组).

如何求这方程两个线性无关的特解？

3． Liouville 公式

若 $y_1(x)$ 是 (HL) 的非零解，那么

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$ 是方程与 $y_1(x)$ 线性无关的解

(常数变易法)

求方程 (HL) 的解归结为求出一个非零特解

如何求一个特解?

简单形式方程常使用观察法找出特解

$$\boxed{x^m,\ e^{\alpha x},\ \sin mx \text{ 或 } \cos mx}$$

例　求解方程

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$$

例　求解方程

$$xy'' - y' - (x-1)y = 0$$

H.W

习题 6

27 (1) （ 3 ）

28 (2) （ 3 ）

6.4.2 二阶线性非齐次方程解的结构

二阶线性非齐次方程的标准形式

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (NHL)}$$

对应的齐次线性方程

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (HL)}$$

解的结构定理

设 $y^*(x)$ 是非齐次方程 (NHL) 的解，而 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是对应的齐次方程的基本解组，那么通解

$$\boxed{y = y^*(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}$$

(c_1, c_2 是任意常数) 给出了方程 (NHL) 的全部解

要求非线性方程 (NHL) 的通解，只要求出

一个特解和对应齐次方程的一个基本解组

如何求出方程的特解呢? _

常用方法是常数变易法_

例　已知方程 $y''+y=0$ 有基本解组为 $\cos x$,$\sin x$

试求非齐次方程

$$y''+y=\tan x$$

的通解

解题思路　设特解 $\hat{y}=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$

代入方程求出 c_1,c_2, 但注意仅靠一个方程无法

定出，因此可增加一个关于 c_1,c_2 的关系式

H.W

补充：

求方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解

问题和思考

(1) 如何定义 n 阶线性微分方程的 n 个解线性无关和基本解组

(2) n 阶齐次线性方程的解的结构

(3) n 阶非齐次线性方程的解的结构