# Chap3 — 3

## 导数与微分的运算法则

## 3.3.1 导数的四则运算法则

**定理** 设 $u(x), v(x) \in \mathrm{D}(I), x \in I$, 则

1) $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$;

2) $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$(Cu(x))' = Cu'(x)$

3) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, $\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)' = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}$.

- **思考** 微分的四则运算法则?

例 1 求下列函数的导数 .

(1) $y=\sqrt{x}+2\sin x$

(2) $y=\tan x$

例 2 若 $f(x)=\lim_{t\to\infty}x\left(1+\frac{1}{t}\right)^{tx}$，求 $f'(x)$.

## 3.3.2 复合函数的导数

**链法则** 设 $u=\varphi(x)$ 在 $x$ 处可导，而 $y=f(u)$ 在对应于 $x$ 的 $u$ 处可导，则 $f(\varphi(x))$ 在 $x$ 处可导，且

$$[f(\varphi(x))]' = f'(u)\cdot\varphi'(x) = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

**或** $$y'_x = f'_u\cdot\varphi'_x$$

**或** $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

- 链法则：反映复合过程 $y\to u\to x$

例 3 求下列函数的导数.

(1) $y=\sin(3x^2)$

(2) $y=\sqrt{1+x^2}$

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

例 4 设可导函数 $f(x)$ 不等于 0， 又 $y=\ln|f(x)|$，证明

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

## 幂指函数的导数

- $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow y = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$

例5 求 $y = x^{\sin x}$ 的导数

- 对数求导法

$$y = f(x)^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \ln y = g(x)\ln f(x)$$

（注 多因子相乘的函数也可用对数求导法）

例6 求 $y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt[3]{2x-1}(4x+3)^2}$ 的导数

◆ **复合函数的微分** 设 $y=f(u),\ u=\varphi(x)$, 则

$$\mathrm{d}y=\left[f(\varphi(x))\right]'\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

因为 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$, 所以 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$.

当 $u$ 作为自变量时，也有 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$.

◆ **一阶微分形式不变性** 不论 $u$ 是自变量，还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的一阶微分的形式一样 .

例 7 求 $y=\mathrm{e}^{\sin(x^2)}$ 的微分 .

## 3.3.3 反函数的导数

**定理** 设 $x=f(y)$ 是单调可导函数 $(f'(y)\neq 0)$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 $x$ 处可导，且

$$\boxed{(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.}$$

例 8 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin x$ (2) $y=\arctan x$

## 3.3.4 基本导数与微分公式表 (P.120)

$$(c)' = 0 \qquad (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (a^x)' = a^x \ln a \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\mathrm{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$