

Chap8 —8

多元函数的极

值

8.8.1 二元函数的 Taylor 公

式 函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域有 $n+1$ 阶连续偏导
设函数

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \quad t \in [0, 1]$$

将此函数用 Taylor 公式展开且取 $t=1$, 得
到

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0, y_0) + R_n$$

其中余项

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \quad (\theta \in (0,1))$$

当 $n = 1$, 得到函数 $f(x,y)$
的

一阶 *Taylor* 公式

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}) f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \end{aligned}$$

$(\theta \in (0,1))$

8.8.2 多元函数的极值

一. 二元函数极值

在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{或 } f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$$

称函数 f 在 (x_0, y_0) 处取得极大值（或极小值） (x_0, y_0) 称为函数的极大值点（或极小值点）

二. 极值的必要条件

$f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处取得极值，且 f 可微，则

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{(满足此式的} \\ \text{点称驻点)} \end{array}$$

注意 驻点未必是极值点

例 考察函数 $f(x, y) = x^2$ 在 $(0, 0)$ 的情况

三. 极值的充分条件

函数在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域内有连续的二阶偏导数, $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, 记

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0)$$

则 $B^2 - AC > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 非极值

$B^2 - AC < 0$ 时, $A > 0, \Rightarrow f(x_0, y_0)$ 为极小值
 $A < 0, \Rightarrow f(x_0, y_0)$ 为极大值

充分条件的证明思路：

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\&= (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}) f|_{(x_0, y_0)} + \frac{1}{2} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^2 f|_{(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)} \\&= \frac{1}{2} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^2 f|_{(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)} \\&= \frac{1}{2} [(\Delta x)^2 f_{xx} + 2 \Delta x \Delta y f_{xy} + (\Delta y)^2 f_{yy}]|_{(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}\end{aligned}$$

是 $\Delta x, \Delta f$ 的二次函数

利用二阶偏导数的连续性以及 $B^2 - AC$ 的符号
确定 Δf 的符号

例 求函数 f 的极值, $z = x^3 + y^3 - 3xy$

四. 最值问题

原则 可微连续函数的最值应在定义域内部驻点或边界点取到; 在实际问题中, 若最值必在区域内部取得又驻点惟一, 则驻点就是最值点

例 在半径为 R 的圆中求面积最大的内接三角形边长

例 某产品销售收入 R 与电视广告费 x , 报纸

广告费 y 间的关系为

$$R = 15 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2,$$

(R, x, y 单位均为万元) 问如何分配两种广告费才能使得利润 L 最大?

$$L = R - (x + y) = 15 + 13x + 31y - 8xy - 2x^2 - 10y^2,$$

$$L_x = L_y = 0 \Rightarrow \text{驻点}(0.75, 1.25) \quad L=39.25$$

(注意此例不能肯定最大值在定义域内部达到)

需要讨论 R 在边界 $y=0$ 和 $x=0$ 的情况

例 某种金属棒的长度随着温度变化，现
测得一组数据如下表

t (°C)	20	30	40	50	60
l (mm)	1000.36	1000.53	1000.74	1000.91	1001.06

若 l 与 t 的关系估计为线性函数，试求之

这是从一组测定数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$
求变量 x, y 之间的函数关系问题，函数通常由经验设为含
有待定常数的 $y=f(x)$ （拟合曲线），通过求

$$Q = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2,$$

的最小值确定 f 中的待定常数

最小二乘法

设 $l = a + bt$, 那么引进

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^5 (l_i - (a + bt_i))^2$$

驻点满足

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^5 (l_i - a - bt_i) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^5 (l_i - a - bt_i)t_i = 0$$

从中可解出 a, b 的值，从而得到函
数 $l = a + bt$