Chap 5.5

定积分计算

定积分的凑微分法

条件与不定积分有区别

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{，} f\text{与}\varphi'\text{连续，则}$$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))\Big|_a^b$$

例　计算下列定积分

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{2}} 6\sin x\cos^2 x dx$

(2) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$

一个重要的结论

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$$

例　求下列积分

$$(1)\quad I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a\cos x + b\sin x)^2 dx$$

$$(2)\quad I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$$

习题 5

30 （1）（3）（5）（6）

34(1)

提示 $\int_1^3 f(x-2)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt =$

定积分的第二换元法

$f(x)\in C[a,b],\psi'$连续， $\psi(\alpha)=a,\psi(\beta)=b$

当t在α,β之间时， $\psi(t)\in[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)dt$$

例　　求下列定积分

$$(1)\quad I=\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx\quad(a>0)$$

$$(2)\quad I=\int_0^1\sqrt{e^x-1}\,dx$$

例　函数 $f(x)$ 连续，试求

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t\,f(x^2-t^2)\,dt$$

例证　$f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，试

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

例　试求积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

➢ 几个公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

从几何上考虑，这两个公式都是自然的

例　试求积分

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

能否利用对称性?

习题 5

31 （3）－（7）(10)

37(1)

38* 想一想作怎样的变换?

分部积分法 (定积分)

$u', v' \in C[a,b] \quad \Rightarrow$

$$\int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

例 计算下列定积分

(1) $\int_{e^{-1}-1}^{e-1} \left|\ln(x+1)\right| dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

例求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

例 求定积分

$$\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$$

例　若$f''(x)$连续，$f(0)=2, f(\pi)=1$, 求

$$\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\sin x dx$$

例　设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx \;\; (n \quad 2$,整数), 试证

$$I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$$

H.W 习题 5

32 (4)- (7)

36 （ 1 ）

➢ 一个有用的积分不等式

Cauchy 不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

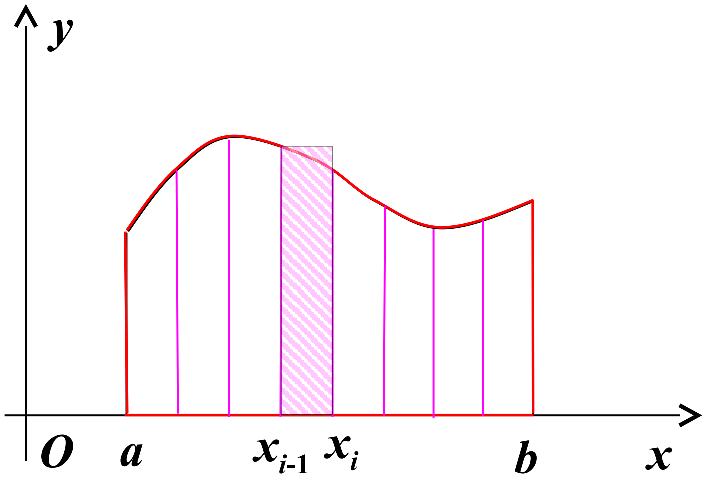
例 试证

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

5.5.4 定积分近似计算

从几何意义上考虑

将曲边梯形分成 ***n*** 个小曲边梯形 (底边等长)



- 矩形法

用矩形近似小曲边梯形

则其面积近似

$$f(x_{i-1})\Delta x_i = f(x_{i-1})\frac{(b-a)}{n} = y_{i-1}\frac{(b-a)}{n}$$

导出近似公式

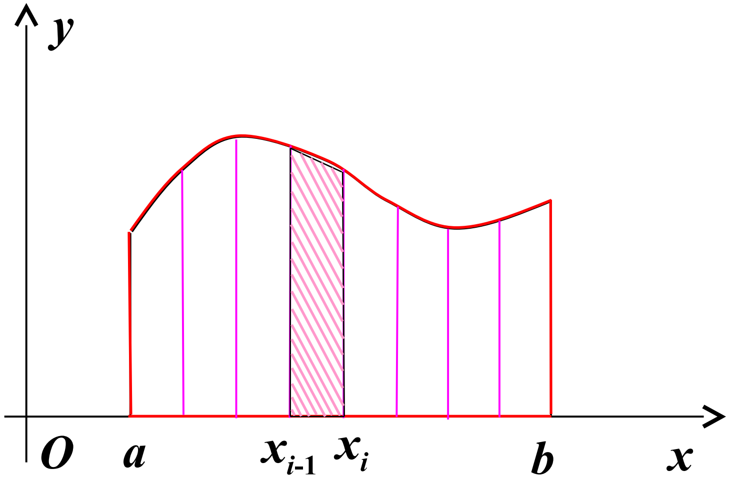
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$$

- 也可取右端边长为矩形高，得右矩形公式
- 误差为 **1/*n*** 的同阶无穷小

■ 梯形法

用梯形近似小曲边梯形，

则其面积近似



$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x_i = \frac{(b-a)(y_{i-1} + y_i)}{2n}$$

导出近似公式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}[(y_0+y_n)+2(y_1+\cdots+y_{n-1})]$$

误差为 $1/n^2$ 的同阶无穷小

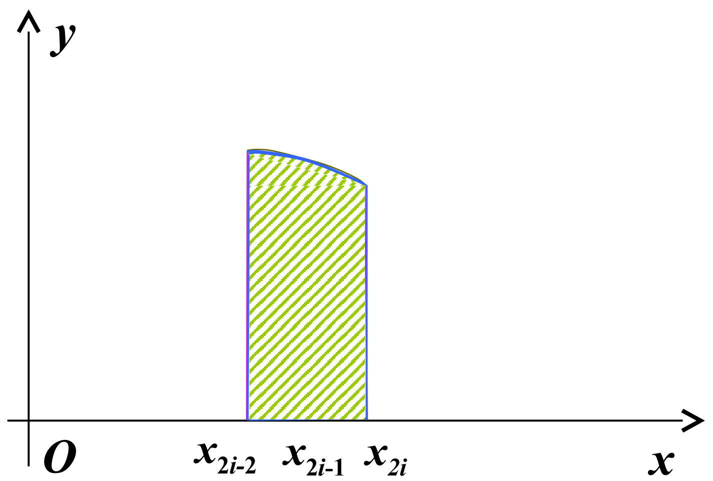
- 抛物线法 (Simpson 法)

取 $n=2m$，相邻两个小曲边梯形上方曲线部分用抛物线近似，则由

$(x_{2i-2}, y_{2i-2}), (x_{2i-1}, y_{2i-1}), (x_{2i}, y_{2i})$

三点可定出抛物线

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$



$[x_{2i-2}, x_{2i}]$ 上小曲边梯面积形近似为

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx = \frac{b-a}{6m}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

导出近似公式

$$\boxed{\frac{b-a}{6m}(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + \cdots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + \cdots + y_{2m-1})}$$

- 误差为 $\mathbf{1/n^4}$ 的同阶无穷小

问题 *

试利用数值积分来计算π的近似值

例题若干

例 设 $f(x)=\sin x+\int_0^{\pi} f(x)dx$, 求 $f(x)$

- 若式子改为如下形式怎么办?

(1) $f(x)=\sin x+\int_0^{\pi} x f(x)dx$

(2) $f(x)=3x^2-x\int_1^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$

例　若 $f(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{dt}{\sin t+\cos t}$,

试求 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx$

例　求 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x dx}{e^x+1}$,

- 注意　$\sin x$ 的对称性

例　　　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续导数，$f(a)=0$，：

$$\int_a^b |f(x)|dx \le \frac{(b-a)^2}{2} \max_{[a,b]} |f'(x)|$$

- 考虑 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的关系

例　　　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且单调增加，

试证：

$$\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x \quad \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

- 想一想证明不等式的方法

H.W

33 （2）（3）

35 （1）

补充题

8

13