这门课首要的是教我们学会如何思考

——G· polya

Chap 1

函 数

乐经良

Chap 1.1

实数集

乐经良

1.1.1 集合

- 具有某种属性的事物的全体称为**集合**

$\uparrow$ $\uparrow$

a (**元素**) A

a 是 A 的元素： $a \in A$ ； a 不是 A 的元素： $a \notin A$ ；

- **表示法：** 1 ）列举

2 ）说明属性

$A=\{x \mid$ 使 x 属于 A 的属性 $\}$

- **集合的运算**

并（和）： $A \cup B$ （$A+B$）； 交（积）： $A \cap B$ (AB)

差 ： $A \setminus B$

1.1.2 实数集

- **实数集 R**： 有理数集(**Q**) + 无理数集
- 有理数集的**特性**

  1）**有序性**

  2）对加减乘除运算的**封闭性**（构成**数域**）

  3）**稠密性**

  - 通过长度： 有理数 → 数轴上的点;

    有理数 ← 数轴上的点 ？ ($\sqrt{2}$)

- 实数集多具一个特性：**完备性**（**或连续性**）

  实数 ↔ 数轴上的点（一一对应）

  - 在极限运算下依然是**封闭的**

1.1.3 区间

- **有界区间**

设 $a<b$, 那么

开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b, x\in \mathbf{R}\}$

闭区间 $[a,b]=\{x \mid a\leq x\leq b, x\in \mathbf{R}\}$

半开闭区间 $[a,b)=?, (a,b]=?$

- **无界区间**

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b, x\in \mathbf{R}\}$

$(-\infty,+\infty)=?\ \ [a,+\infty)=?$

一般区间表示：I（大写英文字母）

- **邻域**

若 $a \in \mathbf{R}$， $\delta > 0$，则

$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$ ： **a 的 δ 邻域**

$\overset{\circ}{U}(a,\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta))$: **a 的去心 δ 邻域**

1.1.4 一些符号

$\in$： 属于； $\notin$： 不属于

$\forall$： 任给、任意的； $\exists$ ： 存在

$\Rightarrow$：蕴含着，必要条件；$\Leftarrow$： 源于 ， 充分条件

$\Leftrightarrow$： 等价 $\stackrel{def}{=}$ 定义为

max E E 中最大者； min E E 中最小者

- 用逻辑符号表达某些数学语言较简洁

例如命题:

对任意一个实数 a，必定存在实数 b，使得 $b > a$

可以表为:

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \exists b \in \mathbf{R} : b > a$$

1.1.4 不等式

1) $|x-a|<\delta \iff a-\delta<x<a+\delta$

2) $|x \pm y| \leq |x|+|y|,\quad |x-y| \quad \big||x|-|y|\big|$

3) $A-G$ **不等式**

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均非负数

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \qquad \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

4) *Bernoulli* **不等式**

$x \geq 0$ ，且 n 为正整数，则

$$(1+x)^n \qquad 1+nx$$

例 $\sqrt[n]{a}-1 \leq \dfrac{a-1}{n} \quad (a>1)$

乐经良

1.1.6 实数集的界

- **上界** 设 E 为非空实数集，$\exists\ M\in \mathbf{R}$，$\forall x\in E: x\le M$，称 M 是 E 的一个上界 .(下界？)

E 既有上界又有下界称为有界的

- 有界**等价表达**： $\exists\ M>0, \forall x\in E: |x|\le M$

- **上确界** 最小上界 （怎样确切描述？）

E 为非空实数集， $\exists\ \beta\in \mathbf{R}$，

(1) $\forall\ x\in E: x\le\beta$; (2) $\forall\ \delta>0, \exists\, x_\delta\in E: x_\delta>\beta-\delta$

称 β 为 E 的上确界 . （下确界？）

➢ **确界存在性**公理 集合有上界必有上确界

H .W

习题 1

2, 3(1)(2), 4,(其中 -3^n 与 $(-3)^n$)

5(1)(2), 6

补充题 1, 3 (选做)

乐经良

Chap 1.2

函　数

乐经良

1.2.1 概念与表示

- 什么是**函数**

简言之

函数是**数集间的对应关系**

设 D 是一个数集

$$\forall x \in \boldsymbol{D},\ x \xrightarrow{\ f\ } y \in \boldsymbol{R}$$

记为 $y = f(x),\quad x \in \boldsymbol{D};$ 或 $f: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$

函数 自变量 定义域

函数在 D 上 x_0 的对应的 $f(x_0)$ 称为函数在 x_0 的值

有时记为 $f\big|_{x_0}$

- **自变量的字母是可以改变的符号**

$$y = f(\Delta), \quad \Delta \in X$$

- **函数的表示：** 只要给出**两个要素**

1）定义域　2）对应关系

可以用解析式，也可以用图表等方式

- 解析式有时分段表示

例 随飞机托运行李（千克）与价格（元）的关系

$$p = \begin{cases} 0 & 0 \le m \le 20 \\ 12(m-20) & 20 < m \le 200 \end{cases}$$

例 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x\text{为有理数} \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}$$

- Dirichlet， 现代函数概念的定义人
  解析数论的奠基者 .
  （从证明费马大定理 $n=5$ 情况开始，贡献颇多）

1.2.2 函数特性

- **奇偶性**
  - 如何确定函数的奇偶性？

例 指出下列函数奇偶性

1) $f(x)=x+\tan x$ 2) $f(x)=x\sin^3 x$

3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ 4) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

- **有界性**
  - 有界联系区间
  - 如何叙述“无界”

单调性

- 区别单调与严格单调
- 单调联系区间

周期性

- 周期不唯一，通常指最小正周期
- 若 $f(x)$ 的周期为 T，那么 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{a}$
- 周期函数一定有最小正周期吗？

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\0 & x\text{为无理数}\end{cases}$$

乐经良

1.2.3 函数的运算

- 加减乘除

$$f+g, \quad f-g, \quad fg, \quad f/g$$

- 复合

$$f\circ g: \quad (f\circ g)(x)=f(g(x))$$

$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，求 $f(f(x))$

例　$y=2^{\sin 3x}$ 由 $y=2^u, u=\sin v, v=3x$ 复合而成

链式结构:　$y — u — v — x$

例　$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ x^2 & 1<x\le 2\end{cases}$，$g(x)=\ln x$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$

乐经良

例 求 $f(x)$，若

$$1)\ f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2};$$

$$2)\ f(\frac{x+1}{x-2})=2x-1$$

□ 反函数

➢ 单射，满射，双射

设函数 $f:X\to Y$

若 $x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

则称 f 为单射的

若 $R(f)=Y$ ，则称 f 为满射的

若 f 为既是单射又是满射的

则称 f 为双射的

- 单射函数 $f(x)$ 在其值域 R(f) 上可定义反函数

$$y=f(x),\quad x\in X \quad \Leftrightarrow \quad x=f^{-1}(y),\quad y\in R(f)$$

此时图形与原函数图形重合

- 当反函数表示为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in R(f)$$

图形与原函数图形关于直线 $y=x$ 对称

1.2.4 初等函数

- **基本初等函数**

$f(x)=c,\quad x^{\alpha},\quad a^{x},\quad \log_a x$

$\sin x,\quad \cos x,\quad \tan x,\quad \cot x,\quad \sec x\quad \csc x$

$\arcsin x,\quad \arccos x,\quad \arctan x,\quad \cdots$

- **初等函数**

初等基本函数经过有限次四则运算和复合而成

例如：双曲函数

$$\mathrm{sh}x \overset{def}{=} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\quad \mathrm{ch}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\quad \mathrm{th}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

1.2.5 隐函数、参数和极坐标表示的函数

□ 隐函数

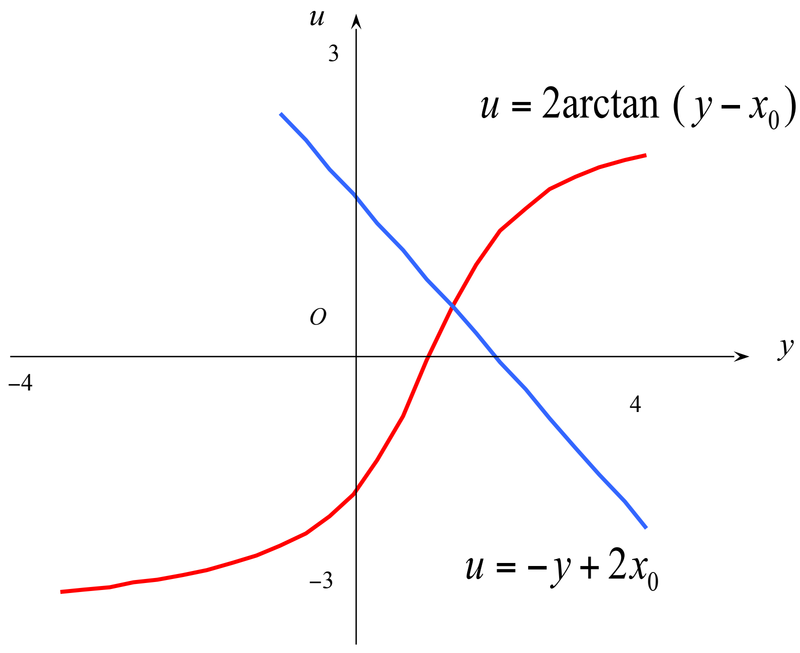
方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数

$$x^2+y^2=9 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{在 } y \quad 0 \text{ 确定 } y=\sqrt{9-x^2} \\ \text{在 } y \le 0 \text{ 确定 } y=-\sqrt{9-x^2} \end{array}$$

$2x-y=2\arctan(y-x)$ 虽然不能得出表达式，同样可以确定函数

$$y=f(x)$$

任意给 x_0，可以确定唯一 y_0



- **参数方程**表示的函数

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in I$$

有时对一个 x，对应的 y 不唯一

□ **极坐标**表示的函数

$$r = r(\theta)$$

与直角坐标的关系（在 1 - 1 情况下）

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$(若r(\theta)以2\pi为周期，讨论可在0 \to 2\pi或 -\pi \to \pi)$

- 怎样考察极坐标表示函数的图像

周期性 周期T，图形绕原点角度T 重复

对称性 以 $-\theta$ 代θ 方程不变，图形关于极轴上下对称

以$\pi-\theta$ 代θ 方程不变，图形关于$\theta = \pi/2$ 左右对称

描点作图

例 考察下列极坐标表示函数的图像

1) $r = a\cos\theta$

2) $r = a(1-\cos\theta)$

3) $r^2 = a^2\cos 2\theta)$

H.W

习题 1

8(2)(4)(7)，9(2)(4)，10(2)，

11，14，15(1)(2)(5)

17，22(2)(4)(6)，24，25(1)(2)(3)

乐经良

本章要点

- 函数概念

$$y = f(x),\ x \in D$$

其中 x 仅是一个符号，可代之以任何量Δ，只要$\Delta \in$ D

- 复合函数的复合过程：链式结构
- 极坐标形式的函数

$$r = \Phi(\theta)$$

了解 θ 和 r 的几何意义，与直角坐标系的关系，图形 的描绘