Chap 2

极限与连续

乐经良

Chap 2.1

数列的极限

乐经良

2.1.1 数列

- 数列 定义域为 $\mathbf{N}_+$ 的函数

$$x_n = f(n)\ ,\ n \in \mathbf{N}_+$$

写作 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 或 $\{x_n\}$

↑(第 n 项)

- 可以讨论单调性、有界性

例 试证以下数列单调增加且有界

1) $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (n重根号)

2) $x_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}$ (n重根号, $a > 0$)

乐经良

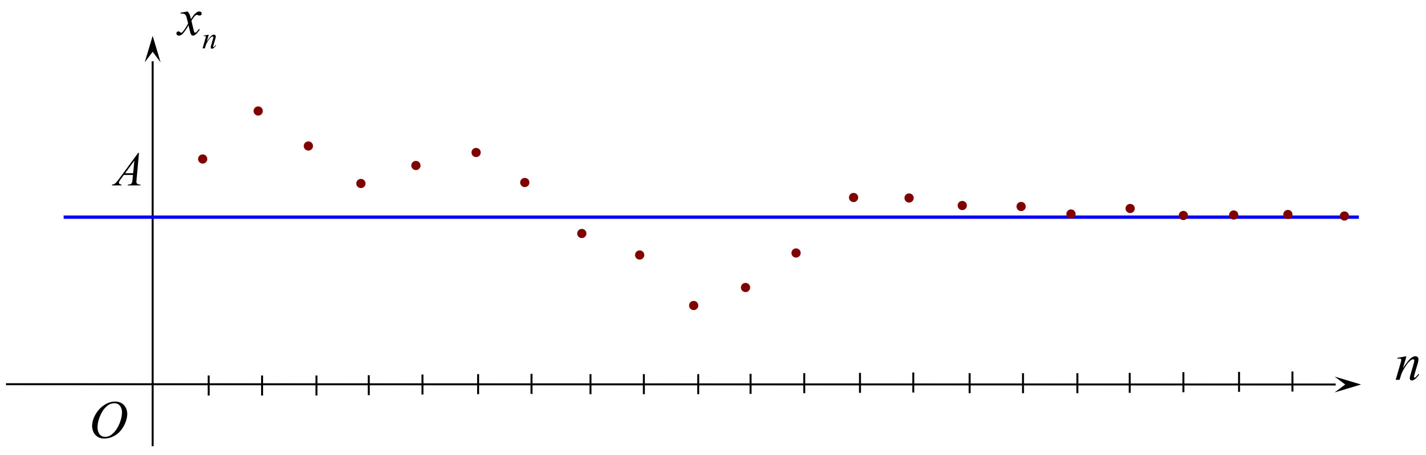
2.1.2 数列的极限

- **例子** 考察数列

$$(1)\ x_n = \frac{1}{n};\quad (2)\ x_n = \frac{(-1)^n}{n};\quad (3)\ x_n = \frac{[1+(-1)^n]}{2n}$$

数列的变化趋势：无限地接近零，与零的距离任意小

> 图形



乐经良

➢ 如何给出这种变化趋势的数学描述?

接近在数学上用距离表示，即 $|x_n - A|$ 可任意小

或者说要多小就能有多小

■ **定义** 对 $\{x_n\}$ ，$\exists\ A \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbf{N}_+$ ：

当 $n > N$ 时,

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

则称 A 为 $\{x_n\}$ 的极限，或称 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A \ (n\to\infty)$$

乐经良

若不存在这样的数 A，则称 $\{x_n\}$ 无极限或发散

- 1）ε 是任意的，但在确定 N 时又是相对固定的；

  N 是依赖 ε 的，但不惟一

  2）无论 ε 多么小，数列从某项 x_N 以后的项都在邻域 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内，即在此邻域外只有有限项

- 数学之美 准确而简洁，能体会吗?
- 定义的形成在数学史上有极重大的意义
- 数学大师 Cauchy

柯西 Augustin Louis Cauchy

（1789年－1857年）

- 19世纪最卓越的数学家之一，论文800余篇(26卷)，数量仅次于Euler
- 给出了微积分一系列基本概念的严格定义，包括极限定义(但 $\varepsilon-\delta$ 方法经过维尔斯特拉斯的加工)
- 1805年进入高等工业学校学习，打算成为土木工程师，因数学上的成就被推荐为科学院院士
- 数学中以他名字命名的概念、公式和定理不下数十个
- 在信仰上执著坚守，不言放弃

乐经良

- 现代分析之父　**魏尔斯特拉斯**

(Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm　1815 − 1897)

- 函数论的奠基者，以 $\varepsilon-\delta$ 语言，系统建立了实分析和复分析的基础
- 1834 年在波恩大学学法律和财政后转学数学，在中学教写作与体育， 41 岁才任柏林大学讲师
- 卓越的教师，讲课朴实无华，循循善诱；柏林大学第一个数学讨论班，学生中约 100 名正教授，包括柯瓦列夫斯卡娅

例　若 $x_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$，验证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

例 若$|q|<1$，验证：$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

- 求 N 的过程，是求解不等式吗?

例 $x_n = \dfrac{n^2}{3n^2-2n+6}$， 证：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$

- **适当放大法**

对 $\forall \varepsilon > 0$，要使 $|x_n - A| < \varepsilon$，可将 $|x_n - A|$ 适当放大为 $G(n)$（有时放大在条件 $n > N_1$ 下进行），然后求出 $G(n) < \varepsilon$ 的充分条件 $n > N_2$，则有 $n > \max(N_1, N_2)$ 时

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

乐经良

例 试证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>1)$

1)

2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$

习题 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

H.W 习题 2

2（2）（3） (6) 5

补充题

2.1.3 无穷小与无穷大

■ 无穷小

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 则称 $\{x_n\}$ 为无穷小 (数列)

例如 $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = q^n$ $(|q| < 1)$ 均为无穷小

➤ 命题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \{x_n - A\}$ 为无穷小 $\Leftrightarrow |x_n - A|$ 为无穷小

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = 0$

无穷小的和 (差) 是无穷小

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\{y_n\}$ 有界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

无穷小与有界量之乘积是无穷小

- 无穷大

对 $\{x_n\}$ ， $\forall\ M > 0$, $\exists\ N \in \mathbf{N}_+$ ： 当 $n > N$ 时 $|x_n| > M$， 则称 $\{x_n\}$ 为无穷大，

记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

➢ 试写出 $\{x_n\}$ 为正无穷大 $(+\infty)$ 的定义

乐经良

- 无穷大与无穷小的关系

  若 $x_n \neq 0$, 则 $\{x_n\}$ 为无穷大 $\Leftrightarrow$ $\{1/x_n\}$ 为无穷小

- 问题 无穷大与无界一样吗 ？

考察例子

$$x_n = n\sin\frac{n\pi}{2}$$

H.W 习题 2 8(2) 9(1) 10

乐经良

本节要点

- 什么是数列的极限

  至少了解其含义

- 什么是无穷小和无穷大
- 命题

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(x_n - A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left|x_n - A\right| = 0$$

无穷小的和 (差) 是无穷小

无穷小与有界量之乘积是无穷小

乐经良