



Chap8 — 2

多元函数的极限与连续

8. 2. 1 二元函数的极限

设二元函数定义在 P_0 点的去心邻域，若

存在数 A ， $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得当 $0 < d(P, P_0) < \delta$ 时，

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

称当 $P \rightarrow P_0$ 或 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时， $f(x, y)$ 的极限为 A

记为

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

■ 二元函数极限与一元函数极限类似

1. (x,y) 趋近点 (x_0, y_0) 时函数 $f(x,y)$ 变化的定量趋势
2. 有类似的性质和运算法则

■ 存在与一元函数的区别

平面上 $P \rightarrow P_0$ 有无穷多方向，且采取的路径也是

任意的，既可取直线，也可取曲线；无论从何种

方向或沿何种路径，只要 P 点与 P_0 的距离充分

小，都必须有 $|f(P) - A|$ 充分小

例 讨论下列极限的存在性, 且在存在时求其值

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}}$$

- 注意与累次极限不同

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{与} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

H.W 习题 8

$$2 \quad (2) \quad (4) \quad (6)$$

$$3 \quad 4 \quad (1) \quad (3) \quad (4)$$

8. 2. 2 二元函数的连续性

一. 定义

若二元函数 $f(x,y)$ 满足

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续, 也称 (x_0, y_0) 是

f 的连续点. (不连续, 称为间断)

若二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上每一点都连续,

则称 f 在区域 D 上连续, 或称 f 是 D 上的连续函数,

记为

$$f \in C(D)$$

- 二元连续函数的和差积商（分母不为零）

仍为连续函数；其复合函数是连续函数

- 二元初等函数在其定义域内都是连续的

（间断点在没有定义的孤立点、线处）

例 讨论函数的连续性：

$$(1) \quad f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y)}{xy}$$

$$(2) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

例 求极限

$$(1) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \cos(x^2 + y^2)$$

$$(2) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{e^{xy} - 1}{x}$$

$$(3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(1 - x^2 - y^2\right)^{\csc(x^2 + y^2)}$$

二. 闭区域上的二元连续函数的性质

与一元情况类似

■ 有界性

■ 最值性

■ 介值性

H.W

习题 8

6 (1) (2) (4)

7

8 (1) (3)