Chap 11

级 数

Chap 11 － 1

级数的概念和性质

11.1.1 级数的概念

设 $u_1, u_2, \ldots, u_n, \cdots$ 是一个数列，则和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为**无穷级数**（简称**级数**），和式中的每一项称为级数的**项**，u_n 称为级数的**通项**(或**一般项**)，而

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为级数的前 n 项**部分和**

若存在 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，且收敛于 S， S 称为级数的**和**;

记为
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，称

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = S - S_n$$

为级数的余和，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

例　讨论级数的收敛性

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a > 0)$　　2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

11.1.2　级数的基本性质

一．基本性质

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛到 S， 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛到 T， 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n \pm \beta v_n)$ 收敛到 $\alpha S + \beta T$ （线性）

2. 将级数增加、删减或改换有限项，不改变级数的敛散性

3. 若级数收敛于和 S， 则将相邻若干项相加作一项而组成的新级数仍然收敛于 S.

二． 级数收敛的必要条件

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$ （一般项是无穷小）

注意：

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \text{ 或不存在} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \text{ 不一定能导出 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

例 讨论级数的敛散性

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^n$　　2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

H.W

习题 11

2　　3 （1） （3） （5） （8）

3　　（6） （7）

Chap 11 – 2

正项级数的敛散性

11.2.1 正项级数

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 u_n 0, 则称之为正项级数

显然正项级数的部分和 $\boldsymbol{S_n}$ 单调增加， 因此有

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\xleftrightarrow{\text{充分必要条件}}$ 部分和 S_n 有界

例 讨论 $\boldsymbol{p}$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性

11.2.2　正项级数敛散性判别法

一．比较判别法

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且

$$u_n \le v_n$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散}$$

例　讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[3+(-1)^n]^n}$ 的敛散性

比较判别法（极限形式）

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$$

则有

1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散;

2) 当 $l = 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

3) 当 $l = +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

例　讨论下列级数的敛散性

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3-n+1}}$　　2) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{2}{n})$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^p\frac{\pi}{n}$　　4) $\sum_{n=1}^{\infty}a^{\ln\frac{1}{n}}\ (a>0)$

二． 比值判别法

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, 则

1) 当 $0\le l<1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

2) 当 $l>1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

例　讨论下列级数的敛散性

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$　　2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{3^n-2}$　　3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}\ (a>0)$

三．根值判别法

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, 则

1) 当 $0 \le l < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

2) 当 $l > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

例　讨论级数的敛散性

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(a+\frac{1}{n})^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\sqrt{(2n^2+3)^n}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos^2 n}{2^n}$

例　若 $a_n 0$，且数列 $\{na_n\}$ 收敛，试证：

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

H.W

习题 11

5　（1）（2）（3）（4）（5）
（8）

6（2）（3）（5）（6）（7）

（8）（9）

10　(1)　(3)　（4）

- 比值和根值判别法实际上可看作是在将级数与等比级数作比较，当所求极限存在时，可称级数是**拟等比级数**

- 比较判别法是将一般性 u_n ， v_n 作无穷小比较通常我们取 v_n 为 $1/n^p$ ，因此这时实际上我们在分析无穷小的阶

四．积分判别法

若非负函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 时单调减少，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项 $u_n = f(n)$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 有相同的敛散性

例 讨论 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q}$ 的敛散性， 其中 $q>0$

例 讨论 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)\ln^2 \ln n}$ 的敛散性

H.W

习题 11

7（2）（3）（4）

9

Chap 11 - 3

任意项级数的收敛性

11.3.1 交错级数收敛性的判别

一．交错级数

各项正负相间的级数称为交错级数，其形式为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$（其中 $u_n>0$）

二．Leibniz 判别法

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$（其中 $u_n>0$）满足

(1) $u_{n+1}\le u_n$，(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$; 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

且其余和的绝对值小于 u_{n+1}，即 $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k\right|<u_{n+1}$

例　判别下列级数的敛散性：

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}\ (\alpha>0)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

11.3.2　　绝对收敛与条件收敛

一．　绝对收敛与条件收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**；

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**

命题　　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

例　判别级数敛散性，并指出收敛类型

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$　　　2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n}$

H.W

习题 11

12　(1)　(2)　(4)　(5)

13　(1) (2) (3) (4) (6)