Chap 5.3

微积分基本定理

我们面临的问题

不用定义的方式，
能否计算定积分？

5.3.1 原函数与变上限积分

- **原函数**

对函数 $f(x)$, 若存在 $F(x)$ 使得

$$F'(x) = f(x),\ x \in I$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 的一个原函数

例 $(x^3)'=3x^2 \Rightarrow x^3$ 是 $3x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 的一个原函数

- 原函数不惟一
- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

$\Rightarrow F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的全体原函数

■ 变上限积分

若 $f(x)\in R[a,b]$，定义函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b]$$

为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的变上限积分

变上限积分的性质

- **连续性**

若 $f(x)\in R[a,b]$, $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

➢ 可微性

若 $f(x) \in C[a,b]$, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 可导， 且

$$\Phi'(x) = f(x)$$

例 求下列函数的导数

(1) $f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$ (2) $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$

(3) $f(x) = \int_{x^2}^0 \ln(1+t^2)dt$

(4) $f(x) = \int_{x^2}^{e^x} g(t)dt$, 其中$g(x)$连续

例　$y=y(x)$由方程

$$\int_1^y \frac{e^{2t}}{t}dt+\int_{2x}^1 \cos t^2 dt=e$$

确定，试求y 的导数$y'(x)$

例　求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan\sqrt{t}\,dt}{\ln(1+x^3)}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x} x\arctan\sqrt{t}\,dt}{2x^{\frac{5}{2}}}$

H.W 习题 5

11 (3) - (8)

12 13 14

15

5.3.2 微积分基本定理

（*Newton-Leibnitz* 公式）

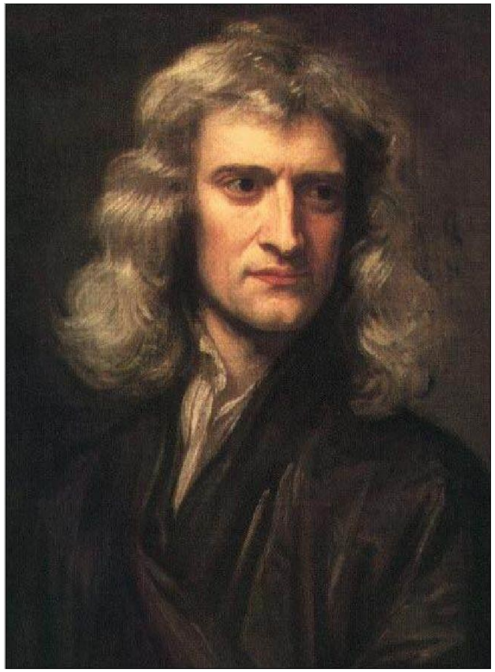
$$\left.\begin{array}{l} f(x)\in C[a,b] \\ F'(x)=f(x) \end{array}\right. \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

- 引进写法

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$$

- 说明求定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值归结为求出 $f(x)$ 的一个原函数

■ 艾萨克 · 牛顿 *Sir Isaac Newton*



（英格兰 **1643 － 1727** 年）

- 科学史上最有影响力的人

  物理学家 数学家 天文学家

  哲学家

- 兴趣广泛 思考深刻

  我把问题时时放在心头，直到一点曙光逐渐破晓终而变成阳光普照

- 专心于科学研究到痴情

- 为人谦虚、低调

大部分著作在朋友极力劝告和请求下发表

If I have seen further it is by standing on ye shoulders of Giants.

"我不知道世上的人對我會怎麼看；但自認為我不過像一個在海邊玩耍的孩童，不時為拾到幾塊異乎尋常地美妙的卵石或貝殼而沾沾自喜，對於展現在我面前的浩翰的真理海洋，卻全然沒有發現。"

- 性格内向　独身一生　永垂史册

让我们欢呼，曾经存在过这样伟大的人类之光

■ 莱布尼兹 *Leibniz*

（德国 1646 ～ 1716 ）

- 微积分的另一创始人
- 数学史上最伟大的符号学者
- 把一切领域的知识作为自己追求的目标

研究涉及数学、物理、逻辑、生物、化学、地理解剖学、航海学、地质、语言、法学、哲学、历史和外交等。

- 思想活跃 重视交流

莱布尼兹是乐于看到自己提供的种子在别人的植物园里开花的人

- 一生未婚 未当教授 几乎不进教堂