Chap 10 - 2

第二类曲线积分和曲面积分

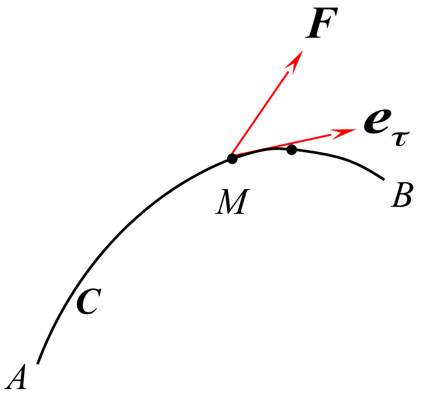
10.2.1 向量值函数曲线积分的概念

一．例子与概念

问题

设在光滑平面曲线 $\boldsymbol{C}$ 上有连续的作用力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ $=(P(x,y),Q(x,y))$，求 $\boldsymbol{F}$ 作用于 $\boldsymbol{C}$ 上质点从起点 $\boldsymbol{A}$ 移动到终点 $\boldsymbol{B}$ 所做的功为多少?

考察质点在 $\boldsymbol{C}$ 上任一 $\boldsymbol{M}$ 处移动一段弧微元所作的功



$$dW=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\tau\,ds$$

$$\Rightarrow\qquad W=\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\tau\,ds$$

由于单位切向量 $\boldsymbol{e}_\tau = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{e}_\tau \, ds = (dx, dy)$$

于是

$$W = \boxed{\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_\tau \, ds = \int_C P dx + Q dy}$$

（给出两类曲线积分关系）

向量函数 $\boldsymbol{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ 在曲线 C 切方向 (A 到 B) 上投影的曲线积分写成

$$\int_C P dx + Q dy$$

称为向量值函数曲线积分或第二类曲线积分

记 $\boldsymbol{r} = (x,y)$，可将其写为 $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r}$

（向量形式）

二． 性质

与第一类曲线积分不同，第二类曲线积分与曲线方向有关

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$$

还有与其他积分类似的性质，例如线性与可加性

注意

1）两种曲线积分形式的不同

2）$\boldsymbol{Q}=0$ 或 $\boldsymbol{P}=0$, $\int_C Pdx$ 或 $\int_C Qdy$ 仍是第二类

例　试将第二类曲线积分

$$\int_C x^2 dx - xy dy$$

化为第一类曲线积分，其中 C 是由（-2, 0）到（2, 0）的上半圆周 $y=\sqrt{4-x^2}$

利用 $\int_C P dx + Q dy = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\tau\, ds$ ，注意切向量 $(1, y'(x))$

单位化可得 $\boldsymbol{e}_\tau$

H.W　习题 10　10

10.2.2 向量值函数曲线积分的计算

若曲线 $\boldsymbol{C}$: $\boldsymbol{AB}$ 为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

起点 $\boldsymbol{A}$ 对应 α，终点 $\boldsymbol{B}$ 对应 β

考察 $\int_C P dx + Q dy = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_\tau \, ds$，由于

$$\boldsymbol{F} = (P(x, y), Q(x, y)) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$$

$$\boldsymbol{e}_\tau \, ds = (dx, dy) = (x'(t)dt, y'(t)dt)$$

故得计算式

$$\boxed{\int_C P dx + Q dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt}$$

例　计算曲线积分

$$I=\int_C 2xy\,dx+x^2dy$$

C 是由 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的如下曲线

(1) $y=x$; (2) $y=x^3$;

(3) 由 O 经 $B(1,0)$ 到 A 的折线

例　计算 $I=\int_C (2x+3y)dx+(x-3y)dy$

曲线 C 为起点 $A(1,0)$ 到终点 $B(-1,0)$ 的上半圆周

$x^2+y^2=1\ (y\quad 0)$

例　平面上指向原点的力大小为$\sqrt{x^2+y^2}$，求其使质点沿曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a\,(a>0)$ 由点 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},0)$ 到 $\boldsymbol{B}(0,\boldsymbol{a})$ 所做功

思考或猜测

空间曲线 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{AB}:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}),\ z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$

（起点 A 对应 α，终点 B 对应 β），则第二类曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ 如何引进和计算

例 计算 $\int_L (y+5z)dx - x^2dy - 4y^2dz$

曲线 L 是 $x=t, y=t^2, z=t^4$ 由（1, 1, 1）到（0, 0, 0）的一段弧

H.W 习题 10

11

12 (2) (3) (4)

14 15

10.4.2　向量值函数曲面积分

一．双侧曲面

设 S 是一光滑曲面， n 是起点 P 在 S 上的任一法向量，若 P 在 S 上沿任何曲线连续变动而不越过曲面边界回到起始位置时，法向量 n 总是保持原来的指向，则称 S 是双侧曲面　（**Möbius** 面不是双侧曲面）

常选定双侧曲面 S 一侧方向为正向，称为正侧，记为 S^+；而封闭曲面通常取外侧为正侧

二．概念与性质

1. 例子与概念

设均匀流体具有连续的速度 $\boldsymbol{v}=(P,Q,R)$, 这里 $\boldsymbol{P, Q, R}$ 是 $\boldsymbol{x, y, z}$ 的函数，流体自曲面 $\boldsymbol{S}$ 的负侧流向正侧，求单位时间通过 $\boldsymbol{S}$ 的流量

在曲面微元 $\boldsymbol{dS}$ 上，有

$$d\Phi=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}^0 dS$$

（$\boldsymbol{n}^0$ 是单位外法向量）

$$\Rightarrow \quad \Phi=\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}^0 dS$$

若去掉问题的物理背景，对向量函数 $\boldsymbol{F}=(P, Q, R)$

可以引进积分

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\underbrace{\boldsymbol{n}^0 dS} \xrightarrow{\text{（也记为）}} d\boldsymbol{S}$$

$\boxed{\text{定侧曲面微元}}$

记单位正侧法向量 $\boldsymbol{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 那么

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^0 dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

而 $\cos\gamma dS$ 是 $\boldsymbol{dS}$ 在 $\boldsymbol{xy}$ 平面上的投影，是 $\boldsymbol{xy}$ 平面上面积微元，可记为 $\boldsymbol{dxdy}$ ，同样 $\cos\alpha dS, \cos\beta dS$ 分别记为 $\boldsymbol{dydz}$ 和 $\boldsymbol{dzdx}$, 于是又可将上述积分记为

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^0 dS = \iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

（这里的 $\boldsymbol{S^+}$ 指出 $\boldsymbol{n^0}$ 的方向，即积分在哪侧进行）

上式的右端形式称为向量值函数曲面积分或第二类曲面积分

从而

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \\ &\qquad = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS\end{aligned}}$$

（两型曲面积分的关系）

2. 性质

第二类曲面积分与在曲面哪一侧积分有关

$$\iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

（试提出其他性质）

三． 计算法

若曲面方程为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

则其法向量为 $\pm(A,B,C)$，故单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$$

而 $dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$ ，导出计算式

$$\iint_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_{D}(PA+QB+RC)dudv$$

（其中正负号选择依据积分一侧的法向量而定）

特别当 $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$

$$\boxed{\iint_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_{D_{xy}}(-Pz_x-Qz_y+R)dxdy}$$

则其法向量为 $\pm(A,B,C)$，故单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$$

而 $dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$ ，导出计算式

$$\iint_{S^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_{D}(PA+QB+RC)dudv$$

（其中正负号选择依据积分一侧的法向量而定）

特别当 $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$

$$\boxed{\iint_{S^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_{D_{xy}}(-Pz_x-Qz_y+R)dxdy}$$

例如

$$\iint_{S^+} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

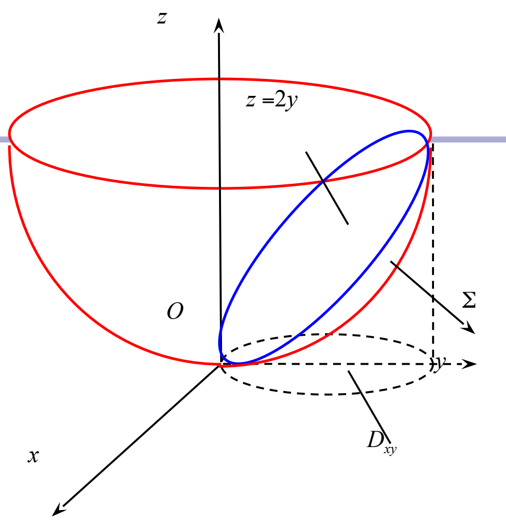
例　计算$I = \iint_S xyzdxdy$，其中 $\boldsymbol{S}$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的部分外侧：1) $z \quad 0$; 2) $x \quad 0, y \quad 0$

例　计算曲面积分

$$I = \iint_\Sigma 3x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 2\boldsymbol{y}$ 所截下部分的下侧

图形如右图



例　流速 $\boldsymbol{v}=(x,2xy,-2z)$ 的流体，求其单位时间经过锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2},(0\le z\le h)$ 的上侧流向下侧的流量

$$\Phi=\frac{5}{3}\pi h^3$$

例　计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

其中 **Σ** 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (R>0)$ 的外侧

H.W

习题 10

16 (1)

17 (3)

(4)

(5)

18 (2)