Chap8 —9

条件极值 —

Lagrange 乘数法

一．问题的提法和解法

在许多极值问题中，函数自变量还要满足一些条件（约束条件），这样的极值称为条件极值

例如求函数

$$u = f(x, y, z)$$

在约束条件

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

下的极值

二．Lagrange 乘数法

引进辅助函数（Lagrange 函数）

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

从其极值的必要条件

$$\begin{cases} f_x+\lambda\varphi_x=0, \\ f_y+\lambda\varphi_y=0, \\ f_z+\lambda\varphi_z=0, \\ \varphi(x,y,z)=0. \end{cases}$$

求出的（$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0$）是可能的条件极值点

例 求椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短

（往年考研题）

$3\lambda x=8\lambda y \Rightarrow$ $x=8y/3$, $\longrightarrow \pm(8,3)/5$

$2x+3y-6=0$ $\longrightarrow$ 无解

$(\lambda=0)$

例 求函数 $f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$ 在椭圆域 $x^2+2y^2\le 3$ 上最大值和最小值．

（往年考试题）

先考虑域内
再考虑边界

条件极值：消去λ，得到 $x=2y$ 或 $x=-y$

注：也可化为广义极坐标，变为一元极值 $x=\sqrt{2}\cos\theta$ $y=\sin\theta$

$$f=4\cos^2\theta+6\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=5+6\sqrt{2}\sin 2\theta+3\cos 2\theta$$

H. W

习题 8

50 （ 2 ） （ 3 ） 54(2) 55(1)(3)

57(1) 58(2)

补充题

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 D

$=\{x^2+y^2\le 4, y \quad 0\}$ 上的最大值和最小值

（往年研究生入学试题）