Chap7 — 5

曲面与曲线

7.5.1 空间曲面

在空间坐标系

点 $\longleftrightarrow$ 坐标 (x,y,z)

曲面 $\longleftrightarrow$ $F(x,y,z)=0$ 曲面方程

例 球心在 (x_0, y_0, z_0) 半径为 $\boldsymbol{R}$ 的球面

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

例 圆柱面横截面半径为 2， 轴线为

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1},$$ 试求圆柱面方程

7.5.2 二次曲面

一. 椭球面

- 方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} \quad (a>0,b>0,c>0\text{半轴})$$

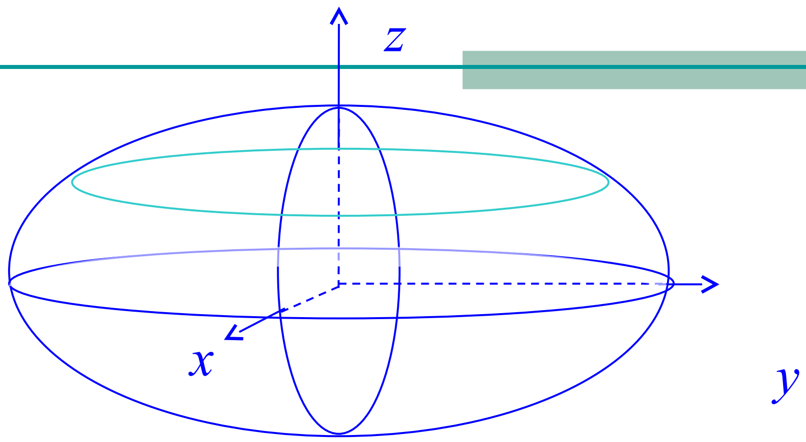
截痕法

通过用平行坐标面的平面去截曲面

所得交线(称为截痕)了解曲面性态

- 简图

利用截痕法易得



- 特点

(1) 有界对称 (2) 被平行坐标面的平面

截得椭圆 例如

被平面 $z=h$ 截得

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases}$$

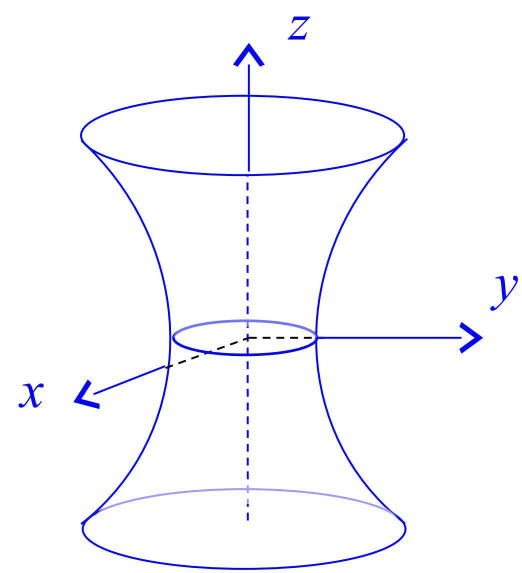
思考：中心不在原点的椭球面方程形式？

二. 单叶双曲面

- 方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

- 简图



- 特点 (1) 对称 (2) 与 xy 面平行的平面截得椭圆,

例如
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$$

与其他坐标面平行的平面截得双曲线，例如

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{b^2} \\ z = h \end{cases}$$

（h 的大小变化时双曲线的变化）

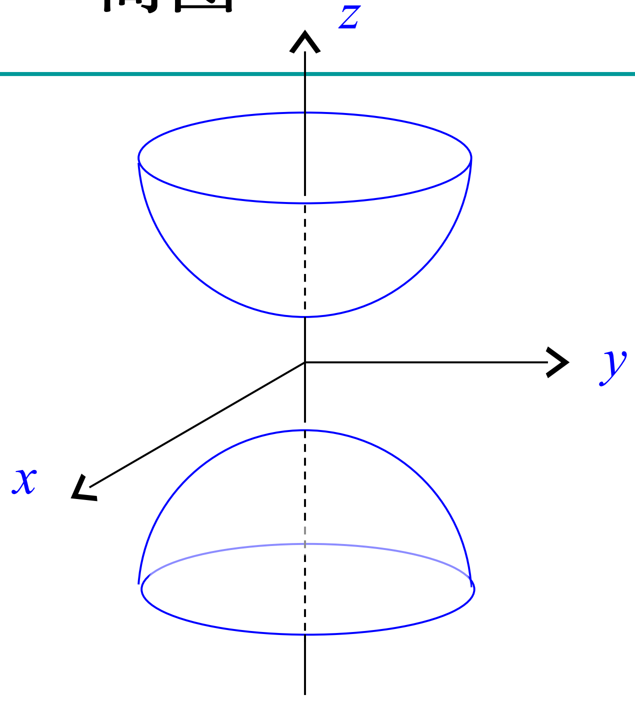
三.双叶双曲面

- 方程

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

（注意三个曲面方程平方项符号的区别）

- 简图



- 特点

(1) 对称，图形分两叶

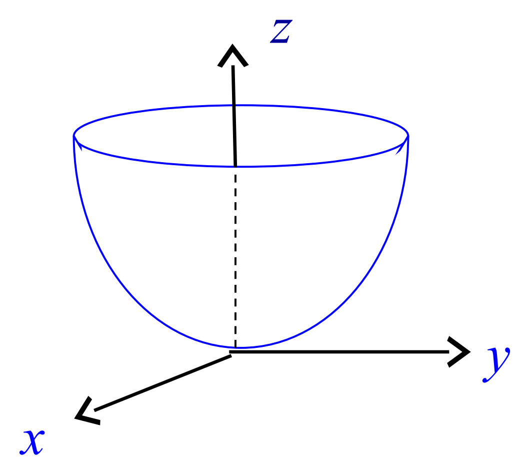
(2) 与坐标面平行的平面

截得双曲线或椭圆

四 . 椭圆抛物面

- 方程

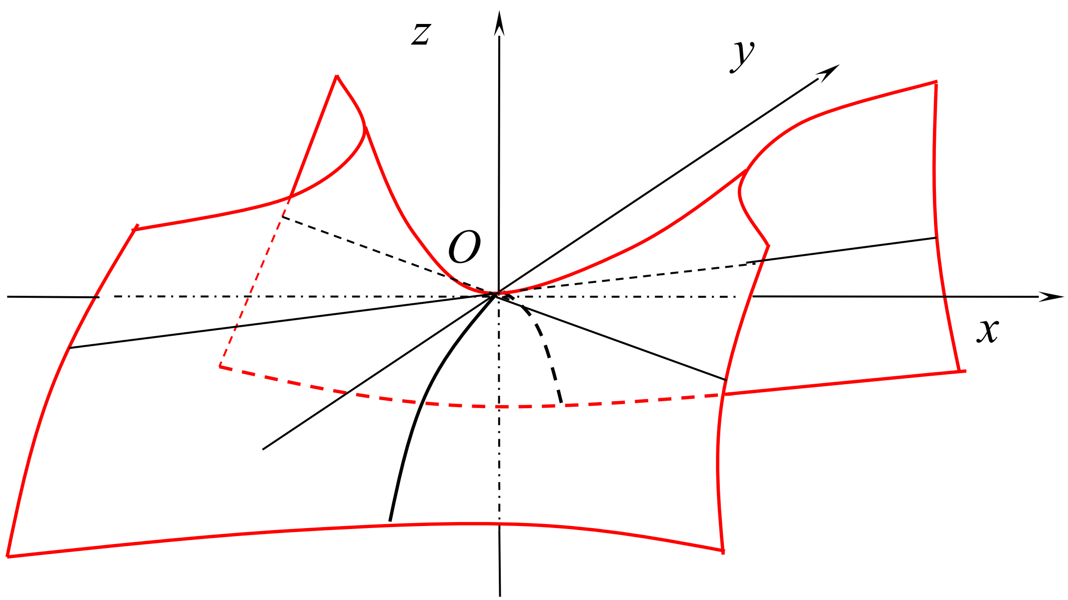
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z}$$



五. 双曲抛物面

方程 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z}$

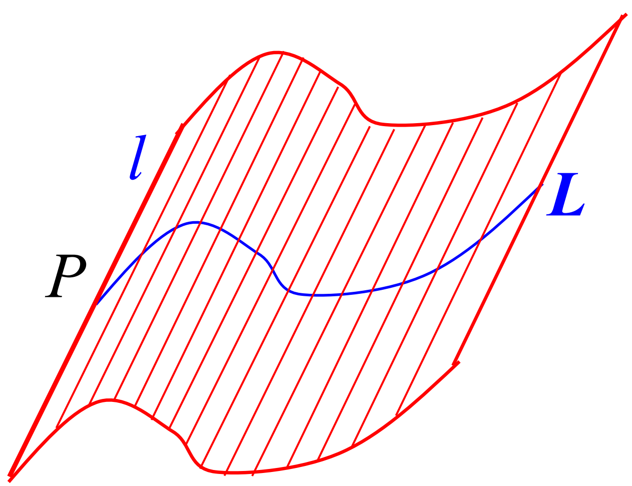
简图



7.5.3 柱面、旋转面和锥面

一. 柱面

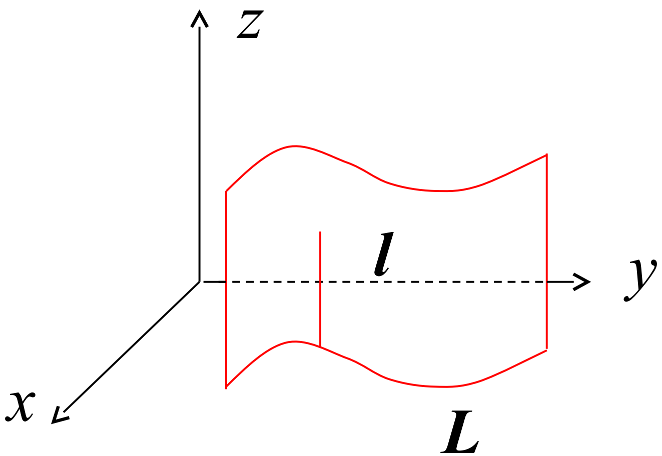
L 是空间曲线 ,l 是过 L 上点 P 的直线 , P 沿 L 移动时与原方向始终平行的直线 l 的轨迹为柱面_



L： 准线

l ： 母线

母线平行坐标轴的柱面



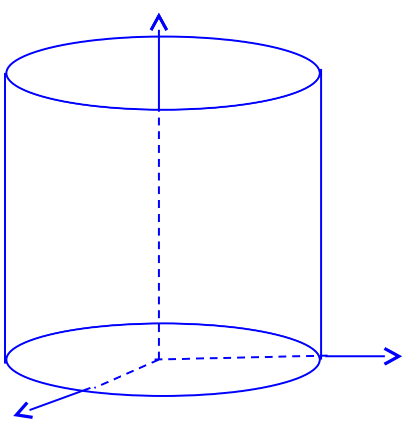
方程的特点

不含某个变量，例如

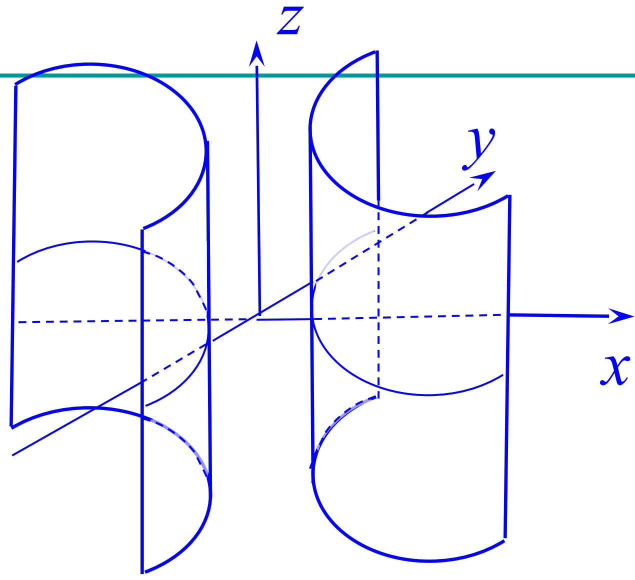
$F(x, y) = 0$ (不含 z)

二次柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

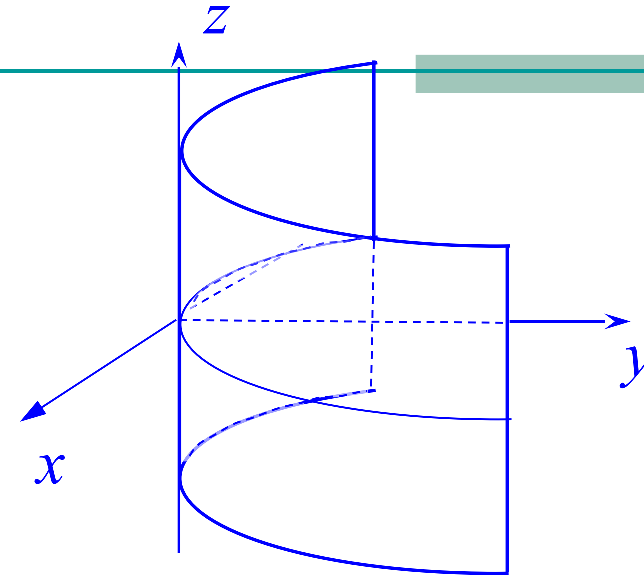


椭圆柱面



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

双曲柱面



$$x^2 = py$$

抛物柱面

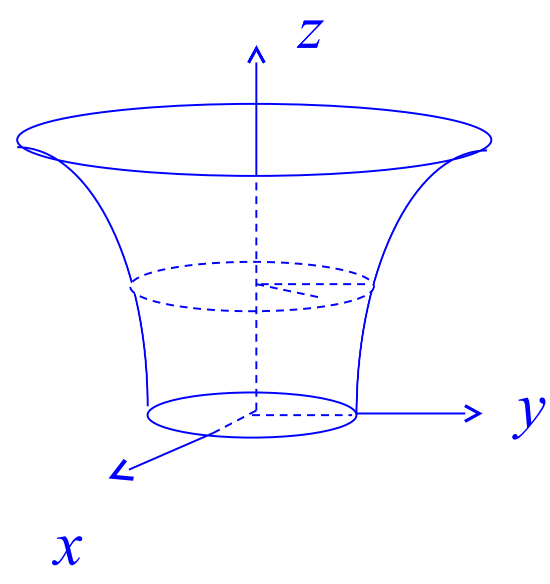
二．旋转面

平面上曲线 L 绕直线 l 旋转一周的轨迹所形成的曲面为旋转面

l : 对称轴 ,L : 子午线

yz 面上的曲线

$$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$



绕 z 轴旋转而成的曲面

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

例　求 yz 面上的双曲线

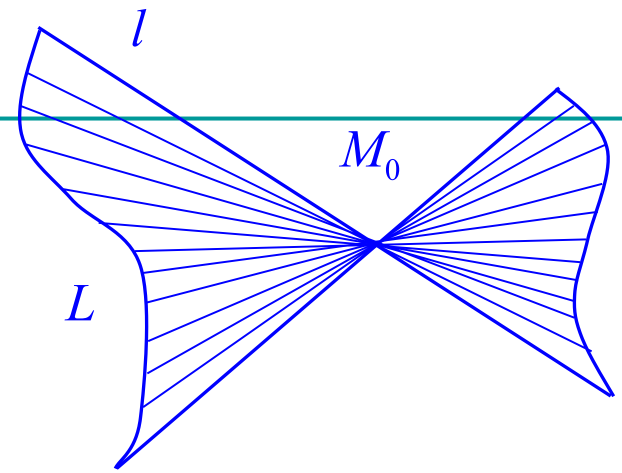
$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

绕分别绕 y 轴、 z 轴旋转所得曲面方程

三. 锥面

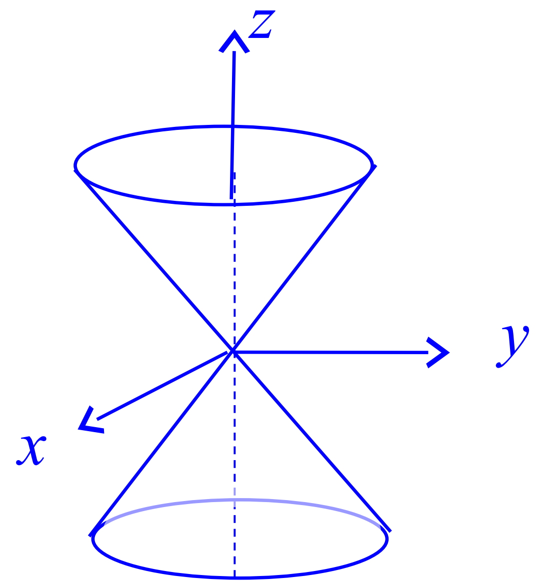
M_0 是曲线 L 之外的定点，直线 l 过 M_0 点且与 L 相交，当交点沿 L 运动时 l 的轨迹形成**锥面**

简图



齐次方程是锥面方程

例如 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$



H. W

49. (1) (2) (4) (5) (6)

((1), (5) 作图)

50. (3) (6) (7) (8) (10)

((6) (7) (10) 作图)

51 52

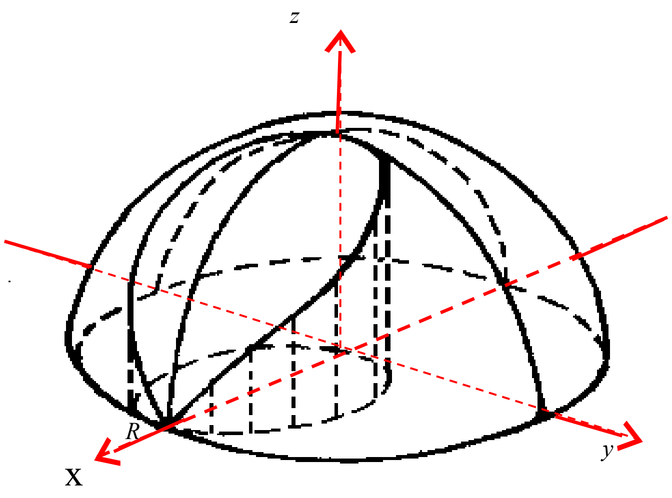
7.5.4 空间曲线

一般方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$ （两个曲面交线）

例　方程

$$\begin{cases} z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=Rx \end{cases}$$



表示球面与圆柱面的交线

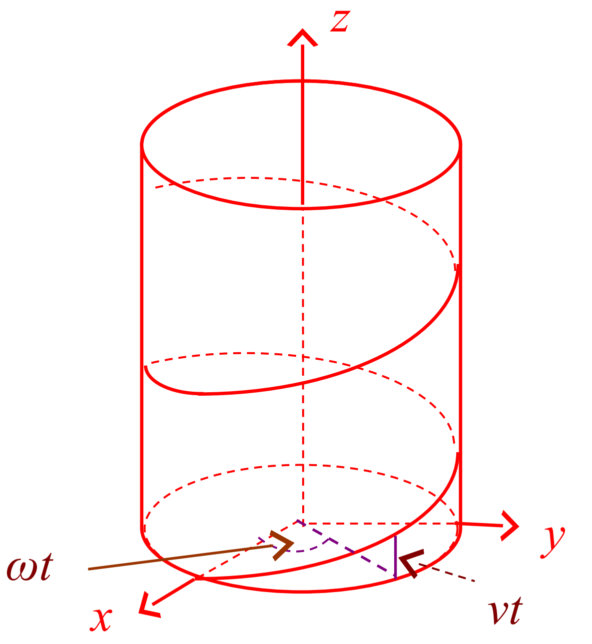
Viviani 曲线

参数方程 (不唯一，依赖参数)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in I \qquad \text{（点的轨迹）}$$

例　螺旋线方程

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$



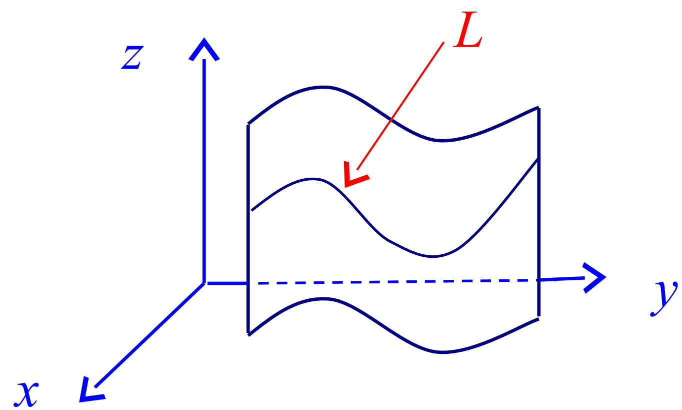
F

7.5.5 空间曲线在坐标面的投影

L 是空间曲线， π 为平面，以 L 为准线，母线垂直于 π 的柱面 Σ 称为曲线对平面的**投影柱面**

Σ 与 π 的交线称为曲线在平面上的**投影**

若 L $\begin{cases} H(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$



可消去 z，得柱面方程

$$F(x,y)=0$$

L 在柱面上，在 xy 面投影 $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

例　求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2x + z - 8 = 0 \end{cases}$

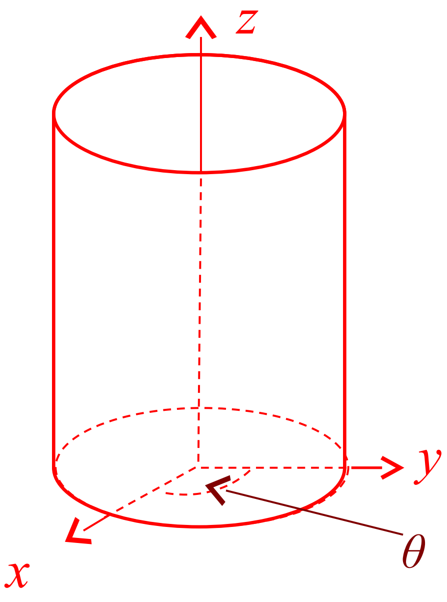
在坐标平面的投影曲线

7.5.6 曲面的参数方程

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases} \qquad s \in I_1, t \in I_2$$

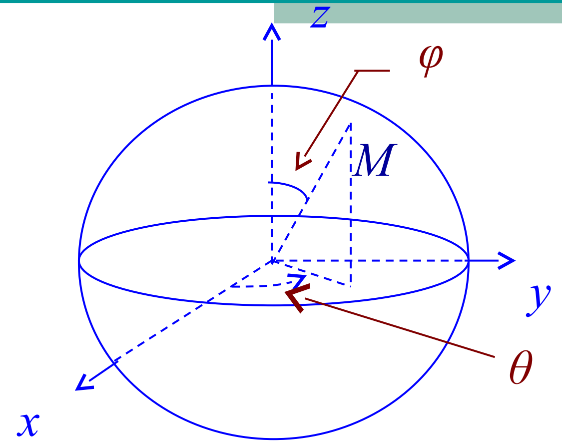
例　椭圆柱面方程

$$\begin{cases} x = a\sin\theta \\ y = b\cos\theta \\ z = \mathrm{c}t \end{cases}$$



例　球面方程

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ x = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$



H. W　习题　7

53 (1)-(3)　54 (1)(3 ）(5)(6)

55 (1)　56(1)(6)