Chap 10 - 3

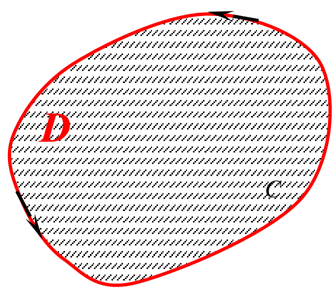
Green 公式

10.3.1 Green 公式

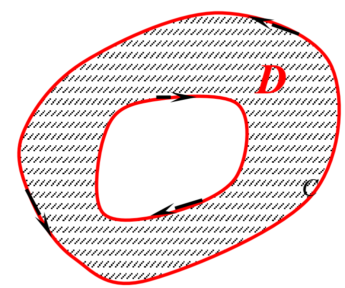
一. 连通区域及其边界方向

若 D 为平面区域，则 D 是**连通**的. 若连通域 D 任意内一条闭曲线所围成的区域都落在 D 内，则称 D 为**单连通**的，否则称 D 为**复连通**的

单连通区域



复连通区域



当点沿区域边界朝一个方向前进时，区域总在它左侧，将此方向规定为闭曲线的正向，记为 C^+ ，与 C^+ 相反的有向曲线记为 C^-

当平面闭曲线是单连通区域的边界时，依显然逆时针方向为其正向．

➢ 闭曲线上的第二类曲线积分未规定方向时，则沿正向积分

二． Green 公式

设函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在有界区域 D 上有连续的偏导数，D 的边界 C 是分段光滑曲线，则有公式

常常写成符号 $\oint$

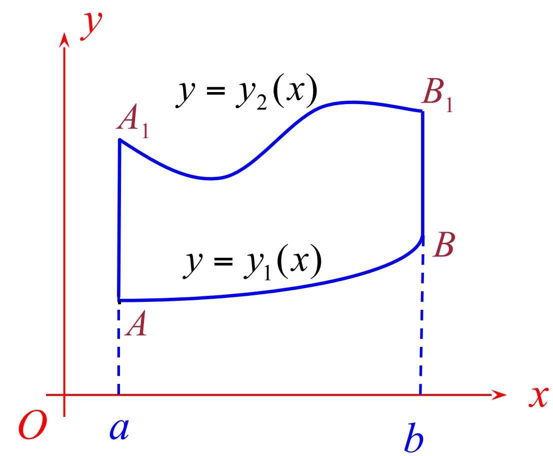
$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

（二重积分与在其边界上的第二型曲线积分的关系）

证明的思路

1）先考虑区域 D 是 x 型正规区域的情况

$$D=\{(x,y)\,|\,y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$$

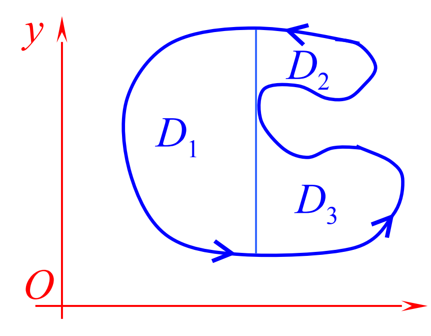


证

$$\oint_C Pdx=-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

2）再考虑 D 为一般区域

将 D 分割成几个正规区域



例 计算 $I = \oint_C (y - x)dx + (3x + y)dy$

其中曲线 $C: x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$

例 计算

$$I = \int_{AO} (e^x \sin y - 4y + x)dx + (e^x \cos y - 3)dy$$

AO **是由** $A(a, 0)$ **到** $O(0, 0)$ **的上半圆周** $x^2 + y^2 = ax$

$(y \quad 0)$

例 计算星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi]$

所围面积

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\oint_{C^+} x dy - y dx}$$

例　计算积分曲线

$$\oint_{C^+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

其中 C^+ 是包围原点的任一正向闭曲线

Green　公式的向量形式

$\boldsymbol{F} = (u(x,y), v(x,y))$　　$\boldsymbol{n}^0$ 为 C^+ 的单位外法向量

利用切向量 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}^0 = (\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$

$$\boxed{\oint_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}^0 ds = \iint_D \nabla \cdot \boldsymbol{F} d\sigma}$$

H.W

习题 10　　　19(2)　20　(2)(3)(5)(7)

补充题　计算积分

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$$

其中 L 是以 $(1, 0)$ 为中心，半径 $R>1$ 的取逆时针方向的圆周

（2000 年考研试题）

10.3.2 平面曲线积分与路径无关的条件

设函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 上在单连通区域 D 有连续的偏导数，则下面的四个条件互相等价：

（i） **在 D 内的任一条逐段光滑的闭曲线 C 上**

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0$$

（ii） **在 D 内任一曲线积分 $\int_C Pdx + Qdy$ 与路径无关**

（iii） $Pdx+Qdy$ **是某个函数 u 的全微分，即**

$$du = Pdx + Qdy$$

（**此时称** $u(x,y)$ **是** $Pdx + Qdy$ **的原函数**）

（iv） 在 D 内恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

例 计算积分 $\int_{AB} 2e^{2x}\cos y dx - e^{2x}\sin y dy$, 其中 AB 是上半椭圆 $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 由 A (0, 0) 到 B (2, 3) 的弧

例 设积分 $\int_C xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 与路径无关，其中 φ 有连续导数，$\varphi(0) = 0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$

（ 1989 年考研试题 ）

H.W

习题 10

21 (3) （**该题符号有错，应为** $(x-e^{-x}\cos y)$

23 (1) (3)

24 25

10.3.3 全微分求积（全微分方程）

设函数 **$P(x,y)$,$Q(x,y)$** 上在单连通区域 **D** 有连续**导数，且**

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

则 $Pdx+Qdy$**是某个函数 u 的全微分**

$$\boxed{u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy}$$

（**u 的求法**）

例 $(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$**是否某函数的全微分，若是，求出一个原函数**

原函数有另一种求法

例 $du = e^{2y}dx + (1 + 2xe^{2y})dy$, **求** u

若 $\boldsymbol{P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy}$ **是某二元函数的的全微分，称方程**

$$Pdx + Qdy = 0$$

为全微分方程

求出原函数 $\boldsymbol{u}$ **，则解为** $\boldsymbol{u = C}$

若 $\boldsymbol{P(x,y)}\,\mathrm{dx}+\boldsymbol{Q(x,y)}\,\mathrm{dy}$ **不是某二元函数的的全微分，方程** $Pdx + Qdy = 0$ **的解法：**

求出积分因子 μ，使得方程化为

$$\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0$$

成为全微分方程

- 常用积分因子 $\dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{y^2}, \dfrac{1}{xy}, \dfrac{1}{x^2y^2}, \dfrac{1}{x^2+y^2}$
- 组合拼凑法

例 求解方程 1) $(x-\sqrt{x^2+y^2})dx = -ydy$

分组结合凑成全微分，在过程中观察需要乘何因子

$$(xdx+ydy)-\sqrt{x^2+y^2}dx=0$$

$$\Rightarrow\ d(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2}dx=0$$

乘什么使得后一项成全微分，前一项还是全微分？若将 x^2+y^2 看作 u，应乘以 $\varphi(u)$

事实上只要各组都凑成全微分，方程就解出来了

2) $y(1+xy)dx+x(1-xy)dy=0$

H.W 习题 10

22 (2) (3)

26 (1) (2) (3) (4)