Chap 2.3

数列极限存在的判别准则

2.3.1 夹逼准则

- 若 $\exists N$, 当 $n > N$, $y_n \le x_n \le z_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

> 注意 $A=0$ 的情况

例 求下列数列的极限

$$(1)\ x_n = \frac{10^n}{n!};\quad (2)\ x_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n}$$

$$(3)\ x_n = \sqrt[n]{1^4 + 2^4 + \cdots + n^4}$$

(4) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{2}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}\right)$

例 $x \quad 0, f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

H.W

习题 2

13 (1) (2) (3)*

14　15

2.3.2　单调有界数列极限存在准则

- 若数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界，则 $\{x_n\}$ 有极限
  - 想一想　这个数列的极限是哪个数?

就找到了证明方法

- $\{x_n\}$ 单调减少有下界也必有极限

例　考察　$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}$　（ n 重根号）

例　设$x_1 > 1$，$x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{x_n + 1}$　$(n \quad 2)$，证 $\{x_n\}$ 有极限且求之

一个重要数列极限

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n,$$

证明 （典型方法）

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + C_n^3 \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})$$

与 x_{n+1} 比较，导出单调增加

适当放大，导出有界性

$\Longrightarrow$ 极限存在

$\boxed{y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \quad \text{单减}}$

- 记号

$$\boxed{\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

例 $x_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 试证 $\{x_n\}$ 有极限

（不是单调数列，考虑子列）

- 考虑 $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是否有极限

H.W

习题 2　16（1）（2）

17 (1) (2) (4)

补充题　2*

本节要点

- **掌握**夹逼准则

  运用这一准则往往需要适当放大、缩小

- 了解单调有界判别准则并能**适当应用**这一准则的习题有时偏难，需要证明单调和有界，做一定数目的习题逐步熟悉过程才能掌握