Chap 9

重积分

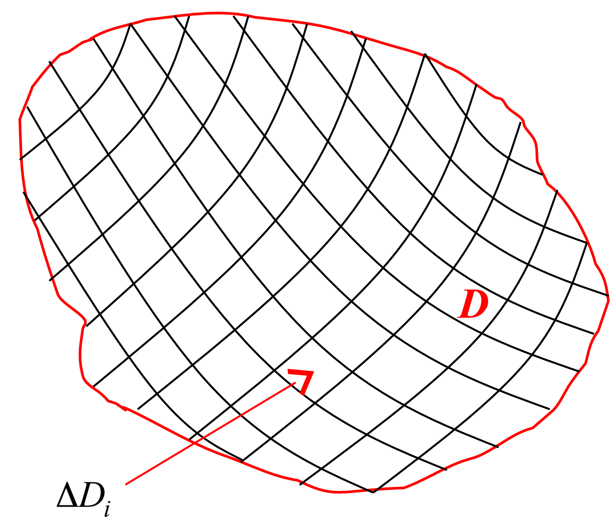
Chap 9 —1

二重积分的
概念和性质

9.1.1 典型例子

一. 平面薄板的质量

平面薄板位于 ***xy*** 平面区域 ***D***, 其面密度为 $\boldsymbol{\mu(x,y)}$ 如何求其质量?



类似一元的处理方法，采用：

(1) 分割：将 ***D*** 任意划分成 ***n*** 个区域 $\Delta D_1,\Delta D_2,\cdots,\Delta D_n$, ΔD_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i,(i=1,2,\cdots,n)$

(2) 作和：在小区域分得很小时，近似认为质量均匀，任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i$, 薄板的质量近似地表达

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

(3) 取极限：记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$, ($d_i$是小区域 ΔD_i 的直径） 那么若

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

存在，就给出了薄板的质量

二． 曲顶柱体的体积

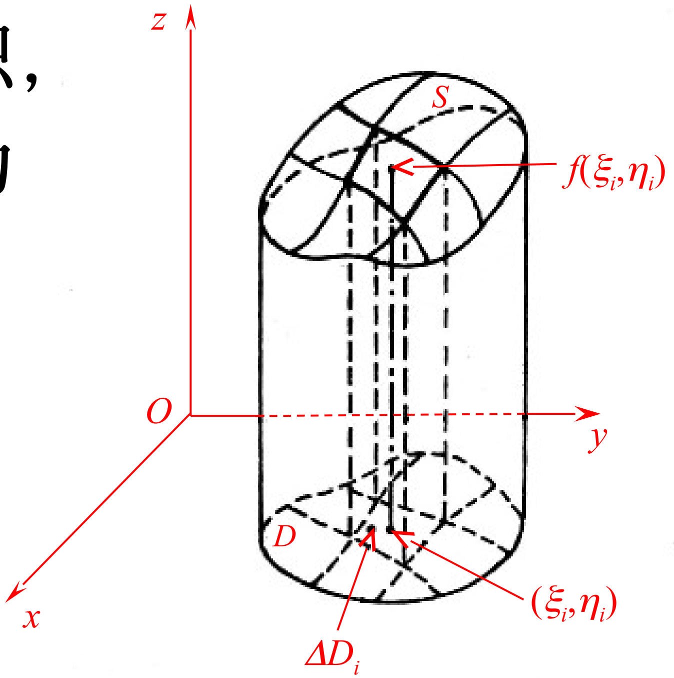
柱体的侧面是母线垂直 ***xy*** 平面的柱面，顶面为曲面 ***S*** $:z=f(x,y)$, 底面是 ***xy*** 平面上区域 ***D***, 如何求此曲顶柱体的体积?

乐

(1) 分割：用曲线将 **D** 分成小区域 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，而 ΔD_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i$

(2) 求和：区域分得很小时，用柱体来近似小曲顶柱体的体积，任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i$，则总体积近似为

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



(3) 取极限：记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$，($d_i$ 是小区域 ΔD_i 的直径)，则体积 **V** 由如下极限给出

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

乐

- 从以上例子抽象出来就得到二重积分的概念，这类问题要计算在一个平面区域上分布率不均匀的量的总量

9.1.2 二重积分定义

设 D 是 xy 平面的有界闭区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 定义，

I 为实数，若将 D 任意划分成个小区域 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，

任取 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i, (i = 1,2,\cdots,n)$，作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (\Delta\sigma_i \text{ 表示 } \Delta D_i \text{ 的面积})$$

总有

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = I$$

（其中 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{d_i\}$，$d_i$ 是小区域 ΔD_i 的直径），则称函数

$f(x,y)$ 在 D 上可积，I 称为 $f(x,y)$ 在 D 的二重积分，

乐

记为 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

$\iint$ – 积分号　　　　D – 积分区域

$f(x,y)$ – 被积函数　$d\sigma$ – 面积元素

二重积分的几何意义:

以区域 D 为底，以曲面 S: $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积

可积的充分条件

若函数 $f(x,y)$ 在有界区域 D 上分片连续有界，则 $f(x,y)$ 在 D 可积

乐

9.1.3 二重积分的性质

设以下性质中出现的积分均存在

性质 1 （线性） 若 α, β 是常数,

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)) d\sigma = \alpha \iint_D f(x,y) d\sigma + \beta \iint_D g(x,y) d\sigma$$

性质 2 （可加性） 若积分区域 $\boldsymbol{D}$ 分成 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ 两个子区域,

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y) d\sigma$$

性质 3 $\iint_D 1\, d\sigma = A_D$ （D 的面积)

乐

性质 4 （单调性） 若 $f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$$

推论

（1） 若 $f(x,y) \quad 0$，则 $\iint_D f(x,y)d\sigma \quad 0$

（2） $\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma$

（3） 若 $m \le f(x,y) \le M$，则 $m A_D \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M A_D$

性质 5（中值定理） 若 D 是有界闭区域，$f(x,y) \in C(D)$，则存在 $(\xi,\eta) \in D$，

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\, A_D$$

Chap 9 —2

二重积分的计算

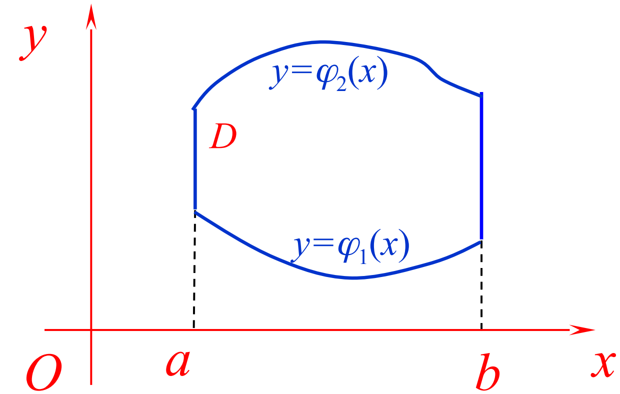
9.2.1 直角坐标系下的计算

设 区域$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$

x 型正则区域

二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (d\sigma = dxdy)$$



的值等于以 ***D*** 为底，以曲面

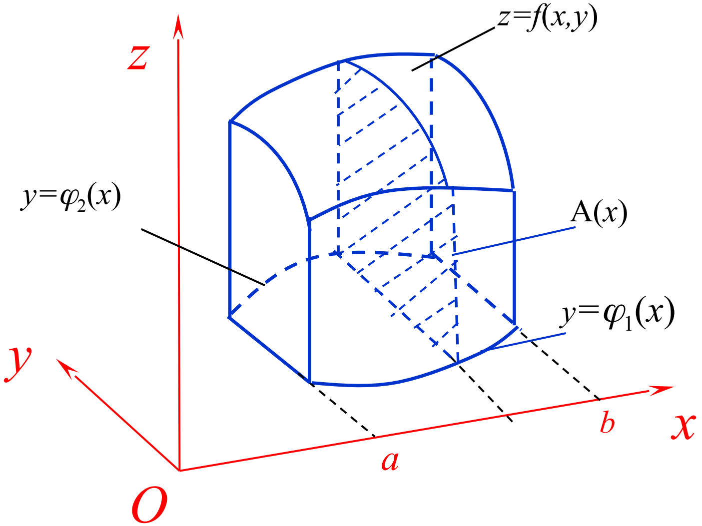
S: $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积

利用定积分来求体积

考虑垂直 x 轴过 x 处的平面截

曲顶柱体所得截面积

A(x)



乐

截面曲边梯形的面积

A(x)

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

$\Rightarrow$ 曲顶柱体的体积

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

导出

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

写成

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$$

乐

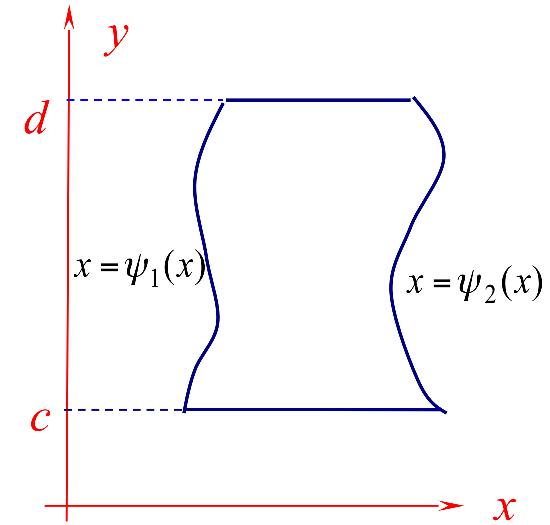
若积分区域

$$D=\{(x,y)|\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y), c\le y\le d\}$$

y 型正则区域

则有

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$$



对于一般区域的二重积分

可将其分成若干个正则子区域,

利用积分的可加性，分别在各子区域积分后求和

乐

例　计算二重积分$\iint\limits_D (x+2y)dxdy$

其中 $D=\{0\le x\le 2, 0\le y\le x^2\}$

例　计算二重积分$\iint\limits_D xydxdy$

其中 ***D*** 是由抛物线$y^2=x$与直线 $y=x-2$ 所围区域

例　计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy$

其中 ***D*** 是由抛物线$y^2=x$与直线 $y=x$ 所围区域

乐

例　交换以下累次积分的次序

(1) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$

(2) $\int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$

■ 当积分区域关于 $\boldsymbol{x}$ 轴或 $\boldsymbol{y}$ 轴对称时，注意被积函数是否有奇偶性从而使积分简化（**对称性非常重要！**）

例　计算二重积分 $I = \iint\limits_D (y + y^2 \sin^3 x)dxdy$

其中 $\boldsymbol{D}$ 是上半圆域 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4, y \quad 0\}$

乐

例　计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$

其中区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

（往年考研试题）

例　设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，求积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$

（往年考研题）

乐

H.W

习题 9

3 (2) (3)　　5

7 (1) (3)　　8 (2) (5) (6) (7) (8)

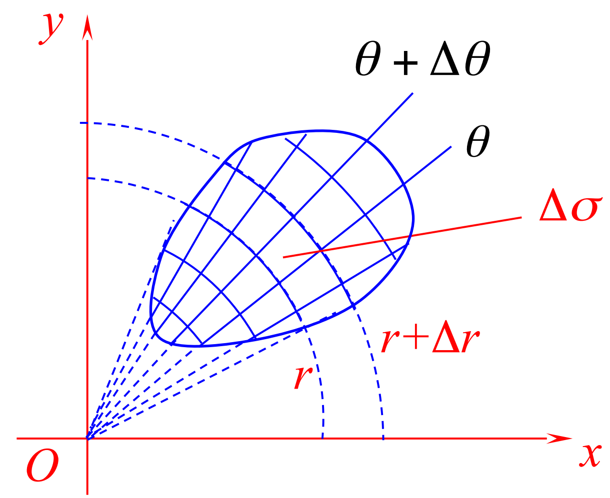
10 (1) (2) (4)　　11 (1), (2), (4)

12 (1) (2)

9.2.2 极坐标系下的计算公式

当积分区域的边界曲线或被积函数用极坐标表示较为简单时，二重积分有时可用极坐标来计算

我们来考虑面积元素 $\Delta\sigma$ 在极坐标下的形式



用 r 为常数所表示的圆周族

和 $\boldsymbol{\theta}$ 为常数所表示的射线族分割

区域 $\boldsymbol{D}$,那么小区域面积

$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}[(r+\Delta r)^2\Delta\theta-r^2\Delta\theta]=\frac{1}{2}[2r\Delta r+(\Delta r)^2]\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \qquad d\sigma=rdrd\theta$$

乐

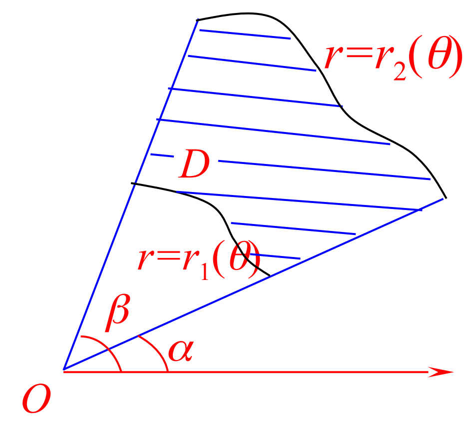
从直角坐标变换为极坐标时的二重积分的变换公式

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

若区域 $D = \{(r,\theta) \mid r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$

二重积分化为累次积分

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta$$



例 计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

化为极坐标系下的累次积分，其中 $\boldsymbol{D}$ 为

1）由直线 $y=x$，上半圆周 $x^2+y^2=4x$, 及 $x^2+y^2=8x$ 围成

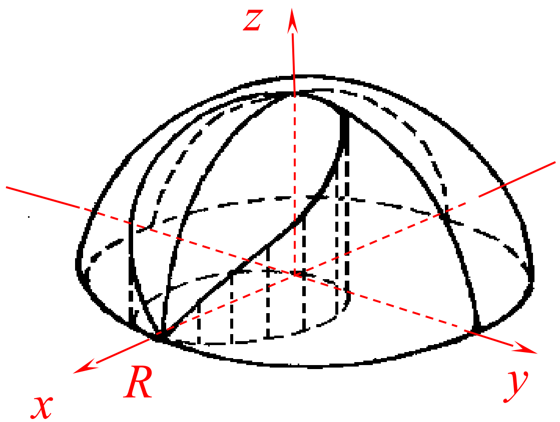
2）由直线 $\boldsymbol{y=x, y=0}$ 和 $\boldsymbol{x=1}$ 所围成

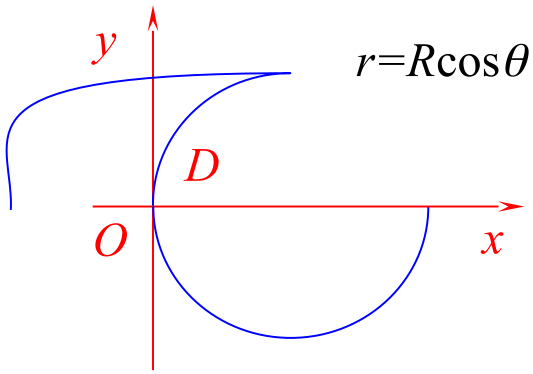
例 计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$

其中区域 $D=\{x^2+y^2\le 2x\}$

例 交换积分次序 $\int_0^1 dr\int_{-\arccos r}^{\arccos r} f(r,\theta)d\theta$

例　求球体 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所割下部分的体积 V





例　求双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所围区域的面积

例　求二次积分 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \arctan\frac{y}{x} dx$

例　　求积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

9.2.3 二重积分的变量代换

设变换 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 有连续偏导数，且

满足

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

而 $f(x,y) \in C(D)$，那么

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J\right|dudv$$

乐

uv 平面小矩形 $A'B'C'D' \longrightarrow xy$ 平面曲边四边形 $ABCD$

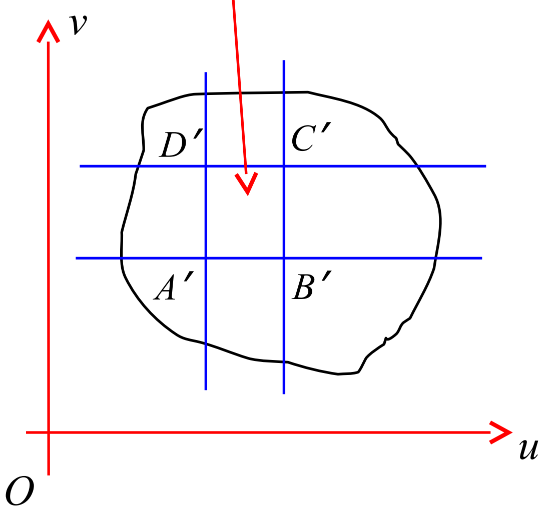
$$A'(u,v) \to A(x(u,v), y(u,v)),$$

$$B'(u+\Delta u, v) \to B(x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v))$$

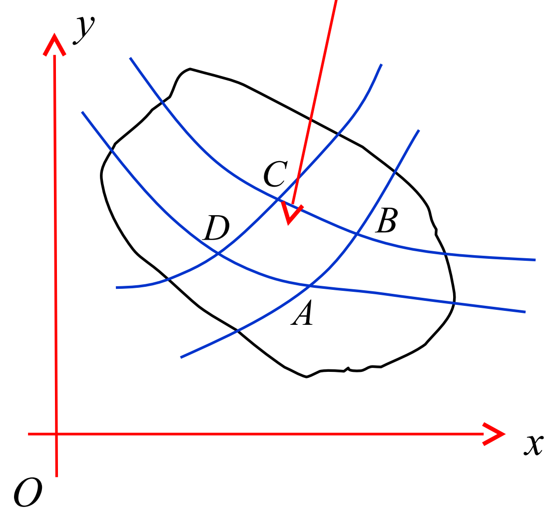
$$C'(u+\Delta u, v+\Delta v) \to C(x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v))$$

$$D'(u, v+\Delta v) \to D(x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v))$$

$$\Delta\sigma' = \Delta u \Delta v$$



变换后 $\Delta\sigma$=？



乐

- $ABCD$ 近似于平行四边形

  只需求出一组邻边的向量表示

$$\overrightarrow{AB} \approx (x_u(u,v)\Delta u, y_u(u,v)\Delta u)$$

$$\overrightarrow{AD} \approx (x_v(u,v)\Delta v, y_v(u,v)\Delta v)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Delta\sigma \approx \left\| \begin{vmatrix} x_u(u,v)\Delta u & x_v(u,v)\Delta u \\ y_u(u,v)\Delta v & y_v(u,v)\Delta v \end{vmatrix} \right\|$$

$$= |J| \Delta u \Delta v$$

$$\boxed{d\sigma = |J| du dv}$$

例分　计算二重积 $\iint\limits_{D}(x+y)dxdy$

其中区域 D 为 $x^2+y^2 \le x+y+1$

（往年考研题）

思考：若 D 改为 $\frac{(x-2)^2}{a^2}+\frac{(y+1)^2}{b^2} \le 1$ 如何?

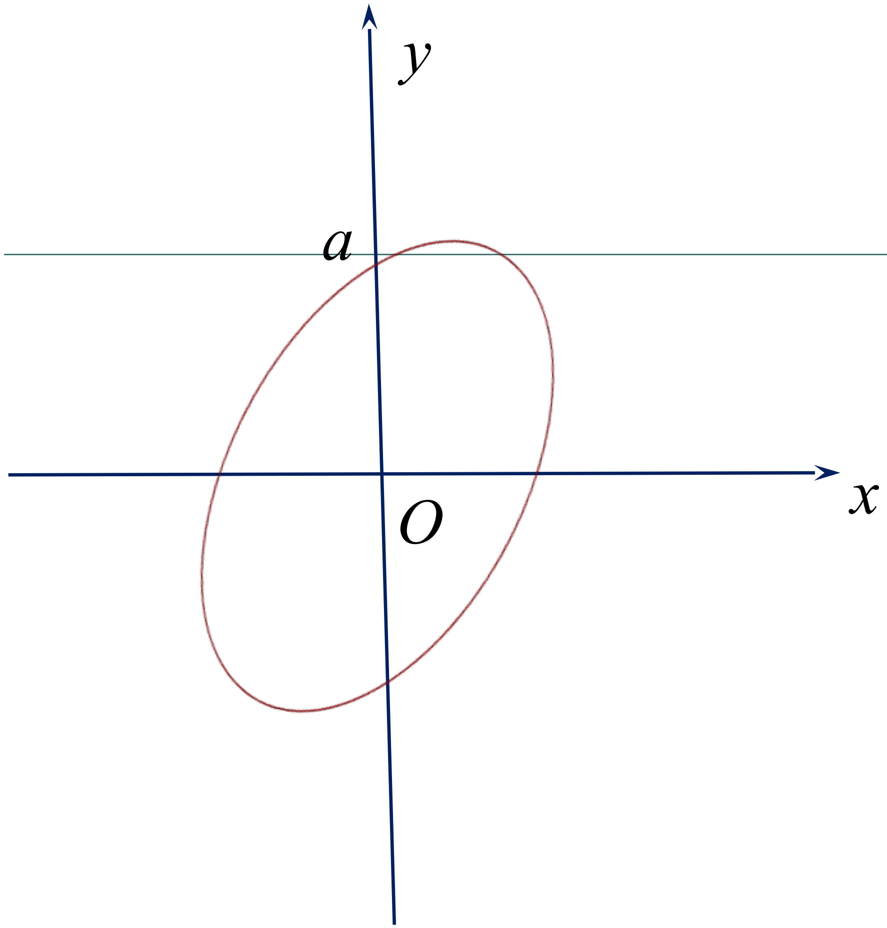
例　计算积分 $\iint\limits_{D} xydxdy$ ，其中 D 为由曲线 $xy=1,$

$xy=2, y=x$ 和 $y=4x$ 在第一象限所围成的区域

例算　计 $I=\iint\limits_{D}|x|dxdy$ ，其中区域 D 为

$2x^2-2xy+y^2 \le 1$

乐



图形如左

注意区域 D

$$x^2 + (x - y)^2 \le 1$$

引进变换？

H.W

习题 9

13　(1) (3) (5)

14　(1) (2) (3)

15　(1)　　16　(1) (2)

17　(1) (2)　18*

例　分别用两种变换

(1) $u = x + y, v = x - y$　　　(2) $u = x^2 + y^2, v = xy$

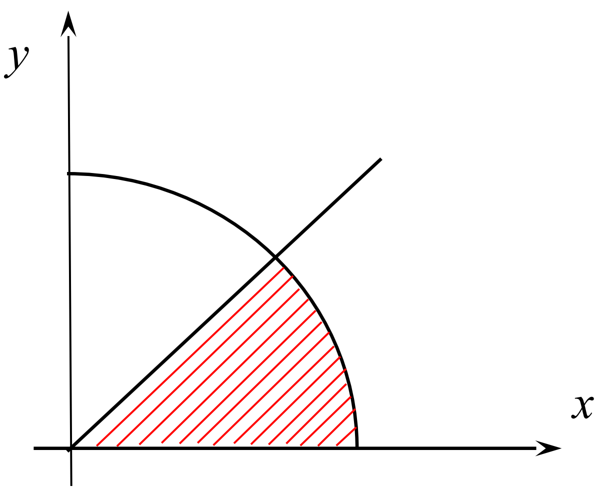
计算二重积分

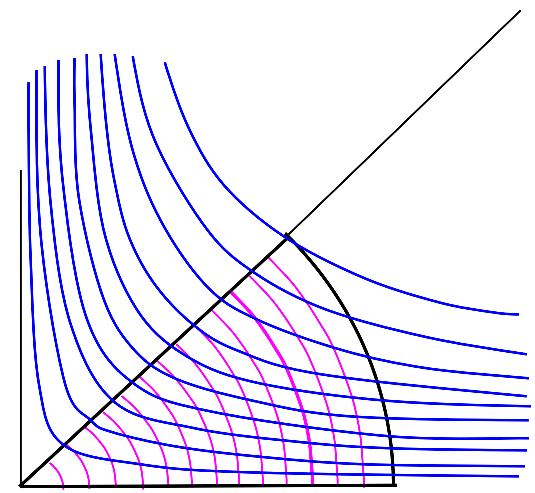
$$\iint_D (x^2 - y^2) \mathrm{e}^{(x+y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

三条边界线方程变何形式？

其中区域

$$D = \left\{ (x, y) \middle| y \le x \le \sqrt{1 - y^2}, 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$





v 常数－双曲线

u 常数－圆周

区域可表示为

$$x - y \quad 0, \quad x^2 + y^2 \le 1, \quad y \quad 0$$

经过变量的替换，它们分别的变化情况?