Chap 9 —4

重积分的应用

9.4.1 曲面面积

设空间曲面 $\boldsymbol{S}$ 为 $z=f(x, y)$，(x, y) 定义于 $\boldsymbol{D}$，即曲面 $\boldsymbol{S}$ 在 xy 平面的投影区域为 $\boldsymbol{D}$，如何求 $\boldsymbol{S}$ 的面积?

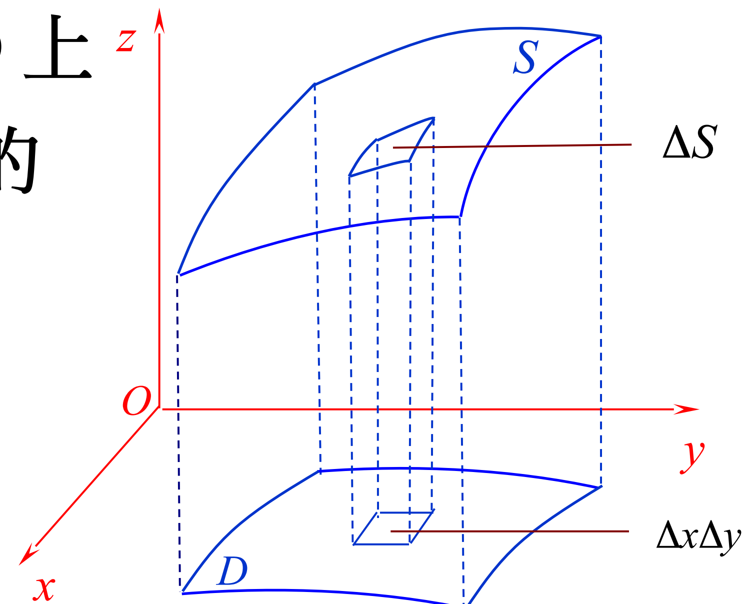
用分割求和（微元法）的思想

将 $\boldsymbol{D}$ 分割成小区域，对应 $\boldsymbol{D}$ 上小区域面积 $\Delta\sigma=\Delta x\Delta y$，$\boldsymbol{S}$ 上的小曲面面积为 ΔS

当小区域微小时

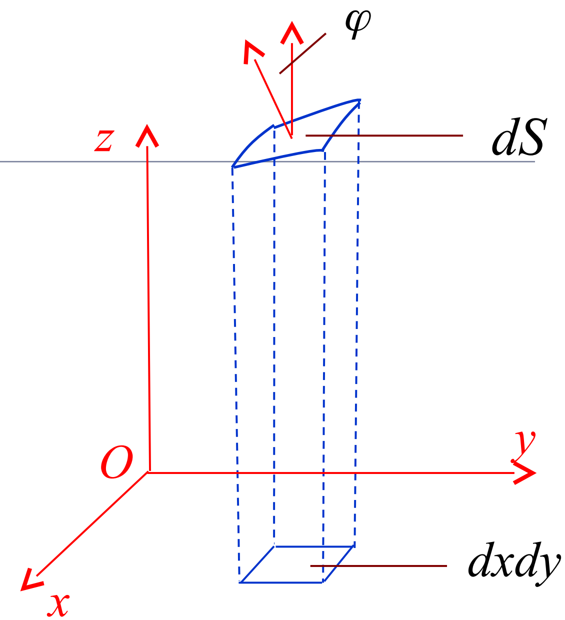
$$\Delta S|\cos\varphi|\approx\Delta\sigma$$

φ 是 ΔS 所在平面与 xy 平面夹角



乐

φ是 ΔS上的法向量与 z 方向的夹角



这两个方向向量分别为

$$\{z_x, z_y, -1\}, \quad \{0, 0, 1\}$$

导出

$$|\cos\varphi| = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

因此得到曲面面积的有关公式

$$dS = \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\, dxdy$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\, dxdy$$

曲面面积元素

例　计算锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2y$

所截部分的面积

例　计算球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被柱面

$x^2+y^2=Rx$ 所截得部分的曲面面积（Viviani 曲面）

例　计算正弦曲线 $y=\sin x$ 在$0\le x\le \pi$

的部分绕 x 轴所得旋转面的面积

（旋转面面积）

乐

H.W

习题 9

32 （1）（4）（6）

9.4.2　重积分的物理应用举例

一．质心

物体的质心（或重心）与它的质量和静力矩有关

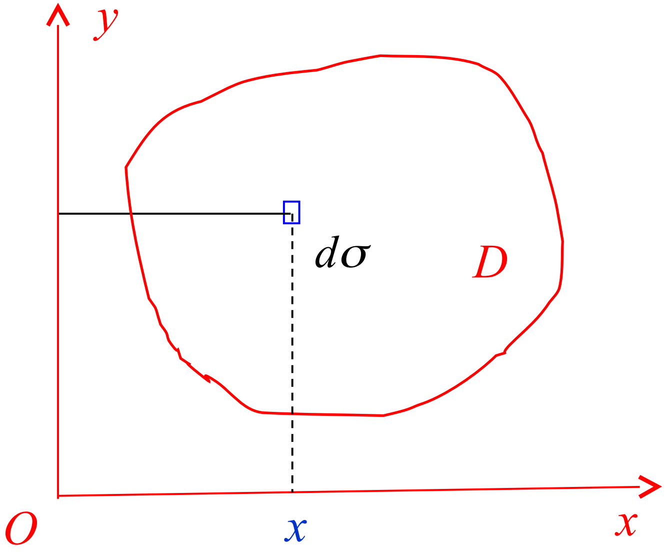
设面密度为 $\boldsymbol{\mu(x, y)}$ 薄板占据平面区域 $\boldsymbol{D}$

考虑 D 上面积元素 $dxdy$

其质量为 $\mu(x, y)dxdy$, 从而对

$\boldsymbol{y}$ 轴的静力矩为

$$dM_y = x\mu(x, y)dxdy$$



质量 $\boldsymbol{m}$ 和静力矩 $\boldsymbol{M_y}$ 为

$$m = \iint_D \mu(x, y)d\sigma$$

乐

$$M_y = \iint_D x\mu(x,y)d\sigma$$

同样，对 x 轴电静力矩

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)d\sigma$$

于是薄片的质心位置 $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma}$$

注　当 $\mu = 1$ 时得到平面图形的形心

乐

思考：对三维物体如何求质心

二． 转动惯量

转动惯量也是一种矩（二次矩），设平面区域 D 上薄板的面密度为 $\mu(x,y)$，那么面积元素 $d\sigma$ 处微量物体对 y 轴的转动惯量

$$dI_y = x^2\mu(x,y)d\sigma$$

$$\Rightarrow \qquad I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$$

问题：对 x 轴和对原点 O 的转动惯量?

乐

例　区域 $\boldsymbol{D}$ 由曲线 $x=0, y=0, \sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

围成，$\boldsymbol{D}$ 上薄板的面密度为 μ（常数）

求（1）薄板的质量和质心

（2）薄板对坐标轴和原点的转动惯量

H.W　习题 9

34（2）　35　36(4)　38(1)

乐

这一章我们应该掌握什么?

- 重积分的概念：分割、求和、求极限

关键：计算分分布率不均匀的总量

- 计算法：化为累次积分

关键：了解积分区域的具体图形

有没有对称性：关于 x 轴、 y 轴，还是直线 y=x ？

直角坐标：是 x 正则还是 y 型正则?

是不是用极坐标更好?

极坐标下图形夹在哪两射线之间？ r 的开始和结束位置?

乐