Chap 11 - 6

Fourier 级数

11.6.1 三角级数

形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的级数称为三角级数，$a_0, a_n, b_n (n=1,2,\cdots)$ 称为系数

三角级数各项组成的集合

$$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

称为三角函数系

三角函数系的特点：正交性

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$(m, n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

$$(m = 1, 2, \cdots; n = 0, 1, \cdots)$$

设三角级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于函数 $f(x)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

级数系数与 $f(x)$ 有什么关系?

利用正交性，可得

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, & n=0,1,2,\cdots, \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, & n=1,2,\cdots. \end{cases}$$

11.6.2 Fourier 级数及其收敛条件

若 $f(x)$ 周期为 2π，在 $(-\pi,\pi]$ 可积 ，那么

利用前面公式求得 a_n, b_n，就可写出一个三角级数

称为的 Fourier 级数（F 氏级数），记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

例　写出以下函数的 Fourier 级数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le 0 \\ x & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

注意　我们从 $f(x)$ 得到 Fourier 级数，但这级数是否收敛？即使收敛，是否收敛到 $f(x)$ ？

Dirichlet 收敛定理

设 $f(x)$ 在 $[-\pi\ \pi]$ 至多有有限个第一类间断点且仅有有限个极值点，那么 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在 $[-\pi,\pi]$ 收敛，它的和函数

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当}x\text{为}f\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{当}x\text{为}f\text{的间断点} \\ \dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}, & \text{当 } x=\pm\pi \end{cases}$$

例　设周期为函数在定义为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1 & 0\le x\le \pi\end{cases}$$

将其展开为 Fourier 级数，并说明级数在 $[-\pi$

$\pi]$

收敛到何值？

H.W

习题 11

22 （1）（3）

11.6.3　　正弦级数和余弦级数

若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 是奇函数，则它的 Fourier 级数的系数 $a_n=0$，从而

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad \left(b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \right)$$

若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 是偶函数，则 $b_n=0$，从而

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \left(a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \right)$$

例　试将 $f(x)=x^2,\ x\in[-\pi,\pi]$ 展为 Fourier 级数

得出

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx \qquad (-\pi\le x\le\pi)$$

令 $x=\pi$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

令 $x=0$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$

（Euler 的工作）

定义在 $[0, \pi]$ 上符合展开条件的函数 $f(x)$

可以看作 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数或偶函数，然后展开为正弦级数或余弦级数

例　把函数 $f(x)=x-1\ (0\ \leq x \leq \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数

例　设 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \\ x-1, & \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ 的正弦级数

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 的和函数为 $S(x)$，求 $S(5\pi/2)$

11.6.4 周期为 $2l$ 的 Fourier 级数

设 $f(x)$ 是定义在 $[-l, l]$ 上的可积函数，通过

$x = \dfrac{l}{\pi}t$, 得到 $F(t) = f(\dfrac{l}{\pi}t)$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上可积函数

就有

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

导出

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx, & n = 0,1,2,\cdots \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, & n = 1,2,\cdots \end{cases}$$

若 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上满足 Dirichlet 收敛条件，

则 Fourier 级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$ 收敛到

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x\text{是}f\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{是}f\text{的间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l+0)}{2} & x=\pm l \end{cases}$$

例　把 $f(x)=\begin{cases} 0, & -2<x\le 0, \\ 1, & 0<x\le 2, \end{cases}$

展成周期为 4 的 Fourier 级数，写出级数的和函数

类似地，可将定义在 $[0, l]$ 上的函数展开成

正弦级数或余弦级数

例　试将函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le\dfrac{1}{2},\\ -1, & \dfrac{1}{2}<x\le A\end{cases}$$

展开成周期为 2 的正弦级数

H.W

习题 11

23 24

25