Chap 5.2

定积分性质

5.2.1 基本性质

设 $f(x)\in R[a, b], g(x)\in R[a, b]$

- 线性

$\forall \alpha,\beta\in\mathbf{R}$， $\alpha f(x)+\beta g(x)\in R[a, b]$，且

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

- 乘积可积性　　$f(x)\, g(x)\in R[a, b]$

- 对区间的可加性　　$c\in(a, b)$，则

$$f(x)\in R[a, b]\Leftrightarrow f(x)\in R[a, \mathrm{c}]\cap R[\mathrm{c}, b]$$

且 $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

➢ 保序性

$$f(x) \quad g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \quad \int_a^b g(x)dx$$

推论

$$(1)\ f(x) \quad 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \quad 0$$

$$(2)\ m \le f(x) \le M$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

➢ 绝对可积性

$$|f(x)| \in R[a,b],\ \text{且} \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

5.2.2 积分中值定理

若 $f(x)\in C[a,b],g(x)\in R[a,b]$, $g(x)$ 在 $[a,b]$

不变号 , 则$\exists\ \xi\in[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

- 如何证明？ 改变结论形式再考虑

推论

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则$\exists\ \xi\in[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

例　比较下列积分的大小

(1) $\int_0^1 e^{-x}dx$ 与 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

例　试估计定积分 $\int_{-1}^{2} \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}\, dx$ 的值

例　$p>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p} x^2 e^{-x} dx$

H.W　习题 5

5 （1）　6

7 （1）(题中 < 改为 ≤) 8 (1) (2)