Chap 5

积　　分

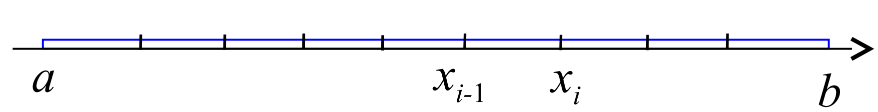
Chap 5.1

定积分的概念

5.1.1 典型例子

- **质线的质量**

质线位于 x 轴上 $[a,b]$, 线密度为 $\mu(x)$, 那么质线的质量 m =?



- 若 μ= 常数， 则 $m=\mu(b-a)$
- 若 μ 不一定为常数 ，怎么求?

(1) 分成 n 个小段，分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

(2) **求近似质量**：每一小段质量

$$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i)\Delta x_i, \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

总质量近似值

$$m = \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i)\Delta x_i$$

(3) **求质量**

小区间最大长度 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$，则

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$$

- 求此质量的三个步骤: 分割、求和、求极限

■ 质点运动的路程

质点运动从时间 $t=a$ 到 $t=b$, 速度为 $v(t)$, 路程＝?

- 若 v = 常数，则路程 $S=v(b-a)$
- 若 v 不一定为常数，则

(1) 分割：分 $[a,b]$ 为小区间，分点为

$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ ，而$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$

(2) 求和：路程近似值

$$\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \qquad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

(3) 求极限 $S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \qquad \lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta t_i$

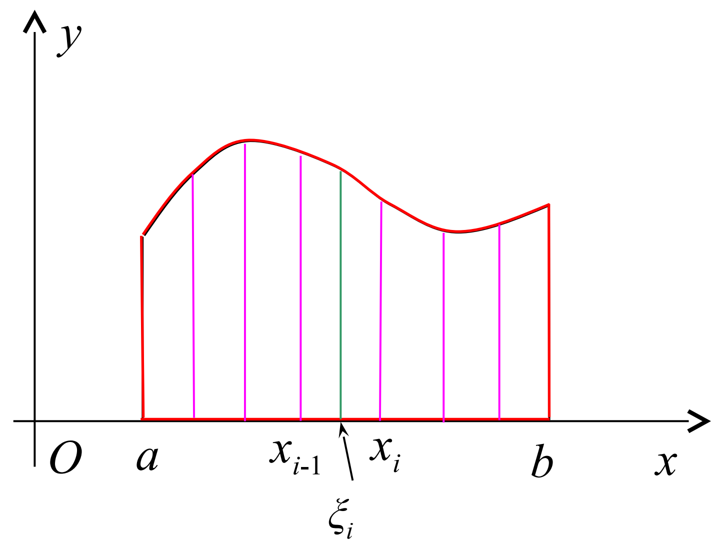
■ 曲边梯形的面积

若 $f(x)0(a \le x \le b)$, 由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$ 及 x 轴围成的图形称曲边梯形，其面积 $A=?$

- 若 $f=$ 常数，则面积

$$A=f(b-a)$$

- 若 f 不一定为常数，



(1) 分割：分 $[a,b]$ 为小区间，分点为 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，而

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

(2) 求和：面积近似值

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

(3) 求极限

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

- **这些例子的共同点?**

求在某区间上的分布不均匀的量

通过分割、求和 (得近似值) 、再求极限得到

5.1.2 定积分的定义

$f(x)$ 定义在 $[a,b]$, 任分 $[a,b]$ 为小区间，分点

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，称为 $[a,b]$ 的一个分划

若$\exists$ $I \in \mathbf{R}$, 对 $[a,b]$ 的任何分划和$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

所作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, 均有

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I \qquad (\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i)$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，记为 $f \in R[a,b]$, I 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的定积分，记为

积分变量

积分上限

$$I = \int_a^b f(x)\underline{dx}$$

积分下限

积分微元

➢ 定积分的值与积分变量的选取无关

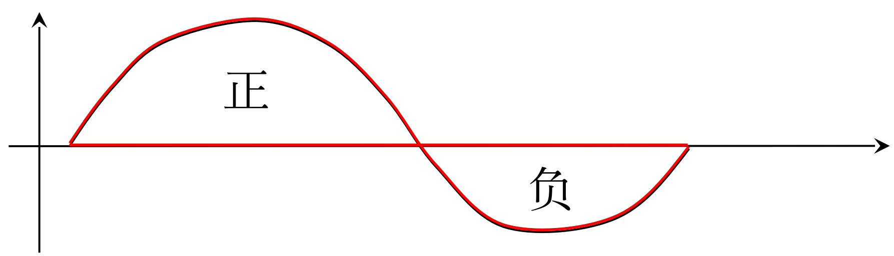
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$$

➢ 规定

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

➢ 几何意义：曲边图形

面积的代数和



➢ **思考一下** 定义中极限的含义 十分复杂！

5.1.3 可积的充要条件 *

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，对 $[a,b]$ 作任一分划，记

$f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的上、下确界分别为 M_i. m_i, 即

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\} \qquad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$$

则称 $\omega_i = M_i - m_i$ 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的振幅

而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积的充要条件为

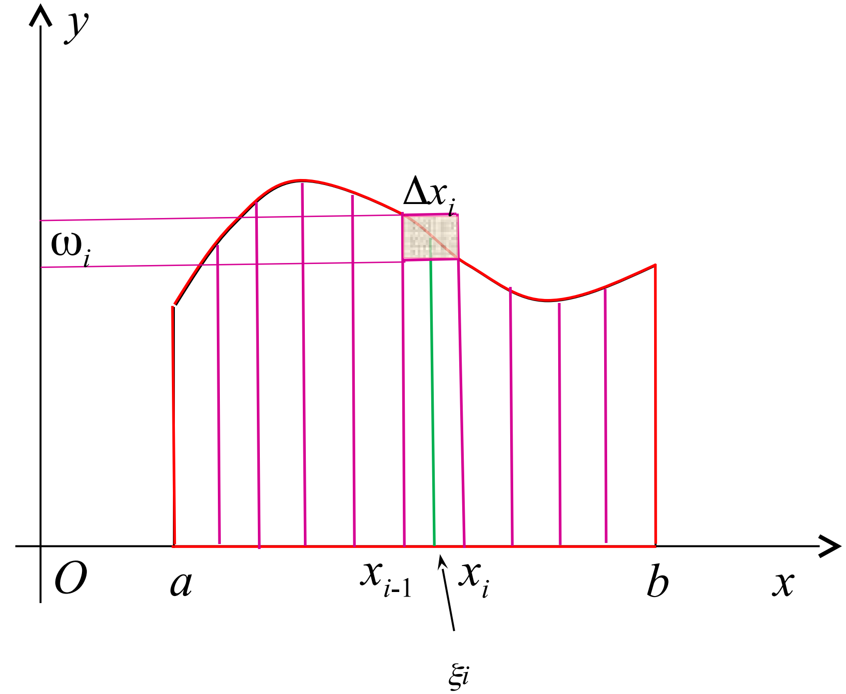
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$$

对充要条件的解释

每个小矩形高度可能多算也可能少算，

但误差不超过ω_i

小面积误差不超过$\omega_i \Delta x_i$ 总误差不超过



$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$$

因此 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$ 保证了积分和的存在

常见可积函数

(1) $C[a, b]$ 类函数

(2) 在 $[a,b]$ 有界且仅有有限个间断点的函数

(3) $[a,b]$ 上单调有界函数

例 计算抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴所围成图形的面积

- 不可积函数的例子

$$Dirichet\text{函数}\quad D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$$

■ 可积函数的必要条件

可积函数必有界

➢ **想一想**　你觉得积分与微分(导数)两种

运算的关系如何?

H.W　习题 5

1　(1)　(2)

3　(1)　(2)