Chap 6 — 2

一阶微分方程

■ 可分离变量方程

➢ 形式 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y)$

➢ 解法

化为 $\dfrac{dy}{\psi(y)}=\varphi(x)dx$ 后两边积分

注意 使$\psi(y)=0$的常数 $y=c$ 也是方程的解

例 求解下列方程

(1) $y'=x\sqrt{1-y^2}$ (2) $\dfrac{dP}{dt}=rP$

$P = P_0 e^{r(t-t_0)}$　　人口增长成几何级数！

前例中 放射性物质的衰变

$$m = m_0 e^{-r(t-t_0)}$$

当 $m = m_0 / 2 \Rightarrow t - t_0 = \ln 2 / r$ (半衰期)

C-14 的半衰期为 5700

若画颜料中 C-14 未衰变量为原来的 99.5%

那么

$$\frac{t-t_0}{5700} = \frac{-\ln 99.5\%}{\ln 2} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 \approx 41\ (\text{年})$$

例　求解 Logistic 方程

$$\frac{dP}{dt} = rP - \beta P^2$$

- **一阶齐次方程**

  - 形式　$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

  - 解法　设 $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu'$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x}$$

可分离变量

例　求解方程

$$xy' = y + 2\sqrt{xy}$$

$$xu' = \begin{cases} 2\sqrt{u}, x > 0 \\ -2\sqrt{u}, x < 0 \end{cases}$$

- 其它可化可分离变量方程

  - $y' = f(ax + by + c) \quad (b \neq 0)$

解法 令 $z = ax + by + c \quad \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = bf(z) + a$

例　求解方程

$$y' = \cos(x - y)$$

➢ $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

只需讨论 c_1, c_2 不全为零，且 $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

（此时为准齐次方程）

解法 令 $X = x - x_0, Y = y - y_0$

其中 (x_0, y_0) 满足 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 = 0 \end{cases}$

例 求解方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y+1}{x+y-3}$

$$X = x-1, Y = y-2 \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} \qquad u = \frac{Y}{X}, \Rightarrow Xu' = \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

$$\frac{d(1-2u-u^2)}{1-2u-u^2} = -2\frac{dX}{X} \Rightarrow \ln(\left|1-2u-u^2\right|X^2) = c_1$$

H.W

习题 6

4 (1) (2) (3) （5）

5 (1) (3) (4)

6 (1)(3)(5)(6)

7 (1)(2)(3)(5)

一阶线性方程

- 形式　$y' + P(x)y = Q(x)$

非齐次项

- 解法　　常数变易法

先考虑特殊情况 $Q=0$ 时的解，再在通解中将常数变换成待定函数

- 公式

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right)}$$

$\int P(x)dx$ 表示一个原函数

例　求解下列方程

(1) $(x+1)y'-\alpha y=e^{x}(x+1)^{\alpha+1}$

(2) $y'=\dfrac{y}{2x-y^{2}}$

例 求满足以下条件的连续函数 $f(x)$ ：

$$\int_0^1 f(ux)du=\frac{1}{2}f(x)+1$$

H.W　习题 6

8 (2) (3) (4) (5) (7)(8)

9 (2) (3) 11

Bernoulli 方程

- 形式 $y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,1)$
- 解法 代换 $z = y^{1-n}$

$$\Rightarrow \quad z' + (1-n)Pz = (1-n)Q$$ $\boxed{\text{线性方程}}$

例 求解方程

$$y' - \frac{6y}{x} + xy^2 = 0$$

H.W 习题 6

10 (2) (3) 13 15