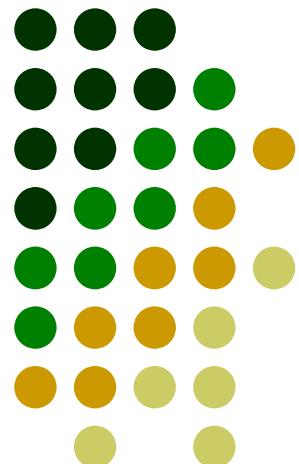
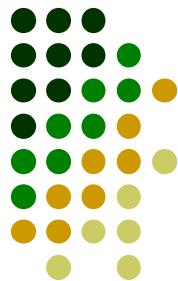


Chap 4 .5

曲线的曲率





4.5.1 弧长和弧微分

■ 弧长

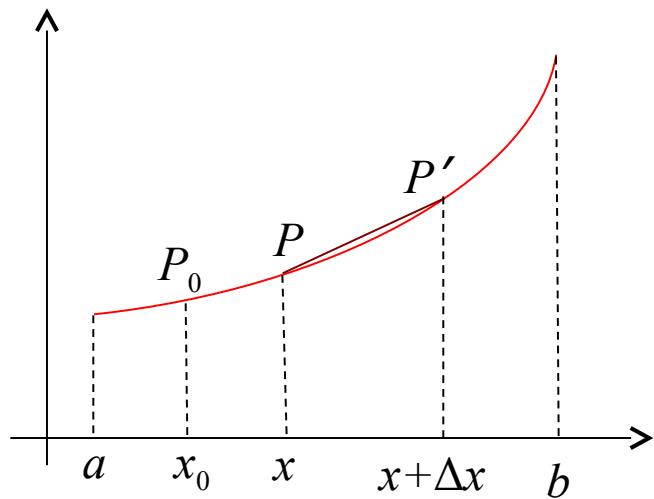
曲线内接折线长度的极限 (组成折线的线段长设曲线 $C: y = f(x), x \in [a, b]$, 其上 P_0, P 分别对应

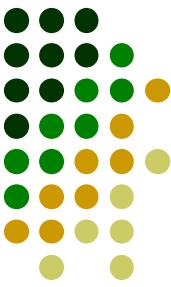
x , 记 $\widehat{P_0P} = s(x)$

由 Δx 产生 Δs , 有

1) Δx 与 Δs 同号

2) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|}{|PP'|} = 1$





从而导出

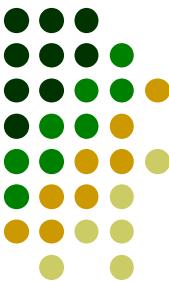
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(x)} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

在 $ds > 0$ 时 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, 其几何意义是:

- 微小弧长可由该处相应小切线段长代替
- 曲率

若曲线上 $P \rightarrow P'$ 对应的切线转动角度为 $\Delta\varphi$
对应弧长增量 Δs , 定义 $\widehat{PP'}$ 的平均曲率为

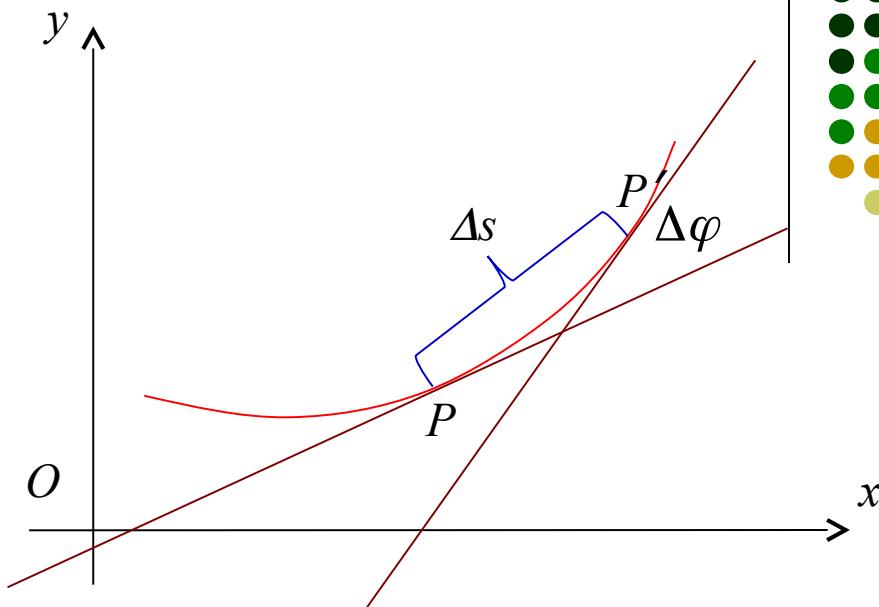
$$\frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|}$$



可以看出平均曲率
反映了这段曲线弧
弯曲的程度

➤ 曲率

$$k = \lim_{P' \rightarrow P} \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} \Rightarrow k = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$$



定义 曲率半径

$$R = \frac{1}{k}$$

曲率圆

曲线上某点 P 指向凹侧的法线上到 P 距离为 R 的点为心,
 R 为半径的圆

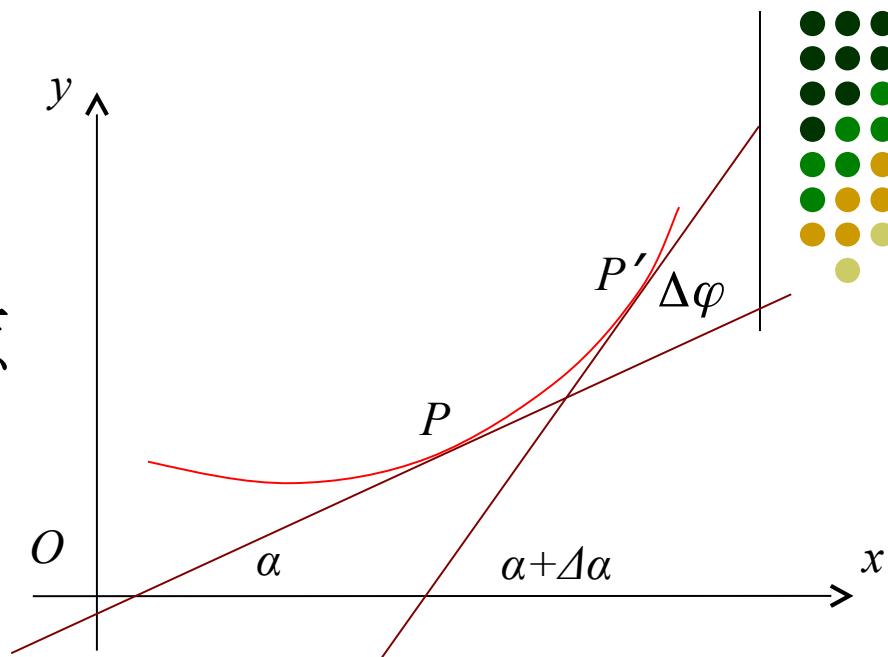
➤ 曲率公式

若曲线上对应 x 的 P 点

处切线的倾角为 α ,

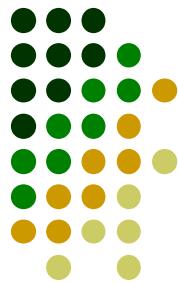
则

$$\Delta\varphi = \Delta\alpha$$



$$\Rightarrow k = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$$

$$\Rightarrow k = \boxed{\left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|}$$

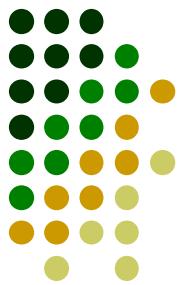


例 求曲线 $y = x^2 + px + q$ 上任一点的曲率
线

例 求曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上点 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ 的曲率半径
线

例 求曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 上对应 t 的点处的曲率

例 求螺旋 $r = a\theta$ 上对应 θ 的点处的曲率
线



H.W 习题 4

63 (1) (3) 64