Chap3 导数与微分

Descartes （ 1596 － 165
0 ）
Newton （ 1642 － 1727 ）

Leibniz （ 1646 － 1716 ）

Chap3 — 1

导数的概念

3.1.1 引例

1. **速度**　设直线运动的质点 t 时刻的位移为 $s(t)$，则质点在 t_0 至 $t_0+\Delta t$ 时间段的位移 $\Delta s = s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$，这段时间内的**平均速度**

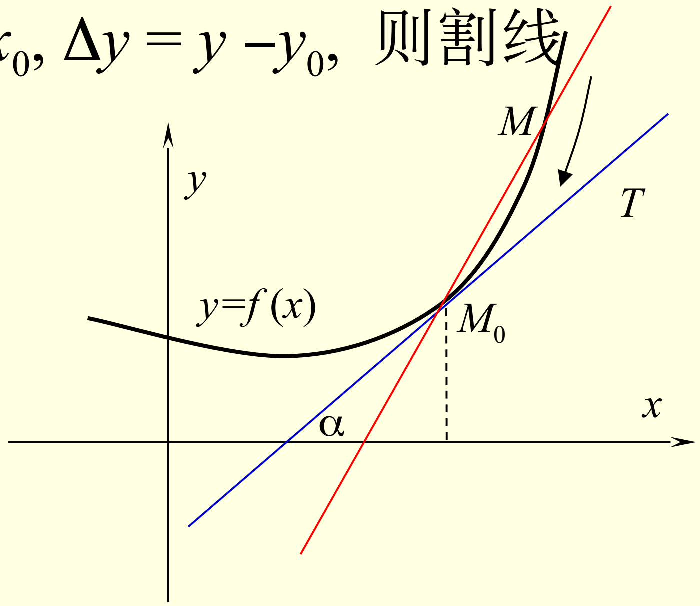
$$\bar{v}_0 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

质点在 t_0 的**瞬时速度**

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

2. 切线

曲线 $y=f(x)$ 上有点 $M_0\ (x_0, f(x_0))$, 取点 $M(x, y)$, 引割线 M_0M, 当 M 沿趋向 M_0 时，割线 M_0M 的**极限位置** M_0T 称为曲线在 M_0 的**切线**． 记$\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, 则割线 MM_0 斜率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.



切线斜率

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

3.1.2 导数的定义

1 定义 设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义，自变量增量 $\Delta x=x-x_0$，函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则 $f(x)$ 在点 x_0 的**导数**（**微商**）

$$f'(x_0)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

此时称 $f(x)$ 在 x_0 **可导**．若极限不存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 **不可导**

- 等价形式 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- 等价表示 $y'(x_0), y'\big|_{x=x_0}, \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}, \dfrac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

2. 几何、物理意义

- 若 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，则曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 有不平行于 y 轴的切线，且 $f'(x_0)$ 是该切线斜率．

切线方程 $\quad y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$

$$x=x_0,\ 当\ f'(x_0)=\infty$$

法线方程 $\quad y-f(x_0)=\dfrac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0),\quad (f'(x_0)\neq 0).$

$$x=x_0,\quad 当\ f'(x_0)=0.$$

- 变速直线运动质点的瞬时速度 $v(t_0)=s'(t_0)$.

3. 单侧导数

定义 2　函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的左导数，定义为

$$\boxed{f_-'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.}$$

试一试　右导数 $f_+'(x_0)$ 的定义?

$$\boxed{\text{命题}\quad f(x)\text{ 在 } x_0 \text{ 处可导} \Leftrightarrow f_-'(x_0) = f_+'(x_0).}$$

例　证明：$f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导（曲线的尖点）.

例　若 $f'(x_0)=A$, 求

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}$

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=(\alpha+\beta)f'(x_0)}$$

例　若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=0$, 则 $f'(x_0)=?$

4. 导函数

若 $y=f(x)$ 在区间 I 内每点有导数，在 I 的闭端点有单侧导数，则称 $f(x)$ 在区间 I 可导，记为 $f\in D(I)$. 而 $f'(x)$ 称为 $f(x)$ 的导(函)数，也可记为 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}$, $y'(x)$.

例 证明下列导数公式 .

$$(c)'=0 \qquad (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (e^x)'=e^x$$

$$(\log_a^x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

3.1.3 可导与连续

可导必连续

若 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导，则在 $f(x)$ 点 x_0 连续 .

推论 若 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导，则在 x_0 的邻域内有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \text{ 其中 } \lim_{\Delta x \to 0}\alpha(\Delta x) = 0, \alpha(0) = 0.$$

- **连续未必可导**

- 左可导 $\Rightarrow$ 左连续；右可导 $\Rightarrow$ 右连续

例 设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b, & x \quad 0 \\ \sin ax, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求常数 a, b.

例 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，又 $F(x)=(1+|\sin x|)f(x)$. 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的 (　　　　)

(A) 充分非必要条件 .　　**(B)** 必要非充分条件 .

(C) 充要条件 .　　**(D)** 既非充分又非必要条件 .