Chap8 —7

多元微分学在几何中的应用

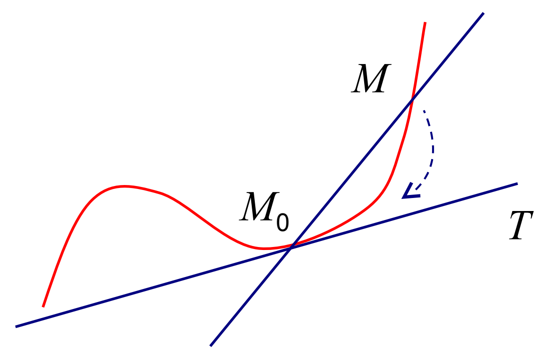
8.7.1 空间曲线的切线及法平面

一. 定义

设 $M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z)$ 是空间曲线 Γ 上的点

若当点 $\boldsymbol{M}$ 沿曲线趋于 $\boldsymbol{M}_0$ 时，割线 $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}$ 趋向极限位置为直线 $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{T}$, 称此直线为曲线 Γ 在点 $\boldsymbol{M}_0$ 处的切线

过点 $\boldsymbol{M}_0$ 与切线垂直的平面称为曲线的法平面



二．方程

设空间曲线 Γ 的参数方程

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

$M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z)$ 分别对应参数 t 为 $t_0, t_0 + \Delta t$

割线 M_0M 的方向向量

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \,//\, (\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t})$$

取极限导出 Γ 的切向量

$$\boldsymbol{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

曲线 Γ ： $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

在 M_0 处的法平面方程

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

- 注意 由 $(dx, dy, dz) = (x'(t), y'(t), z'(t))dt$

$\Rightarrow$ (dx, dy, dz) 也是曲线的切向量

例　求曲线 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = 2e^t$

在相应于 t =0 的点处的切线和法平面

例　求曲线 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 10 \end{cases}$ 在点 (1, 1, 3) 的切线

（可看作隐函数形式的参数方程，求导可用链法则也可用全微分）

8.7.2 曲面的切平面与法线

一． 定义

由曲面 S 上所有过点 M_0 的光滑曲线在 M_0 的切线所组成的平面称为曲面 S 在 M_0 处的**切平面**

过点 M_0 与切平面垂直的直线称为曲面 S 在 M_0 处的**法线**

M_0

设曲面 S 的方程 $F(x,y,z)=0$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 S 上一点，而过 M_0 在曲面上的曲线为

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t)$$

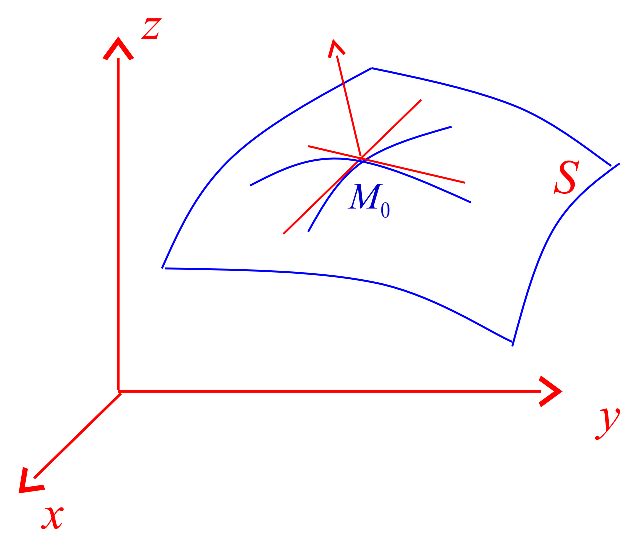
曲线在 $\boldsymbol{S}$ 上： $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$

$$\Rightarrow \quad (F_x, F_y, F_z)\cdot(x'(t), y'(t), z'(t)) = 0$$

在对应 $\boldsymbol{t_0}$ 的 $\boldsymbol{M_0}$ 点

向量 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

总是与 (F_x, F_y, F_z) 正交



说明

- 切平面定义的合理性
- 切平面的法向量：(F_x, F_y, F_z) （也称为 S 的法向量）

二． 方程

$\boldsymbol{S}$ 在 $\boldsymbol{M}_0$ 处的切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

在 $\boldsymbol{M}_0$ 处的法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

若曲面 $\boldsymbol{S}$ 的方程为 $z=f(x,y)$

法向量为

$$\boxed{\boldsymbol{n}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)}$$

- 回忆全微分的几何意义，近似曲面的平面

正是切平面

例 求曲面 $z=x^2+\frac{1}{4}y^2-1$ 上点（-1, -2, 1）处的切平面和法线方程

- 思考 曲面由参数方程 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$ 给出时，如何求其法向量?

H.W

习题 8

44 (1) (3)　　45

46 (1) (3)

47　　48 (1)