Chap7 —3

向量的数量积和向量积

7.3.1 向量的数量积

- 数量积

若 $a=(a_1,a_2,a_3), b=(b_1,b_2,b_3)$，定义

$$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的数量积或内积

- 运算律

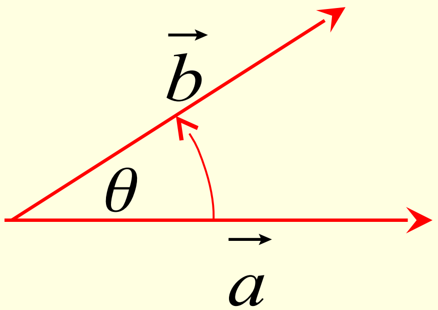
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ （交换律）

(2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ （结合律）

(3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ （分配律）

➢ 向量的夹角

将向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 平移到同一起点，表示它们的有向线段间的夹角 $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ 称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角



记为_$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

零向量与任一向量的夹角规定为任意的_可据需要取 **0** 到之间的任何值_

若 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$ ，称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 正交，记为

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

显然 $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 0, \pi \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \,//\, \vec{b}$

定理

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})}$$

用内积表示模和夹角

若 $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$(\vec{a} \perp \vec{b} \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$$

例 若 $a = (4, 7, -1), b = (-1, 2, 2)$，试求

$a \cdot b$ 与 $(\vec{a} \wedge \vec{b})$

例 若向量 $a + 3b$ 垂直于向量 $7a - 5b$

且向量 $a - 4b$ 垂直于向量 $7a - 2b$，试求

a, b 的夹角

显然

$$i = (1,0,0),\quad j = (0,1,0),\quad k = (0,0,1)$$

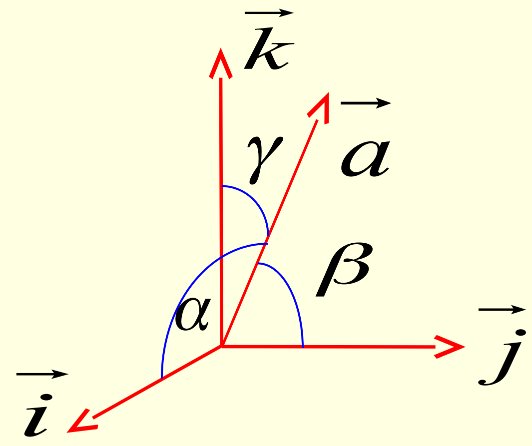
是两两正交的，故称为**标准正交基**

- 方向余弦

方向角 $\alpha=(\widehat{\vec{a},\vec{i}})$ $\beta=(\widehat{\vec{a},\vec{j}})$ $\gamma=(\widehat{\vec{a},\vec{k}})$

方向余弦

$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$



若向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$,

方向余弦的表示

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\qquad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

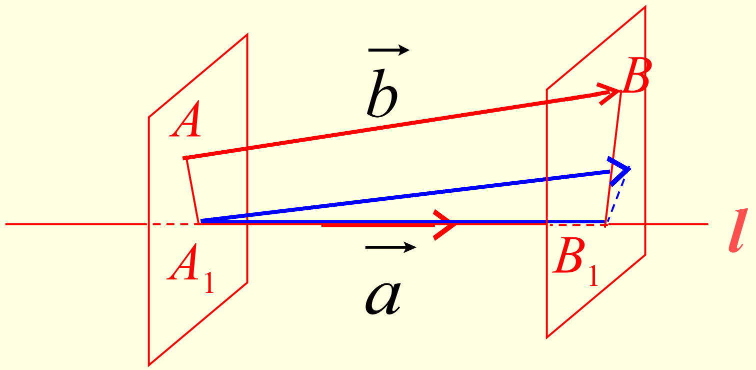
$\Longrightarrow$

- $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
- $\vec{a}$ 单位化后，三个坐标就是其方向余弦

➢ 向量的投影

若 $\vec{a} \neq 0$，向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影

$$b_{\vec{a}} \overset{def}{=} |\vec{b}|\cos(\vec{a},\hat{\vec{b}})$$ （实数）



图中 l 上的 A_1B_1 的长度是投影的绝对值

向量 A_1B_1 称为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 的投影向量，记为 $\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b} = b_{\vec{a}}\, a^0$$

➢ 数量积的几何解释

$$a \cdot b = |a| b_{\vec{a}}$$ （投影的放大或缩小）

当 $|a| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = b_{\vec{a}}$

因此

$$b_{\vec{a}} = b \cdot a^0$$

例 向量 $a = (2, -2\sqrt{2}, -2)$, $b = (3, -12, 4)$

求 $\vec{a}$ 的模和方向余弦及 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影

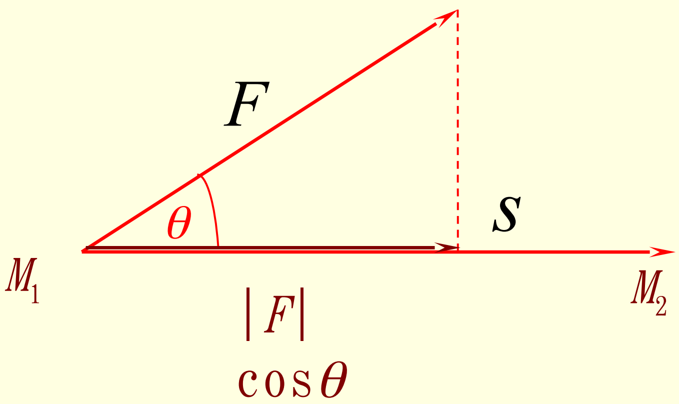
➢ 一个物理解释

物体在力 F 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，力 F 所作的功为 W

位移 $s = \overrightarrow{M_1 M_2}$

F 在位移 s 方向分量

$$\left|F\right|\cos\theta$$



从而

$$W = \left|F\right|\cos\theta\left|s\right| \Rightarrow \boxed{W = F\cdot s}$$

H.W

习题 7

13 (2) (3)

14 (提示:$\left| a+b \right|^2 = (a+b, a+b) = \cdots$)

17 18(1)

20 21

7.3.2 向量的向量积

- 向量积

若 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3), \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，定义

$$\vec{a}\times\vec{b} \overset{def}{=} (a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$$

称为向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的向量积或外积

可表达为

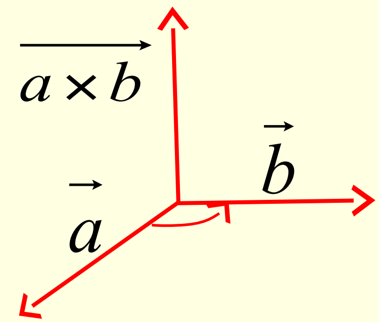
$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

➢ 几何意义

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$

$\boxed{\vec{a},\vec{b}\ \text{为邻边的平行四边形面积}}$

外积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 方向与 $\vec{a},\vec{b}$ 均正交，且成右手系



- 当$a=(a_1,\,a_2),\,b=(b_1,\,b_2)$ 为二维向量

以 $a\,,b$ 为邻边的平行四边形的面积为

$$\boxed{A=\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right\|}$$

运算律

(1) $a \times b = -b \times a$

(2) $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda (a \times b)$

(3) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

容易验证_

$$i \times i = 0, \quad j \times j = 0, \quad k \times k = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

向量的混合积

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} \text{ 记为 } [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$$

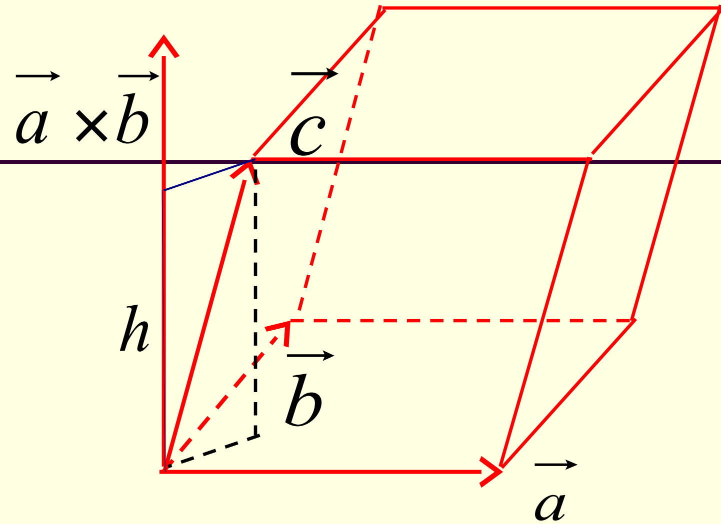
根据内积定义

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos(\vec{a}\times\vec{b},\hat{}\ \vec{c})$$

混合积的几何意义

$$\text{由于} \quad |\vec{c}|\cos(\vec{a}\times\vec{b},\hat{}\ \vec{c}) = c_{\vec{a}\times\vec{b}}$$

$$\Rightarrow [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = |a\times b|\ c_{\vec{a}\times\vec{b}}$$



$$\left|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$$

是以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为同顶点三条棱的平行六面体的体积

向量混合积的坐标表示

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

例　求与向量 $\vec{a}=(1,0,-2)$, $\vec{b}=(1,3,-4)$ 均正交的单位向量 $\vec{c}$ ，且求以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为同顶点三条棱的平行六面体的体积

- 几个结论

(1) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 成右手系，$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]>0$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 成左手系，$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]<0$

(2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 $\xleftrightarrow{\text{充分必要条件}}$ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$

(3) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\times\vec{a}\cdot\vec{b}$

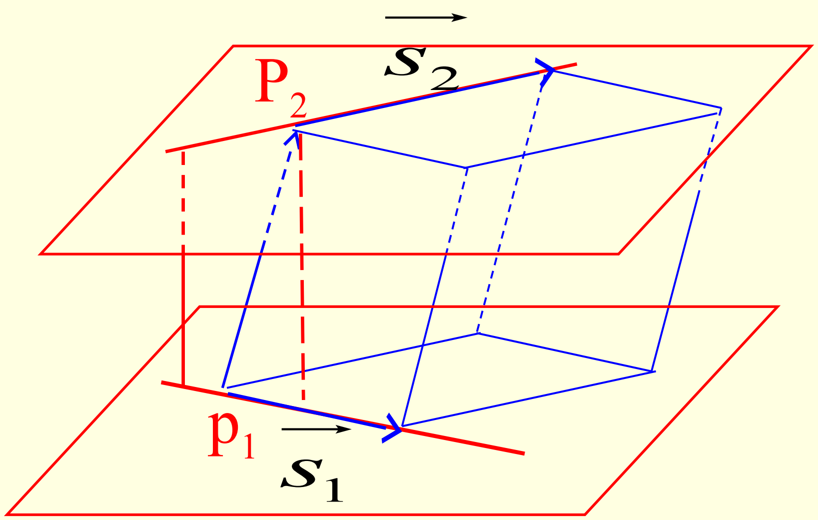
$=\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}$

例　试判别 $A(1,0,2), B(3,-1,1), C(0,-2,-1), D(-1,2,3)$ 是否共面？若不共面，求以这四点为顶点的四面体的体积

例　设 l_1 与 l_2 是异面直线，l_1 过点 P_1，方向与

向量 $\vec{s}_1$ 平行，l_2 过点 P_2，方向与向量 $\vec{s}_2$ 平行，

试求 l_1 与 l_2 之间的距离.



$$d=\frac{\left|[\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{P_1P_2}]\right|}{\left|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\right|}$$

$$=\boxed{\frac{\left|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\right|}}$$

H.W

习题 7

22 (2)(3) 23

24 25 26 28