Chap6—5

常系数线性微分方程

6.5.1 常系数线性齐次方程

二阶方程形式

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0}$$

其中 ***P,q*** — 常数

令 $y = e^{rx}$, 得到

$$r^2 + pr + q = 0$$

特征方程，这方程的两个根称为 特征根

情况讨论

(1) 特征方程有相异实根 r_1,r_2.

基本解组: $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$

(2) 特征方程有相同实根 r.

基本解组: $e^{rx}, \xrightarrow{liouville公式} xe^{rx}$

(3) 特征方程有共轭复根 $\alpha \pm i\beta$

基本解组: $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$

$\longrightarrow e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad e^{\alpha x}\sin\beta x$

二阶齐次常系数微分方程的通解_

特征根情况	通解形式
相异实根 r_1, r_2	$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
相同实根 r	$c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$
共轭复根 $\pm i\beta$	$c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

例　求解方程 $y''+5y'+6y=0$

例　求解方程 $y''+4y'+9y=0$

例　求解方程 $y''-4y'+4y=0$

问题与猜测

二阶齐次常系数微分方程基本解组的结论如何推广到 n 阶齐次常系数微分方程？

例　求解方程 $y'''-3y''+3y'-y=0$

H.W

30 (1) (3) (8) (9) ,

31 (1) (2) (3)

6.5.2 常系数线性非齐次方程

方程形式_

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x)}$$

求出对应齐次方程基本解组后，可用常数变易法求出特解

非齐次项 $f(x)$ 为某些特殊形式时，则可用待定系数法来求特解

I. $f(x)=(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m)e^{\lambda x}$

方程的特解形式为_

$$\boxed{y^*=x^k(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m)e^{\lambda x}}$$

k 是 λ 作为特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根的重数（ λ 不是特征根是为 **0** 重根）

因此 k 可能的取值为 **0**， **1**， **2**

例　写出下列方程一个特解的待定形式_

(1) $y'' - 2y' + y = 5xe^{x}$

(2) $y'' - 6y' + 10y = (x+1)e^{3x}$

(3) $y'' + y' = x^{2} + 1$

(4) $y'' + 3y' - 4y = e^{x}$

例 求解方程

(1) $y'' - 3y' + 2y = 3xe^{-x}$

(2) $y'' - 2y' + y = 3xe^{x}$

这一待定系数法适用于高阶非齐次

常系数线性方程和非齐次项 $f(x)$ 为复数的情况

H.W

练习题 **32 (1),(4) 33 (1)(4)**

补充题 **21**

II. $f(x)=[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$

$P(x),Q(x)$ 是最高次数为 $\boldsymbol{m}$ 的多项式

方程的特解形式

$$\boxed{y^*=x^k[A(x)\cos\beta x+B(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}}$$

$\boldsymbol{k}$ 是$\alpha+i\beta$ 作为特征方程 $\boldsymbol{r^2+pr+q=0}$ 的根的重数 **(** 若不是特征根则认为是 0 重根 **)**

$A(x), B(x)$ 是 m 次待定多项式

注意：即使 f 中 $P=0$(或 $Q=0$) ，所设特解中仍应同时含 **cos$\boldsymbol{\beta x}$** 和 **sin$\boldsymbol{\beta x}$**

例 写出下列方程一个特解的待定形式_

(1) $y'' - y = xe^x \cos x$

(2) $y'' + 4y = x\sin 2x$

(3) $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x$

例 求解方程 $y'' + y = 2\cos x$

例 求解方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

(比较系数时宜从多项式最低次数开始)

例　质量为 m 的物体系于弹簧的一端沿 x 轴运动，其平衡位置在原点，若物体在周期性的外力 $H\sin pt$ 作用下运动，弹簧恢复力与位移成正比 (比例常数为 k)，求物体在时刻 t 的位移

解　设物体位移为 $x(t)$，依 Newton 第二定律

$$mx'' = H\sin pt - kx$$

$$\Longrightarrow \quad x'' + \omega^2 x = h\sin pt$$

其中 $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$，$h = \dfrac{H}{m}$

二阶非齐次常系数微分方程

对应齐次方程通解

$$c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t = A\sin(\omega t+\varphi)$$

(1) 当$p \neq \omega$

特解 $$\boxed{x^* = \frac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt}$$

P 越接近 ***ω***，由外力引起的强迫振动振幅就越大

(2) 当$p=\omega$

特解 $$\boxed{x^* = -\frac{h}{2\omega}t\cos\omega t}$$

振幅随时间增加而无限增大，这就是共振现象

当方程的非齐次项是两个函数的和 :f_1+f_2，

而 f_1 与 f_2 均具有以上所介绍的 I 、 II 类函数形式
可以分别考虑以 f_1 与 f_2 为非齐次项的两个方程，
然后据叠加原理将求得的两个解相加即可

例　求解方程　$y''+y=x^2+\cos x$

H.W　练习题　32 (3) (5) 33 (3)

32 (7) (8)

例　　函数 $y=y(x)$ 满足

$$\int_0^x (x-t)y(t)dt = \sin x - y(x)$$

试求 $y(x)$

H.W　35

6.5.3 Euler 方程_

二阶 **Euler** 方程形式_

$$\boxed{x^2 y'' + pxy' + qy = 0}$$

其中 ***p,q*** 是实数

解法（变量代换） $x = e^t$

$$xy' = \frac{dy}{dt} \qquad x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)y$$

$$\xrightarrow{D=\frac{d}{dt}} \quad xy' = Dy \qquad x^2 y'' = D(D-1)y$$

方程化为

$$\boxed{[D(D-1)+pD+q]y=0}$$

（注意：正确理解符号的含义）

特征方程

$$r(r-1)+pr+q=0$$

求出以 t 为自变量的方程的解

$\Rightarrow$ 原方程的解

例　求解方程 $x^2y'' - xy' + y = 0$

例　求解方程 $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

例　求解方程 $x^2y'' + xy' - y = 3x^2$

问题和猜想（高阶 Euler 方程的解法？）

用变量代换 $x = e^t$

$$x^n y^{(n)} = ?$$

伟大的欧拉（Leonhard Euler， 1707 ～ 1783）

- 数学天才：约翰 · 伯努利 指引

  13 岁进巴塞尔大学
- 著作辉煌：涉及几乎每一数学领域，

  886 本书和论文 ， 汇成 100 巨册
- 毅力惊人：失明 17 年，完成书和约 400 篇论文
- 非凡记忆和心算力 ： 前 100 个素数的前六次幂
- 风格高尚：支持年青的拉格朗日
- 热爱生活

- 瑞士法郎上的欧拉

- 邮票上的欧拉