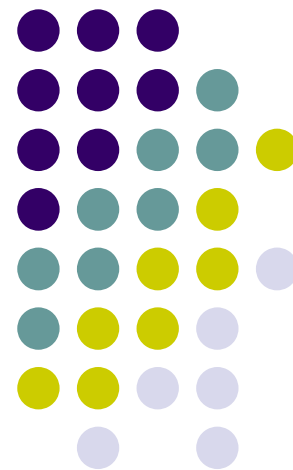


Chap 4 .3

Taylor 定理





- 回顾增量公式（微分）

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

即 $f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{微分}} + o(x - x_0)$

微分

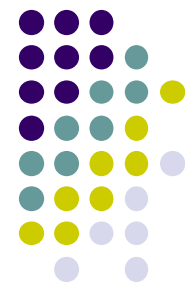
得到用线性函数来近似函数的公式，但是缺点是

(1) 不够精确；(2) 误差是定性的，难确切估计

Taylor 公式将考虑用多项式逼近函数

多项式的形式：在 x_0 应等于 $f(x_0)$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$



■ 一点附近的 Taylor 公式

$f(x)$ 在 x_0 附近定义, 且在 x_0 有 n 阶导数,

则

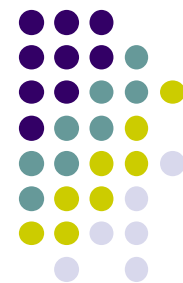
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

➤ 分析 若记

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

结论即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$



➤ 怎么证明这个结论?

很自然的想法是多次用 L'Hospital 法则

(问题出在最后一步)

回到 $n-1$ 次

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)]}{n!(x - x_0)}$$

➤ 注意条件相当弱，只要在 x_0 一点有 n 阶导数



■ 区间 (a,b) 上的 Taylor 公

式 $f(x)$ 在 (a, b) 有 $n+1$ 阶导数, $x_0 \in (a, b)$, 则在

(a, b) 成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \xi \text{ 在 } x, x_0 \text{ 之间}$$



➤ 仍记 $P(x)$ 为前述的多项式，结论为

$$\frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

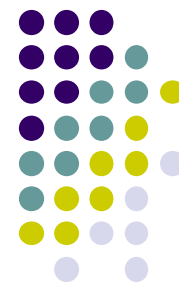
➤ 可用 Cauchy 定理证明（用 n 次）

例 写出 $f(x) = x^2 \ln x$ 在 $x = 1$ 处的二阶 Taylor 公式

■ 一些常用公式（Maclaurin 公式）

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\theta \in (0,1)) \text{ 或 } o(x^n)$$



➤ $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

➤ $f(x) = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{\sin(\theta x + \frac{2k+1}{2}\pi)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

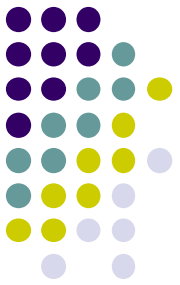
➤ 试写出 $\cos x$ 的 Maclaurin 公式

➤ $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

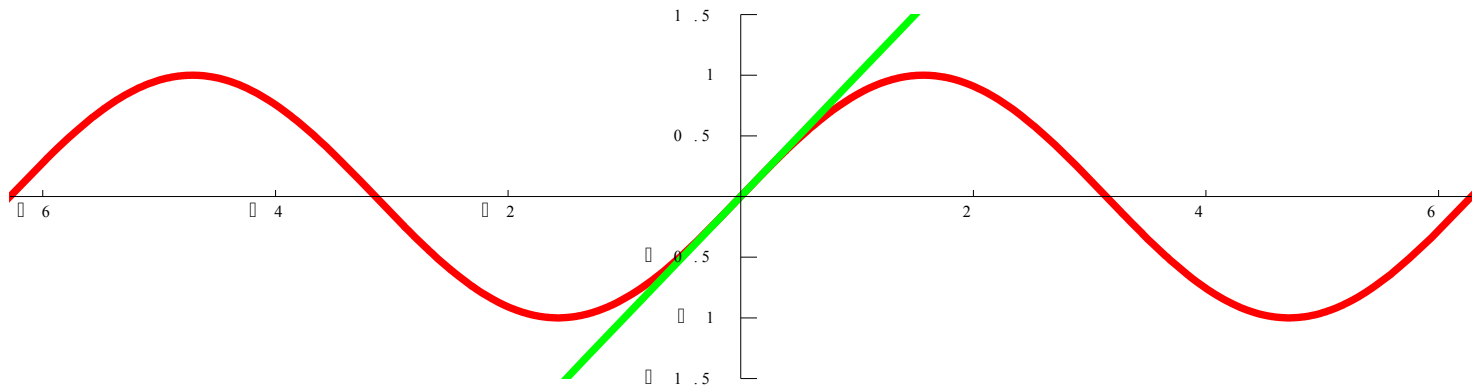
➤ $f(x) = \ln(1+x)$

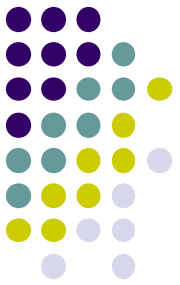
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}$$



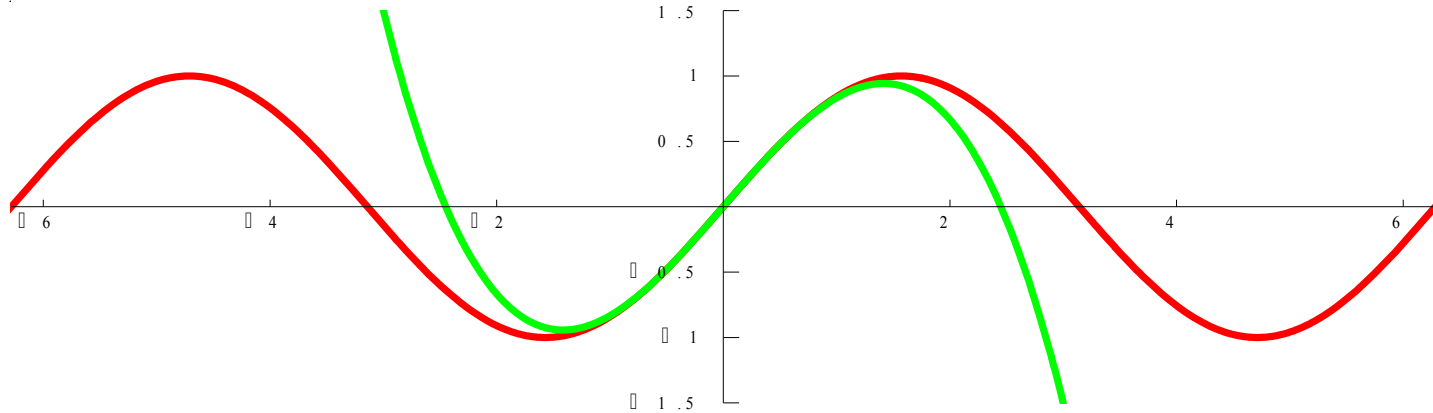
■ 用多项式逼近 $\sin x$ 的图像

➤ $n=1$, 用直线近似正弦曲线

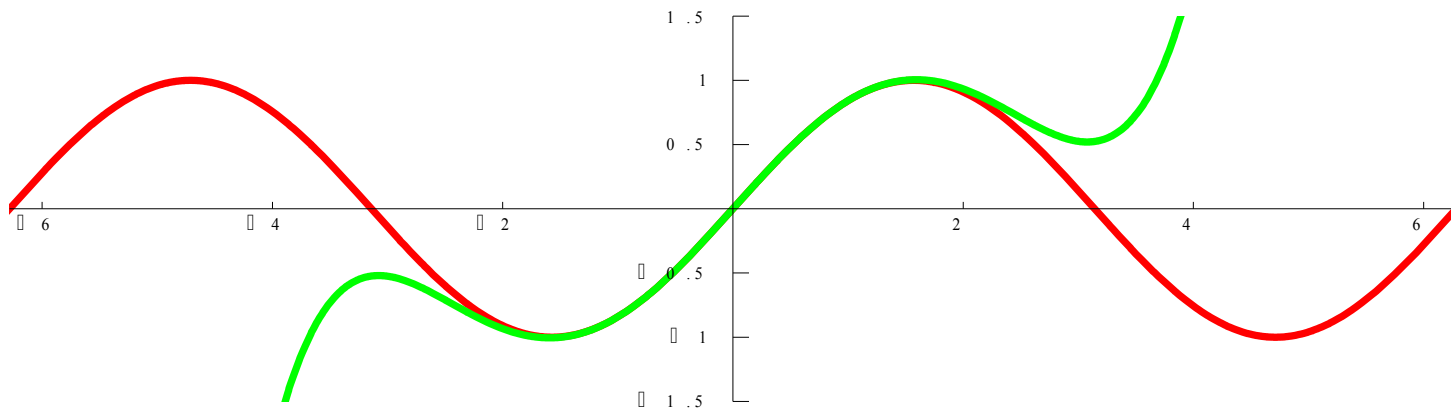


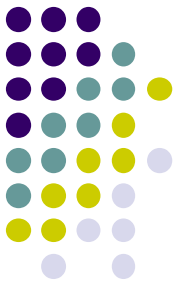


➤ $n=3$, 用三次曲线近似正弦曲线

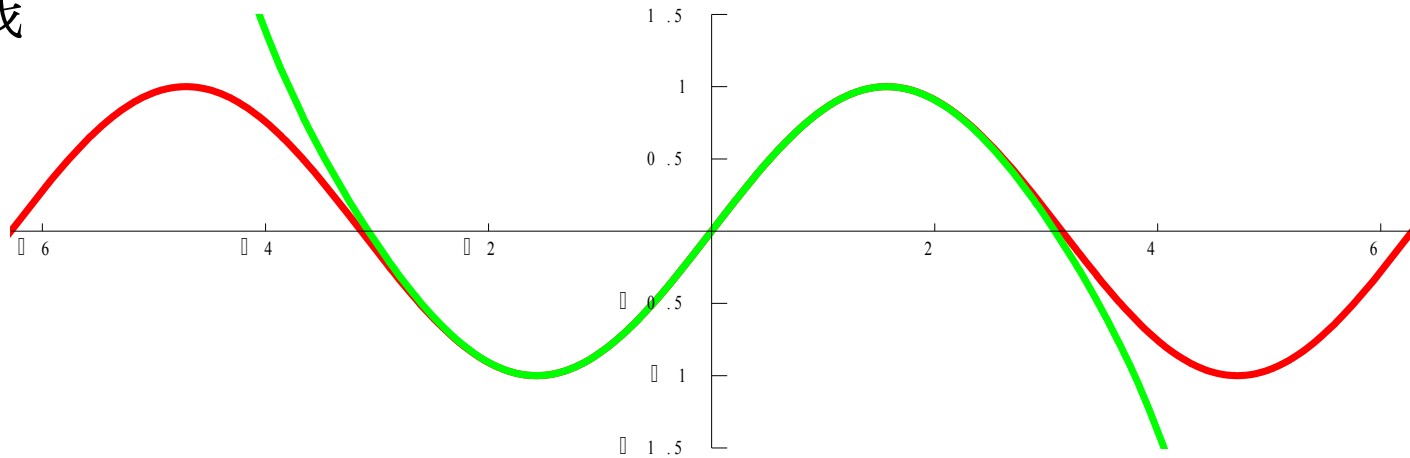


➤ $n=5$, 用 5 次曲线近似正弦曲线

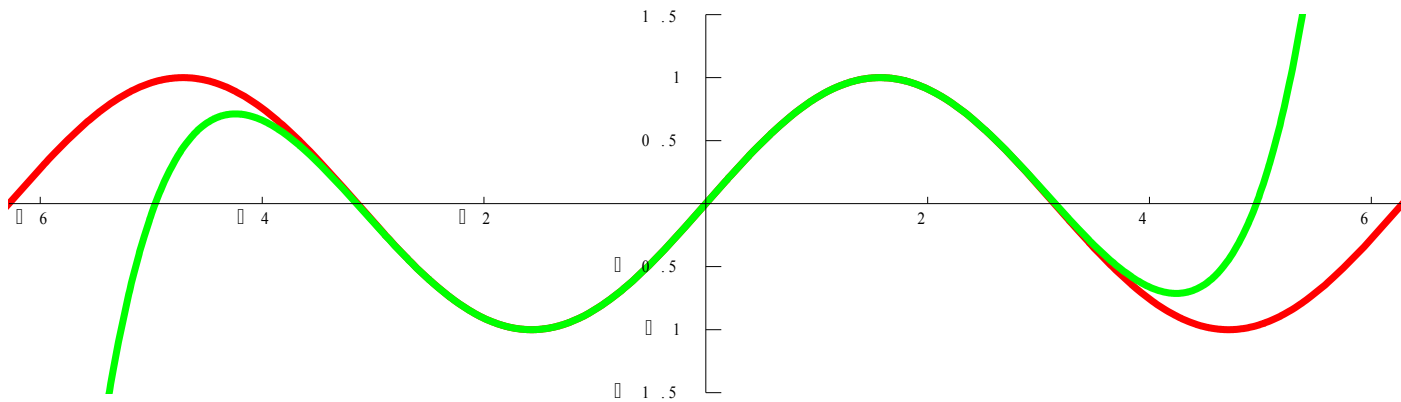


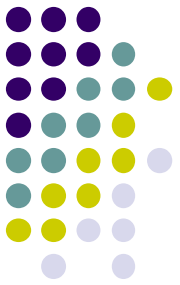


➤ $n=7$, 用 7 次曲线近似正弦曲线

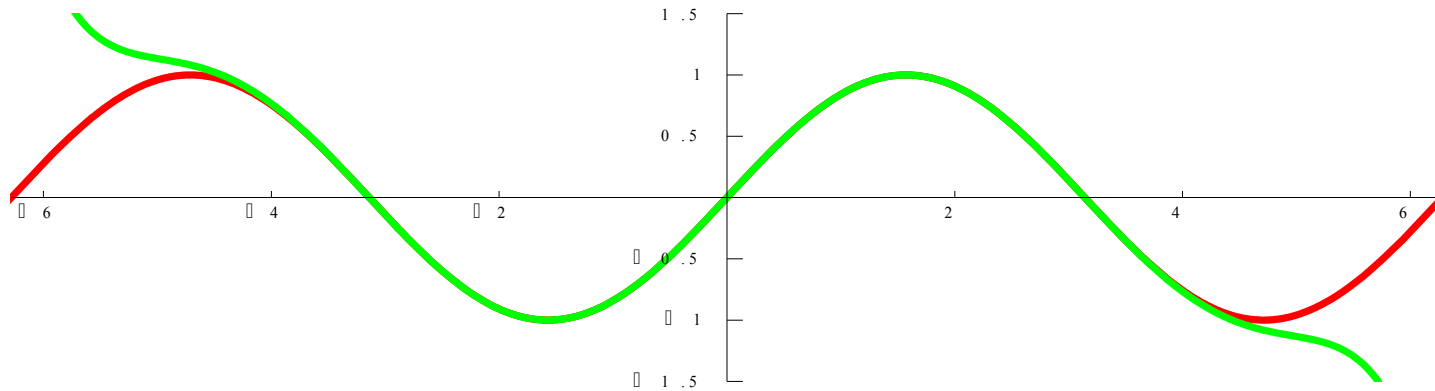


➤ $n=9$, 用 9 次曲线近似正弦曲线

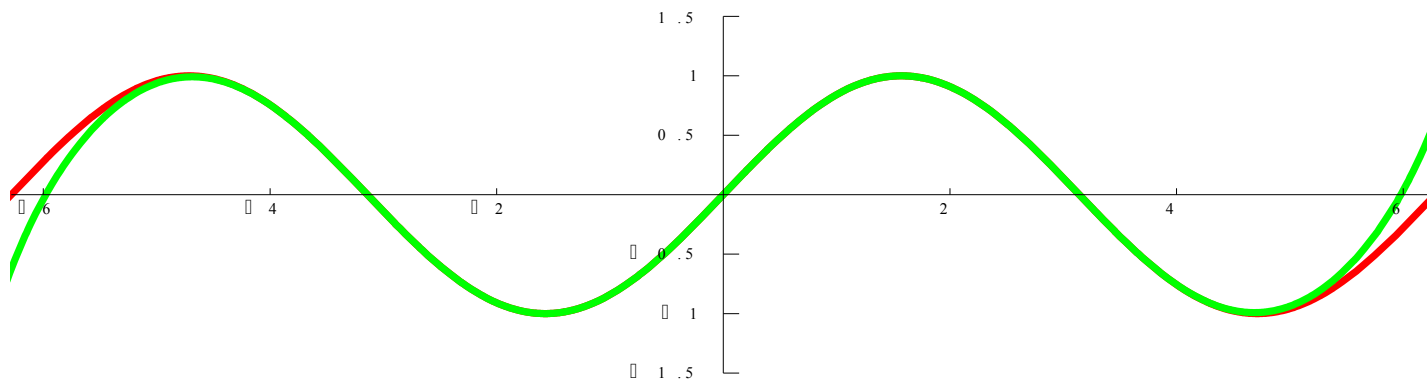




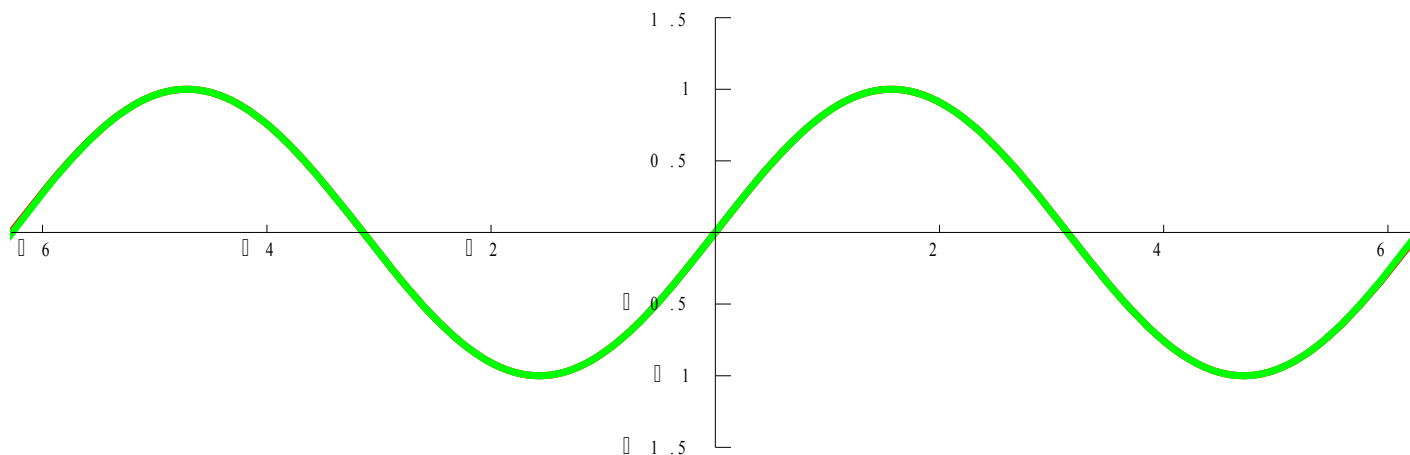
➤ $n=11$, 用 11 次曲线近似正弦曲线



➤ $n=13$, 用 13 次曲线近似正弦曲线



➤ $n=17$, 用 17 次曲线近似正弦曲线



■ 应用例子

例 试计算 e 的近似值, 误差小于 10^{-6} ($n=9$)

例 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

$e \approx 2.718281$



例 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$

(往年高数竞赛题)

例 求下列函数的 Maclaurin 公式

(1) $f(x) = xe^x$

(2) $f(x) = \ln(2 - 3x + x^2)$

例 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域二阶可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^3} = 0$$

试求 $f(0)$, $f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值 (往届期中试题)



例 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 有二阶导数, $f''(x) > 0$, 试证:

$\forall x, h \in \mathbf{R} \ (h \neq 0)$

$$f(x+h) + f(x-h) > 2f(x)$$

H.W 习题 4

26 (2) (3) (5) 28 31



本节要点

➤ Taylor 公式仍然是对函数的逼近 (近似)
它比线性近似更加精确

➤ 应用 Taylor 公式主要在两类习题

1) 求极限 , 可用 Peano 余项形式

2) 证明题 , 一般需要应用 Lagrange 余项形式