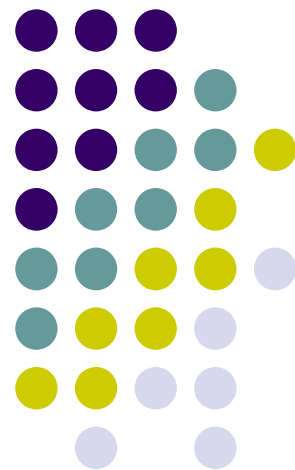


Chap 4 .4

利用导数研究 函数性态





4.4.1 函数的单调性与极值

■ 单调性判别法

$f(x)$ 在区间 I 可导, 则

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ 在 } I \text{ 严格单调增加}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ 在 } I \text{ 严格单调减少}$$

- 若 $f'(x)$ 仅在 I 内的孤立点为零, 结论不变
- I 为闭区间时, 端点只要连续, 结论不变
- 若 $f'(x) \geq 0$, 结论中的的严格单调改为单调
- 逆命题成立吗?



例 讨论函数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ 的单调性

例 试证 当 $x > 0$ 时, $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$

例 试证 $\forall a, b > 0$, 成立

$$ae^{2a} + be^{2b} > (a+b)e^{a+b}$$

H.W 习题 4

32 (1) (3) (4) (5) 33 (2) (4) (5)

34 35

另一个证法



$$ae^{2a} + be^{2b} \quad (a+b)e^{a+b}$$

$$\Leftrightarrow ae^a(e^a - e^b) - be^b(e^a - e^b)$$

(若 $a > b$)

$$\Leftrightarrow ae^a - be^b \quad \text{容易证明}$$

若 $a < b$, 类似; 而 $a = b$, 结论显然



■ 极值判别法

回顾 Fermat 定理，想一想极值点应在哪里？

驻点 $f(x)$ 导数为零的点

➤ $f(x)$ 的极值点应为驻点或导数不存在的点

➤ 极值第一判别法

$f(x)$ 在 x_0 连续且在其去心邻域可导，则

(1) 当 $f'(x)$ 在 x_0 左正右负， x_0 是 $f(x)$ 的极大值点

(2) 当 $f'(x)$ 在 x_0 左负右正， x_0 是 $f(x)$ 的极小值点

(3) 当 $f'(x)$ 在 x_0 左两侧同号， x_0 不是 $f(x)$ 的极值点



例 讨论 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x+1)$ 的单调性和极值

例 a, b, p, q 均为正实数, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

试证 Young 不等式:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

(往年高数期中考试试题)



➤ 极值第二判别法

$f(x)$ 在 x_0 有二阶导数, $f'(x_0)=0$, 则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 取极大值

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 取极小值

例 试求函数 $f(x) = e^x \cos x$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的极值

例 $y = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \pi/3$ 取得极
值, $a = ?$, 此
极值是极大值还是极小值



例 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$
所确定, 求其极值

例 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 有二阶导数, $f''(x) > 0$, 试证:
 $\forall x, h \in \mathbf{R} \ (h \neq 0)$

$$f(x+h) + f(x-h) > 2f(x)$$

例 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一根,
求 k 的值

H.W 习题 4 36 (2) (3) (6) 37 (1) (2) (4) 38 39

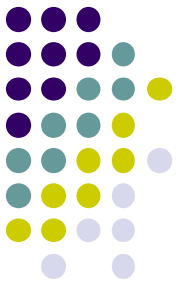


■ 最值的求法

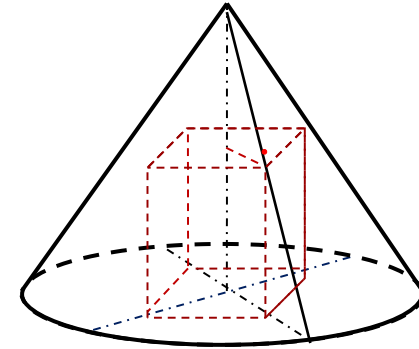
➤ 连续函数 $f(x)$ 的最值点应为极值点或区间的端点

例 求 $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ 在 $[-2, 3]$ 的最大最小值

➤ 当在解决具有实际背景的应用问题时，
当可导函数在定义区间仅有惟一驻点时，而
问题又显然有解且不可能在端点达到，则此驻点
必为所求最大（小）值点



例 求底面半径为 2cm 高为 3cm 的正圆锥内内接长方体的最大体积



H.W 习题 4

41 (1) (3) 43 47

48 54(1)



4.4.2 函数的凹凸性和拐点

■ 凹凸性

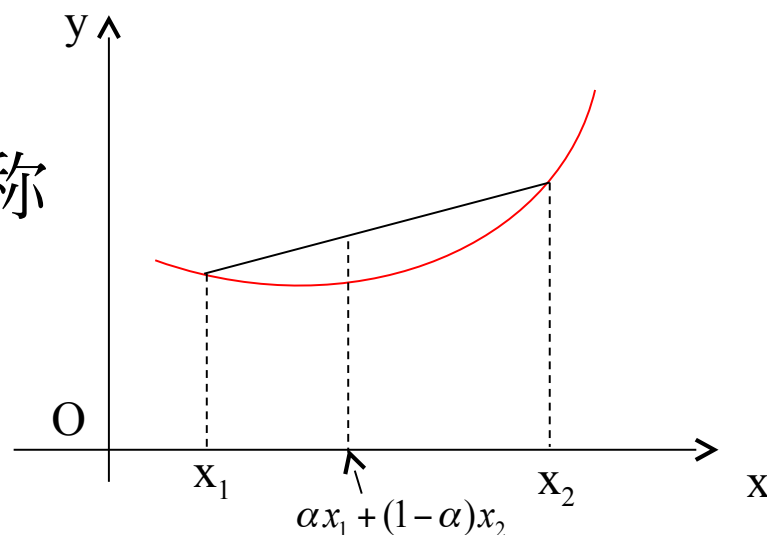
$f(x)$ 在区间 I 连续, 且 $\forall x_1, x_2 \in I, \alpha \in (0, 1)$, 有

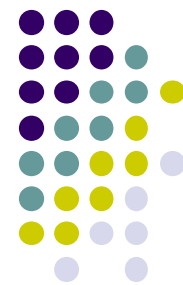
$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 I 是下凸的, 也称函数曲线在 I 是下凸的
(类似地有上凸的概念)

➤ 式中 \leq 改为 $<$ ($x_1 \neq x_2$ 时), 称 $f(x)$ 严格下凸

➤ 下凸: 割线在曲线的上方





凸性第一判别法

利用 Lagrange
定理可证

若 $f(x) \in D(a,b)$, 则

- (1) $f'(x)$ 严格单调增加时, $f(x)$ 在 (a,b) 严格下凸
- (2) $f'(x)$ 严格单调减少时, $f(x)$ 在 (a,b) 严格上凸

凸性第二判别法

若 $f(x)$ 在 (a,b) 二阶可导, 则

- (1) $f''(x) > 0$ 时, $f(x)$ 在 (a,b) 严格下凸
- (2) $f''(x) < 0$ 时, $f(x)$ 在 (a,b) 严格上凸



■ 拐点

$f(x) \in C(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$ 是 $f(x)$ 下凸与上凸的分界点, 则称 x_0 是函数 f 的拐点, 而称 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

拐点的判别

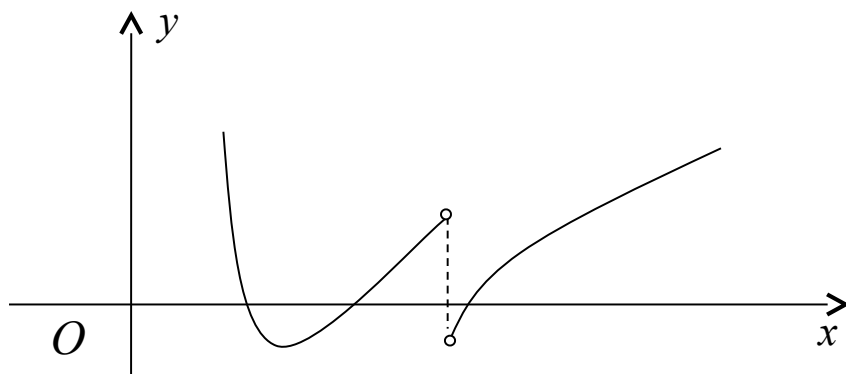
连续函数 $f(x)$ 在 x_0 处二阶导数为零 (或不存

- (1) 在 x_0 两侧异号时, x_0 是 $f(x)$ 的拐点,
- (2) 在 x_0 两侧同号时, x_0 不是 $f(x)$ 的拐点



例 设 $f(x) = e^{-x^2}$, 试讨论其凸性与拐点

例 已知 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, $f'(x)$ 的图形如下,
试求 $f(x)$ 的极值点和拐点数





例 试证对 $\forall a, b > 0$, 成立

$$a^a b^b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$$

H.W 习题 4

49 (1) (3) (4)

50 52 (1) 54(3)



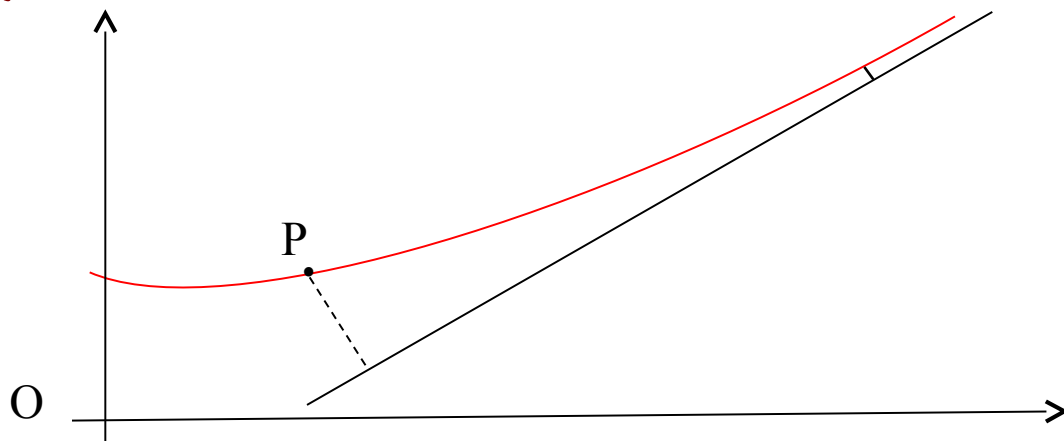
4.4.3 函数的作图

■ 曲线的渐近线

设 P 是曲线 C 上的一点, O 是原点, L 是直线, 若

$$\lim_{OP \rightarrow +\infty} d(P, L) = 0$$

其中 $\text{dist}(P, L)$ 是 P 到 L 的距离, 则称 L 是 C 的渐近线



铅直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$

的铅直渐近线

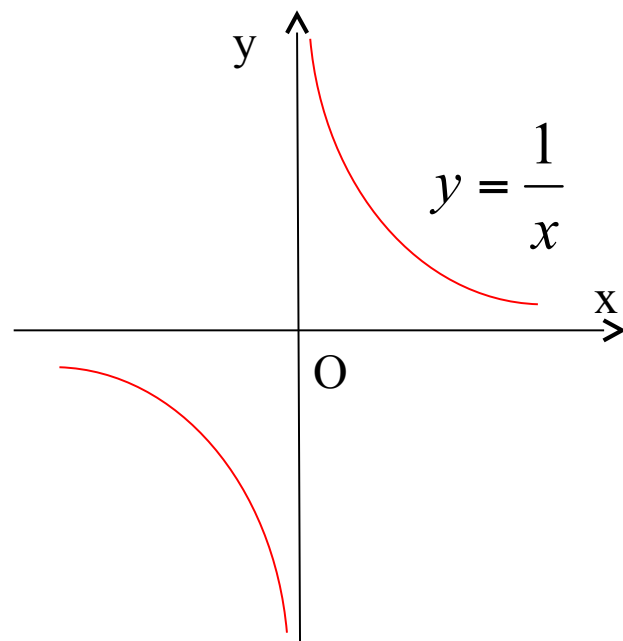
➤ $x \rightarrow x_0^+$ 也可为 $x \rightarrow x_0^-$,

表明曲线在渐近线的哪一侧

例 讨论函数曲线

$$y = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

的铅直渐近线



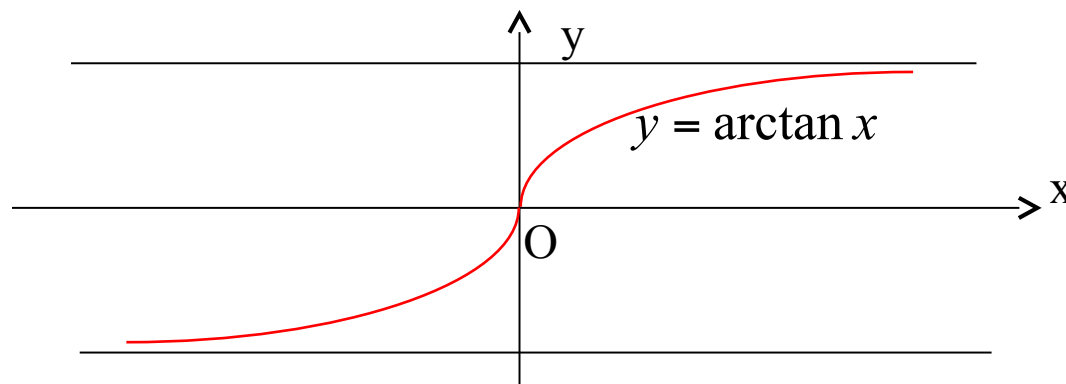
水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 则直线 $y = b$ 是曲线 $y = f(x)$



水平渐近线

➤ $x \rightarrow +\infty$ 也可为 $x \rightarrow -\infty$, 表明曲线在何方向接近渐近线



例 讨论曲线 $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x-1}$ 的水平渐近线

斜渐近线



如果 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线，
则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

(或 $-\infty$) $\xrightarrow{\uparrow}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$$

斜渐近线
的求法

例

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 2x - 3}$$

例 $y = y(x)$ 是 $y^3 - x^3 + 2xy = 0$ 的隐函数，由
曲线 $y = y(x)$ 存在斜渐近线，试求之



■ 函数图形的描绘

结合讨论函数的性态与渐近线作图步骤

- 讨论函数 $f(x)$ 的定义域、奇偶性、周期性
- 求出导数 f' , f'' , 确定 f 的间断点和 f' , f'' 为零或不存在的点
- 以上述点将定义域分成若干区间, 通过列表讨论单调性、极值、凸性和拐点
- 求出渐近线
- 描绘图形, 有时可取图形上几个特殊点



例 考察函数的性态且作图:

$$y = \frac{x|x|}{1+x}$$

H.W 习题 4

56 (2) (3)

57 (1) (4)