Chap 4

微分中值定理和导数的应用

Chap 4 .1

微分中值定理

4.1.1 Fermat 定理

- **极值**

若在点 x_0 的邻域，有

$$f(x) \le f(x_0),$$

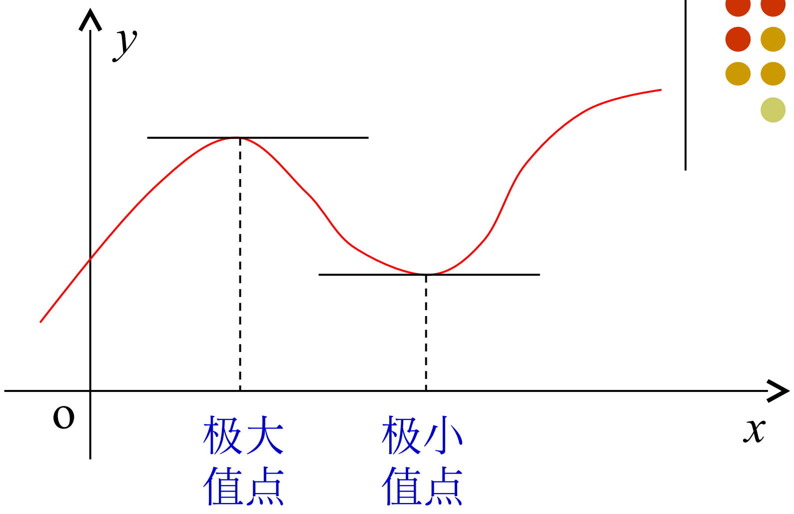
称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值，称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点（类似地有极小值的概念）

- **Fermat 定理**

若 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值，且 x_0 可导，则

$$f'(x_0) = 0$$

- 几何上看很自然在曲线的“峰”与“谷”处切线呈水平



- **Fermat**

（法国 1601-1665 年）

- 业余数学之王

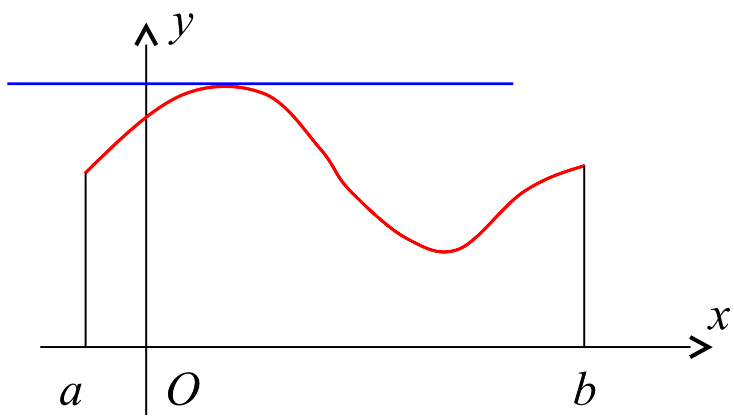
- 专攻法律，成为律师、议会议员
- 博览群书 才学出众 数学天才

  贡献在数论 概率 几何 微积分 光学
- 性情淡泊 谦抑宁静

4.1.2 Rolle 定理

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ f(x)\in C[a,b]\\(2)\ f(x)\in D(a,b)\\(3)\ f(a)=f(b)\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{c}\exists\xi\in(a,b)\\ f'(\xi)=0\end{array}$$

- 从几何图形分析



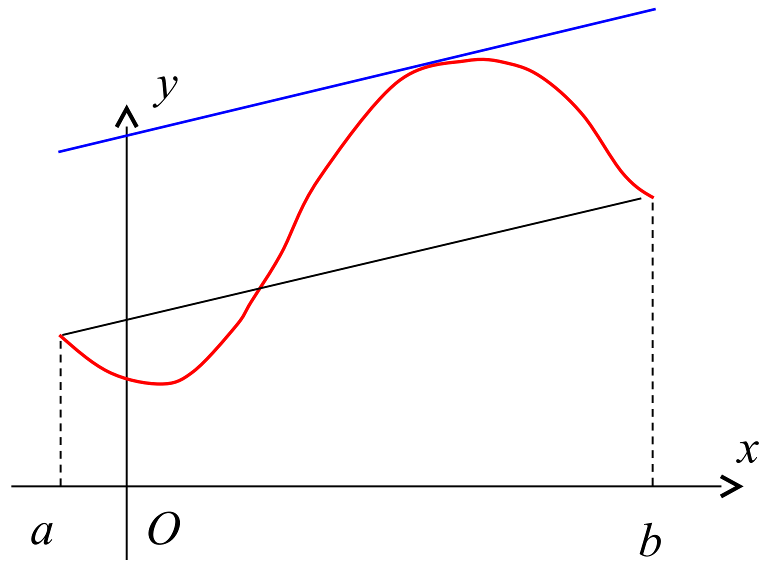
- 证明的思路：有没有极值点

能否从运动解释这定理?

4. 1. 2 Lagrange 定理

$$
\left.\begin{array}{l}(1)\ f(x)\in C[a,b]\\(2)\ f(x)\in D(a,b)\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l}\exists\xi\in(a,b)\\ f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\end{array}
$$

- 从几何图形分析



- 证明的思路：能否应用 Rolle 定理?

你能构造出这个辅助函数吗?

- 分析结论，或者观察图形

➢ 证明 *Lagrange* 定理的分析过程

1. 根据存在性结论，考虑应用 *Rolle* 定理
2. 改变结论形式，目的是符合 *Rolle* 定理的结论形式：

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

3. 左端是哪个函数在点 ξ 的导数呢?
4. 显然第一项是 $f(x)$ 的导数，第二项是 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ 的导数，这样就得到辅助函数了

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

5. 剩下就是验证 $F(x)$ 是否满足 *Rolle* 定理的条件
6. 连续、可导都是显而易见的，但是 $F(x)$ 在端点的值验证不方便，能否稍改变一下?
7. 注意改变后 $F(x)$ 的导数不能变，只能加减常数

➢ Lagrange 定理结论的另一形式

$$a < \xi < b \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{\xi - a}{b - a} < 1,\ \text{记}\ \theta = \frac{\xi - a}{b - a},$$

则 $\xi = a + \theta(b - a)$，从而定理的结论： $\exists \theta \in (0,1)$,

$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)](b - a)$$

若取 $a = x, b = x + \Delta x$，则

$$\boxed{\exists \theta \in (0,1),\quad f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x)\Delta x}$$

关于 Lagrange

（法国 1736 – 1813 年）

- 曾被誉为欧洲最伟大数学家
- 19 岁因“变分法”的成就担任数学教授
- 在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献
- 品格高尚、虚若怀谷，广受尊敬

- 推论

$$\boxed{f'(x)=0\ \ (x\in I)\ \Longrightarrow\ f(x)=c\ \ (x\in I)}$$

例 $\alpha>0$，求证：$\dfrac{\alpha}{1+\alpha}<\ln(1+\alpha)<\alpha$

例 设 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$

试证：方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 在 $(0,\ 1)$ 至少有一个根

（辅助函数法）

例 设$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，$f(a)=f(b)=0$

求证: $\exists\xi\in(a,b)$，$f'(\xi)=f(\xi)$

例 $0<a<b$, $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，$f(a)=f(b)=0$

试证: $\exists\xi\in(a,b)$，$\dfrac{f(\xi)}{\xi}=\dfrac{f'(\xi)}{2014}$

（往年试题更改）

H.W 习题 4

4 5 6 9

11 (1) (4) 12 (2) 14 16

4.1.2 Cauchy 定理

(1) $f(x), g(x) \in C[a,b]$

(2) $f(x), g(x) \in D(a,b)$

且 $g'(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists \xi \in (a,b)$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

- 是 Lagrange 定理的推广
- 证明方法

能否对 f, g 分别用 Lagrange 定理?

$g(a) \neq g(b)$ 吗?

怎样构造辅助函数?

例设 $f(x)\in C[a,b],(0<a<b)$，且 f 在 (a,b) 可导

试证 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\xi^2 f'(\xi)}{ab}$$

H.W

习题 4　18　19*

本节要点

- 了解极值的概念
- 了解中值定理内容和含义
- 熟悉 *Rolle* 定理和 *Lagranre* 定理 (条件和结论)

会用辅助函数法证明相关习题