第六章

第六节　微分方程数值解

（自学）

设微分方程组
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t,x,y) \end{cases}$$

初始条件 $x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$

Euler 方法十分简单，就是用差商代替微商，即

$$\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k}, \qquad \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k}$$

通常取 Δt 为常数 τ, 就得到由第 k 步

的值到第 k+1 步的值之间的关系式

Euler 迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \tau f(t_k, x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \tau g(t_y, x_k, y_k) \end{cases}$$

其中 $\tau = \Delta x,\ t_k = t_0 + k\tau$

由初值（x_0, y_0）可以逐步求出一系列的（x_k, y_k）

如果是一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0$$

那么以差商代替微商，步长 Δt 为常数 τ，得到迭代格式

$$x_{k+1} = x_k + \tau f(x_x, t_k)$$

其中 $t_k = t_0 + k\tau$

由初值 x_0 就可以逐步求出一系列的 x_k

当方程的阶是二阶以上的情况，一般可以为一阶微分方程组，以二阶为例

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x',x,t),\quad x(t_0)=x_0\quad x'(t_0)=\tilde{x}_0$$

引进函数 $y=x'$，那么问题转化为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=f(y,x,t) & x(t_0)=x_0\\[2ex] \dfrac{dx}{dt}=y & y(t_0)=\tilde{x}_0\end{cases}$$

显然就可以应用 **Euler** 法求数值解