

第四天练习

拓扑导引

2021 唯理中国 “思考数学与科学” 工作坊

讲师：王滢

邮箱：ywangx@umich.edu

这个练习是代数几何中的一个经典又有趣的例子的简化。我们将通过这个练习巩固对拓扑定义的理解，思考拓扑空间相较于度量空间给予了我们多少新的可能性。

1. 我们的目标是在加上 0 的所有质数

$$X = \mathbb{N} \cup \mathbb{P} = \{0, 2, 3, 5, 7, \dots\}$$

上定义一个拓扑。我们将这样定义开集：取任何非负整数 n 。如果 $n \neq 0$ ，定义开集 U_n 为 0 和所有不能整除 n 的质数；例如，如果 $n = 14$ ，那么开集 U_{14} 就是 0 和除了 2 和 7 以外所有的质数： $\{0, 3, 5, 11, 13, \dots\}$ 。在 $n = 0$ 的情况下，我们将认为 $0/0$ 是一个整除。如果你觉得这个定义很奇怪，可以思考整除是怎么定义的，同时注意 $0 = 0 * 1$ 。

2. 根据拓扑的定义，检验这定义了一个正确的拓扑，因此 X 是一个拓扑空间。
3. 开放性问题：这个拓扑空间和我们之前接触的度量空间有什么不同？