

拓扑导引

2021 唯理中国“思考数学与科学”工作坊

讲师：王滢

邮箱：ywangx@umich.edu

工作坊网站：ywangx.github.io/home/veritas

## 1 工作坊介绍

“拓扑学家分不清杯子和甜甜圈”、“打了耳洞的人的拓扑结构变了”——也许你曾经听说过这样的描述。这些陈述中的“拓扑”指的是什么？拓扑等价指的又是什么？

拓扑学是现代数学的一个重要分支，它以相对整体的方式研究物体：即使杯子和甜甜圈的形状截然不同，但因为它们都只有一个洞，拓扑地看起来它们可以相互转化。这节课希望以直观的方式介绍拓扑学的基本概念和研究问题，包括拓扑的定义、重要的曲面及曲面性质、代数拓扑的基本例子和应用，以及纽结的计算。

在本工作坊中，我们将从经典的表面和度量空间开始，思考拓扑这一学科关注的问题，以及探讨拓扑学家为了更好地关注这些问题又在哪些方面以哪些方式“不再那么精确地”思考。每天的工作坊将有一个重要的讨论问题，通过一起思考这个问题我们将更好地理解一些数学概念背后的动机，并尝试理解更有难度的数学构造、接触包括代数几何在内的其它现代数学分支。本工作坊希望参与者有高中阶段的数学知识，若对微积分中的“连续性”有所理解可能会对某些方面有帮助，但总体而言，我们将以一种和一般数学教学不一样的方式来介绍拓扑学——一门直觉和计算相结合、需要用到多领域方法的学科。

本工作坊的材料将以讲师电子版的练习为主，预计需要每天一小时的时间。来 Office Hour 讨论这些问题以及参与者之间的合作交流是受到鼓励的，你也可以上网寻找相关资料帮助回答。有些问题没有标准答案，我希望能了解你的思路。每日练习在第二天早上 9 点截止，请发邮件至我的邮箱。第零日任务需要在工作坊开始前提交。

每天晚上 9 点前，参与者可以通过工作坊网站上的匿名问卷提交问题，我将在当晚 10 点左右将对问卷的解答和对 Office Hour 的总结更新在工作坊网站中。我也将在布置练习的第二天晚上返回批改后的练习，并将答案更新在工作坊网站中。如果参与者希望更深入地了解某个内容，欢迎来找我讨论。

## 2 工作坊目标

在历史上，数学从业者限于特定的人群；现在，我们也能听到许多“ $x$  进入  $y$  后数学就跟不上了”的评价。但是数学的美妙本应是所有人共享的。在我们的工作坊里，我们希望每一个人都能平等参与讨论、相互学习、共同进步，无论多么异想天开的观点都可能会给予我们思路和启发，值得尊重和关注。我们相信大脑的力量，同时认识到每个人都有不同的思考方式和学习曲线，反应快与慢并不代表数学能力高低。若你认为某天进度太快或有任何问题，请随意问我或通过工作坊网站上的匿名问卷告诉我。表格将是完全匿名的，我将在每天晚上十点前尽量回复当天所有问题，并将根据参与者的反馈调整工作坊规划。

1. 扩展普通高中和大学课堂数学的教学内容，通过平衡直观和计算的方式介绍拓扑学背后的动机和关心的问题。
2. 严谨定义度量空间、拓扑空间和连续映射。
3. 讨论经典的表面、拓扑等价和不变量的思想。
4. 介绍代数拓扑的思考方法和两个经典应用。介绍低维拓扑中的重要构造。

## 3 分时计划

### 第一日：拓扑与经典表面

当日安排

1. 破冰、自我介绍
2. 表面 (surface) 的定义和例子 (球体、环面、莫比斯环、克莱因瓶)

### 第二日：表面的基本性质

当日安排

第二日讨论问题：我们昨天构建的表面在哪些方面不同？如何“数学地”描述它们的不同之处？拓扑学关注的问题是什么？

1. 表面的一些基本性质：可定向性、紧性、闭性；欧拉示性数
2. 带边紧闭表面分类定理

### 第三日：度量和度量空间

当日安排

1. 度量和度量空间的定义及例子

## 2. 连续性的三种相等定义

第三日讨论问题：我们能否放松度量存在的假设：如果一个空间没有合适的度量，怎么找到一种描述连续性的方法？

## 第四日：拓扑和拓扑空间

当日安排

1. 拓扑和拓扑空间的定义
2. 从旧拓扑空间中构造新拓扑空间的经典方法
3. 拓扑空间和度量空间的联系

第四日讨论问题：和度量空间截然不同的奇妙拓扑——代数几何中的扎里斯基拓扑——这是一种拓扑吗？

## 第五日：代数拓扑初探：同伦

当日安排

第五日讨论问题：结合第一天讨论的表面，我们应该怎样定义“拓扑等价”？

1. 同伦的定义和例子；同伦的直观理解
2. 群的定义和例子

## 第六日：基本群和不动点定理

当日安排

1. 基本群的定义和圆的基本群计算

第六日讨论问题：通过计算基本群，我们得到了拓扑空间怎样的信息？为什么运用“群”这种代数结构来描述空间能有什么好处？

2. 基本群的应用：布劳威尔不动点定理

## 第七日：代数基本定理的拓扑证明

当日安排

1. 多项式的实数解和复数解
2. 代数基本定理的陈述

第七日讨论问题：如何把代数基本定理化为一个代数拓扑问题？

## 第八日：不变量思想

当日安排

第八日讨论问题：在第五日的讨论以后，我们已经能够放松对“相等”的定义，将拓扑观

点上相似的对象视为一类。那么，我们该如何有效地区分不同类别的物体呢？

1. 低维拓扑介绍，纽结的定义和例子
2. 不变量思想：亚历山大-康威多项式、欧拉示性数