拓扑导引
2021 唯理中国“思考数学与科学”工作坊
讲师：王滢
邮箱：ywangx@umich.edu
工作坊网站：ywangx.github.io/home/veritas

1 工作坊介绍

“拓扑学家分不清杯子和甜甜圈”、“打了耳洞的人的拓扑结构变了”——也许你曾经听说过这样的描述。这些陈述中的“拓扑”指的是什么？拓扑等价指的又是什么？

拓扑学是现代数学的一个重要分支，它以相对整体的方式研究物体：即使杯子和甜甜圈的形状截然不同，但因为它们都只有一个洞，拓扑地看起来它们可以相互转化。这节课希望以直观的方式介绍拓扑学的基本概念和研究问题，包括拓扑的定义、重要的曲面及曲面性质、代数拓扑的基本例子和应用，以及纽结的计算。

在本工作坊中，我们将从经典的表面和度量空间开始，思考拓扑这一学科关注的问题，以及探讨拓扑学家为了更好地关注这些问题又在哪些方面以哪些方式“不再那么精确地”思考。每天的工作坊将有一个重要的讨论问题，通过一起思考这个问题我们将更好地理解一些数学概念背后的动机，并尝试理解更有难度的数学构造、接触包括代数几何在内的其它现代数学分支。本工作坊希望参与者有高中阶段的数学知识，若对微积分中的“连续性”有所理解可能会对某些方面有帮助，但总体而言，我们将以一种和一般数学教学不一样的方式来介绍拓扑学——一门直觉和计算相结合、需要用到多领域方法的学科。

本工作坊的材料将以讲师电子版的练习为主，预计需要每天一小时的时间。来 Office Hour 讨论这些问题以及参与者之间的合作交流是受到鼓励的，你也可以上网寻找相关资料帮助回答。有些问题没有标准答案，我希望能了解你的思路。每日练习在第二天早上 9 点截止，请发邮件至我的邮箱。第零日任务需要在工作坊开始前提交。

每天晚上 9 点前，参与者可以通过工作坊网站上的匿名问卷提交问题，我将在当晚 10 点左右将对问卷的解答和对 Office Hour 的总结更新在工作坊网站中。我也将在布置练习的第二天晚上返回批改后的练习，并将答案更新在工作坊网站中。如果参与者希望更深入地了解某个内容，欢迎来找我讨论。

2 工作坊目标

在历史上，数学从业者限于特定的人群；现在，我们也能听到许多“x 进入 y 后数学就跟不上了”的评价。但是数学的美妙本应是所有人共享的。在我们的工作坊里，我们希望每一个人都能平等参与讨论、相互学习、共同进步，无论多么异想天开的观点都可能会给予我们思路和启发，值得尊重和关注。我们相信大脑的力量，同时认识到每个人都有不同的思考方式和学习曲线，反应快与慢并不代表数学能力高低。若你认为某天进度太快或有任何问题，请随意问我或通过工作坊网站上的匿名问卷告诉我。表格将是完全匿名的，我将在每天晚上十点前尽量回复当天所有问题，并将根据参与者的反馈调整工作坊规划。

1. 扩展普通高中和大学课堂数学的教学内容，通过平衡直观和计算的方式介绍拓扑学背后的动机和关心的问题。
2. 严谨定义度量空间、拓扑空间和连续映射。
3. 讨论经典的表面、拓扑等价和不变量的思想。
4. 介绍代数拓扑的思考方法和两个经典应用。介绍低维拓扑中的重要构造。

3 分时计划

工作坊准备

观看视频：`https://www.bilibili.com/video/BV1rs411x7sb`，并思考以下这几个问题：

1. 视频中多次提到了“连续性”。请总结这几种连续性指的是什么，并谈谈你是怎么理解这种连续性的。你可以思考这个问题：为什么在将环路映射到直线时（07:00），我们需要把环路切开一个点？
2. 解释在 12:12 时，为什么切开后重新粘贴的曲面，和不切开直接粘贴的曲面是一样的。
3. 假设环路是一个单位圆圈。到 09:40 左右，我们知道了环面上的点可以一一对应圆圈上的有序对。描述环面上哪些点对应了圆圈上的点（即元素相同的有序对），并解释以下观察：如果我们将环面沿着这些点粘贴到圆圈上，所得到的表面不会自我相交，而粘贴莫比乌斯环后所得到的表面会自我相交。对比这两种结果，思考莫比乌斯环和环面有什么不同。
4. 看了这个视频以后，请谈谈你对拓扑学的初印象。

第一日：拓扑与经典表面

当日安排

1. 破冰、自我介绍
2. 表面（surface）的定义和例子（球体、环面、莫比斯环、克莱因瓶）

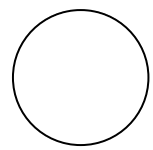
当日练习

1. 思考以下三个数学对象有什么相同之处：

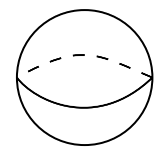
   S^0

   两个相距 1 厘米的点

   S^1

   一个半径为 1 厘米的圆圈

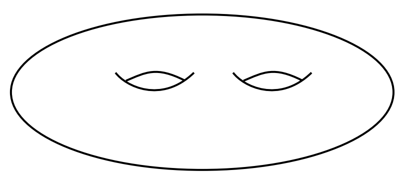
   

   S^2

   一个半径为 1 厘米的球体

   提示：它们是同一个等式在不同维度的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的解集，分别称为“零、一、二维球体”。找出这个等式，模仿这个构造来构建 n 维球体。

2. 我们今天讨论了如何从一片白纸构建一个只有一个洞的环面。我们能否用一片白纸构建由两个洞的和三个洞的环面？注意，你可以改变白纸的形状，但只能用到一片白纸。



有两个洞的环面

第二日：表面的基本性质

当日安排

第二日讨论问题：我们昨天构建的表面在哪些方面不同？如何“数学地”描述它们的不同之处？拓扑学关注的问题是什么？

1. 表面的一些基本性质：可定向性、紧性、闭性；欧拉示性数
2. 带边紧闭表面分类定理

当日练习

1. 根据我们对莫比乌斯环的讨论，说明为什么克莱因瓶也是不可定向的。
2. 根据我们对球面的讨论和昨天的练习，计算带有两个洞的环面的欧拉示性数。

第三日：度量和度量空间

当日安排

1. 度量和度量空间的定义及例子
2. 连续性的三种相等定义

第三日讨论问题：我们能否放松度量存在的假设：如果一个空间没有合适的度量，怎么找到一种描述连续性的方法？

当日练习

1. 今天我们介绍了一个数列收敛的概念，并由此定义了连续性。请确定以下数列
$$s_n = \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$$
是否收敛，如果是，请找出极限。(提示：写出这个数列，最初几项将是 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$。)
2. 考虑一个函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，定义为 $f(x) = \frac{1}{x}$，即将任何数送到它的倒数。使用第一题，判别这个函数是否是连续的。你能否用更直观的方法说明它是否连续?
3. 在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中，对于任何两点 $a = (a_0, a_1, a_2), b = (b_0, b_1, b_2)$，我们依据以下两个步骤定义一种测距方式：
a) 计算三个绝对值 $|a_0 - b_0|, |a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|$，
b) 选出三个绝对值最大的一个，并称之为这两点的距离。
例如，在这种测量方法下，点 $(0, 0, 0)$ 和 $(1, 2, 3)$ 的距离为 3。根据我们今天对度量的定义，检验这是否定义了一种度量。

第四日：拓扑和拓扑空间

当日安排

1. 拓扑和拓扑空间的定义
2. 从旧拓扑空间中构造新拓扑空间的经典方法
3. 拓扑空间和度量空间的联系

第四日讨论问题：和度量空间截然不同的奇妙拓扑——代数几何中的扎里斯基拓扑——这是一种拓扑吗？

当日练习

这个练习是代数几何中的一个经典又有趣的例子的简化。我们将通过这个练习巩固对拓扑定义的理解，思考拓扑空间相较于度量空间给予了我们多少新的可能性。

1. 我们的目标是在加上 0 的所有质数

$$X = \{0\} \cup \mathbb{P} = \{0, 2, 3, 5, 7, \cdots\}$$

上定义一个拓扑。我们将这样定义开集：取任何非负整数 n。如果 $n \neq 0$, 定义开集 U_n 为 0 和所有**不能**整除 n 的质数；例如，如果 $n = 14$，那么开集 U_{14} 就是 0 和除了 2 和 7 以外所有的质数：$\{0, 3, 5, 11, 13 \cdots\}$。在 $n = 0$ 的情况下，我们将认为 $0/0$ 是一个整除。如果你觉得这个定义很奇怪，可以思考整除是怎么定义的，同时注意 $0 = 0 * 1$。

2. 根据拓扑的定义，检验这定义了一个正确的拓扑，因此所有 X 是一个拓扑空间。

3. 开放性问题：这个拓扑空间和我们之前接触的度量空间有什么不同?

第五日：代数拓扑初探：同伦

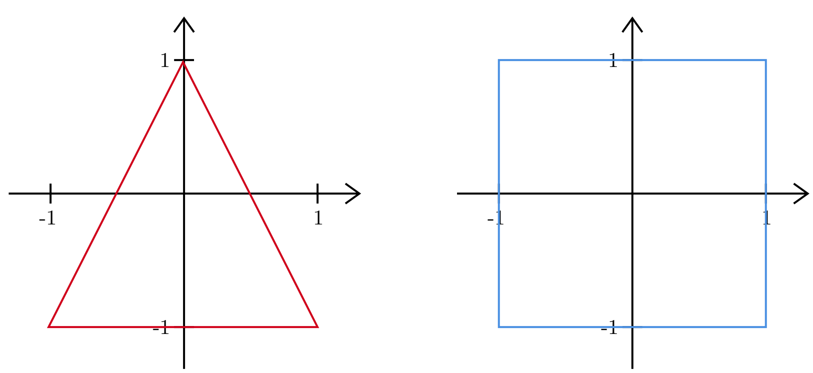
当日安排

第五日讨论问题：结合第一天讨论的表面，我们应该怎样定义“拓扑等价”？

1. 同伦的定义和例子；同伦的直观理解
2. 群的定义和例子

当日练习

1. 定义从下图中三角形到正方形的一个同伦。



2. 考虑一个集合 $S=\{0,1,2,3,4\}$，并定义这个集合上的一种加法 $\hat{+}$：对于任何 $a,b\in S$，定义 $a\hat{+}b=a+b \mod 5$，即取正常加法后除 5 的余数。例如，

$$3\hat{+}4=3+4 \mod 5=2$$

因为 $7=5*1+2$。检验这个加法使 S 变成了一个群。

第六日：基本群和不动点定理

当日安排

1. 基本群的定义和圆的基本群计算

第六日讨论问题：通过计算基本群，我们得到了拓扑空间怎样的信息？为什么运用“群”这种代数结构来描述空间能有什么好处？

2. 基本群的应用：布劳威尔不动点定理

当日练习

1. 今天的工作坊中，我们计算了圆的基本群。模仿这个步骤，计算一条直线（或线段）的基本群。你可以不提供精确的数学证明——告诉我你的猜测和想法！
2. 使用布劳威尔不动点定理，说明为什么以下陈述是真的：假设你站在一个教室内，手中有一张这个教室的地图。若你将这个地图轻轻揉皱（但不能撕裂）并将地图扔到地上，那么这个地图上一定有一点正好落在它在现实中对应的那个地方。

第七日：代数基本定理的拓扑证明

当日安排

1. 多项式的实数解和复数解
2. 代数基本定理的陈述

第七日讨论问题：如何把代数基本定理化为一个代数拓扑问题？

当日练习

我们不仅仅可以利用代数工具（如基本群）来获取一个拓扑空间的信息。正如今天所讨论的，我们可以反其道而行之，使用拓扑来证明代数的定理。根据今天讨论的内容，尽可能精准地总结代数基本定理的拓扑证明。

第八日：不变量思想

当日安排

第八日讨论问题：在第五日的讨论以后，我们已经能够放松对“相等”的定义，将拓扑观点上相似的对象视为一类。那么，我们该如何有效地区分不同类别的物体呢？

1. 低维拓扑介绍，纽结的定义和例子
2. 不变量思想：亚历山大–康威多项式、欧拉示性数