

作者：王险峰（MAXIM 公司高级射频工程师）

关键词

ACPR、交叉调制、三阶截止点、正态随机过程、各态历经性、平稳随机过程、高斯过程、相关函数、协方差函数、厄密特多项式、功率谱密度、TD-SCDMA、WCDMA、CDMA2000

摘要

在做射频子系统设计时我们常会面对 ACPR 与交叉调制这两个非线性指标，IP₃（三阶截止点）同样也是反映系统非线性的一个指标，我们能否通过 IP₃ 来估算 ACPR 与交叉调制产物呢？本文将解答这个问题，并针对 TD-SCDMA、WCDMA、CDMA2000 系统给出几个简单实用的公式。

ACPR 与交叉调制基本概念

IP₃（三阶截止点）是一个非常常用的非线性指标，这里就不再赘述，关于 ACPR 与交叉调制的概念我将用一个在测试中常遇到的现象来加以说明。取一个射频放大器，输入两个信号，一个是已调信号（非平衡包络调制）或窄带高斯（正态）随机过程在频点 1 处，另一个是点频信号在频率点 2，用频谱仪观察放大器的输出信号，在输入信号功率较大时你会看到一些新的频率成分，大致如下面的图形所示：

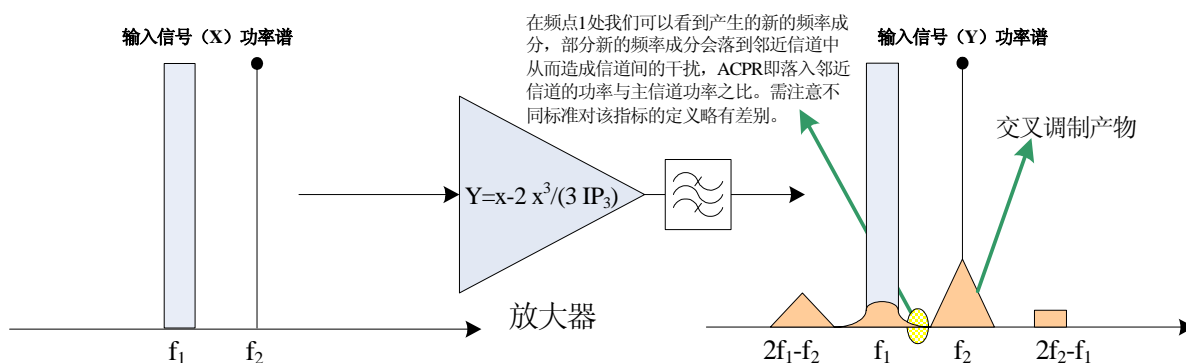


图 1： ACPR 与交叉调制基本概念



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

如图一所示，输出信号功率谱有很多新的频率成分： $2f_1-f_2$ 处与 $2f_2-f_1$ 处的产物称之为三阶互调产物； f_1 处粉红色部分称之为再生频率产物； f_2 处粉红色部分称之为交叉调制产物。 f_1 处部分再生频率产物会落入邻近信道从而造成信道间干扰，ACPR 即落入邻近信道部分的功率与主信道功率之比。需注意不同标准对 ACPR 指标的定义略有差别。

非线性电路可根据其中有无惰性元件（电容、电感）分为两类：惰性非线性电路与无惰性非线性电路，非线性电路一般是惰性的，而严格求解惰性非线性电路的输出产物是非常复杂的，因此，一般都将惰性非线性电路的惰性器件归并到电路的前级或后级，而把非线性电路部分看作是无惰性的来求近似解，图 1 中的放大器模型即是一个无惰性的多项式模型。注意此处该放大器多项式模型中只有一次项与三次项，这是因为这里我们研究的是窄带信号，而非基带信号，偶次项的非线性产物不会落在我们所感兴趣的频段内，关于多项式三次项系数与 IP_3 关系，根据三阶截止点的定义读者可以很容易验证其正确性，此处不再赘述，三次项的符号对我们的分析结果没有影响，此处取负号。

非线性产物快速计算表

一般来说计算电路的非线性产物是非常困难的，但如果我们用高斯随机过程代替实际输入信号，用无惰性多项式模型来近似刻画非线性电路的非线性特征，我们将很容易求解其非线性产物，从而得到一些对我们设计非常有用的结论。此处所讲的求解其实就是求非线性产物的功率谱密度。我们知道随机过程的功率谱密度函数与自相关函数是傅立叶变换对，如能求出非线性产物的自相关函数即可求出其功率谱密度函数。下面表格即可用来快速求解非线性产物的自相关函数：



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

表 1：非线性产物快速计算表

C_k	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
k=0		s_x^4		$9s_x^8$		$225s_x^{12}$	
k=1	s_x^2		$9s_x^6$		$225s_x^{10}$		$11025s_x^{14}$
k=2		$2s_x^4$		$72s_x^8$		$4050s_x^{12}$	
k=3			$6s_x^6$		$600s_x^{10}$		$66150s_x^{14}$
k=4				$24s_x^8$		$5400s_x^{12}$	
k=5					$120s_x^{10}$		$52920s_x^{14}$
k=6						$720s_x^{12}$	
k=7							$5040s_x^{14}$

上面表格的使用条件与使用说明：

- 1) “x” 这儿代表一个零均值的平稳正态随机过程，方差为 s_x^2 ；
- 2) 表中第一行规定了 6 种非线性函数 $y = x^n$ ，n 取 2, 3, 4, 5, 6, 7，为使表格完整，此处加入了 $y = x$ 函数。
- 3) 输出信号的自相关函数有下式确定：

$$R_y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k r_x^k(t) \quad \text{Eq. 1}$$

$r_x(t)$ 代表输入随机过程的归一化自协方差函数；

- 4) 例如要查看 $y = x^2$ 时输出信号的自相关函数，由上面表格第 3 列可以看到此时输出仅有两项， $C_0 = s_x^4$, $C_2 = 2s_x^4$ ，代入方程式 1，我们即可得到输出信号的自相关函数为：

$$R_y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k r_x^k(t) = s_x^4 + 2s_x^4 r_x^2(t) \quad \text{Eq. 2}$$

如希望进一步得到输出信号的功率谱密度函数，仅需对方程 2 做傅立叶变换即可：



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

$$G_y(w) = 2ps_x^4 d(w) + \frac{1}{2p} 2s_x^4 g_x(w) \otimes g_x(w) \quad \text{Eq. 3}$$

此处: $g_x(w) \Leftrightarrow r_x(t)$ $G_y(w) \Leftrightarrow R_y(t)$ (傅立叶变换对)

方程 3 中自变量是角频率, 为方便计算, 可以用频率 f 替换, 这样方程 3 变为下面的方程:

$$G_y(f) = s_x^4 d(f) + 2s_x^4 g_x(f) \otimes g_x(f) \quad \text{Eq. 4}$$

- 5) 如果非线性函数不是表 1 中列出的几个函数时, 我们仍可以利用该表做快速运算。例如要查看 $y = x + ax^3$ 时输出信号的自相关函数, 我们先将该非线性函数分成两个简单函数:

$$y = y_1 + y_2 \quad \text{Eq. 5}$$

$$y_1 = x \quad \text{Eq. 6}$$

$$y_2 = ax^3 \quad \text{Eq. 7}$$

由表 1 的第 2 列与第 4 列很容易求出 y_1 与 y_2 的自相关函数如下式:

$$R_{y_1}(t) = s_x^2 r_x(t) \quad \text{Eq. 8}$$

$$R_{y_2}(t) = 9a^2 s_x^6 r_x(t) + 6a^2 s_x^6 r_x^3(t) \quad \text{Eq. 9}$$

观察方程 8 与方程 9, 我们发现两个方程式都含有 $r_x(t)$ 项, 在利用方程 8 与方程 9 合成得到 $y = x + ax^3$ 的自相关函数时, 应对 $r_x(t)$ 项的系数做一个简单修正。合成结果如下:

$$\begin{aligned} R_y &= (s_x^2 + 9a^2 s_x^6 + 2a\sqrt{9\sigma_x^6 \sigma_x^2}) r_x(t) + 6a^2 s_x^6 r_x^3(t) \\ &= (s_x^2 + 9a^2 s_x^6 + 6a\sigma_x^4) r_x(t) + 6a^2 s_x^6 r_x^3(t) \end{aligned} \quad \text{Eq. 10}$$

方程式 10 中粗体部分即为修正项, 它是方程 8 与方程 9 相对应项开平方再相乘, 再乘 2, 这儿符号由三次相系数符号确定。



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

ACPR 与交叉调制产物计算

考虑一个简单的射频放大器，其无惰性非线性变换式如下：

$$y = x - \frac{2x^3}{3IP_3} \quad \text{Eq. 11}$$

上面多项式模型表明该放大器增益 0dB，输入三阶截止点等于输出三阶截止点等于 IP_3 。现在我们输入两个信号（参照图 1 所示），一个是窄带各态历经性的平稳正态随机过程，其中心频点为 f_1 ，另一个是点频信号，频点为 f_2 。我们用下面 5 个方程来描述该输入信号的部分特性：

$$x = n_c(t) \cos(2\pi f_1 t) + n_s(t) \sin(2\pi f_1 t) + A \cos(2\pi f_2 t) \quad \text{Eq. 12}$$

$$\overline{n_c(t)^2} = \overline{n_s(t)^2} = P_1 \quad \text{Eq. 13}$$

$$A^2 = 2P_2 \quad \text{Eq. 14}$$

$$\overline{n_c(t)} = \overline{n_s(t)} = 0 \quad \text{Eq. 15}$$

$$\overline{n_c(t)n_s(t+t)} = 0 \quad (t \text{ 取任意实数}) \quad \text{Eq. 16}$$

因为我们已假定频点 1 处的随机过程是各态历经性的窄带平稳正态过程，所以我们可以用统计方差代替该过程的功率。将方程 12 代入方程 11，略去 3 倍频率分量，我们得到如下方程式：

$$\begin{aligned} y = & \frac{A}{2IP_3} [n_s(t)^2 - n_c(t)^2] \cos[2\pi(2f_1 - f_2)t] - \frac{An_c(t)n_s(t)}{IP_3} \sin[2\pi(2f_1 - f_2)t] \\ & + [n_c(t) - \frac{2A^2n_c(t) + n_c(t)^3 + n_c(t)n_s(t)^2}{2IP_3}] \cos(2\pi f_1 t) \\ & + [n_s(t) - \frac{2A^2n_s(t) + n_s(t)^3 + n_s(t)n_c(t)^2}{2IP_3}] \sin(2\pi f_1 t) \\ & + [A - \frac{A^3 + 2An_c(t)^2 + 2An_s(t)^2}{2IP_3}] \cos(2\pi f_2 t) \\ & - \frac{A^2n_c(t)}{2IP_3} \cos[2\pi(2f_2 - f_1)t] + \frac{A^2n_s(t)}{2IP_3} \sin[2\pi(2f_2 - f_1)t] \end{aligned} \quad \text{Eq. 17}$$



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

观察 y 的函数表达式，发现当 f_1 与 f_2 相隔较远时，它应有 4 段互不重合的功率谱。假定该条件成立，那么我们求 y 的自相关函数时每个频点处的可以分开求，最后直接加在一起即可。 Y 在 f_1 频点处表达式为：

$$y_{f_1} = [n_c(t) - \frac{2A^2 n_c(t) + n_c(t)^3 + n_c(t)n_s(t)^2}{2IP_3}] \cos(2p f_1 t) + [n_s(t) - \frac{2A^2 n_s(t) + n_s(t)^3 + n_s(t)n_c(t)^2}{2IP_3}] \sin(2p f_1 t) \quad \text{Eq. 18}$$

在频点 f_1 处，我们感兴趣的是再生的三阶频谱成分，观察上式，我们把能产生 3 阶频谱成分的项提出来，如下式：

$$y_{f_1}^{<3>} = -\frac{n_c(t)^3 + n_c(t)n_s(t)^2}{2IP_3} \cos(2p f_1 t) - \frac{n_s(t)^3 + n_s(t)n_c(t)^2}{2IP_3} \sin(2p f_1 t) \quad \text{Eq. 19}$$

利用表 1 很容易求出对应方程 19 的自相关函数，我们感兴趣的是该自相关函数中 3 次项部分，所以下式仅列出三次项成分：

$$R_{y_{f_1}}^{<3>}(t) = \frac{6pI^3 r_c^3(t) + 2pI^3 r_c(t)r_s^2(t) \cos(2p f_1 t)}{4IP_3^2} + \frac{6pI^3 r_s^3(t) + 2pI^3 r_s(t)r_c^2(t) \cos(2p f_1 t)}{4IP_3^2} \quad \text{Eq. 20}$$

上式中， $r_c(t)$ 是同相分量 $n_c(t)$ 的归一化自协方差函数， $r_s(t)$ 是正交分量 $n_s(t)$ 的归一化自协方差函数。这样在频点 f_1 处再生的三阶频谱成分总功率为：

$$P_{f_1}^{<3>} = R_{y_{f_1}}^{<3>}(0) = \frac{6pI^3 r_c^3(0) + 2pI^3 r_c(0)r_s^2(0) \cos(2p f_1 0)}{4IP_3^2} + \frac{6pI^3 r_s^3(0) + 2pI^3 r_s(0)r_c^2(0) \cos(2p f_1 0)}{4IP_3^2} = \frac{2pI^3}{IP_3^2} \quad \text{Eq. 21}$$

利用同样方法可以求出频点 $2f_1 - f_2$ 处 2 阶频谱成分总功率为：

$$P_{2f_1 - f_2}^{<2>} = \frac{2pI^2 p_2}{IP_3^2} \quad \text{Eq. 22}$$

频点 f_2 处 2 阶频谱成分总功率为：

$$P_{f_2}^{<2>} = \frac{4pI^2 p_2}{IP_3^2} \quad \text{Eq. 23}$$



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

频点 $2f_2-f_1$ 处 1 阶频谱成分总功率为：

$$P_{2f_2-f_1}^{<1>} = \frac{p_1 p_2^2}{IP_3^2} \quad \text{Eq. 24}$$

为使结果更加直观，我将方程 21 至 24 整理在下面图中：

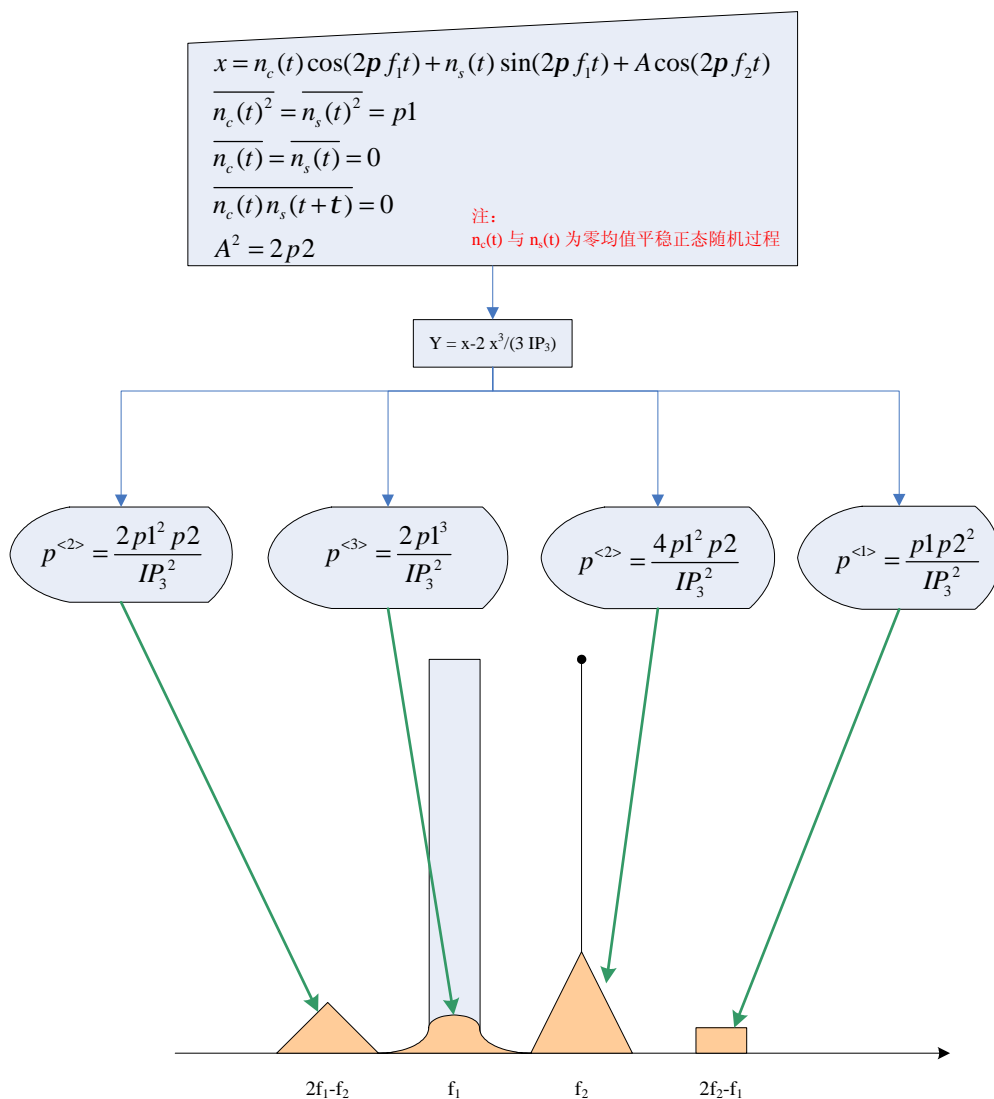


图 2：非线性产物

交叉调制产物估算公式：



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

如要计算整个交叉调制产物的功率，图 2 中 f_2 频点处粉红色部分即是，将公式表示成常用的对数形式如下：

$$P_{cross} = 2p_1 + p_2 - 2IP_3 + 6dB \quad \text{Eq. 25A}$$

如考虑放大器有一定增益 G_a (dB)，则方程 25A 变为下面方程：

$$P_{cross} = 2p_{lin} + p_{2in} - 2IIP_3 + 6dB + G_a \quad \text{Eq. 25B}$$

ACPR 估算公式：

图 2 中 f_1 频点处粉红色部分是再生三阶频谱分量，其功率与主信道功率之比表示成对数形式如下：

$$P_{regrowth}(dBc) = 2p_1 - 2IP_3 + 3dB \quad \text{Eq. 26}$$

我们发现能够泄漏到邻近信道的三阶频谱分量仅占再生三阶频谱分量的一部分，所以在计算 ACPR 指标时还应在方程式 26 的基础上加一个修正项。不同标准信道划分不同，成型滤波器不同，该修正项也不相同，下面针对 CDMA2000，WCDMA FDD 及 TD-SCDMA 三个标准分别求出该修正项：

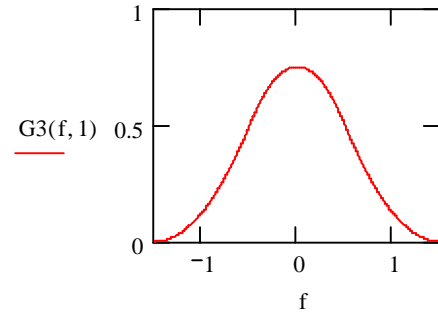
Ø CDMA2000 标准

CDMA2000 码片速率为 1.2288M，成型滤波器为一个规定系数的 48 阶 FIR 滤波器，其邻道定义为偏离中心载波 885KHz 的 AMPS 信道（30KHz 宽度）。考虑到 CDMA2000 规定的成型滤波器非常陡峭，此处用一个矩形函数代替真正的成型滤波器以简化运算，将该矩形函数自身卷积三次即得到三阶功率谱函数如下：



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

$$G3(f, B) := \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot B^3} \cdot \left(f + \frac{3B}{2}\right)^2 & \text{if } \frac{-3}{2} \cdot B \leq f \leq \frac{-B}{2} \\ \frac{-f^2}{B^3} + \frac{3}{4B} & \text{if } \frac{-1}{2} \cdot B < f \leq \frac{B}{2} \\ \frac{1}{2 \cdot B^3} \cdot \left(f - \frac{3B}{2}\right)^2 & \text{if } \frac{1}{2} \cdot B < f \leq \frac{3B}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



上式中 B 表示码片速率。该三阶功率谱函数是归一化的，利用该函数可以很容易求出偏离载波中心 885KHz 处 30KHz 带宽内功率占整个三阶功率谱功率的比值：

$$\Delta_{CDMA2000} = 10 \int_{0.87MHz}^{0.9MHz} G3(f, 1.2288M) df = -21.3 dB \quad \text{Eq. 27}$$

结合方程式 26，我们得到 CDMA2000 标准下 ACPR 估算公式为：

$$ACPR_{CDMA2000} = P_{regrowth}(dBc) + \Delta_{CDMA2000} = 2p1 - 2IP_3 - 18.3 dB \quad \text{Eq. 28}$$

Ø WCDMA FDD 与 TD-SCDMA 标准

WCDMA FDD 与 TD-SCDMA 的成型滤波器没有 CDMA2000 的那么陡峭，为使计算更加准确，我写了一段 matlab 程序来计算其修正值，该程序代码见附录 A。计算结果如下：

$$\Delta_{TD-SCDMA} = -11.3 dB \quad \text{Eq. 29}$$

$$\Delta_{WCDMA_FDD} = -12.2 dB \quad \text{Eq. 30}$$

结合方程式 26，我们得到这两种标准下 ACPR 估算公式为：

$$ACPR_{TD-SCDMA} = P_{regrowth}(dBc) + \Delta_{TD-SCDMA} = 2p1 - 2IP_3 - 8.3 dB \quad \text{Eq. 31}$$

$$ACPR_{WCDMA_FDD} = P_{regrowth}(dBc) + \Delta_{WCDMA_FDD} = 2p1 - 2IP_3 - 9.2 dB \quad \text{Eq. 32}$$

为方便记忆，将上面得到的三个 ACPR 估算公式整理如下：

表 2：ACPR 估算公式



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

标准	CDMA2000	WCDMA FDD	TD-SCDMA
码片速率	1.2288M	3.84M	1.28M
信道间隔	1.25M	5M	1.6M
ACPR 定义	偏载波中心 885KHz 处 30KHz 带宽内功率与主信道功率之比	用成型滤波器在偏离载波中心 5MHz 滤得的功率与在主信道处滤得的功率之比	用成型滤波器在偏离载波中心 1.6MHz 滤得的功率与在主信道处滤得的功率之比
估算公式 (dBc)	$2(\text{Pin}-\text{IIP3})-18.3$	$2(\text{Pin}-\text{IIP3})-9.2$	$2(\text{Pin}-\text{IIP3})-8.3$
	成型滤波器: 此处用矩形函数代替实际函数	成型滤波器: 根升余弦滤波器, 滚降因子 $\alpha=0.22$	成型滤波器: 根升余弦滤波器, 滚降因子 $\alpha=0.22$

估算结果与 ADS 仿真结果比较

为检验表 2 中所列公式的正确性, 我用 ADS 做了一些仿真, 仿真中非线性器件是“behave model”中的一个放大器, 设置其 IP3 与增益即可进行仿真工作, 其输入信号仍旧如图 1 所示, 一个是已调频谱信号, 另一个是点频信号。仿真结果与估算结果对比如下:

表 3: 与 ADS 仿真结果比较

标准		TD-SCDMA	WCDMA FDD		CDMA 2K	
输入信号 Pin1 的信号特征		窄带 平稳高斯过程 (各态遍历)	窄带 平稳高斯过程 (各态遍历)	WCDMA 反向测试信道	窄带 平稳高斯过程 (各态遍历)	CDMA2K 反向测试信道
Pin1 (已调信号)电平		-28.89dBm	-30.27dBm	-21.39dBm	-20.64dBm	-22.09dBm
Pin2 (CW)电平		-23.01dBm	-23.01dBm	-23.01dBm	-23.01dBm	-23.01
增益		0dB	0dB	0dB	0dB	0dB
输入三阶截止点 IIP3		0dBm	0dBm	0dBm	0dBm	0dBm
ACPR	仿真结果	Low side: -65.82dBc	Low side: -69.58dBc	Low side: -57.75dBc	Low side: -60.04dBc	Low side: -65.6dBc
		Up side: -66.03dBc	Up side: -69.42dBc	Up side: -57.67dBc	Up side: -61.54dBc	Up side: -66.25dBc
	估算结果	-66.08dBc	-69.73dBc	-51.98dBc	-59.57dBc	-62.48dBc
	估算公式	2(Pin1-IIP3)- 8.3	2(Pin1-IIP3)-9.2	2(Pin1-IIP3)-9.2	2(Pin1-IIP3)-18.3	2(Pin1-IIP3)-18.3
交叉调制 产物	仿真结果	-75.55dBm	-77.68dBm	-66.14dBm	-58.61dBm	-63.84dBm
	估算结果	-74.79dBm	-77.54dBm	-59.79dBm	-58.28dBm	-61.19dBm
	估算公式	2Pin1+Pin2- 2IIP3+6+Gain	2Pin1+Pin2- 2IIP3+6+Gain	2Pin1+Pin2- 2IIP3+6+Gain	2Pin1+Pin2- 2IIP3+6+Gain	2Pin1+Pin2- 2IIP3+6+Gain

由表 3 可以看出当输入已调信号 Pin1 是窄带平稳高斯过程时, 仿真结果与估算结果非常接近, 从而验证了估算公式的正确性。当输入已调信号不是平稳高斯过程时, 仿



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

真结果与估算结果相差较大，这是由信号的统计特性决定的，一般来说实际的信号峰值系数较高斯过程的小，所以其非线性产物也小。

下面图 3 是仿真输出图形，其形状与图 1 是一致的。注意图 3 中纵轴是对数坐标，图 1 中纵轴为线性坐标：

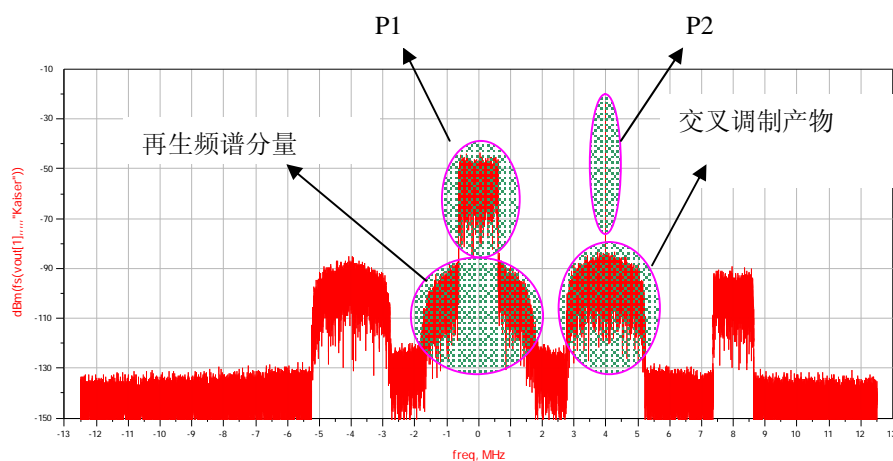


图 3：仿真输出功率谱

交叉调制产物实测与估算对比

下面是一个实际测试的例子，该例子进一步验证了估算公式的正确性。测试中非线性器件是美信公司的一款 2.4G 频段低噪声放大器 MAX2644，该器件的主要技术参数如下：

- Ø 噪声系数 2.0dB （2450MHz）
- Ø 增益 16dB
- Ø 通过调整偏置电流可调整三阶截止点
- Ø +2.7V ~ +5.5V 宽电源供电

测试的是美信公司的评估板，其原理图与 PCB 实物照片如下图：



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

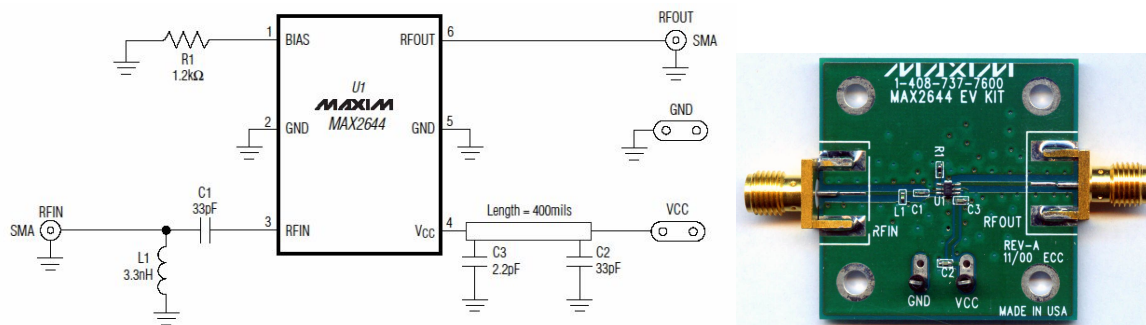


图 4: MAX2644 评估板

测试时的仪器连接配置图如下:

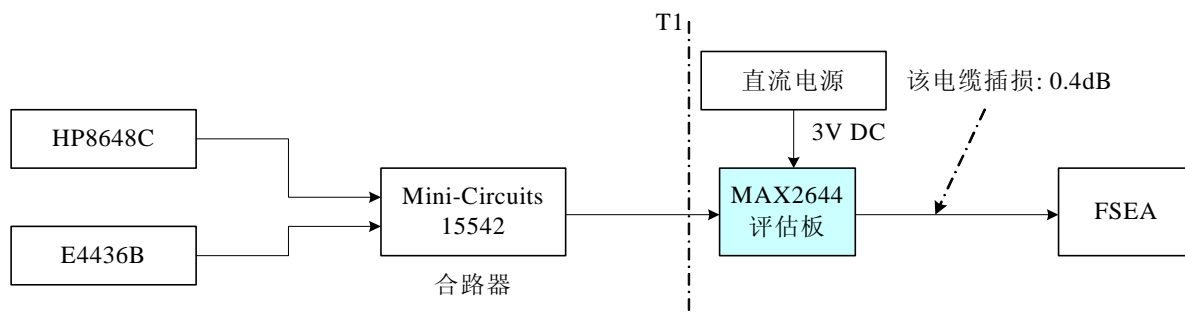


图 5: 仪表连接图

测试时，先用两个点频信号测试 MAX2644 的增益与输入三阶截止点，然后将其中一个点频信号（频点 1）改为已调信号，此处用的是窄带平稳高斯噪声，成型滤波器选的是 IS95 成型滤波器，再用频谱仪观察低噪声放大器在频点 2 的输出功率谱。下图是根据实测结果处理后得到的功率谱图形，注意中间点频信号未画：

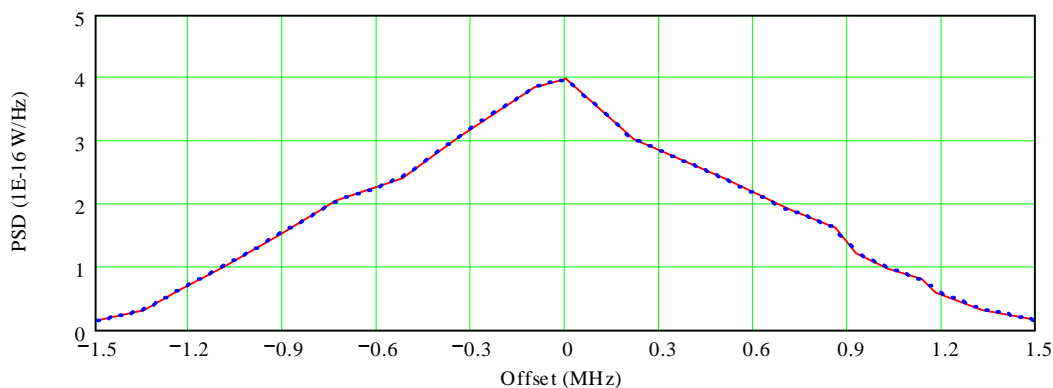


图 6: 交叉调制产物



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

实测结果与估算结果归纳在下面表格中：

表 4：交叉调制产物测试对比

Pin1 (平稳高斯噪声)	Pin2 (CW)	IIP3	Gain	交叉调制产物	
				测试值	估算值
					估算公式 $2\text{Pin1}+\text{Pin2}-2\text{IIP3}+6+\text{Gain}$
-27.4dBm	-27.4dBm	0.99dBm	15.3dB	-62.1dBm	-62.9dBm

附录 A：

下面这段是 matlab 程序，它用于计算 TD-SCDMA 或 WCDMA 三阶非线性频谱再生分量落入邻道的比例，程序已将结果表示为对数形式。

```
Rb=1.28;           % 此处输入码片速率，单位 MCPS
alf=0.22;          % 此处输入根升余弦成型滤波器的滚降系数
channel=1.6;        % 此处输入信道间隔，单位 MHz
N=8001;            % 此处输入取样点数，奇数
xn=linspace(-Rb*0.5*(1+alf),Rb*0.5*(1+alf),N);
y=zeros(1,N);
cond1=find(abs(xn)<=0.5*Rb*(1-alf));
y(cond1)=1/Rb;
cond2=find(xn>0.5*Rb*(1-alf));
y(cond2)=1/Rb*0.5*(1-sin(pi/(Rb*alf)*(xn(cond2)-Rb/2)));
y(length(xn)+1-cond2)=y(cond2);
y2=conv(y,y);
xn2=linspace(min(xn)*2,max(xn)*2,N*2-1);
y3=conv(y,y2);
xn3=linspace(min(xn)*3,max(xn)*3,N*3-2);
nshift=round(channel*(N-1)/(Rb*(1+alf)));
num1=(3*N-3)/2+1+nshift-(N-1)/2;
yshift=[zeros(1,num1),y(1:(3*N-2-num1))];
```



如何估算 ACPR 指标与交叉调制产物

```
total=sum(y3);adj=sum(yshift.*y3*Rb);  
10*log10(adj/total)  
plot(xn3',[(yshift.*y3*Rb)',y3'])
```