1 傅立叶变换及 Hilbert 变换

傅立叶变换是在傅立叶级数的基础上实行的一种把信号从时间变量转换到频率变量的数学方法，其数学表达式：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)e^{jwt}dw$$

$$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{jwt}dt$$

上述两式称为傅立叶变换对，傅立叶变换一个重要性质就是其共轭对称性，即信号经傅立叶变换后其实部是频率的偶函数，虚部是频率的奇函数，反应再实际信号分析处理上可表现为信号的傅立叶变换结果正负频率对称结构，因此通常在进行频域分析时只取其正频率部分即可。

卷积公式：$y[n]=x[n]*h[n]$，它表明了一个 LTI 系统对任意输入的相应可以用系统对单位脉冲的相应来表示，那么 LTI 系统的单位脉冲相应就完全刻画了此系统的特性。卷积性质将两个信号的卷积映射为它们傅立叶变换的乘积，其公式为：$y(t)=h(t)*x(t)\xleftrightarrow{\mathbb{F}}H(jw)X(jw)$，其变换推到如下：

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

要求的 Y(jw)则是：$Y(jw)=\mathbb{F}\{y(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-jwt}dt$

交换积分次序，$x(\tau)$ 与 t 无关，则有 $Y(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)e^{-jwt}dt\right]d\tau$

即 $Y(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-jwt}H(jw)d\tau=H(jw)\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-jwt}d\tau$

上式右边积分就是 x（t）的傅立叶变换即 $Y(jw)=H(jw)X(jw)$

调制与解调：

一个信号被另一个信号去乘，可以理解为用一个信号去调制另一个信号的振幅，因此两个信号相乘也称之为幅度调制，一般轴承和齿轮信号当中有相当大成分是调制信号，对于此信号一般可采样包络解调的方法进行分析，以获得信号的调制成分，求取包络比较方便的方法就是通过 Hilbert 变换求得解析信号，通过对解析信号的求模即可得到对应信号包络。具体对于解析信号的理解如下：

已知信号 $x(t)$，希望通过对 $x(t)$ 进行某种变换 $\hat{x}(t)=x(t)\otimes h(t)$（$\otimes$ 表示卷积），来构造所谓”解析信号(analytic signal）”，$x_a(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$，使得

$$X_a(\Omega)=\begin{cases}2X(\Omega) & \Omega>0\\ 0 & \Omega<0\end{cases}\qquad(0.1)$$

上式中 $X_a(\Omega)$ 和 $X(\Omega)$ 分别表示 $x_a(t)$ 和 $x(t)$ 的傅立叶变换。

构造解析信号的好处有二：(1)由于不含有负频率，可以使采样频率降低一半而不违反采样定理；(2)在研究信号的时频分析时，使用解析信号可以减轻正负频率在 $\Omega=0$ 附近的交叉干扰。

由于 $\hat{x}(t)=x(t)\otimes h(t)$，则 $X_a(\Omega)=X(\Omega)+j\hat{X}(\Omega)=X(\Omega)+jH(\Omega)X(\Omega)$，根据式(0.1)，可知

滤波器 $h(t)$ 的频率响应为：

$$H(\Omega)=\begin{cases}-j & \Omega>0\\ j & \Omega<0\end{cases} \quad (0.2)$$

则滤波器的单位脉冲响应为

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \qquad (0.3)$$

构造 $H_1(\Omega)=e^{\beta|\Omega|}\cdot H(\Omega),\quad (\beta>0)$，则其逆傅立叶变换为：

$$\begin{aligned}IFT[H_1(\Omega)]&=-\frac{j}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{(\beta+jt)\Omega}d\Omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{(-\beta+jt)\Omega}d\Omega\\&=\frac{j}{2\pi}\frac{1}{(\beta+jt)}+\frac{j}{2\pi}\frac{1}{(-\beta+jt)}\end{aligned} \qquad (0.4)$$

当 $\beta\to 0$， $H_1(\Omega)\to H(\Omega)$，则

$$h(t)=IFT[H(\Omega)]=\lim_{\beta\to 0}\left\{IFT[H_1(\Omega)]\right\}=\frac{1}{\pi t} \qquad (0.5)$$

因此，可定义 Hilbert 变换：

$$\hat{x}(t)=x(t)\otimes h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau \qquad (0.6)$$

一般来说一个信号经 Hilbert 变换后相当于在相位上转动 90 度。

根据文献[1]，有 Bedrosian 乘积定理表述如下：

令 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示实变量 t 的复信号，它们具有有限能量，且它们的傅立叶变换为 $X(\Omega)$ 和 $Y(\Omega)$ 。若满足 $X(\Omega)=0,(|\Omega|>b)$， $Y(\Omega)=0,(|\Omega|<a)$， 其中 $a>b>0$ ，则 $x(t)y(t)$ 的 Hilbert 变换满足以下关系：$\mathrm{H}\left\{x(t)y(t)\right\}=x(t)\mathrm{H}\left\{y(t)\right\}$ 。

Bedrosian 乘积定理可解释为两个信号乘积的解析信号等于高频信号的解析形式与低频信号的乘积。对于幅值调制信号 $x(t)=A[1+B\cos(2\pi f_b t)]\cos(2\pi f_a t)$，由于 $f_b<f_a$，则 $x(t)$ 的解析形式为：

$$x_a(t)=A[1+B\cos(2\pi f_b t)]e^{2\pi f_a t},$$

上述两式的信号图形如下图 3 所示：

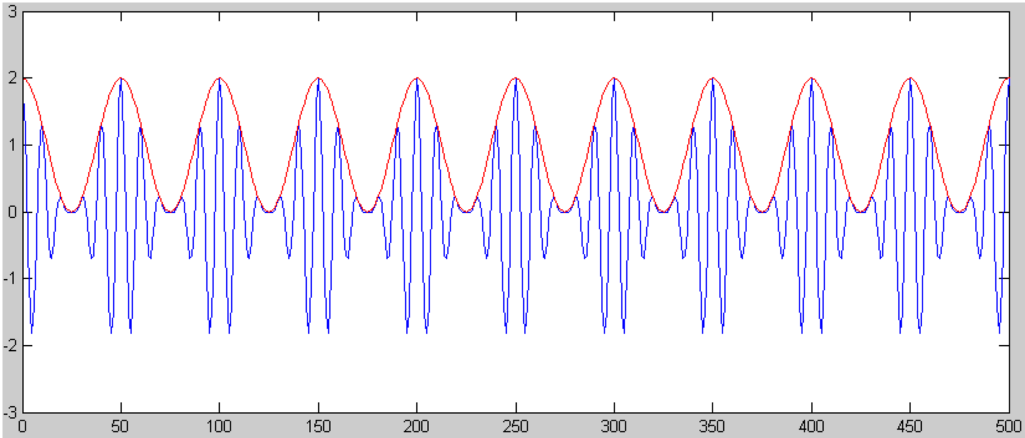

图 2

根据调制的性质，两个信号的相乘在频谱上会形成一个以高频成分为中心，以低频量为差值的边频带成分，根据以上 Hilbert 变换的推导过程可知，包络信号的频谱即是解调后的低频成分，信号结果如下图 3 所示：

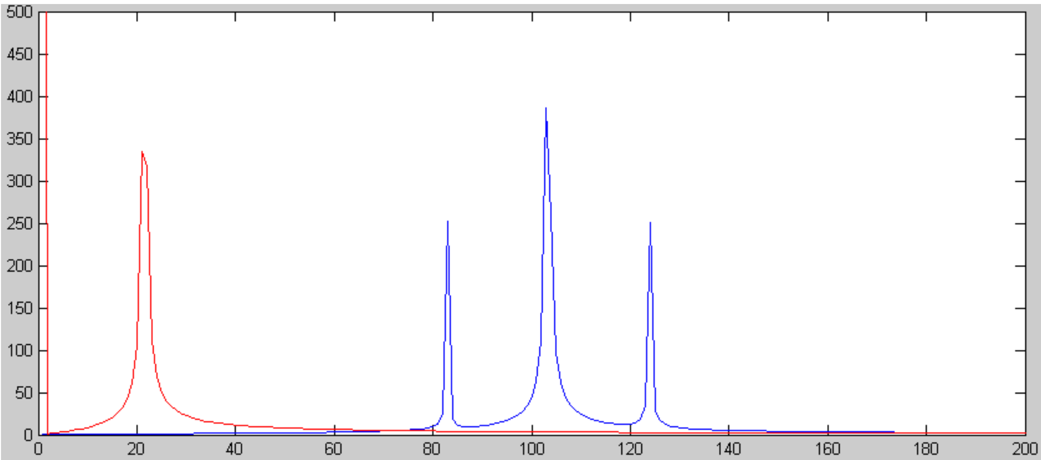

图 3