

# 北京大学 2017 年研究生算法课第 1 次书面作业

发布时间：2017 年 9 月 25 日

截止时间：2017 年 10 月 16 日课前

注意事项：

- 作业应独立完成，严禁抄袭。作业必须使用统一规定的模板。
- 在截止日期那天，直接把纸质版的作业交给任课老师。

## 引言、算法分析基础、图

### 1. 题目来源：《算法设计》第一章第 5 题：

**题目描述：**稳定匹配问题假定所有人对所有的异性都有完全的排序，但事实上有些人对几个异性的喜好程度是差不多的。我们有  $n$  个男人的集合  $M$  和  $n$  个女人的集合  $W$ 。假定每个人对异性成员进行排名，而且现在我们允许在排名中出现并列。比如  $n=4$  的时候，一个女人能够说  $m_1$  排第一位， $m_2$  和  $m_3$  并列第二位， $m_4$  是最后一位。如果在一个女人  $w$  看来， $m$  排得比  $m'$  更高（他们不是并列的），我们说  $w$  更想和  $m$  匹配而不是和  $m'$  匹配，即  $w$  更偏爱  $m$ 。男人侧同理。

考虑在下面两种情况下稳定匹配的存在性问题。

- (a) 在一个完美匹配  $S$  中的强不稳定因素指的是存在一个男人  $m$  和一个女人  $w$ ，他们都更想和对方匹配，而不是和  $S$  中现有的伴侣匹配。是否总是存在没有强不稳定因素的完美匹配？给出一个算法来找出这样的完美匹配，或者举出一个反例（写出每个男人和女人的异性排序表，并且说明每种匹配都有强不稳定因素）。
- (b) 在一个完美匹配  $S$  中的弱不稳定因素指的是存在一个男人  $m$  和一个女人  $w$ ，他们在  $S$  中的伴侣分别是  $w'$  和  $m'$ ，并且满足下面两条之一：
  - a)  $m$  更偏爱  $w$  而不是  $w'$ ，且  $w$  要么更偏爱  $m$ ，要么觉得  $m$  和  $m'$  一样好；
  - b)  $w$  更偏爱  $m$  而不是  $m'$ ，且  $m$  要么更偏爱  $w$ ，要么觉得  $w$  和  $w'$  一样好。换句话说， $m$  和  $w$  匹配的话，要么双方都严格地更满意，要么一方严格地更满意，另一方不严格地更满意。是否总是存在没有弱不稳定因素的完美匹配？给出一个算法来找出这样的完美匹配，或者举出一个反例。

2. 题目来源：《算法设计》第一章第 6 题：

**题目描述：**PSL 公司是一家航运公司，它拥有  $n$  条船，为  $n$  个港口提供服务。每条船有一个时间表，对一个月的某一天，这个时间表会指明这条船当时会在哪个港口，或者这条船当时会在出海。假定这里的月有  $m$  天并且  $m > n$ 。在这个月里每条船访问每个港口恰好 1 天。为了安全起见，PSL 公司有这样的严格要求：

(a) 同一天不能有两条船访问同一个港口。

公司在这个月想对所有的船进行维护，因此他们在考虑“截断”每条船的时间表。具体来讲，对每条船  $S$ ，当它在某一天到达那一天它该到达的港口  $P$  之后，它就可以一直停留在港口  $P$  一直到月底，时间表上本来预定的后续港口都不会访问了。

证明无论每条船最初的时间表是什么样，总可以找到这样一组截断方案，使得同一天不会有两艘船停在同一个港口。给出一个制定截断方案的算法。

例：假设有两条船和两个港口，这个月有 4 天。假设第一条船的时间表是：

港口 P1，出海，港口 P2，出海

第二条船的时间表是：

出海，港口 P1，出海，港口 P2

那么一个截断方案是让第一条船第三天起停留在 P2，让第二条船第二天起停留在 P1。这个问题中这是唯一满足条件的截断方案

3. 题目来源：《算法设计》第二章第 3 题：

**题目描述：**

用下面的函数表，按照增长率上升的顺序排列它们。即如果在你的表中，函数  $g(n)$  紧跟在  $f(n)$  的后面，那么应该满足  $f(n)$  是  $O(g(n))$ 。答题时要求写出函数本身，不能只给出函数序号。

$$f_1(n) = n^{2.5}$$

$$f_2(n) = \sqrt{2n}$$

$$f_3(n) = n + 10$$

$$f_4(n) = 10^n$$

$$f_5(n) = 100^n$$

$$f_6(n) = n^2 \log n$$

4. 题目来源：《算法设计》第三章第 4 题：

**题目描述：**你有一些朋友在业余时间研究蝴蝶，一天他们带了  $n$  只蝴蝶回来，他们知道每一只蝴蝶都属于两个不同种类中的一种。我们称这两个种类为 A 和 B。他们想把这  $n$  只蝴蝶每一只都归为 A 或者 B，但是直接标记每一只蝴蝶太困难了，因此他们决定采用如下办法：对每一对蝴蝶  $i$  和  $j$ ，他们会仔细研究这两只蝴蝶是不是属于同一类的。如果他们能判断，就会记下这两只蝴蝶是同类的或者是不同类的。当然，某些蝴蝶对他们也可能判断不出来是不是同一类的。

现在他们有  $n$  只蝴蝶，还有  $m$  个已经有判断的蝴蝶对，他们想知道这  $m$  个判断当中是不是有矛盾。具体来讲，是否能够存在一种归类方式，使得所有  $m$  个判断都是正确的。他们觉得你能帮他们解决这个问题。请你给出一个运行时间为  $O(m+n)$  的算法来确定是否有矛盾。

**注意：**这道题假设所有的蝴蝶只能属于两个种类中的一种。

5. 题目来源：《算法设计》第三章第 12 题：

**题目描述：**你正在帮助一些人类学家分析口述历史数据，他们知道一组  $n$  个人（他们现在都已经死了）之间的关系。我们把这  $n$  个人记做  $P_1, P_2, \dots, P_n$ 。他们搜集了一些这些人生前相互关系的一些事实，每种事实有下列两种形式之一：

- $P_i$  在  $P_j$  出生之前就死了；
- $P_i$  和  $P_j$  的人生有一部分是重叠的。

他们不可能保证这些事实都是正确的，毕竟记忆力是有限的，而且很多事实是口头流传下来的。因此，他们想让你确定这些事实是否可能是对的，即是否存在一组生卒顺序使得这些事实全都成立。给定一个算法，输入所有的事实，输出一组可能的生卒顺序，或者报告这些事实当中是有矛盾的。