# MNIST Digit Classification with MLP

袁无为 计预0

## Abstract

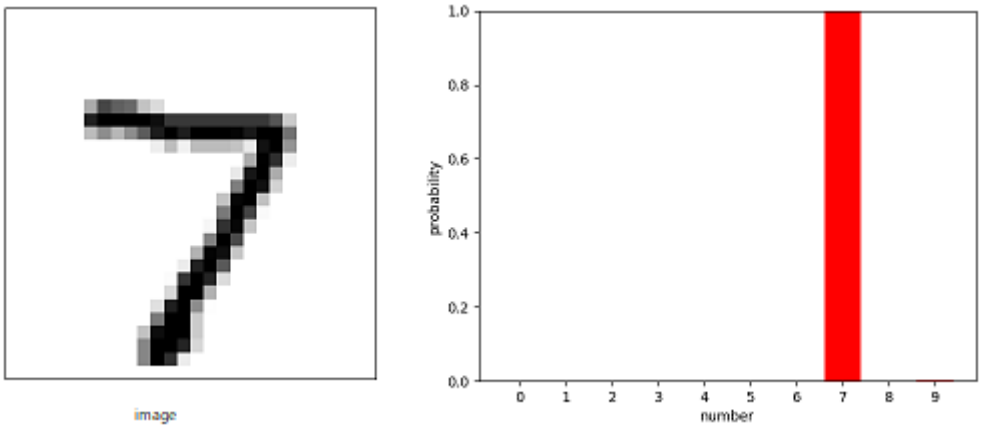
图像识别一直是深度学习中的一个基础又重要的内容。我们对手写数字识别和分类进行了一些研究，搭建了 MLP 模型并使用 MNIST 数据集对我们的模型进行了一些测试。

## 1. Introduction

手写数字识别是一个非常简单的问题。对于给定的一张 $28 \times 28$ 个像素的只包含一个数字的灰度图，只需要识别出这个图像对应的数字。而且这个数字往往会出现在图像的中央。

把一个图像输入到 MLP 中，会得到预测出的这个图像分别是每个数字的概率。

下图展示了一个手写数字的图像以及识别结果：



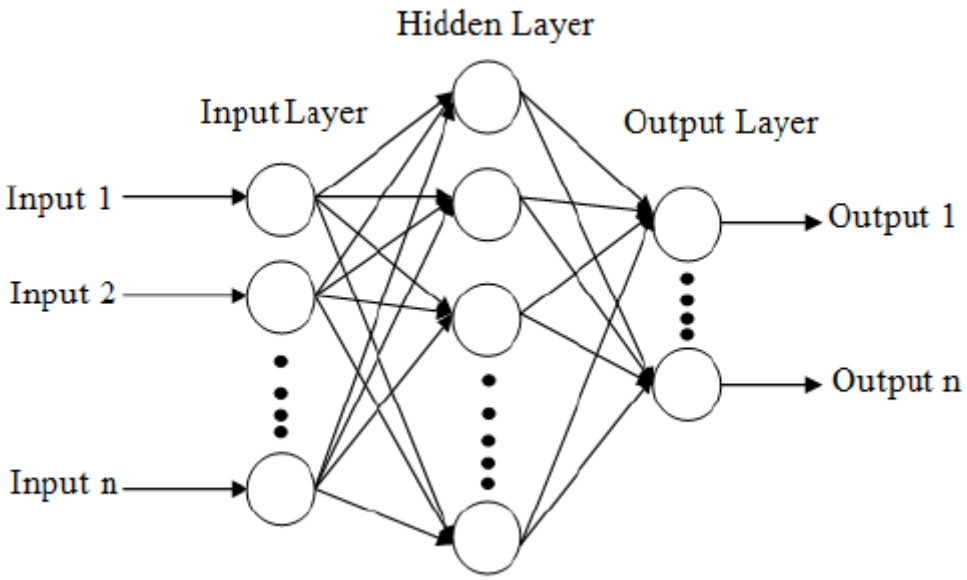

该图为 MNIST 中一个数字 7 的图像以及 MLP 网络的预测结果。

## 2. Approach

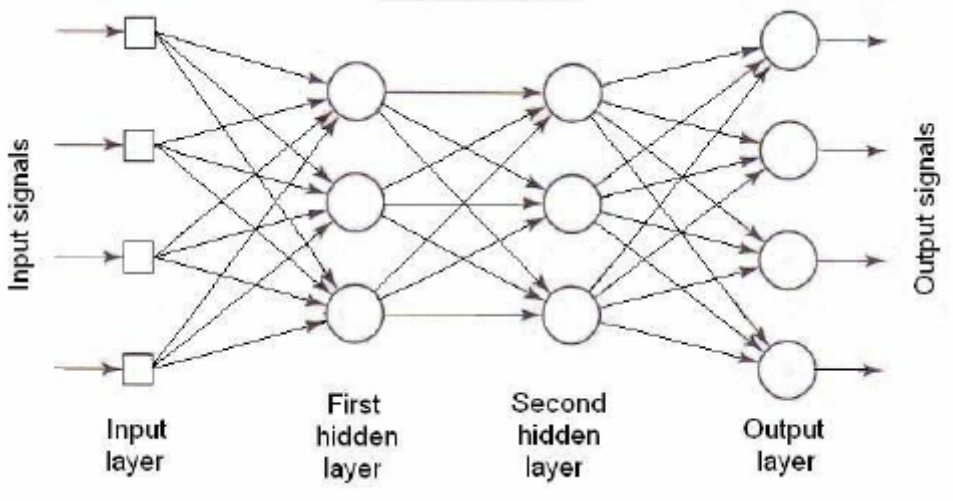
我使用的 MLP 模型主要包含以下几部分内容：

### 2.1 Basic Structure

我搭建了几个包含一个隐藏层的和几个包含两个隐藏层的模型，它们的结构如下：




包含一个隐藏层的网络




包含两个隐藏层的网络

所有网络的输入层节点个数为 784，输出层节点个数为 10。边为全连接的。没有 Dropout。

对于有一个隐藏层的网络，隐藏层的节点数为 100。

对于有两个隐藏层的网络，第一个隐藏层的节点个数为 200，第二个隐藏层的节点数为 100。

## 2.2 Activation Function

我选择了两个激活函数：

$$\mathrm{ReLU}(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathrm{Sigmoid}(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

它们的导数分别为：

$$\mathrm{ReLU}'(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Sigmoid}'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1 + e^{-x}\right)^2} = \mathrm{Sigmoid}(x)(1 - \mathrm{Sigmoid}(x))$$

## 2.3 Loss Function

我选择了两个损失函数：

EuclieanLoss(MeanSquareError)：对于预测结果 $y^{(n)}$ 和实际的结果（人工标注的结果） $t^{(n)}$，误差为：

$$E=\frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}||t^{(n)}-y^{(n)}||_2^2$$

，其中 $N$ 为 batch size。它的导数为

$$\frac{\partial E}{\partial y_k^{(n)}}=\frac{1}{N}(y_k^{(n)}-t_k^{(n)})$$

SoftmaxCrossEntropy：对于预测结果 $y^{(n)}$ 和实际的结果 $t^{(n)}$，误差 $E$ 为：

$$E=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}E^{(n)}$$

$$E^{(n)}=-\sum_{k=1}^{K}t_k^{(n)}\ln h_k^{(n)}$$

$$h_k^{(n)}=\frac{\exp(y_k^{(n)})}{\sum_{j=1}^{K}\exp(y_j^{(n)})}$$

其中 $K$ 是分类的类别数。它的导数为：

$$\frac{\partial E}{\partial y_k^{(n)}}=\frac{1}{N}(h_k^{(n)}-t_k^{(n)})$$

## 2.4 Parameters

我使用了 Xavier 初始化方法，权值矩阵初始化为 $\sigma^2=\frac{1}{n_i}$ 的正态分布的随机变量。其中 $n_i$ 为前一层的节点个数。

偏置矩阵初始化为 $0$。

## 2.5 Optimizer

使用了经典的 SGD 方法。

## 2.6 Normalization

在输入层前先对数据做一次 Normalization，即 $x_i'=\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}$ 其中 $\overline{x}$ 为 $x_i$ 的平均值，$\sigma$ 为 $x_i$ 的标准差。这样做能把 $x_i$ 调整为平均值为 $0$，方差为 $1$ 的分布的变量。能够减少微小扰动带来的影响。

# 3. Experiments

## 3.1 Datasets

使用了经典的 MNIST 手写数字数据集进行测试。

## 3.2 Implementation Details

### 不同结构的网络之间的对比

分别搭建了八个不同的网络，使用了相同的参数进行对比（其中误差函数为 SoftmaxCorssEntropy 的网络中输出层没有激活函数）。使用的参数为：learning rate $= 0.1$，momentum $= 0$，weight decay $= 0$，batch size $= 100$，without normalization。

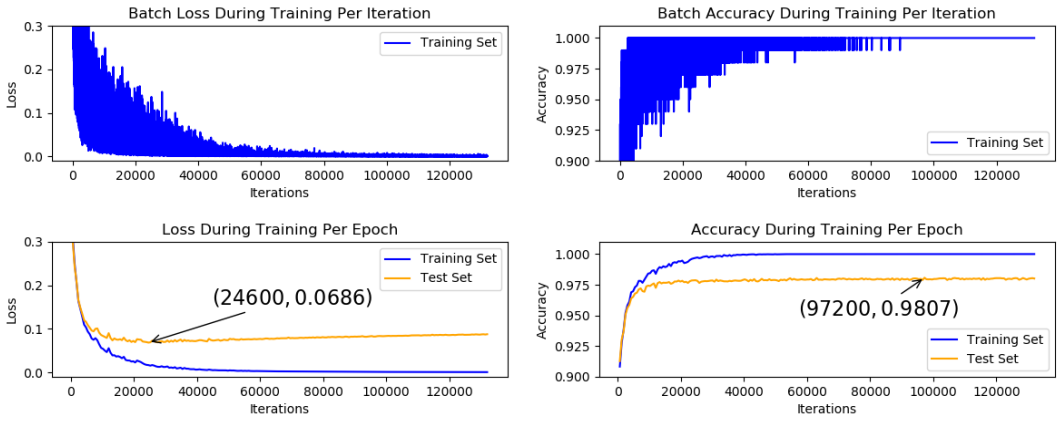
### 归一化的影响

搭建了八个网络，其中四个网络在输入层对数据做一遍归一化处理，另外四个没有。使用的参数为：hidder layer $= 2$, learning rate $= 0.1$，momentum $= 0$，weight decay $= 0$，batch size $= 100$ 。

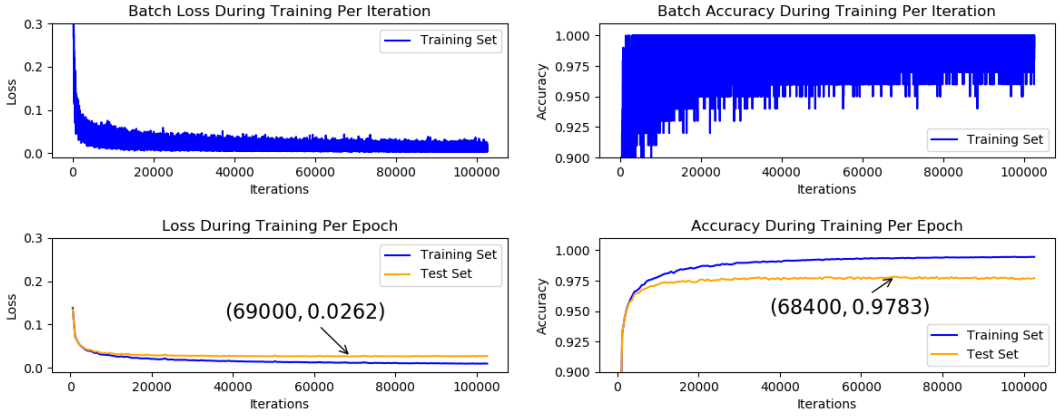
## 3.3 Quantitative Results

### 图像

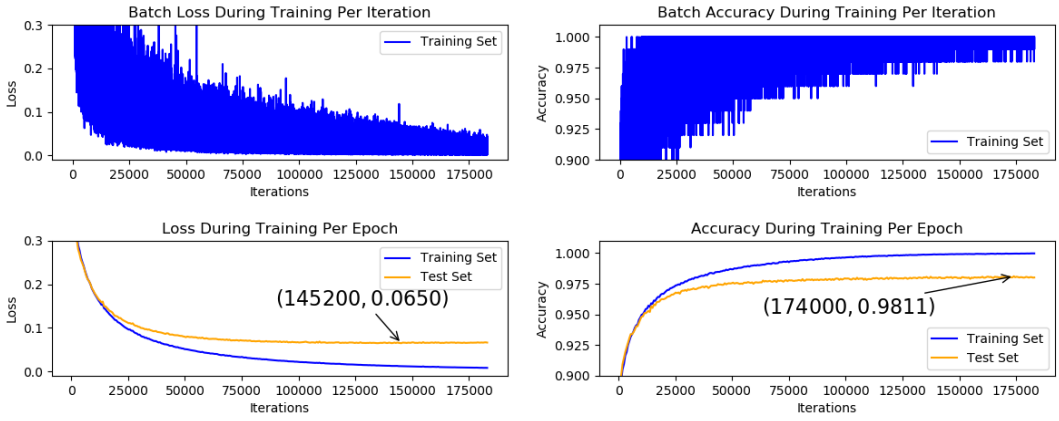
由于时间以及设备原因，我记录下了每次迭代中 Mini Batch 的正确率和损失以及每个 Epoch 后整个训练集以及测试集的正确率和损失。



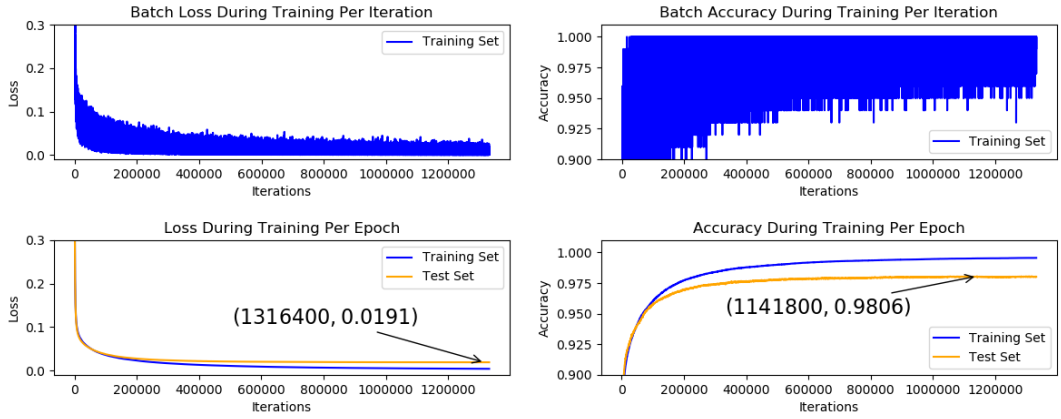

one hidden layer, ReLU, Softmax Cross-Entropy Loss, Without Normalization



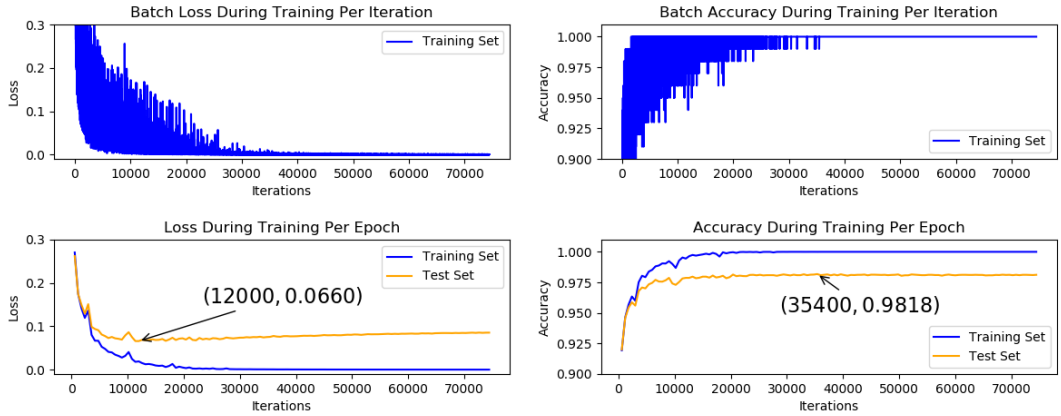

one hidden layer, ReLU, Mean Square Error, Without Normalization



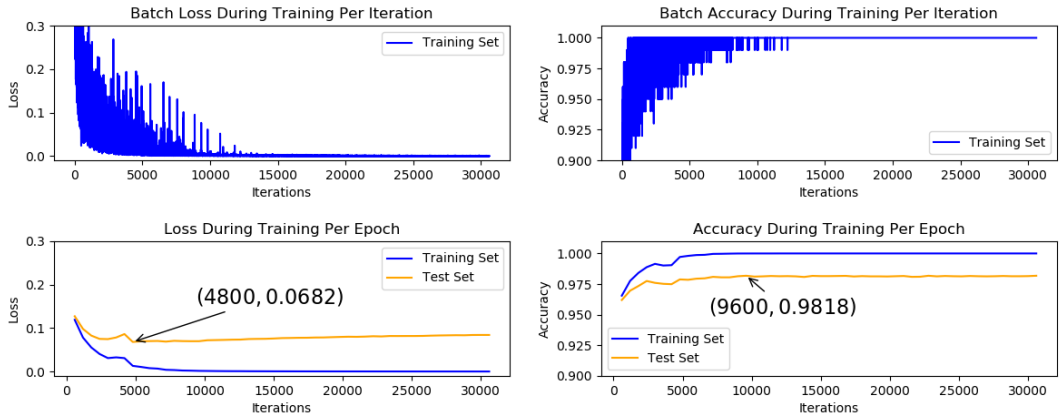

one hidden layer, Sigmoid, Softmax Cross-Entropy Loss, Without Normalization



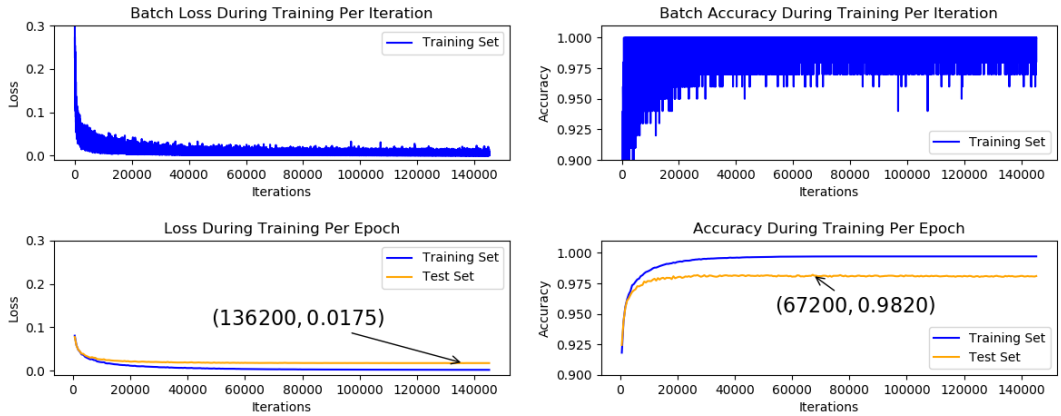

one hidden layer, Sigmoid, Mean Square Error, Without Normalization



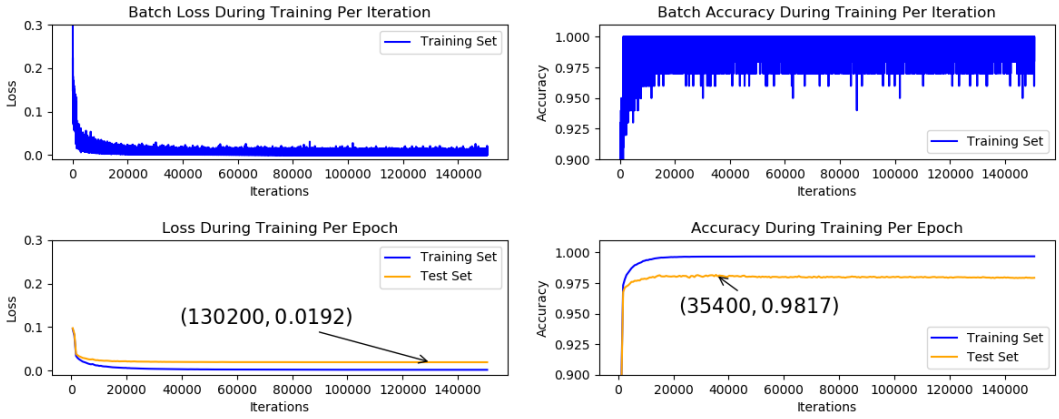

two hidden layer, ReLU, Softmax Cross-Entropy Loss, Without Normalization



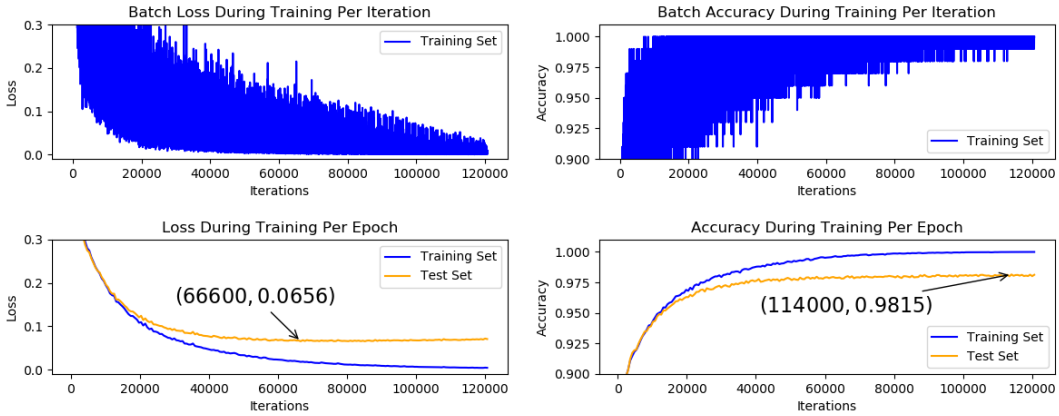

two hidden layer, ReLU, Softmax Cross-Entropy Loss, With Normalization



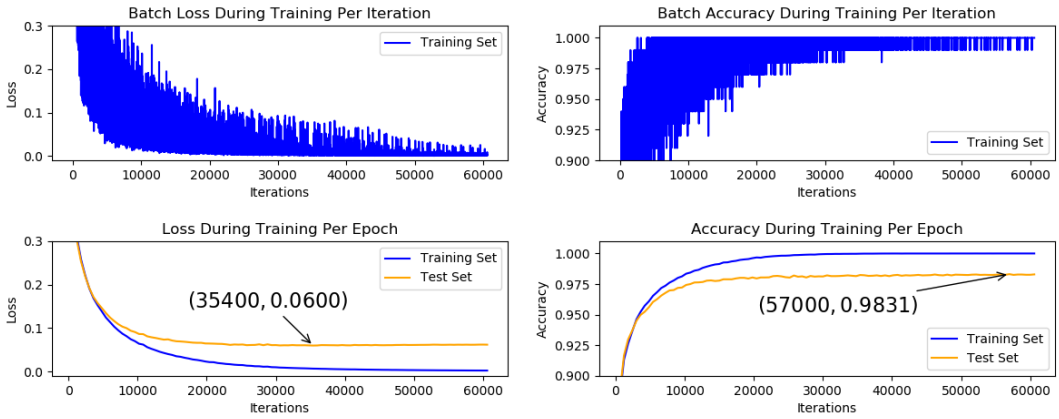

two hidden layer, ReLU, Mean Square Error, Without Normalization



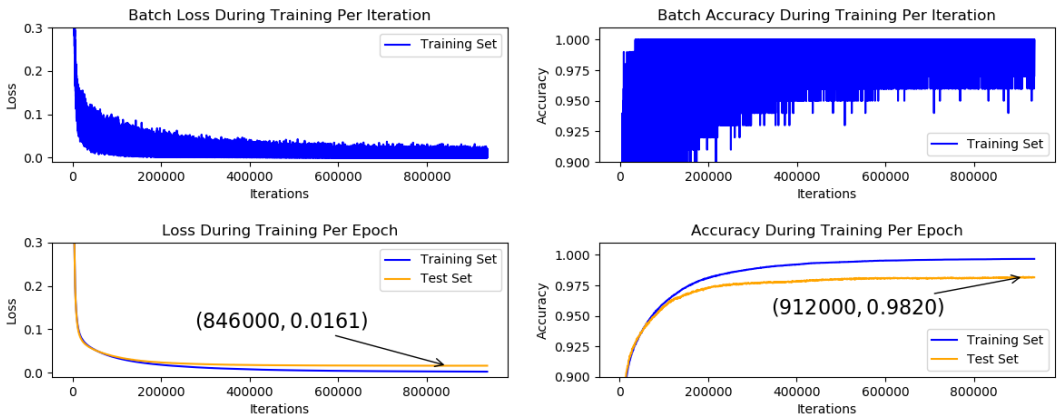

two hidden layer, ReLU, Mean Square Error, With Normalization



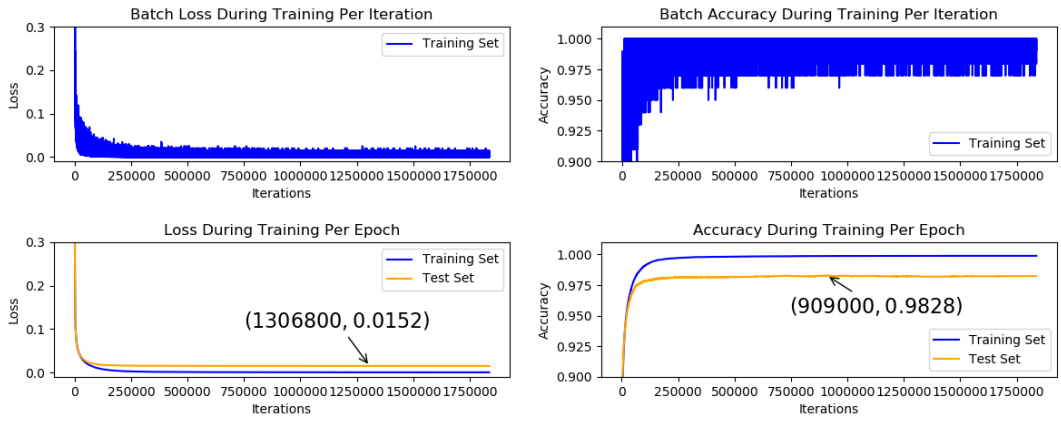

two hidden layer, Sigmoid, Softmax Cross-Entropy Loss, Without Normalization




two hidden layer, Sigmoid, Softmax Cross-Entropy Loss, With Normalization




two hidden layer, Sigmoid, Mean Square Error, Without Normalization




two hidden layer, Sigmoid, Mean Square Error, With Normalization

## 不同结构的网络之间的对比：

整理出的表格如下：

| 模型 | 隐藏层个数 | 激活函数 | 损失函数 | 测试集正确率 | 测试集达到最大正确率需要的迭代次数 | 每秒进行的迭代次数 | 测试集达到95%正确率需要的迭代次数 | 测试集达到98%正确率需要的迭代次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 模型1 | 1 | ReLU | Softmax Cross-Entropy Loss | 98.07% | 97200 | 234 | 2400 | 54600 |

| 模型 | 隐藏层个数 | 激活函数 | 损失函数 | 测试集正确率 | 测试集达到最大正确率需要的迭代次数 | 每秒进行的迭代次数 | 测试集达到95%正确率需要的迭代次数 | 测试集达到98%正确率需要的迭代次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 模型2 | 1 | ReLU | Mean Square Error | 97.83% | 68400 | 237 | 2400 | ------- |
| 模型3 | 1 | Sigmoid | Softmax Cross-Entropy Loss | 98.11% | 174000 | 192 | 11400 | 118200 |
| 模型4 | 1 | Sigmoid | Mean Square Error | 98.06% | 1141800 | 200 | 72600 | 848400 |
| 模型5 | 2 | ReLU | Softmax Cross-Entropy Loss | 98.18% | 35400 | 88 | 1800 | 16800 |
| 模型6 | 2 | ReLU | Mean Square Error | 98.20% | 67200 | 80 | 1800 | 18600 |
| 模型7 | 2 | Sigmoid | Softmax Cross-Entropy Loss | 98.15% | 114000 | 67 | 13200 | 66600 |
| 模型8 | 2 | Sigmoid | Mean Square Error | 98.20% | 912000 | 68 | 79800 | 476400 |

进行对比之后，可以得到以下结论：

对于有一个隐藏层的模型，用 Sigmoid 作激活函数的模型相对于用 ReLU 作激活函数的模型来说，在测试集上的正确率会更高，但是每次迭代的用时较长，收敛速度前者远远慢于后者。

对于有一个隐藏层的模型，用 Mean Square Error 作损失函数的模型相对于用 Softmax Cross-Entropy 作损失函数的模型来说，准确率相对较低，每次迭代的用时较长，收敛速度较慢。

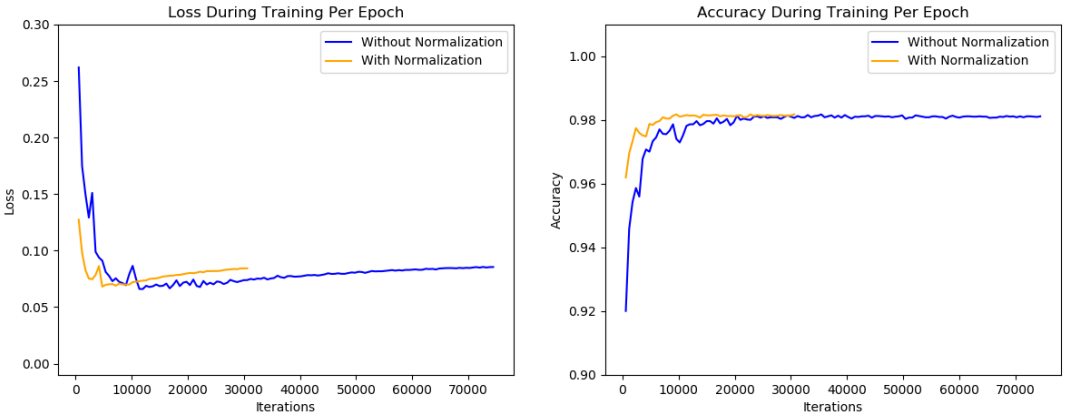
对于有两个隐藏层的模型，用 Sigmoid 作激活函数的模型相对于用 ReLU 作激活函数的模型来说，在测试集上的正确率差不多相同，但是每次迭代的用时较长，收敛速度前者远远慢于后者。

对于有两个隐藏层的模型，用 Mean Square Error 作损失函数的模型相对于用 Softmax Cross-Entropy 作损失函数的模型来说，准确率相对较高，每次迭代的用时较长，收敛速度较慢。

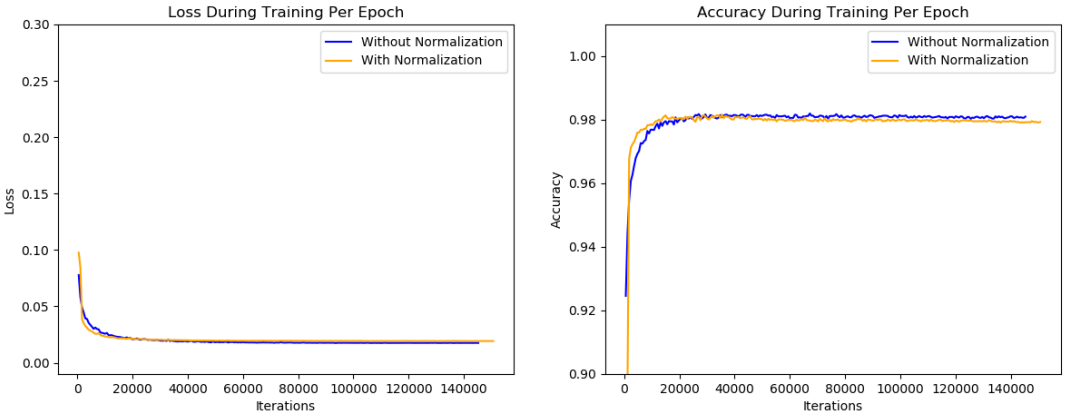
对于损失函数、激活函数相同的两个模型，含有一个隐藏层的模型相对于含有两个隐藏层的模型来说，在测试集上的正确率较低，每次迭代的用时较短，收敛速度较快。

## 归一化：

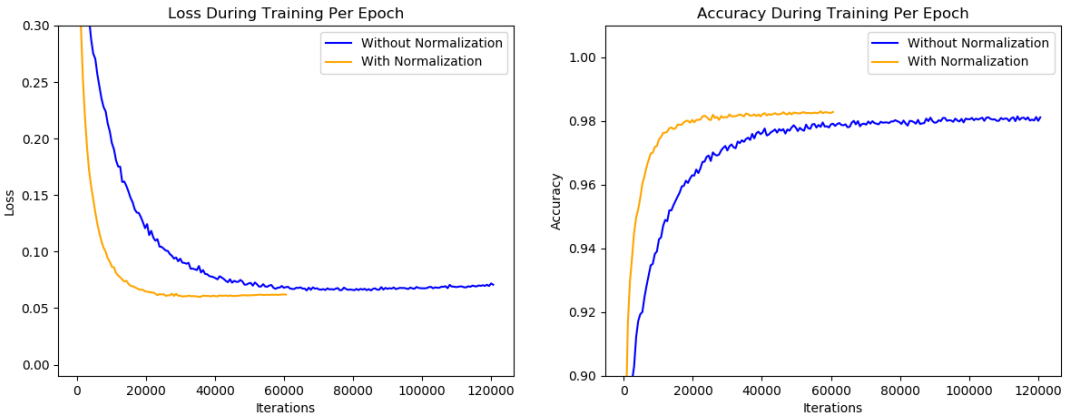
测试集的损失和正确率随迭代次数的图像如下：



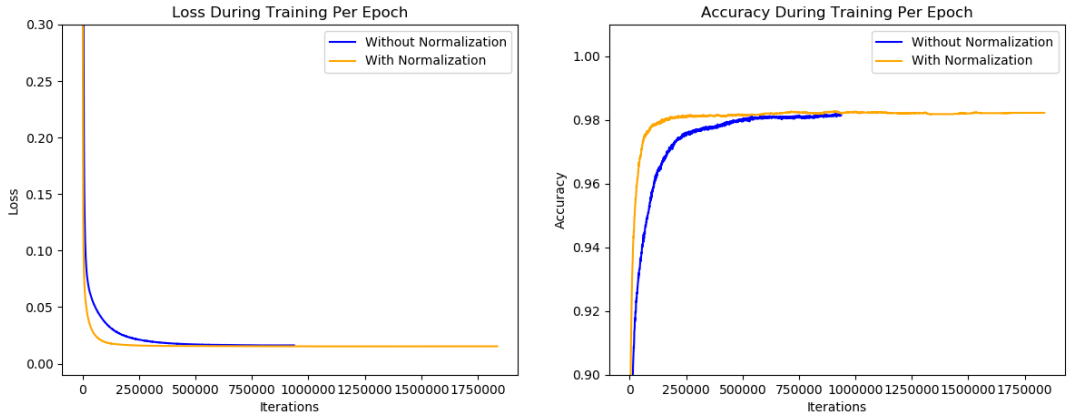

two hidden layer, ReLU, Softmax Cross-Entropy Loss




two hidden layer, ReLU, Mean Square Error




two hidden layer, Sigmoid, Softmax Cross-Entropy Loss




two hidden layer, Sigmoid, Mean Square Error

整理出的表格如下：

| 模型 | 激活函数 | 损失函数 | 是否有归一化 | 测试集正确率 | 测试集达到最大正确率需要的迭代次数 | 测试集达到95%正确率需要的迭代次数 | 测试集达到98%正确率需要的迭代次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 模型1 | ReLU | Softmax Cross-Entropy Loss | 否 | 98.18% | 35400 | 1800 | 16800 |

| 模型 | 激活函数 | 损失函数 | 是否有归一化 | 测试集正确率 | 测试集达到最大正确率需要的迭代次数 | 测试集达到95%正确率需要的迭代次数 | 测试集达到98%正确率需要的迭代次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 模型2 | ReLU | Softmax Cross-Entropy Loss | 是 | 98.18% | 9600 | 600 | 7200 |
| 模型3 | ReLU | Mean Square Error | 否 | 98.20% | 67200 | 1800 | 18600 |
| 模型4 | ReLU | Mean Square Error | 是 | 98.17% | 35400 | 1800 | 12600 |
| 模型5 | Sigmoid | Softmax Cross-Entropy Loss | 否 | 98.15% | 114000 | 13200 | 66600 |
| 模型6 | Sigmoid | Softmax Cross-Entropy Loss | 是 | 98.31% | 57000 | 4200 | 18000 |
| 模型7 | Sigmoid | Mean Square Error | 否 | 98.20% | 912000 | 79800 | 476400 |
| 模型8 | Sigmoid | Mean Square Error | 是 | 98.28% | 909000 | 22200 | 142200 |

进行对比之后，可以得到以下结论：

归一化对模型的收敛速度有很大的提升，对使用 Sigmoid 函数作为激活函数的模型的正确率有微小的提升。

# 4. Conclusion

在这次作业中，我对手写数字识别以及 MLP 进行了一些研究。包括 MLP 的结构、激活函数、损失函数、初始化以及一些其他的内容。实验证明 MLP 能较好的完成手写数字识别的工作。尽管如此，MLP 也有一些不尽人意地方，会有一小部分的数字识别不出或识别错误。

# References


[Exploring Context and Visual Pattern of Relationship for Scene Graph Generation]

[深度学习——Xavier初始化方法]

Batch Normalization原理与实战

含有一个隐藏层的神经网络图片

含有两个隐藏层的神经网络图片