《矩阵理论与应用1》考试题(2025)

学号：________________ 姓名：______________ 成绩：______________

一、判断题 对每小题回答“是”或“否”(本题共21分, 每小题3分).

1. 集合$\{x=(x_1,x_2,x_3)^T\in C^3:\ x_1x_2=0\}$是线性空间$C^3$的子空间.
2. 对R^2中的向量$x=(x_1,x_2)^T$和$y=(y_1,y_2)^T$, 函数$(x,y)=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2$是$R^2$上的一个内积.
3. 在实值函数空间中，函数组$1,\sin^2 x,\cos 2x$线性相关.
4. 对于线性空间R^2, $V_1=\{(x_1,x_2)^T\in R^2|\ x_1=x_2\}$是子空间$V_2=\{(x_1,x_2)^T\in R^2|\ x_1+x_2=0\}$的正交补空间.
5. 映射$T:\ R^3\to R^3$, $(x_1,x_2,x_3)^T\to(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)^T$是线性变换.
6. 设A是正规矩阵，则A的特征值均为实数.
7. 如果A是幂等矩阵且$|A|\neq 0$. 则有$A=I$. (I表示单位矩阵)

二、填空题 对每个空格写出正确的答案(本题20分, 每空4分)

1. 对于矩阵通常的加法和数乘运算, 实数域R上的线性空间$V(R)=\{A:\ A\in C^{n\times n},\ A^H=-A\}$的维数等于______________.

2. 设$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$是矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&2&1&0\\1&1&2&1\\2&0&1&1\end{bmatrix}$的特征值, 则有$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=$______________.

3. 设矩阵$A=I-3ww^T$, 其中I是单位矩阵, w是给定的单位实向量. 求A阵谱半径$\rho(A)=$____________.
另外若$I,A,A^2,\cdots,A^l$线性无关, 而$I,A,A^2,\cdots,A^{l+1}$线性相关，那么$l=$____________.

4. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}.$$

则A的最小多项式$m(\lambda)=$______________.

三、(本题15分)

已知ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是线性空间V 的一组基，线性变换T 在此基底下的矩阵表示为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

设 $\eta_1=\xi_1-2\xi_2+\xi_4$，$\eta_2=3\xi_2-\xi_3-\xi_4$，$\eta_3=\xi_3+\xi_4$，$\eta_4=4\xi_4$.

(1) 证明向量组$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 也是V 的基底.

(2) 求T在基底$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵表示B;

(3) 求$N(T)$, $R(T)$ 的维数.

四、(本题12分)

用盖氏圆盘定理证明下面的矩阵A有n 个互异的实特征根，并且 $|A|>1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & 4 & 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n & 2n-2 & 1/n \\ 1/n & \cdots & & 1/n & 2n \end{bmatrix}.$$

五、(本题16分)

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

求矩阵 e^{At}.

六、(本题16分)

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(1) 证明矩阵 A 是正规矩阵;

(2) 求矩阵 A 的谱分解;

(3) 求矩阵 A^3 的谱分解.