2019－2020 学年 第一学期期末试卷

学号__________　姓名___________　任课教师___________　成绩__________

考试日期：2020 年 1 月 8 日

考试科目：《 矩阵理论 》（2）

注意事项：1、考试 5 个题目共 9 页。

2、考试时间 120 分钟。

3、试卷中出现的符号含义：I_n 为 n 阶单位矩阵，$i=\sqrt{-1}$，$C_r^{m\times n}$ 为秩 r 的 $m\times n$ 的矩阵集合。

题目：

1、（本题　42　分）

2、（本题　15　分）

3、（本题　10　分）

4、（本题　18　分）

5、（本题　15 分）

姓名：　　　　　　　　　　学号：

1．（42 分）填空

（1）已知 $x_1=(1,2,1,0)^T, x_2=(-1,1,1,1)^T, y_1=(2,-1,0,1)^T, y_2=(1,-1,3,7)^T$，$V_1=Span\{x_1,x_2\}, V_2=Span\{y_1,y_2\}$，则 V_1+V_2 的维数是__3___，$V_1\cap V_2$ 的维数是___1___.

（2）λ 矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{pmatrix}$ 的 Smith 标准形是_$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$__.

（3）设 A=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，则矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}A^k$ ___收敛____。（填“收敛”或者“发散”）

（4）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 A 的 Jordan 标准形 J=____$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$_____。

（5）已知线性方程组 $Ax=b$ 相容，其中 $A\in C^{m\times n}, b\in C^m$ 给定，$x\in C^n$ 是待定向量，则上述线性方程组的通解公式为___$x=A^+b+(I-A^+A)y, y\in C^n$___，解唯一当且仅当 A 是__列满秩__矩阵。

(6) 设 $x=(x_1,x_2)^T, y=(y_1,y_2)^T$ 是 R^2 中的任意两个向量，定义函数 $f(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$，问 $f(x,y)$ 能否构成 R^2 中的内积. __否_____（填“是”或者“否”）

(7) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix}A & A\\ A & A\end{pmatrix}$ 的**伪逆**是___$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}A^{-1} & A^{-1}\\ A^{-1} & A^{-1}\end{pmatrix}$_____。

(8) 三阶实对称矩阵 A 的秩 r(A)=2，对应于特征值 1 和 2 的特征向量为 $(1,-1,1)^T$ 和 $(2,b,-1)^T$，则 A=__$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$__.（提示：另外一个特征值是 0，不

同特征值特征向量正交。然后单位化求出正交矩阵 Q，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$

(9) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\2&-2&0&0\\3&-5&3&8\\4&-6&7&4\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1=$ _15____,$\|A\|_F=$ _$\sqrt{237}$____,$\|Ax\|_\infty$ =__13______.

(10)判断题：若 A 是 Hermite 矩阵，则 e^{iA} 是酉矩阵。________（ 填“√” 或者 “×”）

2.（15 分） 设 $A=\begin{pmatrix}2&i\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, 求 A 的奇异值分解.

解：$A^H=\begin{pmatrix}2&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}$，则 $A^HA=\begin{pmatrix}2&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&i\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2i\\-2i&1\end{pmatrix}$

$|\lambda I-A^HA|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2i\\2i&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-5)$， $\lambda_1=5,\lambda_2=0$，

对 $\lambda_1=5$ ，求 $\begin{pmatrix}1&-2i\\2i&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$ 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}2i\\1\end{pmatrix}$

对 $\lambda_2=0$ ，求 $\begin{pmatrix}-4&-2i\\2i&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$ 得 $\eta_2=\begin{pmatrix}-i\\2\end{pmatrix}$

分别单位化为; $\begin{pmatrix}\frac{2i}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-i}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ 令 $V=\begin{pmatrix}\frac{2i}{\sqrt5}&\frac{-i}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

而 $A\eta_1=\begin{pmatrix}2&i\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2i\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5i\\0\\0\end{pmatrix}$，补充基为 $\begin{pmatrix}5i\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

令 $U=\begin{pmatrix}i&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$ 所以 $A=U\begin{pmatrix}\sqrt5&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}V^H$

3．（10 分）用盖尔定理证明矩阵 A=$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3^2} & \cdots & \frac{1}{3^{n-1}} \\ -\frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3^2} & \cdots & \frac{1}{3^{n-1}} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3^2} & 3 & \cdots & \frac{1}{3^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3^2} & -\frac{1}{3^3} & \cdots & n \end{pmatrix}$相似于对角阵，且 A 的特征值都是实数.

证明： (1)A 的 n 个盖尔圆为$| z-p | \le \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{3^j} < \frac{1}{2}, p=1,\cdots,n$.每个圆都是孤立的，所以 A 有 n 个互异的特征值，即 A 相似于对角阵。

(2)因为 A 是实矩阵，圆心都在实轴上，所以特征值如果是复数只能共轭成对出现，这与圆内只有一个特征值矛盾，所以只能是实数。.

4.（18 分）已知 A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，b = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.（1）求 A 的满秩分解，并用满秩分解求 A^+.（2）判断方程组 Ax = b 是否有解. （3）求 Ax = b 的极小范数解或极小最小二乘解.

解：（1） $A \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = FG$$

（2）

$$A^{+}=G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}3&1&5&-2\\1&2&0&1\\-2&1&-5&3\\1&2&0&1\end{bmatrix}$$

（3） $AA^{+}b=b$, 故 $Ax=b$ 有解.

（4）极小范数解 $A^{+}b=(1,\ 0,-1,0)^{T}$，

5.（15 分）设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$，用谱上一致多项式方法求 $\sin A$.

解： $\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-1&-1\\-1&1&\lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&(\lambda-2)^2\end{pmatrix}$，所以最小多项式为 $(\lambda-2)^2$，

设 $P(\lambda)=a+b\lambda, f(\lambda)=\sin\lambda$.有：

$$\begin{cases}f(2)=P(2)\\f'(2)=P'(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin 2=a+2b\\\cos 2=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sin 2-2\cos 2\\b=\cos 2\end{cases}$$

$$\sin A=aI+bA=\begin{bmatrix}\sin 2&0&0\\\cos 2&\sin 2-\cos 2&\cos 2\\\cos 2&-\cos 2&\sin 2+\cos 2\end{bmatrix}$$