北京航空航天大学

2024－2025 学年 第一学期期末

《矩阵理论与应用 I》

考 试 A 卷

学 号＿＿＿＿＿＿ 姓 名＿＿＿＿＿＿ 任课老师＿＿＿＿＿＿ 成 绩＿＿＿＿＿＿

注意：

1. 本次考试为闭卷形式，考试时间：18：30—20：30，共计120分钟，总分100分.
2. 请将答案写在后面的答题册上，判断题、填空题分别写入答题册对应位置，其余题目写明题号即可，无需抄题. **写在本试卷上的答案无效。**
3. 请在答题纸每页写明学号和姓名.
4. 试卷、答题纸和草稿纸全部回收. **考试试卷未提交者，卷面成绩按0分计.**

2025 年 1 月 2 日

《矩阵理论与应用 I》期末考试卷

卷面中出现符号含义：$\mathbb{R}$: 实数域，$\mathbb{C}$: 复数域，$\mathrm{tr}(A)$: 矩阵A的迹，$\mathrm{rank}(A)$: 矩阵 A的秩，$\rho(A)$: 矩阵A的谱半径，$R(A)$: 矩阵A的列空间，$N(A)$: 矩阵A的零空间，A^H：矩阵A的共轭转置；I: 单位矩阵，$\oplus$：正交直和，i：纯虚数，$\|A\|_2$: 矩阵A的谱范数，$\|A\|_F$：矩阵A的 F 范数.

一、判断题（共 20 分）

1、设$V=\{A\in\mathbb{R}^{3\times3} \mid A$的行列式等于 0$\}$，则$V$在$\mathbb{R}$上定义的普通矩阵加法和数乘下构成一个线性空间. ( )

2、在有限维线性空间中，同一个向量在不同基下的坐标可能相同. ( )

3、设n阶复方阵A、B有相同的特征多项式和最小多项式，则A与B一定相似. ( )

4、设A、B均是n阶复方阵，则$R(AB)\subseteq R(A), N(B)\subseteq N(AB)$. ( )

5、设A是n阶可逆复方阵，则$\sin A$必可逆. ( )

6、设T是n维欧氏空间V的一个正交变换, 则T对应的矩阵一定是正交矩阵. ( )

7、设A、B均是正规复矩阵, 且$AB=BA$，则AB和BA均是正规矩阵. ( )

8、设A是n阶复方阵, 则$\|A\|_2\le\|A\|_F$. ( )

9、设$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, 则级数$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}A^k$收敛但不绝对收敛. ( )

10、$\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$，若向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$与矩阵范数$\|A\|_m$满足不等式$\|A\boldsymbol{x}\|_v\ge\|A\|_m\|\boldsymbol{x}\|_v$，则称矩阵范数$\|A\|_m$与向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$是相容的. ( )

二、填空题（共 36 分）

1、设$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\1&-1&3&7\end{bmatrix}$，$V_1$和$V_2$分别是齐次方程组$Ax=0$和$Bx=0$的解空间，则$\dim(V_1\cap V_2)=$______ .

2、已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，若向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+k\alpha_1$也线性无关，则 k 应满足_________.

3、设$M=I-ww^T$，$w=\frac{1}{\sqrt{n}}[1,1,\cdots,1]^T\in\mathbb{R}^n$，则$M$的行列式等于______.

4、设$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, 则$||A||_1=$_________, $||A\boldsymbol{x}||_\infty=$_________, $||A||_F=$_________.

5、设$A\in\mathbb{R}^{3\times3}$，特征值$\lambda=2$是三重根且其只有一个线性无关的特征向量，则$A$的 Jordan 标准形是_____________.

6、设$A=\begin{bmatrix}7 & 0 & 1\\ -1 & -5 & \mathrm{i}\\ 0 & 1 & 6\mathrm{i}\end{bmatrix}$，则$A$________（填“是”或者“不是”）单纯矩阵.

7、$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$，$A$的满秩分解为 ______________________.

8、设$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}$，$a\in\mathbb{R}$. 若极限$\lim\limits_{k\to\infty}A^k$存在，则$a$的取值范围是______________.

9、设$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，定义集合$S_A=\left\{\sum_{i=-1}^{\infty}a_iA^i,\forall a_i\in\mathbb{R}\right\}$，则$S_A$______（填“是”或者“不是”）线性空间，若“是”的话，则S_A的维数是______，若“不是”的话，请给出理由______.

三、（13 分）设$\mathbb{R}^3$中的一组基为$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(2,1,1)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$,对$\mathbb{R}^3$中任意的向量$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,k_j\in\mathbb{R},j=1,2,3$，定义变换$T$为：$T(x)=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+k_3T(\alpha_3)$，其中$T(\alpha_1)=(0,1,1)^T,T(\alpha_2)=(-1,1,0)^T,T(\alpha_3)=(1,2,1)^T$，试求解以下问题：

（1） 证明T是线性变换；

（2） 求T在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵.

四、（13 分）设$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}$，试求解以下问题：

（1） 求A的谱分解；

（2） 计算A^{100}（用谱阵表示即可）.

五、（13 分）已知矩阵$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{bmatrix}$，试求解以下问题：

（1） 求A的 Jordan 标准形J；

（2） 求矩阵指数函数e^{At}.

六、（5 分）证明题

设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\|A\|$是某一矩阵范数，若$\|A\|<1$，证明$I-A$可逆且$\|(I-A)^{-1}\|\le\frac{\|I\|}{1-\|A\|}$.