北京航空航天大学

2023－2024 学年 第一学期期末

《矩阵理论》

考 试 A 卷

学 号 __________ 姓 名 ________________ 成 绩 __________

注意：

1. 本次考试为闭卷形式，考试时间：14：30—17：00，共计150分钟，总分70分.
2. 请将答案写在后面的答题纸上，判断题写入答题纸上的表格中，其余题目写明题号即可，无需抄题.
3. 请在答题纸每页写明学号和姓名.
4. 试卷、答题纸和草稿纸全部回收. **考试试卷未提交者，卷面成绩按0分计.**

2023 年 12 月 30 日

《矩阵理论》期末考试卷

卷面中出现的符号含义：$\mathbb{R}$: 实数域，$\mathbb{C}$: 复数域，$\mathrm{tr}(A)$: 矩阵A的迹，$\mathrm{rank}(A)$: 矩阵A的秩，$\rho(A)$: 矩阵A的谱半径，A^+: 矩阵A的伪逆，$R(A)$: A的列空间，$N(A)$: A的零空间，A^H：矩阵的共轭转置；I: 单位阵，$\oplus$表示正交直和，i为纯虚数，$\|\boldsymbol{x}\|_p$：向量$\boldsymbol{x}$的p范数，$\|A\|_2$：矩阵A的谱范数，$\|A\|_F$：矩阵A的 F 范数.

一、判断题（共 33 分）

1、 设A和B均为n阶非零矩阵，且$g(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$是$A$、$B$和$A-B$的一个零化多项式. 试判断以下命题：

（1） AB一定是幂等矩阵.

（2） A和B均为投影矩阵.

（3） $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{rank}(B)$.

（4） BAB一定是单纯矩阵.

2、 设A是n阶秩一的方阵，试判断以下命题：

（5） A的最小多项式为$\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda$.

（6） $\|A\|_2=\|A\|_F$.

（7） 若B是秩为m的单纯矩阵，则B必可写成m个秩 1 矩阵之和.

（8） A^H和A^+必线性相关.

3、在n维线性空间V中，定义线性变换T_1与T_2，且满足$T_1T_2=T_1+T_2$，试判断以下命题：

（9） T_1的特征值可能为 0.

（10） T_2的特征值可能为 1.

4、 设$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$，$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，试判断以下命题：

（11） 若U为n阶酉矩阵，则$\|U\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{x}\|_2$

（12） 若矩阵A的所有列和都相等，则$\rho(A)=\|A\|_\infty$.

（13） 若$\|\cdot\|_p$是$\mathbb{C}^n$的p范数，$p=1,2,\ldots,\infty$，则$\|\boldsymbol{x}\|_1\le\|\boldsymbol{x}\|_2\le\|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

（14） 记$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_4$是 4 阶矩阵$AA^H$线性无关的特征向量组. 若$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_i)=0$（$\forall i\neq 1$），$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=0$，$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)\neq 0$，$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\neq 0$，则$AA^H$有且只有 2 个互异的非负特征值.

5、设A，B都是n阶方阵，试判断以下命题：

（15）AB和BA一定具有完全相同的特征多项式.

（16）设A是 Hermite 正定阵，B是 Hermite 半正定阵，则AB的所有特征值都是非负的.

（17）若$AB=BA$, A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$B$的特征值为$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$, 则$A+B$的特征值必为$\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2,\cdots,\lambda_n+\mu_n$.

（18）$\frac{d}{dX}(\mathrm{tr}(AXB))=AB$，其中$X$是$n$阶待定矩阵.

6、 设$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \mathrm{i}&1&0\\ \mathrm{i}&\mathrm{i}&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^3$. 试判断以下命题：

（19） A阵可唯一地分解为一个酉矩阵和一个正定的 Hermite 矩阵的乘积.

（20） $\boldsymbol{x}$在$R(A^H)$的正交投影均为$A^+A\boldsymbol{x}$.

（21） 在利用盖尔圆盘估计特征值时，利用A^T能改进直接利用A的盖儿圆进行估计.

（22） 定义$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}}$. 对满足$\|\boldsymbol{x}\|=1$的任意向量$\boldsymbol{x}$，$\max\|A\boldsymbol{x}\|=\|A\|_2$.

二、（9 分）已知矩阵$A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\ \frac{1}{2}&-1&0\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}$，定义集合$S_A=\{\sum_{k=-1}^{+\infty}c_kA^k,c_k\in\mathbb{R},k=-1,0,1,\cdots,\infty\}$.

（1） 证明集合S_A是$\mathbb{R}$的线性空间；

（2） 求S_A的维数；

（3） 判断$\sum_{k=-1}^{+\infty}\frac{1}{k+2}A^k$的敛散性，并给出理由.

三、（12 分）定义变换：$\forall X\in\mathbb{C}^{2\times2}$，$f(X)=\begin{bmatrix}a&3a\\2a&4a\end{bmatrix}$，其中$a$为矩阵$X$的迹.

（1） 证明变换f是线性变换；

（2） 求f在$\mathbb{C}^{2\times2}$的基$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$下的矩阵$A$；

（3） 求线性变换f的零空间$N(f)$.

四、（6 分）已知矩阵$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$X$为待定适当阶数的矩阵.

（1） 求如下矩阵方程组的通解.

$$\begin{cases}AXA=A\\XAX=X\end{cases}$$

（2） 若$A=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\1&2&\ddots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\ddots&0\\1&2&\cdots&n\end{bmatrix}$为$n$阶下三角阵，证明一定存在实矩阵$X$，使得

$$X^{2023}+X^{2022}+\cdots+X+I=A$$

五、（10 分）已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&-6\\1&0&-3\\1&1&-4\end{bmatrix}$.

（1） 求A的 Jordan 标准形J.

（2） 求矩阵P使得$P^{-1}AP=J^T$.

（3） 求$\sqrt{\sin A}$.