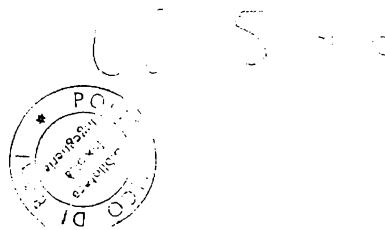




Diplomi universitari a distanza  
in Ingegneria

ELEMENTI DI  
**MACCHINE  
OPERATRICI  
A FLUIDO**

LUCIANO A. CATALANO  
MICHELE NAPOLITANO



Pitagora Editrice Bologna

*In copertina:*

Diagramma collinare di pompe a pistoni assiali Serie 40 della Sauer-Sundstrand Company ( $p_{max} = 345 \text{ bar}$ ,  $n_{max} = 3600 \div 4200 \text{ RPM}$ ).

ISBN 88-371-0995-4

© Copyright 1998 by Pitagora Editrice S.r.l., Via del Legatore 3, Bologna, Italy.

Tutti i diritti sono riservati, nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, memorizzata o trasmessa per mezzo elettronico, elettrostatico, fotocopia, ciclostile, senza il permesso dell'Editore.

Stampa: Tecnoprint S.n.c., Via del Legatore 3, Bologna.

Codice: 33/10

<http://www.pitagoragroup.it>  
e-mail: pited@pitagoragroup.it

# Prefazione

Presso il Politecnico di Bari vengono offerti insegnamenti di *Macchine a Fluido* agli studenti di vari Corsi di Laurea e, da alcuni anni, anche dei Corsi di Diploma Universitario (Ingegneria Meccanica ed Ingegneria delle Infrastrutture). Molti di tali corsi devono concentrare il vastissimo campo delle macchine a fluido in una o addirittura mezza unità didattica (due moduli o un modulo nei D.U.). Nel progettare tali corsi, piuttosto che affrontare in modo superficiale tutte le macchine a fluido, si è preferito mantenere un livello di *approfondimento universitario* e limitarsi alla trattazione delle macchine che più facilmente potranno essere incontrate nelle future attività professionali dei vari ingegneri diplomati o laureati: questi appunti trattano gli argomenti comuni a tutti i suddetti corsi, cioè, i richiami di termodinamica applicata necessari a definire i concetti fondamentali e la nomenclatura utilizzata, le macchine operatrici centrifughe e volumetriche e le trasmissioni idrostatiche. Alla fine di ogni capitolo vengono forniti alcuni esercizi applicativi con i relativi risultati numerici, particolarmente utili nelle attività di tutoraggio. Alcuni di essi, indicati con un asterisco, presentano difficoltà concettuali o numeriche forse eccessive per uno studente medio di D.U..

Per quanto riguarda, in particolare, il D.U. in Ingegneria Meccanica teledidattico offerto dal Consorzio Net.T.Un.O.: i capitoli 1 e 2 trattano argomenti sviluppati dai proff. Catania e Della Volpe nelle loro lezioni di Sistemi Energetici e di Macchine, rispettivamente; i capitoli 3 e 4 trattano invece specificamente gli argomenti delle lezioni n. 21-31 tenute dal prof. Napolitano nel corso di Macchine.

Molte delle figure dei capitoli 2 e 3 sono tratte da ben noti libri di testo, di cui si ringraziano gli autori. Le altre sono tratte da manuali di ditte specializzate, indicate nelle didascalie delle figure stesse. Il capitolo 4, redatto in collaborazione con il prof. Lippolis, è tratto, con tutte le sue figure, dal manuale di Oleodinamica della Mannesmann Rexroth. L'ing. P. De Palma, infine, ha collaborato nella preparazione degli esercizi applicativi.

Ovviamente, nonostante la loro qualità grafica, dovuta ai notevoli progressi del software editoriale, questi appunti non sono certamente privi di imprecisioni. In proposito, gli autori ringraziano sin d'ora quanti vorranno segnalarle ([catalano@poliba.it](mailto:catalano@poliba.it)).

# Indice

<b>1 TERMODINAMICA APPLICATA</b>	<b>1</b>
1.1 CLASSIFICAZIONE DELLE MACCHINE . . . . .	1
1.2 RICHIAMI DI TERMODINAMICA . . . . .	2
1.2.1 Primo principio della termodinamica	2
1.2.2 Secondo principio della termodinamica	5
1.2.3 Approccio euleriano . . . . .	8
1.2.4 Sistema di riferimento fisso . . . . .	11
1.2.5 Sistema di riferimento rotante . . . . .	12
1.2.6 Macchine termiche	12
1.2.7 Macchine idrauliche . . . . .	13
1.2.8 Macchine volumetriche e turbomacchine . . . . .	14
1.2.9 Trasformazione dell'energia negli impianti termici	15
1.2.10 Gas perfetti . . . . .	17
1.2.11 Diagramma temperatura-entropia e pressione-volume specifico . . . . .	19
1.2.12 Trasformazione isoentropica . . . . .	21
1.2.13 Trasformazione isoterma . . . . .	23
1.2.14 Trasformazione isobara . . . . .	23
1.2.15 Trasformazione isocora . . . . .	24
1.2.16 Rappresentazione dei calori specifici nel diagramma temperatura-entropia . . . . .	25
1.2.17 Trasformazioni politropiche . . . . .	25
1.2.18 Calcolo del lavoro per una trasformazione politropica . . . . .	29
1.2.19 Lavoro minimo di compressione . . . . .	32
1.2.20 Controrecupero e rendimenti di compressione	33
1.2.21 Recupero e rendimenti di espansione . . . . .	36
1.2.22 Flusso unidimensionale di un fluido comprimibile . . . . .	38
1.3 TRIANGOLI DI VELOCITÀ NELLE TURBOMACCHINE . . . . .	42
1.4 ANALISI DIMENSIONALE E TEOREMA DI BUCKINGHAM	46
1.5 Esercizi	49
<b>2 TURBOMACCHINE CENTRIFUGHE</b>	<b>53</b>
2.1 MACCHINE OPERATRICI IDRAULICHE	53
2.1.1 Richiami di fluidodinamica . . . . .	54
2.2 POMPE CENTRIFUGHE . . . . .	57
2.2.1 Componenti della macchina . . . . .	57
2.2.2 Importanza del campo di forze centrifughe . . . . .	59

2.2.3	Girante . . . . .	60
2.2.4	Scorrimento . . . . .	65
2.2.5	Diffusore . . . . .	68
2.2.6	Lavoro delle resistenze passive . . . . .	70
2.2.7	Similitudine fluidodinamica	73
2.2.8	Curve caratteristiche . . . . .	74
2.2.9	Curva caratteristica di impianto. Punto di funzionamento e stabilità di funzionamento . . . . .	76
2.2.10	Regolazione . . . . .	78
2.2.11	Fenomeno della cavitazione: altezza d'installazione	80
2.2.12	Pompe in serie ed in parallelo . . . . .	82
2.2.13	Numero di giri caratteristico: progetto di massima e scelta della pompa . . . . .	85
2.3	COMPRESSORI . . . . .	88
2.3.1	Richiami di termodinamica . . . . .	90
2.4	COMPRESSORI CENTRIFUGHI . . . . .	91
2.4.1	Costituzione della macchina . . . . .	91
2.4.2	Funzionamento del compressore centrifugo	92
2.4.3	Pregirante . . . . .	98
2.4.4	Curve caratteristiche . . . . .	102
2.4.5	Regolazione . . . . .	107
2.5	Esercizi . . . . .	109
<b>3</b>	<b>MACCHINE OPERATRICI VOLUMETRICHE</b>	<b>113</b>
3.1	GENERALITÀ . . . . .	113
3.2	COMPRESSORI ALTERNATIVI . . . . .	114
3.2.1	Schemi costruttivi . . . . .	114
3.2.2	Ciclo ideale . . . . .	117
3.2.3	Ciclo reale . . . . .	119
3.2.4	Ciclo convenzionale . . . . .	122
3.3	REGOLAZIONE DEI COMPRESSORI ALTERNATIVI	128
3.3.1	Variazione del regime di rotazione . . . . .	128
3.3.2	Laminazione all'aspirazione . . . . .	129
3.3.3	Riflusso . . . . .	132
3.3.4	Anticipo o posticipo della chiusura della valvola di aspirazione . . . . .	133
3.3.5	Variazione del grado di spazio morto . . . . .	135
3.3.6	Regolazione on/off (tutto o niente) . . . . .	137
3.4	COMPRESSORI ALTERNATIVI PLURISTADIO . . . . .	137
3.4.1	Regolazione . . . . .	140
3.5	COMPRESSORI ROTATIVI . . . . .	144
3.5.1	Compressori Roots . . . . .	145
3.5.2	Compressori a palette . . . . .	151
3.5.3	Compressori a doppia vite . . . . .	156
3.5.4	Compressori a singola vite . . . . .	159
3.5.5	Regolazione dei compressori rotativi . . . . .	161
3.6	POMPE VOLUMETRICHE ALTERNATIVE . . . . .	163

3.6.1	Schemi costruttivi e principi di funzionamento . . . . .	163
3.6.2	Ciclo ideale . . . . .	166
3.6.3	Ciclo reale . . . . .	167
3.6.4	Regolazione della portata . . . . .	173
3.7	POMPE VOLUMETRICHE ROTATIVE E ROTOALTERNATIVE . . . . .	173
3.7.1	Schemi costruttivi e principi di funzionamento . . . . .	174
3.7.2	Caratteristiche di funzionamento delle pompe rotative e rotoalterm- native . . . . .	175
3.7.3	Regolazione della portata . . . . .	178
3.8	Esercizi . . . . .	179
<b>4</b>	<b>MOTORI IDRAULICI VOLUMETRICI E TRASMISSIONI IDROSTATICHE</b>	
4.1	MOTORI IDRAULICI VOLUMETRICI . . . . .	183
4.2	IMPIANTI OLEODINAMICI . . . . .	188
4.3	TRASMISSIONI IDROSTATICHE . . . . .	191
4.4	Schemi costruttivi . . . . .	191
4.4.1	Prestazioni . . . . .	197
4.5	Esercizi . . . . .	198



# Capitolo 1

## TERMODINAMICA APPLICATA

### 1.1 CLASSIFICAZIONE DELLE MACCHINE

Una macchina a fluido è un insieme di organi meccanici assemblati in modo da scambiare energia con un fluido che la attraversa. Le macchine si distinguono in:

- macchine motrici;
- macchine operatrici.

Le macchine motrici sono quelle in cui il fluido dà energia meccanica alla macchina (per esempio, i motori a combustione interna e le turbine). Le macchine operatrici sono quelle in cui la macchina dà energia al fluido (per esempio, i compressori e le pompe).

Un'ulteriore classificazione delle macchine è la seguente:

- macchine termiche;
- macchine idrauliche.

Le macchine termiche operano con fluidi comprimibili, mentre le macchine idrauliche operano con fluidi incomprimibili.

Le macchine si distinguono infine in:

- macchine volumetriche;
- turbomacchine.

Le macchine volumetriche hanno un funzionamento ciclico e in esse, essendo la velocità del fluido relativamente bassa, l'energia è scambiata fra le parti meccaniche ed il fluido mediante azioni quasi statiche, dovute alla pressione esercitata dal fluido sulle parti mobili della macchina.

Nelle turbomacchine un flusso continuo attraversa la macchina a velocità elevata e lo scambio di energia tra fluido e macchina (dovuto sempre alle forze scambiate tra il fluido e le parti mobili della stessa) comporta una variazione di momento di quantità di moto tra uscita e ingresso della parte mobile della turbomacchina, detta girante.

In base a queste classificazioni, per esempio, il motore alternativo a combustione interna risulta essere una macchina motrice, termica e volumetrica.

## 1.2 RICHIAMI DI TERMODINAMICA

### 1.2.1 Primo principio della termodinamica

Si definisce sistema (termodinamico) una massa ben definita e costante di un fluido omogeneo in equilibrio termodinamico, ovvero, le cui condizioni termodinamiche siano individuabili univocamente una volta note due di esse (ad esempio, pressione e temperatura).

Un sistema è considerato in equilibrio termodinamico anche se in moto. L'evoluzione temporale di un sistema viene descritta in forma cosiddetta lagrangiana mediante il principio della conservazione dell'energia o Primo Principio della Termodinamica (I PTD): considerato un sistema di massa  $m$ , la somma del lavoro meccanico,  $\bar{L}$ , e del calore,  $\bar{Q}$ , forniti al sistema dall'esterno uguaglia la variazione di energia del sistema stesso,  $\Delta\bar{E}$ :

$$\bar{L} + \bar{Q} = \Delta\bar{E}. \quad (1.1)$$

L'energia del sistema  $\bar{E}$  può essere considerata somma di due termini:

- energia interna  $\bar{U}$  (di agitazione molecolare, di legame tra atomi costituenti la molecola, di legame tra componenti dell'atomo);
- energia macroscopica (cinetica  $\bar{E}_c$ , gravitazionale  $\bar{E}_g$  e del campo di forze centrifughe  $\bar{E}_f$ , quest'ultima nel caso di sistema di riferimento ruotante; altre forme di energia non hanno interesse nello studio delle macchine).

Pertanto si ha:

$$\bar{L} + \bar{Q} = \Delta\bar{E} = \Delta\bar{U} + \Delta\bar{E}_c + \Delta\bar{E}_g + \Delta\bar{E}_f \quad (1.2)$$

e, facendo riferimento all'unità di massa:

$$L + Q = \Delta E = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_f, \quad (1.3)$$

dove i termini non soprallineati rappresentano grandezze riferite all'unità di massa; dimensionalmente, nel Sistema Internazionale, il lavoro ad unità di massa,  $L$ , va espresso in  $J/kg$  ovvero in  $m^2/s^2$ . Il I PTD è applicabile per qualunque intervallo di tempo, sia finito che infinitesimo; facendo riferimento ad una trasformazione infinitesima che riguardi l'unità di massa del sistema considerato, si può scrivere:

$$dL + dQ = dE = dU + dE_c + dE_g + dE_f. \quad (1.4)$$

Va ricordato che i termini  $dL$  e  $dQ$  nella (1.4) rappresentano dei differenziali non esatti, mentre  $dU$  è un differenziale esatto: l'integrazione della (1.4), da uno stato 1 ad uno stato 2 del sistema, porta infatti alla (1.3), con  $L$  e  $Q$  dipendenti dalla trasformazione 1-2 e  $\Delta U = U_2 - U_1$  dipendente solo dagli stati finale ed iniziale del sistema. L'energia interna è quindi una funzione di stato, ovvero una grandezza che definisce lo stato del sistema.

Explicitiamo ora i termini corrispondenti alle energie su scala macroscopica:

- Energia cinetica: l'energia cinetica di una massa  $m$ , dotata di una velocità  $b$  nel sistema di riferimento considerato, risulta uguale a:

$$\bar{E}_c = \frac{1}{2}mb^2, \quad (1.5)$$

e quindi l'energia cinetica riferita all'unità di massa è:

$$E_c = \frac{1}{2} b^2. \quad (1.6)$$

- Energia gravitazionale: se si considera un sistema di massa unitaria soggetto ad un campo di forze conservativo, la variazione di energia potenziale è pari al lavoro compiuto dal campo di forze per spostare il sistema dal punto iniziale 1 a quello finale 2, cambiato di segno:

$$\Delta E_g = E_{g_2} - E_{g_1} = -L_{g_{1,2}}. \quad (1.7)$$

Con riferimento alla fig. 1.1, suddividiamo la traiettoria 1-2 in intervalli di ampiezza

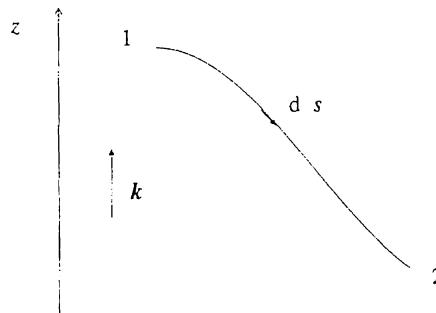


Figura 1.1: traiettoria 1-2 per il calcolo dell'energia gravitazionale.

infinitesima, a ciascuno dei quali corrisponde uno spostamento infinitesimo  $ds$ . Fissato un sistema di riferimento  $(O; x, y, z)$  con versori  $i$ ,  $j$  e  $k$  ( $k$  supposto orientato positivamente verso l'alto), la forza del campo gravitazionale è costante e diretta secondo l'asse  $z$ , ma con verso opposto a quello di  $k$ :

$$g = -gk, \quad (1.8)$$

$$ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}, \quad (1.9)$$

$$L_{g_{1,2}} = \int_1^2 \mathbf{g} \cdot ds = \int_1^2 (-gk) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = -g \int_1^2 dz = -g(z_2 - z_1), \quad (1.10)$$

dove  $z_1$  e  $z_2$  sono le quote dei punti 1 e 2 e  $g$  l'accelerazione di gravità, che si può considerare costante per variazioni di quota dell'ordine del km. Quindi il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale dipende solo dalle quote finale ed iniziale:

$$\Delta E_g = -L_{g_{1,2}} = g(z_2 - z_1) = g\Delta z. \quad (1.11)$$

E' quindi possibile esprimere  $E_g$  a meno di una costante arbitraria:

$$E_g = gz. \quad (1.12)$$

- Energia di un campo di forze centrifughe: se il sistema di riferimento assunto ruota intorno ad un asse con velocità angolare  $\omega$ , in tale sistema è presente un campo di forze centrifughe. La variazione di energia potenziale associata a tale campo è pari al lavoro compiuto dalle forze del campo cambiato di segno. Come noto, la forza centrifuga per unità di massa è  $\omega^2 r$ , diretta secondo la normale all'asse di rotazione ed orientata verso l'esterno. Fissato un sistema di coordinate cilindriche  $(O; r, \theta, z)$

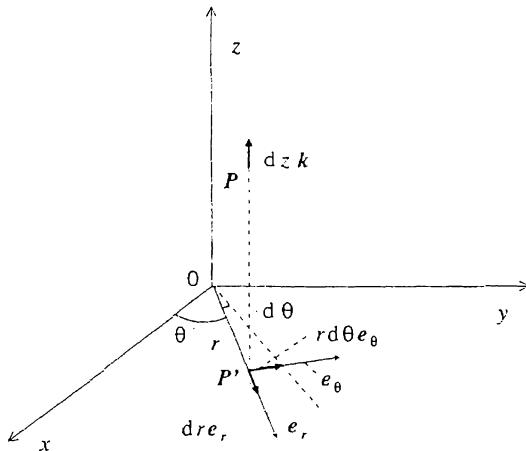


Figura 1.2: sistema di coordinate cilindriche per il calcolo dell'energia potenziale dovuta ad un campo di forze centrifughe.

con versori  $e_r$ ,  $e_\theta$  e  $k$ , con asse  $z$  coincidente con l'asse di rotazione (fig. 1.2), si ha:

$$L_{f_{1,2}} = \int_1^2 \omega^2 r e_r \cdot ds, \quad (1.13)$$

$$ds = dr e_r + r d\theta e_\theta + dz k, \quad (1.14)$$

Sviluppando l'integrale:

$$L_{f_{1,2}} = \int_1^2 \omega^2 r e_r \cdot (dr e_r + r d\theta e_\theta + dz k) = \int_1^2 \omega^2 r dr. \quad (1.15)$$

Assumendo  $\omega$  costante, si ricava:

$$L_{f_{1,2}} = \omega^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}, \quad (1.16)$$

e quindi:

$$\Delta E_f = E_{f_2} - E_{f_1} = -L_{f_{1,2}} = -\omega^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = -\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = -\Delta \left( \frac{u^2}{2} \right), \quad (1.17)$$

c, a meno di una costante arbitraria:

$$E_f = -\frac{u^2}{2}, \quad (1.18)$$

essendo  $u$  la velocità periferica (o di trascinamento) di un punto posto a distanza  $r$  dall'asse di rotazione. La variazione di energia potenziale associata al campo di forze centrifughe dipende quindi solo dalla differenza tra i quadrati delle velocità periferiche iniziale e finale.

Utilizzando la (1.3), la (1.6), la (1.11) e la (1.17), il I PTD può essere espresso nella seguente forma:

$$\begin{aligned} L + Q &= \Delta U + \Delta \left( \frac{b^2}{2} \right) + g \Delta z - \Delta \left( \frac{u^2}{2} \right) = \\ &= (U_2 - U_1) + \left( \frac{b_2^2 - b_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

e, in termini infinitesimi:

$$dL + dQ = dU + d \left( \frac{b^2}{2} \right) + gdz - d \left( \frac{u^2}{2} \right). \quad (1.20)$$

### 1.2.2 Secondo principio della termodinamica

La termodinamica classica si basa sull'analisi di trasformazioni per le quali si ha  $dE_c = dE_q = dE_f = 0$ . In tale ambito, è stato dimostrato il teorema di Clausius, il quale afferma che per una trasformazione ciclica reversibile di una massa unitaria, si ha:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (1.21)$$

L'integrale può essere valutato individuando due punti  $A$  e  $B$  appartenenti a tale trasformazione e i due corrispondenti percorsi 1 e 2 che li collegano (v. fig. 1.3):

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{A-1}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B-2}^A \frac{dQ}{T}, \quad (1.22)$$

da cui si ottiene:

$$\int_{A-1}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A-2}^B \frac{dQ}{T}. \quad (1.23)$$

Poiché i cammini di integrazione tra  $A$  e  $B$  sono stati comunque scelti arbitrariamente, il termine  $dQ/T$  è un differenziale esatto ed è dunque possibile definire una quantità

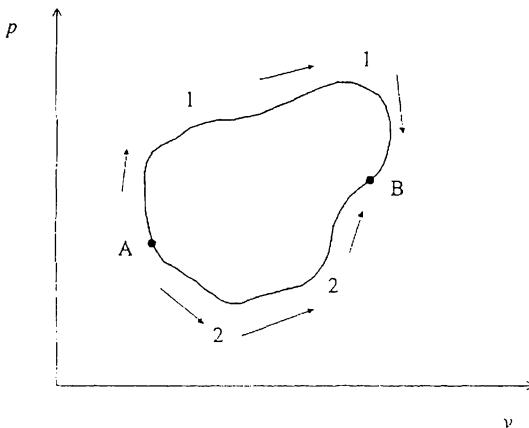


Figura 1.3: trasformazione ciclica reversibile.

caratteristica dello stato del sistema (funzione di stato), che viene definita entropia ed indicata con  $S$ , per cui si ha:

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = S_B - S_A. \quad (1.24)$$

Analogamente, con riferimento ad una trasformazione infinitesima, si ha:

$$dQ = T dS. \quad (1.25)$$

Ricordando che per una trasformazione reversibile con  $dE_c = dE_g = dE_f = 0$  si ha  $dL = -pdv$ , e sostituendo la (1.25) nel I PTD, equazione (1.4), si ottiene, come noto:

$$TdS = du + pdv, \quad (1.26)$$

essendo  $T$  la temperatura assoluta del sistema,  $dS$  la variazione di entropia dell'unità di massa del sistema,  $p$  la pressione e  $v$  il volume massico. Introducendo poi la funzione di stato **entalpia**, definita come:

$$i = U + pv, \quad (1.27)$$

si ottiene anche:

$$TdS = di - vdp. \quad (1.28)$$

Generalizziamo i concetti sopra esposti al caso più generale di una trasformazione irreversibile con  $dE_c + dE_g + dE_f \neq 0$ , per la quale valgono ancora la (1.26) e la (1.28), essendo l'entropia una funzione di stato. Il II Principio della Termodinamica (II PTD) afferma che per una qualunque trasformazione tra due stati 1 e 2, si ha:

$$(S_2 - S_1) - \int_1^2 \frac{dQ}{T} \geq 0, \quad (1.29)$$

o, in forma infinitesima:

$$TdS - dQ \geq 0. \quad (1.30)$$

Il segno di uguaglianza vale ovviamente nel caso di una trasformazione reversibile, v. la (1.24) o la (1.25). La differenza

$$\text{SE E' LOCALE} \quad | \quad dQ_w = TdS - dQ, \quad | \quad \geq 0 \quad (1.31)$$

mai negativa, viene detta calore di dissipazione, in quanto essa corrisponde al calore prodotto per attrito interno al fluido, che contribuisce, insieme al calore fornito dall'esterno, all'aumento di entropia del sistema. Combinando la (1.26) e la (1.28) con la (1.31), si ottiene:

$$TdS = dQ + dQ_w = dU + pdv = di - vdp, \quad (1.32)$$

ovvero, in particolare,

$$dQ = dU + pdv - dQ_w. \quad (1.33)$$

Eliminando  $dQ$  nella (1.4), si ha:

$$dL + dU + pdv - dQ_w = dU + dE_c + dE_g + dE_f,$$

$$dL = -pdv + dE_c + dE_g + dE_f + dQ_w. \quad (1.34)$$

Consideriamo ora una trasformazione infinitesima reversibile ed una irreversibile fra gli stessi estremi, per le quali si ha, rispettivamente:

$$dL_{rev} = -pdv + dE_c + dE_g + dE_f, \quad (1.35)$$

$$dL_{irr} = -pdv + dE_c + dE_g + dE_f + dQ_w = dL_{rev} + dQ_w. \quad (1.36)$$

Come appare dalla (1.35) e dalla (1.36), il calore prodotto per dissipazione interna,  $dQ_w$ , è pari alla differenza tra il lavoro fornito in una trasformazione infinitesima irreversibile e quello fornito in una reversibile tra gli stessi estremi. Per tale ragione,  $dQ_w$  può essere considerato come quella parte di lavoro meccanico che viene dissipato producendo calore, e viene pertanto definito lavoro delle resistenze passive. ( $dL_w$ ) la presenza di tale lavoro rende irreversibile la trasformazione. La (1.34) assume quindi la seguente espressione:

$$dL - dL_w = -pdv + dE_c + dE_g + dE_f, \quad (1.37)$$

ovvero, in forma integrale:

$$| \quad \overbrace{\quad \quad \quad}^{} \quad | \quad | \quad L - L_w = - \int pdv + \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_f. \quad | \quad | \quad (1.38)$$

La (1.37) (ovvero la (1.38)) può essere considerata l'espressione meccanica del I PTD in quanto in essa appaiono il lavoro meccanico e le variazioni di energia macroscopica, mentre, grazie alla combinazione con il II PTD, non compaiono calore ed energia interna.

### 1.2.3 Approccio euleriano

Fino ad ora si è utilizzata una descrizione di tipo lagrangiano, considerando l'evoluzione temporale di una massa ben definita di fluido. Volendo invece studiare il fenomeno localmente, ovvero con riferimento ad un volumen fisso, approccio particolarmente utile nello studio delle macchine, si ricorre alla formulazione cosiddetta euleriana.

Si consideri una macchina a flusso permanente racchiusa in un certo volume  $V$  (volume di controllo), delimitato dalle sezioni 1 e 2 (v. fig. 1.4), nelle quali il flusso è supposto unidimensionale. Il flusso si dice permanente o istazionario se, considerato un

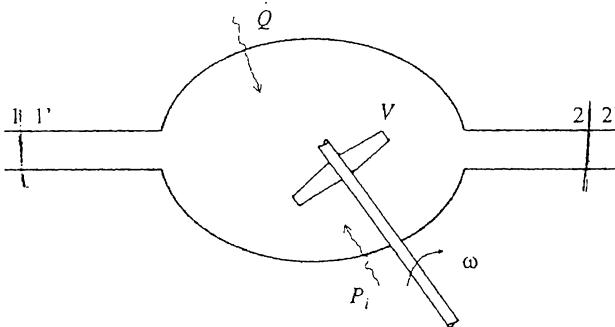


Figura 1.4: approccio euleriano: volume di controllo per una macchina a flusso permanente.

qualsiasi punto di tale volume, le condizioni cinematiche e termodinamiche del fluido (velocità, pressione, temperatura) in tale punto non mutano nel tempo. E' bene precisare che l'elemento fluido in un punto del volume di controllo varia istante per istante, a causa dello spostamento del fluido, ma che le caratteristiche cinematiche e termodinamiche locali non cambiano; ovvero, in un flusso permanente, tutti gli elementi fluidi che passano per uno stesso punto in istanti successivi assumono, nell'istante in cui si trovano in quel punto, le stesse caratteristiche cinematiche e termodinamiche. Si indichi con:

- m la massa contenuta nel volume  $V$  tra le sezioni 1 e 2 in un certo istante  $t$  per la permanenza del flusso; tale massa rimane inalterata nel tempo;
- $Q$  la potenza termica fornita dall'esterno alla massa di fluido  $m$  contenuta nella macchina, pari alla potenza termica che la macchina riceve dall'esterno, essendo il flusso permanente;
- $P_i$  la potenza meccanica interna fornita dalla macchina alla massa di fluido  $m$ .

Si applichi il I PTD in forma lagrangiana alla trasformazione che la massa di fluido contenuta nella macchina subisce nell'intervallo di tempo  $[t, t + dt]$ . Il calore fornito dall'esterno al sistema  $d\bar{Q}$ , è pari al prodotto di  $\bar{Q}$  per la durata della trasformazione  $dt$ ,

$$d\bar{Q} = \bar{Q} dt, \quad (1.39)$$

essendo trascurabile il calore scambiato dalla massa  $m$  con il fluido che la precede e la segue, attraverso le sezioni 1 e 2.

Il lavoro fornito dall'esterno al sistema  $d\bar{L}$ , è pari alla somma di due aliquote:

- la prima aliquota è il lavoro meccanico  $P_i dt$  fornito dagli organi mobili della macchina alla massa  $m$  di fluido, nel tempo  $dt$ ;
- la seconda aliquota è il lavoro delle forze di pressione esercitate sulla massa  $m$ , dal fluido esterno al sistema. Infatti, il fluido a sinistra della sezione 1 e il fluido a destra della sezione 2 compiono sul sistema un lavoro, dovuto alle forze di pressione, pari rispettivamente a  $(p_1 A_1 ds_1)$  e  $(-p_2 A_2 ds_2)$ , in cui  $A_1$  e  $A_2$  sono le aree delle sezioni 1 e 2 e  $ds_1$  e  $ds_2$  sono gli spostamenti del fluido che all'istante  $t$  si trovava nelle sezioni corrispondenti. Il lavoro fornito è quindi pari a:

$$d\bar{L} = P_i dt + p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2. \quad (1.40)$$

Siano  $dm_1$  la massa di densità  $\rho_1$  che nel tempo  $dt$  attraversa la sezione 1 (ed è compresa tra le sezioni 1 e 1') e  $dm_2$  la massa di densità  $\rho_2$  che nel tempo  $dt$  attraversa la sezione 2 (ed è quindi compresa tra le sezioni 2 e 2'). Essendo il moto del fluido permanente, la portata in massa  $G$  è costante,

$$G = \rho_1 A_1 b_1 = \rho_2 A_2 b_2, \quad (1.41)$$

ovvero

$$dm_1 = dm_2, \quad (1.42)$$

essendo

$$dm_1 = \rho_1 A_1 ds_1 = \rho_1 A_1 b_1 dt = G dt, \quad (1.43)$$

$$dm_2 = \rho_2 A_2 ds_2 = \rho_2 A_2 b_2 dt = G dt. \quad (1.44)$$

Valutiamo ora la variazione di energia  $d\bar{E}$ , subita dalla massa  $m$  che si sposta dalle sezioni 1-2 (somma dei volumi compresi tra le sezioni 1-1' e 1'-2') alle sezioni 1'-2' (somma dei volumi compresi tra le sezioni 1'-2 e 2-2'). Poiché il moto del fluido è permanente, l'energia posseduta dalla massa contenuta fra le sezioni 1' e 2 non muta nel tempo, per cui si ha:

$$d\bar{E} = dm_2 E_2 - dm_1 E_1, \quad (1.45)$$

essendo  $(dm_1 E_1)$  l'energia della massa compresa fra le sezioni 1 e 1' al tempo  $t$  e  $(dm_2 E_2)$  l'energia della massa compresa fra le sezioni 2 e 2' al tempo  $t + dt$ . Essendo, poi,  $dm_1 = dm_2 = dm$  ed  $E_1$  ed  $E_2$  costanti nel tempo, si ha:

$$d\bar{E} = dm(E_2 - E_1). \quad (1.46)$$

Applicando il I PTD, equazione (1.4), si ha quindi:

$$\dot{Q}dt + P_i dt + p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 = dm(E_2 - E_1), \quad (1.47)$$

ovvero, esplicitando i termini  $E_1$  e  $E_2$  e dividendo per  $dm = \rho_1 A_1 ds_1 = \rho_2 A_2 ds_2$ :

$$\dot{Q} \frac{dt}{dm} + P_i \frac{dt}{dm} = (p_2 v_2 - p_1 v_1) + (U_2 - U_1) + \left( \frac{b_2^2 - b_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right). \quad (1.48)$$

Essendo  $G = dm/dt$  la portata in massa che fluisce attraverso una qualunque sezione della macchina e ricordando la definizione di entalpia, si ha:

$$\dot{Q} \frac{\dot{G}}{G} + \frac{P_i}{G} = (i_2 - i_1) + \left( \frac{b_2^2 - b_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right). \quad (1.49)$$

Indichiamo con  $Q_e$  ed  $L_i$  rispettivamente il calore ed il lavoro meccanico forniti dall'esterno e dagli organi inerti della macchina all'unità di massa di fluido che l'attraversa. Dalle definizioni di  $\dot{Q}$ ,  $P_i$  e  $G$ , risulta, ovviamente:

$$Q_e = \frac{\dot{Q}}{G}, \quad (1.50)$$

$$L_i = \frac{P_i}{G}. \quad (1.51)$$

Pertanto, la (1.49) assume la forma:

$$\begin{aligned} Q_e + L_i &= \Delta i + \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_f = \\ &= (i_2 - i_1) + \left( \frac{b_2^2 - b_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (1.52)$$

ovvero, per una trasformazione infinitesima:

$$dQ_e + dL_i = di + dE_c + dE_g + dE_f. \quad (1.53)$$

La (1.52) e la (1.53) sono relative ad un volumen costante e fisso (volume di controllo) nel sistema di riferimento adottato ed esprimono quindi il I PTD in forma euleriana o locale. Con tale approccio, vengono quindi utilizzate le proprietà assunte localmente dal fluido nel volumen di controllo (costanti nel tempo, per l'ipotesi di flusso permanente), al contrario dell'approccio lagrangiano, in cui si considerano le proprietà assunte dalla stessa massa in differenti istanti temporali. I  $\Delta$  nella (1.52) sono quindi da intendersi come differenze di energia tra la sezione di uscita e la sezione di ingresso della macchina. Analogamente, la (1.53) vale tra due sezioni all'interno della macchina a distanza infinitesima l'una dall'altra.

Si è detto che per un sistema termodinamico che evolve secondo una trasformazione infinitesima vale la relazione:

$$TdS = dQ_e + dL_w = dU + pdv = di - vdp, \quad (1.32)$$

ovvero, in particolare,

$$\boxed{dQ_e = \dot{v} di - vdp - dL_w.} \quad (1.54)$$

Assumendo che il flusso sia unidimensionale e stazionario, e sostituendo la (1.54) nella (1.53), si ha:

$$\boxed{dL_i - dL_w = vdp + dE_c + dE_g + dE_f,} \quad (1.55)$$

ovvero, in forma integrale:

$$\begin{aligned} L_i - L_w &= \int_1^2 vdp + \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_f = \\ &= \int_1^2 vdp + \left( \frac{b_2^2 - b_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.56)$$

La (1.55) e la (1.56) sono state ricavate dal I PTD eliminando, con l'ausilio del II PTD, i termini  $dQ_e$  e  $di$ . Pertanto, esse esprimono il I PTD in forma euleriana e meccanica. Nella (1.52) e nella (1.56),  $L_i$  ha il significato di lavoro fornito dagli organi mobili della macchina all'unità di massa di fluido in moto permanente che la attraversa. Esso è positivo per le macchine operatrici (compressori, pompe, ventilatori), mentre è negativo per le macchine motrici (motori a combustione interna, turbine) in cui è il fluido a fornire lavoro alla macchina. In questo caso è più comodo riferirsi al lavoro ottenuto  $(L_i)_{ott} = -L_i$ . In tal caso, le (1.52) e (1.56) assumono rispettivamente le seguenti forme:

$$(L_i)_{ott} - Q_e = (i_1 - i_2) + \left( \frac{b_1^2 - b_2^2}{2} \right) + g(z_1 - z_2) - \left( \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \right), \quad (1.57)$$

$$(L_i)_{ott} + L_w = - \int_1^2 vdp + \left( \frac{b_1^2 - b_2^2}{2} \right) + g(z_1 - z_2) - \left( \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \right). \quad (1.58)$$

Nei cinque paragrafi successivi verrà mostrato come alcuni termini nella (1.52) e nella (1.56) siano nulli o trascurabili in alcuni casi particolari.

Nello studio delle macchine è usuale indicare con  $L_i$  e  $P_i$  il lavoro e la potenza forniti, nel caso di macchine operatrici, e ottenuti, nel caso di macchine motrici. Pertanto il pedice "ott" verrà omesso in futuro ove ritenuto superfluo.

#### 1.2.4 Sistema di riferimento fisso

Si consideri un sistema di riferimento fisso e si indichi con  $c$  la velocità del fluido rispetto a tale sistema. Considerando che  $\Delta E_f = 0$ , la (1.52) e la (1.56) diventano, rispettivamente:

$$Q_e + L_i = \Delta i + \Delta E_c + \Delta E_g = (i_2 - i_1) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1), \quad (1.59)$$

$$L_i - L_w = \int_1^2 vdp + \Delta E_c + \Delta E_g = \int_1^2 vdp + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1). \quad (1.60)$$

### 1.2.5 Sistema di riferimento rotante

Nello studio delle turbomacchine si considera spesso un sistema di riferimento mobile e, in particolare, solidale alla girante della macchina, ovvero ruotante con una velocità angolare  $\omega$  costante. Indicando con  $w$  la velocità del fluido rispetto a tale sistema, e considerando che, in tale sistema, gli organi della macchina sono fermi, la (1.52) e la (1.56) diventano, rispettivamente:

$$\begin{aligned} \Delta i &= Q_e = \Delta i + \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_f = \\ &= (i_2 - i_1) + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} -L_w &= \int_1^2 v dp + \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_f = \\ &= \int_1^2 v dp + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.62)$$

E' importante osservare che è possibile applicare il I PTD tra monte e valle della girante di una turbomacchina sia in un riferimento fisso che in uno ruotante, ottenendo rispettivamente la (1.59) e la (1.61) (o la (1.60) e la (1.62)). Sottraendo poi la (1.61) dalla (1.59) si ottiene una espressione del lavoro  $L_i$  in funzione delle sole velocità (assolute, relative e di trascinamento) nelle sezioni di uscita e di ingresso della girante stessa:

$$L_i = \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right) - \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) + \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right). \quad (1.63)$$

Tale risultato, di fondamentale importanza, verrà riottenuto in seguito per altra via.

### 1.2.6 Macchine termiche

Una macchina termica opera con fluidi comprimibili (gas, vapore). Per questa classe di macchine il lavoro  $L_i$  e la variazione di entalpia  $\Delta i$  sono dell'ordine delle centinaia di  $kJ/kg$ . La variazione di quota corrispondente ad un  $\Delta i = 100 kJ/kg$  è pari a:

$$\Delta z = \frac{\Delta i}{g} = \frac{10^5 \frac{J}{kg}}{9.807 \frac{m}{s^2}} \approx 10200 m. \quad (1.64)$$

Quindi, poiché nelle macchine termiche le variazioni di quota sono dell'ordine dei metri, in esse si può sempre trascurare la variazione di energia gravitazionale. Questa circostanza è l'equivalente del ben noto fatto che in fluidodinamica le forze di massa, che sono proporzionali alla densità del fluido, vengono considerate nel caso di flussi incomprimibili, mentre vengono quasi sempre trascurate nel caso di flussi comprimibili. Infatti, applicando la (1.60) tra le sezioni di ingresso e di uscita di una macchina, e supponendo, per semplicità,  $L_w = \Delta E_c = 0$ , si ricava, utilizzando il valor medio dell'integrale:

$$L_i = \frac{\Delta p}{\bar{\rho}} + \Delta E_g. \quad (1.65)$$

Supponendo che la macchina elabori un salto di pressione  $\Delta p = 1 \text{ bar}$  con una variazione di quota  $\Delta z = 1 \text{ m}$ , si ha, per un gas con  $\bar{\rho} = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $L_i \approx 100010 \text{ J/kg}$  e, per un liquido con  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  (acqua),  $L_i \approx 110 \text{ J/kg}$ . Il contributo della variazione di energia potenziale è quindi pari a circa lo 0.01% e al 10% rispettivamente. Pertanto, la (1.52) e la (1.56), valide per un sistema di riferimento fisso, assumono, per una macchina termica, le seguenti forme semplificate:

$$Q_e + L_i = \Delta i + \Delta E_c = (i_2 - i_1) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right), \quad (1.66)$$

$$L_i - L_w = \int_1^2 vdp + \Delta E_c = \int_1^2 vdp + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right). \quad (1.67)$$

Se si considera un sistema di riferimento mobile, si ha, poi:

$$Q_e = \Delta i + \Delta E_c + \Delta E_f = (i_2 - i_1) + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right), \quad (1.68)$$

$$-L_w = \int_1^2 vdp + \Delta E_c + \Delta E_f = \int_1^2 vdp + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right). \quad (1.69)$$

### 1.2.7 Macchine idrauliche

Le macchine idrauliche operano con fluidi incomprimibili (liquidi). Pertanto, gli eventuali scambi termici non influiscono significativamente sul lavoro scambiato a causa delle ridotte variazioni di densità del fluido. Pertanto, l'equazione (1.52) ha scarso valore pratico e conviene piuttosto riferirsi all'espressione meccanica del I PTD (equazione (1.56)).

Considerando un sistema di riferimento fisso ed assumendo il volume specifico costante, si ha:

$$\begin{aligned} L_i - L_w &= v \int_1^2 dp + \Delta E_c + \Delta E_g = \\ &= \frac{\Delta p}{\rho} + \Delta E_c + \Delta E_g = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1), \end{aligned} \quad (1.70)$$

ove  $\rho$  è la densità del liquido; dividendo per  $g$ , si ottiene poi:

$$\frac{L_i - L_w}{g} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} \right) + (z_2 - z_1). \quad (1.71)$$

Nello studio delle macchine idrauliche, i termini contenuti nella (1.71) vengono usualmente denominati come segue:

- altezza geodetica  $z$  e corrispondente dislivello geodetico  $(z_2 - z_1)$ ;
- altezza manometrica o piezometrica  $p/\gamma$ , in cui  $\gamma = \rho g$  è il peso specifico del liquido;
- altezza cinetica  $c^2/2g$ .

La somma dell'altezza geodetica e di quella manometrica viene denominata quota piezometrica<sup>1)</sup>  $H$ :

$$H = z + \frac{p}{\gamma}, \quad (1.72)$$

e, a sua volta, la somma della quota piezometrica e dell'altezza cinetica prende il nome di carico totale  $H^0$ :

$$H^0 = H + \frac{c^2}{2g} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g}. \quad (1.73)$$

Tenendo presente la (1.73), il I PTD, espresso dalla (1.70), assume la seguente forma:

$$L_i = g(H_2^0 - H_1^0) + L_w. \quad (1.74)$$

Le equazioni (1.70), (1.71) o (1.74) applicate a condotti fissi ( $L_i = 0$ ) rappresentano il teorema di Bernoulli generalizzato. In assenza di resistenze passive ( $L_w = 0$ ), si ottiene poi:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + gz_2, \quad (1.75)$$

cioè il teorema di Bernoulli classico: il carico totale si mantiene costante in un condotto fisso e senza attrito.

Se si considera un sistema di riferimento mobile si ha:

$$\begin{aligned} -L_w &= v \int_1^2 dp - \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_f = \frac{\Delta p}{\rho} + \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_f = \\ &= \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

### 1.2.8 Macchine volumetriche e turbomacchine

Il lavoro delle resistenze passive  $L_w$ , nel caso di moto del fluido *completamente turbolento*, è proporzionale alla densità del fluido ed al quadrato della sua velocità caratteristica (per velocità caratteristica si intende, per esempio, la velocità media del fluido quando attraversa la macchina). In una macchina volumetrica la velocità caratteristica del fluido,  $c^{MV}$ , è dell'ordine delle decine di  $m/s$ , mentre in una turbomacchina  $c^{TM}$  è dell'ordine delle centinaia di  $m/s$ . Rapportando il lavoro delle resistenze passive in una turbomacchina con quello in una macchina volumetrica, si ricava quindi:

$$\frac{L_w^{MV}}{L_w^{TM}} = \left( \frac{c^{MV}}{c^{TM}} \right)^2 \ll 1, \quad (1.77)$$

e quindi  $L_w^{MV}$  è molto piccolo rispetto a  $L_w^{TM}$ . Se si considera che il lavoro ad unità di massa  $L_i$  è dello stesso ordine di grandezza in una macchina volumetrica ed in una turbomacchina e che in quest'ultima  $L_w$  è circa il 10 ÷ 20% di  $L_i$ , appare chiaro che  $L_w$  in una macchina volumetrica è trascurabile.

<sup>1)</sup> In alcuni testi, compreso questo, e nella pratica comune, i singoli termini nella (1.71) vengono denominati *altezze*, mentre viene indicata come *quota* la somma di due di essi; in altri testi, la distinzione tra i termini  $(p/\gamma)$  e  $(z + p/\gamma)$  è basata sul nome dello strumento utilizzato per la loro misura: i due termini vengono quindi denominati rispettivamente *altezza* o *quota manometrica* e *altezza* o *quota piezometrica*.

Il calore scambiato  $Q_e$  è il rapporto tra la potenza termica  $\dot{Q}$  scambiata tra le pareti della macchina ed il fluido che l'attraversa e la portata di fluido  $G$ .  $\dot{Q}$  è proporzionale ad un coefficiente di scambio termico  $k$ , all'area di scambio  $S$  ed alla differenza di temperatura tra parete e fluido  $\Delta T$ .  $G$  è proporzionale alla densità del fluido,  $\rho$ , alla sua velocità caratteristica,  $c$ , e ad un'area di passaggio,  $S'$ . Si ha quindi:

$$Q_e = \frac{\dot{Q}}{G} = \frac{kS\Delta T}{\rho S'c}. \quad (1.78)$$

A parità di  $(k\Delta T/\rho)(S/S')$  si ha quindi:

$$Q_e = \frac{\dot{Q}}{G} \propto \frac{1}{c}. \quad (1.79)$$

Il rapporto fra il calore scambiato in una turbomacchina e quello scambiato in una macchina volumetrica è dunque dato, a parità di altre condizioni, da:

$$\frac{Q_e^{TM}}{Q_e^{MV}} = \frac{c^{MV}}{c^{TM}} << 1, \quad (1.80)$$

e quindi  $Q_e^{TM}$  è piccolo rispetto a  $Q_e^{MV}$ . Se si considera che già in una macchina volumetrica  $Q_e$  è inferiore ad  $L_i$ , appare chiaro che  $Q_e$  è trascurabile in una turbomacchina. Pertanto si considera, in genere,  $Q_e \neq 0$  e  $L_w \approx 0$  nelle macchine volumetriche, e  $Q_e \approx 0$  e  $L_w \neq 0$  nelle turbomacchine. Questo discorso non vale, ovviamente, per i moderni impianti di turbina a gas, ove le palette dei primi stadi sono fortemente refrigerate.

### 1.2.9 Trasformazione dell'energia negli impianti termici

Un impianto termico è costituito da una serie di macchine, scambiatori di calore e condotti, entro cui scorre, in regime permanente (si considera l'impianto in funzionamento a regime), il fluido operante, la cui evoluzione termodinamica è descritta da (o può comunque essere assimilata ad) **un ciclo chiuso** (ad es. cicli a vapore o a gas). Pertanto, sommando le espressioni del I PTD in forma euleriana relative a ciascun elemento (ad es. una macchina) di un impianto termico, si ottiene:

$$\sum L_i + \sum Q_e = \sum \Delta i + \sum \Delta E_c = 0. \quad (1.81)$$

Generalmente, si pone:

$$(L_{ott})_c = - \sum L_i, \quad (1.82)$$

ove  $(L_{ott})_c$  è il lavoro (interno) ottenuto in un ciclo, ossia il lavoro ottenuto dalla trasformazione ciclica dell'unità di massa del fluido, e

$$\sum Q_e = Q_1 - Q_2, \quad (1.83)$$

ove  $Q_1$  e  $Q_2$  sono rispettivamente le quantità di calore globalmente fornito e sottratto all'unità di massa di fluido che percorre il ciclo. Pertanto, la (1.81) diventa (nel seguito verrà omesso il pedice "ott"):

$$L_c = Q_1 - Q_2. \quad (1.84)$$

Se si moltiplica la (1.84) per la portata che attraversa l'impianto si ha:

$$P_i = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2, \quad (1.85)$$

dove  $P_i$  è la potenza meccanica fornita dal fluido che attraversa l'impianto agli organi mobili delle macchine costituenti l'impianto,  $\dot{Q}_1$  è la potenza termica fornita al suddetto fluido e  $\dot{Q}_2$  è la potenza termica ceduta da esso, grandezza questa necessaria per poter trasformare calore in lavoro meccanico. Nel caso di un impianto a vapore, ad esempio, l'acqua segue un ciclo di trasformazioni termodinamiche per convertire in lavoro parte del calore sviluppato dalla combustione in caldaia e ceduto al fluido. In questo impianto  $P_i$  è praticamente coincidente con la potenza ottenuta in turbina, poiché la potenza assorbita dalla pompa per comprimere l'acqua è praticamente trascurabile, essendo  $\rho_{\text{liq}} >> \rho_{\text{vap}}$ , v. la (1.56) o la (1.65):

$$P_i \approx P_{i,t}. \quad (1.86)$$

Un impianto di turbina a gas è un impianto termico di produzione di energia meccanica che opera con un gas. In questo caso,  $P_i$  è pari alla differenza fra la potenza trasmessa dal fluido alla turbina e la potenza fornita dal compressore al fluido:

$$P_i = P_{i,t} - P_{i,c}. \quad (1.87)$$

Definiamo ora alcuni rendimenti tipici degli impianti termici. Si definisce **rendimento del generatore di calore**,  $\eta_b$ , il rapporto tra la potenza termica  $\dot{Q}_1$  fornita al fluido dal generatore e quella sviluppata dalla combustione (completa); indicando con  $G_b$  la portata di combustibile e con  $H_i$  il potere calorifico inferiore (ci si riferisce al potere calorifico inferiore, in quanto lo scarico dei gas combusti avviene a temperatura maggiore di 100°C e quindi l'acqua eventualmente presente è allo stato di vapore),  $\eta_b$ , che è ovviamente indice della qualità del generatore di calore, è espresso come:

$$\eta_b = \frac{\dot{Q}_1}{G_b H_i}. \quad (1.88)$$

L'efficienza della trasformazione di calore in lavoro meccanico viene valutata mediante il **rendimento del ciclo**,  $\eta_c$ , definito come il rapporto fra la potenza interna,  $P_i$ , e la potenza termica fornita,  $\dot{Q}_1$ :

$$\eta_c = \frac{P_i}{\dot{Q}_1} = 1 - \frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1}. \quad (1.89)$$

Si definisce **rendimento meccanico**  $\eta_m$ , il rapporto tra la potenza disponibile all'albero,  $P_d$ , e la potenza interna,  $P_i$ :

$$\eta_m = \frac{P_d}{P_i}. \quad (1.90)$$

Si definisce inoltre **rendimento organico**,  $\eta_o$ , il rapporto fra la potenza utile,  $P_u$ , e la potenza interna,  $P_i$ :

$$\eta_o = \frac{P_u}{P_i}. \quad (1.91)$$

Essendo  $P_u$  pari alla differenza tra la potenza disponibile all'albero,  $P_d$ , e la potenza  $P_{acc}$  richiesta dagli organi accessori non comandati direttamente dall'albero,

$$P_u = P_d - P_{acc}, \quad (1.92)$$

$\eta_m$  coincide con  $\eta_o$  solo se tutti gli accessori sono comandati direttamente dall'albero. Altrimenti  $\eta_o < \eta_m$ .

Si definisce **rendimento utile**,  $\eta_u$ , il rapporto fra la potenza utile,  $P_u$ , e la potenza termica fornita,  $\dot{Q}_1$ :

$$\eta_u = \frac{P_u}{\dot{Q}_1}. \quad (1.93)$$

Il rendimento utile,  $\eta_u$ , tiene quindi conto della conversione di calore in lavoro, del lavoro speso per gli accessori e di quello dissipato per attriti meccanici:

$$\eta_u = \frac{P_u}{P_i} \frac{P_i}{\dot{Q}_1} = \eta_o \eta_c. \quad (1.94)$$

Si definisce **rendimento globale**  $\eta_g$  il rapporto fra la potenza utile,  $P_u$ , ed il prodotto della portata di combustibile,  $G_b$ , per il potere calorifico inferiore dello stesso,  $H_i$ :

$$\eta_g = \frac{P_u}{G_b H_i}. \quad (1.95)$$

Rispetto a  $\eta_u$ , il rendimento globale tiene quindi anche conto dell'efficienza del generatore di calore:

$$\eta_g = \frac{P_u}{P_i} \frac{P_i}{\dot{Q}_1} \frac{\dot{Q}_1}{G_b H_i} = \eta_o \eta_c \eta_b = \eta_u \eta_b. \quad (1.96)$$

### 1.2.10 Gas perfetti

Per un gas termicamente perfetto, l'energia interna  $U$  è funzione solo della temperatura assoluta:

$$U = U(T) \quad \text{ovvero} \quad dU = c_v dT, \quad (1.97)$$

in cui  $c_v$  è il calore specifico a volume costante, ovvero il calore da fornire all'unità di massa del gas in una trasformazione reversibile a volume specifico costante affinché essa aumenti la sua temperatura di un grado.

In condizioni di equilibrio, un gas termicamente perfetto è governato dalla seguente legge di stato:

$$pV = RT, \quad (1.98)$$

ove  $R$  è la **costante elastica del gas**, che dipende dalla natura dei gas ed è espressa da:

$$R = \frac{R'}{\mathcal{M}}, \quad (1.99)$$

in cui  $R'$  è la costante universale dei gas, pari a:

$$R' = 8310 \frac{J}{K \text{ kmole}}, \quad (1.100)$$

e  $\mathcal{M}$  è la massa molecolare del gas considerato. Ad esempio, la costante elastica dell'aria, che a temperature moderate può essere considerata come un gas perfetto, è pari a:

$$R = 287.1 \frac{J}{kg K}. \quad (1.101)$$

Se  $c_v$  è costante, cioè

$$U = c_v T + \text{cost}, \quad (1.102)$$

il gas è anche caloricamente perfetto. Nel seguito chiameremo **gas perfetto** un gas che è sia termicamente che caloricamente perfetto.

L'entalpia di un gas perfetto è anch'essa funzione lineare della sola temperatura; infatti, per la definizione di entalpia ed utilizzando la (1.98), si ottiene:

$$i = U + pv = U + RT = (c_v + R)T = c_p T, \quad (1.103)$$

ove  $c_p = \text{cost}$  è il calore specifico a pressione costante, ovvero il calore da fornire all'unità di massa del gas in una trasformazione reversibile a pressione costante affinché essa aumenti la sua temperatura di un grado. Tra  $c_p$ ,  $c_v$  ed  $R$  sussistono le seguenti relazioni:

$$c_p - c_v = R, \quad (1.104)$$

$$\frac{c_p}{c_v} = k, \quad (1.105)$$

in cui  $k$  (in alcuni testi viene indicato con  $\gamma$ ) è una costante caratteristica del gas considerato, espressa dalla formula:

$$k = \frac{L+2}{L}, \quad (1.106)$$

ove  $L$  è il numero di gradi di libertà della molecola del gas considerato. Ad esempio, una molecola di un gas perfetto monoatomico ha tre gradi di libertà perchè la sua posizione nello spazio è individuata da tre coordinate; per  $L = 3$  si ottiene:

$$k = \frac{5}{3} = 1.667. \quad (1.107)$$

Una molecola di un gas biatomico o pluriatomico polare o di una miscela di gas biatomici (aria) ha cinque gradi di libertà, poiché la sua posizione nello spazio viene individuata dalle tre coordinate spaziali di un atomo e dai due coseni direttori dell'asse che congiunge gli atomi; per  $L = 5$  si ha:

$$k = \frac{7}{5} = 1.4. \quad (1.108)$$

Una molecola di un gas pluriatomico ha sei gradi di libertà, poiché la sua posizione nello spazio è individuata da tre coordinate e tre angoli; per  $L = 6$  si ha:

$$k = \frac{8}{6} = 1.333. \quad (1.109)$$

Dalla (1.104) e dalla (1.105) si ricavano, infine, due importanti espressioni per  $c_p$  e  $c_v$ :

$$c_p = \frac{k}{k-1} R, \quad (1.110)$$

$$c_v = \frac{1}{k-1} R. \quad (1.111)$$

### 1.2.11 Diagramma temperatura-entropia e pressione-volume specifico

Nello studio delle macchine risulta particolarmente utile individuare la trasformazione termodinamica seguita dal fluido nell'attraversamento della macchina in un diagramma  $(T,S)$  e/o  $(p,v)$ , in quanto è possibile individuare graficamente alcuni dei parametri caratterizzanti il I ed il II PTD.

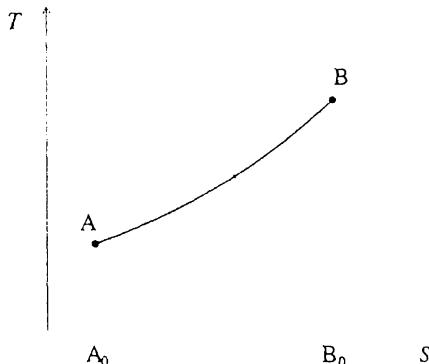


Figura 1.5: area sottesa da una trasformazione termodinamica nel diagramma  $(T,S)$ .

Si consideri un diagramma  $(T,S)$ : per il II PTD si ha

$$\int_A^B T dS = Q_e + L_w, \quad (1.112)$$

da cui si evince che l'area sottesa dalla trasformazione  $AB$  in un diagramma temperatura-entropia è pari alla somma del calore fornito dall'esterno  $Q_e$  e del lavoro delle resistenze passive  $L_w$ . Naturalmente, in assenza di uno dei due termini, l'area sottesa rappresenta solo il termine restante. Con riferimento alla fig. 1.5, l'area  $A_0ABB_0$  rappresenta la somma del calore fornito dall'esterno e del lavoro delle resistenze passive; per una trasformazione adiabatica ( $Q_e = 0$ ), l'area  $A_0ABB_0$  rappresenta il solo termine  $L_w$ , mentre in una trasformazione reversibile ( $L_w = 0$ ) tale area corrisponde al calore fornito dall'esterno,  $Q_e$ .

Se si considera invece la trasformazione  $AB$  nel diagramma  $(p,v)$ , si possono individuare le due aree  $A_1ABB_1$  e  $A_2ABB_2$  sottese dalla trasformazione stessa sugli assi delle ascisse e delle ordinate (v. fig. 1.6), pari agli integrali  $\int_A^B pdv$  e  $\int_A^B vdp$ , che compaiono nel I PTD in forma meccanica per un sistema termodinamico, equazione (1.38), e per una macchina a flusso permanente, equazione (1.56), rispettivamente.

Nel caso di una **trasformazione ciclica**, i tre integrali di cui sopra diventano integrali chiusi  $\oint T dS$ ,  $\oint pdv$ ,  $\oint vdp$ , con l'ovvia relazione

$$\oint vdp = - \oint pdv, \quad (1.113)$$

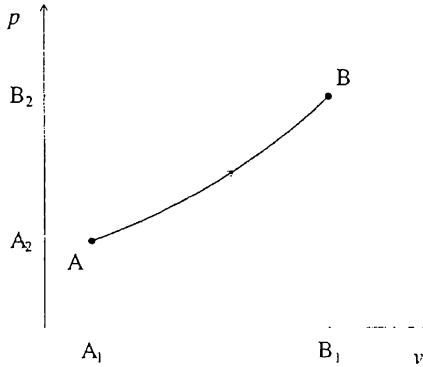


Figura 1.6: aree sottee da una trasformazione termodinamica nel diagramma  $(p,v)$ .

e sono rappresentati dall'area del ciclo. Pertanto, per un impianto termico in cui il fluido segue un ciclo termodinamico, si ha:

$$\oint T dS = \text{area del ciclo} = \sum Q_e + \sum L_w. \quad (1.114)$$

Se la trasformazione ciclica avviene in assenza di perdite ( $\sum L_w = 0$ ), l'area della trasformazione uguaglia la differenza fra calore fornito  $Q_1$  e calore sottratto  $Q_2$  e quindi uguaglia il lavoro ottenuto dalla trasformazione ciclica dell'unità di massa del fluido:

$$\oint T dS = \text{area del ciclo} = \sum Q_e = Q_1 - Q_2 = (L_{ott})_c. \quad (1.115)$$

Se il ciclo è reale ( $\sum L_w \neq 0$ ), l'area racchiusa dal ciclo non rappresenta più il lavoro ottenuto e si ha:

$$\oint T dS = \text{area del ciclo} = \sum Q_e + \sum L_w = (L_{ott})_c + \sum L_w, \quad (1.116)$$

$$(L_{ott})_c = \oint T dS - \sum L_w. \quad (1.117)$$

Questa relazione, di validità generale, dice che in un ciclo termodinamico il lavoro al ciclo è pari all'area dello stesso, nel diagramma  $(T,S)$ , diminuita di tutte le perdite fluidodinamiche.

Analogamente, anche nel diagramma  $(p,v)$  l'area del ciclo rappresenta il lavoro ottenuto più la sommatoria di tutte le perdite. Infatti, applicando la (1.56) ad un ciclo, si ha:

$$(L_{ott})_c = \sum (L_i)_{ott} = - \sum L_i = - \oint v dp - \sum L_w = \oint p dv - \sum L_w. \quad (1.118)$$

### 1.2.12 Trasformazione isoentropica

Una trasformazione in cui l'entropia si mantiene costante viene detta **isoentropica** ed è rappresentata, in un diagramma  $(T,S)$ , da un segmento perpendicolare all'asse delle ascisse, v. fig. 1.7. Per ogni elemento di tale segmento, si ha:

$$TdS = dQ_e + dL_w = 0, \quad (1.119)$$

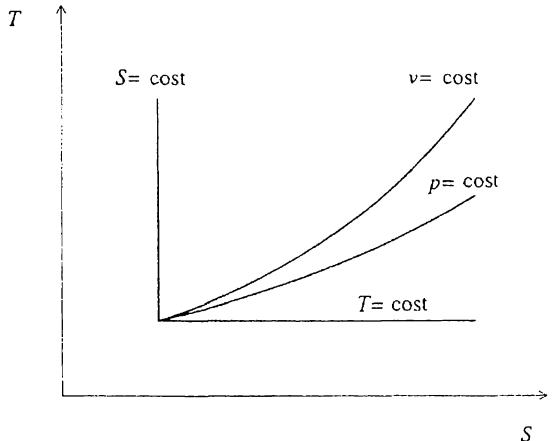


Figura 1.7: trasformazioni isoentropica, isoterna, isobara ed isocora nel piano  $(T, S)$ .

da cui risulta che una isoentropica corrisponde ad una delle due seguenti trasformazioni:

- trasformazione adiabatica e reversibile ( $dQ_e = dL_w = 0$ );
- trasformazione irreversibile tale che l'isoentropicità sia ottenuta grazie ad una compensazione tra  $dQ_e$  e  $dL_w$  ( $dQ_e + dL_w = 0$ ), cioè sottraendo al gas, dall'esterno, una quantità di calore pari a quella generata dalle resistenze passive.

La legge dell'evoluzione isoentropica per un gas perfetto è la seguente:

$$pv^k = \text{cost}, \quad (1.120)$$

ed è rappresentata, nel piano  $(p, v)$  (fig. 1.8), da un'iperbole (non equilatera) tanto più ripida quanto maggiore è il valore di  $k$ . La (1.120) viene ricavata ricordando che per una qualunque trasformazione infinitesima (reversibile o irreversibile), vale la relazione:

$$TdS = dU + pdv. \quad (1.26)$$

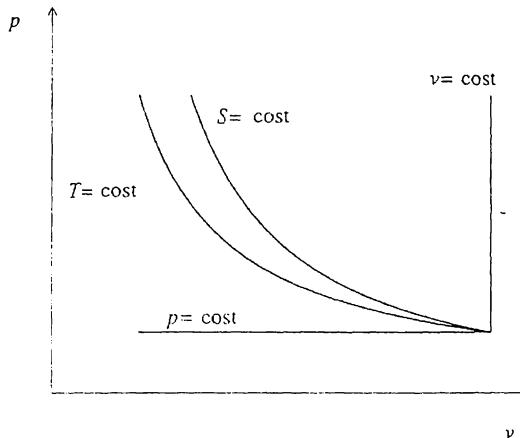


Figura 1.8: trasformazioni isoentropica, isoterma, isobara ed isocora nel piano  $(p, v)$ .

Poiché  $TdS = 0$  (entropia costante),  $dU = c_v dT$  e  $p = RT/v$ , si ottiene:

$$c_v dT + RT \frac{dv}{v} = 0, \quad (1.121)$$

e dividendo entrambi i termini per  $c_v T$ , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} + \frac{R}{c_v} \frac{dv}{v} &= 0, \\ d(\ln T) + \frac{R}{c_v} d(\ln v) &= 0, \\ d(\ln T) + d(\ln v^{\frac{R}{c_v}}) &= 0, \\ \ln \left( T v^{\frac{R}{c_v}} \right) &= \text{cost}, \\ T v^{\frac{R}{c_v}} &= \text{cost}. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Utilizzando la (1.111) e la legge di stato dei gas perfetti, equazione (1.98), si ricava:

$$\begin{aligned} T v^{k-1} &= \text{cost}, \\ \frac{pv}{R} v^{k-1} &= \text{cost}, \\ p v^k &= \text{cost}. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Il rapporto dei calori specifici,  $k = c_p/c_v$  è quindi anche l'esponente della trasformazione

isoentropica. La (1.120), associata alla legge di stato, permette poi di correlare i valori di pressione, di temperatura e di densità relativi agli stati iniziale e finale, 1 e 2, di una trasformazione isoentropica, mediante le seguenti relazioni:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^k = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (1.123)$$

Dimostriamo l'ultima parte di questa espressione; si consideri una trasformazione isoentropica fra gli stati 1 e 2: dalla prima delle uguaglianze (1.123), scrivendo  $v_1 = RT_1/p_1$  e  $v_2 = RT_2/p_2$ , si ottiene:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{RT_1}{p_1} \frac{p_2}{RT_2} \right)^k,$$

$$\left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-k} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^k,$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (1.124)$$

La (1.123) mostra che nel caso di compressione isoentropica di un gas perfetto, si ha:

$$\frac{T_2}{T_1} < \frac{p_2}{p_1} < \frac{p_2}{p_1}. \quad (1.125)$$

### 1.2.13 Trasformazione isoterma

Una trasformazione in cui la temperatura si mantiene costante viene detta **isoterma** ed è rappresentata, in un diagramma ( $T, S$ ), da un segmento perpendicolare all'asse delle ordinate, v. fig. 1.7. Nel caso di una trasformazione isoterma di un gas perfetto, inoltre, la pressione è inversamente proporzionale al volume massico e la sua rappresentazione nel diagramma ( $p, v$ ) è un'iperbole equilatera (fig. 1.8), quindi con minor pendenza rispetto ad una trasformazione isoentropica che passa per lo stesso punto:

$$pv = \text{cost.} \quad (1.126)$$

### 1.2.14 Trasformazione isobara

Una trasformazione in cui la pressione si mantiene costante viene detta **isobara** ed è rappresentata, in un diagramma ( $p, v$ ), da un segmento perpendicolare all'asse delle ordinate, v. fig. 1.8. Per un gas perfetto che subisce tale trasformazione, la (1.32) può essere riscritta come:

$$dS = c_p \frac{dT}{T}. \quad (1.127)$$

Integrando poi tale espressione fra lo stato  $(T_0, S_0)$  e lo stato  $(T, S)$ , si ha:

$$\int_{S_0}^S dS = c_p \int_{T_0}^T \frac{dT}{T}, .$$

$$\begin{aligned}
 S - S_0 &= c_p \ln \left( \frac{T}{T_0} \right), \\
 \frac{T}{T_0} &= e^{\frac{S-S_0}{c_p}}, \\
 T &= T_0 e^{\frac{S-S_0}{c_p}}. \tag{1.128}
 \end{aligned}$$

Pertanto, in una trasformazione isobara di un gas perfetto la temperatura cresce esponenzialmente con l'entropia. Nel diagramma  $(T, S)$  (fig. 1.7), le isobare sono quindi curve esponenziali congruenti, ovvero sono tutte ottenibili da una sola, traslandola nella direzione dell'asse delle entropie.

### 1.2.15 Trasformazione isocora

Una trasformazione in cui il volume specifico si mantiene costante viene detta isocora ed è rappresentata, in un diagramma  $(p, v)$ , da un segmento perpendicolare all'asse delle ascisse, v. fig. 1.8. Per un gas perfetto che subisce tale trasformazione, la (1.32) può essere riscritta, analogamente al caso precedente, come:

$$dS = c_v \frac{dT}{T}. \tag{1.129}$$

Integrando poi tale espressione fra lo stato  $(T_0, S_0)$  e lo stato  $(T, S)$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_{S_0}^S dS &= c_v \int_{T_0}^T \frac{dT}{T}, \\
 S - S_0 &= c_v \ln \left( \frac{T}{T_0} \right), \\
 \frac{T}{T_0} &= e^{\frac{S-S_0}{c_v}}, \\
 T &= T_0 e^{\frac{S-S_0}{c_v}}. \tag{1.130}
 \end{aligned}$$

Pertanto, in una trasformazione isocora di un gas perfetto la temperatura cresce esponenzialmente con l'entropia. Nel diagramma  $(T, S)$  (fig. 1.7), le isocore sono quindi curve esponenziali congruenti, ovvero sono tutte ottenibili da una sola, traslandola nella direzione dell'asse delle entropie. Inoltre, confrontando la (1.128) con la (1.130), si rileva come, per un assegnato  $\Delta S$ , la variazione di temperatura sia maggiore per una isocora che per una isobara, essendo  $c_v < c_p$  (si ricordi che  $c_p - c_v = R > 0$ ). Nel diagramma  $(T, S)$ , una isocora è quindi, a parità di temperatura, più ripida di una isobara.

### 1.2.16 Rappresentazione dei calori specifici nel diagramma temperatura-entropia

Si consideri la curva  $AB$  (fig. 1.9) che rappresenta una generica trasformazione reversibile nel piano  $(T, S)$ . Siano  $PM$  il segmento tangente ad essa nel punto  $P$  e  $PN$  il segmento verticale per  $P$ . Il segmento  $MN$  che viene individuato sull'asse delle ascisse ha quindi lunghezza pari a:

$$\overline{MN} = \frac{T}{\tan \alpha} = \frac{T}{\frac{dS}{dT}} = \frac{T dS}{dT} = \frac{dQ_e}{dT} = c. \quad (1.131)$$

$\overline{MN}$  rappresenta perciò il calore specifico  $c$  della trasformazione, nelle condizioni  $P$  del fluido. In particolare, una retta verticale nel piano  $(T, S)$  rappresenta una trasformazione adiabatica isoentropica ( $c = 0$ ) ed una retta orizzontale rappresenta una isotermia ( $c \rightarrow \pm\infty$ ). Inoltre, come già sottolineato precedentemente, una isocora è, a parità di temperatura, più ripida di una isobara, essendo  $c_v < c_p$ .

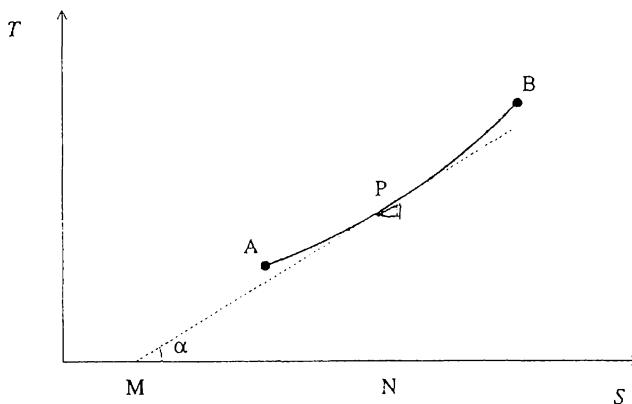


Figura 1.9: rappresentazione del calore specifico di una trasformazione nel piano  $(T, S)$ .

### 1.2.17 Trasformazioni politropiche

Si definisce **politropica** una trasformazione reversibile di un gas perfetto caratterizzata da un calore specifico  $c$  costante. Nelle applicazioni macchinistiche è conveniente generalizzare il concetto di politropica, estendendolo al caso di trasformazioni irreversibili, considerando il calore totale fornito al fluido e cioè la somma di  $Q_e$  e  $L_w$ . Per una tale politropica generalizzata si ha quindi:

$$dQ_{rev} = dQ_e + dL_w = cdT, \quad (1.132)$$

ovvero

$$Q_{rev} = Q_e + L_w = c\Delta T. \quad (1.133)$$

Il calore specifico  $c$  è quindi la quantità totale di calore,  $Q_e + L_w$ , che occorre fornire affinché l'unità di massa di gas aumenti la sua temperatura di  $1\text{ K}$ , seguendo la trasformazione politropica in esame. Una trasformazione politropica di un gas perfetto è caratterizzata da una legge simile a quella di un'evoluzione isoentropica, in cui l'esponente  $k$  è sostituito dall'esponente  $m$ , che individua la politropica:

$$pv^m = \text{cost.} \quad (1.134)$$

La (1.134) può essere dimostrata applicando il II PTD:

$$TdS = dQ_e + dL_w = dQ_{rev} = dU + pdv; \quad (1.135)$$

per un gas perfetto,  $dU = c_v dT$ , e si ottiene:

$$c_v dT + pdv = cdT,$$

$$(c - c_v) dT - pdv = 0,$$

$$(c - c_v) \frac{d(pv)}{R} - pdv = 0,$$

$$\left( \frac{c - c_v}{R} p - p \right) dv + \frac{c - c_v}{R} v dp = 0.$$

Ricordando la relazione  $R = c_p - c_v$ :

$$\frac{c - c_v - c_p + c_v}{R} pdv + \frac{c - c_v}{R} v dp = 0,$$

da cui si ha, dividendo per  $(pv)$  e moltiplicando per  $R$ :

$$(c - c_p) \frac{dv}{v} + (c - c_v) \frac{dp}{p} = 0.$$

Infine, dividendo per  $(c - c_v)$ , si ottiene:

$$\frac{c - c_p}{c - c_v} \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0.$$

Ponendo, infine,

$$m = \frac{c - c_p}{c - c_v}, \quad (1.136)$$

si ricava

$$m \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0,$$

ed integrando:

$$\ln v^m + \ln p = \text{cost.} \quad (1.137)$$

e quindi la (1.134), che, associata alla legge di stato dei gas perfetti, porta poi a scrivere:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^m = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^m = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{m}{m-1}}, \quad (1.138)$$

analogamente alle relazioni (1.123). Inoltre, noto l'indice  $m$  della politropica, si ricava facilmente il relativo calore specifico  $c$ :

$$c = c_v \frac{m - k}{m - 1}. \quad (1.139)$$

Sono particolari politropiche le seguenti trasformazioni, già esaminate in precedenza.

**Trasformazione isoentropica:** per una trasformazione isoentropica si ha  $dS = 0$ , ovvero  $dQ_e + dL_w = 0$ ; per il II PTD e per la definizione di politropica si ha:

$$TdS = dQ_e + dL_w = cdT = 0, \quad (1.140)$$

e quindi  $c = 0$ . Inoltre, poiché  $m = (c - c_p)/(c - c_v)$  (equazione (1.136)), si ottiene:

$$m = \frac{c_p}{c_v} = k. \quad (1.141)$$

**Trasformazione isotermica:** per una trasformazione isotermica si ha  $dT = 0$ ; per il II PTD e per la definizione di politropica si ha:

$$TdS = dQ_e + dL_w = cdT, \quad (1.142)$$

e quindi

$$c = \frac{TdS}{dT} \rightarrow \pm\infty. \quad (1.143)$$

Si ricava, inoltre:

$$m = \lim_{c \rightarrow \pm\infty} \frac{c - c_p}{c - c_v} = 1. \quad (1.144)$$

**Trasformazione isobara:** per una trasformazione isobara si ha  $dp = 0$ ; per il II PTD e per la definizione di politropica si ha:

$$TdS = di - vdp = cdT, \quad (1.145)$$

ed essendo  $di = c_p dT$  e  $dp = 0$ , si ricava

$$c = c_p. \quad (1.146)$$

Inoltre l'esponente  $m$  della politropica è pari a:

$$m = \frac{0}{c_p - c_v} = 0. \quad (1.147)$$

**Trasformazione isocora:** per una trasformazione isocora si ha  $dv = 0$ ; per il II PTD e per la definizione di politropica si ottiene:

$$TdS = dU + pdv = cdT, \quad (1.148)$$

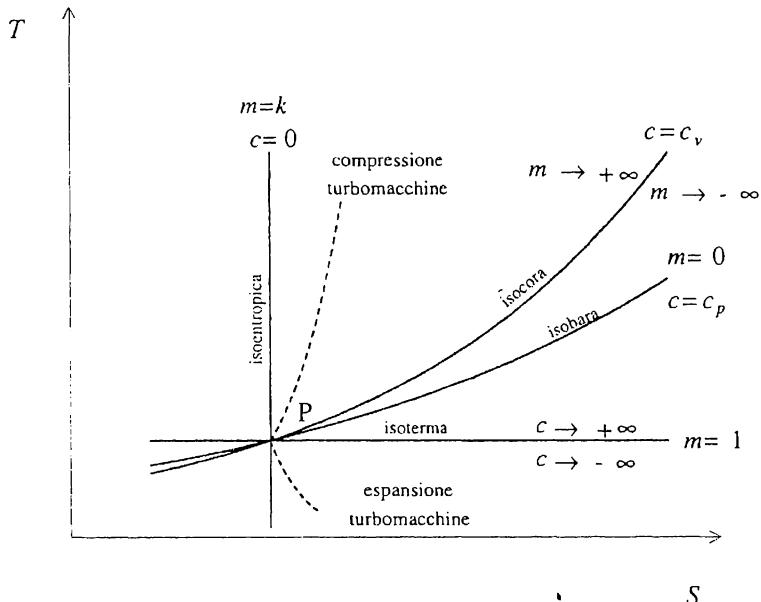


Figura 1.10: trasformazioni politropiche nel piano  $(T, S)$  con i relativi esponenti e calori specifici: isoentropica, isoterma, isobara, isocora e compressione ed espansione tipiche di una turbomacchina.

ed essendo  $dU = c_v dT$  e  $dv = 0$ , si ricava

$$c = c_v. \quad (1.149)$$

Inoltre l'esponente  $m$  della politropica è pari a:

$$m = \frac{c_v - c_p}{0} \rightarrow \pm\infty. \quad (1.150)$$

In fig. 1.10 sono rappresentate, a partire da uno stesso punto  $P$  nel piano  $(T, S)$ , le curve delle trasformazioni appena esaminate, nonché, con linee tratteggiate, una compressione ed una espansione tipiche di una turbomacchina ( $Q_e \approx 0$ ,  $L_w > 0$ ). Appare ovvio che la compressione, dovendo realizzare una diminuzione di volume specifico ed essendo  $\Delta S > 0$ , risulta compresa tra l'isoentropica ( $m = k$ ) e l'isocora ( $m \rightarrow +\infty$ ) e quindi è caratterizzata da un esponente  $m > k$ ; analogamente, l'espansione è caratterizzata da un esponente  $m < k$ .

### 1.2.18 Calcolo del lavoro per una trasformazione politropica

Ricaviamo ora alcune espressioni, particolarmente utili, del lavoro  $L_i$  fornito dagli organi mobili di una macchina all'unità di massa di fluido che la attraversa, assumendo le seguenti ipotesi:

- il fluido sia un gas perfetto;
- la trasformazione (di compressione o di espansione) sia una politropica;
- il sistema di riferimento sia fisso.

In questo caso l'espressione del primo principio della termodinamica in forma euleriana è la seguente:

$$Q_c + L_i = \Delta i + \Delta E_c = (i_2 - i_1) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right), \quad (1.66)$$

in quanto  $\Delta E_g \approx 0$ , poiché si tratta di una macchina termica, e  $\Delta E_f = 0$ , poiché il sistema di riferimento è fisso. Essendo il gas perfetto,  $\Delta i = i_2 - i_1 = c_p(T_2 - T_1)$ , e si ottiene:

$$Q_c + L_i = c_p T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right),$$

e, utilizzando la (1.110) e la (1.138):

$$Q_c + L_i = \frac{k}{k-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right), \quad (1.151)$$

avendo posto  $\beta = p_2/p_1$ . Nel caso particolare in cui la trasformazione politropica sia un'isoterma ( $m = 1$ ), la (1.66) assume la forma:

$$Q_c + L_i = \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right). \quad (1.152)$$

Analogamente, volendo utilizzare il PTD in forma meccanica, ovvero

$$L_i - L_w = \int_1^2 v dp + \Delta E_c = \int_1^2 v dp + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right), \quad (1.67)$$

si ha, per  $m \neq 1$ :

$$v = \frac{p_1^{\frac{1}{m}} v_1}{p^{\frac{1}{m}}},$$

e, sostituendo nella (1.67), si ricava:

$$L_i - L_w = p_1^{\frac{1}{m}} v_1 \int_1^2 p^{-\frac{1}{m}} dp + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right),$$

$$L_i - L_w = \frac{p_1 p_1^{\frac{1}{m}-1} v_1}{1 - \frac{1}{m}} \left( p_2^{1-\frac{1}{m}} - p_1^{1-\frac{1}{m}} \right) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right),$$

$$L_i - L_w = \frac{m}{m-1} p_1 v_1 \left( p_2^{\frac{m-1}{m}} p_1^{\frac{1-m}{m}} - 1 \right) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right),$$

$$\boxed{L_i - L_w = \frac{m}{m-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right)} \quad (1.153)$$

Per una isoterma non è ovviamente possibile sostituire il valore  $m = 1$  direttamente nella (1.153), ma bisogna ripetere l'integrazione nell'equazione generale (1.67); ricordando che la legge di un'isoterma è  $pv = \text{cost}$ , si ha:

$$L_i - L_w = p_1 v_1 \int_1^2 \frac{dp}{p} + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right),$$

$$L_i - L_w = RT_1 \ln \beta + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right). \quad (1.154)$$

Nel caso di una trasformazione isoentropica e adiabatica, essendo  $L_w = Q_e = 0$  ed  $m = k$ , la (1.151) e la (1.153) coincidono, assumendo la seguente forma:

$$\boxed{L_i = \frac{k}{k-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right)}. \quad (1.155)$$

Si sottolinea che le espressioni finora ricavate sono valide sia per una compressione che per una espansione, tra le condizioni  $(p_1, T_1)$  e la pressione  $p_2$ ; nel secondo caso, ovviamente, si ha  $\beta = p_2/p_1 < 1$  e quindi  $L_i < 0$ , essendo secondaria l'influenza di  $\Delta E_c$ .

La (1.151) e la (1.153) possono essere ulteriormente semplificate per valutare il lavoro di compressione e di espansione di un gas perfetto rispettivamente in un turbocompressore e in una turbina: il calore scambiato con l'ambiente esterno è, infatti, generalmente trascurabile; inoltre, le sezioni di entrata e di uscita di una turbomacchina sono normalmente progettate in modo che la velocità in entrata del fluido sia circa uguale a quella di uscita. Di conseguenza, i termini  $Q_e$  e  $\Delta E_c$  vengono trascurati. Si consideri un turbocompressore (turbomacchina operatrice): le espressioni (1.151) e (1.153) del lavoro  $L_i$  fornito all'unità di massa di gas che fluisce, in regime permanente, dall'ambiente di aspirazione (dove si trova a pressione  $p_1$  e a temperatura  $T_1$ ) all'ambiente di mandata (dove si trova a pressione  $p_2 = \beta p_1$  e a temperatura  $T_2$ ), secondo una trasformazione politropica di esponente  $m > k$ , assumono le seguenti forme semplificate:

$$L_i = \frac{k}{k-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right), \quad (1.156)$$

$$L_i - L_w = \frac{m}{m-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right). \quad (1.157)$$

Nel caso di una turbina (turbomacchina motrice), si preferisce esprimere il lavoro ottenuto in funzione del rapporto di espansione  $\beta_e = p_1/p_2 > 1$ , essendo ancora 1 e 2 le sezioni di entrata e di uscita della macchina:

$$(L_i)_{\text{ott}} = \frac{k}{k-1} RT_1 \left( 1 - \beta_e^{\frac{1-m}{m}} \right) = \frac{k}{k-1} RT_2 \left( \beta_e^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right), \quad (1.158)$$

$$(L_i)_{\text{ott}} + L_w = \frac{m}{m-1} RT_1 \left( 1 - \beta_e^{\frac{1-m}{m}} \right) = \frac{m}{m-1} RT_2 \left( \beta_e^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right). \quad (1.159)$$

Con procedimento analogo al calcolo delle relazioni (1.151)–(1.159), è poi possibile esprimere il lavoro  $L$  fornito dagli organi mobili di una macchina volumetrica ad una ben definita (e costante) unità di massa di gas (si consideri, come esempio, il caso di una massa di gas racchiusa in un cilindro, che viene compressa a seguito dello spostamento di un pistone a tenuta). Le espressioni da utilizzare sono ora quelle in forma lagrangiana, ovvero la (1.19) e la (1.38), scritte rispetto ad un sistema di riferimento fisso ( $\Delta E_g \approx 0$ ,  $\Delta E_f = 0$ ):

$$L + Q = (U_2 - U_1) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right), \quad (1.160)$$

$$L - L_w = - \int_1^2 p dv + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right). \quad (1.161)$$

Sostituendo  $\Delta U = (U_2 - U_1) = c_v(T_2 - T_1)$ , e considerando un gas perfetto che evolve dalle condizioni  $(p_1, T_1)$  alla pressione  $p_2$  secondo una trasformazione politropica di esponente  $m$ , si ottiene, dopo opportuni passaggi algebrici (lasciati come esercizio al lettore):

$$Q + L = \frac{1}{k-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right), \quad (1.162)$$

$$L - L_w = \frac{1}{m-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right). \quad (1.163)$$

Nel caso particolare in cui la trasformazione politropica sia un'isoterma ( $m = 1$ ) si ottiene, invece:

$$Q + L = \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right), \quad (1.164)$$

$$L - L_w = RT_1 \ln \beta + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right). \quad (1.165)$$

Essendo le velocità in gioco, come detto, molto basse, anche  $L_w$  e  $\Delta E_c$  sono solitamente trascurabili e possono essere pertanto omessi nelle (1.162)–(1.165). Anche queste ultime espressioni sono valide sia per una compressione che per una espansione, tra le condizioni  $p_1, T_1$  e la pressione  $p_2$ . Nel secondo caso, si ha ancora  $\beta = p_2/p_1 < 1$  e quindi  $L < 0$ : volendo quindi esprimere  $L_{ott} = -L$  in funzione del rapporto di espansione  $\beta_e = p_1/p_2 > 1$ , si ha, per  $m \neq 1$  ( $L_w = \Delta E_c = 0$ ):

$$L_{ott} - Q = \frac{1}{k-1} RT_1 \left( 1 - \beta_e^{\frac{1-m}{m}} \right) = \frac{1}{k-1} RT_2 \left( \beta_e^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right), \quad (1.166)$$

$$L_{ott} = \frac{1}{m-1} RT_1 \left( 1 - \beta_e^{\frac{1-m}{m}} \right) = \frac{1}{m-1} RT_2 \left( \beta_e^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right), \quad (1.167)$$

e per  $m = 1$  ( $L_w = \Delta E_c = 0$ ):

$$L_{ott} = Q, \quad (1.168)$$

$$L_{ott} = RT_1 \ln \beta_e. \quad (1.169)$$

### 1.2.19 Lavoro minimo di compressione

Si consideri una compressione reversibile ( $L_w = 0$ ), tra le pressioni  $p_1$  e  $p_2$ , di un fluido comprimibile ( $\Delta E_g = 0$ ), per la quale si abbia anche  $\Delta E_c = 0$ . Il I PTD in forma meccanica, equazione (1.56), diventa quindi:

$$L_i = \int_{p_1}^{p_2} v dp, \quad (1.170)$$

per cui il lavoro necessario alla compressione è pari, in un diagramma  $(p, v)$ , all'area

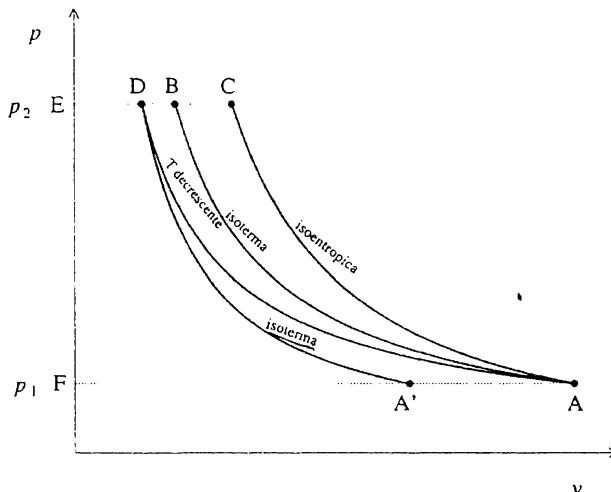


Figura 1.11: Rappresentazione del lavoro di compressione: lavoro minimo.

sottesa dalla trasformazione  $v = v(p)$  (cioè rispetto all'asse delle pressioni). In fig. 1.11 sono rappresentate, a partire dallo stesso punto  $A$ , una compressione isoterma ( $AB$ ) ed una compressione a temperatura crescente ( $AC$ ), ad esempio un'adiabatica (e quindi isoentropica), i cui corrispondenti lavori richiesti sono rappresentati rispettivamente dall'area  $FABE$  e dall'area  $FACE$ . Risulta evidente che la (maggior) sottrazione di calore nella trasformazione  $AB$  (rispetto alla  $AC$ ) sia benefica ai fini della riduzione del lavoro di compressione. Ovviamente, una sottrazione ancora maggiore di calore, tale da far addirittura diminuire la temperatura durante la compressione (curva  $AD$ ) porterebbe ad un'ulteriore riduzione del lavoro. Tuttavia, per realizzare tale sottrazione di calore si dovrebbe disporre di un fluido refrigerante a temperatura minore di  $T_D$ , per cui risulterebbe ancora più vantaggioso pre-refrigerare il fluido da comprimere, ovvero portarlo da  $A$  ad  $A'$  ( $T_{A'} = T_D$ ) e poi effettuare una compressione isoterma fino a  $D$ . Si conclude, quindi, che la compressione isoterma è quella che richiede il minimo lavoro.

### 1.2.20 Controrecupero e rendimenti di compressione

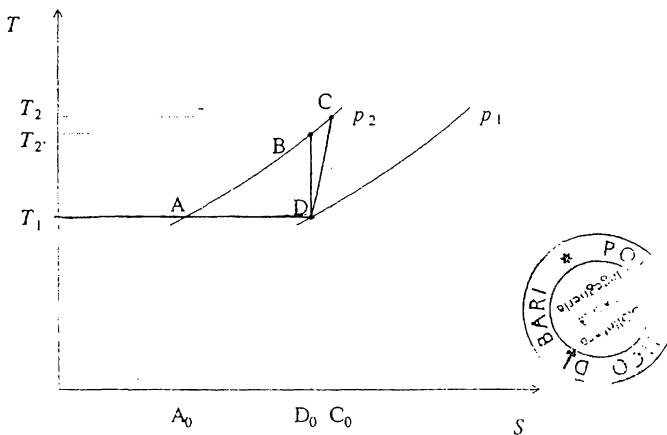


Figura 1.12: fenomeno del controrecupero nel piano  $(T, S)$ .

Si consideri un turbocompressore che opera tra le condizioni  $D (p_1, T_1)$  e  $C (p_2, T_2)$ , secondo la trasformazione  $DC$  rappresentata in fig. 1.12. Per il I PTD in forma euleriana, ricordando che  $Q_e \approx 0$ , e  $\Delta E_c \approx 0$ , si ha:

$$L_i = c_p(T_2 - T_1). \quad (1.171)$$

Il lavoro  $L_i$  equivale quindi al calore da fornire all'unità di massa di fluido in una isobara reversibile affinché la temperatura passi dal valore  $T_1$  al valore  $T_2$ . Tale quantità è rappresentata, sul diagramma  $(T, S)$ , dall'area sottesa da un'isobara fra le temperature  $T_1$  e  $T_2$  (è importante sottolineare che non ha importanza quale isobara sia scelta per la rappresentazione, poiché tali linee sono tutte ottenibili da una sola, traslandola nella direzione dell'asse delle entropie). Pertanto, il lavoro  $L_i$  fornito dagli organi mobili della macchina all'unità di massa di fluido è rappresentato dall'area  $A_0ACC_0$  in fig. 1.12. Inoltre, per il II PTD, si ha:

$$\int_D^C T dS = L_w, \quad (1.172)$$

e quindi l'area  $D_0DCC_0$  rappresenta il lavoro delle resistenze passive nella compressione.

Si consideri ora il caso ideale di compressione isoentropica a partire dalle stesse condizioni  $(p_1, T_1)$  della trasformazione reale e sino alla stessa pressione finale  $p_2$ . Nel diagramma  $(T, S)$  la compressione è rappresentata dalla linea  $DB$  ed il lavoro fornito all'unità di massa di fluido, usualmente indicato con  $(L_i)_{ad}$ , è pari a

$$(L_i)_{ad} = c_p(T_2 - T_1) \quad (1.173)$$

e corrisponde all'area  $A_0ABD_0$ . Pertanto, si ottiene:

$$L_i = \text{area } A_0ACC_0 = \text{area } A_0ABD_0 + \text{area } D_0DCC_0 + \text{area } DBCD,$$

$$L_i = (L_i)_{ad} + L_w + CR. \quad (1.174)$$

Il lavoro  $L_i$  da fornire in una compressione reale adiabatica è quindi maggiore di quello richiesto nella compressione isoentropica di una quantità pari alla somma del lavoro delle resistenze passive,  $L_w$ , più un termine, rappresentato dall'area  $DBCD$ , che prende il nome di **controrecupero**. Fisicamente, il controrecupero è l'aumento di lavoro dovuto al riscaldamento prodotto dalle resistenze passive. Infatti, a parità di pressione, tale calore fa aumentare, rispetto al caso ideale, il volume specifico del gas che, pertanto, richiede un maggior lavoro per essere ulteriormente compresso. Infatti, essendo, in base alla (1.56),

$$L_i - L_w = \int_{p_1}^{p_2} v dp, \quad (1.175)$$

la compressione reale richiede un lavoro netto ( $L_i - L_w$ ) maggiore di quello richiesto nella trasformazione isoentropica,  $(L_i)_{ad}$ , nella quale si ha un minor valore di  $v$  per ogni variazione di pressione  $dp$ .

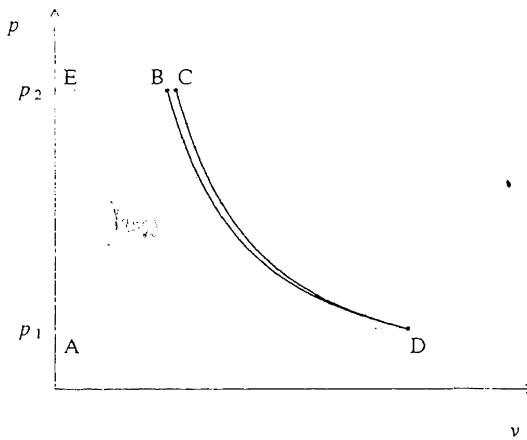


Figura 1.13: fenomeno del controrecupero nel piano  $(p, v)$ .

Il controrecupero può anche essere messo in evidenza facendo ricorso al tracciamento delle linee di compressione, reale ed isoentropica, in un diagramma  $(p, v)$ , come mostrato in fig. 1.13. Si noti che la linea di compressione reale  $DC$  è più alta della isoentropica a causa del lavoro delle resistenze passive,  $L_w$ , che produce un riscaldamento del gas e quindi, a parità di pressione, un aumento del volume specifico. Si consideri nuovamente il PTD in forma euleriana e meccanica ( $\Delta E_c = 0$ ):

$$L_i - L_w = \int_{p_1}^{p_2} v dp. \quad (1.175)$$

Il lavoro da fornire nella compressione isoentropica è rappresentato dall'area  $ADBE$ , mentre l'area  $ADCE$  rappresenta il termine  $(L_i - L_w)$  relativo alla trasformazione reale.

Si ha, quindi:

$$L_i = \text{area } ADCE + L_w = (L_i)_{ad} + L_w + \text{area } DCBD,$$

$$L_i = (L_i)_{ad} + L_w + CR. \quad (1.176)$$

Nel diagramma  $(p, v)$  il controrecupero è quindi rappresentato dall'area  $DCBD$ .

Si definisce **rendimento isoentropico** o **adiabatico** di un turbocompressore il rapporto tra il lavoro minimo adiabatico (che è quello isoentropico) ed il lavoro effettivo  $L_i$ , a parità di condizioni iniziali e di pressione finale:

$$\eta_{ad,c} = \frac{(L_i)_{ad}}{L_i} = \frac{L_i - L_w - CR}{L_i} \approx \frac{i_{2is} - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{\Delta i_{2is}}{\Delta i} \quad (1.177)$$

Come già evidenziato, il controrecupero è legato agli effetti termici indotti dalla dissipazione di lavoro in calore, con conseguente maggior aumento di volume specifico rispetto ad una trasformazione isoentropica; in una macchina idraulica, dove la densità del fluido può essere ritenuta costante, gli effetti termici sono ininfluenti sul lavoro, ovvero si ha  $CR = 0$ . Corrispondentemente, il termine  $CR$  nella (1.177) scompare; si definisce quindi **rendimento idraulico** il seguente rapporto:

$$\eta_{y,c} = \frac{L_i - L_w}{L_i} = \frac{\frac{m}{m-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{m}{m-1}} - 1 \right) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right)}{\frac{m}{m-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{m}{m-1}} - 1 \right) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right)} \quad (1.178)$$

Se si considera una pompa,  $\eta_y$  ha perciò il significato di rendimento fluidodinamico della pompa; infatti, se le pale compiono sul fluido un lavoro  $L_i$ , il fluido di fatto si accorge di aver ricevuto solo  $(L_i - L_w)$ , poiché una parte di  $L_i$  (ovvero  $L_w$ ) viene dissipata in attrito. Per un turbocompressore, a causa dei fenomeni termici (controrecupero),  $\eta_y$  è solo un indice del rendimento della macchina; in particolare, si ha:

$$\eta_{y,c} \geq \eta_{ad,c}. \quad (1.179)$$

Il rendimento isoentropico tende a  $\eta_y$  quando il rapporto di compressione  $\beta$  tende a 1; per una compressione infinitesima, infatti:

$$dL_i = vdp + dL_w = (dL_i)_{ad} + dL_w. \quad (1.180)$$

Pertanto, il rendimento idraulico di un turbocompressore viene usualmente definito rendimento di **piccolo stadio** (dall'inglese *small stage efficiency*), poiché, nel caso di un compressore pluristadio con piccolo rapporto di compressione in ogni stadio, il gas può essere considerato incompressibile (singolarmente in ciascuno stadio), ed  $\eta_{y,c} \approx \eta_{ad,c}$ .

Il rendimento idraulico viene anche definito rendimento politropico, in quanto consente, nel caso di una compressione adiabatica, politropica e senza variazione di energia cinetica di un gas perfetto, un semplice calcolo dell'esponente  $m$ . Facendo il rapporto fra la (1.157) e la (1.156), si ottiene:

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = 0 \rightarrow \eta_{y,c} = \frac{L_i - L_w}{L_i} = \frac{m}{m-1} \frac{k-1}{k}. \quad (1.181)$$

Poiché  $\eta_y < 1$ , si ha

$$\frac{m-1}{m} > \frac{k-1}{k}, \quad (1.182)$$

e si ritrova  $m > k$ .

Nei compressori volumetrici, come detto, il lavoro  $L_w$  è in genere trascurabile; inoltre, il gas che viene compresso si riscalda e cede calore alle pareti. Pertanto, supponendo che la compressione sia una trasformazione politropica, e considerando che  $L_w$  è trascurabile, essa sarà caratterizzata da un esponente  $m < k$  ed il lavoro  $L_i$  risulterà minore di quello isoentropico. Quindi, per questo tipo di compressori, si fa riferimento al rendimento isotermo, definito come il rapporto fra il lavoro isotermo  $(L_i)_{is}$  (lavoro minimo di compressione per una trasformazione reversibile tra le stesse condizioni iniziali e pressione finale) ed il lavoro  $L_i$  compiuto sul gas nella compressione reale:

$$\eta_{is} = \frac{(L_i)_{is}}{L_i}. \quad (1.183)$$

### 1.2.21 Recupero e rendimenti di espansione

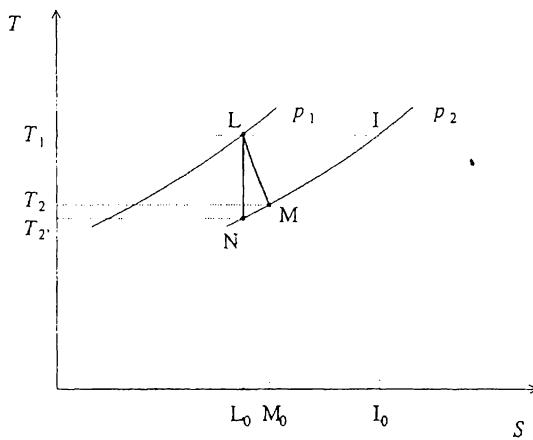


Figura 1.14: fenomeno del recupero nel piano ( $T, S$ ).

Si consideri una turbina che opera tra le condizioni  $L (p_1, T_1)$  ed  $M (p_2, T_2)$ , secondo la trasformazione  $LM$  rappresentata in fig. 1.14. Per il I PTD in forma euleriana, ricordando che  $Q_e \approx 0$  e  $\Delta E_c \approx 0$ , si ha

$$(L_i)_{ott} = -\Delta i = c_p(T_1 - T_2). \quad (1.184)$$

Tale quantità è rappresentata, sul diagramma ( $T, S$ ), dall'area  $M_0MII_0$ . Inoltre, per il II PTD, si ha:

$$\int_L^M T dS = L_w, \quad (1.185)$$

e quindi l'area  $L_0LM_0$  rappresenta il lavoro delle resistenze passive.

Si consideri ora il caso ideale di espansione isoentropica a partire dalle stesse condizioni iniziali  $(p_1, T_1)$  della trasformazione reale e sino alla stessa pressione finale  $p_2$ . Nel diagramma  $(T, S)$ , essa è rappresentata dalla linea  $LN$  ed il lavoro ottenuto dall'unità di massa di fluido è pari a:

$$(L_{i,ad})_{ott} = c_p(T_1 - T_2), \quad (1.186)$$

ed è rappresentato dall'area  $L_0NII_0$ . Pertanto, si ottiene:

$$\begin{aligned} (L_i)_{ott} &= \text{area } M_0MII_0 = \text{area } L_0NII_0 - \text{area } L_0NMM_0 = \\ &= \text{area } L_0NII_0 - (\text{area } L_0LMM_0 - \text{area } NLMN), \\ (L_i)_{ott} &= (L_{i,ad})_{ott} - (L_w - R) = (L_{i,ad})_{ott} - L_w + R. \end{aligned} \quad (1.187)$$

Il lavoro ottenuto in un'espansione reale adiabatica è quindi minore di quello ottenibile nell'espansione isoentropica di una quantità pari a  $(L_w - R)$ . La quantità  $R$ , rappresentata dall'area  $NLMN$ , viene definita **recupero**. Fisicamente il recupero si giustifica in modo analogo al controrecupero: a pari pressione, il volume specifico (e quindi il termine  $vdp$ ) nella trasformazione reale è maggiore di quello nella trasformazione ideale, a causa dell'aumento di temperatura dovuto alla presenza delle resistenze passive; in altre parole, il calore dissipato per attrito può trasformarsi parzialmente in lavoro nel prosieguo dell'espansione. Si lascia al lettore il compito di individuare il recupero in un diagramma  $(p, v)$ .

Si definisce **rendimento isoentropico** o **adiabatico** di una turbina il rapporto fra il lavoro reale  $(L_i)_{ott}$  ed il lavoro isoentropico  $(L_{i,ad})_{ott}$  (che è quello massimo), a parità di condizioni iniziali e di pressione finale:

$$\eta_{ad,t} = \frac{(L_i)_{ott}}{(L_{i,ad})_{ott}} = \frac{(L_i)_{ott}}{(L_i)_{ott} + L_w - R} \approx \frac{\frac{k-1}{k} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1}}{\frac{k-1}{k} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} - \frac{R}{A_{v,i}}} \quad (1.188)$$

Per le turbomacchine motrici la definizione del **rendimento idraulico** diventa:

$$\eta_{y,t} = \frac{(L_i)_{ott}}{(L_i)_{ott} + L_w} \approx \frac{\frac{k-1}{m-1} \left(1 - \beta^{\frac{m-1}{m}}\right) - \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right)}{\frac{k-1}{m-1} \left(1 - \beta^{\frac{m-1}{m}}\right) - \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right)} \quad (1.189)$$

Anche in questo caso,  $\eta_y$  ha il significato di rendimento di una turbomacchina motrice idraulica, mentre, a causa dei fenomeni termici (recupero), esso risulta solo un indice del rendimento delle turbine a vapore o a gas; essendo trascurato il recupero, che fa aumentare il lavoro ottenuto, si ha, in questo caso:

$$\eta_{y,t} \leq \eta_{ad,t}. \quad (1.190)$$

Anche per l'espansione di un gas perfetto, adiabatica, politropica e senza variazione di energia cinetica fra gli stati iniziale e finale, l'espressione del rendimento idraulico permette un semplice calcolo dell'esponente  $m$  della politropica. Facendo il rapporto fra la (1.158) e la (1.159), si ottiene:

$$\eta_{y,t} = \frac{(L_i)_{ott}}{(L_i)_{ott} + L_w} = \frac{k}{k-1} \frac{m-1}{m}. \quad (1.191)$$

Inoltre, poiché  $\eta_y < 1$ , si ha

$$\frac{m}{m-1} > \frac{k}{k-1}, \quad (1.192)$$

e, come noto,  $m < k$ .

### 1.2.22 Flusso unidimensionale di un fluido comprimibile

Si consideri il flusso in un condotto: se una qualunque proprietà del fluido si mantiene costante in tutti i punti di una generica sezione, il flusso viene detto **unidimensionale**. Un flusso rigorosamente unidimensionale non può esistere; tuttavia, se il condotto considerato è attraversato da un flusso ad elevato numero di Reynolds ed è caratterizzato da modeste curvature e variazioni di sezione trasversale, il flusso può, con buona approssimazione, essere ritenuto unidimensionale. Infatti:

- la velocità in una generica sezione di un condotto rettilineo a sezione costante varia, a causa dell'attrito fluidodinamico, dalla parete verso il centro. Tuttavia, per flussi turbolenti ad alti numeri di Reynolds (di interesse pratico per lo studio delle macchine), le proprietà termodinamiche sono pressoché costanti in ciascuna sezione ed il profilo di velocità è costante in gran parte della sezione, essendo lo strato limite molto sottile. Ingegneristicamente, si può pertanto considerare il flusso unidimensionale, definendo una opportuna velocità media.
- in un condotto curvo a sezione costante, la pressione aumenta dall'interno all'esterno del gomito in modo da bilanciare la forza centrifuga legata alla curvatura dei filetti fluidi: tale effetto è trascurabile se il raggio di curvatura dell'asse del condotto è molto elevato rispetto al suo diametro idraulico,  $R \gg D_H$ ;
- in un condotto rettilineo convergente o divergente, la velocità è assiale in corrispondenza dell'asse dello stesso, mentre in prossimità della parete risulta necessariamente parallela ad essa e quindi non più assiale; se la variazione di sezione è piccola al variare dell'ascissa curvilinea, ovvero se l'angolo formato da una parete e dall'asse è piccolo, è possibile trascurare tali variazioni di direzione.

Pertanto, nelle condizioni sopra citate, è possibile supporre che la velocità e le condizioni termodinamiche del fluido in una generica sezione dipendano esclusivamente dalla coordinata curvilinea  $s$  della sezione considerata.

Si consideri un flusso unidimensionale comprimibile in un condotto fisso. Se il condotto è breve e la velocità del fluido elevata, gli scambi termici possono essere trascurati, per cui nel condotto avviene una trasformazione adiabatica e senza fornitura di lavoro dall'esterno. Applicando il IPTD (equazione (1.52) con  $\Delta E_g$  trascurabile) tra due sezioni generiche 1 e 2 del condotto, si ricava:

$$\boxed{i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_2 + \frac{c_2^2}{2} = \text{cost.}} \quad (1.193)$$

Dalla (1.193) si evince che l'entalpia raggiunge il valore massimo laddove la velocità del fluido si annulla, indipendentemente dal tipo di trasformazione seguita, purchè adiabatica e senza scambio di lavoro; tale valore viene definito **entalpia totale o di arresto**,  $i^0$ , ed è somma dell'entalpia (statica) e dell'energia cinetica possedute dal fluido in una qualunque sezione del condotto:

$$i^0 = i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_2 + \frac{c_2^2}{2} = i + \frac{c^2}{2} = \text{cost.} \quad (1.194)$$

La (1.194) mostra che l'entalpia totale si mantiene costante in una trasformazione adiabatica e senza scambio di lavoro.

Poiché per un gas perfetto  $i = c_p T$ , è immediato definire, in modo analogo a quanto fatto sopra, la **temperatura totale o di arresto**,  $T^0$ :

$$\boxed{T^0 = \frac{i^0}{c_p} = T + \frac{c^2}{2c_p} = \text{cost},} \quad (1.195)$$

per la quale valgono le stesse considerazioni già fatte riguardo l'entalpia totale.

Nei corsi di *Fluidodinamica* si è dimostrato che la velocità del suono  $a$ , ovvero la velocità con cui si propaga un disturbo di pressione infinitesimo, è pari a:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S=\text{cost}}}. \quad (1.196)$$

Ove la trasformazione isoentropica sia descritta dalla relazione

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{cost}, \quad (1.197)$$

si ha:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S=\text{cost}} = \text{cost } k\rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho^k} \rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho}, \quad (1.198)$$

e quindi

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}}. \quad (1.199)$$

Nel caso di un gas perfetto, si ha anche

$$a = \sqrt{kRT}, \quad (1.200)$$

e, dividendo la (1.195) per  $T$  ed esprimendo  $c_p$  in base alla (1.110), si ricava:

$$\frac{T^0}{T} = 1 + \frac{c^2}{2 \frac{k}{k-1} RT} = 1 + \frac{k-1}{2} \frac{c^2}{kRT}. \quad (1.201)$$

Indicando con  $M$  il **numero di Mach**, pari al rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono,

$$\boxed{M = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{kRT}}}, \quad (1.202)$$

si ricava, infine:

$$\boxed{\frac{T^0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2} \quad (1.203)$$

Si definiscono **pressione e densità totali o di arresto isoentropico** (e si indicano con  $p^0$ ,  $\rho^0$ ) i valori di pressione e densità ottenibili a partire dalle condizioni assegnate  $(p, \rho)$ , qualora la velocità si annulli anche isoentropicamente. Utilizzando le leggi dell'evoluzione isoentropica dei gas perfetti, equazioni (1.123), e definendo lo stato finale come il punto di arresto isoentropico, si ha:

$$P^0 = P \left( \frac{T^0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} = P \frac{c^2}{\rho^0}, \Rightarrow \frac{p^0}{p} = \left( \frac{T^0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (1.204)$$

$$\rho^0 = \rho \left( \frac{T^0}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \rho_1^0 \Rightarrow \frac{\rho^0}{\rho} = \left( \frac{T^0}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (1.205)$$

e, sostituendo la (1.203):

$$\boxed{\frac{p^0}{p} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}}, \quad (1.206)$$

$$\boxed{\frac{\rho^0}{\rho} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (1.207)$$

Individuiamo graficamente, su un diagramma  $(T, S)$ , le condizioni totali (fig. 1.15) di

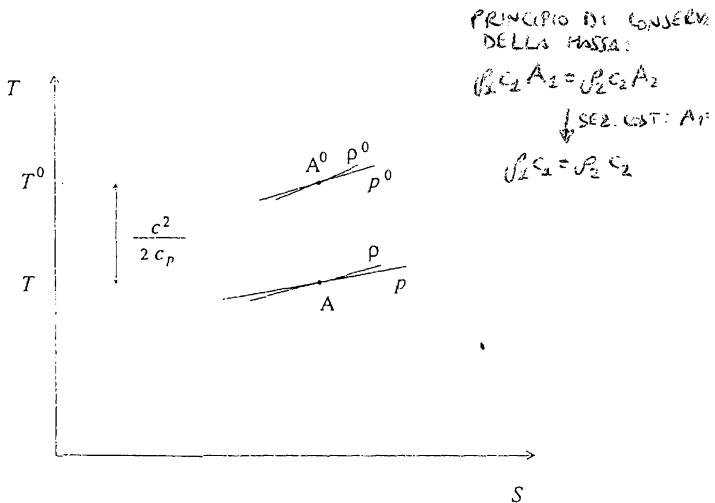


Figura 1.15: condizioni totali o di arresto isoentropico.

un generico punto  $A$ : a partire da  $A$ , si risale isoentropicamente di una quantità pari a  $c^2/(2c_p)$  per raggiungere la temperatura totale  $T^0$ ; l'isobara e l'isocora che passano per il punto  $A^0$  così individuato corrispondono rispettivamente alla pressione totale  $p^0$  ed alla densità totale  $\rho^0$ .

Per un flusso unidimensionale adiabatico di un gas perfetto attraverso un condotto fisso, le perdite comportano una diminuzione di pressione totale. La trasformazione 1-2 in fig. 1.16 è infatti ad entropia crescente, in quanto per ogni suo elemento si ha:

$$TdS = dL_w > 0. \quad (1.208)$$

Il punto  $2^0$ , caratterizzato dai valori totali  $T_2^0$  e  $p_2^0$ , viene individuato, a partire dal punto 2, risalendo isoentropicamente di una quantità pari a  $c_2^2/(2c_p)$ . Poiché valgono ancora la (1.194) e la (1.195), tale trasformazione è caratterizzata, come anticipato, da una temperatura totale costante, mentre  $p_2^0 < p_1^0$  e  $\rho_2^0 < \rho_1^0$ , in quanto  $S_2 > S_1$ . L'entalpia totale è costante, ma *perde di qualità* poiché l'entropia aumenta, ovvero la pressione totale

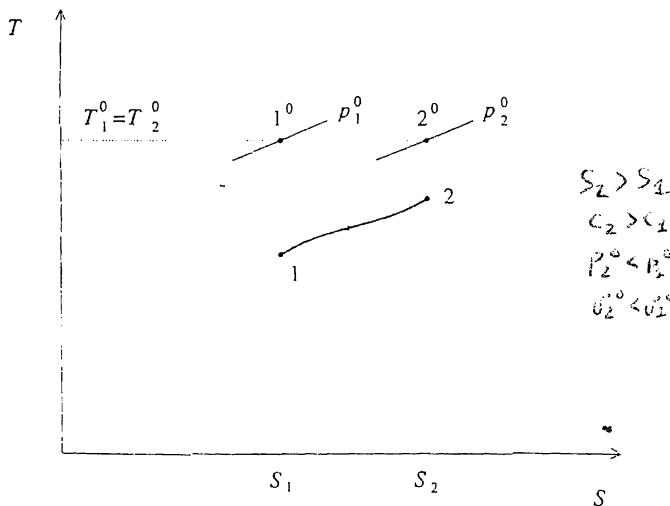


Figura 1.16: legame tra variazione di entropia e variazione di pressione totale per un flusso adiabatico in un condotto fisso.

diminuisce. Poiché  $S$  è una funzione di stato, l'incremento di entropia,  $\Delta S = S_2 - S_1$ , non dipende dalla trasformazione, ma solo dalle condizioni iniziali e finali. Ricordando che

$$TdS = di - vdp, \quad (1.28)$$

si ricava:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left( c_p \frac{dT}{T} - v \frac{dp}{T} \right), \quad (1.209)$$

e, in base alla legge di stato dei gas perfetti:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left( c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \right). \quad (1.210)$$

Integrando si ha, quindi:

$$\boxed{S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}} = R \left[ \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{k-1}} - \ln \frac{p_2}{p_1} \right]. \quad (1.211)$$

Dal diagramma ed in base alle definizioni di grandezze totali, si può in particolare scrivere:

$$S_2 - S_1 = S_2^0 - S_1^0 = c_p \ln \frac{T_2^0}{T_1^0} - R \ln \frac{p_2^0}{p_1^0}, \quad (1.212)$$

e, poiché il flusso è adiabatico e senza scambio di lavoro con l'esterno ( $T_2^0 = T_1^0$ ):

$$\boxed{S_2 - S_1 = R \ln \frac{p_1^0}{p_2^0}} \quad (1.213)$$

Si ribadisce, dunque, che le resistenze passive comportano, in base al II PTD, un aumento dell'entropia ( $S_2 \geq S_1$ ), e, come si evince dalla (1.213), una corrispondente riduzione di pressione totale.

### 1.3 TRIANGOLI DI VELOCITÀ NELLE TURBOMACCHINE

Uno stadio di turbomacchina è costituito da un elemento rotante (girante o rotore) e da uno fisso (statore), entrambi provvisti di un certo numero di palette che delimitano, nella girante, i canali mobili percorsi dal fluido, e, nello statore, i canali fissi. In fig. 1.17 è

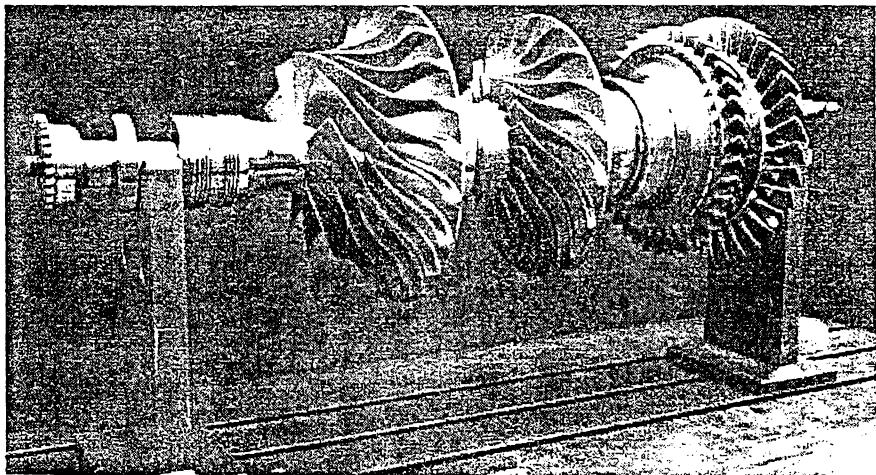


Figura 1.17: albero di turbina a gas: giranti centrifughe dei due stadi di compressione e giranti assiali dei due stadi di espansione (da brochure Nuovo Pignone).

riportato, come primo esempio, l'albero di una turbina a gas, costituito da due giranti a sviluppo assiale-radiale (a sinistra), relative ai due stadi di compressione, e da due giranti a sviluppo puramente assiale, relative ai due stadi di turbina (a destra). Sono chiaramente visibili le palette rotoriche, che delimitano, insieme alla cassa che circonda ciascuna girante, i canali mobili. Come secondo esempio, la fig. 1.18a mostra lo statore e la successiva girante di uno stadio di turbina assiale.

La velocità del fluido in un punto del canale mobile può essere riferita allo statore o al rotore: nel primo caso si definisce velocità assoluta  $c$ , nel secondo caso si denomina

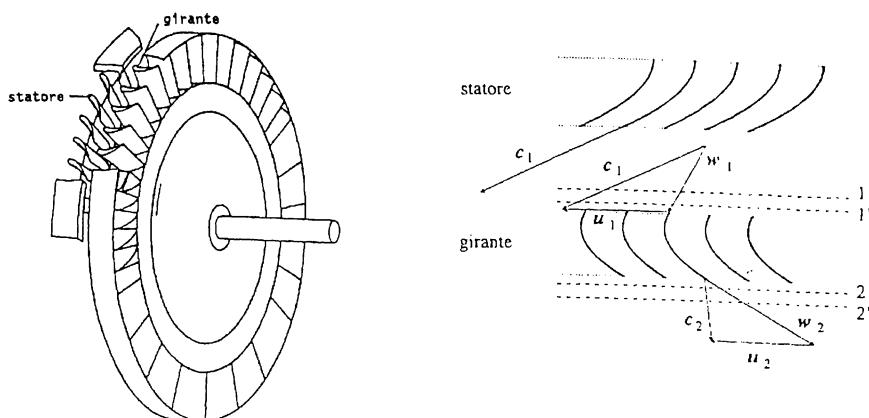


Figura 1.18: a) statore e girante di una turbina assiale; b) sezione (con la superficie cilindrica media) rettificata e triangoli di velocità.

velocità relativa  $w$ . La differenza vettoriale ( $c - w$ ) è la velocità di trascinamento, che coincide con la velocità periferica  $u$  della girante nel punto considerato. Quindi la velocità di trascinamento non ha componenti né in direzione assiale né in direzione radiale.

Per definire il comportamento di un elemento di turbomacchina si ricorre ai cosiddetti **triangoli di velocità**, costituiti dai vettori  $c$ ,  $w$  ed  $u$ ; tali triangoli possono essere costruiti in ciascun punto della corrente e, in particolare, nella sezione di entrata e di uscita della girante. Si supponga il flusso stazionario ed unidimensionale; affinché quest'ultima ipotesi sia verificata l'altezza delle pale deve essere piccola rispetto al diametro medio, così da poter trascurare le variazioni di  $u$ , e le pale devono essere in numero molto elevato (teoricamente infinito) e di spessore quasi nullo (teoricamente infinitesimo), in modo che la distanza interpalare sia molto ridotta rispetto alla corda del profilo palare, e si rispetti, pertanto, la condizione  $R \gg D_H$ , così da poter trascurare la curvatura delle pale<sup>2</sup>. Nelle ipotesi riportate, è possibile approssimare le proprietà cinematiche e termodinamiche di tutte le particelle fluide che attraversano un elemento della macchina con le proprietà assunte dal fluido che percorre le linee di corrente passanti per un opportuno raggio medio. Tali linee di corrente giacciono su una superficie di rivoluzione intorno all'asse di rotazione della macchina, così che la velocità del fluido ha una componente meridiana (assiale-radiale), tangente all'intersezione di detta superficie con un semipiano passante per l'asse di rotazione, ed una componente periferica o tangenziale, normale a tale piano. I triangoli di velocità si ottengono riportando su un piano (in direzioni tra loro ortogonali) le due componenti di velocità sopra citate.

Come primo esempio, costruiamo i triangoli di velocità nella sezione di ingresso 1 e nella sezione di uscita 2 della girante di una turbina assiale, v. fig. 1.18 e fig. 1.19. In

<sup>2</sup>Ulteriori dettagli sull'influenza del numero di pale saranno forniti nel paragrafo 2.2.4.

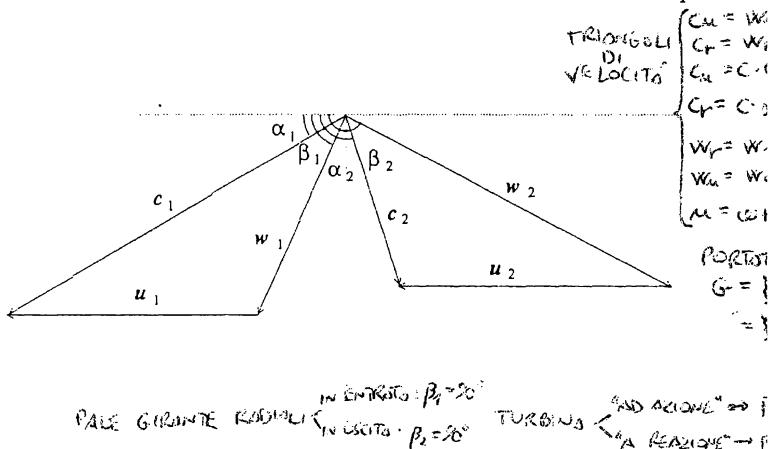


Figura 1.19: triangoli di velocità in ingresso ed uscita girante per una turbina assiale.

condizioni di progetto, se la pala avesse bordo d'attacco affilato, il fluido dovrebbe avere, nella sezione di ingresso della girante, una velocità  $c_1$  orientata in modo che la velocità relativa  $w_1$  sia tangente alla pala della girante. Se ciò non dovesse accadere, infatti, la velocità relativa risulterebbe avere una componente normale alla pala che si annullerebbe non isoentropicamente, ovvero con dissipazione di energia cinetica. In uscita, sarà la forma stessa della pala che, deviando il fluido, imporrà una velocità  $w_2$  ancora tangente alla pala stessa.

In fig. 1.20 sono poi riportati, come secondo esempio, i triangoli di velocità all'ingresso ed all'uscita della girante di una turbomacchina centrifuga (pompa o compressore centrifugo); in particolare, la fig. 1.20a mostra la sezione longitudinale, o meridiana, della girante, mentre la fig. 1.20b rappresenta la proiezione della superficie interpalare media (*blade to blade*), ottenuta intersecando la girante con la superficie di rivoluzione tratteggiata in fig. 1.20a. Si noti che nella sezione meridiana sono riportate solo le componenti dei vettori  $c$  e  $u$ , e che la componente tangenziale della velocità assoluta in ingresso girante,  $c_{u1}$ , è solitamente nulla in queste macchine;  $u_2$  è ovviamente maggiore di  $u_1$ .

Determiniamo ora una relazione tra i triangoli di velocità ed il lavoro fornito all'unità di massa che fluisce nella turbomacchina. Con riferimento alla fig. 1.18, si consideri la massa di fluido  $m$ , in moto permanente, racchiusa tra le sezioni 1 e 2 nell'istante  $t$ . La variazione del momento della quantità di moto della massa  $m$  tra l'istante  $t$  ed un istante successivo  $t + dt$  eguaglia la coppia  $C$  risultante dei momenti (assiali) rispetto all'asse di rotazione delle forze esercitate dalle pale (si trascurano quelle di attrito eventualmente esercitate dalla cassa) sulla massa considerata, per il tempo  $dt$  in cui si verifica tale variazione:

$$C dt = (\text{MQM})_{\text{finale}} - (\text{MQM})_{\text{iniziale}}, \quad (1.214)$$

ovvero

$$C = \frac{d}{dt} (\text{MQM}). \quad (1.215)$$

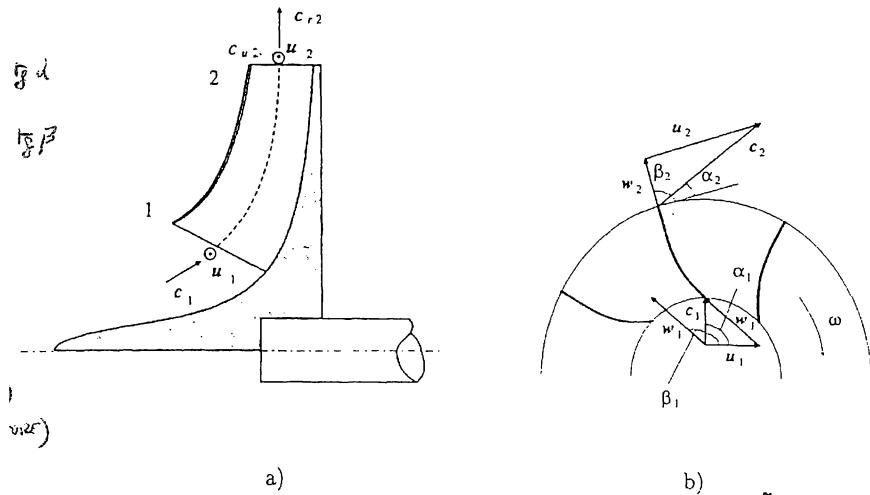


Figura 1.20: a) sezione longitudinale o meridiana e b) proiezione della superficie interpalare media (*blade to blade*) della girante di una turbomacchina centrifuga; triangoli di velocità.

In modo analogo alla determinazione del I PTD in forma euleriana, si determini ora la variazione del momento della quantità di moto, rispetto all'asse di rotazione, tra l'istante  $t$  e l'istante  $t + dt$ . Nell'istante  $t + dt$  la massa  $m$  sarà racchiusa tra le sezioni  $1'$  e  $2'$ ; tra le sezioni  $2$  e  $2'$  sarà racchiusa una massa  $dm$  pari a quella presente tra le sezioni  $1$  e  $1'$ , per l'ipotesi di stazionarietà del moto. Per la medesima ipotesi, il momento della quantità di moto che compete alla massa  $(m - dm)$  racchiusa fra le sezioni  $1'$  e  $2$  all'istante  $t$  è uguale al momento della quantità di moto che compete alla massa  $(m - dm)$  racchiusa fra le stesse sezioni all'istante  $t + dt$ . Pertanto, la variazione del momento della quantità di moto è dovuta soltanto ai contributi relativi alle sezioni di entrata e di uscita:

$$Cdt = dm(c_{u2}r_2 - c_{u1}r_1), \quad (1.216)$$

in cui  $(c_{u1}r_1 dm)$  è il momento della quantità di moto che compete alla massa  $dm$  racchiusa tra le sezioni  $1$  e  $1'$  all'istante  $t$ , mentre  $(c_{u2}r_2 dm)$  è il momento della quantità di moto che compete alla massa  $dm$  racchiusa nelle sezioni  $2$  e  $2'$  all'istante  $t + dt$ . Le componenti di velocità  $c_u$  si intendono positive se di verso concorde ad  $u$ . Dividendo la (1.216) per  $dt$  e moltiplicando per la velocità angolare  $\omega$  della girante, si ottiene:

$$P_i = C\omega = G\omega(c_{u2}r_2 - c_{u1}r_1), \quad (1.217)$$

in cui  $G = dm/dt$  è la portata di fluido. Inoltre, poiché  $L_i = P_i/G$  è il lavoro fornito dalle pale mobili all'unità di massa di fluido che attraversa la macchina, la (1.217) diventa:

$$L_i = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}, \quad (1.218)$$

essendo  $u = \omega r$ . Volendo far riferimento al lavoro ottenuto, la (1.217) viene riscritta come

$$(L_i)_{\text{ott}} = u_1 c_{u1} - u_2 c_{u2}. \quad (1.219)$$

Applicando il teorema di Carnot ad entrambi i triangoli di velocità si ha anche:

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2uc \cos \alpha,$$

da cui si ricava:

$$uc_u = \frac{c^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{w^2}{2}. \quad (1.220)$$

Pertanto, la (1.218) assume la forma:

$$L_i = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}, \quad (1.221)$$

che è l'**equazione di Eulero** (1.63), precedentemente ricavata sottraendo dal I PTD scritto rispetto ad un riferimento fisso il I PTD scritto in un sistema rotante. Volendo ancora mettere in evidenza il lavoro ottenuto, l'equazione di Eulero può essere posta nella forma:

$$(L_i)_{\text{ott}} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} - \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}. \quad (1.222)$$

## 1.4 ANALISI DIMENSIONALE E TEOREMA DI BUCKINGHAM

Con il termine **analisi dimensionale** si intende lo studio delle grandezze fisiche che intervengono in un dato fenomeno e delle relative dimensioni.

Enunciamo il **teorema di Buckingham**: se un fenomeno fisico dipende da una ennu-  
pla di parametri dimensionali ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ), che contengono  $k$  grandezze fondamentali,  
mediante un'equazione del tipo:

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0, \quad (1.223)$$

oppure

$$\alpha_\ell = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\ell-1}, \alpha_{\ell+1}, \dots, \alpha_n), \quad (1.224)$$

è possibile descrivere tale fenomeno tramite una relazione che leggi  $(n - k)$  parametri  
adimensionali  $\pi_j$ :

$$H(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) = 0, \quad (1.225)$$

oppure

$$\pi_\ell = h(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{\ell-1}, \pi_{\ell+1}, \dots, \pi_{n-k}). \quad (1.226)$$

Per passare dalla (1.223) alla (1.225) e quindi definire i parametri adimensionali  $\pi_j$ , è ne-  
cessario individuare una base di  $k$  parametri  $\alpha_i$  ed adimensionalizzare i restanti parametri  
 $\alpha_j$  mediante tale base. Per costituire una base valida ai fini dell'analisi dimensionale, i  
 $k$  parametri  $\alpha_i$  devono:

- 1) contenere tutte le  $k$  grandezze fondamentali;

- 2) essere tra loro indipendenti, cioè non poter, da soli, costituire un parametro adimensionale.

L'uso di grandezze adimensionali consente quindi di descrivere il fenomeno fisico in esame con un numero minore (e più precisamente con il minimo numero possibile) di parametri.

Per chiarire quanto sopra, consideriamo, come esempio, il caso di un condotto circolare in cui fluisce un liquido; la perdita di pressione per unità di lunghezza,  $\Delta p/L$ , dipende, come noto, dalla densità  $\rho$ , dalla velocità  $c$  e dalla viscosità (dinamica)  $\mu$  del liquido, nonché dal diametro della tubazione,  $D$ , e dalla rugosità della superficie interna,  $e$ :

$$\frac{\Delta p}{L} = g(\rho, c, \mu, D, e). \quad (1.227)$$

Se si volessero misurare le perdite di pressione in base alla (1.227), si dovrebbe eseguire un numero elevatissimo di esperimenti, facendo variare ogni volta le cinque grandezze  $\rho$ ,  $c$ ,  $\mu$ ,  $D$  ed  $e$ . Nei problemi di meccanica (in assenza di fenomeni termici) le grandezze fondamentali sono la massa  $m$ , la lunghezza  $l$  ed il tempo  $t$ , per cui  $k = 3$  (in questo esempio, inoltre,  $n = 6$ ). Pertanto, è possibile utilizzare 3 delle 6 grandezze  $\Delta p/L$ ,  $\rho$ ,  $c$ ,  $\mu$ ,  $D$  ed  $e$  come base per adimensionalizzare le altre 3; la relazione funzionale che ne deriva,  $\pi_1 = h(\pi_2, \pi_3)$ , sarà valida per tutte le tubazioni circolari e per tutti i liquidi (newtoniani), e va determinata sperimentalmente, al variare dei soli parametri adimensionali  $\pi_2$  e  $\pi_3$ .

Sceglieremo come base la terna  $(\rho, D, c)$ , che contiene, come è immediato verificare, le tre unità di misura fondamentali:

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3}, \quad [D] = m, \quad [c] = \frac{m}{s}. \quad (1.228)$$

La prima condizione è dunque soddisfatta. Per verificare la seconda condizione si imposta la seguente equazione:

$$[\rho]^{\beta_1} [D]^{\beta_2} [c]^{\beta_3} = kg^0 m^0 s^0. \quad (1.229)$$

Se la (1.229) è soddisfatta solo per valori nulli di  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , allora le tre grandezze fisiche dimensionali sono fra loro indipendenti, poiché non possono, da sole, costituire un parametro adimensionale. Sostituendo le relazioni (1.228) nella (1.229), si ha:

$$kg^0 m^{-3\beta_1} m^{\beta_2} m^{\beta_3} s^{-\beta_3} = kg^0 m^0 s^0. \quad (1.230)$$

Questa equazione è equivalente ad un sistema di tre equazioni in tre incognite (si devono azzerare i  $k = 3$  esponenti):

$$\begin{cases} \beta_1 &= 0 \\ -3\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ -\beta_3 &= 0 \end{cases} \quad (1.231)$$

Il sistema, avendo determinante non nullo, ha come unica soluzione  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$  e quindi la base è indipendente. A tal proposito, va evidenziato che se la base scelta non soddisfa la condizione 1, la matrice del sistema contiene una colonna nulla e quindi non ha rango massimo: la condizione 1 è quindi condizione necessaria per soddisfare la 2.

Valutiamo ora i parametri adimensionali  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$ ,

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{L} \rho^\gamma D^\gamma c^\gamma, \quad (1.232)$$

$$\pi_2 = \mu \rho^{\delta_1} D^{\delta_2} c^{\delta_3}, \quad (1.233)$$

$$\pi_3 = e \rho^{\theta_1} D^{\theta_2} c^{\theta_3}, \quad (1.234)$$

in cui  $\Delta p/L$  è espresso in  $kg/(m^2 s^2)$ ,  $\mu$  è espresso in  $kg/(ms)$  ed  $e$  è espresso in  $m$ . Gli esponenti  $\gamma_j$ ,  $\delta_j$  e  $\theta_j$  ( $j = 1, 3$ ) devono essere calcolati in modo da adimensionalizzare  $\Delta p/L$ ,  $\mu$  ed  $e$ . Esplicitando la (1.232), si ha:

$$kg^1 m^{-2} s^{-2} kg^{\gamma_1} m^{-3\gamma_1} m^{\gamma_2} m^{\gamma_3} s^{-\gamma_3} = kg^0 m^0 s^0, \quad (1.235)$$

da cui si ricava il seguente sistema

$$\begin{cases} \gamma_1 &= -1 \\ -3\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 2 \\ -\gamma_3 &= 2 \end{cases}, \quad (1.236)$$

che, avendo determinante uguale a quello del sistema (1.231) utilizzato per verificare la validità della base, ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} \gamma_1 &= -1 \\ \gamma_2 &= 1 \\ \gamma_3 &= -2 \end{cases} \quad (1.237)$$

ovvero

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{L \rho c^2} D = \frac{\Delta p}{\rho \frac{D}{c^2}} = \frac{f}{2}. \quad (1.238)$$

Il parametro  $f$  viene definito, come noto, coefficiente di attrito.

Analogamente, per la (1.233), si ha:

$$kg^1 m^{-1} s^{-1} kg^{\delta_1} m^{-3\delta_1} m^{\delta_2} m^{\delta_3} s^{-\delta_3} = kg^0 m^0 s^0, \quad (1.239)$$

$$\begin{cases} \delta_1 &= -1 \\ -3\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 &= 1 \\ -\delta_3 &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta_1 &= -1 \\ \delta_2 &= -1 \\ \delta_3 &= -1 \end{cases} \quad (1.240)$$

per cui

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho c D} = \frac{1}{Re}, \quad (1.241)$$

in cui  $Re$  è il ben noto numero di Reynolds.

La rugosità  $e$ , espressa in  $m$ , viene ovviamente adimensionalizzata utilizzando il solo diametro  $D$ :

$$\pi_3 = \frac{e}{D}. \quad (1.242)$$

La perdita di pressione in un condotto circolare può essere quindi valutata usando la seguente relazione, che lega solo 3 parametri adimensionali invece dei 6 iniziali (dimensionali):

$$f = h \left( Re, \frac{e}{D} \right). \quad (1.243)$$

La funzione  $h$  nella (1.243) va ovviamente rilevata sperimentalmente ed è rappresentata, come noto, dal diagramma di Moody.

## 1.5 Esercizi

1. Un ugello adiabatico riceve aria a temperatura  $T_1 = 350\text{ K}$  e velocità  $c_1 = 160\text{ m/s}$ . La temperatura dell'aria in uscita è  $T_2 = 290\text{ K}$ . Determinare la velocità in uscita,  $c_2$ .

$$c_2=382.3\text{ m/s}$$

2. Un ventilatore accelera aria prelevata dall'ambiente ( $p_1 = 1\text{ bar}$ ,  $T_1 = 288\text{ K}$ ) ad una velocità  $c_2 = 35\text{ m/s}$  e la comprime fino ad una pressione  $p_2 = 1.15\text{ bar}$ . Conoscendo  $\eta_v = 0.8$  e trascurando la variazione di densità dell'aria, calcolare  $L_i$ .

$$L_i=16.26\text{ kJ/kg}$$

3. Un recipiente a pareti rigide ed isolato termicamente dall'esterno è diviso da un setto in due volumi  $V_1 = 0.03\text{ m}^3$  e  $V_2 = 0.04\text{ m}^3$ . Entrambi i volumi contengono aria in condizioni rispettivamente  $p_1 = 1\text{ bar}$ ,  $T_1 = -10^\circ\text{C}$  e  $p_2 = 3.2\text{ bar}$ ,  $T_2 = 30^\circ\text{C}$ . Ad un certo istante la membrana si rompe ed i due gas si miscelano fino a raggiungere nuovamente una condizione di quiete e quindi di equilibrio termodinamico. Calcolare la pressione e la temperatura finali dell'aria,  $p_f$  e  $T_f$ , nonché l'aumento di entropia della stessa,  $\Delta \bar{S}$ .

$$T_f=294.6\text{ K} \quad p_f=2.257\text{ bar} \quad \Delta \bar{S}=5.764\text{ J/K}$$

4. Un impianto a vapore ha le seguenti caratteristiche:  $P_u = 400\text{ MW}$ ,  $\eta_g = 0.39$ . Conoscendo il potere calorifico del combustibile bruciato,  $H_i = 9000\text{ kcal/kg}$ , e l'aumento di temperatura dell'acqua refrigerante,  $\Delta T = 6^\circ\text{C}$ , determinare i consumi orari di combustibile e di acqua refrigerante,  $G_b$  e  $Q_{H_2O}$  (si assumano  $\eta_o = 0.98$  ed  $\eta_b = 0.93$ ).

$$G_b=98.01\text{ t/h} \quad Q_{H_2O}=21.73\text{ m}^3/\text{s}$$

5. Un impianto a vapore consuma  $20\text{ t/h}$  di combustibile ( $H_i = 9000\text{ kcal/kg}$ ); per la condensazione occorrono  $16000\text{ m}^3/\text{h}$  di acqua, che subisce un riscaldamento di  $6^\circ\text{C}$ . Calcolare la potenza utile,  $P_u$ , ed i rendimenti utile e globale,  $\eta_u$  e  $\eta_g$  (si assumano  $\eta_o = 0.98$  ed  $\eta_b = 0.93$ ).

$$P_u=81.36\text{ MW} \quad \eta_u=0.4180 \quad \eta_g=0.3887$$

6. Un impianto a vapore ha rendimento globale  $\eta_g = 0.38$ ; il consumo ed il salto di temperatura dell'acqua refrigerante valgono rispettivamente  $Q_{H_2O} = 3.5\text{ m}^3/\text{s}$  e  $\Delta t_{H_2O} = 5^\circ\text{C}$ , mentre il potere calorifico del combustibile bruciato è pari ad  $H_i = 8500\text{ kcal/kg}$ . Calcolare il consumo orario di combustibile,  $G_b$ , e la potenza utile dell'impianto,  $P_u$  (si assumano  $\eta_o = 0.98$  ed  $\eta_b = 0.93$ ).

$$G_b=13.67\text{ t/h} \quad P_u=51.34\text{ MW}$$

7. In un cilindro dotato di stantuffo, si comprime aria dalle condizioni  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 288 \text{ K}$  ad una pressione  $p_2 = 3.5 \text{ bar}$ . Calcolare il lavoro di compressione,  $L$ , ed il rapporto tra il volume finale ed iniziale dell'aria,  $V_2/V_1$ , per i seguenti casi:

- a) compressione isoentropica;
- b) compressione isoterma;
- c) compressione con  $Q = -L/2$ .

Calcolare inoltre  $Q$  nei primi due casi.

$$\text{a)} \quad L=88.96 \text{ kJ/kg} \quad Q=0 \quad V_2/V_1=0.4087$$

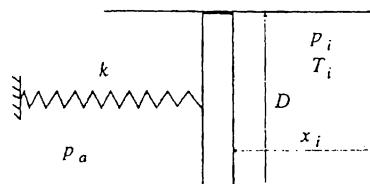
$$\text{b)} \quad L=103.58 \text{ kJ/kg} \quad Q=-L \quad V_2/V_1=0.2857$$

$$\text{c)} \quad L=95.99 \text{ kJ/kg} \quad V_2/V_1=0.3521$$

- \* 8. Un cilindro dotato di stantuffo ha cilindrata  $V = 1 \text{ l}$  e volume di spazio morto  $V' = 0.1 \text{ l}$ . Il pistone si sposta dal PMS al PMI aspirando aria dall'ambiente esterno ( $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ). Durante tale spostamento, la pressione all'interno del cilindro varia secondo la legge  $p = p_a - 0.5 p_a (1 - x/c) x/c$ , essendo  $c$  la corsa del pistone e quindi  $0 \leq x \leq c$ . Sapendo che le condizioni iniziali dell'aria presente nello spazio morto valgono  $p' = p_a$ ,  $T' = 300 \text{ K}$ , e trascurando gli scambi termici attraverso le pareti, calcolare la massa di aria  $M$  entrata nel cilindro alla fine dello spostamento del pistone e la sua temperatura finale,  $T$ .

$$M=1.181 \text{ g} \quad T=295.5 \text{ K}$$

- \* 9. Il pistone in figura, di diametro  $D = 140 \text{ mm}$ , è contrastato da una molla di costante elastica  $k = 22000 \text{ N/m}$ . Nel volume compreso tra il pistone ed il cilindro è contenuta aria inizialmente a pressione  $p_i = 2.1 \text{ bar}$  e temperatura  $T_i = 350 \text{ K}$ , mentre all'esterno regna una pressione  $p_a = 1.013 \text{ bar}$ ; l'altezza iniziale del volume, inoltre, è  $x_i = 510 \text{ mm}$ . All'aria contenuta nel cilindro viene fornita dall'esterno una quantità di calore  $\bar{Q}$  tale da far spostare il pistone di  $100 \text{ mm}$  verso sinistra. Calcolare la pressione e la temperatura finali dell'aria,  $p_f$  e  $T_f$ , il calore  $\bar{Q}$  ed il lavoro  $\bar{L}$  fatto dalla molla sul gas.



$$p_f=3.529 \text{ bar} \quad T_f=703.5 \text{ K} \quad \bar{Q}=4.590 \text{ kJ} \quad \bar{L}=-277.3 \text{ J}$$

10. Un compressore aspira aria dall'ambiente ( $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 288 \text{ K}$ ) e la comprime sino a  $p_2 = 2.2 \text{ bar}$ , con variazione di energia cinetica tra ingresso ed uscita trascurabile. Disegnare qualitativamente l'andamento dell'evoluzione termodinamica in un diagramma ( $T, S$ ) nei seguenti casi, e calcolare il lavoro interno,  $L_i$ , ed il rendimento idraulico,  $\eta_y$ :

a)  $Q_e = 0$ ,  $L_w = 0$ ;

$$L_i = 73.12 \text{ kJ/kg} \quad \eta_y = 1$$

b) trasformazione politropica con  $Q_e = 0$ ,  $L_w = 3 \text{ kcal/kg}$ ;

$$L_i = 87.14 \text{ kJ/kg} \quad \eta_y = 0.8559$$

c) trasformazione politropica con  $Q_e = -3 \text{ kcal/kg}$ ,  $L_w = 0$ ;

$$L_i = 71.64 \text{ kJ/kg} \quad \eta_y = 1$$

d) trasformazione politropica con  $Q_e = -2 \text{ kcal/kg}$ ,  $L_w = 7 \text{ kcal/kg}$ ;

$$L_i = 104.84 \text{ kJ/kg} \quad \eta_y = 0.7205$$

e) trasformazione politropica con  $T_2 = 360 \text{ K}$ ,  $Q_e = -3 \text{ kcal/kg}$ ;

$$L_i = 84.91 \text{ kJ/kg} \quad \eta_y = 0.8602$$

f) trasformazione isoterma con  $L_w = 0$ ;

$$L_i = 65.19 \text{ kJ/kg} \quad \eta_y = 1$$

g) trasformazione isoterma con  $L_w = 6 \text{ kcal/kg}$ ;

$$L_i = 90.31 \text{ kJ/kg} \quad \eta_y = 0.7219$$

11. Aria in moto permanente espande da  $p_1 = 10 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 500 \text{ K}$ , a  $p_2 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_2 = 250 \text{ K}$ . E' noto il rendimento idraulico dell'espansione,  $\eta_y = 0.7$ . Assumendo che l'espansione sia politropica di esponente  $m$ , calcolare  $m$ ,  $(L_i)_{ott}$ ,  $L_w$  e  $Q_e$ .

$$m = 1.4307 \quad (L_i)_{ott} = 166.90 \text{ kJ/kg}$$

$$L_w = 71.53 \text{ kJ/kg} \quad Q_e = -84.31 \text{ kJ/kg}$$

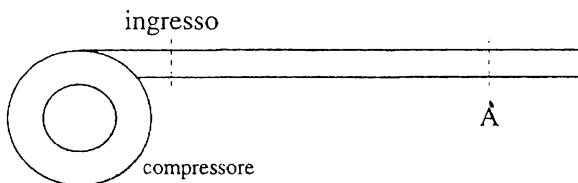
12. Un turbocompressore aspira una portata d'aria  $G = 16 \text{ kg/s}$  a  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 288 \text{ K}$ , e la comprime sino a  $p_2 = 7 \text{ bar}$ , con rendimento isoentropico  $\eta_{ad,c} = 0.85$ . L'aria viene poi riscaldata isobaricamente fino a  $T_3 = 1300 \text{ K}$ , per poi attraversare una turbina, laddove si espande fino a  $p_4 = p_1$ , con rendimento isoentropico  $\eta_{ad,t} = 0.88$ . L'aria viene poi raffreddata isobaricamente fino al punto 1. Calcolare  $T_2$  e  $T_4$  e rappresentare il ciclo in un diagramma ( $T, S$ ). Determinare, inoltre, il rendimento del ciclo,  $\eta_c$ , e la potenza utile dell'impianto,  $P_u$  ( $\eta_o = 0.96$ ).

$$T_2 = 540.0 \text{ K} \quad T_4 = 812.1 \text{ K} \quad \eta_c = 0.3104 \quad P_u = 3.642 \text{ MW}$$

13. Un turbocompressore comprime aria da  $p_1 = 3 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 320 \text{ K}$  sino a  $p_2 = 7.5 \text{ bar}$ , con un rendimento idraulico  $\eta_{y,c} = 0.82$ . Successivamente l'aria si espande sino a  $p_3 = p_1$  in una turbina con rendimento idraulico  $\eta_{y,t} = 0.85$ . Calcolare il rendimento isoentropico del turbocompressore,  $\eta_{ad,c}$ , e la temperatura di fine espansione in turbina,  $T_3$ . Determinare, inoltre, il controrecupero nel turbocompressore,  $CR$ , ed il recupero nella turbina,  $R$ .

$$\eta_{ad,c}=0.7957 \quad T_3=352.5 \text{ K} \quad CR=2.943 \text{ kJ/kg} \quad R=1.939 \text{ kJ/kg}$$

14. Un turbocompressore invia una portata di aria  $G = 2.05 \text{ kg/s}$  in un condotto adiabatico a sezione costante. Il compressore preleva aria dall'ambiente ( $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ) e la invia alla sezione di ingresso del condotto ad una pressione  $p = 3.1 \text{ bar}$  e ad una velocità  $c = 150 \text{ m/s}$ . Sapendo che l'aumento di entropia dell'aria nel compressore è  $\Delta S_{tc} = 40 \text{ J/(kg K)}$ , calcolare l'esponente  $m$  della politropica di compressione e la potenza assorbita ( $\eta_m = 0.97$ ). Conoscendo, inoltre, il numero di Mach nella sezione  $A$ ,  $M_A = 0.5$ , determinare la caduta di pressione totale tra l'ingresso del condotto e la sezione  $A$ ,  $\Delta p^0$ , ed il corrispondente aumento di entropia,  $\Delta S$ .



$$m=1.4725 \quad P_a=291.5 \text{ kW} \quad \Delta p^0=0.7290 \text{ bar} \quad \Delta S=69.21 \text{ J/(kg K)}$$

- \*15. Un turbocompressore comprime aria in due stadi con le seguenti modalità: temperatura, pressione e velocità in aspirazione rispettivamente uguali a  $T_1 = 288 \text{ K}$ ,  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $c_1 = 0$ ; nel primo stadio il fluido è compresso, secondo una trasformazione politropica con rendimento idraulico  $\eta_{y1} = 0.83$ , sino ad una pressione intermedia  $p_2$ , con velocità  $c_2 = 205 \text{ m/s}$ ; il fluido attraversa poi un refrigeratore privo di perdite ( $p_3 = p_2$ ), da cui esce con una temperatura  $T_3 = 320 \text{ K}$  ed una velocità  $c_3 = c_2$ ; nel secondo stadio l'aria è compressa con  $\eta_{y2} = 0.8$  sino alla pressione  $p_4 = 3.2 \text{ bar}$ , con  $S_4 = S_1$  e velocità finale  $c_4$  trascurabile. Si calcolino gli esponenti delle due trasformazioni politropiche di compressione,  $m_1$  ed  $m_2$ , la temperatura all'uscita del primo stadio,  $T_2$ , e il calore scambiato nel refrigeratore,  $Q_e$ .

$$m_1=1.5926 \quad m_2=1.5051 \quad T_2=345.2 \text{ K} \quad Q_e=25.32 \text{ kJ/kg}$$

# Capitolo 2

## TURBOMACCHINE CENTRIFUGHE

### 2.1 MACCHINE OPERATRICI IDRAULICHE

Una macchina operatrice idraulica impiega l'energia meccanica fornita da un motore di comando per aumentare il carico totale del liquido ovvero la sua pressione (non ha interesse pratico aumentarne l'energia cinetica). Le macchine operatrici di più largo impiego possono essere classificate a seconda:

- del loro impiego: pompe di sollevamento, pompe di circolazione, pompe di alimentazione, pompe per trasmissioni idrauliche, pompe per l'azionamento di cinematicismi, ecc.;
- della pressione raggiungibile: pompe a bassa, a media e ad alta pressione;
- del loro principio di funzionamento: turbopompe, pompe a stantuffo, pompe a palette, pompe a vite, pompe ad ingranaggi, ecc..
- della loro forma costruttiva: pompe a semplice effetto o a doppio effetto, turbopompe assiali o centrifughe, ecc.;

Da un punto di vista didattico, tuttavia, è preferibile suddividere le pompe, come tutte le macchine a fluido, in due grandi categorie:

- turbopompe (centrifughe, assiali);
- pompe volumetriche (alternative, roto-alternative, rotative).

Nel primo caso, il liquido attraversa, a velocità elevata, i vani palari di una girante, dove subisce un incremento del momento della quantità di moto. Il lavoro viene quindi esercitato dalla girante mediante azioni dinamiche e determina un aumento sia della pressione che dell'energia cinetica; quest'ultima viene poi convertita in energia di pressione in un diffusore posto a valle della girante. Le turbopompe vengono poi distinte in centrifughe o assiali, a seconda dello sviluppo assunto dalla girante. Le pompe centrifughe sono impiegate per le più svariate applicazioni: semplici impianti idrici per

l'approvvigionamento dell'acqua, impianti industriali, ecc.; le pompe assiali, invece, sono essenzialmente utilizzate laddove si richiede elaborare portate piuttosto elevate.

Nelle pompe volumetriche, invece, l'energia viene scambiata fra le parti meccaniche ed il liquido mediante azioni quasi statiche. Esse si prestano egregiamente nel caso si richiedano pressioni di mandata notevoli, ma possono elaborare portate normalmente inferiori rispetto ad una turbopompa di pari ingombro. Le pompe volumetriche si distinguono poi in alternative, rotative e roto-alternative, a seconda del tipo di movimento realizzato dagli organi meccanici. Le pompe volumetriche vengono utilizzate essenzialmente nei casi in cui si richiede una prevalenza molto elevata con una portata da elaborare piuttosto piccola. Una particolare applicazione di questo tipo è costituita dalle trasmissioni idrostatiche, in cui viene utilizzata una pompa rotativa o roto-alternativa per trasformare energia meccanica in energia di pressione di un liquido (solitamente olio), che viene poi convogliato, attraverso un condotto ad alta pressione, verso un motore o attuatore idraulico, che trasforma nuovamente l'energia di pressione in energia meccanica. Le pompe volumetriche e le trasmissioni idrostatiche saranno analizzate rispettivamente nei capitoli 3 e 4.

Una definizione più precisa del campo di applicazione di ciascun tipo di macchina può essere individuata sulla base del cosiddetto *numero di giri caratteristico*, v. paragrafo 2.2.13.

### 2.1.1 Richiami di fluidodinamica

Si consideri una pompa che convoglia, in regime permanente, il fluido contenuto nel serbatoio A (in cui regna la pressione  $p_A$ ) fino al serbatoio B (in cui regna la pressione  $p_B$ ), posto in posizione sopraelevata rispetto ad A (v. fig. 2.1). Si definisce **prevalenza (totale)**,  $H_u$ , la variazione di carico totale fra le sezioni 1 e 2, rispettivamente immediatamente a monte (ingresso) ed a valle (uscita) della pompa:

$$\boxed{H_u = (H_2^0 - H_1^0) = (z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = \frac{L_i - L_w}{\gamma}} \quad (2.1)$$

Applicando il IPTD in forma euleriana e meccanica, equazione (1.74), si ricava:

$$gH_u = L_i - L_w. \quad (2.2)$$

Poiché le dimensioni di una pompa sono in genere abbastanza ridotte rispetto alla prevalenza che fornisce, si può trascurare la variazione di quota fra le sezioni 1 e 2 ed inoltre, se i condotti di aspirazione e di mandata hanno la stessa sezione, come comunemente avviene, l'energia cinetica all'ingresso è uguale, per continuità, a quella in uscita. La prevalenza è quindi data da:

$$\boxed{H_u \approx \frac{p_2 - p_1}{\gamma}}, \quad (2.3)$$

ovvero è praticamente coincidente con la **prevalenza manometrica**  $(p_2 - p_1)/\gamma$ .

La variazione di carico totale tra A e B prende il nome di **prevalenza globale**:

$$\boxed{H_t = H_B^0 - H_A^0 = z_B \cdot z_A + \frac{p_B - p_A}{\gamma} + \frac{c_B^2 - c_A^2}{2g}} \quad (2.4)$$

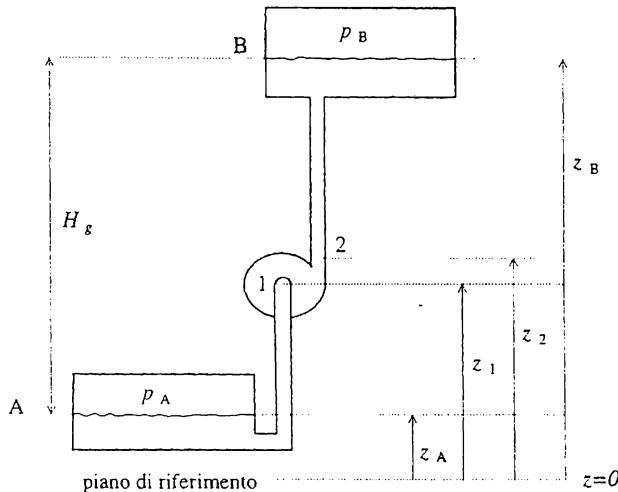


Figura 2.1: schema di un impianto di sollevamento.

Se i serbatoi A e B sono a pressione atmosferica ed in essi è trascurabile l'energia cinetica, la prevalenza globale coincide con il dislivello geodetico,  $H_g = z_B - z_A$ , pari al dislivello esistente fra i pelli liberi dei liquidi contenuti nei due serbatoi. A causa delle perdite nei condotti, la prevalenza globale è inferiore alla prevalenza totale; se si applica la (1.74) fra la sezione 2 ed il serbatoio B, si ottiene, infatti:

$$-L_{w2B} = g(H_B^0 - H_2^0), \quad (2.5)$$

essendo  $L_{w2B} = gh_{w2B}$  il lavoro delle resistenze passive nel condotto di mandata e  $L_i = 0$  poiché non ci sono organi mobili. La (2.5) assume quindi la forma:

$$H_2^0 = H_B^0 + h_{w2B}. \quad (2.6)$$

Con procedimento analogo, si ricava, per il condotto di aspirazione, la seguente relazione:

$$H_1^0 = H_A^0 - h_{wA1}. \quad (2.7)$$

Sottraendo la (2.7) dalla (2.6), si conclude che la prevalenza che la pompa deve fornire al liquido è pari alla prevalenza globale richiesta, aumentata del termine  $h_{wc} = h_{wA1} + h_{w2B}$  dovuto alle perdite nei condotti di aspirazione e di mandata:

$$\boxed{H_u = H_2^0 - H_1^0 = H_B^0 - H_A^0 + h_{wc} = H_t + h_{wc}.} \quad (2.8)$$

Tali perdite, esterne alla macchina, possono essere conteggiate utilizzando il **rendimento della condotta**, definito come:

$$\boxed{\eta_c = \frac{H_t}{H_u} = \frac{H_u - h_{wc}}{H_u} = \frac{H_t}{H_t + h_{wc}}} \quad (2.9)$$

Il rendimento idraulico  $\eta_y$ , già definito nel capitolo 1, è il rendimento fluidodinamico della pompa: se le pale forniscono al fluido un lavoro  $L_i$ , solo l'aliquota  $(L_i - L_w)$  fornisce l'aumento del carico totale, poiché la restante parte,  $L_w$ , è dissipata per attrito. Utilizzando la (2.2),  $\eta_y$  assume la seguente espressione:

$$\boxed{\eta_y = \frac{L_i - L_w}{L_i} = \frac{g H_u}{L_i}} \quad (2.10)$$

A causa della differenza di pressione tra il condotto di mandata e quello di aspirazione, piccole quantità di liquido tendono a rifluire verso l'aspirazione (quindi dopo aver ricevuto lavoro) attraverso i giochi inevitabilmente presenti fra parte fissa e parte mobile della macchina. Indicando con  $G$  la portata misurata nel condotto di aspirazione (uguale a quella misurata nel condotto di mandata), che sarà definita **portata mandata**, e con  $\Delta G$  la portata che rifluisce attraverso la macchina, si definisce **rendimento volumetrico**  $\eta_v$  il rapporto tra  $G$  e la portata  $G + \Delta G$  cui viene fornito lavoro:

$$\boxed{\eta_v = \frac{G}{G + \Delta G} \leq 1.} \quad (2.11)$$

Convenzionalmente, si può ritenere che una pompa operi sull'intera portata aspirata,  $G +$

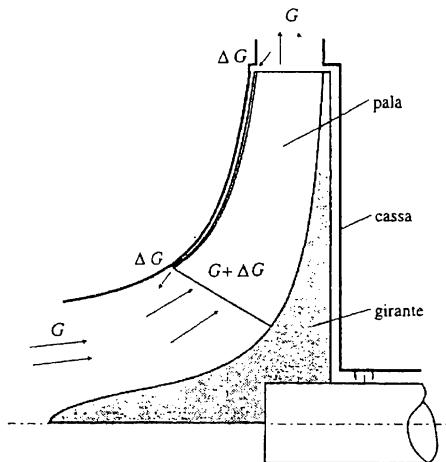


Figura 2.2: fughe attraverso i giochi tra parte mobile e parte fissa

$\Delta G$ , e che le fughe siano essenzialmente localizzate all'uscita della girante (v. fig. 2.2, riferita ad una pompa centrifuga a girante chiusa), per cui la portata  $\Delta G$  rifluisce dopo aver ricevuto lavoro. Conseguentemente, la potenza interna vale:

$$P_i = (G + \Delta G)L_i = \frac{GL_i}{\eta_v} = GL'_i. \quad (2.12)$$

Il lavoro ad unità di massa mandata,  $L'_i = L_i/\eta_v$ , è indice del costo energetico dell'unità di massa mandata, ed è quindi particolarmente utile per caratterizzare il buon funzionamento di una macchina. Utilizzando la (2.10) e la (2.11), si ricava anche:

$$P_i = \frac{gH_u}{\eta_y}(G + \Delta G) = \frac{gGH_u}{\eta_y\eta_v}, \quad (2.13)$$

o, in funzione della portata volumetrica  $Q$ , spesso usata nella pratica:

$$P_i = \frac{\gamma Q H_u}{\eta_y \eta_v} \quad (2.14)$$

$P_i$  è la potenza trasmessa al liquido dagli organi mobili della pompa. Il motore di comando deve però fornire una potenza superiore a causa degli attriti meccanici nella pompa stessa; in base alla definizione di rendimento meccanico, la potenza assorbita dalla pompa è pari a:

$$P_a = \frac{\gamma Q H_u}{\eta_y \eta_v \eta_m} \quad (2.15)$$

Si definisce quindi rendimento (totale) della pompa e si indica con  $\eta_P$ , il prodotto dei tre rendimenti che caratterizzano il funzionamento della stessa:

$$\eta_P = \frac{\gamma Q H_u}{P_a} = \eta_y \eta_v \eta_m. \quad (2.16)$$

La potenza assorbita può essere infine espressa in funzione della prevalenza globale,  $H_t$ ; per la (2.9), si ha:

$$P_a = \frac{\gamma Q H_t}{\eta_P \eta_c} = \frac{\gamma Q H_t}{\eta_g}, \quad (2.17)$$

in cui  $\eta_g = \eta_P \eta_c$  rappresenta il rendimento globale dell'impianto di sollevamento:

$$\eta_g = \frac{\gamma Q H_t}{P_a} = \eta_y \eta_v \eta_m \eta_c. \quad (2.18)$$

Per individuare le caratteristiche di funzionamento di una pompa, è necessario valutare il lavoro  $L_i$  e la portata mandata  $G$  (o  $Q$ ) in funzione dei parametri geometrici e di funzionamento della macchina. Per una turbopompa, nell'ipotesi usuale di flusso permanente, si può calcolare  $G/\eta_v$  come flusso di massa attraverso una qualunque sezione (solitamente quella di uscita girante) della macchina; inoltre, poiché lo scambio di lavoro avviene tramite azioni dinamiche,  $L_i$  può essere calcolato per mezzo dell'equazione di Eulero, (1.63) o (1.218).

## 2.2 POMPE CENTRIFUGHE

### 2.2.1 Componenti della macchina

Le pompe centrifughe sono le macchine operatrici idrauliche maggiormente diffuse e di più vario impiego. Esse sono caratterizzate da portate abbastanza elevate, buoni valori di

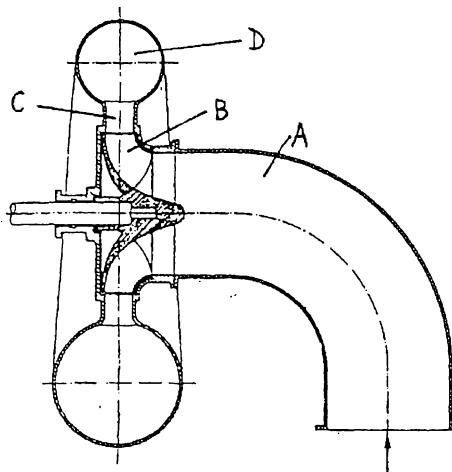


Figura 2.3: sezione longitudinale di una pompa centrifuga; A) condotto di aspirazione; B) girante; C) diffusore D) voluta.

prevalenza, ed elevato numero di giri di funzionamento, che ne permette l'accoppiamento diretto con motori elettrici.

Con riferimento alla fig. 2.3, individuiamo i componenti principali di una pompa centrifuga e descriviamone qualitativamente i principi di funzionamento: la girante è l'organo mobile della pompa ed è costituita da un disco, cui sono solidali le pale. I canali rotorici possono essere delimitati dalla cassa (girante aperta) o essere ricavati nella girante stessa (girante chiusa, v. fig. 2.2). La girante, calettata su un albero con un regime di rotazione solitamente elevato (ad esempio, se la pompa è accoppiata direttamente ad un motore elettrico asincrono, si ha tipicamente  $n = 2850 \div 2900 \text{ RPM}$  o sottomultipli), aspira il liquido attraverso il condotto A e lo spinge verso il raggio esterno, trasformando l'energia meccanica fornita dal motore in energia di pressione e cinetica del fluido.

Il fluido in uscita dalla girante attraversa poi il diffusore, che ha il compito di recuperare, almeno in parte, l'elevata energia cinetica in uscita dalla girante. Il diffusore è costituito da una coppia di dischi fissi solitamente paralleli, tra i quali può essere inserita (diffusore palettato) o meno (diffusore non palettato) una corona di palette. A pari dimensioni, il diffusore palettato consente una maggior riduzione della componente di velocità periferica e quindi un maggiore aumento di pressione (diffusione).

Una carcassa, detta comunemente voluta, circonda il diffusore e convoglia il liquido verso la tubazione di mandata. La voluta è a sezione gradualmente crescente nel senso di rotazione, in modo da poter accogliere il liquido e realizzare, eventualmente, un'ulteriore diffusione. Nelle realizzazioni più economiche il diffusore è assente ed il recupero dell'energia cinetica viene quindi realizzato nella sola voluta.

### 2.2.2 Importanza del campo di forze centrifughe

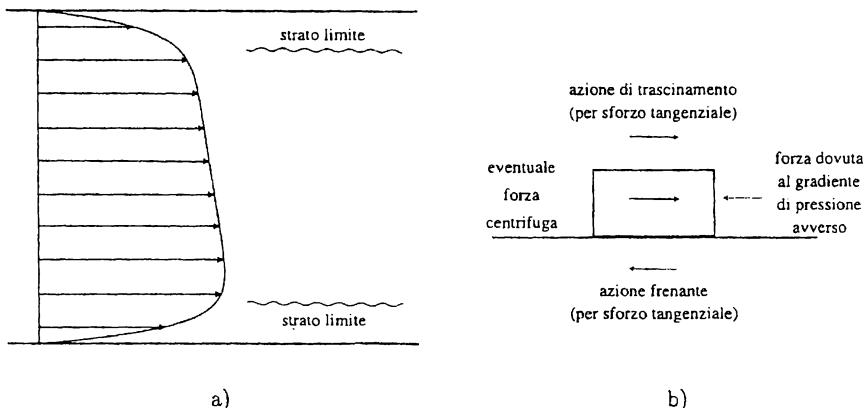


Figura 2.4: a) profilo di velocità in un vano palare; b) forze agenti su un elementino fluido dello strato limite.

Nella girante e nella parte fissa (diffusore e voluta) la trasformazione di energia meccanica e/o di energia cinetica in energia di pressione avviene, ovviamente, in presenza di resistenze passive, proporzionali, per flusso completamente turbolento, al quadrato della velocità rispettivamente relativa o assoluta. L'entità delle perdite è però diversa nei due casi, a causa della presenza o meno del campo di forze centrifughe: per evidenziare tale differenza, applichiamo il I PTD in forma meccanica sia alla girante, rispetto ad un sistema di riferimento solidale con essa (sezione di ingresso 1, sezione di uscita 2),

$$-L_{w,g} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) - \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right), \quad (2.19)$$

che al diffusore (sezione di ingresso 2, sezione di uscita 3),

$$-L_{w,d} = \frac{p_3 - p_2}{\rho} + \left( \frac{c_3^2 - c_2^2}{2} \right). \quad (2.20)$$

Si è ovviamente trascurato, in entrambi i casi, il termine  $\Delta z$ . Confrontiamo le due equazioni supponendo che le velocità in gioco (relative nel primo caso e assolute nel secondo) siano uguali, ovvero che sia  $w_1 = c_2$  e  $w_2 = c_3$ : si avrà, quindi,  $L_{w,g} \approx L_{w,d}$ ; essendo, poi,  $u_2^2 - u_1^2 > 0$  (pompa centrifuga), si ottiene  $\Delta p_g > \Delta p_d$ . Il campo di forze centrifughe permette quindi di ottenere, a pari velocità in gioco, e quindi a pari  $L_w$ , un maggiore aumento di pressione. Generalizzando, si deduce che il lavoro delle resistenze passive risulta percentualmente minore nella girante rispetto al diffusore,

$$\left( \frac{L_w}{\Delta p} \right)_g < \left( \frac{L_w}{\Delta p} \right)_d. \quad (2.21)$$

In realtà il vantaggio è ancora superiore: infatti, il fluido che attraversa i condotti rotorici o statorici presenta un profilo di velocità caratterizzato da basse velocità in prossimità delle pareti (**strato limite**), v. fig. 2.4a, in cui è rappresentato qualitativamente tale andamento (lo spessore dello strato limite è stato accentuato per maggiore chiarezza grafica). Se il fluido viaggia in un condotto fisso (per es. diffusore), il gradiente di pressione sfavorevole può vincere facilmente l'azione di trascinamento da parte dei filetti fluidi vicini, più veloci, e, grazie alla ridotta quantità di moto posseduta dal fluido all'interno dello strato limite, invertirne il moto e provocarne il distacco dalla parete, con conseguente formazione di vortici ed elevate perdite fluidodinamiche. Nel caso di un condotto mobile a sviluppo radiale (girante), invece, all'azione di trascinamento dei filetti fluidi più veloci si somma l'azione del campo di forze centrifughe, che, bilanciando in gran parte il gradiente di pressione avverso anche all'interno dello strato limite, ne evita il distacco, stabilizzando quindi la corrente fluida. Anche in assenza di distacco, a parità di altre condizioni, la forza centrifuga tende a ritardare la trasformazione dello strato limite da laminare a turbolento, con una conseguente riduzione delle perdite fluidodinamiche.

Per quanto evidenziato, le perdite per attrito fluidodinamico sono percentualmente ben maggiori nei condotti fissi, per cui il rendimento del diffusore è sempre inferiore a quello della girante. Al fine di realizzare una macchina con rendimento elevato, risulta quindi opportuno realizzare un aumento di pressione maggiore nella girante rispetto al diffusore, ovvero limitare l'energia cinetica in uscita dalla girante.

### 2.2.3 Girante

In questo e nei successivi paragrafi, si analizzerà in dettaglio il funzionamento della macchina, nell'ipotesi di flusso permanente ed unidimensionale. Quest'ultima assunzione richiede che la girante sia costituita da un numero infinito di pale di spessore infinitesimo. I risultati di tale teoria andranno poi corretti per tenere conto almeno di un particolare fenomeno, detto *scorrimento*, che si verifica nel caso reale di una girante con un numero finito (e non molto alto) di pale, v. paragrafo 2.2.4.

In fig. 2.5a è riproposta la sezione longitudinale, o meridiana, della girante di una pompa centrifuga, già rappresentata in fig. 1.20a: si nota, in particolare, lo sviluppo della pala, che può essere con ingresso assiale (è detta **pregirante** la parte a sviluppo assiale della pala) o misto assiale-radiale (come in figura), o addirittura esclusivamente radiale; l'uscita della girante è normalmente di tipo radiale, a meno di dover progettare pompe per elevate portate, v. paragrafo 2.2.13. Per poter diagrammare i triangoli di velocità, intersechiamo la girante con la superficie di rivoluzione media la cui traccia sul piano della figura è rappresentata in fig. 2.5a con una linea tratteggiata. Lo sviluppo su un piano della superficie interpalare così ottenuta permette di individuare i condotti rotorici, delimitati dalle pale, e quindi i corrispondenti triangoli di velocità, v. la fig. 1.20b, che si riferisce ad una girante con pale ad uscita radiale. In fig. 2.5b sono invece rappresentati i possibili profili delle palette, che si differenziano tra loro per l'inclinazione del bordo di uscita rispetto al verso di rotazione, assunto orario nella figura. Analizziamo il triangolo di velocità nella sezione di ingresso (sezione 1): essendo il condotto di aspirazione generalmente non palettato, l'acqua entra con velocità assoluta  $c_1$  puramente meridiana, cioè normale alla velocità periferica  $u_1 = \pi n D_1$  (ovvero,  $c_{u1} = 0$ ). Poiché, per definizione, la velocità assoluta del fluido è uguale alla somma della velocità relativa e di quella di trascinamento

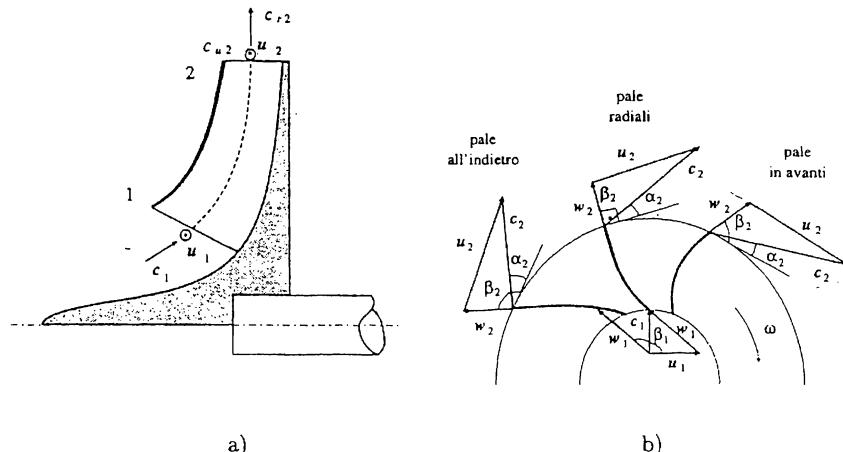


Figura 2.5: a) sezione longitudinale o meridiana e b) proiezione della superficie interpalare media (*blade to blade*) della girante di una turbomacchina centrifuga; triangoli di velocità per tre diversi profili palari.

(del sistema mobile rispetto a quello fisso), la somma vettoriale di  $c_1$  e  $-u_1$  fornisce la velocità relativa di ingresso  $w_1$ . Il vettore  $w_1$  risulta inclinato dell'angolo  $\beta_1$  rispetto ad  $u_1$ ; per ridurre al minimo la resistenza al moto della massa liquida entrante, il bordo di attacco delle pale deve essere inclinato dello stesso angolo, v. fig. 2.5b. E' da rilevare che, nel caso esista la pregrante, il triangolo di velocità nella sezione 1 giace nel piano parallelo all'asse, passante per il raggio medio. A rigore, però, essendo il rapporto  $l_1/D_1$  (altezza pala / diametro medio) abbastanza elevato, la velocità di trascinamento  $u_1$  e, conseguentemente, l'angolo  $\beta_1$ , subiscono una significativa variazione lungo il raggio, facendo quindi venire meno l'ipotesi di unidimensionalità. Tuttavia, essendo  $c_{u1} = 0$  a qualsiasi raggio (ovvero per qualsiasi linea di corrente), il triangolo di velocità in ingresso non dà comunque contributo all'espressione del lavoro. La variazione dell'angolo di ingresso  $\beta_1$  va quindi considerata solo nel disegno delle pale (pale svergolate). Proprio per evitare tali complicazioni costruttive, il palettaggio della girante assume spesso un andamento esclusivamente radiale.

La forma della paletta impone la direzione della velocità relativa  $w$  lungo tutto il canale rotorico, e, in particolare, l'angolo di uscita  $\beta_2$ , se, come verrà mostrato nel paragrafo 2.2.4, il numero di pale è sufficientemente elevato (teoricamente infinito). Componendo la velocità relativa  $w_2$  con quella di trascinamento,  $u_2 = \pi n D_2$  ( $u_2 > u_1$ ), si ricava la velocità assoluta  $c_2$ , da utilizzare nell'espressione euleriana del lavoro:  $c_2 = w_2 + u_2$

$$L_i = c_{u2} u_2 - c_{u1} u_1 = c_{u2} u_2 = u_2 (u_2 + w_2 \cot \beta_2) = u_2 (u_2 + w_r \cot \beta_2) \quad (2.22)$$

La portata volumetrica mandata è invece proporzionale alla componente radiale della velocità,  $w_r = c_{r2}$ :

$$Q = \eta_v \xi \pi D_2 l_2 w_{r2} = \eta_v \xi \pi D_2 l_2 w_2 \sin \beta_2 = \eta_v \xi \pi D_2 l_2 c_2 \sin \alpha_2. \quad (2.23)$$

Il coefficiente correttivo  $\xi$  nella (2.23) (coefficiente di ingombro) tiene conto, nel caso reale di pale con spessore non trascurabile, della riduzione della sezione utile di passaggio dovuta alla presenza delle palette (tipicamente  $\xi = 0.96 \div 0.98$ ).

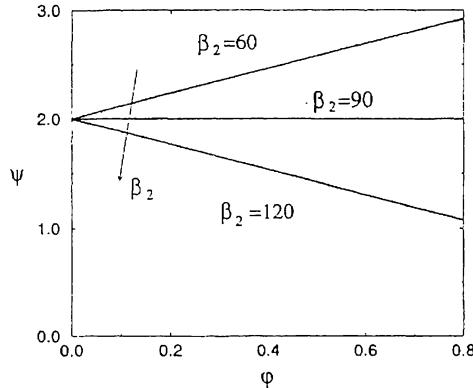


Figura 2.6: dipendenza del coefficiente di pressione dal coefficiente di portata al variare dell'angolo di uscita girante.

Per generalizzare lo studio del funzionamento della girante è opportuno introdurre due parametri adimensionali rappresentativi, rispettivamente, del lavoro  $L_i$  e della portata volumetrica  $Q$ :

- coefficiente di pressione  $\psi$ , pari al rapporto tra il lavoro ad unità di massa e l'energia cinetica di trascinamento in uscita dalla girante:

$$\psi = \frac{L_i}{u_2^2} ; \quad \frac{c_{u_2}}{\frac{x_2}{2}} = \frac{2c_{u_2}}{u_2} = \quad (2.24)$$

- coefficiente di portata  $\varphi_2$  (comunemente indicato con  $\varphi$ ), pari al rapporto tra la componente radiale di velocità (componente utile ai fini dello smaltimento della portata) e la velocità periferica, all'uscita dalla girante:

$$\left| \varphi = \frac{w_{r2}}{u_2} - \left( \frac{u_2}{u_{r2}^2} - 2 \right) \tilde{\beta}_2 \right| \quad (2.25)$$

E' importante evidenziare che due diverse condizioni di funzionamento della stessa pompa o di una pompa geometricamente simile (con stessi valori di  $\beta_2$ ,  $l_2/D_2$ , ecc.) sono caratterizzate da triangoli di velocità simili se il parametro di portata  $\varphi$  è lo stesso nei due casi.

Utilizzando tali parametri adimensionali, la (2.22) può essere espressa come:

$$\boxed{L_i = \psi \frac{u_2^2}{2}}, \quad (2.26)$$

con  $\psi$  funzione dell'angolo  $\beta_2$  e del coefficiente di portata  $\varphi$ :

$$\psi = 2 \frac{c_{u2}}{u_2} = 2(1 + \frac{w_{r2}}{u_2} \cot \beta_2) = 2(1 + \varphi \cot \beta_2). \quad (2.27)$$

Al variare di  $\beta_2$ , possiamo essenzialmente individuare tre diversi tipi di pale, v. fig. 2.5b:

- a) pale rivolte in avanti ( $\beta_2 < 90^\circ$ );
- b) pale radiali ( $\beta_2 = 90^\circ$ );
- c) pale rivolte all'indietro ( $\beta_2 > 90^\circ$ ).

Il confronto tra le tre possibili palettature va chiaramente effettuato a pari velocità di trascinamento  $u_2$  e a pari portata (ovvero a pari  $w_{r2}$  o  $\varphi$ ). A seconda del tipo di palettatura, come si rileva dalla (2.27), si ha dunque una diversa dipendenza del coefficiente di pressione dal coefficiente di portata, v. fig. 2.6. In particolare:

- a) per pale rivolte in avanti, ovvero con  $w_2$  inclinato in modo concorde al verso di rotazione ( $\beta_2 < 90^\circ$ ),  $\psi$  cresce linearmente con  $\varphi$ ;
- b) per pale radiali ( $\beta_2 = 90^\circ$ ),  $\psi$  è costante,  $\psi = 2$ ;
- c) per pale rivolte all'indietro ( $\beta_2 > 90^\circ$ ),  $\psi$  decresce linearmente con  $\varphi$ .

Per individuare come l'aumento di pressione si ripartisce tra girante e diffusore, si utilizza il grado di reazione  $\chi$ , qui definito come il complemento ad uno del rapporto tra l'energia cinetica in uscita dalla girante ed il lavoro fornito:

$$\chi = 1 - \frac{c_2^2}{2L_i}. \quad (2.28)$$

In caso di funzionamento ideale ( $L_w = 0$ , per cui si ha  $L_i = gH_u$ ), applicando il I PTD tra la sezione 0 del condotto immediatamente a monte della pompa ( $c_0 \approx 0$ ) e la sezione 2 di uscita della girante, si riscontra immediatamente che  $\chi$  esprime il rapporto tra la differenza di pressione tra uscita girante ed ingresso pompa e la prevalenza della pompa moltiplicata per il peso specifico  $\gamma$  del fluido:

$$\chi = \frac{p_2 - p_0}{\gamma H_u}. \quad (2.29)$$

Anche il grado di reazione dipende dalla geometria della macchina e dalle sue condizioni di funzionamento: essendo, infatti,

$$c_2^2 = (c_{r2}^2 + c_{u2}^2) = \left(\varphi^2 + \frac{\psi^2}{4}\right) u_2^2, \quad (2.30)$$

si ricava

$$\boxed{\chi = 1 - \frac{c_2^2}{2L_i} = 1 - \frac{c_{r2}^2 + c_{u2}^2}{2L_i} = 1 - \frac{\varphi^2 + \frac{\psi^2}{4}}{\psi}.} \quad (2.31)$$

Utilizzando poi la (2.27), si può esprimere anche il grado di reazione in funzione dei soli parametri  $\varphi$  e  $\beta_2$ :

$$\boxed{\chi = 1 - \frac{\varphi^2 + (1 + \varphi \cot \beta_2)^2}{2(1 + \varphi \cot \beta_2)} = \frac{1 - \left(\frac{\varphi}{\sin \beta_2}\right)^2}{2(1 + \varphi \cot \beta_2)}.} \quad (2.32)$$

L'andamento del grado di reazione, diagrammato in fig. 2.7 per diversi angoli di uscita

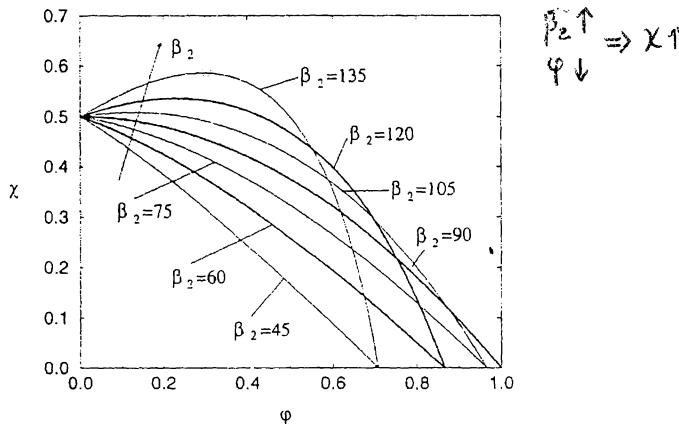


Figura 2.7: andamento del grado di reazione in un pompa centrifuga.

della girante, mostra che, per ottenere elevati valori di  $\chi$  e quindi elevati rendimenti della macchina, è necessario utilizzare una girante con pale all'indietro e bassi valori del coefficiente di portata.

Una palettatura rivolta all'indietro rispetto al verso di rotazione della girante permette, quindi:

- di accoppiare la pompa a motori veloci (elettrici o a combustione interna);
- di utilizzare un diffusore con minore ingombro, o una voluta a diffusione con sezione non fortemente variabile;
- di ottenere rendimenti maggiori;
- un maggior campo di stabilità di funzionamento della pompa, come sarà mostrato nel paragrafo 2.2.9.

Per queste ragioni quasi tutte le pompe centrifughe hanno pale rivolte all'indietro.

## 2.2.4 Scorrimento

Si consideri inizialmente il flusso in una girante priva di pale (si supponga  $c_{u1} = 0$ ): in assenza di attrito si ha  $L_i = 0$ , ovvero  $c_{u2} = 0$ , e quindi  $w_2$  rivolta all'indietro. In una girante reale, invece, le pale, fornendo lavoro al fluido, ne variano la  $c_u$ , raddrizzando di conseguenza la  $w$ . Una pompa con un numero infinito di pale riesce ovviamente a garantire al fluido un angolo  $\beta'_2$  (cinematico) uguale a quello della pala (costruttivo). Una pompa con un numero finito di pale non riesce invece a deviare il fluido perfettamente, per cui l'angolo  $\beta'_2$  cinematico risulta maggiore di quello costruttivo,  $\beta_2$ , e la differenza tra i due cresce al diminuire del numero delle pale.

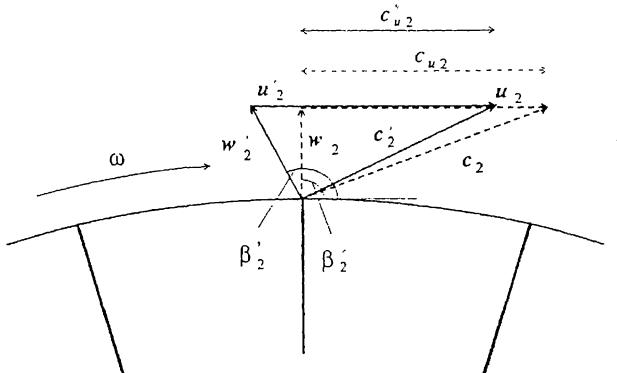


Figura 2.8: deviazione della corrente fluida in uscita dalla girante (scorrimento).

Questo fenomeno di deviazione della corrente fluida in uscita dalla girante rispetto alla direzione imposta dalle pale, viene chiamato **scorrimento**. Come si riscontra dalla deformazione del triangolo di velocità in uscita girante (v. fig. 2.8, relativa ad una girante con pale radiali), si ha, rispetto alla (2.22), una riduzione del lavoro fornito dalla macchina al fluido. Per tener conto dello scorrimento si continua ad adottare la teoria unidimensionale, con un triangolo di velocità modificato, rispetto al caso ideale (numero di pale  $z \rightarrow \infty$ ), mediante il cosiddetto **fattore di scorrimento**  $\sigma$  (*slip factor*), definito come

$$\sigma = \frac{c'_2}{c_{u2}}. \quad (2.33)$$

La riduzione della componente tangenziale comporta quindi un aumento dell'angolo cinematico di uscita girante,  $\beta'_2$ , rispetto all'angolo costruttivo  $\beta_2$ , ed una riduzione del coefficiente di pressione  $\psi$  rispetto al suo valore ideale,  $\psi_{id}$ ,

$$\boxed{\psi = 2(1 + \varphi \cotg \beta'_2) = \sigma \psi_{id} = 2\sigma(1 + \varphi \cotg \beta_2),} \quad (2.34)$$

cui corrisponde una riduzione del lavoro fornito al fluido. Come già fatto rilevare sopra, il fenomeno dello scorrimento e quindi il valore di  $\sigma$  dipendono dal numero e dalla geometria

delle pale. In testi più specialistici sono riportate diverse espressioni empiriche per il calcolo di  $\sigma$ ; in questo testo riportiamo, come esempio, solo una tra le più semplici e più usate formule, proposta da Stodola:

$$\boxed{\text{FORMULA DI STODOLA} \quad \sigma = 1 - \frac{2\pi \sin \beta_2}{z \psi_{id}} = \frac{L_1}{u_2^2 (1 + \varphi \cot \beta_2)} = \frac{3H_1 \sqrt{\gamma}}{u_2^2 (1 + \varphi \cot \beta_2)} \quad (2.35)}$$

SE NON CONOSCIMO Z

Sostituendo l'espressione di  $\sigma$  nella (2.34), si ricava la seguente espressione per il calcolo del coefficiente di pressione:

$$\psi = \psi_{id} - \frac{2\pi \sin \beta_2}{z} = 2(1 + \varphi \cot \beta_2) - \frac{2\pi \sin \beta_2}{z}. \quad (2.36)$$

In fig. 2.9, è rappresentato l'andamento di  $\psi$  in funzione di  $\varphi$ , al variare del numero

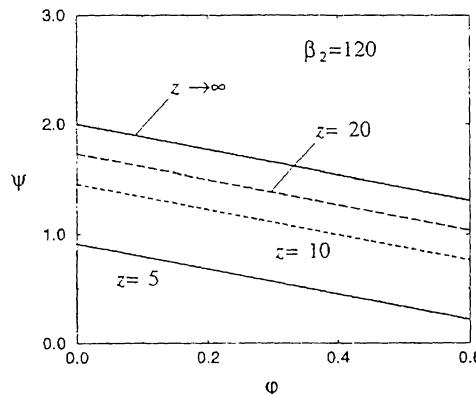


Figura 2.9: dipendenza del coefficiente di pressione dal coefficiente di portata, al variare del numero di pale, in base alla formula di Stodola.

di pale, ricavato utilizzando la (2.36) (pale all'indietro,  $\beta_2 = 120^\circ$ ): si riscontra che  $\psi$  decresce ancora linearmente, ma con valori tanto minori quanto minore è il numero di pale. Dalla (2.36) o dalla fig. 2.9 si rileva anche che utilizzare un numero di pale elevato (superiore a 10) porta solo ad un piccolo incremento di  $\psi$ , a spese di un aumento della superficie bagnata e quindi delle perdite per attrito continuo. In una pompa centrifuga si preferisce perciò limitare il numero di pale a valori anche piuttosto bassi (fino a 4 ÷ 8 nelle pompe per basse prevalenze), ed eventualmente agire sul diametro esterno  $D_2$  per aumentare la prevalenza fornita al fluido.

Nel seguito viene offerta una spiegazione più articolata del fenomeno dello scorrimento, che può essere trascurata senza problemi per lo studio dei successivi argomenti.

Si consideri, per semplicità, una girante con pale radiali ed un elementino fluido ideale (non viscoso),  $dm$ , che attraversa un vano palare con velocità relativa  $w$ , v. fig. 2.10.

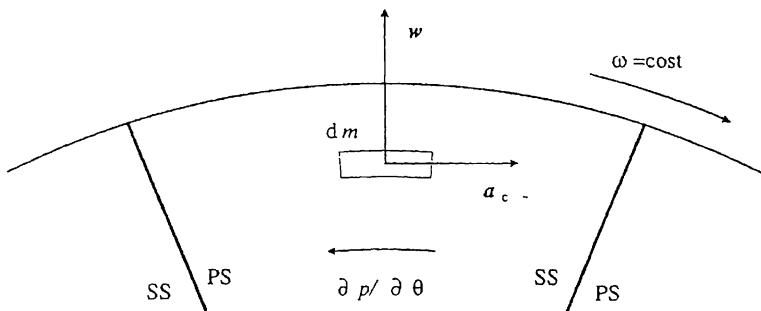


Figura 2.10: accelerazione di Coriolis per un elementino fluido in una girante a pale diritte.

L'elementino  $dm$  è soggetto, come noto, ad una forza d'inerzia opposta al prodotto di  $dm$  per la somma delle accelerazioni relativa,  $a_R$ , di trascinamento,  $a_T$ , e di Coriolis,  $a_C$ . Essendo il flusso relativo puramente radiale e la velocità angolare del rotore costante, sia  $a_R$  che  $a_T$  hanno direzione radiale. L'accelerazione di Coriolis,

$$a_C = 2\omega \times w, \quad (2.37)$$

ha invece direzione tangenziale e verso come indicato in fig. 2.10. Per equilibrare  $a_C$  è quindi necessario che sull'elementino  $dm$  agiscano altre forze. In particolare, avendo ipotizzato l'assenza di viscosità (ma anche per un flusso viscoso gli sforzi lungo  $\theta$  sarebbero comunque di lieve entità), la presenza di  $a_C$  implica l'instaurarsi di una variazione tangenziale della pressione,  $\partial p / \partial \theta$ , e quindi di una differenza di pressione sui due lati di ciascuna pala, che vengono corrispondentemente denominati **lato in pressione (pressure side, PS)** e **lato in depressione (suction side, SS)**.

L'esistenza di questa variazione tangenziale della pressione poteva anche essere dedotta rilevando che l'elementino fluido  $dm$  subisce, nel suo spostamento radiale verso l'uscita della girante, un incremento del momento della quantità di moto  $\Delta(c_v r)$ , in quanto aumentano sia  $r$  che  $c_v = u = \omega r$ . Per realizzare tale incremento, la girante deve ovviamente fornire del lavoro al fluido; ciascuna pala, dovendo quindi esercitare una forza sul fluido, è sottoposta, sui suoi due lati, a pressioni differenti (PS e SS) per cui in ciascun canale rotorico esiste una variazione di pressione  $\partial p / \partial \theta$ .

E' importante sottolineare che tanto minore è il numero di pale  $z$ , tanto maggiore sarà la forza che ciascuna pala deve esercitare sul fluido e quindi la differenza di pressione tra i due lati.

La componente  $\partial p / (R \partial \theta)$  del gradiente di pressione è dunque bilanciata, all'interno della girante, dall'accelerazione di Coriolis. Applichiamo il I PTD, in forma meccanica ed in un sistema di riferimento solidale con la girante, a ciascuna linea di corrente compresa

tra le sezioni 1 e 2; in base alla (1.76) ed avendo ipotizzato  $L_w = 0$ , si ha:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right) - \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right). \quad (2.38)$$

Poichè sia  $u_2$  che tutti i valori in ingresso sono uguali per le diverse linee di corrente, la variazione della pressione lungo  $\theta$  implica un'analogia (ma opposta) variazione della velocità relativa  $w_2$ ; in particolare, esaminando le condizioni ai due lati di ciascuna pala, essendo  $p_2^{PS} > p_2^{SS}$ , si ha anche  $w_2^{PS} < w_2^{SS}$ . Se il flusso in uscita avesse direzione coincidente con quella imposta dalla pala si avrebbero dunque due filetti fluidi adiacenti, uno (quello proveniente dal SS) a velocità maggiore e a pressione minore dell'altro (proveniente dal PS). Pertanto, il flusso in uscita tende a deviare in direzione opposta ad  $u$  (v. fig. 2.8), in modo da rallentare il filetto fluido proveniente dal SS ed accelerare quello proveniente dal PS, eliminando così tali discontinuità. Il risultato (mediato, nell'ambito della teoria unidimensionale qui impiegata) è che l'angolo cinematico,  $\beta'_2$ , risulta maggiore di quello costruttivo,  $\beta_2$ , e che tale differenza è tanto maggiore quanto maggiore è la differenza teorica di pressione ( $p_2^{PS} - p_2^{SS}$ ), ovvero quanto minore è il numero delle pale,  $z$ .

## 2.2.5 Diffusore

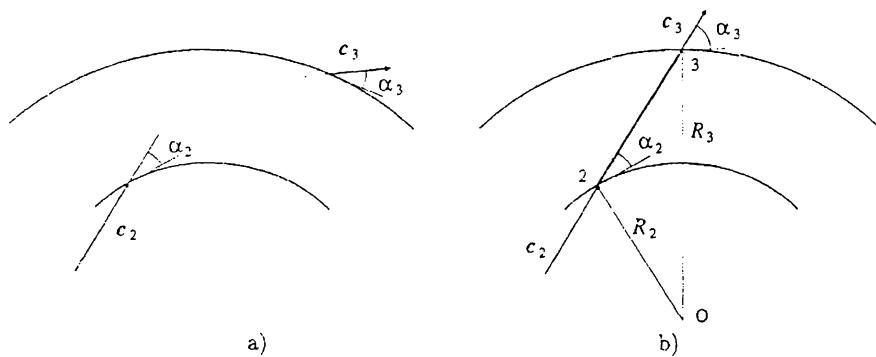


Figura 2.11: diffusore a) non palettato; b) con pale diritte.

Con riferimento alla fig. 2.11, individuiamo le sezioni 2 e 3 di ingresso e di uscita del diffusore, di diametro rispettivamente  $D_2$  e  $D_3$ , e le corrispondenti velocità  $c_2$  e  $c_3$ , inclinate rispetto alla direzione tangenziale degli angoli  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ . Scopo del diffusore è, come detto, trasformare l'energia cinetica  $c_2^2/2$  in energia di pressione. Le prestazioni del diffusore vengono comunemente valutate, trascurando le resistenze passive, tramite il recupero

percentuale di energia cinetica, definito come:

$$R = \frac{\frac{c_2^2}{2} - \frac{c_3^2}{2}}{\frac{c_2^2}{2}} = 1 - \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 \quad (2.39)$$

Analizziamo il caso di fig. 2.11a, supponendo funzionamento ideale ( $\eta_v = \xi = 1$  e  $L_{w,d} = 0$ ). Per la conservazione della portata, si ha:

$$\pi D_2 l_2 c_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = \pi D_3 l_3 c_3 \operatorname{sen} \alpha_3, \quad (2.40)$$

ed inoltre, essendo il diffusore non palettato e avendo trascurato gli attriti fluidodinamici, vale la legge di conservazione del momento della quantità di moto:

$$D_2 c_2 \operatorname{cos} \alpha_2 = D_3 c_3 \operatorname{cos} \alpha_3. \quad (2.41)$$

Le (2.40) e (2.41) descrivono quindi la diffusione delle componenti di velocità radiale e tangenziale, rispettivamente.

Il diffusore è, nella maggioranza dei casi, a facce piane e parallele ( $l_3 = l_2$ ): un aumento di altezza ( $l_3 > l_2$ ) comporterebbe, infatti, un aggravio del costo di fabbricazione con l'unico beneficio di aumentare la diffusione della sola componente radiale di velocità, e con maggior probabilità di separazione dello strato limite, a causa della divergenza delle pareti. La (2.40) può essere quindi semplificata:

$$D_2 c_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = D_3 c_3 \operatorname{sen} \alpha_3. \quad (2.42)$$

Combinando le equazioni (2.41) e (2.42) si ottiene

$$\operatorname{tan} \alpha_2 = \operatorname{tan} \alpha_3, \quad (2.43)$$

ovvero

$$\underline{\alpha_2 = \alpha_3}. \quad (2.44)$$

Sostituendo quest'ultima relazione in una delle due equazioni di conservazione, si può infine esprimere il rapporto tra le velocità in funzione dei diametri interno ed esterno del diffusore:

$$\frac{c_3}{c_2} = \frac{D_2}{D_3}. \quad (2.45)$$

Per dimezzare la velocità, ad esempio, occorre un diffusore non palettato di diametro esterno doppio rispetto a quello della girante. Il recupero percentuale di energia cinetica, infine, è pari a:

NON PALETTATO	DIFFUSORE
	$R_{np} = 1 - \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^2$

(2.46)

Il diffusore non palettato è idoneo per un funzionamento con grado di reazione elevato o nel caso in cui l'ingombro della macchina non costituisca problemi o limitazioni. Volendo realizzare un maggior recupero percentuale senza ricorrere ad un diffusore troppo ingombrante è necessario utilizzare un diffusore palettato. La (2.40) mostra, infatti, che la corrente può essere ulteriormente rallentata imponendo, per mezzo delle palette,

un angolo di uscita dal diffusore,  $\alpha_3$ , maggiore di  $\alpha_2$ . Nel caso di un diffusore palettato, la (2.41) non è ovviamente più valida; è necessario, in questo caso, conoscere la geometria delle pale del diffusore, e, in particolare, l'angolo di uscita  $\alpha_3$  (si suppone valida l'ipotesi di perfetto direzionamento del flusso). Dalla conservazione della portata (assumendo  $\eta_b \approx 1$  e che il coefficiente di ingombro delle pale della girante sia uguale a quello delle pale del diffusore) si ottiene la relazione generale

$$\frac{c_3}{c_2} = \frac{D_2 \operatorname{sen}\alpha_2}{D_3 \operatorname{sen}\alpha_3} = \left( \frac{c_3}{c_2} \right)_{np} \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}\alpha_3}. \quad (2.47)$$

La massima diffusione,

$$\frac{c_3}{c_2} = \frac{D_2 \operatorname{sen}\alpha_2}{D_3}, \quad (2.48)$$

si realizza, pertanto, utilizzando delle pale curve, con uscita perfettamente radiale ( $\operatorname{sen}\alpha_3 = 1$ ); tuttavia, il profilo delle pale che ne deriva, oltre a comportare complicazioni costruttive, può facilmente provocare la separazione dello strato limite a causa della forte curvatura e rende piuttosto problematico l'ingresso del fluido nella voluta, in quanto è nulla la componente tangenziale di velocità. Un tipo di diffusore palettato costruttivamente più semplice e pertanto spesso utilizzato è quello a pale diritte, mostrato in fig. 2.11b. L'angolo di uscita  $\alpha_3$ , evidentemente maggiore di  $\alpha_2$ , può essere valutato applicando il teorema dei seni al triangolo O23:

$$\frac{D_3}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha_2)} = \frac{D_2}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha_3)}, \quad (2.49)$$

ovvero:

$$\frac{\operatorname{cos}\alpha_3}{\operatorname{cos}\alpha_2} = \frac{D_2}{D_3}. \quad (2.50)$$

Il rapporto tra le velocità è quindi pari a:

$$\frac{c_3}{c_2} = \frac{\operatorname{tan}\alpha_2}{\operatorname{tan}\alpha_3} = \frac{D_2}{D_3} \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha_2 \left( \frac{D_2}{D_3} \right)^2}}, \quad (2.51)$$

ed il recupero percentuale pari a:

DIFFUSORE ESTERNO PALE DIRITTE	$R_{pd} = 1 - \left( \frac{D_2}{D_3} \right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2\alpha_2}{1 - \cos^2\alpha_2 \left( \frac{D_2}{D_3} \right)^2} = \frac{1 - \left( \frac{D_2}{D_3} \right)^2}{1 - \cos^2\alpha_2 \left( \frac{D_2}{D_3} \right)^2} = 1 - \frac{\left( \frac{D_2}{D_3} \right)^2}{\left( \frac{D_2}{D_3} \right)^2}$
-----------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## 2.2.6 Lavoro delle resistenze passive

In questo paragrafo verrà proposta, con riferimento ad una pompa con diffusore palettato, un'analisi qualitativa dell'andamento del lavoro delle resistenze passive al variare delle condizioni di funzionamento della macchina.

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 2.2.3, introduciamo un coefficiente adimensionale  $\zeta$ , detto coefficiente di perdita e pari al rapporto tra il lavoro ad unità di

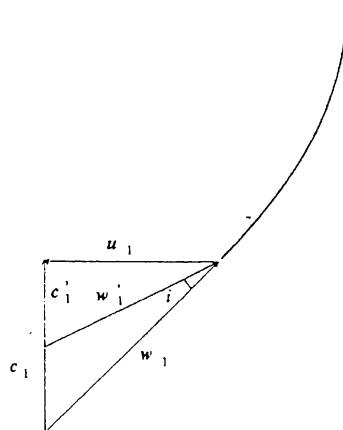


Figura 2.12: variazione del triangolo di velocità in ingresso girante al variare della portata.

massa delle resistenze passive e l'energia cinetica di trascinamento in uscita dalla girante:

$$\boxed{\zeta = \frac{L_w}{\frac{u_2^2}{2}} = 1 - \eta_y \psi} \quad (2.53)$$

Il lavoro delle resistenze passive è dovuto sia alle perdite per attrito continuo, che alle perdite per cattivo direzionamento all'ingresso dei vani palari della girante e del diffusore; pertanto, è più opportuno esprimere il parametro  $\zeta$  come la somma di due coefficienti rappresentativi di ciascuna causa di perdita:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2. \quad (2.54)$$

Nella (2.54),

$\zeta_1$  è il coefficiente di perdita per attrito continuo, che tiene conto del lavoro dissipato per attrito continuo: per valori molto alti del numero di Reynolds (regime infinitamente turbolento), tale perdita è proporzionale al quadrato della velocità relativa al componente in esame (quindi la velocità relativa nella girante e quella assoluta negli altri organi fissi): nel caso di pompa con diffusore palettato, il flusso risulta guidato in ogni componente della macchina e quindi il modulo della velocità è proporzionale alla sua componente  $w_{r2} = \varphi u_2$  utile ai fini dello smaltimento della portata; facendo quindi riferimento a parametri adimensionali, si può ritenere  $\zeta_1$  proporzionale al quadrato di  $\varphi$ ;

$\zeta_2$  è il coefficiente di perdita per cattivo direzionamento: nel caso teorico di infinite pale di spessore nullo, si verificherebbe, alla minima variazione delle condizioni

di funzionamento, un cattivo direzionamento della vena fluida rispetto alla pala (v. fig. 2.12, in cui è proposto il caso in cui, a pari velocità di rotazione, si riduca la portata elaborata), con conseguente dissipazione di parte dell'energia cinetica. Per poter far funzionare la macchina al di fuori delle condizioni di progetto, le pale hanno quindi il bordo d'attacco arrotondato: per piccoli valori (assoluti) dell'angolo di incidenza,  $|i|$ , la pala è in questo caso capace di accogliere la vena fluida senza elevate resistenze al moto. In caso  $|i|$  risulti molto elevato, invece, la deflessione a valle del bordo d'attacco diventa così forte da provocare il distacco dello strato fluido aderente a parete (distacco dello strato limite), con conseguente drastico aumento del lavoro delle resistenze passive. L'entità di tale perdita dipende dall'angolo di incidenza e quindi dalle condizioni di funzionamento: per un determinato regime di rotazione, ovvero a fissati valori di  $u_1$  e  $u_2$ ,  $i$  è infatti funzione del coefficiente di portata  $\varphi$ , come evidenziato dai triangoli di velocità in ingresso girante, relativi a due diversi valori di portata, schematizzati in fig. 2.12. Poiché per un fissato valore di  $\varphi$ , ovvero per triangoli di velocità simili, anche  $L_{w2}$  è proporzionale al quadrato di una velocità,  $\zeta_2$  dipenderà solo da  $\varphi$ .

Grazie all'arrotondamento del bordo di attacco, l'andamento di  $\zeta_2$  in funzione di  $\varphi$  è, per bassi valori (assoluti) dell'angolo di incidenza, abbastanza piatto. Per valori (assoluti) di incidenza molto elevati, il distacco dello strato limite provoca un drastico aumento del coefficiente  $\zeta_2$ .

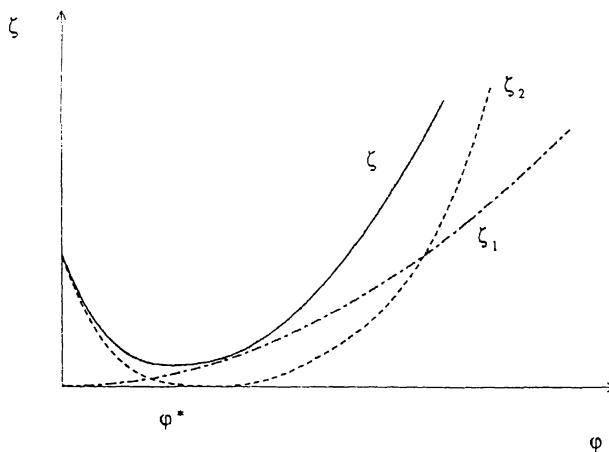


Figura 2.13: dipendenza del coefficiente di perdita dal coefficiente di portata.

Nel diagramma di fig. 2.13 sono rappresentati gli andamenti qualitativi di  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$ , nonché del coefficiente globale di perdita  $\zeta$ , somma dei due: quest'ultimo presenta anch'esso un minimo in corrispondenza di un valore  $\varphi = \varphi^*$ .

### 2.2.7 Similitudine fluidodinamica

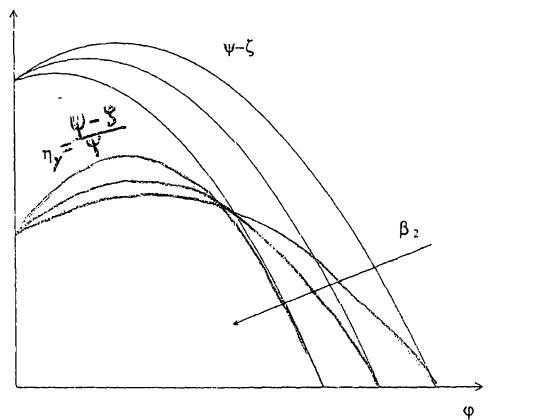


Figura 2.14: dipendenza di  $(\psi - \zeta)$  e di  $\eta_y$  rispetto a  $\varphi$ , al variare dell'angolo di uscita girante.

Considerando il flusso in una pompa centrifuga completamente turbolento (perdite proporzionali al quadrato di una velocità) ed in base alla (2.26) ed alla (2.27), si è dedotto, dall'analisi svolta nei precedenti paragrafi, che i coefficienti di pressione e di perdita sono dipendenti dal solo parametro di portata: in base alla (2.2) ed alla (2.10) ed alle definizioni di  $\psi$  e  $\zeta$ , due diverse condizioni di funzionamento di una stessa pompa aventi triangoli di velocità simili (ovvero uguale parametro di portata) sono pertanto caratterizzate dal fornire una prevalenza proporzionale al quadrato della velocità di trascinamento,  $H_u \propto u_2^2$ , con un rendimento idraulico  $\eta_y$  costante. Tali condizioni di funzionamento sono pertanto definite **fluidodinamicamente simili** e correlate dai comuni parametri adimensionali. Analogamente, affinché due macchine geometricamente simili funzionino in condizioni di similitudine fluidodinamica è necessario e sufficiente che i triangoli di velocità relativi alle due macchine siano simili, essendo ancora  $\varphi$ , e quindi  $\psi$  e  $\zeta$ , uguali nelle due macchine. Per macchine geometricamente simili e trascurando le variazioni di  $\eta_y$ , si ricava, ricordando la (2.23) e la (2.2):

$$\frac{\psi}{\zeta} = \frac{\psi \cdot \alpha_2}{\zeta \cdot \alpha_2} = \frac{\psi \pi n D_2}{\zeta \cdot \alpha_2} \downarrow \\ Q = \eta_v \xi \pi D_2 l_2 w_{r2} = \eta_v \xi \pi^2 \frac{l_2}{D_2} \varphi n D_2^3 \propto \varphi n D_2^3, \quad (2.55)$$

$$H_u = \frac{L_i - L_w}{g} = (\psi - \zeta) \frac{u_2^2}{2g} = (\psi - \zeta) \frac{(\pi n D_2)^2}{2g} \propto (\psi - \zeta) n^2 D_2^2. \quad (2.56)$$

Nella usuale ipotesi di flusso unidimensionale (numero di pale  $z \rightarrow \infty$ ), fissando l'angolo  $\beta_2$  e combinando i diagrammi di  $\psi(\varphi)$  (fig. 2.6) e  $\zeta(\varphi)$  (fig. 2.13), si possono ottenere le curve  $(\psi - \zeta)(\varphi)$  e

$$\eta_y(\varphi) = \frac{L_i - L_w}{L_i} = \frac{\psi(\varphi) - \zeta(\varphi)}{\psi(\varphi)}, \quad \boxed{\eta_y = 1 - \frac{\zeta}{\psi}} \quad (2.57)$$

rappresentate qualitativamente in fig. 2.14, da cui si osserva come, al crescere di  $\beta_2$ , il massimo delle curve ( $\psi - \zeta$ ) si sposti verso valori minori di  $\varphi$  sino quasi a svanire completamente. Nel caso reale di una girante con un numero finito (e abbastanza piccolo) di pale, bisogna ovviamente conteggiare anche gli effetti dello scorrimento e quindi utilizzare, ad esempio, le curve di  $\psi$  riportate in fig. 2.9.

Macchine (geometricamente simili e) funzionanti in condizioni di similitudine fluidodinamica sono caratterizzate da identici valori dei seguenti parametri:

$$\text{numero di giri specifico } n_s = \frac{n \frac{D_2}{D_2^0}}{\sqrt{\frac{H_u}{H_u^0}}}, \quad (2.58)$$

$$\text{portata specifica } Q_s = \frac{Q}{\left(\frac{D_2}{D_2^0}\right)^2 \sqrt{\frac{H_u}{H_u^0}}}, \quad (2.59)$$

dove  $D_2^0 = 1 \text{ m}$  e  $H_u^0 = 1 \text{ m}$ .  $n_s$  e  $Q_s$  sono quindi la velocità di rotazione e la portata smaltita da una pompa simile a quella in esame e funzionante in condizioni di similitudine fluidodinamica, che ha un diametro di  $1 \text{ m}$  e fornisce una prevalenza di  $1 \text{ m}$ .

Un ulteriore parametro estremamente utile per il progetto o la scelta di una turbopompa è il numero di giri caratteristico, di cui si parlerà nel paragrafo 2.2.13.

## 2.2.8 Curve caratteristiche

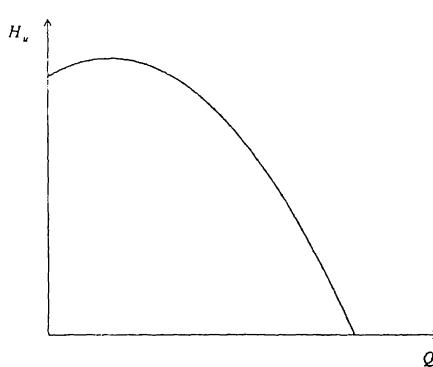


Figura 2.15: caratteristica interna di una pompa centrifuga.

In base alla (2.55) ed alla (2.56), i parametri  $\varphi$  e  $(\psi - \zeta)$  rappresentano, a meno di termini caratteristici della dimensione e del funzionamento della macchina e proporzionali rispettivamente a  $nD_2^3$  e  $n^2 D_2^2$ , la portata e la prevalenza fornite da una famiglia di

pompe geometricamente simili e funzionanti in condizioni di similitudine fluidodinamica. Partendo dunque dai diagrammi adimensionali di fig. 2.14, ed utilizzando la (2.55) e la (2.56), è possibile caratterizzare il funzionamento di una particolare pompa, mediante la definizione della sua curva caratteristica interna, che rappresenta, per un determinato regime di rotazione, la legge di variazione della prevalenza in funzione della portata mandata. Tale curva, diagrammata qualitativamente (in fig. 2.15), è quindi valida per una sola pompa e viene solitamente rilevata sperimentalmente. Analogamente a quanto detto riguardo l'andamento della curva  $(\psi - \zeta)(\varphi)$  di fig. 2.14, la caratteristica interna assume un andamento prevalentemente o totalmente discendente cui fa eventualmente eccezione il primo tratto della curva, relativo a bassi valori di portata. Essendo poi,

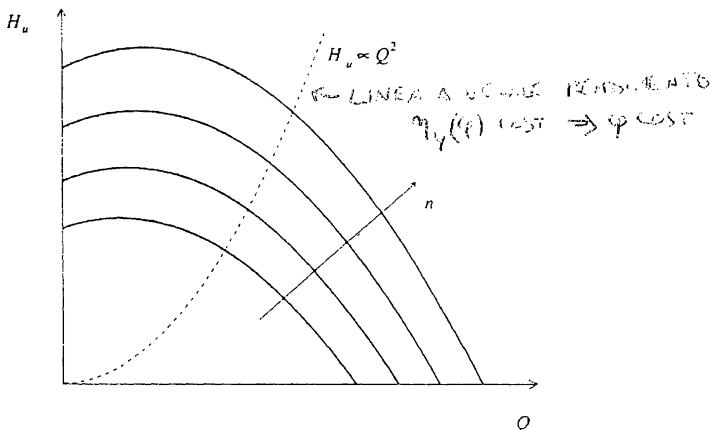


Figura 2.16: caratteristiche interne di una pompa centrifuga per diversi regimi di rotazione.

per una data pompa, in base alla (2.55) ed alla (2.56),  $Q \propto \varphi n$  e  $H_u \propto (\psi - \zeta)n^2$ , è possibile, a partire dalla caratteristica interna relativa ad una determinata velocità di rotazione, diagrammare, con sufficiente approssimazione<sup>1</sup>, le caratteristiche relative ad altri regimi di rotazione, spostando ciascun punto della prima curva in modo proporzionale a  $n$  sull'asse delle portate e a  $n^2$  sull'asse delle prevalenze, come mostrato in fig. 2.16: per quanto detto, la parabola tratteggiata utilizzata per tale costruzione, è una curva a  $\varphi$  costante e rappresenta quindi il funzionamento della pompa in condizioni di similitudine fluidodinamica, e quindi, in base alla (2.57), è una curva a  $\eta_y$  costante. L'insieme delle caratteristiche interne e delle linee a uguale rendimento prende poi il nome di **diagramma collinare** e viene normalmente rilevato sperimentalmente. Ovviamente, come già anticipato, il diagramma di fig. 2.17 si discosta leggermente (in particolare per quanto riguarda

<sup>1</sup>Si sta trascurando, ad esempio, la variazione di  $\eta_v$  e delle perdite cosiddette marginali, ovvero che avvengono ai margini della pala, che possono avere, al variare di  $D_2$ , diversa influenza sulla riduzione delle prestazioni della macchina.

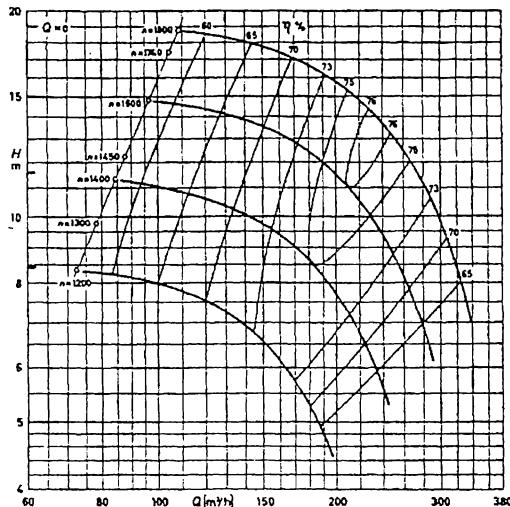


Figura 2.17: diagramma collinare di una pompa centrifuga (tratto da manuale KSB).

le curve iso-rendimento) dalle curve ricavate precedentemente in base alla semplice analisi unidimensionale.

### 2.2.9 Curva caratteristica di impianto. Punto di funzionamento e stabilità di funzionamento

Le pompe centrifughe sono tipicamente utilizzate nei cosiddetti impianti di sollevamento, in cui il fluido in esame (ad esempio acqua) viene trasferito da un serbatoio, (di monte rispetto al flusso ovvero rispetto alla pompa) generalmente a pressione atmosferica, ad un altro, di valle, più alto ed eventualmente in pressione (v. fig. 2.1). Si definisce **caratteristica esterna** o **caratteristica dell'impianto** la curva che rappresenta la prevalenza richiesta dall'impianto alla pompa,  $H_u$ , in funzione della portata utilizzata,  $Q$ . A portata nulla, ovvero in assenza di perdite di carico nei condotti, la prevalenza richiesta è ovviamente pari alla prevalenza globale  $H_t$ , o, nel caso in cui i due serbatoi siano ad uguale pressione, al dislivello geodetico  $H_g$ ; al crescere della portata la pompa deve continuare a fornire la stessa prevalenza incrementata di tutte le perdite di carico  $h_w$  del circuito. Queste ultime sono ancora proporzionali al quadrato della portata e rappresentabili quindi con una parabola. In fig. 2.18 sono rappresentate sullo stesso grafico ( $H_u$ ,  $Q$ ) sia la caratteristica interna della pompa relativa ad un prefissato regime di rotazione (dipendente dal motore di comando), che rappresenta la prevalenza che la pompa è in grado di fornire, sia la caratteristica esterna, che rappresenta la prevalenza richiesta dall'impianto. L'intersezione tra la caratteristica dell'impianto e quella della pompa individua il punto

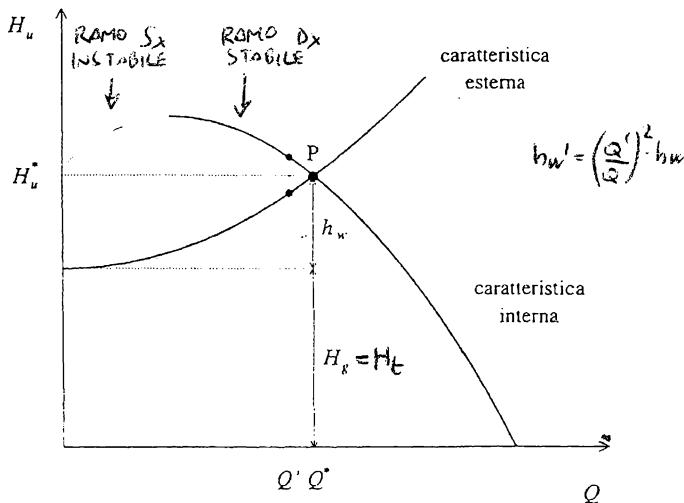


Figura 2.18: caratteristiche interna ed esterna (o di impianto): punto di funzionamento.

to di funzionamento. Nelle condizioni di progetto è evidentemente opportuno che la pompa abbia rendimento massimo o vicino al massimo.

La caratteristica interna di una pompa può essere generalmente suddivisa in due rami, uno a prevalenza crescente con la portata (per bassissime portate) ed uno decrescente (per portate medio-alte). Analizziamo cosa succede se, a partire dal punto di funzionamento  $P(H_u^*, Q^*)$  individuato in fig. 2.18 nel ramo decrescente della caratteristica interna, avviene una perturbazione che istantaneamente riduce la portata ad un valore  $Q'$ : per questo nuovo valore di portata, la pompa fornisce una prevalenza  $H_u$  maggiore di quella richiesta dall'impianto, cui corrisponde un aumento della quantità di moto fornita al fluido, che pertanto accelera ripristinando le normali condizioni di funzionamento. Analogamente è possibile dimostrare che il sistema, a seguito di una perturbazione che aumenti istantaneamente la portata elaborata, si riporta al normale punto di funzionamento. Pertanto,  $P$  è un punto di funzionamento stabile. Se l'intersezione  $P$  tra le caratteristiche fosse tale da avere, a sinistra di  $P$ ,  $H_u^{\text{pompa}} < H_u^{\text{impianto}}$ , ovvero, nel caso peggiore di caratteristica esterna costante, se il punto di funzionamento fosse a sinistra del massimo della caratteristica interna, è facile dimostrare che il sistema non sarebbe in grado, a seguito di una perturbazione di portata, di riportarsi in tale punto. In tal caso, si innescerebbe infatti un funzionamento non stazionario, denominato ciclo di pompaggio, che vede la portata variare in modo periodico tra valori positivi e valori negativi (riflusso della portata nella pompa): le forti variazioni di velocità generano, come noto, sovrapressioni notevoli (fenomeno del colpo d'ariete), che sono causa di sollecitazioni per gli organi della pompa e per le tubazioni, tanto più forti quanto maggiore è la frequenza con cui si ripete tale

ciclo. La presenza di un'ampia zona instabile è ovviamente particolarmente pericolosa nei casi in cui il funzionamento si discosta da quello di progetto: per evitare la possibilità di incorrere in questo funzionamento anomalo della macchina, è necessario quindi utilizzare giranti per cui il ramo stabile della caratteristica interna risulti abbastanza esteso. Come si riscontra dalla fig. 2.14, tale ramo è tanto più ampio quanto maggiore è l'angolo di uscita della girante. Questo è un ulteriore, importantissimo motivo per cui le pompe centrifughe hanno giranti con pale rivolte all'indietro.

### 2.2.10 Regolazione

La regolazione di una pompa centrifuga consiste nella variazione della portata da essa elaborata e viene generalmente effettuata nei seguenti due modi:

- variazione del numero di giri;
- inserzione di una valvola di strozzamento sul condotto di mandata.

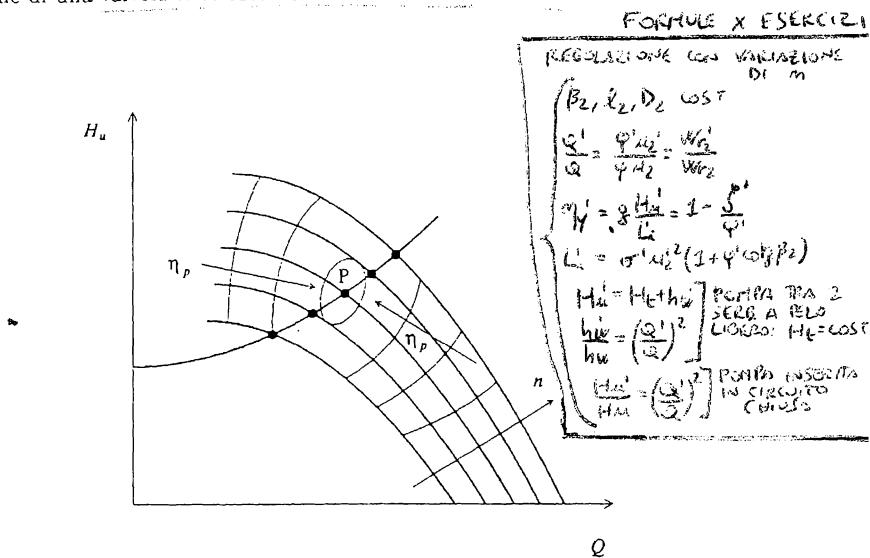


Figura 2.19: regolazione per variazione del regime di rotazione della pompa.

Il primo tipo di regolazione è attuabile solo se la pompa è azionata da un motore a numero di giri variabile (motore elettrico asincrono trifase con variatore di frequenza oppure motore a combustione interna, solitamente Diesel, nel caso di impianti di sollevamento lontani dall'alimentazione elettrica). Con questo tipo di regolazione la caratteristica esterna resta invariata, mentre vengono via via utilizzate le caratteristiche interne della pompa relative a differenti regimi di rotazione: al variare di  $n$  si possono quindi individuare i diversi punti di funzionamento indicati in fig. 2.19. La regolazione può essere di tipo continuo ed ha il pregio di mantenere il funzionamento della pompa in una zona ad

elevato rendimento. E' da notare, inoltre, che è possibile realizzare sia una diminuzione che un piccolo aumento della portata, ammesso che il motore di comando sia in grado di elaborare la potenza richiesta. Dalla fig. 2.19 si rileva, infatti, che all'aumentare della portata corrisponde un aumento della prevalenza e quindi un sensibile incremento della potenza assorbita dalla pompa.

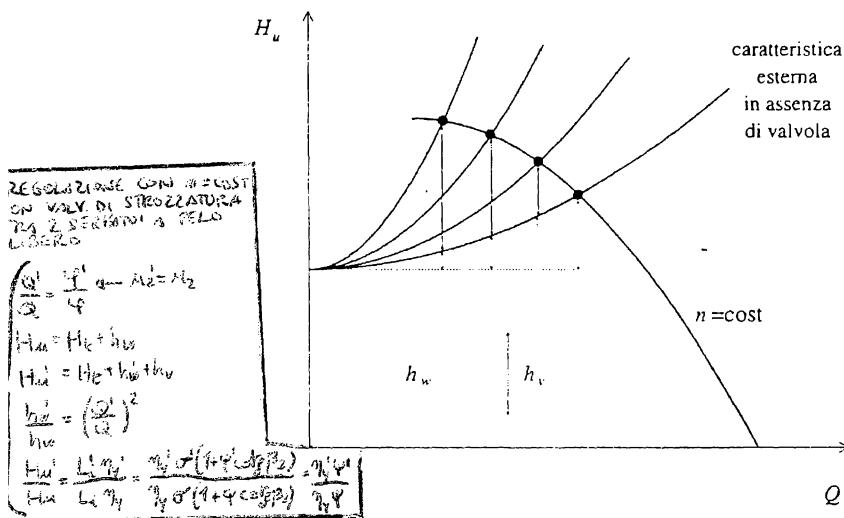


Figura 2.20: regolazione per inserzione di una valvola di strozzamento.

Nel secondo tipo di regolazione, la pompa funziona a numero di giri costante, per cui rimane invariata la sua caratteristica interna (v. fig. 2.20). La presenza della saracinesca di mandata determina una perdita di carico (localizzata) addizionale  $h_v$ , dipendente dal grado di chiusura della valvola stessa e ancora dal quadrato della portata, che permette l'innalzamento della caratteristica esterna, con conseguente riduzione (non è evidentemente possibile un aumento) della portata mandata dalla pompa. Anche questa regolazione ha il pregio di essere continua; tuttavia, la perdita di carico nella valvola comporta, a pari portata, un aggravio di potenza assorbita rispetto al caso di regolazione per variazione del numero di giri. E' da notare, infine, che, sebbene dal punto di vista della variazione della caratteristica esterna non ci sarebbe alcuna differenza se si ponesse la valvola all'aspirazione piuttosto che alla mandata, questo tipo di installazione è assolutamente sconsigliato perché si potrebbe incorrere nel fenomeno della cavitazione, che sarà descritto nel prossimo paragrafo.

### 2.2.11 Fenomeno della cavitazione: altezza d'installazione

Si definisce tensione di vapore,  $p_v$ , la pressione alla quale un liquido è in equilibrio con la sua fase vapore. Il valore di  $p_v$  cresce, come noto, con la temperatura. In una macchina idraulica, ed in particolare nel caso di interesse di una pompa centrifuga, il fluido può raggiungere valori di pressione piuttosto bassi, poco a valle del bordo di attacco delle pale della girante, per poi vedere ancora aumentare la sua pressione a seguito della fornitura di lavoro. Se la pressione locale uguaglia la tensione di vapore del liquido, si innesca un fenomeno particolarmente pericoloso, detto cavitazione: il passaggio dalla fase liquida alla fase vapore e viceversa determina infatti forti variazioni di volume specifico, con conseguenti piccole esplosioni ed implosioni, che inducono forti sollecitazioni sugli organi della pompa. L'aumento del volume specifico, d'altra parte, determina anche una riduzione della portata che può essere elaborata dalla macchina, che, se opportunamente rilevata, può, insieme alla presenza di vibrazioni, denunciare l'insorgere della cavitazione.

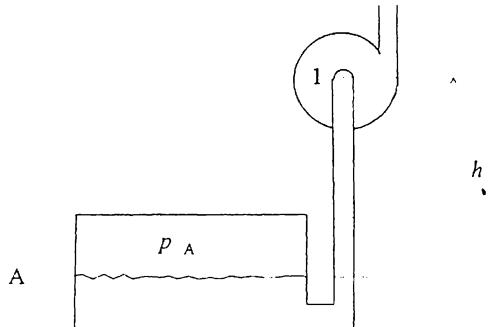


Figura 2.21: altezza di installazione di una pompa centrifuga.

Per evitare tale fenomeno è necessario limitare l'altezza di installazione della pompa rispetto al pelo libero del serbatoio di aspirazione (v. fig. 2.21): applicando il I PTD tra il pelo libero A del serbatoio di aspirazione (in cui regna la pressione assoluta  $p_A$ ) e la sezione 1 d'ingresso del liquido nella girante, si ha:

$$L_i - L_w = \frac{p_1 - p_A}{\rho} + \frac{c_1^2 - c_A^2}{2} + g(z_1 - z_A). \quad (2.60)$$

Essendo  $L_i = 0$  e  $c_A \approx 0$ , e ponendo  $L_w = gh_w$  e  $(z_1 - z_A) = h_1$ , la (2.60) assume la forma:

$$p_1 = p_A - \gamma h_1 - \rho \frac{c_1^2}{2} - \gamma h_w, \quad (2.61)$$

che permette di valutare la pressione all'imboccato della pompa in funzione dell'altezza di installazione. Subito a valle del bordo di attacco delle pale della girante avviene però, a causa del profilo arrotondato, un'ulteriore accelerazione del liquido; la corrispondente riduzione

di pressione  $\Delta p$  è valutabile mediante un coefficiente  $\lambda$  dipendente dalla geometria delle pale e dal regime di funzionamento:

$$\Delta p = \rho \lambda \frac{w_1^2}{2}. \quad (2.62)$$

La pressione minima nella pompa,  $p_{min}$ , è pertanto pari a:

$$p_{min} = p_A - \Delta p \rightarrow p_{min} = p_A - \gamma h_1 - \rho \frac{c_1^2}{2} - \gamma h_w - \rho \lambda \frac{w_1^2}{2}. \quad (2.63)$$

Affinché non si abbia cavitazione deve essere quindi verificata la diseguaglianza  $p_{min} \geq p_v$ , ovvero:

$$p_A - \gamma h_1 - \rho \frac{c_1^2}{2} - \gamma h_w - \rho \lambda \frac{w_1^2}{2} \geq p_v. \quad (2.64)$$

Per praticità di verifica, è usuale distinguere i termini caratteristici dell'impianto (che competono quindi all'installatore o impiantista), da quelli caratteristici della pompa (che competono invece al progettista della macchina), ottenendo così:

$$\frac{p_A - p_v}{\gamma} - h_1 - h_w \geq \frac{1}{g} \left( \frac{c_1^2}{2} + \lambda \frac{w_1^2}{2} \right). \quad (2.65)$$

Entrambi i termini della (2.65) vengono denominati NPSH (*Net Positive Suction Head*,

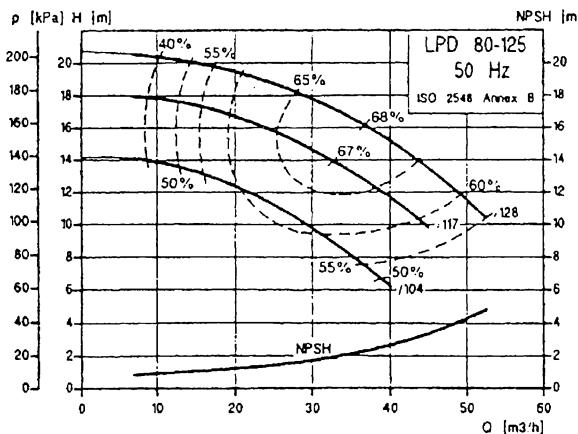


Figura 2.22: diagramma collinare ed andamento del parametro  $NPSH_r$  per la pompa centrifuga GRUNDFOS LPD 80-125 (acqua priva di gas, a  $20^\circ C$ ).

carico netto positivo in aspirazione): il primo, relativo al solo impianto, è detto  $NPSH_d$  (*NPSH disponibile*) e dipende dalla tubazione di aspirazione (termini  $h_1$  e  $h_w$ ), dalle condizioni di installazione ( $p_A$ ) e dalla temperatura del liquido ( $p_v$ ); il secondo, dipendente

dalla geometria della macchina e dalle condizioni di funzionamento, viene denominato  $NPSH_r$  ( $NPSH$  richiesto) ed esprime l'altezza positiva richiesta dalla pompa per non cavitare. Il parametro  $NPSH_r$  viene ovviamente fornito dal costruttore della macchina, v. fig. 2.22, in cui si riporta il diagramma colinare di una pompa centrifuga ed il relativo andamento (quasi parabolico, in quanto  $c_i^2$  e  $w_i^2$  nella (2.65) variano in modo rispettivamente quadratico e meno che quadratico rispetto a  $Q$ ) di  $NPSH_r$ , in funzione di  $Q$ . In altri casi, il parametro  $NPSH_r$ , indicato anche con  $h_0$ , viene adimensionalizzato rispetto alla prevalenza  $H_u$ :

$$\sigma = \frac{h_0}{H_u} = \frac{NPSH_r}{\gamma H_u} \quad (2.66)$$

$\sigma$  viene detto coefficiente di Thoma ed è costante per macchine geometricamente simili operanti in condizioni di similitudine fluidodinamica.

Affinché non avvenga cavitazione deve essere quindi verificata la seguente diseguaglianza:

$$NPSH_d \geq NPSH_r. \quad (2.67)$$

Fissata la temperatura del liquido, la condizione (2.64) costituisce in pratica una limitazione per l'altezza di installazione della pompa:

$$h_i \leq \frac{p_A - p_v}{\gamma} - h_w - h_0, \quad (2.68)$$

che sarà tanto minore (eventualmente anche negativa, nel qual caso la pompa dovrà essere sommersa) quanto maggiori sono il carico netto richiesto dalla pompa, le perdite di carico nel condotto di aspirazione (sia quelle distribuite che quelle concentrate) e la temperatura del liquido, da cui dipende la tensione di vapore.

### 2.2.12 Pompe in serie ed in parallelo

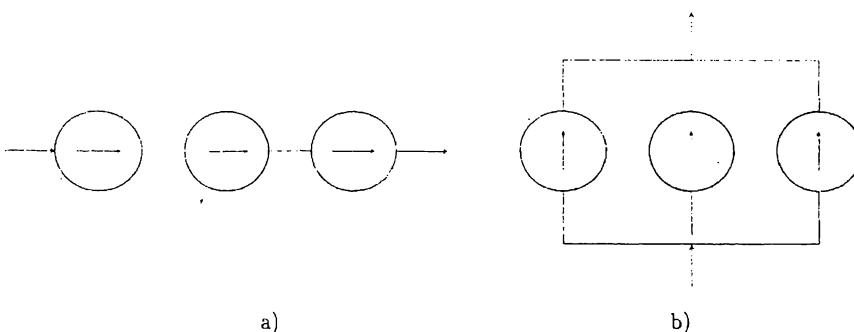


Figura 2.23: a) schema di installazione di tre pompe in serie; b) schema di installazione di tre pompe in parallelo.

Se si ha necessità di fornire una prevalenza elevata si può ricorrere ad un collegamento in serie di più pompe, come schematizzato in fig. 2.23a, o, equivalentemente, utilizzare

una pompa composta da più giranti, detta pompa pluristadio, rappresentata in fig. 2.24. Se  $N$  pompe sono accoppiate in serie, elaborano, per ovvi motivi di continuità, la stessa

- 1 camera di aspirazione
- 2 camera di scarico
- 3 camera intermedia
- 4 diffusore
- 5 albero
- 6 girante
- 7 anello di tenuta
- 8 basamento
- 9 sostegno di scorrimento
- 10 lanterna guida
- 11 tenuta ad albero
- 12 basamento motore
- 13 accoppiamento

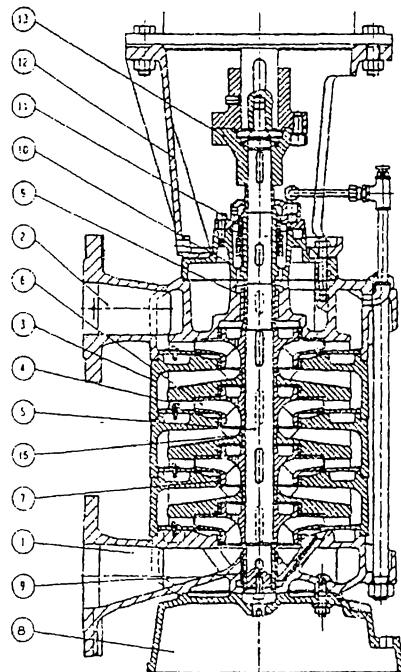


Figura 2.24: sezione longitudinale di una pompa a quattro stadi (da catalogo GRUNDFOS).

portata; la prevalenza complessiva,  $H_{u,tot}$ , è somma invece delle prevalenze fornite dalle singole macchine:

$$\begin{cases} Q_{tot} &= Q_1 = Q_2 = \dots = Q_N, \\ H_{u,tot} &= H_{u,1} + H_{u,2} + \dots + H_{u,N}. \end{cases} \quad (2.69)$$

Pertanto, se le macchine sono uguali e funzionano allo stesso numero di giri (ipotesi quest'ultima praticamente sempre verificata per ovvi motivi di accoppiamento con il motore di comando) è sufficiente moltiplicare il valore di prevalenza fornita da ciascuna pompa per il numero di macchine  $N$ , come rappresentato graficamente in fig. 2.25a, per il caso  $N = 2$ . Se, invece, le pompe fossero diverse e quindi con diversa caratteristica interna, l'accoppiamento tra le due pompe sarebbe possibile solamente per quei valori di portata per i quali entrambe le macchine forniscono prevalenza e il loro funzionamento

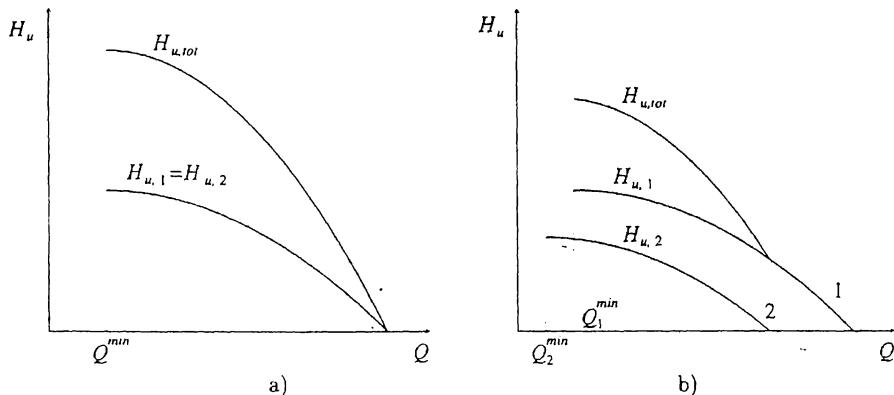


Figura 2.25: caratteristica interna complessiva relativa a due pompe a) uguali o b) diverse in serie.

è stabile: con riferimento alle curve 1 e 2 di fig. 2.25b (ancora per  $N = 2$ ), relative a due pompe di dimensioni una maggiore dell'altra, la caratteristica interna complessiva si otterrebbe ancora, per  $Q_1^{min} \leq Q \leq Q_2^{max}$  (per il caso in figura, in cui  $Q_2^{min} < Q_1^{min}$ ), sommando le prevalenze fornite dalle singole macchine; per  $Q > Q_2^{max}$ , la seconda pompa non sarebbe in grado di fornire prevalenza (in pratica lavorerebbe con  $H_u < 0$ , con punto di funzionamento nel ramo al di sotto dell'asse delle portate, ovviamente non rappresentato) e andrebbe quindi esclusa per mezzo di un *by-pass*. La caratteristica interna coinciderebbe quindi, per  $Q > Q_2^{max}$ , con quella della pompa 1. L'accoppiamento tra pompe diverse non è quindi consigliabile.

L'accoppiamento di più pompe in parallelo viene invece utilizzato nel caso in cui si ha necessità di elaborare portate elevate con basse prevalenze. In questo caso, la prevalenza è ovviamente uguale per tutte le macchine, mentre la portata complessiva,  $Q_{tot}$ , è somma di quelle elaborate dalle singole pompe:

$$\begin{cases} Q_{tot} &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N, \\ H_{u,tot} &= H_{u,1} = H_{u,2} = \dots = H_{u,N}. \end{cases} \quad (2.70)$$

Pertanto, se si accoppiano in parallelo più pompe uguali, la caratteristica complessiva si ottiene semplicemente moltiplicando i valori della portata per il numero di macchine  $N$ , come rappresentato graficamente in fig. 2.26a, per il caso  $N = 2$ . Nel caso di pompe diverse, invece, l'accoppiamento tra le due pompe sarebbe possibile solamente per quei valori di prevalenza per i quali entrambe le macchine sono in grado di elaborare portata ed il loro funzionamento è stabile: con riferimento alle curve 1 e 2 di fig. 2.26b (ancora per  $N = 2$ ), la caratteristica interna complessiva si otterrebbe, per  $H_u \leq H_{u,2}^{max}$ , sommando le portate elaborate dalle singole macchine; per  $H_u > H_{u,2}^{max}$ , la seconda pompa non sarebbe in grado di mandare una portata positiva (in pratica lavorerebbe in condizioni di riflusso della portata,  $Q_2 < 0$ , con punto di funzionamento nel ramo a sinistra

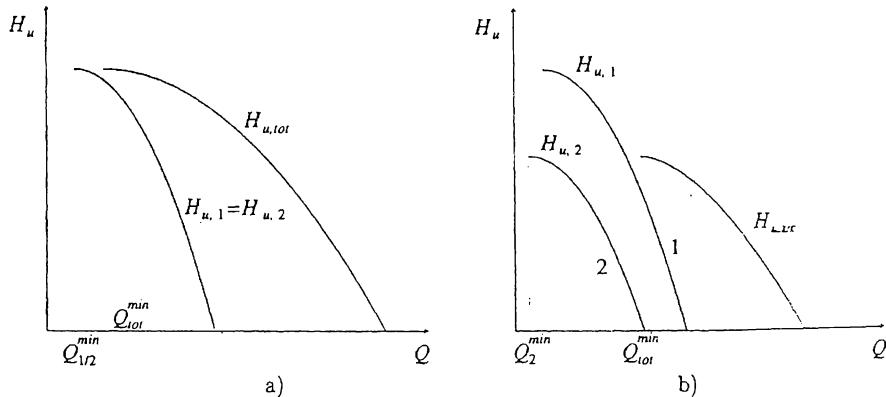


Figura 2.26: caratteristica complessiva interna relativa a due pompe a) uguali o b) diverse in parallelo.

dell'asse delle prevalenze, non rappresentato) per cui anche in questo caso ~~anzitutto~~ esclusa la pompa 2. Anche in questo caso, l'accoppiamento tra pompe diverse non è quindi consigliabile.

### 2.2.13 Numero di giri caratteristico: progetto di massima e scelta della pompa

Il *progetto di massima* di una pompa consiste nel definire i parametri geometrici ( $D_2$ ,  $l_2/D_2$ ,  $\beta_2$ ,  $z$ ), di funzionamento ( $\varphi$ ) e la velocità di rotazione  $n$  che consentono di realizzare i dati di progetto  $H_u$  e  $Q$  con il massimo rendimento. Nella maggioranza dei casi, la pompa è comandata da un motore asincrono trifase alimentato dalla rete elettrica, per cui  $n$  può variare in modo discreto tra  $\bar{n} \approx 2900 \text{ RPM}$  e  $\bar{n}/k$ , ove  $k$  è il numero di coppie polari del motore. Per questa ragione  $n$  è spesso considerato un dato di progetto.

Per facilitare il progetto e la scelta di una pompa, è particolarmente utile sfruttare il concetto di similitudine fluidodinamica. A tal proposito, viene definito **numero di giri caratteristico** la velocità di rotazione di una pompa geometricamente simile e operante in condizione di similitudine fluidodinamica rispetto a quella in esame, che fornisca una prevalenza  $\bar{H}_u = 1 \text{ m}$  ad una portata  $\bar{Q} = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ . Il numero di giri caratteristico viene quindi espresso, in base alle relazioni di proporzionalità (2.55) e (2.56), per mezzo della seguente relazione<sup>2</sup>:

$$n_q = \frac{n\sqrt{Q/\bar{Q}}}{(H_u/\bar{H}_u)^{\frac{3}{4}}} \quad (2.71)$$

Per semplicità, nella (2.71) si omettono i termini  $\bar{H}_u$  e  $\bar{Q}$ , per cui  $H_u$  e  $Q$  devono essere

<sup>2</sup>Va precisato che l'analisi dimensionale porta a ricavare il parametro  $n\sqrt{Q}/(gH_u)^{\frac{3}{4}}$ , nel quale viene solitamente omessa la costante  $g$ .

misurati in  $m$  e  $m^3/s$ , rispettivamente, affinché  $n_q$  abbia le stesse dimensioni di  $n$ . In molti manuali e cataloghi, tuttavia, si preferisce, per analogia con le turbine idrauliche, far riferimento ad una pompa che assorbe una potenza  $\bar{P}_e = 1 \text{ CV}$  sviluppando la prevalenza  $H_u = 1 \text{ m}$ :

$$n_c = \frac{n\sqrt{P_a/\bar{P}_e}}{(H_u/H_u)^{\frac{1}{2}}} \quad | \begin{array}{l} \text{X ESEMPIO} \\ n_c = \frac{m \cdot g \cdot \eta \cdot \sqrt{P_a [\text{kW}]}}{(H_u [\text{m}])^{1/2}} \end{array} \quad (2.72)$$

Si può verificare, con elementari passaggi lasciati come esercizio al lettore, che  $n_c$  è uguale a  $n_q$  moltiplicato per una costante pari a circa 3.65.

Il numero di giri caratteristico è ovviamente identico per pompe (geometricamente simili e) funzionanti in condizioni di similitudine fluidodinamica.

Note le condizioni di progetto,  $Q$ ,  $H_u$  ed  $n$ , il numero di giri caratteristico permette, in base ad una classificazione statistica delle realizzazioni già esistenti, di individuare quale geometria della pompa permette di ottenere il massimo rendimento. In fig. 2.27 sono

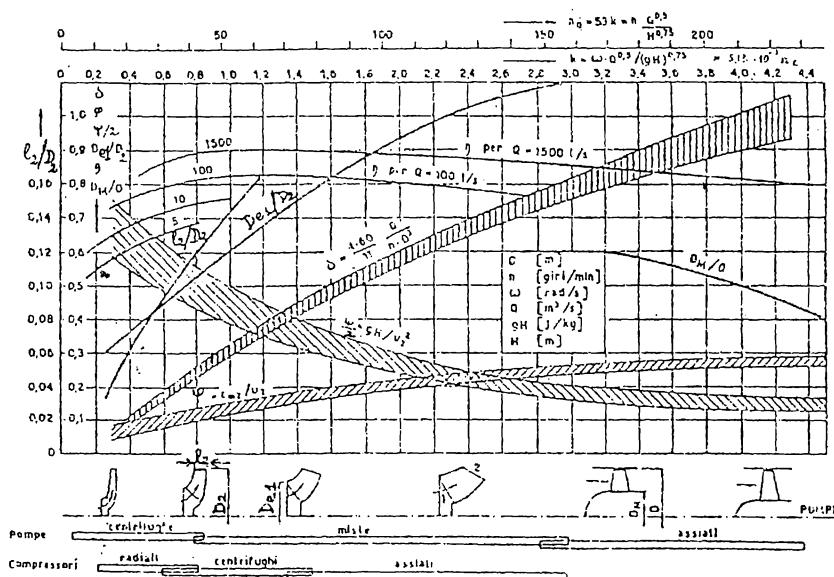


Figura 2.27: andamento dei parametri geometrici e di funzionamento della pompa in funzione del numero di giri caratteristico.

infatti diagrammati, in funzione di  $n_q$ , i principali dati caratteristici della geometria della pompa, ovvero i rapporti  $l_2/D_2$  e  $D_{c1}/D_2$  ( $D_{c1}$  è il diametro esterno all'ingresso della girante), il parametro di portata  $\varphi$  (oppure, equivalentemente, il rapporto indicato in figura

con  $\delta$ ), il coefficiente di pressione  $\psi$  e il rendimento  $\eta_P$  che si prevede di ottenere. Un tale diagramma consente una agevole progettazione di massima: calcolato  $n_q$ , si valutano i parametri geometrici e di funzionamento riportati in figura ed il rendimento della macchina; in base alla prevalenza richiesta ed alla velocità di rotazione si può poi calcolare il diametro esterno della girante,  $D_2$ . Si soddisferà, infine, anche l'equazione della portata operando lievi ritocchi su alcuni dei parametri precedentemente desunti dalla figura.

Analizziamo ora, in modo qualitativo, l'andamento delle caratteristiche geometriche e di funzionamento al variare del numero di giri caratteristico. Al di sotto del diagramma sono anche schematizzate le sezioni delle corrispondenti giranti, che evolvono in modo continuo da un andamento esclusivamente radiale, ad uno assiale, con l'eventuale contemporaneo aumento del numero di giri di progetto. L'aumento di  $n_q$  corrisponde infatti ad un aumento di  $n$  e  $Q$  rispetto ad  $H_u$  (o, equivalentemente, una diminuzione di  $H_u$  rispetto a  $n$  e  $Q$ ) che è in accordo con il fatto che una macchina assiale è in grado di fornire una prevalenza molto minore di una radiale per il mancato contributo del campo di forze centrifughe. L'andamento del rapporto  $D_{el}/D_2$  in fig. 2.27 è infatti crescente, poiché l'aumento di  $D_{el}$  rispetto a  $D_2$  si traduce nell'aumento della sezione utile di passaggio in ingresso girante (il diametro interno  $D_{11}$  è sempre il minimo possibile compatibilmente con esigenze strutturali e costruttive), e quindi in un incremento della portata rispetto alla prevalenza. D'altra parte, ricordando la (2.56), la prevalenza può essere ridotta agendo contemporaneamente sul coefficiente di pressione  $\psi$ , che presenta quindi un andamento decrescente. L'aumento di  $Q$  e/o di  $n$  rispetto ad  $H_u$  determina poi, in base alla (2.55), l'aumento sia del coefficiente di portata  $\varphi$  (che fa anche ridurre  $\psi$ , come richiesto, essendo sempre  $\beta_2 \geq 90^\circ$ ), che del rapporto  $l_2/D_2$ . L'andamento del rendimento rilevato nelle realizzazioni pratiche presenta un massimo per giranti con uno sviluppo ancora radiale ma non molto esasperato. Per giranti a forte sviluppo radiale (basse portate ed elevata prevalenza), infatti, il basso valore di  $l_2/D_2$  comporta elevate perdite marginali, mentre per giranti con sviluppo misto o addirittura assiale le perdite aumentano per il ridotto o mancante contributo del campo di forze centrifughe (v. paragrafo 2.2.2). Per  $n_q < 10 \div 20 \text{ RPM}$ , la forte diminuzione di rendimento suggerisce di ricorrere a pompe di tipo volumetrico, piuttosto che a pompe centrifughe. Volendo utilizzare una pompa centrifuga anche nel caso in cui si richieda una prevalenza molto alta rispetto alla portata, sarà quindi necessario adottare una velocità di rotazione molto elevata, in modo da riportare  $n_q$  nel campo delle macchine centrifughe<sup>3</sup>. Analogamente, se la prevalenza richiesta è bassa rispetto alla portata ( $n_q$  elevato) si potrebbe evitare il ricorso a giranti di tipo assiale adottando, se il motore di comando lo consente, una velocità di rotazione più bassa, in modo da ridurre  $n_q$  (si ricorda, d'altra parte, che  $H_u \propto n^2 D_2^2$  e  $Q \propto n D_2^3$ ).

Per quanto riguarda la scelta di una pompa, la gran parte dei cataloghi propone una prima suddivisione in base al tipo di impiego (pompe di sollevamento, pompe di circolazione, pompe di alimentazione); per ciascuna di queste classi, vengono poi proposte alcune serie di realizzazioni in similitudine geometrica, in modo da poter contemplare le più diverse necessità impiantistiche. Ad esempio, il diagramma in fig. 2.28 permette di individuare, fissati i dati di progetto  $H_u$  e  $Q$ , il tipo di pompa più adatto. E' da notare che nel diagramma sono riportate diverse possibili geometrie, con diverse condizioni di

<sup>3</sup>Un esempio di questa problematica si verifica nel progetto dei compressori centrifughi per la sovrallimentazione di motori alternativi a combustione interna, v. paragrafo 2.3, la cui velocità di rotazione supera, in molti casi, i 100000 RPM.

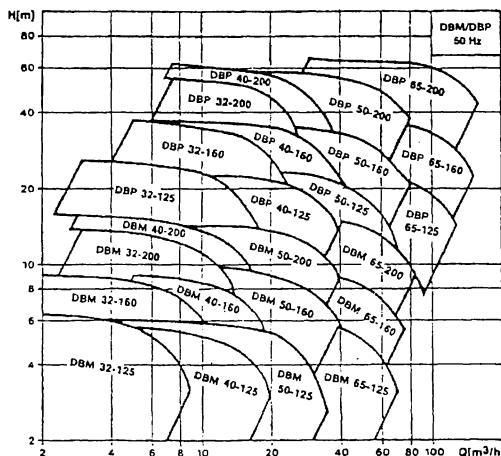


Figura 2.28: campi di applicazione di pompe geometricamente simili (da catalogo GRUNDFOS).

funzionamento, ciascuna caratterizzata dalla propria sigla. Ad esempio, la notazione DBM si riferisce ad una pompa con motore elettrico asincrono a 4 poli, che quindi ruota a circa 1450  $RPM$  ed è perciò adatta per basse prevalenze e portate non molto elevate. Viceversa, la notazione DBP si riferisce ad una pompa con motore a 2 poli, che quindi ruota a circa 2900  $RPM$  ed è perciò adatta per portate e prevalenze più elevate. I due numeri nella sigla, poi, si riferiscono a parametri geometrici caratterizzanti rispettivamente l'altezza della pala  $l_2$  ed il diametro esterno  $D_2$  (in realtà la prima cifra, ad esempio, si riferisce al diametro della flangia della tubazione di mandata, dimensione ovviamente proporzionale ad  $l_2$ ). Le macchine DBM 32-125, DBM 40-160 e DBM 50-200, quindi, caratterizzate dallo stesso rapporto tra le due dimensioni, sono **geometricamente simili**.

## 2.3 COMPRESSORI

I compressori sono macchine operatrici che operano su fluidi comprimibili per aumentarne la pressione. La classificazione fondamentale, analoga a quella proposta per le pompe, si basa sul modo in cui la macchina fornisce l'energia al fluido e distingue i turbocompressori dai compressori volumetrici.

Nei turbocompressori il fluido attraversa, a velocità molto elevata, i vani interpali di una girante, dove riceve lavoro sotto forma di un incremento del momento della quantità di moto. Detto lavoro, prodotto dalle forze esercitate dalle pale sul fluido determina un aumento sia della pressione che dell'energia cinetica posseduta dal fluido; quest'ultima viene poi in larga parte convertita in energia di pressione in un diffusore posto a valle della

girante. I turbocompressori possono essere di tipo centrifugo o assiale e trovano conveniente e più usuale impiego ove necessitino grandi portate<sup>4</sup> (in particolare i compressori assiali). Il rapporto di compressione fornito da un singolo stadio (girante e successivo diffusore) è però limitato da problemi fluidodinamici<sup>5</sup>; nel caso in cui si richieda un rapporto di compressione elevato è necessario quindi ricorrere a macchine pluristadio (praticamente sempre nel caso di una macchina assiale). In particolare, uno stadio di compressore assiale elabora portate maggiori di uno centrifugo, ma con rapporti di compressione nettamente minori.

Nei compressori volumetrici, invece, l'energia viene scambiata fra le parti meccaniche ed il fluido mediante azioni quasi statiche ed in essi l'aumento di pressione è dovuto in genere alla riduzione di volume imposta ad una massa costante di fluido intrappolata tra le parti fisse e quelle mobili della macchina. Essi pertanto si prestano egregiamente per conferire al fluido pressioni di mandata notevoli, ma elaborano portate normalmente inferiori rispetto ad un turbocompressore di pari ingombro. I compressori volumetrici si distinguono poi in alternativi e rotativi sulla base del tipo di moto della parte mobile del compressore, e sono adatti per rapporti portata/rapporto di compressione rispettivamente minori e maggiori. Il funzionamento dei compressori volumetrici verrà trattato nel capitolo 3.

Analogamente a quanto visto per le macchine operatrici idrauliche, (v. paragrafo 2.2.13), il numero di giri caratteristico permette di individuare in modo più preciso il tipo di macchina più adatto per ciascuna applicazione. Per i compressori esso viene più razionalmente espresso come parametro adimensionale,

$$n_q = \frac{n\sqrt{Gv}}{(L_i)_{ad}^{\frac{3}{4}}} \quad (2.73)$$

ove  $G$  è la portata in massa e  $v$  il volume specifico in aspirazione.

I turbocompressori vengono utilizzati in tutti i casi in cui si richiede di elaborare portate di gas piuttosto elevate: le più importanti applicazioni si trovano in campo aeronomico, negli impianti per la produzione di energia elettrica, in molti impianti chimici (ad esempio raffinerie, impianti per la sintesi dell'ammoniaca, acciaierie), quindi in settori tecnologicamente molto evoluti ed in cui si richiedono elevate prestazioni. Ulteriori applicazioni possono essere individuate in particolari impianti industriali in cui si richiedono grosse quantità di gas compresso o, ancora, in campo motoristico, laddove viene utilizzato un compressore centrifugo per la sovralimentazione dei motori alternativi a combustione interna.

<sup>4</sup>Fanno eccezione, ad esempio, i compressori per la sovralimentazione dei motori alternativi a combustione interna, che elaborano le portate piuttosto ridotte tipiche delle macchine alternative: essendo  $G \propto nD_2^3$  ed  $L_i \propto n^2 D_2^2$ , la girante assume però dimensioni molto ridotte (fino a 50 ÷ 60 mm nei motori automobilistici), con velocità di rotazione che superano i 100000 RPM.

<sup>5</sup>Le velocità del fluido nella macchina, dalle quali dipende il rapporto di compressione, vengono solitamente limitate a valori subsonici (eccetto per applicazioni aeronautiche molto spinte) per evitare perdite per urti; il rapporto di compressione è inoltre limitato, nelle macchine assiali, dal pericolo di incorrere in distacchi dello strato limite, indotti, come noto, da un forte gradiente di pressione sfavorevole.

### 2.3.1 Richiami di termodinamica

Si richiamano brevemente alcune formule di termodinamica per il calcolo del lavoro di compressione, già in parte ricavate nel capitolo 1. Applicando il I PTD in forma euleriana all'unità di massa di un fluido comprimibile ( $\Delta E_g \approx 0$ ), che si muove in regime permanente dall'ambiente di aspirazione, dove si trova alla pressione  $p_1$  ed alla temperatura  $T_1$ , all'ambiente di mandata, dove regna la pressione  $p_2$ , con variazione di energia cinetica trascurabile, si ha:

$$Q_e + L_i = \Delta i, \quad (2.74)$$

ovvero, facendo intervenire il II PTD:

$$L_i - L_w = \int_1^2 v dp. \quad (2.75)$$

Per un turbocompressore, data l'elevata velocità con cui il gas fluisce nella macchinaria, la compressione avviene in presenza di perdite, ma con scambi termici trascurabili ( $Q_e \approx 0$ ). Supponendo di comprimere un gas perfetto secondo un'unica politropica di esponente  $m$ , ed indicando con  $\beta = p_2/p_1$  il rapporto di compressione, si ha, come noto:

$$L_i = \frac{k}{k-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right), \quad (1.156)$$

$$L_i - L_w = \frac{m}{m-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right). \quad (1.157)$$

Per un turbocompressore, essendo  $Q_e \approx 0$ , è opportuno utilizzare il **rendimento isoen-tropico o adiabatico**,  $\eta_{ad}$ , pari al rapporto tra il lavoro minimo di compressione per una trasformazione adiabatica,  $(L_i)_{ad}$ , ed il lavoro effettivo,  $L_i$ , a parità di condizioni iniziali e di pressione finale:

$$\eta_{ad} = \frac{(L_i)_{ad}}{L_i}. \quad (1.177)$$

Il lavoro adiabatico minimo,  $(L_i)_{ad}$ , si ha in corrispondenza di una trasformazione isoen-tropica ( $L_w = 0$ ) e può essere valutato dalla (1.156) ponendo  $m = k$ , o, equivalentemente, dalla (1.157), ponendo anche  $L_w = 0$ :

$$(L_i)_{ad} = \frac{k}{k-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right). \quad (2.76)$$

Per i turbocompressori è anche comunemente usato il **rendimento idraulico o poli-tropico**,  $\eta_y$ , che consente un semplice calcolo dell'esponente  $m$  della politropica di compressione, nelle ipotesi, già citate, di trasformazione adiabatica e di variazione di energia cinetica nulla. Combinando la (1.157) con la (1.156), si ricava, infatti:

$$\eta_y = \frac{L_i - L_w}{L_i} = \frac{m}{m-1} \frac{k-1}{k}, \quad (1.181)$$

per cui la (1.156) può essere espressa come:

$$L_i = \frac{k}{k-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{k-1}{k\eta_y}} - 1 \right). \quad (2.77)$$

In un compressore, così come in altre macchine a fluido, piccole quantità di gas rifiuiscono dall'ambiente di mandata a quello di aspirazione (quindi dopo aver ricevuto lavoro), attraverso i giochi esistenti tra parte fissa e mobile della macchina. Indicando con  $G$  la portata misurata nel condotto di aspirazione (uguale a quella misurata nel condotto di mandata) e con  $\Delta G$  la portata che rifiuisce attraverso la macchina, si definisce rendimento volumetrico  $\eta_v$  il rapporto tra  $G$  e la portata  $G + \Delta G$  cui viene fornito lavoro:

$$\eta_v = \frac{G}{G + \Delta G} \leq 1. \quad (2.78)$$

Il rapporto tra la potenza trasferita al gas nella compressione,  $P_i$ , e quella assorbita dall'albero del compressore,  $P_a$ , individua poi il rendimento meccanico del compressore:

$$\eta_m = \frac{P_i}{P_a}. \quad (2.79)$$

La potenza interna  $P_i$  viene calcolata moltiplicando il lavoro interno,  $L_i$ , per la portata cui viene fornito tale lavoro,  $G/\eta_v$ :

$$P_i = \frac{GL_i}{\eta_v}, \quad (2.80)$$

per cui la potenza assorbita  $P_a$  (in assenza di ausiliari comandati separatamente) risulta pari a:

$$P_a = \frac{GL_i}{\eta_m \eta_v} = \frac{G(L_i)_{ad}}{\eta_m \eta_{ad} \eta_v} = \frac{G(L_i)_{ad}}{\eta_C}, \quad (2.81)$$

essendo  $\eta_C = \eta_m \eta_{ad} \eta_v$  il rendimento totale del compressore. Il lavoro  $L_i$  può essere calcolato in funzione del rapporto di compressione  $\beta$  tramite le equazioni viste sopra, o, nota la geometria della girante, per mezzo dell'equazione di Eulero, (1.63) o (1.218).

Il costo della compressione può essere infine valutato calcolando il lavoro  $L'_i$  ad unità di massa mandata:

$$L'_i = \frac{L_i}{\eta_v}, \quad (2.82)$$

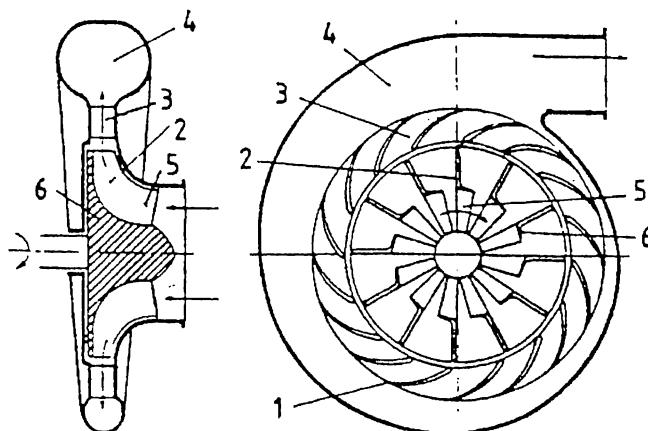
in modo da tener conto anche delle perdite energetiche dovute alla frazione di portata che rifiuisce all'aspirazione.

## 2.4 COMPRESSORI CENTRIFUGHI

### 2.4.1 Costituzione della macchina

In questi appunti verranno analizzati solo i compressori centrifughi, con frequenti riferimenti a quanto già analizzato nello studio delle pompe centrifughe, che sono costituzionalmente simili.

La fig. 2.29 mostra la sezione longitudinale e la sezione trasversale di un compressore centrifugo con diffusore palettato. Come già detto e come si riscontra facilmente da un confronto con l'analogia fig. 2.3, la struttura della macchina è simile a quella di una pompa centrifuga: si riconoscono, in particolare, un condotto di aspirazione a sezione solitamente convergente (una riduzione di sezione si ha comunque in corrispondenza dell'ingresso



1 pale del diffusore 2 pale della girante 3 diffusore  
4 voluta 5 pregrirante 6 girante

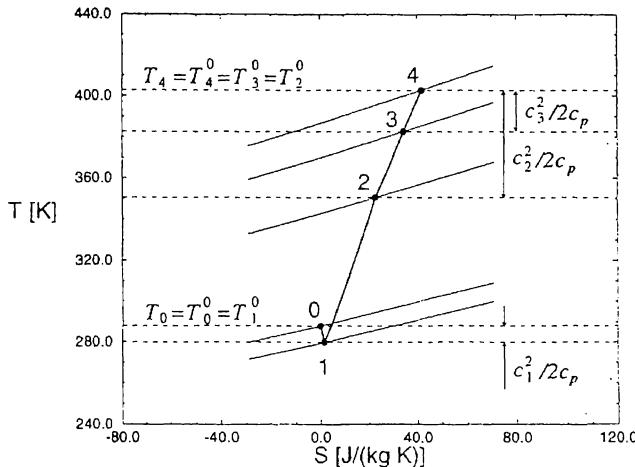
Figura 2.29: a) sezione longitudinale e b) sezione trasversale di un compressore centrifugo con diffusore palettato.

nella girante, v. punto 5), una girante dotata di pale a sviluppo solitamente misto assiale (pregirante) e radiale, un diffusore provvisto (come in questo caso) o meno di palette e una voluta per la raccolta e l'eventuale ulteriore diffusione dei gas in uscita dal diffusore. I canali rotorici possono anche in questo caso essere delimitati dalla cassa (girante aperta) o essere ricavati nella girante stessa (girante chiusa).

Analizziamo ora in dettaglio il funzionamento della macchina, supponendo che le compressioni realizzate nei singoli elementi (girante, diffusore ed eventualmente voluta) siano delle politropiche e che il flusso sia permanente ed unidimensionale (pale infinitamente sottili ed in numero infinito). Analogamente a quanto fatto per le pompe centrifughe, il lavoro che la macchina riesce a fornire al fluido verrà calcolato in base all'equazione di Eulero (1.218), e ridotto mediante il cosiddetto *fattore di scorrimento*, essendo la girante costituita da un numero finito di pale, v. paragrafo 2.2.4.

#### 2.4.2 Funzionamento del compressore centrifugo

Nell'ugello di aspirazione il gas viene accelerato dalle condizioni dell'ambiente di aspirazione (punto 0 in fig. 2.30,  $c_0 \approx 0$ ) fino alla velocità  $c_1$ , solitamente assiale; la corrispondente espansione 0-1 è ad entropia leggermente crescente a causa delle perdite fluidodinamiche per attrito e per cattivo direzionamento dovute alla non perfetta conformazione del condotto di aspirazione. La pressione  $p_1$  raggiunge solitamente valori prossimi a  $0.9 p_0$ , in corrispondenza dei quali si raggiunge una velocità relativa  $w_1$  solitamente prossima a quella del suono, v. paragrafo 2.4.3. Poiché gli scambi termici sono trascurabili, la tem-



0 ingresso condotto di aspirazione 1 ingresso pregrirante 2 uscita girante — ingresso diffusore 3 uscita diffusore — ingresso voluta 4 uscita voluta

Figura 2.30: trasformazioni termodinamiche in un compressore centrifugo.

peratura totale si conserva durante la trasformazione 0-1 ed il punto 1 di ingresso girante è quindi caratterizzato dalla temperatura

$$T_1 = T_0 - \frac{c_1^2}{2c_p}. \quad (2.83)$$

Indicando poi con  $a_1 = \sqrt{kRT_1}$  la velocità del suono in 1 e con

$$M_{a1} = \frac{c_1}{a_1} \quad (2.84)$$

il numero di Mach assoluto in 1, si ottiene anche:

$$T_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{k-1}{2} M_{a1}^2}. \quad (2.85)$$

Per tener conto degli effetti di non isoentropicità della trasformazione 0-1 prima citati è conveniente introdurre il rendimento isoentropico dell'ugello,  $\eta_{ug}$ ; indicando con  $T_{1,isen}$  la temperatura che si raggiungerebbe mediante un'espansione isoentropica dal punto 0 fino alla stessa pressione  $p_1$  della trasformazione reale, si ha:

$$\eta_{ug} = \frac{T_0^0 - T_1}{T_0^0 - T_{1,isen}}. \quad (2.86)$$

Essendo  $T_0 = T_0^0$ , la pressione  $p_1$  può essere facilmente valutata come segue:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 \left( \frac{T_{1,\text{isen}}}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} = p_0 \left[ \frac{(\eta_{ug} - 1) + \frac{T_1}{T_0}}{\eta_{ug}} \right]^{\frac{k}{k-1}} = \\ &= p_0 \left( \frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left[ \frac{(\eta_{ug} - 1) \frac{T_0}{T_1} + 1}{\eta_{ug}} \right]^{\frac{k}{k-1}} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Nella girante, il gas riceve lavoro e viene quindi compresso ed accelerato fino a raggiungere, all'uscita, la pressione  $p_2$  e la velocità assoluta  $c_2$ . La trasformazione 1-2 è ancora ad entropia crescente per via degli attriti continui e dell'eventuale resistenza dovuta alla cattiva incidenza del flusso sulle pale della girante. La fornitura di lavoro fa aumentare, come noto, la temperatura totale; applicando il I PTD tra ingresso ed uscita girante si ha, infatti:

$$T_2^0 = T_1^0 + \frac{L_i}{c_p} = T_0 + \frac{L_i}{c_p}. \quad (2.88)$$

Per individuare quanto lavoro produce un aumento di entalpia (e quindi di pressione) e quanto un aumento di energia cinetica, si definisce il grado di reazione  $\chi$ , pari al rapporto tra l'aumento di entalpia statica in girante (a partire dalla condizione totale  $i_1^0$ ) ed il corrispondente aumento di entalpia totale:

$$\chi = \frac{i_2 - i_1^0}{i_2^0 - i_1^0} = \frac{i_2 - i_0}{i_2^0 - i_0} = \frac{i_2 - i_0}{L_i} = 1 - \frac{c_2^2}{2L_i}, \quad (2.89)$$

o, in funzione delle temperature:

$$\chi = \frac{T_2 - T_1^0}{T_2^0 - T_1^0} = \frac{T_2 - T_0}{T_2^0 - T_0} = \frac{c_p(T_2 - T_0)}{L_i}. \quad (2.90)$$

Il grado di reazione dipende dalla geometria della macchina e dalle sue condizioni di funzionamento: essendo  $c_{u1} = 0$  ed indicando con

$$\psi = \frac{L_i}{\frac{u_2^2}{2}} = 2 \frac{c_{u2}}{u_2} \quad (2.91)$$

il coefficiente di pressione e con

$$\varphi = \frac{w_{r2}}{u_2} = \frac{c_{r2}}{u_2} \quad (2.92)$$

il coefficiente di portata, si ricava

$$c_2^2 = (c_{r2}^2 + c_{u2}^2) = \left( \varphi^2 + \frac{\psi^2}{4} \right) u_2^2,$$

$$2L_i = \psi u_2^2,$$

e, sostituendo nella (2.89):

$$\chi = 1 - \frac{c_2^2}{2L_i} = 1 - \frac{\varphi^2 + \frac{\psi^2}{4}}{\psi}. \quad (2.93)$$

Se il numero di pale  $z$  è infinito, il coefficiente di pressione dipende dall'angolo **costruttivo** di uscita girante,  $\beta_2$ , e da  $\varphi$  secondo la relazione

$$\psi = 2(1 + \varphi \cotg \beta_2), \quad (2.27)$$

precedentemente ricavata nel caso di una pompa centrifuga. Nel caso reale di una girante con un numero finito di pale, invece, il flusso in uscita tende a deviare, rispetto alla direzione imposta dalle palette, in direzione opposta ad  $u_2$  (v. paragrafo 2.2.4). Per tener conto di tale fenomeno, si utilizza, invece dell'angolo costruttivo di uscita girante,  $\beta_2$ , il corrispondente angolo **cinematico**  $\beta'_2$ , calcolato mediante il fattore di scorrimento  $\sigma$  (v. la (2.35) per un'espressione di  $\sigma$ ):

$$\psi = 2(1 + \varphi \cotg \beta'_2) = \sigma \psi_{id} = 2\sigma(1 + \varphi \cotg \beta_2). \quad (2.34)$$

Nel caso ideale ( $z \rightarrow \infty$ ) si ha, ovviamente,  $\sigma = 1$  e  $\beta'_2 = \beta_2$ . Pertanto, sostituendo nella (2.93) l'espressione più generale di  $\psi$  in funzione di  $\beta'_2$ , si ricava:

$$\chi = 1 - \frac{\varphi^2 + (1 + \varphi \cotg \beta'_2)^2}{2(1 + \varphi \cotg \beta'_2)} = \frac{1 - \left(\frac{\varphi}{\sin \beta'_2}\right)^2}{2(1 + \varphi \cotg \beta'_2)}. \quad (2.94)$$

L'andamento del grado di reazione, diagrammato in fig. 2.7 (v. paragrafo 2.2.3) per diversi angoli di uscita girante<sup>6</sup>, mostra che per ottenere elevati valori di  $\chi$ , cui corrispondono elevati rendimenti della macchina (v. paragrafo 2.2.2), è necessario utilizzare una girante con pale all'indietro e limitare il coefficiente di portata.

Calcolato il grado di reazione tramite la (2.93) o la (2.94), è possibile valutare la temperatura di uscita girante, mediante la (2.90):

$$T_2 = T_0 + \frac{\chi L_i}{c_p}. \quad (2.95)$$

La (2.95) mostra che solo parte del lavoro fornito dalla girante si è trasformato in entalpia statica, mentre la restante parte si è trasformata in energia cinetica:

$$\frac{c_2^2}{2} = (1 - \chi)L_i. \quad (2.96)$$

Avendo poi supposto che la trasformazione 1-2 sia una politropica di esponente  $m$ , la (1.138) permette di calcolare pressione e densità all'uscita della girante:

$$p_2 = p_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{m}{m-1}}, \quad (2.97)$$

<sup>6</sup>Il diagramma in fig. 2.7 è basato sull'ipotesi di flusso unidimensionale ( $z \rightarrow \infty$  ovvero  $\sigma = 1$ ) e può essere esteso al caso reale ( $\sigma < 1$ ) sostituendo l'angolo cinematico  $\beta'_2$  a quello costruttivo  $\beta_2$ .

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \rho_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{m'-1}}. \quad (2.98)$$

Conoscendo  $\rho_2$ , è possibile esprimere la portata in massa come:

$$G = \eta_v \xi \pi D_2 l_2 \rho_2 w_{r2} = \eta_v \xi \pi D_2 l_2 \rho_2 \varphi u_2 = \eta_v \xi \pi D_2^2 \frac{l_2}{D_2} \rho_2 \varphi u_2. \quad (2.99)$$

Così come per le pompe centrifughe, il diffusore è solitamente costituito da due facce piane e parallele ( $l_2 = l_3$ ), inframmezzate o meno da una corona di palette. Analizziamo il funzionamento del diffusore ipotizzando  $\eta_v = \xi = 1$ . Indichiamo con 3 la sezione di uscita: per un diffusore non palettato in cui si trascurino, in prima approssimazione, le resistenze passive, vale la legge di conservazione del momento della quantità di moto:

$$D_2 c_2 \cos \alpha_2 = D_3 c_3 \cos \alpha_3. \quad (2.41)$$

Nel caso di un diffusore palettato, invece, la geometria delle pale determina l'angolo di uscita  $\alpha_3$ ; per pale diritte, ad esempio, supponendo che il flusso in uscita sia perfettamente direzionali, si ha:

$$\cos \alpha_3 = \cos \alpha_2 \frac{D_2}{D_3}, \quad (2.50)$$

v. paragrafo 2.2.5. Per la conservazione della portata, si ha poi:

$$D_2 \rho_2 c_2 \sin \alpha_2 = D_3 \rho_3 c_3 \sin \alpha_3. \quad (2.100)$$

Dividendo la (2.100) per la (2.41) o per la (2.50), rispettivamente, si ha, per un diffusore non palettato:

$$\rho_2 \tan \alpha_2 = \rho_3 \tan \alpha_3, \quad (2.101)$$

e per un diffusore con pale diritte:

$$\rho_2 c_2 \tan \alpha_2 = \rho_3 c_3 \tan \alpha_3. \quad (2.102)$$

Dal punto di vista termodinamico, il gas subisce una compressione 2-3 ad entropia crescente, che viene ancora supposta politropica, ma con un esponente  $m' > m$ , essendo le perdite per attrito fluidodinamico nella girante percentualmente minori di quelle nei condotti fissi per la presenza benefica del campo di forze centrifughe. Tale ovvio risultato si può dimostrare analiticamente sottraendo l'espressione meccanica del I PTD (equazione (1.67)), da quella in forma globale (equazione (1.66)):

$$L_w = \Delta i - \int v dp. \quad (2.103)$$

Per una trasformazione politropica di esponente  $m$ , si ha, quindi:

$$\frac{L_w}{\Delta i} = 1 - \frac{m}{m-1} \frac{k-1}{k}, \quad (2.104)$$

e, per  $(L_w/\Delta i)_g < (L_w/\Delta i)_d$ , si ha  $m < m'$ . Noto (o supposto) l'esponente  $m'$ , si ha poi<sup>7</sup>:

$$p_3 = p_2 \left( \frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{m'}{m'-1}}, \quad (2.105)$$

<sup>7</sup>E' ovvio che tale procedura richiede di calcolare le perdite fluidodinamiche in funzione dei triangoli di velocità e delle grandezze termodinamiche, per verificare la correttezza dei valori assunti per gli esponenti  $m$  e  $m'$ . Tale calcolo, che è riportato su testi specifici, esula dagli scopi di questi appunti.

$$\rho_3 = \frac{p_3}{RT_3} = \rho_2 \left( \frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{1}{m'-1}}. \quad (2.106)$$

Dal I PTD si evince, infine, la conservazione della temperatura totale tra le sezioni 2 e 3:

$$T_3^0 = T_3 + \frac{c_3^2}{2c_p} = T_2 + \frac{c_2^2}{2c_p} = T_2^0, \quad (2.107)$$

che consente di esprimere  $T_3$  in funzione del numero di Mach in uscita diffusore:

$$T_3 = \frac{T_2^0}{1 + \frac{k-1}{2} M_3^2}, \quad (2.108)$$

essendo

$$M_3 = \frac{c_3}{a_3} = \frac{c_3}{\sqrt{kRT_3}}. \quad (2.109)$$

Una volta note le condizioni in 2 ( $p_2$ ,  $T_2$ ,  $c_2$  e  $\alpha_2$ ) ed ipotizzando l'esponente  $m'$  della politropica 2-3, le equazioni appena scritte vengono risolte in ordine diverso a seconda che si tratti di un calcolo di progetto o di verifica. Nel primo caso, viene solitamente imposto il valore di  $M_3$  come dato di progetto e calcolati i rimanenti valori come segue<sup>6</sup>:

- 1 eq. (2.108)  $\longrightarrow T_3;$
- 2 eq. (2.105)  $\longrightarrow p_3;$
- 3 eq. (2.106)  $\longrightarrow \rho_3;$
- 4 eq. (2.109)  $\longrightarrow c_3;$
- 5a eq. (2.101)  $\longrightarrow \alpha_3$  (non palettato);
- 5b eq. (2.102)  $\longrightarrow \alpha_3$  (pale diritte);
- 6 eq. (2.100)  $\longrightarrow D_3.$

Il calcolo di verifica, in cui sono note le dimensioni del diffusore ( $D_3$ ), sarà invece di tipo iterativo; volendo utilizzare un metodo di sostituzione successiva, si suggerisce di fissare un primo valore di tentativo per  $\rho_3$  (ovviamente  $\rho_2 < \rho_3 < \rho_4$ , tipicamente  $\rho_3 = 1.1 \div 1.2 \rho_2$ ) ed applicare le seguenti equazioni:

- 1 eq. (2.106)  $\longrightarrow T_3;$
- 2 eq. (2.106)  $\longrightarrow p_3;$
- 3 eq. (2.107)  $\longrightarrow c_3;$
- 4a eq. (2.101)  $\longrightarrow \alpha_3$  (non palettato);
- 4b  $\alpha_3$  noto (palettato);
- 5 eq. (2.100)  $\longrightarrow \rho_3.$

L'intera procedura 1-5 deve essere quindi ripetuta (utilizzando ogni volta l'ultimo valore calcolato  $\rho_3$ ) fino a convergenza.

Come già mostrato nel paragrafo 2.2.5, il diffusore palettato consente una diffusione maggiore rispetto ad uno non palettato di pari dimensioni e viene quindi utilizzato per

---

<sup>6</sup>Si lascia al lettore il compito di impostare nuovamente la risoluzione del problema, nel caso in cui venga assegnato un diverso dato di progetto, ad esempio il recupero percentuale di energia cinetica,  $1 - (c_3/c_2)^2$ .

compressori a basso grado di reazione o quando si vuole limitare l'ingombro della macchina. Va rilevato che, nel primo caso, si ha una velocità in uscita girante che può raggiungere o addirittura superare il valore sonico, con conseguente formazione di urti. Volendo ricorrere ad un diffusore palettato, è quindi necessario anteporre comunque una parte non palettata, di dimensioni tali da rallentare il flusso sino a velocità subsonica. Tale diffusione è possibile grazie al fatto che la componente radiale  $c_{r2}$  è certamente subsonica e quindi, per la conservazione della portata, si riduce; la componente tangenziale  $c_{u2}$ , invece, si riduce a seguito della conservazione del momento della quantità di moto e quindi indipendentemente dal fatto che sia o meno supersonica. La parte non palettata consente anche di uniformare il flusso in uscita dalla girante, caratterizzato da scie a bassa pressione totale a valle di ciascuna paletta rotorica.

Il gas in uscita dal diffusore viene poi raccolto nella voluta, solitamente progettata con sezioni crescenti più di quanto richiesto per la sola raccolta del gas, in modo quindi da realizzare un'ulteriore diffusione. La trasformazione termodinamica 3-4 in fig. 2.30 è stata in particolare tracciata supponendo che in uscita dalla voluta si abbia una velocità trascurabile e si possa quindi ritener  $T_4 = T_4^0$ . Il calcolo delle condizioni termodinamiche in 4 viene effettuato in modo analogo al diffusore:

$$T_4^0 = T_4 = T_3 + \frac{c_3^2}{2c_p} = T_3^0 = T_2^0, \quad (2.110)$$

$$p_4 = p_3 \left( \frac{T_4}{T_3} \right)^{\frac{m''}{m''-1}}, \quad (2.111)$$

$$\rho_4 = \frac{p_4}{RT_4} = \rho_3 \left( \frac{T_4}{T_3} \right)^{\frac{1}{m''-1}}, \quad (2.112)$$

con  $m'' \approx m'$ .

#### 2.4.3 Pregirante

*Questo paragrafo è stato inserito a beneficio degli studenti dei corsi di laurea in Ingegneria Industriale.*

In una pompa centrifuga, la riduzione di pressione causata dall'accelerazione del fluido all'ingresso della girante ha l'effetto di aggravare il pericolo di cavitazione. Nel compressore centrifugo, invece, un elevato valore di  $w_1$  può causare la formazione di urti, che sono, come noto, fenomeni fortemente dissipativi (alla riduzione di pressione totale dovuta all'urto si aggiunge spesso una ulteriore perdita dovuta al distacco dello strato limite). Il valore di  $M_{r1} = w_1/a_1$  va quindi limitato ad un valore dipendente dalla palettatura della pregrirante<sup>9</sup>. Prima di analizzare le conseguenze di tale limitazione, ricaviamo una formula che leghi la portata  $G$  (adimensionallizzata rispetto alle condizioni totali di monte, alla costante  $R$  del gas ed all'area di ingresso girante) al numero di Mach assoluto in ingresso girante,  $M_{a1}$ .

<sup>9</sup>Va quindi imposto  $M_{r1} < (M_{r1})_{max}$ , con  $(M_{r1})_{max} \approx 0.75 \div 0.85$ , minore di uno per evitare che, a causa dell'ulteriore espansione che si realizza subito a valle del bordo di attacco delle pale, si abbiano regioni localmente supersoniche.

Si consideri l'espressione della portata che attraversa la sezione 1:

$$G = \rho_1 c_1 A_1 = \frac{p_1}{RT_1} c_1 A_1. \quad (2.113)$$

Ponendo  $c_1 = M_{a1} \sqrt{k RT_1}$ , si ottiene:

$$G = \frac{p_1}{\sqrt{RT_1}} M_{a1} \sqrt{k} A_1,$$

e, moltiplicando e dividendo per  $p_0$  e per  $\sqrt{T_0}$ :

$$G = \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} A_1 \frac{p_1}{p_0} \sqrt{\frac{T_0}{T_1}} M_{a1} \sqrt{k}.$$

Portando a sinistra i termini  $A_1$  e  $p_0/\sqrt{RT_0}$ , ed utilizzando la (2.87), si ricava poi:

$$\frac{G \sqrt{RT_0}}{A_1 p_0} = \left[ \frac{(\eta_{ug} - 1) \frac{T_0}{T_1} + 1}{\eta_{ug}} \right]^{\frac{1}{k-1}} \left( \frac{T_c}{T_1} \right)^{\frac{1}{1-k}} \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} M_{a1} \sqrt{k}.$$

Infine, sostituendo la (2.85), si ricava, dopo alcuni passaggi algebrici:

$$\frac{G \sqrt{RT_0}}{A_1 p_0} = \frac{M_{a1} \sqrt{k}}{\left( 1 + \frac{k-1}{2} M_{a1}^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \left[ \frac{1 + (\eta_{ug} - 1) \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_{a1}^2 \right)}{\eta_{ug}} \right]^{\frac{1}{k-1}}, \quad (2.114)$$

che, per  $\eta_{ug} = 1$ , si semplifica in

$$\frac{G \sqrt{RT_0}}{A_1 p_0} = \frac{M_{a1} \sqrt{k}}{\left( 1 + \frac{k-1}{2} M_{a1}^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}. \quad (2.115)$$

I numeri di Mach relativo ed assoluto sono legati tra loro in base al triangolo di velocità in ingresso pregitante rappresentato in fig. 2.31; in particolare, in funzione di  $u_1$ , si ha:

$$M_{r1} = \sqrt{M_{a1}^2 + \frac{u_1^2}{k RT_1}} = \sqrt{M_{a1}^2 + \frac{u_1^2}{k RT_0} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_{a1}^2 \right)}. \quad (2.116)$$

Assegnato il valore di  $n$  ( $D_2$  ed  $n$  sono già stati scelti in base al lavoro di compressione richiesto in girante e alla portata da smaltire), la (2.116) esprime dunque un legame tra  $M_{r1}$ ,  $M_{a1}$  e  $D_1$ :

$$M_{r1} = \sqrt{M_{a1}^2 + \frac{u_1^2}{k RT_0} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_{a1}^2 \right)} = \sqrt{M_{a1}^2 + \frac{(\pi n D_1)^2}{k RT_0} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_{a1}^2 \right)}. \quad (2.117)$$

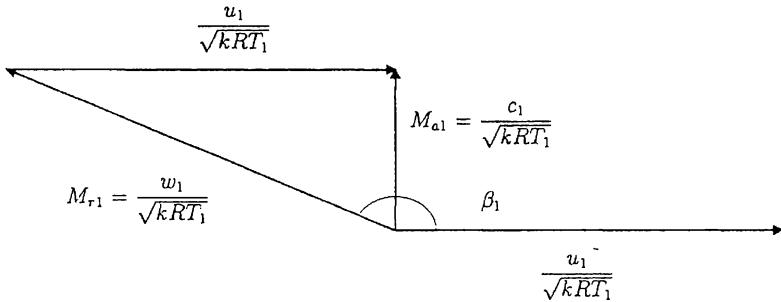


Figura 2.31: triangolo di velocità in ingresso pre girante.

Alternativamente, volendo utilizzare l'angolo  $\beta_1$  compreso tra  $w_1$  e  $u_1$ , si ha:

$$M_{r1} = \frac{M_{a1}}{\sin \beta_1}. \quad (2.118)$$

Essendo  $M_{a1}$  costante al variare del raggio, è immediato verificare che le condizioni più critiche si riscontrano alla punta della pala, laddove  $u_1$  ovvero  $1/\sin \beta_1$  (e quindi  $M_{r1}$ ) sono massimi. I parametri  $u_1$ ,  $D_1$  e  $\beta_1$  nella (2.117) e nella (2.118) devono quindi essere riferiti al diametro esterno  $D_{1e}$ .

La scelta di  $D_{1e}$  coincide praticamente con il dimensionamento dell'area della sezione di ingresso in pre girante,

$$A_1 = \frac{\pi}{4} (D_{1e}^2 - D_{1i}^2) = \frac{\pi}{4} D_{1e}^2 \left( 1 - \frac{D_{1i}^2}{D_{1e}^2} \right). \quad (2.119)$$

Il diametro interno  $D_{1i}$  va infatti scelto il più piccolo possibile compatibilmente con esigenze strutturali e costruttive e si può ritenere, con buona approssimazione,

$$A_1 = K_A \frac{\pi}{4} D_{1e}^2, \quad (2.120)$$

con  $K_A$  poco minore di uno e pressoché costante. Sostituendo la (2.120) nell'espressione della portata (per semplicità si supporrà  $\eta_{ug} = 1$ ), eq. (2.115), si ha quindi:

$$\frac{G\sqrt{RT_0}}{p_0} = K_A \frac{\pi}{4} D_{1e}^2 \frac{M_{a1} \sqrt{k}}{\left( 1 + \frac{k-1}{2} M_{a1}^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}. \quad (2.121)$$

Fissata la portata  $G$  si riscontra quindi che per valori molto bassi di  $D_{1e}$  e quindi di  $u_{1e}$ ,  $M_{a1}$  risulta molto elevato, mentre, per valori molto alti di  $D_{1e}$ , si ha  $M_{a1}$  piccolo, ma  $u_{1e}$  molto elevato. In entrambi i casi,  $M_{r1}$  raggiunge, al diametro esterno, valori piuttosto

alti. Ribaltando il discorso, ovvero fissando un limite massimo per  $M_{r1}$ , si comprende come la scelta di un diametro  $D_{1e}$  molto piccolo o molto grande comporti una limitazione della portata che può essere elaborata dalla macchina. Esisterà quindi un valore ottimale di  $D_{1e}$ , e quindi di  $\beta_{1e}$ , che massimizza, a fissato numero di giri, la portata. Dalla (2.118) si ricava infatti,

$$M_{a1} = M_{r1} \sin \beta_{1e}, \quad (2.122)$$

e, dal triangolo di velocità in fig. 2.31,

$$\begin{aligned} \frac{u_{1e}}{\sqrt{kRT_1}} &= -M_{r1} \cos \beta_{1e}, \\ u_{1e} &= -M_{r1} \cos \beta_{1e} \sqrt{kRT_1}, \\ \pi n D_{1e} &= -M_{r1} \cos \beta_{1e} \sqrt{kRT_0} \sqrt{\frac{T_1}{T_0}}, \\ D_{1e} &= \frac{-M_{r1} \cos \beta_{1e} \sqrt{kRT_0}}{\pi n \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_{r1}^2}}, \\ D_{1e} &= \frac{-M_{r1} \cos \beta_{1e} \sqrt{kRT_0}}{\pi n \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_{r1}^2 \sin^2 \beta_{1e}}}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Sostituendo la (2.122) e la (2.123) nella (2.121) si ricava, infine:

$$\begin{aligned} \frac{G\sqrt{RT_0}}{p_0} &= \frac{\pi}{4} K_A \frac{M_{r1}^2 \cos^2 \beta_{1e} kRT_0}{\pi^2 n^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{r1}^2 \sin^2 \beta_{1e}\right)} \frac{M_{r1} \sin \beta_{1e} \sqrt{k}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{r1}^2 \sin^2 \beta_{1e}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}, \\ \gamma &= \frac{4\pi n^2 G}{K_A p_0 k \sqrt{kRT_0}} = \frac{M_{r1}^3 \cos^2 \beta_{1e} \sin \beta_{1e}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{r1}^2 \sin^2 \beta_{1e}\right)^{\frac{2k-1}{2(k-1)}}}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

L'andamento del parametro  $\gamma$  in funzione dell'angolo  $\beta_{1e}$  è diagrammato in fig. 2.32 per  $k = 1.4$  e diversi valori di  $(M_{r1})_{max}$ : risulta evidente che la portata che può essere aspirata dalla pregrante dipende in modo significativo dalla scelta di  $\beta_{1e}$  e quindi di  $D_{1e}$ , come anticipato; in particolare si ha una progettazione ottimale (portata massima a pari  $(M_{r1})_{max}$  o minimo  $M_{r1}$  a pari portata) per  $\beta_{1e} \approx 150^\circ$ , valore poco dipendente da  $(M_{r1})_{max}$ <sup>10</sup>. Il triangolo di velocità in fig. 2.31 è stato rappresentato proprio per il valore ottimale  $\beta_{1e} = 150^\circ$ .

<sup>10</sup> Avendo fissato un valore così alto di  $\beta_{1e}$  è necessario poi verificare che la pregrante (parte assiale della girante) non defletta eccessivamente il flusso (ad esempio, per una girante con pale ad uscita radiale si potrebbe essere tentati di far raggiungere al flusso relativo la direzione assiale in corrispondenza dell'imboccato della parte radiale della girante per poi costruire le pale a sviluppo radiale perfettamente diritte; l'angolo di deflessione sarebbe, in tal caso,  $\beta_{1e} - 90^\circ \approx 60^\circ$ ): valori eccessivi dell'angolo di deflessione possono infatti provocare il distacco dello strato limite, a causa dell'effetto combinato del gradiente di pressione avverso e della curvatura delle pale.

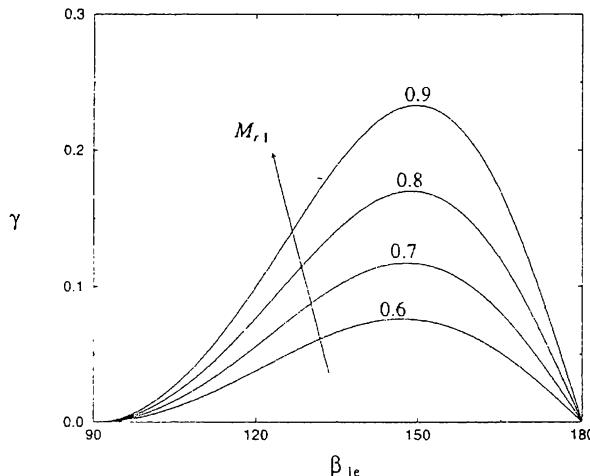


Figura 2.32: andamento del parametro  $\gamma = (4\pi n^2 G)/(K_A p_0 k \sqrt{k R T_0})$  in funzione dell'angolo di ingresso pre girante (al raggio esterno)  $\beta_{1e}$  e di alcuni valori di  $(M_{r1})_{max}$ .

La (2.124) mostra inoltre che la portata che può essere aspirata dalla pre girante è inversamente proporzionale ad  $n^2$ . Si osservi che tale dipendenza si ha anche nel progetto dell'uscita girante: infatti, fissati  $\varphi$  e  $\beta_2$  (e quindi  $\psi$ ,  $\chi$  e  $\rho_2$ ), il valore di  $u_2$  viene fissato in funzione del rapporto di compressione che si vuole realizzare (ovvero del lavoro  $L_i$  richiesto), per cui, in base alla (2.99), si ha:

$$G = \eta_v \xi \pi D_2^2 \frac{l_2}{D_2} \rho_2 \varphi u_2 = \frac{\eta_v \xi u_2^3 \frac{l_2}{D_2} \rho_2 \varphi}{\pi n^2} \propto \frac{1}{n^2}. \quad (2.125)$$

#### 2.4.4 Curve caratteristiche

Per poter individuare le prestazioni di un turbocompressore in una qualunque condizione di funzionamento è necessario rilevare sperimentalmente le cosiddette **curve caratteristiche**. Dall'analisi finora effettuata sappiamo che, al contrario delle analoghe macchine idrauliche, in cui prevalenza e rendimento dipendono solo da  $Q$  e da  $n$ , il funzionamento di un turbocompressore è influenzato da diversi altri parametri (si trascurano l'eventuale influenza del numero di Reynolds e del numero di Mach sulle perdite fluidodinamiche), ovvero le condizioni totali ( $p_0, T_0$ ) a monte della macchina (è ben noto che la portata in un condotto dipende, per esempio, da  $(p_0, T_0)$ , v. equazione (2.114)) ed il tipo di gas ( $k, R$ ). Per ridurre il numero dei rilievi sperimentali e dei corrispondenti grafici, risulta quindi

necessario individuare, in base al Teorema di Buckingham (v. paragrafo 1.4), il numero minimo possibile di parametri da cui dipende il funzionamento del turbocompressore.

Individuiamo, preliminarmente, i parametri da cui dipende la pressione di mandata  $p_4$ , nel caso di macchine geometricamente simili ( $l_2/D_2 = \text{cost}$ ,  $\beta_2 = \text{cost}$ , ecc.) e nell'ipotesi che la trasformazione 0 – 4 possa essere assimilata ad un'unica politropica<sup>11</sup>: l'espressione del lavoro,

$$L_i = \frac{k}{k-1} RT_0 \left[ \left( \frac{p_4}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{kn_y}} - 1 \right], \quad (2.77)$$

mostra che  $p_4$  è funzione di  $L_i$ ,  $k$ ,  $R$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $\eta_y$ :

$$p_4 = f(L_i, k, R, p_0, T_0, \eta_y); \quad (2.126)$$

essendo poi

$$L_i = \frac{\psi}{2} \pi^2 n^2 D_2^2, \quad (2.127)$$

si ha:

$$p_4 = f(\psi, n, D_2, k, R, p_0, T_0, \eta_y), \quad (2.128)$$

con

$$\psi = 2\sigma(1 + \varphi \cotg \beta_2) = f(\varphi). \quad (2.129)$$

Sappiamo, inoltre, che  $\varphi$  è un parametro indicativo della portata elaborata; trascurando  $\eta_y$ , si ha, infatti:

$$G = \xi \pi D_2^2 \frac{l_2}{D_2} \varphi \pi n D_2 \rho_2; \quad (2.130)$$

la densità in uscita dalla girante dipende (v. equazioni (2.89)-(2.98)) dal grado di reazione, e quindi ancora da  $\varphi$ :

$$\rho_2 = f(\chi(\varphi, \psi(\varphi)), k, R, p_0, T_0, \eta_y). \quad (2.131)$$

Sostituendo nella (2.130) si ha, quindi:

$$G = f(D_2, \varphi, n, k, R, p_0, T_0, \eta_y) \quad (2.132)$$

e ancora, ritornando alla (2.126):

$$p_4 = f(G, n, D_2, k, R, p_0, T_0, \eta_y). \quad (2.133)$$

Anche per i turbocompressori, così come nelle turbopompe, si può ritenere, con buona approssimazione<sup>12</sup>, che il rendimento idraulico  $\eta_y$  dipenda solo da  $\varphi$ :

$$\eta_y = \frac{L_i - L_w}{L_i} = \frac{\psi(\varphi) - \zeta(\varphi)}{\psi(\varphi)} = f(\varphi). \quad (1.181)$$

Eliminando  $\eta_y$  nella (2.133), si ottiene, infine:

$$p_4 = f(G, n, D_2, k, R, p_0, T_0). \quad (2.134)$$

<sup>11</sup> Ricordando che  $m < m' \approx m''$  e prolungando la curva 4 – 3 – 2 in fig. 2.30 fino alla pressione  $p_0$ , ci si rende conto che tale ipotesi è più che ragionevole.

<sup>12</sup> In questo caso, però, viene trascurata l'influenza sia del numero di Reynolds che della comprimibilità sulle perdite.

Poichè il fenomeno fisico dipende da sette parametri dimensionali ed uno adimensionale ( $k$ ) e questi parametri contengono quattro grandezze fondamentali (massa, lunghezza, tempo, temperatura), il Teorema di Buckingham afferma che è sufficiente utilizzare quattro parametri adimensionali (uno è ovviamente già noto,  $k$ ) per descrivere il funzionamento del turbocompressore. E' immediato verificare (questa, così come le altre verifiche, vengono lasciate come esercizio al lettore) che il vettore  $(p_0, T_0, R, D_2)$  costituisce una *base valida*. L'applicazione del Teorema di Buckingham porta quindi a formulare la seguente dipendenza funzionale:

$$\beta = f \left( \frac{G\sqrt{RT_0}}{D_2^2 p_0}, \frac{nD_2}{\sqrt{RT_0}}, k \right). \quad (2.135)$$

Per quanto detto prima, si ha, inoltre:

$$\eta_y = f \left( \frac{G\sqrt{RT_0}}{D_2^2 p_0}, \frac{nD_2}{\sqrt{RT_0}}, k \right). \quad (2.136)$$

Le curve caratteristiche di un turbocompressore vanno quindi rappresentate in funzione di un parametro caratterizzante la portata, di un parametro caratterizzante il regime di rotazione e di  $k$ . Nella pratica industriale, ci si riferisce ad un solo dato compressore ( $D_2$ ) e ad un dato gas ( $R, k$ ), perchè sia lecito trascurare le variazioni di  $Re$  e di  $M$ . Per questo motivo, tali termini vengono omessi senza alcuna preoccupazione per la coerenza dimensionale delle formule stesse:

$$\beta = f \left( \frac{G\sqrt{T_0}}{p_0}, \frac{n}{\sqrt{T_0}} \right), \quad (2.137)$$

$$\eta_y = f \left( \frac{G\sqrt{T_0}}{p_0}, \frac{n}{\sqrt{T_0}} \right). \quad (2.138)$$

I due parametri  $G\sqrt{T_0}/p_0$  e  $n/\sqrt{T_0}$  vengono rispettivamente chiamati portata corretta e numero di giri corretto.

Le curve caratteristiche vengono rilevate sperimentalmente aspirando un gas alle condizioni  $(p_{ref}, T_{ref})$  (solitamente aria aspirata alle condizioni standard,  $p_{ref} = 1 \text{ bar}$ ,  $T_{ref} = 288 \text{ K}$ ) e spesso diagrammate come  $\beta = f(G, n)$ ,  $\eta_y = f(G, n)$ . Per rendere più semplice l'uso di tali curve, è allora opportuno moltiplicare i due parametri di portata e di numero di giri utilizzati nella (2.137) e nella (2.138) rispettivamente per  $p_{ref}/\sqrt{T_{ref}}$  e  $\sqrt{T_{ref}}$ , per ottenere:

$$\beta = f \left( G \sqrt{\frac{T_0}{T_{ref}}} \frac{p_{ref}}{p_0}, n \sqrt{\frac{T_{ref}}{T_0}} \right), \quad (2.139)$$

$$\eta_y = f \left( G \sqrt{\frac{T_0}{T_{ref}}} \frac{p_{ref}}{p_0}, n \sqrt{\frac{T_{ref}}{T_0}} \right). \quad (2.140)$$

In tal modo, se il compressore elabora il gas utilizzato nelle prove, nelle stesse condizioni in cui sono state svolte tali prove, si può ulteriormente semplificare il legame funzionale,

$$\beta = f(G, n), \quad (2.141)$$

$$\eta_y = f(G, n), \quad (2.142)$$

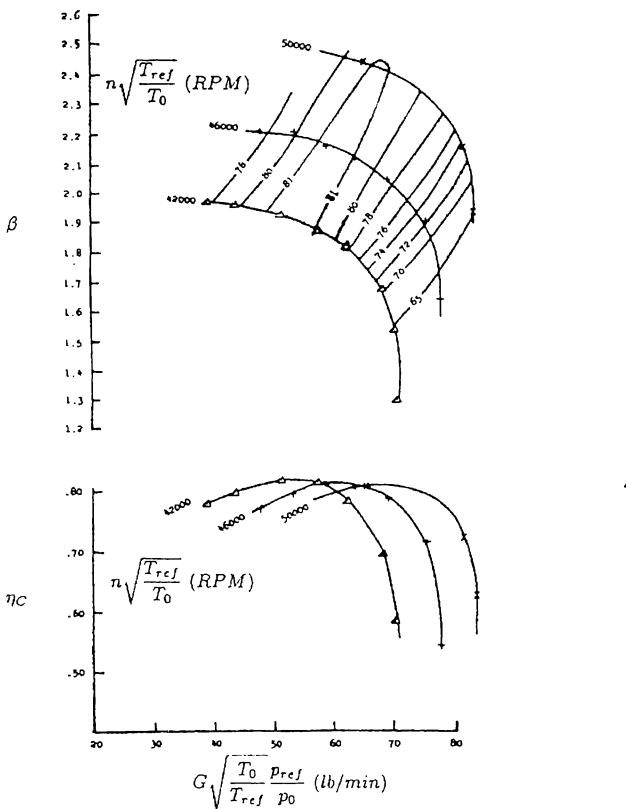


Figura 2.33: mappa di funzionamento di un compressore centrifugo con andamento del rendimento isoentropico.

mentre si continua a mantenere la dipendenza dalle condizioni di aspirazione ( $p_0, T_0$ ), nel caso in cui assumano valori diversi da quelli registrati durante le prove.

In fig. 2.33 è rappresentata la mappa di funzionamento di un compressore centrifugo, che riporta gli andamenti del rapporto di compressione e del rendimento isoentropico (quest'ultimo sia come curve isorendimento che come grafico cartesiano) in funzione della portata corretta e per tre valori del numero di giri corretto, v. equazioni (2.139) e (2.140). Si riscontra che il rapporto di compressione ed il rendimento isoentropico hanno andamenti poco variabili in prossimità del punto di progetto; per portate elevate, invece, il flusso diventa dapprima localmente transonico<sup>13</sup>, con conseguente formazione di urti ed

<sup>13</sup> Ad esempio sul lato in depressione di una pala; si ricorda infatti che il flusso all'interno della macchina non è, in realtà, unidimensionale, ma presenta significative variazioni sia tangenziali che in direzione perpendicolare a quella meridiana.

eventuale conseguente distacco dello strato limite, per poi raggiungere velocità soniche in una sezione completa della macchina. In tali condizioni si verifica, quindi, lo strozzamento (*chocking*) del flusso, cui corrisponde la massima portata che può essere smaltilta per quel determinato regime di rotazione (si ricorda che il flusso relativo è determinato anche da  $n$ , essendo  $w = c - u$ ). Per quanto detto, il rapporto di compressione ed il rendimento della macchina assumono andamenti rapidamente decrescenti a destra del diagramma. Va inoltre rilevato che, analogamente al caso delle pompe centrifughe, le linee isorendimento si discostano alquanto da un andamento parabolico. Tale scostamento è in questo caso ancora più evidente a causa del controciclo, che dipende da  $\beta$ , e dell'influenza, a livello termico, delle fughe.

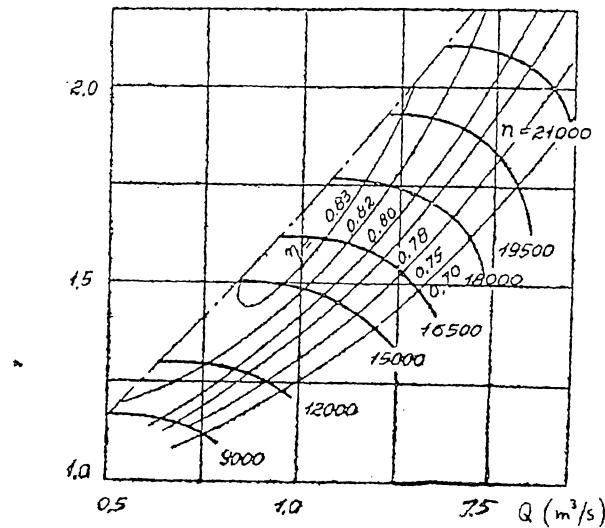


Figura 2.34: rappresentazione della linea di pompaggio sulla mappa di funzionamento di un compressore centrifugo.

In fig. 2.34 è rappresentata la mappa di funzionamento di un altro compressore centrifugo, in cui è evidenziata la cosiddetta linea di pompaggio, che separa la zona di funzionamento stabile, entro la quale deve funzionare il compressore, da quella instabile, non rappresentata nella mappa. Quando un compressore si trova a funzionare in condizioni di instabilità, infatti, si instaura un regime di funzionamento periodico, detto **ciclo di pompaggio**, già citato per le pompe, con fluttuazioni di portata e vibrazioni pericolose. Detto fenomeno, non analizzato qui in dettaglio, va ovviamente evitato, per cui esistono dei dispositivi di sicurezza che ne impediscono l'insorgere.

### 2.4.5 Regolazione

Il punto di funzionamento di un compressore centrifugo viene individuato, così come per le pompe centrifughe, intersecando la caratteristica interna (a fissato regime di rotazione  $n$  e relativa alle condizioni ambiente  $p$ ,  $T$ ) con la caratteristica esterna o dell'utilizzatore, v. punto P in fig. 2.35, in cui si è considerato, per semplicità di rappresentazione, un utilizzatore che richiede una pressione costante, pari a  $\beta^* p$ . Per regolare il compressore,

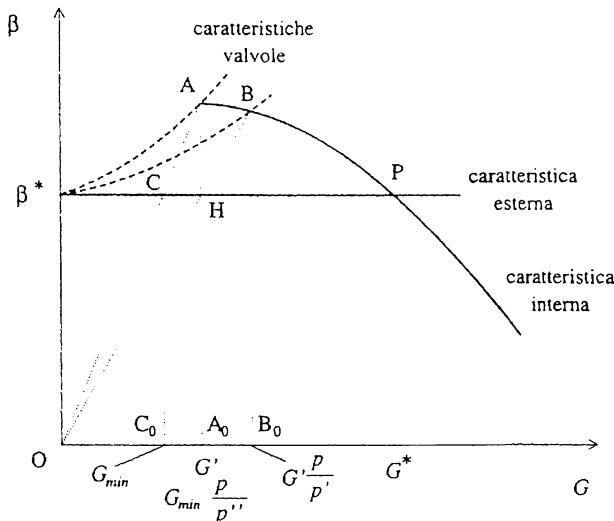


Figura 2.35: punto di funzionamento di un turbocompressore e regolazione per laminazione.

ovvero per variare la portata da esso elaborata, vengono solitamente utilizzati i seguenti due metodi:

- variazione del regime di rotazione;
- laminazione alla mandata o all'aspirazione.

Per il primo tipo di regolazione valgono le stesse considerazioni effettuate a proposito delle pompe centrifughe: possibilità di diminuire o, entro un certo limite, aumentare la portata, funzionamento nella zona ad alto rendimento, necessità di un motore a  $n$  variabile.

Nel secondo tipo di regolazione il regime di rotazione del compressore rimane invariato e viene inserita, alla mandata o all'aspirazione, una valvola. Nel primo caso, la valvola ha il solo effetto di creare, così come per le pompe, una riduzione di pressione (dipendente dal grado di apertura della valvola stessa), che permette l'innalzamento della caratteristica esterna con conseguente riduzione della portata elaborata, fino ad un valore minimo  $G'$ .

(funzionamento del compressore all'estremo sinistro del ramo stabile della caratteristica interna, punto A sulla linea di pompaggio, non rappresentata in fig. 2.35). Nel secondo caso, la riduzione di pressione avviene a monte del compressore, che pertanto aspira ad una pressione  $p'$  minore della pressione ambiente  $p$ , e ad una temperatura uguale a quella ambiente, essendo la laminazione ad entalpia totale costante. Se si vuole regolare il compressore in modo da farlo lavorare con lo stesso valore di portata  $G'$  individuato nel precedente caso, ci si accorge che il punto B, rappresentativo di tale funzionamento è a destra del punto A, essendo  $G'p/p' > G'$ . Il punto B può essere individuato graficamente intersecando la caratteristica interna con una retta che passi per l'origine e per il punto H, proiezione verticale del punto A sulla caratteristica esterna (costante), v. fig. 2.35. Essendo i triangoli  $OHA_0$  e  $OBH_0$  simili, si ha, infatti:

$$\frac{BB_0}{HA_0} = \frac{OB_0}{OA_0}. \quad (2.143)$$

Affinché la costruzione grafica sia corretta, deve essere verificata la seguente uguaglianza:

$$\frac{\beta_B}{\beta^*} = \frac{G' \frac{p}{p'}}{G'}, \quad (2.144)$$

che può essere semplificata in:

$$\beta^* p = \beta_B p'. \quad (2.145)$$

Essendo la pressione dell'utilizzatore costante, si ha, d'altra parte:

$$p_4 = \text{cost} = \beta^* p = \beta_B p', \quad (2.146)$$

per cui la (2.145) risulta verificata.

La costruzione grafica può essere ovviamente interpretata in modo inverso: se regolando per laminazione all'aspirazione il compressore si porta a lavorare in un punto B, esso elabora una portata corrispondente all'ascissa del punto H, intersezione della retta BO con la caratteristica esterna (costante). Analogamente, quando il compressore si porta a funzionare nel punto A, smaltisce una portata corrispondente all'ascissa del punto C, intersezione della retta AO con la caratteristica esterna. Tale valore di portata,  $G_{\min}$ , è il minimo valore che può essere raggiunto mediante laminazione all'aspirazione.

Al contrario delle pompe centrifughe, quindi, è preferibile regolare un compressore centrifugo mediante laminazione all'aspirazione, piuttosto che alla mandata, in quanto si ottiene:

- un campo di regolazione più ampio;
- un minor scostamento dal punto di progetto, a parità di regolazione.

Nei casi molto particolari in cui il compressore sia dotato di distributore palettato, infine, la regolazione può essere efficacemente realizzata variando l'angolo di inclinazione di tali pale.

## 2.5 Esercizi

1. Una pompa centrifuga, con rendimenti particolari  $\eta_y = 0.88$ ,  $\eta_v = 0.96$  e  $\eta_m = 0.98$ , aspira acqua da un bacino a pelo libero e la manda in una cisterna più alta di  $40\text{ m}$  ed a pressione relativa di  $3.5\text{ bar}$ . Sapendo che la portata mandata è  $Q = 15\text{ m}^3/\text{h}$ , calcolare la potenza assorbita dalla pompa,  $P_a$  (si assuma  $\eta_c = 0.97$ ).

$$P_a = 3.851\text{ kW}$$

2. Una pompa centrifuga fornisce una prevalenza  $H_u = 30\text{ m}$  con un rendimento idraulico  $\eta_y = 0.88$ . Si ha, inoltre,  $\beta_2 = 125^\circ$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\varphi = 0.3$ ,  $l_2/D_2 = 0.05$ ,  $\xi = 0.98$  e  $\eta_m = \eta_v = 0.98$ . Sapendo che la velocità di rotazione è  $n = 2850\text{ RPM}$ , determinare il diametro esterno della girante,  $D_2$ , la portata volumetrica smaltita,  $Q$ , e la potenza assorbita dalla pompa,  $P_a$ .

$$D_2 = 137.9\text{ mm} \quad Q = 17.70\text{ l/s} \quad P_a = 6.160\text{ kW}$$

3. Facendo riferimento alla turbopompa descritta nell'esercizio precedente, si dimensioni un diffusore a pareti piane e parallele che permetta una riduzione del 60% della velocità di scarico dalla girante. Stabilire se è possibile adottare un diffusore non palettato con diametro  $D_3 < 1.8 D_2$ ; in caso contrario, si calcoli l'inclinazione che devono avere le palette all'uscita del diffusore stesso per realizzare la condizione limite  $D_3 = 1.8 D_2$  (si trascurino  $\xi$ ,  $\eta_v$  e gli attriti fluidodinamici).

$$\text{diffusore non palettato: } D_3 = 2.5 D_2$$

$$\text{diffusore palettato: } \alpha_3 = 29.54^\circ$$

4. Un diffusore per turbopompa centrifuga a pareti piane e parallele ed a pale diritte presenta un angolo in entrata  $\alpha_2 = 30^\circ$  e un angolo in uscita  $\alpha_3 = 55^\circ$ . Calcolare il recupero percentuale di energia cinetica operato dal diffusore, supponendolo privo di perdite.

$$R = 83.66\%$$

5. Una pompa centrifuga, di diametro  $D$  e con velocità periferica  $u$ , fornisce una prevalenza  $H_u = 35\text{ m}$ , smaltendo una portata  $Q = 70\text{ l/s}$ . Calcolare quale prevalenza e quale portata è in grado di fornire una pompa geometricamente simile alla precedente ( $D'/D = 0.4$ ) e funzionante in condizioni di similitudine fluidodinamica con un rapporto delle velocità periferiche  $u'/u = 0.5$ .

$$H'_u = 8.750\text{ m} \quad Q' = 5.600\text{ l/s}$$

6. Una pompa centrifuga che ruota a  $n = 2900 \text{ RPM}$  fornisce una prevalenza  $H_u = 60 \text{ m}$ ; la pompa presenta inoltre i seguenti dati geometrici e di funzionamento:  $l_2/D_2 = 0.07$ ,  $\beta_2 = 130^\circ$ , numero di pale  $z = 9$ ,  $\xi = 0.98$ ,  $\varphi = 0.3$ ,  $\eta_y = 0.88$ ,  $\eta_m = 0.98$  e  $\eta_v = 0.95$ . Utilizzando la formula di Stodola, determinare il lavoro  $L_i$ , il diametro della girante,  $D_2$ , la portata fornita,  $G$ , e la potenza assorbita dalla macchina,  $P_a$ . Regolando poi la pompa a  $n$  costante, si riduce la portata al 60% di quella di progetto. Assumendo che  $\eta_m$  e  $\eta_v$  restino costanti e sapendo che il rendimento idraulico si riduce a  $\eta'_y = 0.75$ , calcolare la nuova prevalenza,  $H'_u$ , e la nuova potenza assorbita,  $P'_a$ .

$$L_i = 668.7 \text{ J/kg} \quad D_2 = 245.6 \text{ mm} \quad Q = 138.1 \text{ l/s}$$

$$P_a = 99.21 \text{ kW} \quad H'_u = 61.84 \text{ m} \quad P'_a = 71.99 \text{ kW}$$

7. Una pompa preleva una portata di acqua  $Q = 2.6 \text{ l/s}$  a  $p = 1 \text{ bar}$  e  $T = 50^\circ\text{C}$  ( $p_v = 0.1265 \text{ bar}$ ). La pompa fornisce all'acqua una prevalenza  $H_u = 60 \text{ m}$ , con un rendimento  $\eta_P = 0.85$ ; si ha, inoltre,  $h_0/H_u = 0.03$ . Determinare la potenza assorbita e l'altezza massima di installazione se le perdite nel condotto di aspirazione sono pari a 2 m di colonna d'acqua.

$$P_a = 1.800 \text{ kW} \quad z_{max} = 5.107 \text{ m}$$

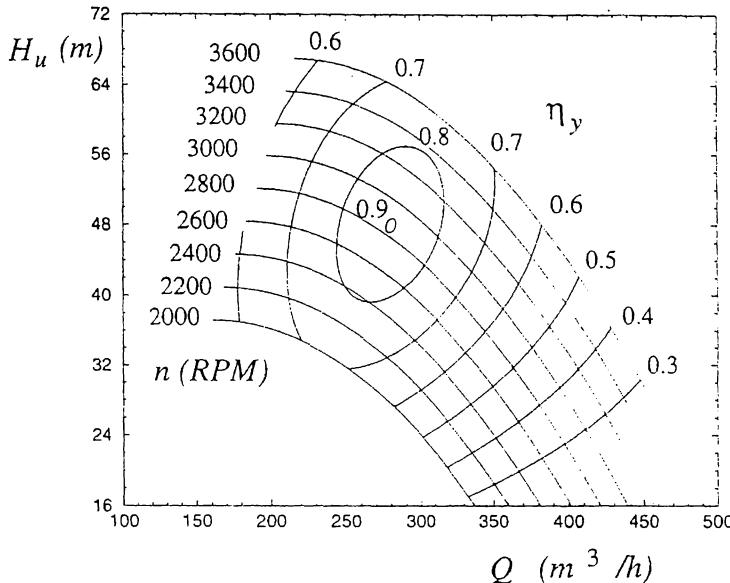
8. Una pompa centrifuga presenta le seguenti caratteristiche:  $Q = 100 \text{ l/s}$ ,  $\varphi = 0.3$ ,  $\beta_2 = 120^\circ$ ,  $\sigma = 0.85$ ,  $n = 2850 \text{ RPM}$ ,  $u_2 = 35 \text{ m/s}$ . Assumendo  $\eta_y = 0.85$ ,  $\eta_v = 0.96$ ,  $\eta_m = 0.96$  e  $\xi = 0.98$ , calcolare la prevalenza,  $H_u$ , la potenza assorbita,  $P_a$ , il rapporto  $l_2/D_2$  ed il numero di giri caratteristico,  $n_c$ .

$$H_u = 74.62 \text{ m} \quad P_a = 93.41 \text{ kW} \quad l_2/D_2 = 0.05858 \quad n_c = 129.6 \text{ RPM}$$

9. Si consideri un impianto di sollevamento costituito da una pompa centrifuga (v. mappa allegata) che ruota a  $n = 2800 \text{ RPM}$  e manda una portata  $Q = 320 \text{ m}^3/\text{h}$  di acqua da un serbatoio a pelo libero (altezza del pelo libero  $z_1 = 0$ ) ad un serbatoio più alto e in pressione (pressione assoluta  $p_2 = 3 \text{ bar}$ ). Sapendo che le perdite di carico nei condotti di aspirazione e di mandata sono pari rispettivamente a  $h_{w,asp} = 5 \cdot 10^{-6} Q^2$  e  $h_{w,mand} = 2 \cdot 10^{-5} Q^2$  ( $h_w$  in m e  $Q$  in  $\text{m}^3/\text{h}$ ) e che  $h_0/H_u = 0.03$ , determinare l'altezza  $z_2$ , la potenza assorbita,  $P_a$  ( $\eta_v = 0.98$ ,  $\eta_m = 0.97$ ), e l'altezza massima di installazione della pompa,  $z_{max}$  ( $p_v = 7 \text{ kPa}$ ).

Successivamente si richiede una riduzione della portata del 25%. Supponendo che  $\eta_v$  e  $\eta_m$  rimangano invariati, calcolare:

- la potenza assorbita dalla pompa  $P'_a$  e la caduta di pressione nella valvola  $\Delta p_v$ , nel caso di regolazione per laminazione;
- la potenza assorbita dalla pompa  $P''_a$  e il nuovo regime di rotazione  $n''$  nel caso di regolazione per variazione del numero di giri.



N.B.: la mappa qui riportata è ottenuta utilizzando semplici espressioni analitiche e non si riferisce quindi ad alcuna macchina realmente esistente.

$$z_2 = 17.7 \text{ m} \quad P_a = 51.6 \text{ kW} \quad z_{max} = 7.75 \text{ m}$$

$$P'_a = 45.0 \text{ kW} \quad \Delta p_v = 1.07 \text{ bar}$$

$$P''_a = 35.3 \text{ kW} \quad n'' = 2290 \text{ RPM}$$

10. Un compressore centrifugo comprime aria ambiente ( $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ) fino ad una pressione  $p_4 = 2.5 \text{ bar}$  con un rendimento isoentropico  $\eta_{ad} = 0.85$ . Sapendo che tra l'ambiente di aspirazione e l'ingresso in girante, ove  $c_1 = 110 \text{ m/s}$ , l'aria evolve secondo una politropica  $m = 1.31$  e che tra l'uscita della girante, ove  $c_2 = 270 \text{ m/s}$ , e l'ambiente di mandata l'aria evolve secondo una politropica  $m'' = 1.48$ , determinare  $p_1$ ,  $p_2$  e l'esponente  $m'$  della politropica relativa all'evoluzione tra l'ingresso e l'uscita della girante.

$$p_1 = 0.9146 \text{ bar} \quad p_2 = 1.8493 \text{ bar} \quad m' = 1.4696$$

11. Un compressore centrifugo a pale radiali, che ruota a  $n = 20000 \text{ RPM}$ , presenta le seguenti caratteristiche geometriche e di funzionamento:  $D_2 = 300 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 30 \text{ mm}$ ,  $\varphi = 0.3$ ,  $\eta_m = \eta_v = 0.98$ ,  $\xi = 0.97$  (si trascuri l'effetto dello scorrimento). Conoscendo le condizioni di aspirazione dell'aria,  $p_a = 1 \text{ bar}$  e  $T_a = 288 \text{ K}$ , e supponendo che tra l'ambiente di aspirazione e la sezione 2 di uscita dalla girante

l'aria evolva secondo una politropica di esponente  $m = 1.46$ , calcolare la pressione  $p_2$ , la portata mandata,  $G$ , e la potenza assorbita dal compressore,  $P_a$ . Sapendo che il diffusore riduce la velocità dell'aria al valore  $c_3 = 40 \text{ m/s}$  senza perdite fluidodinamiche, calcolare la pressione  $p_3$  in uscita dal diffusore.

$$p_2=1.5807 \text{ bar} \quad G=4.192 \text{ kg/s}$$

$$P_a=430.8 \text{ kW} \quad p_3=2.6453 \text{ bar}$$

12. Un compressore centrifugo aspira aria dall'ambiente ( $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ) ed è caratterizzato dai seguenti dati:  $\eta_{ad} = 0.82$ ,  $\eta_{ug} = 0.96$ ,  $p_1 = 85 \text{ kPa}$ ,  $n = 55000 \text{ RPM}$ , diametri interno ed esterno in ingresso pregirante,  $D_{1i} = 20 \text{ mm}$  e  $D_{1e} = 64 \text{ mm}$ ,  $\beta_2 = 127^\circ$ ,  $D_2/D_{1e} = 2.1$ ,  $\sigma = 0.88$ ,  $l_2/D_2 = 0.06$ ,  $\xi = 0.98$ ,  $\eta_v = 0.97$ . Ipotizzando che l'esponente della politropica di compressione in girante sia  $m = 1.48$ , calcolare la portata  $G$  ed il rapporto di compressione  $\beta$ .

$$G=0.4954 \text{ kg/s} \quad \beta=2.587$$

13. Si vuole dimensionare la girante di un compressore centrifugo per la sovralimentazione di un motore a combustione interna. Si prevedono le seguenti condizioni di progetto:  $\beta = 1.8$ ,  $G = 0.12 \text{ kg/s}$ ,  $l_2/D_2 = 0.08$ ,  $\varphi = 0.28$ ,  $\beta_2 = 120^\circ$ ,  $z = 12$ ,  $\xi = 0.98$ ,  $\eta_v = 1$ , diametro interno in ingresso pregirante  $D_{1i} = 10 \text{ mm}$ , numero di Mach (assoluto) in ingresso pregirante  $M_{a1} = c_1/a_1 = 0.45$ ,  $\eta_{ug} = 0.96$  e  $\eta_v = 0.82$  (si supponga, ai fini del calcolo delle condizioni termodinamiche in uscita girante, un'unica trasformazione politropica 0-2-3-4). Calcolare il diametro di uscita girante,  $D_2$ , la velocità di rotazione,  $n$ , il diametro esterno in ingresso pregirante,  $D_{1e}$ , ed il corrispondente numero di Mach relativo,  $M_{r1} = w_{1e}/a_1$ .

$$D_2=58.44 \text{ mm} \quad n=107200 \text{ RPM}$$

$$D_{1e}=32.17 \text{ mm} \quad M_{r1}=0.7039$$

- \*14. Un compressore centrifugo è caratterizzato dai seguenti dati geometrici:

- pregirante:  $D_{1e} = 115 \text{ mm}$ ,  $D_{1i} = D_{1e}/4$ ;

- girante:  $D_2 = 208 \text{ mm}$ ,  $l_2/D_2 = 0.07$ ,  $\xi = 0.97$ ,  $\beta_2 = 120^\circ$ .

In una prova al banco ( $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ) vengono rilevati i seguenti dati:  $n = 35000 \text{ RPM}$ , condizioni in ingresso ed uscita girante  $p_1 = 90 \text{ kPa}$ ,  $p_2 = 1.6 \text{ bar}$ ,  $T_2 = 350 \text{ K}$ . Supponendo  $\eta_{ug} = 0.96$  e  $\eta_v = 0.97$ , determinare il numero di Mach relativo alla punta della pregirante  $M_{r1} = w_{1e}/a_1$ , la portata  $G$ , il numero di Mach all'uscita della girante,  $M_2$ , e lo scorrimento  $\sigma$ .

$$M_{r1}=0.7358 \quad G=1.400 \text{ kg/s}$$

$$M_2=0.7813 \quad \sigma=0.8509$$

# Capitolo 3

## MACCHINE OPERATRICI VOLUMETRICHE

### 3.1 GENERALITÀ

Nelle macchine operatrici volumetriche, l'energia viene scambiata fra le parti mobili della macchina ed il fluido mediante azioni quasi statiche. L'aumento di pressione è dovuto alla riduzione di volume imposta ad una massa costante di fluido intrappolata tra le parti fisse e quelle mobili della macchina. Una macchina operatrice volumetrica si presta egregiamente per conferire al fluido pressioni di mandata notevoli, ma elabora portate normalmente inferiori rispetto ad una turbomacchina di pari ingombro. Le macchine operatrici volumetriche si distinguono poi in alternative e rotative sulla base del tipo di moto seguito dalla loro parte mobile, e sono adatte per rapporti portata/rapporto di compressione rispettivamente minori e maggiori.

Nelle macchine operatrici volumetriche si può normalmente trascurare il lavoro delle resistenze passive  $L_w$  poiché, come detto, la compressione è di tipo quasi statico<sup>1</sup>; nei compressori, inoltre, il gas si riscalda all'aumentare della pressione e, grazie alle basse velocità in gioco, riesce a cedere del calore alle pareti. Pertanto, ipotizzando che la compressione sia politropica, essa sarà caratterizzata da un esponente  $m < k$  ed il lavoro  $L_i$  risulterà minore di quello isoentropico. Per i compressori volumetrici, quindi, si preferisce far riferimento al rendimento isotermo, definito come il rapporto fra il lavoro isotermo ( $L_i$ )<sub>is</sub> (lavoro minimo di compressione per una trasformazione reversibile tra le stesse condizioni iniziali e pressione finale) ed il lavoro  $L_i$  compiuto sul gas nella compressione reale:

$$\eta_{is} = \frac{(L_i)_{is}}{L_i}. \quad (3.1)$$

Per le ipotesi fatte ( $L_w = 0$ ,  $\Delta E_c = 0$ ) e supponendo il gas perfetto, il lavoro isotermo è,

---

<sup>1</sup>Nelle pompe e nei compressori alternativi la velocità del pistone, e quindi quella del fluido, è molto ridotta per limitare le forze di inerzia negli organi meccanici. Nelle macchine rotative, invece, il fluido viene trascinato dal rotore a velocità piuttosto elevate. Si verificano comunque degli sforzi tangenziali significativi solo in prossimità della cassa, per cui in prima approssimazione è ancora possibile ritenere  $L_w$  trascurabile rispetto all'elevato valore del lavoro di compressione  $L_i$ .

in base alla (1.165), pari a:

$$(L_i)_{is} = RT_1 \int_1^2 \frac{dp}{p} = RT_1 \ln \beta, \quad (3.2)$$

essendo  $\beta = p_2/p_1$  il rapporto di compressione.

Nelle macchine operatrici volumetriche, viene introdotta ciclicamente una massa costante di fluido, che viene successivamente compressa e poi inviata all'esterno. Il lavoro viene pertanto calcolato con riferimento a tale massa, ovvero al singolo ciclo descritto dalla macchina (lavoro al ciclo,  $L_c$ ). La potenza interna e la potenza assorbita vengono poi valutate come

$$P_i = L_c n_c, \quad (3.3)$$

$$P_a = \frac{L_c n_c}{\eta_m}, \quad (3.4)$$

dove  $n_c$  è il numero di cicli all'unità di tempo. Indicando con  $G$  la portata mandata e con  $G/\eta_v$  (maggiore di  $G$  a causa delle fughe) la portata cui viene fornito il lavoro  $L_i$ , si ha, come già ricavato nel capitolo 2:

$$P_i = \frac{G L_i}{\eta_v}, \quad (2.80)$$

e, combinando la (3.3) con la (2.80):

$$L_i = \frac{\eta_v L_c n_c}{G}, \quad (3.5)$$

che, nel caso dei compressori, permette di calcolare, tramite la (3.1), il rendimento isotermo,  $\eta_{is}$ . Il costo della compressione può essere infine valutato calcolando il lavoro  $L'_i$  ad unità di massa mandata:

$$L'_i = \frac{L_i}{\eta_v} = \frac{L_c n_c}{G}. \quad (3.6)$$

## 3.2 COMPRESSORI ALTERNATIVI

### 3.2.1 Schemi costruttivi

Il compressore alternativo più semplice è il compressore a stantuffo monostadio a semplice effetto. Esso è costituito da un cilindro entro cui scorre con moto alterno uno stantuffo, comandato da un sistema biella-manovella, v. fig. 3.1. Sulla testa del cilindro sono ricavati gli spazi per la distribuzione, che normalmente è a valvole (di aspirazione e di mandata) automatiche. Il cilindro è ricavato in un basamento provvisto di fori per il passaggio di acqua di refrigerazione oppure di una serie di alettature, in modo da sottrarre calore durante la compressione e quindi ridurre il lavoro richiesto; la sottrazione di calore viene oggi realizzata anche mediante iniezione di un opportuno refrigerante o per mezzo dello stesso olio di lubrificazione (il gas deve ovviamente attraversare dei filtri prima di essere utilizzato). Questo semplice schema costruttivo del compressore alternativo può essere modificato in modo da ottenere un compressore a doppio effetto, v. fig. 3.2: lo stantuffo è collegato al meccanismo biella-manovella tramite uno stelo, che scorre a tenuta

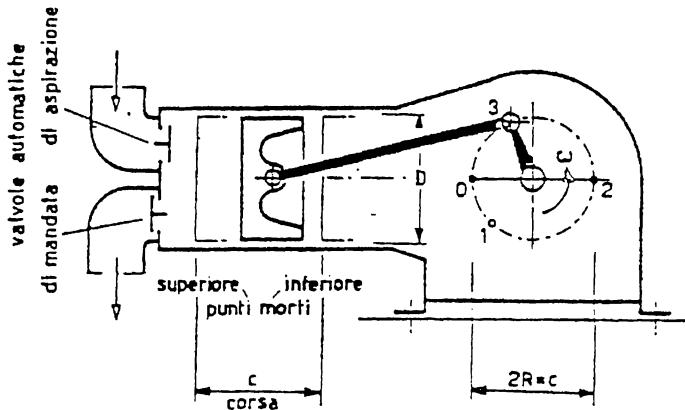


Figura 3.1: compressore alternativo a semplice effetto.

attraverso il fondo del cilindro; tra questo e lo stantuffo si crea quindi una seconda camera di compressione, dotata anch'essa di una valvola di aspirazione e di una di mandata. Il compressore a doppio effetto consente di raddoppiare quasi la portata di gas, in quanto la camera attraversata dallo stelo è dotata di un volume leggermente minore dell'altra.

Un compressore alternativo monostadio non raggiunge mai rapporti di compressione superiori a  $5 \div 7$  per due motivi principali:

- la portata aspirata decresce fortemente all'aumentare di  $\beta$  (v. paragrafo 3.2.4);
- una forte compressione causa un aumento notevole della temperatura del gas compresso, e quindi di quella del lubrificante, con significativa riduzione della viscosità.

Per ovviare a questi inconvenienti e per ridurre il lavoro di compressione (v. equazione (3.2)) sono stati realizzati compressori a più stadi con raffreddamento del gas durante il passaggio da uno stadio al successivo, v. fig. 3.3.

Il funzionamento di un compressore alternativo viene analizzato mediante il cosiddetto ciclo di lavoro, che riporta l'andamento della pressione nel cilindro (supposta uniforme nel volume e quindi pari alla pressione esercitata sulla testa del pistone) in funzione del volume totale di gas in esso contenuto.

Il ciclo di lavoro può essere definito con diversi livelli di approssimazione: il funzionamento della macchina sarà inizialmente illustrato trascurando le perdite nelle valvole, gli scambi termici attraverso le pareti e le fughe (ciclo ideale); successivamente, si mostrerà come la presenza di questi fenomeni reali alteri l'andamento della pressione nel cilindro (ciclo reale o indicato<sup>2</sup>) rispetto al ciclo ideale, e come se ne possa tener conto in modo

<sup>2</sup>Il ciclo reale di un compressore a stantuffo viene anche definito ciclo indicato, in quanto in passato esso veniva rilevato mediante l'applicazione al cilindro di un apparecchio, detto indicatore; oggi giorno si utilizzano trasduttori piezoelettrici.

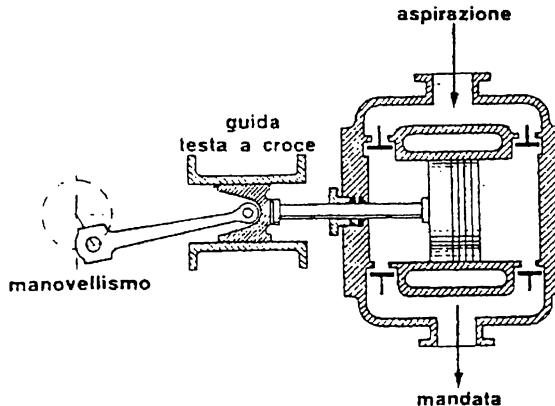


Figura 3.2: compressore alternativo a doppio effetto.

semplice, approssimando le varie fasi del ciclo (**ciclo convenzionale**). In tutti i casi si farà riferimento ad un compressore alternativo monostadio a semplice effetto che aspira gas da un ambiente a pressione  $p_1$  e lo manda in un ambiente a pressione  $p_2 = \beta p_1 > p_1$  e si supporrà che entrambi gli ambienti abbiano volumi molto grandi rispetto alla cilindrata del compressore.

Introduciamo alcuni concetti e definizioni generali. Collegato ad un comune manovellismo di spinta, lo stantuffo si muove all'interno del cilindro da un punto in prossimità del cielo del cilindro, detto **punto morto superiore (PMS)**, ad un altro punto, detto **punto morto inferiore (PMI)**, la cui distanza dal primo è pari alla **corsa**  $c$  del pistone. Si dice che il pistone è al PMS quando esso inverte il moto ed il volume a disposizione del gas è minimo; analogamente, la posizione di PMI è quella assunta dal pistone quando esso inverte il moto ed il volume a disposizione del gas è massimo. In corrispondenza del PMS e del PMI vengono quindi individuati rispettivamente il volume minimo  $V_m$  e il volume massimo  $V_1$ . Il primo è anche detto **volumen di spazio morto o di spazio nocivo**, in quanto la sua presenza, inevitabile per permettere l'apertura delle valvole, riduce, come sarà mostrato successivamente, il volume utile per l'aspirazione del gas. Il volume totale spazzato dal pistone nel suo spostamento dal PMS al PMI,  $V_c = V_1 - V_m$ , è pari al prodotto dell'area della testa del pistone,  $A_p = \pi D^2/4$  ( $D$  viene detto **alesaggio**), per la corsa  $c$ :

$$V_c = A_p c = \pi \frac{D^2}{4} c. \quad (3.7)$$

La **cilindrata**  $V$  di un compressore monocilindrico a semplice effetto è quindi pari a  $V_c$ , mentre, per un compressore monocilindrico a doppio effetto, si ha  $V \approx 2V_c$ .

Si definisce **grado di spazio morto**,  $\mu$ , il rapporto tra il volume di spazio morto ed

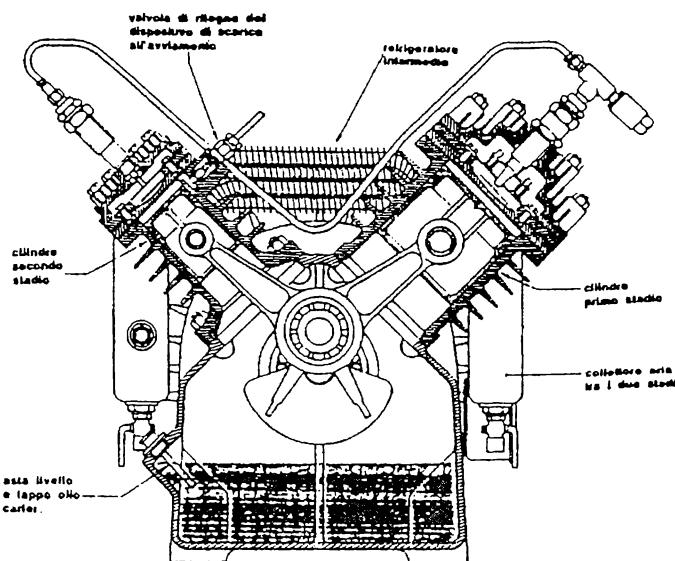


Figura 3.3: esempio di compressore alternativo bistadio con interrefrigeratore.

il volume spazzato dal pistone:

$$\mu = \frac{V_m}{V_c}. \quad (3.8)$$

Pertanto, il volume massimo è pari a:

$$V_1 = V_c + V_m = (1 + \mu)V_c. \quad (3.9)$$

### 3.2.2 Ciclo ideale

Il ciclo ideale di funzionamento di un compressore alternativo monostadio a semplice effetto verrà analizzato considerando  $\mu \neq 0$ , per agevolare il successivo calcolo del ciclo convenzionale. Costruiamo il ciclo ideale a partire dalla posizione 1, in cui il pistone inizia la corsa dal PMI verso il PMS (v. fig. 3.4a). Lo spostamento dello stantuffo genera un'onda di pressione che provoca la chiusura della valvola 1 di aspirazione. Anche la valvola automatica di mandata 2 è chiusa, in quanto collegata con il serbatoio di mandata, a pressione  $p_2 > p_1$ . Pertanto, in questa fase, si ha una massa costante di gas intrappolata in un ambiente il cui volume diminuisce a seguito dello spostamento del pistone. Quindi, nelle ipotesi di ciclo ideale, la fase 1-2 è una compressione isoentropica. Raggiunta la pressione  $p_2$  regnante nell'ambiente di mandata, la valvola 2 si apre. Questa apertura fa in modo che la pressione all'interno del cilindro non cresca ulteriormente nella residua corsa dello stantuffo verso il PMS, durante la quale il gas viene spinto dall'interno del

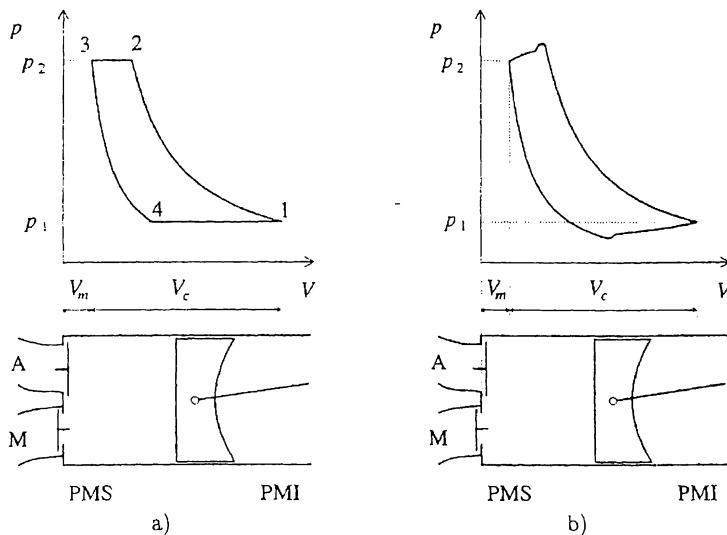


Figura 3.4: cicli a) ideale e b) reale di un compressore alternativo.

cilindro verso l'ambiente di mandata a pressione costante,  $p_2$ . Pertanto, la fase 2-3 di mandata è una isobara a massa variabile. Lo stantuffo, arrivato al PMS, inverte il suo moto, generando un'onda di espansione che fa chiudere la valvola 2 di mandata. La valvola di aspirazione 1 rimane anch'essa chiusa poiché la pressione all'interno del cilindro è maggiore di  $p_1$ . In questa fase, si ha una massa costante di gas intrappolata in un ambiente il cui volume aumenta a seguito dello spostamento del pistone. La fase 3-4 è quindi un'espansione isoentropica. Raggiunta la pressione  $p_1$ , la valvola di aspirazione 1 si apre e l'ulteriore spostamento verso il PMI dello stantuffo consente l'ingresso di gas dall'ambiente di aspirazione nel cilindro; tale fase è quindi a massa variabile ed a pressione costante,  $p_1$ .

Il ciclo di lavoro sopra descritto è quindi costituito da due isobare a massa variabile e due isoentropiche e pertanto non può essere analizzato mediante il I PTD né in forma lagrangiana né in forma euleriana. Il lavoro al ciclo ricevuto dal fluido può comunque essere valutato calcolando il lavoro fatto dal pistone sul gas contenuto nel cilindro in un ciclo. Considerando positivo uno spostamento dal PMI al PMS ( $dx = -dV/A_p$ ), cioè concorde con la forza esercitata dal pistone sul gas, si ha:

$$L_c = \oint p A_p dx = - \oint pdV. \quad (3.10)$$

Il lavoro che il pistone compie sul gas in un ciclo è quindi rappresentato dall'area del ciclo. Il lettore può verificare che il lavoro fatto dal pistone sull'aria ambiente in un ciclo

è nullo. Per comodità, essendo  $-\oint pdV = \oint Vdp$ , l'area del ciclo può essere facilmente calcolata con due soli integrali:

$$(L_c)_{id} = -\oint pdV = -\oint d(pV) + \oint Vdp = \oint Vdp = \int_1^2 Vdp + \int_3^4 Vdp = \\ = \int_1^2 Vdp - \int_4^3 Vdp = \frac{k}{k-1} p_1 (V_1 - V_4) (\beta^{\frac{k-1}{k}} - 1). \quad (3.11)$$

### 3.2.3 Ciclo reale

Il funzionamento reale di un compressore alternativo monostadio differisce da quello ideale per la presenza di alcuni fenomeni finora trascurati:

- trafileamenti attraverso le valvole;
- inerzia delle valvole;
- scambi termici con le pareti;
- perdite per fughe.

Con riferimento alla fig. 3.4b, analizziamo il ciclo reale a partire dalle fasi di aspirazione e di mandata: il fluido, attraversando le valvole, subisce una perdita di pressione, cui corrisponde un abbassamento della linea rappresentante la fase di aspirazione ed un innalzamento della linea rappresentante la fase di mandata. Gli scostamenti rispetto all'isobara dipendono dalla sezione di passaggio delle valvole e dalla velocità del fluido attraverso le stesse, quest'ultima dipendente dalla velocità del pistone. La distribuzione, in generale, è fatta con semplici valvole automatiche, che hanno il pregio di non richiedere organi di comando per la loro apertura e chiusura. Le valvole automatiche, dovendosi aprire e chiudere, hanno però un'inerzia al moto. Questa produce una sovrappressione all'inizio della fase di mandata ed una depressione all'inizio della fase di aspirazione (cui seguono, talvolta, piccole oscillazioni di pressione), come evidenziato in fig. 3.4b.

Per quanto riguarda gli scambi termici si può osservare che le fasi di compressione ed espansione non sono né isoentropiche, né, più in generale, politropiche. Infatti, le pareti del compressore che, a regime, raggiungono una temperatura intermedia tra quella di aspirazione e di mandata del gas, riscaldano il gas stesso durante la prima parte della compressione e lo raffreddano durante la seconda parte, una volta che, per effetto della compressione stessa, il gas ha superato la temperatura delle pareti. Viceversa, l'espansione dei gas intrappolati nello spazio morto avviene, nella prima parte, con cessione di calore da parte del gas alle pareti e, nella seconda parte, con riscaldamento del gas da parte delle pareti stesse.

Le perdite per fughe sono estremamente ridotte in una macchina in buono stato di conservazione, grazie alla presenza di fasce elastiche di tenuta e raschiaolio, per cui verranno trascurate nella trattazione seguente.

Ritorniamo ad esaminare, più in dettaglio, il funzionamento delle valvole e la loro influenza sul ciclo. In fig. 3.5 sono rappresentati lo schema costruttivo e lo spaccato di una valvola automatica. Per quanto detto, la valvola deve avere la parte mobile più leggera possibile e la sezione di passaggio più ampia possibile: essa consta di una sede *s*, provvista

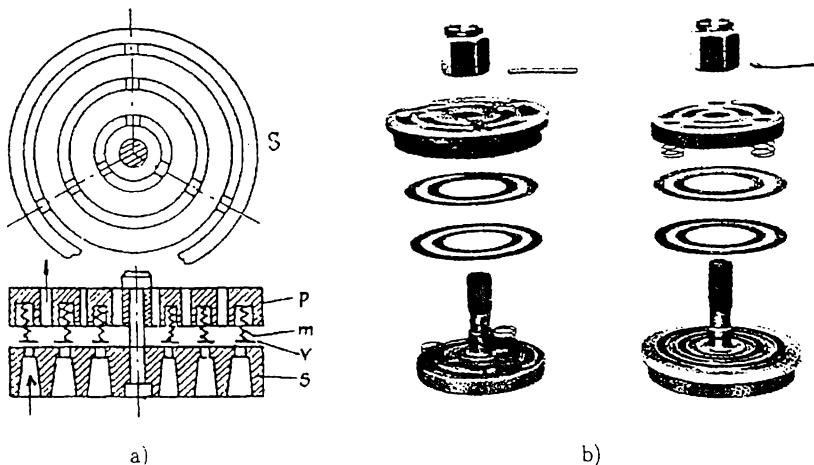


Figura 3.5: a) schema costruttivo di una valvola automatica; b) spaccato di una valvola di aspirazione e di una valvola di mandata (da manuale Atlas Copco).

di solchi anulari, sui quali si adagiano dei sottili anelli di acciaio  $v$  suscettibili di alzarsi lievemente per effetto della differenza di pressione fra i due ambienti separati dalla valvola; una serie di molle a spirale  $m$  messe in compressione grazie al coperchio  $p$ , mantiene gli anelli in posizione chiusa finché la differenza di pressione, vincendo la comunque debole resistenza delle molle e l'inerzia degli anelli  $v$ , apre le valvole stesse. E' quindi importante che la parte mobile delle valvole sia estremamente leggera, ma adeguata alle forze a cui deve resistere. Nel caso della valvola di mandata, ad esempio, la valvola è orientata in modo da avere la sede  $s$  affacciata all'interno del cilindro ed il coperchio dal lato del collettore di mandata: quando la pressione all'interno del cilindro è minore di quella esterna, la valvola di aspirazione rimane chiusa, in quanto la forza dovuta alla differenza di pressione e la forza esercitata dalla molla sono concordi. Quando, viceversa, la pressione all'interno supera la pressione esterna, la differenza di pressione tra monte e valle degli anelli  $v$  vince la debole resistenza delle molle e l'inerzia delle masse mobili e provoca l'apertura delle valvole. Durante entrambe le fasi di aspirazione e di mandata deve quindi esistere una certa differenza di pressione tra interno ed esterno (rispettivamente negativa e positiva nei due casi) che consenta di vincere la resistenza della molla stessa. D'altra parte, una differenza di pressione tra interno ed esterno è comunque provocata dal passaggio del gas attraverso la valvola stessa: ad esempio, il gas che si trova esternamente alla pressione  $p_1$  ed alla temperatura  $T_1$  acquista nei condottini ricavati nella valvola di aspirazione una velocità  $w'_1$ , per cui si ha una espansione da  $p_1$  a  $p'_1$ . Successivamente, entrando nel cilindro, il gas incontra un brusco allargamento di sezione, per cui l'energia cinetica  $(w'_1)^2/2$  viene dissipata isobaricamente (i condottini non possono essere conformati in modo da assicurare la diffusione). All'interno del cilindro, supponendo condizioni di regime, regna quindi una pressione  $p'_1 < p_1$ . La corrispondente perdita di pressione  $\Delta p^A = p_1 - p'_1$  è

comunque piccola per cui, in prima approssimazione, si può considerare il gas incompressibile ( $\rho = \rho_1 = \text{cost}$ ). Considerando il fenomeno stazionario in prima approssimazione ed applicando il I PTD in forma meccanica fra la sezione immediatamente a monte e quella ristretta della valvola e supponendo  $L_w = K_1(w'_1)^2/2$ , si ricava:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p'_1}{\rho_1} + (1 + K_1) \frac{(w'_1)^2}{2}, \quad (3.12)$$

dove  $p_1$  è la pressione nell'ambiente di aspirazione (in cui la velocità del gas è trascurabile) e  $p'_1$  è la pressione nella luce strozzata della valvola, pari, per quanto detto, alla pressione all'interno del cilindro. Dall'equazione precedente risulta:

$$\frac{\Delta p^A}{\rho_1} = \frac{p_1 - p'_1}{\rho_1} = (1 + K_1) \frac{(w'_1)^2}{2}. \quad (3.13)$$

In maniera del tutto analoga si ricava, per la valvola di mandata:

$$\frac{\Delta p^M}{\rho_2} = \frac{p'_2 - p_2}{\rho_2} = (1 + K_2) \frac{(w'_2)^2}{2}, \quad (3.14)$$

essendo  $w'_2$  la velocità con cui il gas attraversa la valvola di mandata. Le velocità  $w'_1$  e  $w'_2$  possono essere messe in relazione con altri importanti parametri della macchina mediante il seguente ragionamento, valido nell'ipotesi di poter trascurare la comprimibilità del gas durante le fasi di aspirazione e di mandata. Considerato un intervallo infinitesimo di tempo  $dt$ , il volume spazzato dallo stantuffo durante le fasi di aspirazione o di mandata è uguale al volume di gas che attraversa le corrispondenti valvole. Indicando con  $w'$  la velocità attraverso la valvola, con  $A'$  l'area della corrispondente sezione di passaggio e con  $w_p$  e  $A_p$  la velocità e l'area della testa del pistone, si ha:

$$w' A' = w_p A_p. \quad (3.15)$$

Combinando la (3.15) con la (3.13) o con la (3.14), si ricava, in generale:

$$\Delta p = (1 + K) \rho \left( \frac{A_p}{A'} \right)^2 \frac{w_p^2}{2}, \quad (3.16)$$

con  $\rho$  e  $K$  scelti opportunamente, a seconda che si tratti della valvola di aspirazione o di quella di mandata. La perdita per trafiletto attraverso una valvola è quindi proporzionale al quadrato di  $w_p$ . Se la velocità del pistone e l'area della sezione di passaggio della valvola fossero costanti, la caduta di pressione  $\Delta p$  sarebbe anch'essa costante. In realtà, lo stantuffo si muove con velocità variabile, data, in prima approssimazione (valida per piccoli rapporti tra raggio di manovella e lunghezza di biella), dalla legge sinusoidale  $w_p = \omega r \sin \theta = \omega r s \sin(\omega t)$  (in cui  $r$  ed  $\omega$  sono la lunghezza e la velocità angolare della manovella e  $\theta$  è l'angolo da essa descritto). Trascurando la variazione di  $A'$ , le perdite di pressione variano quindi con l'angolo di manovella, ovvero con la posizione del pistone all'interno del cilindro; corrispondentemente, le fasi di aspirazione e di mandata non sono più isobare, poiché i trafiletti attraverso le valvole sono minimi al PMI (che viene

comunque raggiunto solo nella fase di aspirazione) ed al PMS (che viene comunque raggiunto solo nella fase di mandata), laddove il pistone inverte il moto, e massimi verso il centro della corsa, dove il pistone raggiunge la massima velocità<sup>3</sup>.

Il ciclo reale risulta, come ovvio, difficilmente studiabile con metodi analitici. Con l'ausilio dei moderni calcolatori elettronici e definendo dei modelli matematici per caratterizzare lo scambio termico con le pareti ed il comportamento delle valvole, è comunque oggi possibile riprodurre in modo sufficientemente accurato l'andamento reale della pressione nella macchina.

### 3.2.4 Ciclo convenzionale

14/12/2022

Mediante il ciclo convenzionale si cerca di tener conto degli effetti reali in modo convenzionale, per consentire una valutazione semplice del lavoro al ciclo  $L_c$  (il ciclo convenzionale deve avere quindi la stessa area del ciclo reale) ed un'analisi delle prestazioni della macchina in funzione dei suoi parametri caratteristici. Per il tracciamento del ciclo convenzionale si assume che:

- le fasi di aspirazione e mandata siano a pressione costante, rispettivamente pari a  $p'_1 < p_1$  e  $p'_2 > p_2$ ;
- le sezioni di passaggio delle valvole siano ad area costante;
- la compressione e l'espansione siano trasformazioni politropiche, di esponente rispettivamente  $m$  ed  $m'$ .

Con la prima ipotesi, le perdite per trafilamento all'aspirazione e alla mandata sono indipendenti dalla posizione del pistone nel cilindro. Si definiscono allora il coefficiente  $\delta_1$  di perdita per trafilamento all'aspirazione, pari a:

$$\delta_1 = \frac{p_1 - p'_1}{p_1}, \quad (3.17)$$

e il coefficiente  $\delta_2$  di perdita per trafilamento alla mandata, pari a:

$$\delta_2 = \frac{p'_2 - p_2}{p_2}. \quad (3.18)$$

Ricordando la proporzionalità espressa nella (3.16) ed essendo  $w_p$  variabile ( $w_p \approx \omega r \sin\theta$ ), è necessario, coerentemente con la prima ipotesi, riferire tali coefficienti alla velocità media del pistone  $u$ , pari a:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} w_p d\theta = 2cn, \quad (3.19)$$

---

<sup>3</sup>Essendo  $w_p \approx \omega r \sin(\omega t)$ , lo spostamento del pistone, misurato a partire dal centro corsa, vale

$$x_p \approx -r \cos(\omega t);$$

la perdita di pressione risulta quindi proporzionale a  $w_p^2 \approx \omega^2(r^2 - x_p^2)$  ed assume un andamento circa parabolico in funzione del volume spazzato.

essendo  $c$  la corsa ed  $n$  il numero di giri all'unità di tempo. La (3.16), nel caso di ciclo convenzionale, diventa quindi<sup>4</sup>:

$$\delta \propto \frac{u^2}{T} \left( \frac{A_p}{A'} \right)^2, \quad (3.20)$$

essendo, per un gas perfetto,  $\rho = p/RT$ .

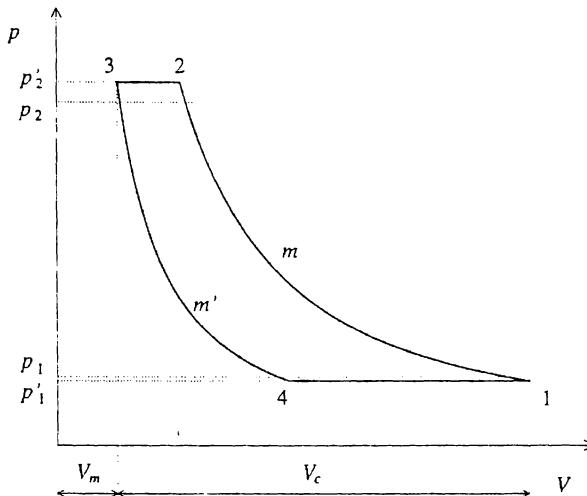


Figura 3.6: ciclo convenzionale di un compressore alternativo.

Il ciclo convenzionale, riportato in fig. 3.6, è quindi costituito da due politropiche e due isobare ed è caratterizzato da un rapporto di compressione interno  $\beta_i$ , pari a:

$$\beta_i = \frac{p'_2}{p'_1} = \beta \frac{1 + \delta_2}{1 - \delta_1} > \beta. \quad (3.21)$$

Noti  $V_c$ , il volume di spazio morto  $V_m = V_3 = \mu V_c$ , gli esponenti  $m$  e  $m'$  delle politropiche e i coefficienti di perdita  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , il lavoro al ciclo risulta pari a:

$$L_c = \int_1^2 V dp - \int_4^3 V dp = \frac{m}{m-1} p'_1 V_1 \left( \beta_i^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right) - \frac{m'}{m'-1} p'_1 V_4 \left( \beta_i^{\frac{m'-1}{m'}} - 1 \right), \quad (3.22)$$

ove il volume di inizio della fase utile di aspirazione è pari a:

$$V_4 = V_3 \beta_i^{\frac{1}{m'}} = \mu V_c \beta_i^{\frac{1}{m'}}. \quad (3.23)$$

<sup>4</sup>E' da rilevare che si sarebbe dovuto utilizzare il valore medio del quadrato della velocità; tuttavia, è immediato verificare che la proporzionalità rispetto ad  $u^2$  sarebbe ancora rispettata.

La potenza assorbita è pari a:

$$P_a = \frac{L_c n_c}{\eta_m}, \quad (3.4)$$

con  $n_c = n$  se il compressore è monocilindrico a semplice effetto. Più in generale,  $n_c$  indica il numero di cicli all'unità di tempo e pertanto, indicando con  $i$  il numero di cicli compiuti ad ogni giro della manovella, si ha  $n_c = in$  (ad esempio  $i = 2$  ed  $n_c = 2n$  per un compressore monocilindrico a doppio effetto). Utilizzando la (3.5) con  $\eta_v = 1$  (perdite per fughe trascurabili), si può calcolare il lavoro per unità di massa,  $L_i$ :

$$L_i = \frac{L_c n_c}{G}. \quad (3.24)$$

Si definisce coefficiente di riempimento  $\lambda_v$  il rapporto tra la massa  $M_a$  (o la portata  $G_a$ ) effettivamente aspirata (o, in questo caso, mandata, essendo  $\eta_v = 1$ ) e quella che può essere idealmente aspirata per ogni ciclo:

$$\lambda_v = \frac{M_a}{M_{id}} = \frac{M_a}{\rho_1 V_c} = \frac{G_a}{G_{id}}, \quad (3.25)$$

essendo  $\rho_1$  la densità del gas (aspirato) all'esterno. Si ha quindi:

$$G = G_a = \lambda_v \rho_1 V_c n_c = \lambda_v \rho_1 V n, \quad (3.26)$$

in cui  $V = iV_c$  è la cilindrata totale. In un compressore  $\lambda_v$  è minore di uno per diverse ragioni, qui elencate in ordine di importanza:

1. a causa della presenza dello spazio morto, i gas in esso intrappolati si espandono durante la discesa del pistone, rendendo una parte della corsa del pistone dal PMS al PMI inutile ai fini del riempimento;
2. a causa della traflazione nella valvola di aspirazione, si ha, all'interno del cilindro, una pressione  $p'_1$  minore della pressione esterna  $p_1$ ; di conseguenza, la densità  $\rho'_1$  del gas all'interno del compressore, da cui dipende la quantità di aria aspirata, è più bassa della densità  $\rho_1$  del gas all'esterno;
3. durante la fase di aspirazione le pareti riscaldano il gas che entra nel cilindro, aumentandone il volume a parità di pressione.

Se si trascura quest'ultima causa, peraltro di limitata importanza per rapporti di compressione non troppo elevati o se la macchina è refrigerata, e si fa riferimento al ciclo convenzionale, è possibile esprimere il coefficiente di riempimento in funzione di alcuni dati caratteristici della macchina. Sotto tale ipotesi, infatti, la massa aspirata è pari a  $M_a = \rho'_1(V_1 - V_4)$ , e, per la definizione (3.25), si ricava:

$$\lambda_v = \frac{M_a}{M_{id}} = \frac{\rho'_1(V_1 - V_4)}{\rho_1 V_c}. \quad (3.27)$$

Per l'equazione dei gas perfetti, il rapporto  $\rho'_1/\rho_1$  vale:

$$\frac{\rho'_1}{\rho_1} = \frac{p'_1 T_1}{p_1 T'_1}, \quad (3.28)$$

essendo  $T'_1$  e  $T_1$  le temperature rispettivamente nel cilindro e nel condotto di aspirazione. Coerentemente con l'ipotesi di ciclo convenzionale (caduta di pressione  $\Delta p$  costante nella fase di aspirazione), si suppone che la laminazione del gas avvenga in regime permanente; applicando il I PTD in forma euleriana fra le sezioni immediatamente a monte ed a valle della valvola, si ottiene:

$$\Delta i = 0, \quad (3.29)$$

essendo trascurabili sia il calore scambiato con le pareti, per via della limitata estensione della valvola, sia la differenza tra l'energia cinetica del gas nel condotto di aspirazione e quella del gas all'interno del cilindro. Pertanto, il processo è isoentalpico e quindi isotermo, essendo  $\Delta i = c_p \Delta T$ . Quindi la (3.28) assume la forma:

$$\frac{\rho'_1}{\rho_1} = \frac{p'_1}{p_1} = 1 - \delta_1, \quad (3.30)$$

che, sostituita nella (3.27), dà:

$$\lambda_v = (1 - \delta_1) \frac{V_1 - V_4}{V_c}. \quad (3.31)$$

Utilizzando le relazioni (3.9) e (3.23) si ricava, infine:

$$\lambda_v = (1 - \delta_1) \left[ 1 - \mu \left( \beta_i^{\frac{1}{m'}} - 1 \right) \right]. \quad (3.32)$$

Dalla (3.32) si evince che  $\lambda_v$  diminuisce al crescere di  $\delta_1$ , di  $\mu$  e di  $\beta_i$  (che a sua volta dipende da  $\beta$  e cresce con  $\delta_1$  e  $\delta_2$ ). La laminazione all'aspirazione produce quindi anche un effetto secondario di riduzione della portata, in quanto amplifica l'influenza del grado di spazio morto  $\mu$ . Infatti, a seguito delle laminazioni nelle valvole sia di aspirazione che di mandata, la corsa utile di aspirazione diminuisce ulteriormente, come si rileva dalla fig. 3.6. Se si trascura l'effetto prodotto dai trafiletti nelle valvole, la (3.32) diventa:

$$(\lambda_v)_{lim} = 1 - \mu \left( \beta_i^{\frac{1}{m'}} - 1 \right). \quad (3.33)$$

Il coefficiente  $(\lambda_v)_{lim}$  rappresenta quindi il coefficiente di riempimento qualora si consideri solo la riduzione di portata causata dalla presenza dello spazio morto. Ovviamente  $(\lambda_v)_{lim}$  diminuisce al crescere di  $\mu$  e di  $\beta_i$ , come evidenziato in fig. 3.7, in cui è riportato l'andamento di  $(\lambda_v)_{lim}$  in funzione di  $\beta_i$  per diversi valori di  $\mu$ . Dalla figura si riscontra anche che esiste un valore del rapporto di compressione per cui  $(\lambda_v)_{lim}$  (e quindi la portata) si annulla. Per  $\beta = \beta_{max}$  ed  $m = m'$ , infatti, le linee di compressione e di espansione convenzionali coincidono, per cui le fasi di mandata e di aspirazione, e quindi la portata, si annullano. Per  $\beta \geq \beta_{max}$  ed  $m = m'$ , la macchina funziona quindi come una molla a gas.

Dalla (3.32) si può ricavare, più in generale ( $\delta_1$  e  $\delta_2 \neq 0$ ), il valore di  $\beta$  per cui si annulla  $\lambda_v$ , ovvero il massimo rapporto di compressione compatibile con un dato valore di  $\mu$ :

$$\beta_{max} = (\beta_i)_{max} \frac{1 - \delta_1}{1 + \delta_2} = \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right)^{m'} \frac{1 - \delta_1}{1 + \delta_2}. \quad (3.34)$$

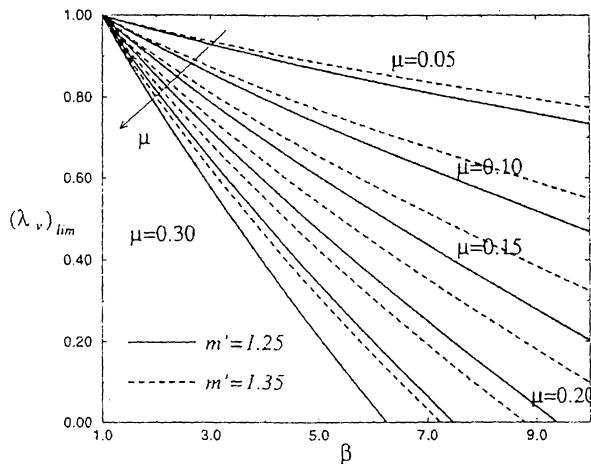


Figura 3.7: andamento del coefficiente di riempimento limite  $(\lambda_v)_{lim}$ .

Vale la pena osservare che nel caso limite di portata nulla può essere più opportuno considerare  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  nella (3.34), cioè calcolare il  $\beta_{max}$  imponendo  $(\lambda_v)_{lim} = 0$  nella (3.33). La fig. 3.8 raffigura poi, ancora nel caso più generale di  $\delta_1$  e  $\delta_2 \neq 0$ , l'influenza del grado di spazio morto sull'andamento del ciclo convenzionale e, in particolare, la progressiva diminuzione di volume utile che si ottiene aumentando  $\mu$ .

Tutte queste argomentazioni evidenziano, come già anticipato, la necessità di limitare il funzionamento di un compressore alternativo monostadio ad un rapporto di compressione  $\beta \approx 5 \div 7$ . Per valori più elevati di  $\beta$  bisogna ricorrere ai compressori volumetrici pluristadio.

Si consideri ora il caso in cui gli esponenti delle politropiche coincidono ( $m = m'$ ). Sotto tale ipotesi, la (3.22) assume l'espressione semplificata:

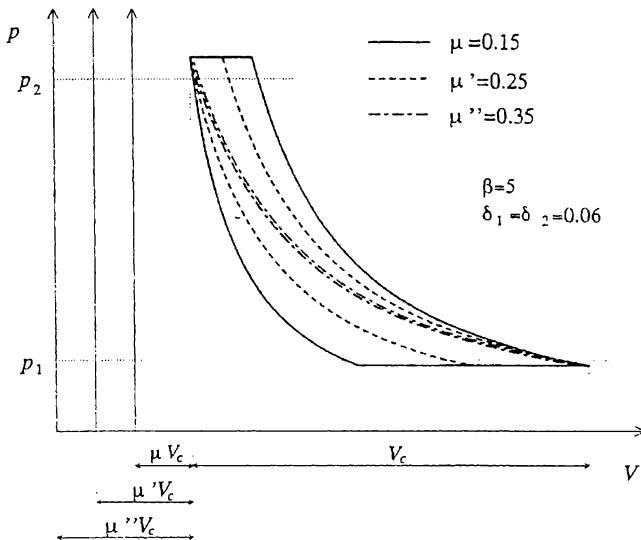
$$L_c = \frac{m}{m-1} p'_1 (V_1 - V_4) \left( \beta_i^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right). \quad (3.35)$$

Applicando poi la (3.24), si ottiene:

$$L_i = \frac{L_c n_c}{G} = \frac{\frac{m}{m-1} p'_1 (V_1 - V_4) \left( \beta_i^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right)}{\lambda_v \rho_1 V_c}. \quad (3.36)$$

In base alla (3.30) ed alla (3.31), si ricava poi:

$$\frac{p'_1}{\lambda_v \rho_1} = \frac{p_1 (1 - \delta_1)}{(1 - \delta_1) \frac{V_1 - V_4}{V_c} \rho_1} = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{V_c}{V_1 - V_4}. \quad (3.37)$$

Figura 3.8: andamento del ciclo convenzionale per diversi valori di  $\mu$ .

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti e sostituendo la (3.37) nella (3.36), si ottiene infine:

$$L_i = \frac{m}{m-1} RT_1 \left( \beta_i^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right) = \int_{p'_1}^{p'_2} v dp. \quad (3.38)$$

L'espressione del lavoro ad unità di massa è quindi uguale a quella che si sarebbe ricavata applicando il I PTD in forma euleriana. Infatti, se  $m = m'$ , per quanto riguarda i gas intrappolati nello spazio morto, la linea di espansione coincide con quella di compressione per cui la macchina funziona come una molla ideale a gas: tutto il lavoro che l'unità di massa di gas dello spazio morto riceve nella trasformazione 1-2 viene restituito nella trasformazione 3-4, per cui è come se il compressore lavorasse solo sulla massa di gas mandata. Per  $m = m'$ , è quindi anche possibile calcolare la temperatura di mandata  $T_2$  (tralasciando gli scambi termici nella fase di mandata), applicando la legge dell'evoluzione politropica di un gas perfetto:

$$T_2 = T_1 \beta_i^{\frac{m-1}{m}} = T_1 \left( \beta \frac{1 + \delta_2}{1 - \delta_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \quad (3.39)$$

Nel caso di un compressore multistadio, la (3.39) permette quindi di calcolare la temperatura di aspirazione degli stadi successivi.

Se  $m \neq m'$ , invece, la (3.38) non è più applicabile, in quanto il gas intrappolato nello spazio morto restituisce nell'espansione un lavoro diverso da quello che riceve nella compressione. In tal caso, è necessario valutare  $L_i$  per mezzo della (3.24).

### 3.3 REGOLAZIONE DEI COMPRESSORI ALTERNATIVI

I compressori volumetrici a stantuffo alimentano solitamente utilizzatori che richiedono una portata di gas (ad esempio aria) variabile nel tempo, ma a pressione costante o variabile entro determinati limiti di tolleranza, imposti dal tipo di utilizzo. Poiché la differenza tra la portata mandata dal compressore e la minore portata utilizzata si traduce in aumento di massa, e quindi di pressione, all'interno del serbatoio di mandata, nasce il problema di poter variare (normalmente ridurre) la portata mandata dal compressore, in modo da adeguarla alla richiesta dell'utenza. Per individuare le diverse possibilità di regolazione di un compressore alternativo, esprimiamo la portata mandata in funzione dei parametri caratteristici della macchina; in base alla definizione di coefficiente di riempimento e nell'ipotesi, già adottata, di rendimento volumetrico unitario, si ha:

$$G = \lambda_v \rho_1 V_c n_c = \lambda_v \rho_1 V' n, \quad (3.26)$$

essendo  $\rho_1 = p_1/(RT_1)$  la densità nell'ambiente di aspirazione. Adottando l'ipotesi semplificativa di ciclo convenzionale, con scambio termico con le pareti trascurabile durante la fase di aspirazione, il coefficiente di riempimento è pari a:

$$\lambda_v = (1 - \delta_1) \left[ 1 - \mu \left( \beta_i^{\frac{1}{m'}} - 1 \right) \right]. \quad (3.32)$$

Per ridurre la portata di un fattore  $h < 1$ , ovvero per comprimere una portata  $G' = hG < G$ , si può dunque ridurre o la velocità di rotazione,  $n$ , o il coefficiente di riempimento,  $\lambda_v$ , o la densità del gas in aspirazione,  $\rho_1$  (la cilindrata  $V$  è fissa). I metodi di regolazione adottati agiscono quindi principalmente su uno dei tre parametri citati, con eventuale variazione indotta su uno degli altri due. Per individuare i pregi ed il campo di applicazione di ciascun metodo di regolazione è necessario valutare l'incidenza economica delle spese d'impianto addizionali ed esaminare la variazione del lavoro ad unità di massa mandata  $L'_i$  (o, in questo caso, aspirata,  $L_i = L'_i$ ) e della potenza assorbita  $P_a$  (ovvero del lavoro al ciclo, se la velocità di rotazione resta costante):  $L_i$  è infatti un parametro che individua il costo dell'unità di massa di gas compresso, mentre va rilevato che un aumento di potenza richiesta, oltre a determinare il sovraccarico del motore di comando, è ovviamente un risultato energeticamente inaccettabile.

#### 3.3.1 Variazione del regime di rotazione

Questo è un tipo di regolazione ideale: in prima approssimazione, supponendo il ciclo invariato, si ha  $G \propto n$ ,  $L_c$  costante e quindi anche  $L_i$  non subisce variazioni; il nuovo regime di rotazione è quindi:

$$n' = \frac{G'}{G} n = hn. \quad (3.40)$$

In realtà, al diminuire di  $n$ , le perdite per laminazione nelle valvole diminuiscono, essendo, nel ciclo convenzionale,  $\delta_1$  e  $\delta_2$  proporzionali a  $n^2$  (v. equazione (3.20)). Conseguentemente,  $\beta_i$  diminuisce e con esso diminuiscono sia  $L_c$ , sia  $L_i$ , mentre  $\lambda_v$  aumenta. Volendo includere questo effetto secondario, è necessario risolvere (iterativamente) il seguente

sistema:

$$\frac{\lambda'_v}{\lambda_v} \frac{n'}{n} = h, \quad (3.41)$$

$$\lambda'_v = (1 - \delta'_1) \left\{ 1 - \mu \left[ (\beta'_1)^{\frac{1}{m'}} - 1 \right] \right\}, \quad (3.42)$$

$$\beta'_1 = \beta \frac{1 + \delta'_2}{1 - \delta'_1}, \quad (3.43)$$

$$\delta'_{1,2} = \delta_{1,2} \left( \frac{n'}{n} \right)^2, \quad (3.44)$$

da cui si ricaverà un valore di  $n'$  leggermente minore di  $hn$ . Inoltre, per quanto riguarda il rendimento meccanico,  $\eta_m$ , esso aumenta al diminuire di  $n$ : infatti, in prima approssimazione si ha che  $P_i$  è proporzionale ad  $n$ , mentre le potenze dissipate per gli attriti meccanici dovuti alle forze di pressione e di inerzia sono proporzionali rispettivamente ad  $n$  ed  $n^3$ . Questo tipo di regolazione è quindi più che ottimale dal punto di vista del lavoro di compressione e della potenza assorbita e viene facilmente realizzato se il compressore è comandato da un motore alternativo a combustione interna. Se invece, come spesso accade, il compressore viene azionato da un motore asincrono, si rende necessario ricorrere ad un variatore di frequenza per poterne modificare il regime di rotazione (o interporre una trasmissione a rapporto variabile). Questo primo metodo di regolazione è pertanto utilizzato per impianti più sofisticati e per compressori di dimensioni notevoli, per i quali l'investimento è giustificato dalla riduzione di potenza assorbita.

Nelle successive regolazioni ad  $n$  costante verranno trascurate le variazioni di  $\eta_m$ .

### 3.3.2 Laminazione all'aspirazione

Con questo metodo si interviene sulla densità  $\rho_1$  del gas in aspirazione, inserendo, sul corrispondente condotto, una valvola di laminazione comandata da un pressostato, posto alla mandata del compressore stesso, come schematizzato in fig. 3.9. Si supponga che l'utilizzatore richieda una portata inferiore a quella di progetto. Se non viene effettuato alcun intervento, il compressore continua ad erogare inizialmente la stessa portata di gas compresso, di cui l'utilizzatore ne impiega solo una quota parte. In queste condizioni, la pressione nel serbatoio di mandata aumenta ed il pressostato, accorgendosi di tale variazione, interviene sulla valvola comandata. A seguito della laminazione, la pressione a valle della valvola, ovvero la pressione di aspirazione del compressore, si riduce isoentalpicamente, per cui si realizza una diminuzione di densità all'aspirazione e, contemporaneamente, un aumento del rapporto di compressione interno,  $\beta_i$ , con conseguente diminuzione di  $\lambda_v$ .

Esaminiamo ora più in dettaglio gli effetti della laminazione all'aspirazione, in modo da poter calcolare la riduzione di pressione necessaria per realizzare la variazione di portata desiderata. Indichiamo con un soprassegno le condizioni termodinamiche a valle della valvola di laminazione, strozzata; in particolare, siano:

$p_1$  la pressione dell'ambiente esterno;

$p'_1 = (1 - \delta_1)p_1$  la pressione all'interno del compressore nel caso in cui la valvola di laminazione non sia strozzata;

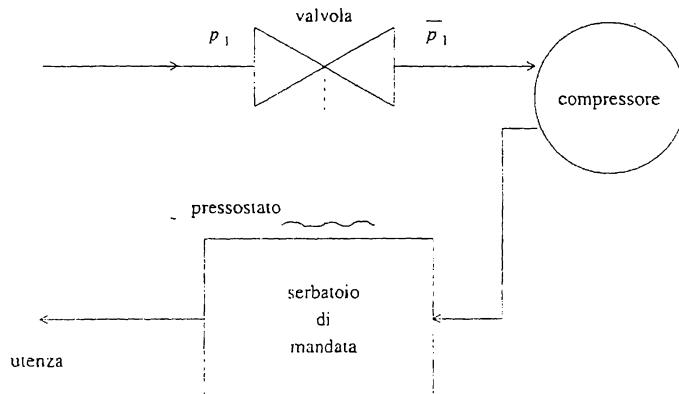


Figura 3.9: schema di regolazione per laminazione all'aspirazione.

$\bar{p}_1$  la pressione a valle della valvola di laminazione;

$\bar{p}'_1 = (1 - \delta_1)\bar{p}_1$  la pressione all'interno del compressore nel caso in cui la valvola di laminazione sia strozzata.

Fra questi valori di pressione valgono quindi le relazioni  $p_1 > \bar{p}'_1$  e  $p_1 > \bar{p}_1 > \bar{p}'_1$ . La portata di progetto e quella a seguito della regolazione valgono rispettivamente:

$$G = \lambda_v \rho_1 V n, \quad (3.45)$$

$$G' = h G = \lambda'_v \bar{p}_1 V n, \quad (3.46)$$

in cui  $\rho_1 = p_1/(RT_1)$  e  $\bar{p}_1 = \bar{p}_1/(RT_1)$ , nelle ipotesi che gli scambi termici siano trascurabili e che la laminazione avvenga in condizioni di flusso permanente e sia quindi isoentalpica, ovvero isoterma. Combinando queste espressioni, si ottiene:

$$\frac{\lambda'_v \bar{p}_1}{\lambda_v p_1} = h. \quad (3.47)$$

La riduzione della pressione di aspirazione, oltre a determinare la riduzione di densità evidenziata dal rapporto  $\bar{p}_1/p_1$ , comporta l'aumento del rapporto di compressione interno,

$$\overline{\beta_i} = \frac{p'_2}{\bar{p}'_1} = \frac{p_2(1 + \delta_2)}{\bar{p}_1(1 - \delta_1)} = \frac{p_2(1 + \delta_2) p_1}{p_1(1 - \delta_1) \bar{p}_1} = \beta_i \frac{p_1}{\bar{p}_1} > \beta_i, \quad (3.48)$$

essendo i coefficienti  $\delta_1$  e  $\delta_2$  costanti, e quindi la riduzione del coefficiente di riempimento, in base alla (3.32). Utilizzando queste relazioni, la (3.47) può essere quindi scritta per esteso in funzione della pressione di laminazione,  $\bar{p}_1$ :

$$\left\{ 1 - \mu \left[ \left( \beta_i \frac{p_1}{\bar{p}_1} \right)^{\frac{1}{m'}} - 1 \right] \right\} \frac{\bar{p}_1}{p_1} = h \left\{ 1 - \mu \left[ \beta_i^{\frac{1}{m'}} - 1 \right] \right\}. \quad (3.49)$$

La risoluzione dev'essere di tipo iterativo e si avrà  $\bar{p}_1 > h p_1$ .

Questo tipo di regolazione è di semplice ed economica installazione, ma abbastanza svantaggioso dal punto di vista del funzionamento della macchina e del motore di comando. Infatti, il nuovo ciclo (in cui il compressore lavora fra le pressioni  $\bar{p}_1 < p_1$  e  $p_2$ ), presenta un'area in più ed una in meno rispetto al ciclo di progetto (in cui il compressore lavora fra le pressioni  $p_1$  e  $p_2$ ), come evidenziato in fig. 3.10. Il lavoro  $L_c$  può diminuire o aumentare in

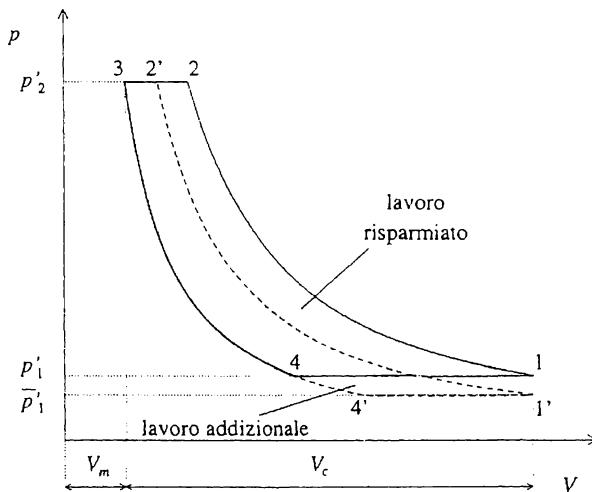


Figura 3.10: regolazione per laminazione all'aspirazione: ciclo convenzionale.

funzione delle dimensioni relative di tali aree. Appare chiaro che mentre l'area addizionale è praticamente indipendente dal rapporto di compressione (interno), l'area risparmiata cresce con esso. Si ha quindi che per piccoli valori di  $\beta$ ,  $L_c$  aumenta, mentre per grandi valori di  $\beta$ ,  $L_c$  diminuisce. Nel caso di ciclo convenzionale con  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ , spazio morto nullo e laminazione non spinta, si può calcolare il valore  $\beta^*$  a cui corrisponde questa inversione,  $\beta^* = m^{\frac{m}{m-1}}$  (la dimostrazione viene lasciata come esercizio al lettore). Concludendo,

se  $\beta > \beta^*$ ,  $L_c$  e  $P_a$  diminuiscono in seguito allo strozzamento operato dalla valvola di laminazione;

se  $\beta < \beta^*$ ,  $L_c$  e  $P_a$  aumentano.

Come già anticipato, la regolazione è, nel secondo caso, inaccettabile, in quanto l'aumento di potenza assorbita, oltre ad essere economicamente svantaggioso, comporta il rischio di sovraccarichi eccessivi ed eventuale conseguente danneggiamento del motore di comando. Nei casi in cui  $P_a$  aumenta significativamente conviene quindi ricorrere alla regolazione

per riflusso, descritta nel prossimo paragrafo. Si noti, inoltre, che il lavoro ad unità di massa elaborata,  $L_i$ , e con esso il costo del gas compresso, cresce comunque in modo significativo, a causa dell'aumento di  $\beta_i$ .

### 3.3.3 Riflusso

Questo sistema di regolazione consiste nel riflusso della portata in eccesso verso l'esterno o verso l'ambiente di aspirazione: su un condotto aperto all'atmosfera (v. fig. 3.11) o che collega l'ambiente di mandata con quello di aspirazione (v. fig. 3.12), viene posta una valvola comandata da un pressostato, sensibile alla pressione regnante nell'ambiente di mandata. A seguito di una diminuzione della portata utilizzata, il pressostato rileva un

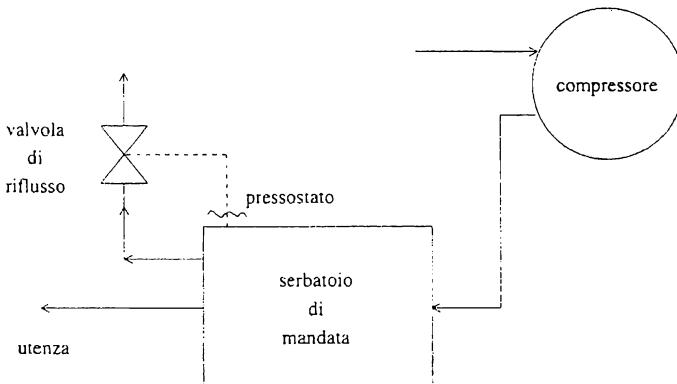


Figura 3.11: schema di regolazione per riflusso verso l'ambiente.

aumento di pressione all'interno del serbatoio di mandata ed aziona, tramite un servocomando, la valvola di riflusso, che fa scaricare la portata di gas in eccesso o nell'ambiente o indietro all'aspirazione. Il primo caso, di più semplice realizzazione, è fattibile, in pratica, solo se il gas è aria. Nel secondo caso, il riflusso avviene tra il serbatoio di mandata e quello di aspirazione: il gas attraversa uno scambiatore di calore che ne riporta la temperatura ad un valore prossimo a quello di aspirazione e viene poi immesso nel serbatoio di aspirazione. La refrigerazione è necessaria non per ragioni energetiche, ma per evitare malfunzionamenti dovuti ad un eccessivo riscaldamento del gas, causato dall'aumento della temperatura del gas aspirato dalla macchina.

In entrambi i casi, il ciclo di lavoro e quindi  $L_c$  e  $P_a$  rimangono ovviamente invariati, per cui aumenta il lavoro ad unità di massa,  $L_i$ , che è inversamente proporzionale a  $G$ , e quindi il costo della compressione. La regolazione per riflusso risulta quindi vantaggiosa rispetto a quella per laminazione in caso di bassi rapporti di compressione ( $\beta < \beta^*$ ).

Le regolazioni precedentemente trattate sono le più semplici ed agiscono su  $n$  e su  $\rho_1$  e, indirettamente, su  $\lambda_v$ . Analizziamo adesso due sistemi di regolazione più complessi che

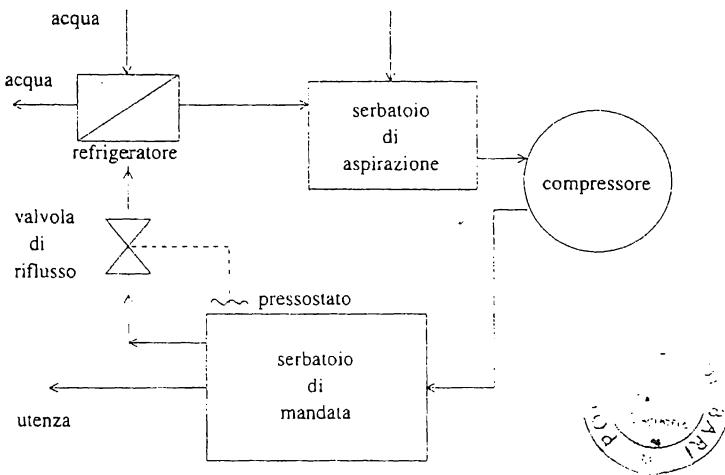


Figura 3.12: schema di regolazione per rifiusso verso l'aspirazione.

agiscono direttamente sul coefficiente di riempimento e che consentono di ridurre il lavoro al ciclo e quindi di mantenere all'incirca costante il lavoro ad unità di massa.

### 3.3.4 Anticipo o posticipo della chiusura della valvola di aspirazione

Questo tipo di regolazione verrà analizzato, per semplicità, facendo riferimento ad un ciclo ideale con  $\mu \neq 0$ . Esso consiste nel ridurre la corsa utile di aspirazione e, con essa, la portata aspirata, a) chiudendo la valvola di aspirazione prima che il pistone raggiunga il PMI o b) tenendola aperta dopo che questo ha iniziato la sua corsa verso il PMS, in modo da rinviare parte del gas aspirato nel serbatoio di aspirazione. Nel primo caso, supponendo che la valvola di aspirazione venga chiusa in corrispondenza del punto A (v. fig. 3.13a), si verifica, a seguito dell'aumento di volume dovuto all'ulteriore discesa del pistone verso il PMI, l'espansione isoentropica (si ricordi che l'analisi è condotta su un ciclo ideale) da A a B della massa di gas intrappolata nel cilindro, che raggiunge così una pressione minore di quella di aspirazione. La successiva fase di compressione (isoentropica) riporta la pressione al valore  $p_1$  nello stesso punto A, per poi continuare fino al punto 2', in cui si apre la valvola di mandata. Dalla figura si riscontra che  $L_c$  si è ridotto dell'area  $A122'A$ ; con le ipotesi fatte,  $L_c$  diminuisce proporzionalmente a  $G$ , in quanto  $L_i$ , ovviamente, non varia (cfr., e.g., la (3.38)).

Esaminiamo ora, con riferimento al ciclo ideale rappresentato in fig. 3.13b, il sistema di regolazione per posticipo della chiusura della valvola di aspirazione: raggiunto il PMI

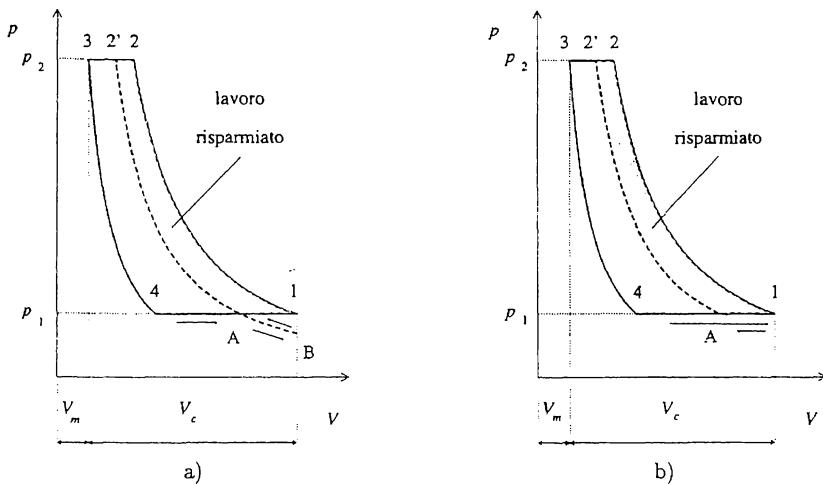


Figura 3.13: ciclo ideale nel caso di regolazione per a) anticipato o b) posticipato della chiusura della valvola di aspirazione.

(punto 1 nel diagramma), la valvola di aspirazione resta aperta, finché il pistone, invertita la corsa, non ha raggiunto il punto A, così da rinviare nell'ambiente di aspirazione l'eccesso di gas aspirato. Una volta chiusa la valvola, inizia la fase di compressione (isoentropica) da A a 2'. Anche in questo caso, idealmente, il ciclo ha due tratti perfettamente sovrapposti e quindi a lavoro nullo e valgono le stesse considerazioni fatte nel caso precedente riguardo  $L_i$  ed  $L_c$ . Nel caso reale, invece, si ha una piccola perdita: durante la fase di aspirazione e quindi anche nel tratto A1, la pressione interna,  $p'_1$ , è infatti inferiore a quella esterna,  $p_1$ , mentre nella successiva fase di espulsione, 1A, si ha  $p'_1 > p_1$ , essendo invertito il flusso del gas attraverso la valvola.

Al fine di valutare, con riferimento ancora al ciclo ideale, la posizione del punto A, si ricorda che:

$$G = \lambda_v \rho_1 V_c n_c, \quad (3.50)$$

$$G' = hG = \lambda'_v \rho_1 V_c n_c, \quad (3.51)$$

ovvero:

$$\lambda'_v = \frac{G'}{G} \lambda_v = h \lambda_v. \quad (3.52)$$

Dall'espressione (3.27) del coefficiente di riempimento si ricava:

$$\frac{\lambda'_v}{\lambda_v} = \frac{(V_A - V_4)}{(V_1 - V_4)} = h. \quad (3.53)$$

Per determinare, infine, in quale punto della corsa di aspirazione (misurato a partire dal

PMS) deve essere chiusa la valvola, è sufficiente impostare la seguente proporzione:

$$\frac{x}{c} = \frac{(V_A - V_m)}{V_c}. \quad (3.54)$$

Questo tipo di regolazione è molto conveniente in quanto, in prima approssimazione,  $L_i$  resta costante e la potenza assorbita varia quindi proporzionalmente alla portata. Purtroppo, il sistema è anche molto costoso perché richiede delle valvole comandate ad angolo di apertura variabile, anziché semplici valvole automatiche.

### 3.3.5 Variazione del grado di spazio morto

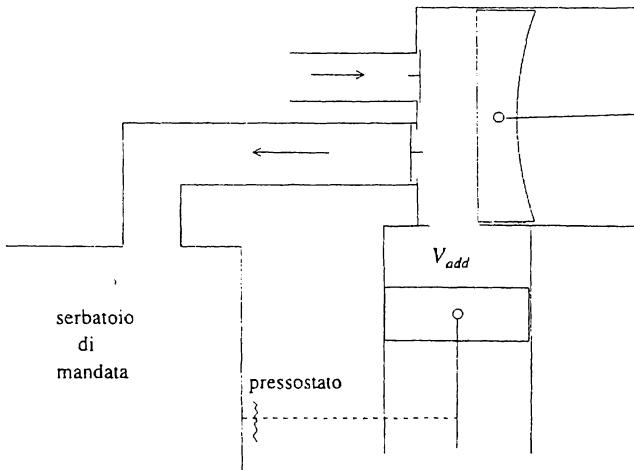


Figura 3.14: schema di principio di un sistema di regolazione per variazione del grado di spazio morto.

Dall'espressione del coefficiente di riempimento

$$\lambda_v = (1 - \delta_1) \left[ 1 - \mu \left( \beta_i^{\frac{1}{m}} - 1 \right) \right], \quad (3.32)$$

si evince che  $\lambda_v$  dipende notevolmente dal grado di spazio morto  $\mu$ . Un altro metodo di regolazione della portata che lascia inalterato il lavoro speso per unità di massa,  $L_i$ , consiste nel mettere in comunicazione l'interno del cilindro con una capacità addizionale, di volume  $V_{add}$ , in modo da aumentare  $V_m$  e quindi  $\mu$ . Il volume addizionale può variare o secondo valori discreti (una o più capacità collegate tramite valvole al cilindro del compressore) o con continuità dal valore zero ad un certo valore massimo (capacità addizionale

collegata al compressore tramite una luce e  $V_{add}$  delimitato da un pistone scorrevole nel corrispondente cilindro, v. fig. 3.14). Esaminiamo quest'ultimo caso: per un funzionamento in condizioni di portata massima,  $V_{add} = 0$ ; quando poi si vuole ridurre la portata, il pistone addizionale viene abbassato in modo da delimitare il volume  $V_{add}$ . Si consideri

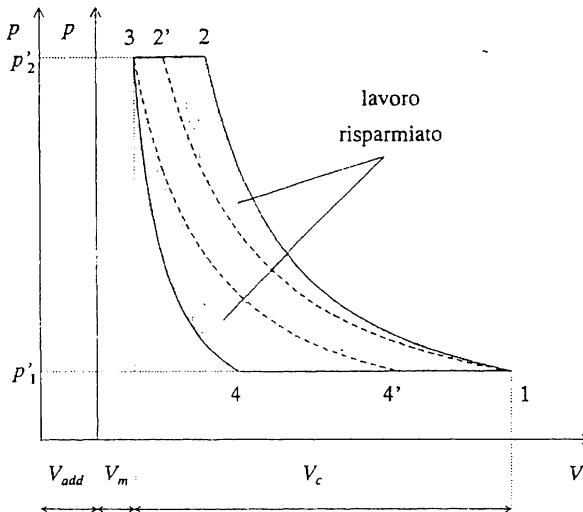


Figura 3.15: regolazione per variazione del grado di spazio morto: ciclo convenzionale.

dapprima il ciclo convenzionale relativo al funzionamento con  $V_{add} = 0$ , rappresentato con linea continua in fig. 3.15: indicati rispettivamente con  $m$  e  $m'$  gli esponenti delle politropiche di compressione e di espansione, si ha:

$$\beta_i = \frac{p'_2}{p'_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^m = \left( \frac{V_4}{V_3} \right)^{m'} \quad (3.55)$$

Consideriamo ora il funzionamento con  $V_{add} \neq 0$ : i volumi  $V_1$  e  $V_3$  aumentano entrambi ( $V'_1 = V_1 + V_{add}$ ,  $V'_3 = V_3 + V_{add}$ ). Se si ipotizza, realisticamente, che le politropiche  $m$  e  $m'$  non varino, i nuovi volumi  $V'_1$ ,  $V'_2$ ,  $V'_3$  e  $V'_4$  soddisferanno ancora le relazioni (3.55). Ciò comporta una variazione della pendenza delle curve di compressione e di espansione, come indicato dalle linee tratteggiate nella fig. 3.15, con una conseguente riduzione della corsa utile di aspirazione e quindi della portata  $G$ . Anche per questo tipo di regolazione vale una relazione simile alla (3.53),

$$\frac{\lambda'_v}{\lambda_v} = \frac{(V_1 - V'_4)}{(V_1 - V_4)} = h, \quad (3.56)$$

dalla quale si ottiene un'equazione lineare nell'incognita  $\mu'$ :

$$\left[ 1 - \mu' \left( \beta_i^{\frac{1}{m'}} - 1 \right) \right] = h \left[ 1 - \mu \left( \beta_i^{\frac{1}{m}} - 1 \right) \right], \quad (3.57)$$

con

$$\mu' = \frac{V_m + V_{add}}{V_c}, \quad (3.58)$$

da cui si ricava  $V_{add}$ .

Tale regolazione è evidentemente ottimale, in quanto mantiene  $L$ , circa costante (cfr., e.g., la (3.38));  $L_c$  e  $P_a$  risultano quindi proporzionali alla portata.

Questi ultimi due sistemi di regolazione sono normalmente utilizzati solo per impianti di una certa rilevanza. Nei compressori più piccoli, si usa invece il sistema qui di seguito descritto.

### 3.3.6 Regolazione on/off (tutto o niente)

Questa regolazione rappresenta il sistema più pratico e comodo per piccoli compressori quando non sia richiesta una pressione di mandata rigorosamente costante. Il compressore è dotato di un serbatoio di capacità molto maggiore della cilindrata della macchina e di un pressostato. Il sistema di regolazione è basato sul funzionamento intermittente della macchina: quando la pressione all'interno del serbatoio scende al di sotto di un valore minimo, il compressore viene automaticamente attivato e riempie la capacità, fino a che la pressione raggiunge un valore massimo. A questo punto il compressore viene automaticamente spento, ed il serbatoio si svuota fino a che viene nuovamente raggiunta la pressione minima alla quale il compressore viene riavviato. Questo sistema di regolazione è estremamente economico sia da un punto di vista dell'impianto che, ovviamente, dell'esercizio, ma richiede un serbatoio di mandata di dimensioni molto maggiori di  $V_c$  per limitare le variazioni della pressione di mandata e/o il numero di accensioni del motore.

## 3.4 COMPRESSORI ALTERNATIVI PLURISTADIO

Nel paragrafo 3.2.4 è stato messo in evidenza che un compressore alternativo monostadio non può raggiungere rapporti di compressione superiori a 5÷7: l'espansione dei gas intrappolati nello spazio morto ridurrebbe infatti drasticamente la corsa utile per l'aspirazione e quindi la portata elaborata; una forte compressione non potrebbe inoltre essere efficientemente refrigerata e causerebbe quindi un aumento notevole della temperatura del gas compresso, e, conseguentemente, di quella del lubrificante, con possibili problemi di lubrificazione. Esistono però, in campo industriale, alcune applicazioni in cui si richiedono rapporti di compressione ben maggiori: nella produzione di polietilene od altri prodotti di sintesi, ad esempio, si raggiungono pressioni vicine ai 4000 bar. Per poter raggiungere valori di pressione così elevati, mantenendo un coefficiente di riempimento accettabile, è

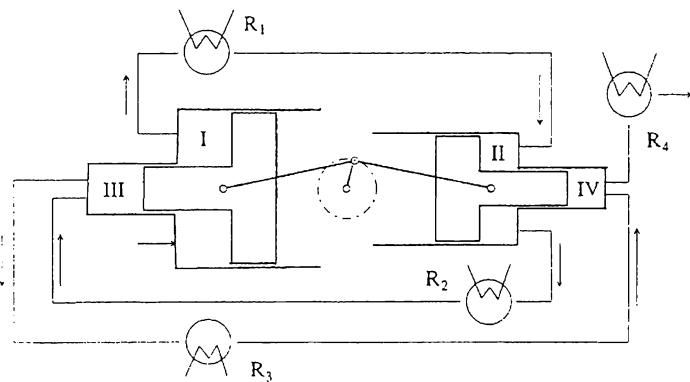


Figura 3.16: schema costruttivo di un compressore a quattro stadi con refrigerazione intermedia e finale.

quindi necessario ripartire la compressione tra più stadi<sup>5</sup>. Per mantenere la temperatura del gas sui valori tipici di un compressore monostadio, è inoltre necessario installare, alla mandata di ciascuno stadio, un refrigeratore, che riporti la temperatura di aspirazione dello stadio successivo ad un valore quanto più possibile prossimo a quello ambiente. In generale, il gas compresso viene poi immagazzinato in opportune bombole, per cui, al fine di evitare una successiva riduzione di pressione dovuta al raffreddamento isocoro nella bombola, è necessario installare un refrigeratore anche alla mandata dell'ultimo stadio. In fig. 3.16 è mostrato, come esempio, uno schema di un compressore a quattro stadi, con refrigeratore posto alla mandata di ciascuno stadio. Si noti che due (come nel caso in figura) o più stadi di compressione possono essere realizzati anche nello stesso cilindro, sagomando opportunamente sia questo che lo stantuffo corrispondente: il III stadio, ad esempio, aspira ad una pressione ben maggiore del I e deve quindi avere una sezione trasversale inferiore a quella del I, essendo la corsa uguale nei due stadi (in questo caso la corsa è uguale in tutti i quattro stadi poiché il manovellismo è comune). Una ripartizione opportuna degli stadi può anche permettere di bilanciare maggiormente i carichi dovuti alle spinte di pressione e quindi migliorare il rendimento meccanico. Si noti inoltre che la disposizione geometrica dei quattro stadi non è casuale: mentre il primo stadio realizza la mandata, ad esempio, il secondo è in fase di aspirazione; questa differenza di fase di circa 180° permette di ridurre le sovrapressioni o le depressioni nei condotti di collegamento e/o le capacità dei refrigeratori intermedi.

<sup>5</sup> Ad esempio, volendo raggiungere i 4000 bar indicati sopra, si potrebbe realizzare un compressore a  $n = 5$  stadi con rapporto di compressione parziale  $\beta_l \approx 5.25^5 \approx 3988$ .

$$\beta_{tot} = \prod_{l=1}^n \beta_l = 5.25^5 \approx 3988.$$

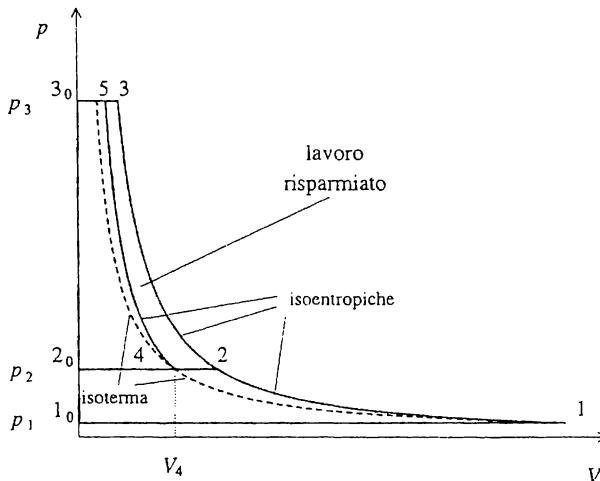


Figura 3.17: ciclo ideale di un compressore bistadio con e senza interrefrigerazione.

Essendo la trasformazione che si realizza in ciascuno stadio a temperatura crescente, appare ovvio dalla (1.157) che l'interrefrigerazione consente di ridurre il lavoro richiesto. Per chiarire tale concetto, si consideri, per semplicità, un compressore bistadio con volume di spazio morto trascurabile e se ne analizzi il corrispondente ciclo ideale di funzionamento, rappresentato in fig. 3.17. Essendo  $V_m = \mu = 0$ , si ha che  $L_c$  ed  $L_i$  sono ovviamente proporzionali. La compressione nel primo stadio è rappresentata dalla trasformazione isoentropica 1-2 (quindi a temperatura crescente), mentre nel secondo, in assenza di interrefrigeratore, il gas segue la trasformazione isoentropica 2-3 (v. fig. 3.17). Il lavoro di compressione è pari all'area  $1_0 1233_0$ . Se, invece, dal punto 2 la temperatura viene abbassata ad un valore prossimo a quello ambiente,  $T_4 \approx T_1$ , il volume occupato dalla massa di gas si riduce al valore  $V_4$ , individuato dall'isoterma relativa alla temperatura  $T_1$ . In tal modo, comprimendo il gas secondo l'isoentropica 4-5, il lavoro è ora pari all'area  $1_0 12453_0$ , risultando quindi ridotto dell'area 42354.

Il dimensionamento dei singoli stadi determina, in base all'uguaglianza delle portate elaborate da ciascuno stadio, i valori di pressione nelle capacità intermedie. Tale ripartizione del rapporto di compressione va effettuata con l'obiettivo di minimizzare il lavoro speso: per un compressore a  $n$  stadi che comprima idealmente un gas da una pressione  $p_1$  ad una pressione  $p_{n+1}$ , e nell'ipotesi che alla fine di ogni stadio  $\ell$  il gas venga raffreddato fino alla temperatura ambiente  $T_1$ , la ripartizione ottimale consiste nel suddividere uniformemente il rapporto di compressione tra i diversi stadi:

$$\beta_\ell = \frac{p_{\ell+1}}{p_\ell} = \sqrt[n]{\beta_{tot}}, \quad \ell = 1, \dots, n. \quad (3.59)$$

Il lavoro di compressione è quindi uguale in tutti gli stadi, così come il calore da sottrarre in ciascun refrigeratore.

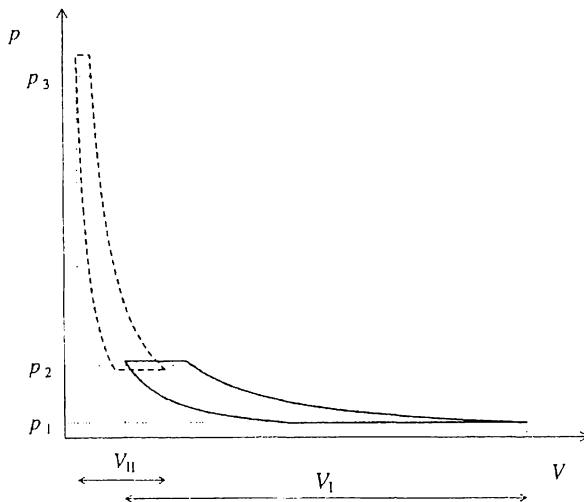


Figura 3.18: ciclo convenzionale di un compressore bistadio interrefrigerato.

Per analizzare le prestazioni della macchina ci si può riferire anche in questo caso al ciclo convenzionale, rappresentato in fig. 3.18 per il caso di una macchina bistadio interrefrigerata. Si noti che il secondo compressore, dovendo aspirare la stessa portata mandata dal primo a pressione (e quindi densità) ben maggiore, è di cilindrata ben più piccola. La sovrapposizione della mandata del primo ciclo con l'aspirazione del secondo è ovviamente dovuta alle laminazioni attraverso le valvole e fa aumentare l'area del ciclo e quindi il lavoro speso.

### 3.4.1 Regolazione

Per la regolazione di un compressore multistadio possono essere utilizzati solo alcuni dei metodi analizzati nel caso del compressore monostadio. In alcuni casi, infatti, viene alterata significativamente la ripartizione del rapporto di compressione totale tra i diversi stadi, con inaccettabili incrementi di temperatura negli stadi più caricati ed aumento del lavoro ad unità di massa. Va rilevato, infatti, che la pressione di mandata di un compressore pluristadio assume valori particolarmente elevati, per cui nella maggioranza delle applicazioni risulta più conveniente adottare metodi anche costosi dal punto di vista impiantistico, ma che consentano di mantenere la ripartizione ottimale del carico. Nel seguito, quindi, riesaminando tutti i metodi di regolazione già analizzati nel paragrafo 3.3, si individueranno gli eventuali svantaggi che li rendono inutilizzabili. Per semplicità, si

farà riferimento al ciclo ideale di un compressore a tre stadi, senza interrefrigerazione e con grado di spazio morto nullo in tutti gli stadi (per maggior chiarezza grafica si è adottato un basso rapporto di compressione totale, pari a 8).

La regolazione per variazione del regime di rotazione presenta ovviamente le stesse difficoltà e gli stessi pregi già messi in evidenza nel paragrafo 3.3.1. In particolare, si richiede l'accoppiamento del compressore con un motore a numero di giri variabile (ad esempio motore asincrono trifase con variatore di frequenza), il cui costo d'investimento è pienamente compensato dalla riduzione delle spese di funzionamento a carico ridotto. Per tale motivo, la variazione del regime di rotazione è uno dei metodi più comunemente adottati per la regolazione dei compressori multistadio.

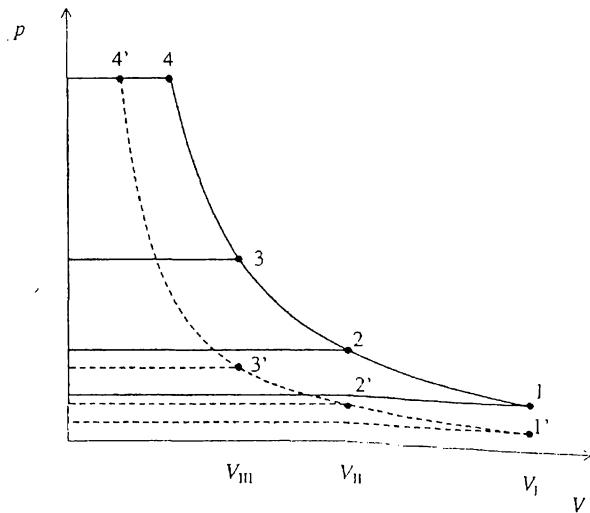


Figura 3.19: regolazione per laminazione di un compressore a tre stadi senza interrefrigerazione: ciclo ideale con  $\mu = 0$ .

La regolazione per laminazione all'aspirazione non è invece consigliabile per un compressore pluristadio. In fig. 3.19 è riportato, con linea intera, il ciclo ideale in condizioni di progetto, e, con linea tratteggiata, il ciclo che si ottiene nel caso in cui venga posta una valvola di strozzamento all'aspirazione del primo stadio. I rapporti di compressione nei primi due stadi,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , che dipendono unicamente dai rapporti  $V_I/V_{II}$  e  $V_{II}/V_{III}$  (per l'uguaglianza delle portate aspirate dai due stadi), rimangono inalterati, per cui si riducono proporzionalmente le pressioni di aspirazione di tutti gli stadi. Il terzo stadio deve quindi sopportare all'aumento del rapporto di compressione  $\beta_3$ , con inaccettabile aumento della temperatura del gas.

Anche la regolazione per riflusso è da evitarsi, in quanto, oltre al costo energetico

elevato (più grave nel caso di elevati  $\beta$ ), si richiederebbe un complesso sistema di valvole per ridurre l'elevatissima pressione del gas che rifiuisce.

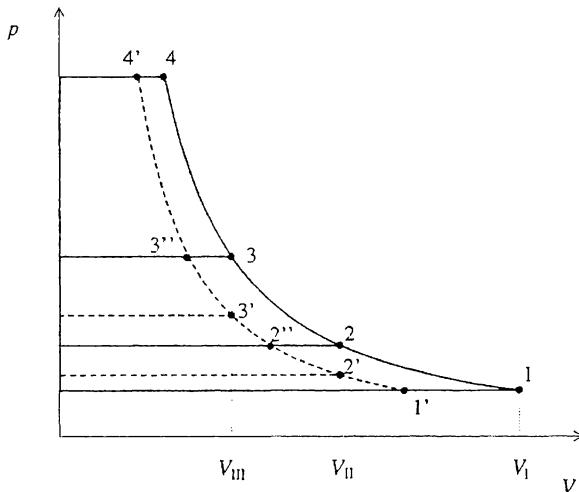


Figura 3.20: regolazione per posticipo della chiusura della valvola di aspirazione per un compressore a tre stadi: ciclo ideale con  $\mu = 0$ .

La regolazione per ritardo o anticipo della chiusura della valvola di aspirazione può essere utilizzata, ma con opportune cautele: In fig. 3.20 è nuovamente riportato, con linea intera, il ciclo ideale in condizioni di progetto, e, con linea tratteggiata, il ciclo che si ottiene prolungando l'apertura della valvola di aspirazione del primo stadio per il tratto 1-1'. Poiché i volumi aspirati nel secondo e nel terzo stadio restano immutati, le pressioni intermedie si riducono rispettivamente ai valori  $p'_2$  e  $p'_3$ . In particolare, il rapporto di compressione nel primo stadio, che dipende dal rapporto  $V'_I/V_{II}$ , diminuisce, mentre resta ovviamente immutato il rapporto di compressione nel secondo stadio. Anche in questo caso, il terzo stadio deve quindi fornire un rapporto di compressione molto maggiore. Si noti, inoltre, che la regolazione avrebbe comunque un campo piuttosto limitato, dovendo essere  $V'_I > V_{II}$ .

Per evitare che le pressioni intermedie varino durante la regolazione è necessario ritardare (o anticipare) la chiusura delle valvole di aspirazione nel secondo e nel terzo stadio fino ai punti 2'' e 3'', rispettivamente. In tal modo, vengono ripristinati i rapporti tra le cilindrate di due stadi successivi ( $V'_I/V_{2''} = V_I/V_{II}$  e  $V_{2''}/V_{3''} = V_{II}/V_{III}$ ) e quindi i rapporti di compressione relativi alle condizioni di progetto.

Le complicazioni meccaniche richieste da questo tipo di regolazione ne sconsigliano comunque l'applicazione.

Ad analoghe conclusioni si giunge nel caso in cui si voglia regolare il compressore plu-

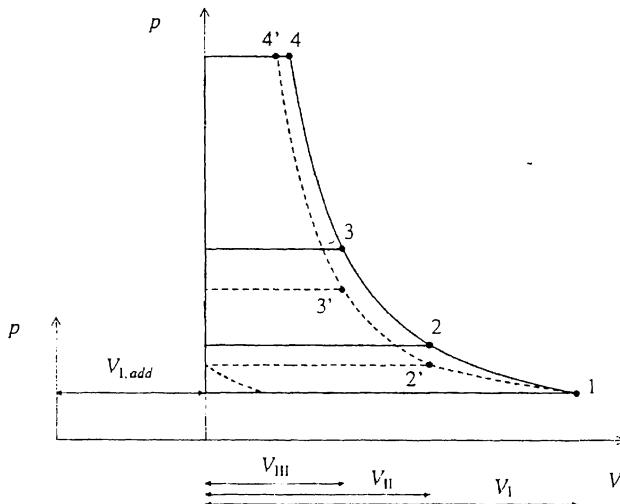


Figura 3.21: regolazione per variazione del grado di spazio morto nel primo di tre stadi di un compressore: ciclo ideale.

ristadio mediante variazione del grado di spazio morto (le complicazioni meccaniche sono però decisamente minori rispetto al caso precedente): se il primo stadio viene collegato ad un volume addizionale  $V_{I,add}$ , si ha, in seguito all'espansione del gas in esso contenuto, una riduzione della corsa utile di aspirazione e quindi della portata elaborata. Se non viene effettuato un analogo intervento sui due stadi successivi, si ridurranno, di conseguenza, le pressioni intermedie, come risulta dalla linea tratteggiata in fig. 3.21. Anche in questo caso, quindi, per evitare che il rapporto di compressione nell'ultimo stadio aumenti, è necessario intervenire contemporaneamente su tutti gli stadi, mediante inserzione di volumi addizionali via via sempre più piccoli. In particolare, tutti gli stadi, per avere uguale rapporto di compressione parziale, devono operare con lo stesso grado di spazio morto, come si riscontra dalla fig. 3.22, in cui sono rappresentati con linea intera e con linea tratteggiata i cicli in condizioni di progetto e dopo la regolazione, rispettivamente. Le fasi di aspirazione del secondo e del terzo stadio hanno ovviamente lunghezza uguale alle fasi di mandata dei rispettivi stadi precedenti.

La regolazione on/off (tutto o niente), infine, potrebbe essere teoricamente applicata anche ai compressori pluristadio (se si accettano piccole variazioni di pressione), ma si dovrebbe predisporre, alla mandata dell'ultimo stadio, un serbatoio molto ampio le cui pareti abbiano spessore tale da resistere alle elevatissime pressioni di mandata. Questo tipo di regolazione, spesso utilizzata per la sua semplicità nei piccoli compressori monostadio, è quindi sconsigliabile nel caso dei più sofisticati compressori pluristadio.

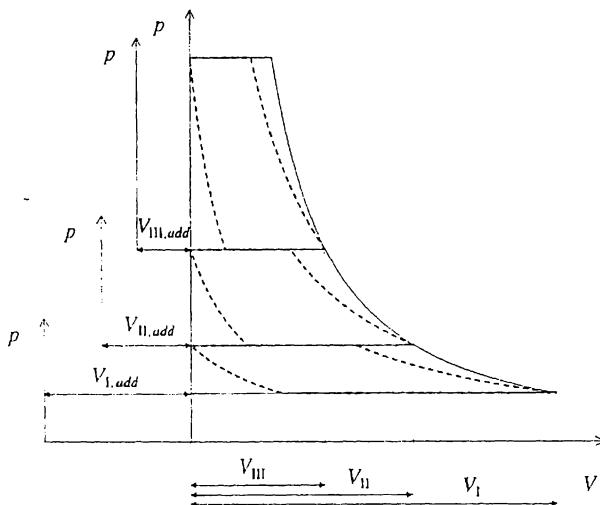


Figura 3.22: regolazione per variazione del grado di spazio morto in tutti gli stadi di un compressore a tre stadi: ciclo ideale ( $\mu = 0$ ).

### 3.5 COMPRESSORI ROTATIVI

Il compressore volumetrico alternativo è normalmente una macchina lenta: le sollecitazioni inerziali causate dal moto alterno dei suoi organi provocano infatti vibrazioni e soprattutto inducono forze di attrito di notevole entità (in particolare tra pistone e cilindro) che costringono a limitare la velocità media dello stantuffo,  $u$ , e quindi la portata che può essere elaborata (a meno di ricorrere a cilindri di sezione molto elevata). La necessità di realizzare la distribuzione mediante valvole comporta poi significative perdite per laminazione all'aspirazione e alla mandata, che sono, come già visto, proporzionali a  $u^2$ .

Nei compressori volumetrici rotativi la (eventuale) variazione di volume della camera nella quale viene aspirato il gas avviene grazie alla rotazione di uno o più organi della macchina, per cui vengono significativamente ridotte o addirittura eliminate le masse in moto alterno; come si riscontrerà dagli schemi costruttivi delle macchine rotative, la distribuzione può essere realizzata mediante luci scoperte dal rotore o da organi collegati ad esso. Tutte queste caratteristiche consentono di far funzionare le macchine rotative a regimi di rotazione abbastanza elevati, tali da permettere lo smaltimento di portate ben superiori, a pari ingombro, rispetto alle macchine alternative.

Nel seguito, verranno analizzati i tre principali tipi di compressore rotativo.

### 3.5.1 Compressori Roots

Il compressore Roots è costituito da una cassa, formata da due semicilindri separati dalle luci di aspirazione e di mandata, entro la quale girano con velocità uguale ed opposta due rotori identici (v. fig. 3.23), a due o al massimo a tre lobi, calettati su due alberi paralleli, collegati tra loro da una coppia di ruote dentate uguali. I rotori sono disegnati in modo da garantire un gioco minimo nella zona di *ingranamento* (profili coniugati). Pertanto, la parte di macchina a contatto con il gas può essere addirittura esclusa dal circuito di lubrificazione, così da evitare l'inserimento di un successivo separatore d'olio.

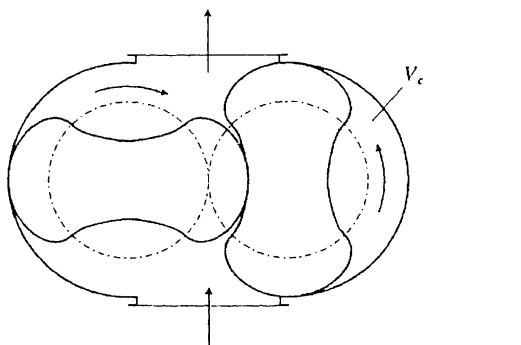


Figura 3.23: sezione di un compressore Roots.

Le superfici esterne dei rotori sfiorano con minimo gioco la parte interna della cassa, in modo da racchiudere il gas nel volume  $V_c$  e trasferirlo dall'ambiente di aspirazione all'ambiente di mandata. Come si nota dalla fig. 3.23, gli ambienti di aspirazione e di mandata sono sempre separati dai rotori. La distribuzione non necessita quindi di valvole e viene perciò realizzata mediante due luci, di sezione piuttosto elevata, messe successivamente in comunicazione con ciascuna camera. Ciò consente di ridurre drasticamente le laminazioni all'aspirazione e alla mandata, eccetto nel caso di regimi di rotazione molto elevati.

Analizziamo il funzionamento del compressore, nell'ipotesi che la luce di mandata sia collegata ad un serbatoio di volume  $V_S$  abbastanza grande, cui è collegato un utilizzatore che elabora una portata costante; trascuriamo, per il momento, le laminazioni e le fughe. In fig. 3.24 sono riportate le tre posizioni assunte dai rotori dopo aver subito successive rotazioni di  $\pi/4$ . A seguito della rotazione viene inglobato, nel volume compreso tra i lobi di un rotore e la cassa, una quantità di gas pari a  $\rho_1 V_c$ . Come si riscontra dalla figura, il volume  $V_c$  non subisce successivamente alcuna variazione, per cui non viene prodotta alcuna compressione graduale internamente alla macchina. Nella posizione a), in particolare, la camera superiore ha appena completato la fase di aspirazione, per cui, dopo una piccolissima rotazione, viene messa in collegamento con il serbatoio di mandata. Quando ciò avviene, l'aria compressa già presente nel serbatoio di mandata e l'aria alla pressione

di aspirazione contenuta in  $V_c$  si miscelano in un unico volume  $V_s + V_c$ , per cui la pressione in tale volume diminuisce improvvisamente di un valore  $\Delta p = p_{max} - p_{min}$ : corrispondentemente, l'aria contenuta in  $V_c$  viene quindi compressa fino a  $p_{min}$  (compressione per riflusso). In fig. 3.24 è appunto riportata, subito a destra del punto a), l'aggregazione del volume  $V_c$  al volume di mandata e la simultanea riduzione di pressione, che risulta tanto più forte quanto maggiore è il rapporto  $V_c/V_s$ . Successivamente, nella rotazione da a) a c), entrambi i rotorini spingono il gas nell'ambiente di mandata, il cui volume complessivo diminuisce nuovamente fino al valore  $V_s$ ; la pressione tende contemporaneamente ad aumentare fino a raggiungere nuovamente il valore massimo nella configurazione c), in cui la camera inferiore, avendo completato l'aspirazione, si ritrova nella stessa posizione assunta dalla camera superiore nella configurazione a). Nel caso di rotorini a due lobi, quindi, il periodo corrisponde ad una rotazione  $\theta = \pi/2$  (la periodicità del funzionamento è ovviamente legata alla costanza della portata utilizzata).

In base al funzionamento appena descritto, il compressore Roots può pertanto essere considerato un vero e proprio *trasferitore di gas*.

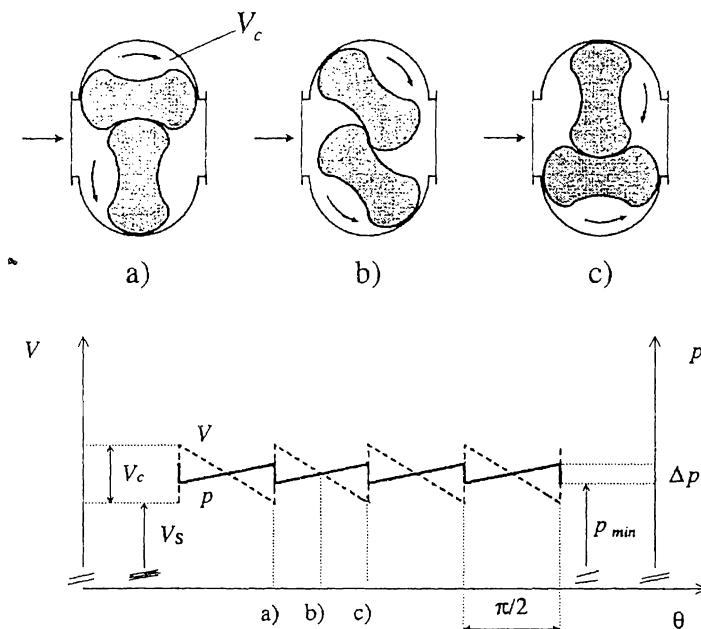


Figura 3.24: analisi del funzionamento di un compressore Roots.

Il ciclo di lavoro, diagrammato in fig. 3.25, è quindi costituito da una fase di aspirazione 0-1 a pressione costante  $p_1$  (nel caso che il volume dell'ambiente di aspirazione sia molto maggiore di  $V_c$  e che le laminazioni siano trascurabili; si noti, inoltre, che il

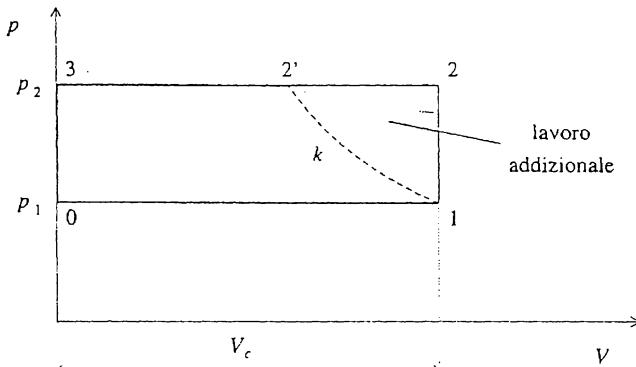


Figura 3.25: ciclo di lavoro di un compressore Roots.

volume di spazio morto è nullo), in cui viene inglobato il gas nel volume  $V_c$ ; da una fase di compressione 1-2 praticamente istantanea dovuta al riflusso di gas dall'ambiente di mandata nel volume  $V_c$ , che si verifica quando viene scoperta la luce di mandata: se  $V_S$  è molto maggiore di  $V_c$ , si raggiunge praticamente la stessa pressione che si aveva nel serbatoio,  $p_2 = \beta p_1$  ( $\Delta p$  trascurabile), e anche la successiva fase di mandata 2-3 è a pressione costante; se il rapporto  $V_c/V_S$  non è piccolo, invece, la fase di mandata è a pressione crescente, coerentemente con la fig. 3.24, da  $p_2 = p_{\min}$  a  $p_3 = p_{\max}$ ; è chiaro che, ai fini del calcolo del lavoro, è sufficiente sostituire tale fase a pressione crescente con una fase a pressione costante e pari a  $(p_{\min} + p_{\max})/2$ . Vale la pena osservare che la fase di trasferimento del gas intrappolato nella camera, che avviene a pressione e volume costanti ed è praticamente istantanea nel caso di rotori a due lobi, è rappresentata dal punto 1 sul ciclo di lavoro. Come si rileva dalla fig. 3.25, un compressore Roots richiede, rispetto ad una macchina a compressione graduale, un maggior lavoro al ciclo. L'area 122'1, delimitata dalla compressione per riflusso 1-2, dalla parte 2-2' della fase di mandata e dalla compressione politropica 1-2' (con  $m \leq k$  in generale e  $m = k$  in figura), è detta **perdita triangolare** e la sua presenza è dovuta al fatto che la massa di gas compresso che rifluisce in  $V_c$  riceve nuovamente lavoro dai lobi del rotore, per essere ritrasferita nell'ambiente di mandata. Il fatto che tale perdita triangolare sia in prima approssimazione proporzionale al quadrato dell'aumento di pressione ( $p_2 - p_1$ ) realizzato nella macchina sconsiglia l'uso di questo tipo di compressori nel caso di rapporti di compressione elevati.

Il lavoro al ciclo  $L_c$  coincide con l'area 01230 ed è quindi pari a:

$$L_c = - \oint pdV = \oint Vdp = \int_1^2 Vdp = V_c(p_2 - p_1) = V_c p_1 (\beta - 1). \quad (3.60)$$

Indicando con  $n_c = in$  il numero di cicli all'unità di tempo, pari alla velocità di rotazione dei rotori,  $n$ , moltiplicata per il numero di camere,  $i$  (pari al doppio del numero di lobi di ciascun rotore:  $i = 4$  per il compressore di fig. 3.23), e definendo come cilindrata totale  $V$  il prodotto  $(iV_c)$ , si ricava, in base alla (3.4), la seguente espressione per il calcolo della

potenza assorbita:

$$P_a = \frac{L_c n_c}{\eta_m} = \frac{L_c i n}{\eta_m} = \frac{i V_c (p_2 - p_1) n}{\eta_m} = \frac{V (p_2 - p_1) n}{\eta_m}. \quad (3.61)$$

Esaminiamo ora l'effetto delle laminazioni e delle fughe. Per quanto riguarda le prime, va ribadito che possono verificarsi perdite di pressione in corrispondenza delle luci di ingresso e di mandata solo in caso di regime di rotazione elevato e sezioni di passaggio piuttosto piccole (cui corrisponde un'elevata velocità di efflusso attraverso le suddette luci). Tali laminazioni comportano sia un piccolo aumento dell'area del ciclo di lavoro e quindi di  $L_c$  (il compressore aspira a  $p'_1 < p_1$  e manda a  $p'_2 > p_2$ ), normalmente trascurato, che una riduzione della massa aspirata (per via della corrispondente riduzione di densità) rispetto al caso ideale; quest'ultima può essere eventualmente conteggiata tramite il coefficiente di riempimento  $\lambda_v$ :

$$M_a = \lambda_v \rho_1 V_c. \quad (3.62)$$

Rivestono invece maggior importanza le fughe attraverso la macchina: una quota parte del gas trasferito nell'ambiente di mandata rifiuisce infatti verso l'aspirazione, attraverso i giochi tra cassa e rotorì, e, in particolare, in corrispondenza delle basi dei rotorì cilindrici (che sono pertanto piuttosto allungati). La massa mandata,  $M$ , è quindi minore di quella aspirata,  $M_a$ :

$$M = \eta_v M_a = \eta_v \lambda_v M_{id} = \eta_v \lambda_v \rho_1 V_c; \quad (3.63)$$

Inoltre, il gas caldo che rifiuisce si miscela con il gas in aspirazione provocandone una riduzione della densità e quindi del coefficiente di riempimento. La portata mandata risulta quindi pari a:

$$G = \eta_v \lambda_v \rho_1 V_c n_c, \quad (3.64)$$

e, ponendo  $n_c = in$  e  $V = iV_c$ , si ha:

$$G = \eta_v \lambda_v \rho_1 V n. \quad (3.65)$$

Più comunemente, il rapporto  $M/M_{id}$  viene indicato con il solo coefficiente  $\eta_v$  (o  $\lambda_v$ ), che tiene quindi conto di tutti gli effetti sopra citati:

$$G = \eta_v \rho_1 V n. \quad (3.66)$$

Il lavoro ad unità di massa mandata è infine pari a (v. equazioni (3.5) e (3.6)):

$$L'_i = \frac{L_c n_c}{G} = \frac{V (p_2 - p_1)}{\eta_v V \rho_1} = \frac{RT_1 (\beta - 1)}{\eta_v}. \quad (3.67)$$

Supponendo il flusso tra monte (condizioni 1) e valle (condizioni 2) della macchina in regime permanente e trascurando lo scambio termico all'interno della macchina, è infine possibile calcolare la temperatura di mandata di un compressore Roots, utilizzando il I PTD:

$$T_2 = T_1 + \frac{L'_i}{c_p} = T_1 \left( 1 + \frac{k - 1}{k \eta_v} (\beta - 1) \right). \quad (3.68)$$

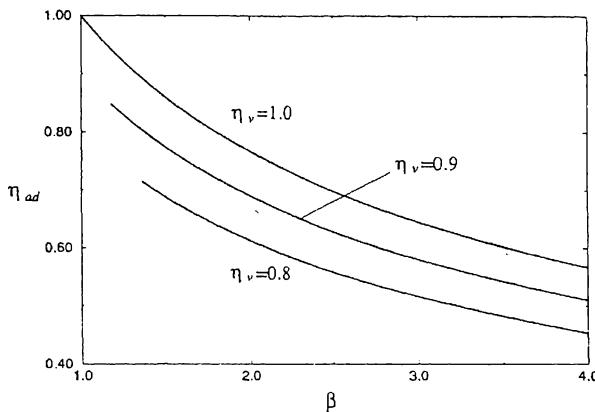


Figura 3.26: influenza della perdita triangolare e delle fughe sul rendimento isoentropico di un compressore Roots.

Una rappresentazione grafica delle prestazioni del compressore evidenzia quanto finora detto. In fig. 3.26 è mostrato l'andamento del rendimento isoentropico del compressore<sup>6</sup>,

$$\eta_{ad} = \frac{\frac{k}{k-1} RT_1 \left( \beta^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{L'_i}, \quad (3.69)$$

in funzione del rapporto di compressione realizzato e per diversi valori del rendimento volumetrico. Si riscontra che, a parità di  $\eta_v$ ,  $\eta_{ad}$  diminuisce al crescere di  $\beta$  perché la perdita triangolare aumenta più rapidamente del lavoro al ciclo, mentre, a parità di  $\beta$ ,  $\eta_{ad}$  è direttamente proporzionale ad  $\eta_v$ , come facilmente rilevabile dalle (3.67) e (3.69). Va sottolineato che le curve a  $\eta_v = \text{cost}$  non rappresentano il funzionamento di una stessa macchina ad  $n$  costante, in quanto il rendimento volumetrico dipende (a parità di  $n$ ) dalla pressione di mandata e dai giochi esistenti tra rotore e cassa.

In fig. 3.27 è infatti rappresentato l'andamento di  $\eta_v$  al variare di  $n$ , per due valori di  $\beta$  e dell'allungamento del rotore,  $l/d$ . L'aumento di  $\eta_v$  con  $n$  è giustificato dal fatto che la portata aspirata dipende pressoché linearmente da  $n$ , mentre la portata di fuga è, a parità di  $\beta$  ed  $l/d$ , praticamente costante. Analogamente, a pari  $n$ , la portata aspirata è costante, mentre la portata di fuga aumenta con  $\beta$  e diminuisce con  $l/d$ , essendo i giochi tra cassa e rotore percentualmente ridotti rispetto alla sua lunghezza. Una riduzione di  $\lambda_v$  (conteggiata ancora in  $\eta_v$  e più evidente per bassi valori di  $\beta$ ) può essere riscontrata ad alti regimi di rotazione, nel caso di luce di aspirazione a sezione piuttosto ridotta, v. fig. 3.28. Tutte queste considerazioni giustificano l'andamento del diagramma collinare

<sup>6</sup>Poiché la compressione avviene per riflusso, è più opportuno, nel caso dei compressori Roots, utilizzare  $\eta_{ad}$  piuttosto che  $\eta_{is}$ .

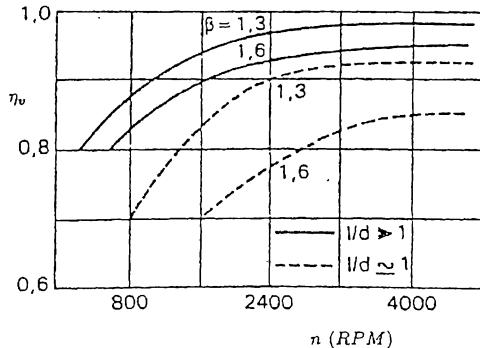


Figura 3.27: influenza del regime di rotazione, del rapporto di compressione e del rapporto  $l/d$  sul rendimento volumetrico di un compressore Roots.

di un compressore Roots rappresentato in fig. 3.29: le linee a  $n = \text{cost}$  si discostano

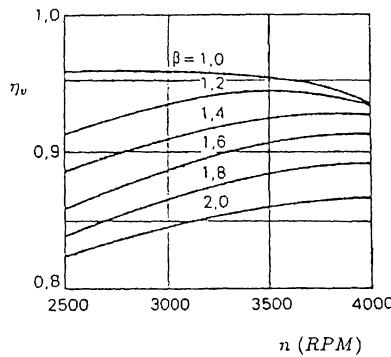


Figura 3.28: influenza del regime di rotazione e del rapporto di compressione sul rendimento volumetrico di un compressore Roots.

leggermente dalla verticale per via delle fughe; il rendimento totale  $\eta_C = \eta_m \eta_v \eta_{ad}$ , inoltre, presenta un massimo abbastanza distinto per valori medi del campo di funzionamento: per bassi valori della portata (volumetrica)  $Q$ , ovvero di  $n$ , le fughe assumono particolare importanza, così come per alti valori di  $\beta$ , per i quali si ha anche un aumento della perdita triangolare. Per alti valori di  $Q$  ed  $n$ , invece, il rendimento risente delle laminazioni nelle luci. Per bassi valori di  $\beta$ , infine, l'accresciuta importanza delle perdite meccaniche comporta una riduzione del rendimento totale.

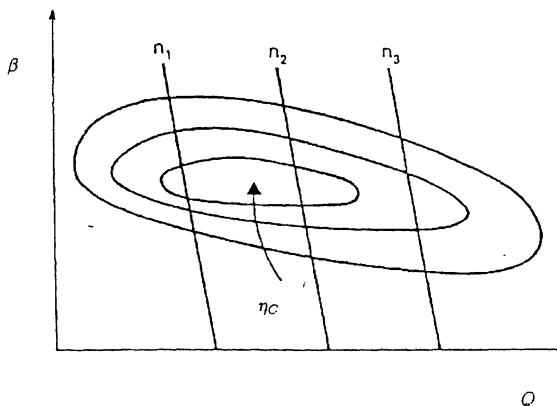


Figura 3.29: diagramma collinare di un compressore Roots.

### 3.5.2 Compressori a palette

La macchina è composta da una cassa cilindrica entro la quale ruota, in posizione eccentrica, un cilindro munito di scanalature (spesso radiali) ove sono alloggiate delle sottili palette che vengono spinte contro la parete interna della cassa da piccole molle inserite alla base delle scanalature e/o dalla forza centrifuga dovuta al moto del rotore, v. fig. 3.30. Un'abbondante lubrificazione è necessaria sia per ridurre l'usura che per migliorare la tenuta tra palette e cassa.

Il volume compreso tra due palette consecutive varia periodicamente in un giro, passando da quasi zero ad un valore massimo,  $V_c$ , raggiunto quando esse si trovano in posizione simmetrica rispetto all'asse congiungente i centri del rotore e della cassa, e nuovamente ad un valore quasi nullo. Durante la fase di aumento di volume si realizza quindi l'aspirazione, mentre durante la fase di riduzione di volume si realizza prima una **compressione graduale** del gas (fino ad un certo volume) e poi la mandata. Le luci che assicurano il collegamento tra il volume considerato e gli ambienti di aspirazione e di mandata devono ovviamente essere disposte in modo appropriato: il bordo di chiusura della luce di aspirazione (a sinistra in fig. 3.30, dove il rotore gira in senso orario) è posizionato nel punto A, in modo da eliminare il collegamento con l'aspirazione in corrispondenza del volume massimo. Per quanto riguarda la luce di mandata, la sua posizione (angolo  $\varphi$  in fig. 3.30) determina il volume minimo raggiunto nella fase di compressione graduale e quindi il **rapporto volumetrico di compressione graduale**  $\rho$ , pari al rapporto tra il volume massimo  $V_c$  e il volume del vano interpalare nel momento in cui si scopre la luce di mandata,  $\rho = A_1/A_\varphi$ . Ulteriori dati di progetto che possono essere variati per imporre il rapporto  $\rho$  desiderato sono il numero di palette,  $i$ , ed il rapporto tra il diametro del rotore e quello della cassa.

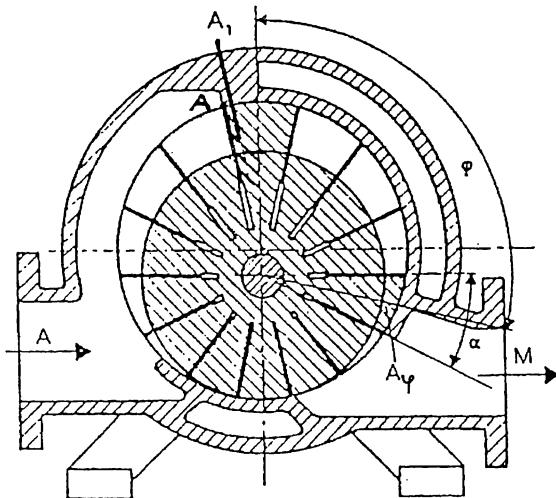
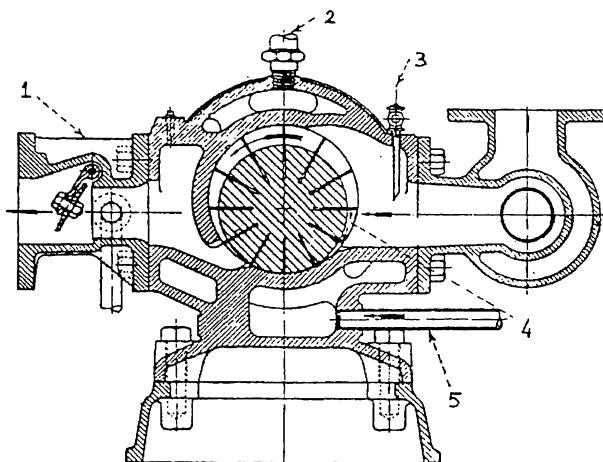


Figura 3.30: sezione trasversale di un compressore a palette.

In fig. 3.31 e in fig. 3.32 sono presentate le sezioni trasversale e longitudinale di un compressore a palette refrigerato ad acqua (si notino i canali che circondano la cassa).

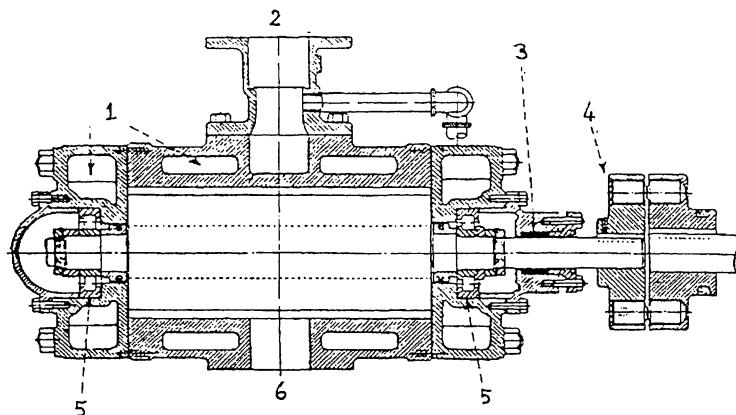
Analizziamo ora il ciclo di lavoro del compressore a palette: il gas viene aspirato a partire da un volume praticamente nullo fino al volume massimo  $V_c$ , a pressione costante  $p_1$  (trasformazione 0-1 in ciascun diagramma rappresentato in fig. 3.33) pari a quella dell'ambiente di aspirazione, poiché le laminazioni nelle luci sono solitamente trascurabili. Quando la seconda paletta raggiunge il punto A ( $V_1 = V_c$  in fig. 3.33) ha inizio la fase di compressione graduale, in quanto il gas, racchiuso tra il rotore, la cassa e le due palette si riduce di volume. Trattandosi di una macchina volumetrica è consuetudine trascurare il lavoro delle resistenze passive  $L_w$  (anche se va rilevato che le velocità in gioco sono maggiori che nel caso delle macchine alternative, grazie all'assenza di grosse masse in moto alterno), per cui possiamo supporre (ciclo convenzionale) che il gas venga compresso, secondo una politropica di esponente  $m \leq k$ , fino al volume  $V_2 = V_1/\rho$  ed alla pressione  $p'_2 = p_1\rho^m$ . Quando la paletta di sinistra scopre la luce di mandata, si possono verificare, al variare della pressione  $p_2$  nel corrispondente ambiente, tre situazioni:

- $p_2 = p'_2$ : il compressore funziona in modo analogo ad un compressore alternativo: una volta messe in comunicazione la camera e l'ambiente di mandata, che sono alla stessa pressione, si realizza, durante la successiva rotazione, la fase di mandata 2'-3 a pressione costante;
- $p_2 < p'_2$ : poiché la pressione raggiunta nella camera è maggiore di quella dell'ambiente



1 valvola di non ritorno 2 uscita dell'acqua di refrigerazione 3 ingresso lubrificante 4 rotore palettato 5 ingresso dell'acqua di refrigerazione

Figura 3.31: sezione trasversale di un compressore a palette.



1 condotti di raffreddamento 2 mandata 3 tenuta a premistoppa 4 spina di sicurezza 5 cuscinetti 6 aspirazione

Figura 3.32: sezione longitudinale di un compressore a palette.

di mandata, si verificherà uno *sbuffo* (quasi) istantaneo di gas verso la mandata, con conseguente riduzione della pressione fino ad un valore molto vicino a  $p_2$ , essendo normalmente il volume del serbatoio di mandata molto maggiore rispetto a  $V_c$  (fase 2'-2); successivamente, si ha la fase di mandata 2-3 a pressione costante; questa condizione di funzionamento va possibilmente evitata, in quanto lo sbuffo violento di aria trascina con se parte dell'olio di lubrificazione; all'avviamento, naturalmente, è impossibile evitare questo inconveniente;

- c)  $p_2 > p'_2$ : poiché la pressione raggiunta nella camera è minore di quella esterna, si verificherà un *riflusso* (quasi) istantaneo di gas dall'ambiente di mandata verso l'interno della camera, con conseguente aumento della pressione fino ad un valore molto vicino a  $p_2$  (fase 2'-2); alla **compressione per riflusso** segue ancora la fase di mandata 2-3 a pressione costante.

Rispetto ad una macchina che realizzi una compressione graduale fino alla stessa pressione  $p_2$ , il compressore a palette assorbe, nelle condizioni b) e c), un lavoro maggiore di una quantità corrispondente all'area 2'2"2', che viene detta **perdita triangolare** (analogamente a quanto avviene nel compressore Roots). La condizione a) è quindi quella ottimale, ma, nel caso di pressione di mandata variabile (ad esempio nel caso di regolazione on/off), è preferibile che il compressore funzioni nelle condizioni a) e c), in modo da evitare pericolose perdite di olio.

Calcoliamo ora le prestazioni del compressore a palette con riferimento alla condizione c), pur sottolineando che le formule che saranno ricavate, ed in particolare l'espressione del lavoro al ciclo, valgono anche negli altri due casi. Per quanto riguarda la portata, si è detto che le laminazioni all'aspirazione sono solitamente trascurabili essendo le luci a sezione piuttosto elevata. Non altrettanto trascurabili sono invece le fughe attraverso i giochi tra cassa e rotore, e, in particolare, in corrispondenza delle due basi del cilindro che costituisce il rotore (che è pertanto piuttosto allungato). Analogamente al compressore Roots, la portata in massa risulta pari a:

$$G = \eta_v \rho_1 V_c n_c, \quad (3.70)$$

dove  $n_c$  rappresenta il numero di cicli all'unità di tempo ed è quindi pari alla velocità di rotazione del rotore,  $n$ , moltiplicata per il numero di camere ovvero di palette,  $i$ . Sostituendo  $n_c = in$  nella (3.70) e definendo come cilindrata totale  $V$  il prodotto ( $iV_c$ ), si ha:

$$G = \eta_v \rho_1 V n. \quad (3.71)$$

Il lavoro compiuto dalle palette sul gas in ogni ciclo è pari all'integrale ciclico  $-\int pdV$  e quindi rappresentato dall'area del ciclo, che può essere valutata più comodamente come  $\int Vdp$  ovvero come

$$\begin{aligned} L_c &= \int_1^2 V dp = \int_1^{2'} V dp + \int_{2'}^2 V dp = \\ &= \frac{m}{m-1} p_1 V_c \left[ \left( \frac{p'_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] + \frac{V_c}{\rho} (p_2 - p'_2) \\ &= \frac{m}{m-1} p_1 V_c (\rho^{m-1} - 1) + \frac{V_c}{\rho} (p_2 - p_1 \rho^m) = \end{aligned}$$

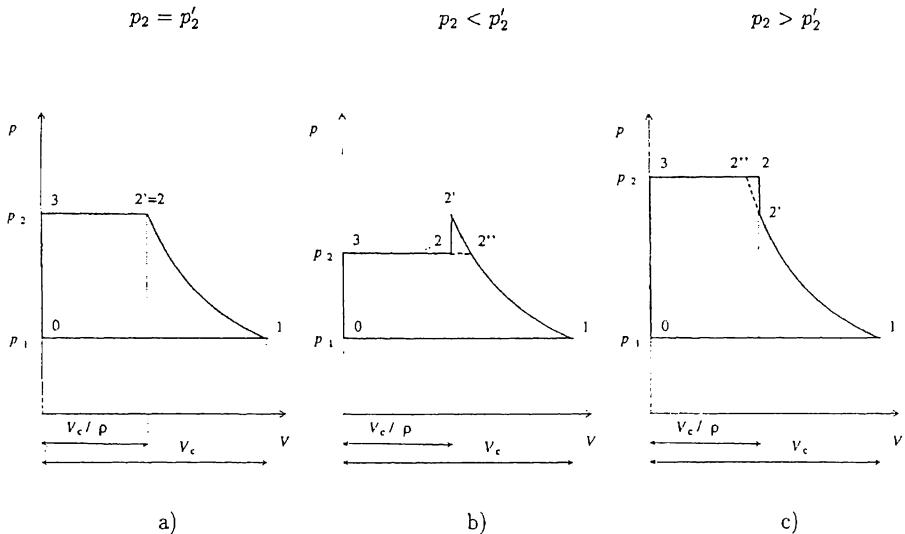


Figura 3.33: ciclo di un compressore a palette al variare della pressione nel serbatoio di mandata.

$$= \frac{m}{m-1} p_1 V_c \left[ (\rho^{m-1} - 1) + \frac{m-1}{m} \left( \frac{\beta}{\rho} - \rho^{m-1} \right) \right], \quad (3.72)$$

in cui  $m$  è l'esponente della politropica di compressione graduale 1-2' (se gli scambi termici sono trascurabili,  $m = k$ ). Il secondo termine, relativo, nel caso c), alla compressione per riflusso, diventa nullo nel caso a) e negativo nel caso b), per cui la (3.72) vale in tutti i tipi di funzionamento del compressore a palette. Utilizzando la (3.4), si valuta poi la potenza assorbita come:

$$P_a = \frac{L_c n_c}{\eta_m} = \frac{L_c in}{\eta_m} = \frac{m}{m-1} \frac{p_1 V n}{\eta_m} \left[ (\rho^{m-1} - 1) + \frac{m-1}{m} \left( \frac{\beta}{\rho} - \rho^{m-1} \right) \right]. \quad (3.73)$$

Applicando la (3.5) e la (3.6), ed utilizzando l'espressione (3.70) per la portata, è possibile valutare poi il lavoro ad unità di massa manda:

$$\begin{aligned} L'_i &= \frac{L_c n_c}{\eta_v \rho_1 V_c n_c} = \frac{m}{m-1} \frac{R T_1}{\eta_v} \left[ (\rho^{m-1} - 1) + \frac{m-1}{m} \left( \frac{\beta}{\rho} - \rho^{m-1} \right) \right] = \\ &= \frac{m}{m-1} \frac{R T_1}{\eta_v} \left( \frac{\rho^{m-1}}{m} + \frac{m-1}{m} \frac{\beta}{\rho} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Il calcolo della temperatura di mandata del compressore a palette può essere effettuato supponendo il flusso tra monte (condizioni 1) e valle (condizioni 2) della macchina in regime permanente; applicando il I PTD, si ha, trascurando le variazioni di energia cinetica:

$$T_2 = T_1 + \frac{L'_i + Q'_e}{c_p}, \quad (3.75)$$

con  $Q'_e = \dot{Q}/G = Q_e/\eta_v \leq 0$  relativo alla sola compressione graduale e valutato mediante la (1.133) e la (1.139):

$$Q'_e = \frac{Q_e}{\eta_v} = \frac{c_v}{\eta_v} \frac{m - k}{m - 1} (T'_2 - T_1) = \frac{c_v}{\eta_v} \frac{m - k}{m - 1} T_1 (\rho^{m-1} - 1). \quad (3.76)$$

Allo stesso risultato si può tuttavia giungere calcolando prima la temperatura  $T'_2$  di fine compressione graduale,  $T'_2 = T_1 \rho^{m-1}$ , e poi aggiungendo l'aumento di temperatura dovuto alla compressione per rifiusso (v. equazione (3.68)), così da ottenere:

$$T_2 = T_1 \rho^{m-1} \frac{1 + \frac{k-1}{k} \left( \frac{\beta}{\rho^m} - 1 \right)}{\eta_v}. \quad (3.77)$$

### 3.5.3 Compressori a doppia vite

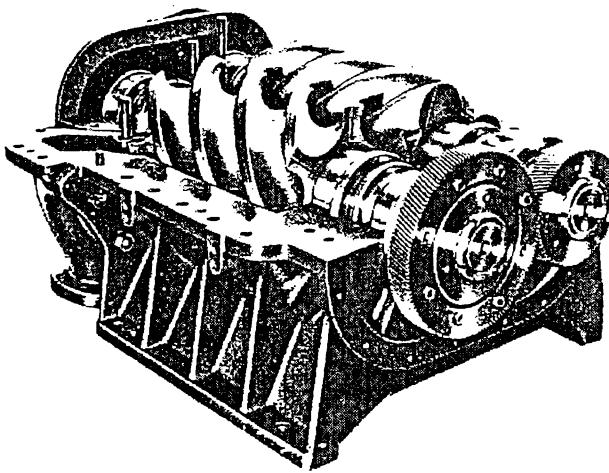


Figura 3.34: compressore a doppia vite (da manuale Atlas Copco).

In fig. 3.34 è mostrato un compressore a doppia vite, costituito da due rotori a vite asimmetrica a rotazione contrapposta, contenuti in una cassa cilindrica. Si distinguono due principali realizzazioni:

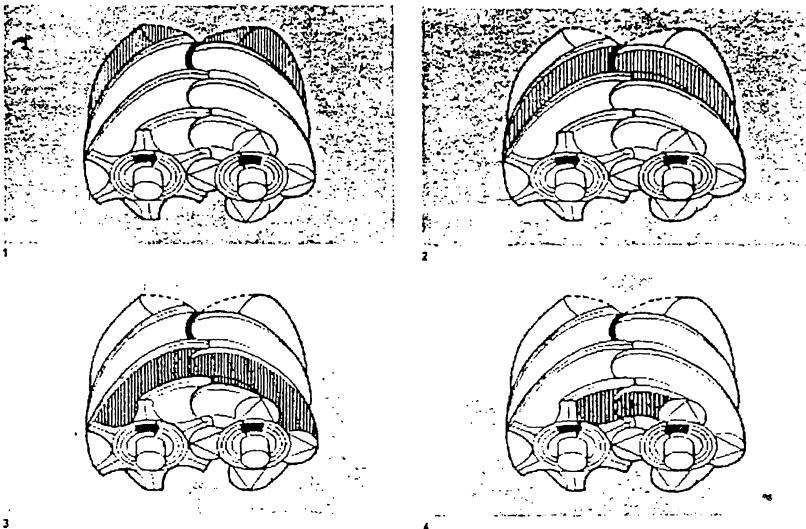


Figura 3.35: principio di funzionamento di un compressore a doppia vite (da manuale Atlas Copco).

- compressore *in bagno d'olio*: il rotore principale viene azionato da un motore elettrico ed il moto viene trasmesso alla vite secondaria senza contatto metallico, ma attraverso un cuscino d'olio esistente tra le viti; l'olio, inoltre, iniettato in abbondanza all'interno della macchina, refrigerà il gas durante la compressione, lubrifica i cuscinetti e permette di realizzare una buona tenuta tra le spire a contatto e tra le viti e la cassa, consentendo rapporti di compressione  $\beta$  fino a circa 4. A valle del compressore è ovviamente necessario installare un separatore d'olio.
- compressore *a secco*: il movimento sincronizzato dei due rotori è ottenuto per mezzo della coppia di ruote dentate visibili in primo piano in fig. 3.34; si noti che il rotore maschio ed il rotore femmina sono rispettivamente costituiti da quattro lobi e da sei cave, per cui il primo ruota a velocità maggiore del secondo (corrispondentemente la ruota dentata del rotore femmina ha diametro maggiore dell'altra). Grazie alle ridottissime tolleranze di costruzione, si realizza una sufficiente tenuta senza l'ausilio di olio, che viene utilizzato solo per la lubrificazione dei cuscinetti e non viene quindi in contatto con il gas, che risulta quindi esente da impurità; in alcuni casi, viene comunque iniettato un liquido refrigerante per ridurre il lavoro richiesto. Il compressore a secco richiede quindi un ingranaggio sincronizzatore, ma consente di eliminare il separatore d'olio; i giochi, sia pur molto ridotti, tra le due spire e tra le viti e la cassa, impongono di limitare il rapporto di compressione  $\beta$  a valori prossimi a  $3 \div 4$ , ovvero ad utilizzare macchine bistadio per valori maggiori.

di  $\beta$ ; nel compressore a secco vengono inoltre eliminate le spinte assiali dovute al trasferimento del moto da un rotore all'altro.

Il funzionamento del compressore a doppia vite è ovviamente identico nei due casi sopra citati e viene qui di seguito descritto con riferimento alla fig. 3.35: come appare dal primo e dal secondo riquadro, il volume tratteggiato compreso tra i lobi filettati e la cassa aumenta in seguito alla rotazione delle due viti. La luce di aspirazione, localizzata nella parte terminale dei rotori, viene quindi coperta nel momento in cui viene intrappolato, tra due successive coppie di lobi e la cassa, il volume massimo. Proseguendo la rotazione, la riduzione del volume compreso tra le due spire e la cassa (terzo riquadro) provoca la compressione (graduale) del gas, che continua finché non viene scoperta la luce di mandata (quarto riquadro), allorquando si verifica, anche in queste macchine, una delle tre condizioni analizzate nel caso dei compressori a palette. La mandata avviene poi a pressione costante, pari a quella esterna, essendo le laminazioni anche in questo caso trascurabili.

Con riferimento alla fig. 3.35, indicando con  $V_c$  il volume compreso tra due spire (alla fine della fase di aspirazione) e con  $n_c = in$  il numero di cicli all'unità di tempo, pari alla velocità di rotazione del rotore maschio (o, equivalentemente, femmina),  $n$ , moltiplicata per il numero di lobi (o, corrispondentemente, cave),  $i$ , la portata mandata risulta pari a:

$$G = \eta_v \rho_1 V_c n_c = \eta_v \rho_1 V n, \quad (3.78)$$

essendo  $V = iV_c$  la cilindrata totale o al giro.

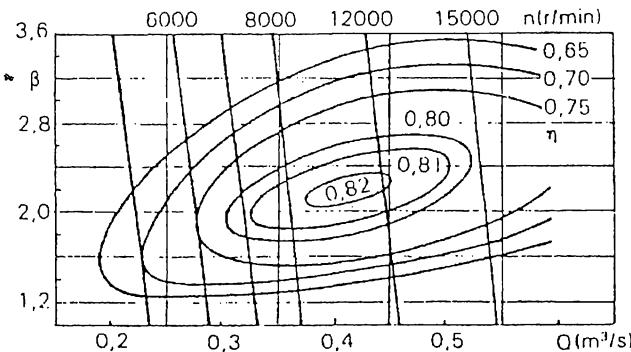


Figura 3.36: diagramma collinare di un compressore a vite.

Il diagramma collinare di un compressore a vite è ovviamente abbastanza simile a quello di un compressore Roots, v. fig 3.36: in particolare, il rendimento totale  $\eta_C = \eta_m \eta_v \eta_{is}$ <sup>7</sup> è basso sia per alti che per bassi valori di  $\beta$ , rispettivamente per via delle fughe e

<sup>7</sup>Si ricorda che, essendo  $m < k$  grazie al calore sottratto dall'olio o dal refrigerante iniettato, è preferibile riferirsi ad  $\eta_{is}$  piuttosto che ad  $\eta_{ad}$ .

per la notevole influenza delle perdite meccaniche. Anche il rendimento isotermo si riduce man mano che ci si discosta dal punto di progetto a causa della perdita triangolare. Le fughe assumono inoltre particolare importanza per bassi valori della portata, ovvero di  $n$ . Per alti valori di  $Q$  ed  $n$ , invece, il rendimento risente lievemente delle laminazioni nelle luci. Le linee a  $n = \text{cost}$ , infine, si discostano leggermente dalla verticale ancora per via delle fughe.

Per il tipo di funzionamento che lo caratterizza, il compressore a doppia vite, così come quello a singola vite, di cui si parlerà nel successivo paragrafo, può essere accoppiato a motori veloci, senza problemi di usura, vibrazioni e rumorosità, ed è pertanto in grado di smaltire portate anche piuttosto elevate, con rapporti di compressione leggermente inferiori a quelli ottenuti nei compressori alternativi. Grazie ai suoi molti pregi, il compressore a vite viene spesso preferito agli altri tipi di compressore in moltissime applicazioni industriali (ad esempio, in gran parte degli impianti frigoriferi e di produzione di aria compressa).

### 3.5.4 Compressori a singola vite

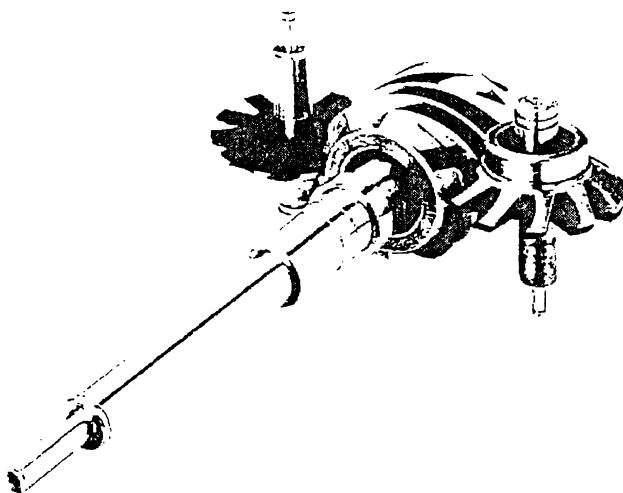


Figura 3.37: elementi principali di un compressore a singola vite (da catalogo McQuay).

In fig. 3.37 sono mostrati gli elementi caratteristici che distinguono il compressore a singola vite da quello a doppia vite: un unico rotore a vite (rotore principale) viene impegnato lateralmente con due rotori dentati (rotori secondari) aventi asse di rotazione perpendicolare a quello della vite.

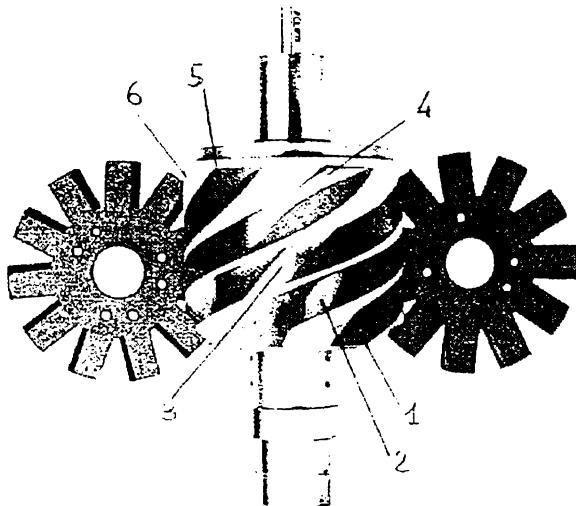


Figura 3.38: principio di funzionamento di un compressore a singola vite (da catalogo McQuay).

Descriviamone il funzionamento facendo riferimento alla fig. 3.38, in cui sono stati numerati i volumi compresi tra le parti mobili della macchina e la cassa; quest'ultima, ovviamente non rappresentata, ricopre completamente il rotore a vite, con eccezione delle zone in cui vengono localizzate le luci. Il volume 1, delimitato da due spire, dalla cassa e da un solo dente (del rotore di destra), è in collegamento con l'aspirazione; il passaggio dalla posizione 1 alla posizione 2, in seguito alla rotazione della vite (il rotore di sinistra e quello di destra girano rispettivamente in senso antiorario ed orario), comporta un aumento di volume: la fase di aspirazione procede finché non viene raggiunta la posizione 3, nella quale le spire si impegnano anche con un dente del rotore di sinistra, delimitando quindi il volume massimo,  $V_c$ . Un'ulteriore rotazione fa disimpegnare il dente di destra, per cui il volume, che risulta ora delimitato dalla parte terminale del rotore a vite, diminuisce, come si riscontra dalle posizioni 4 e 5. La compressione avviene quindi durante il passaggio dalla posizione 3 ad una posizione intermedia tra 5 e 6, in corrispondenza della quale il volume di gas viene messo in collegamento con la mandata attraverso la corrispondente luce; ovviamente la posizione di tale luce determina l'esatto rapporto di compressione volumetrico e quindi l'eventuale successiva compressione per riflusso. Successivamente, il volume continua a diminuire per cui si realizza la mandata, a pressione costante, del gas.

In questo caso, il numero di cicli al giro,  $i$ , è ovviamente pari al doppio del numero di cave (sei nel caso considerato), in quanto volumi identici vengono corrispondentemente individuati dall'altra parte del rotore a vite, in modo da annullare le spinte laterali dovute

alle forze di pressione. La portata mandata è quindi pari a:

$$G = \eta_v \rho_1 V_c n_c = \eta_v \rho_1 V n, \quad (3.79)$$

essendo  $n_c = in$  e  $V = iV_c$ .

### 3.5.5 Regolazione dei compressori rotativi

La regolazione dei compressori rotativi è basata su alcune delle tecniche utilizzate per i compressori alternativi. In particolare, i metodi utilizzati nella gran parte delle applicazioni, sono la variazione del numero di giri e la regolazione on/off (tutto o niente).

Per quanto riguarda il primo, valgono le stesse considerazioni esposte nel caso dei compressori alternativi: la portata e la potenza si riducono in modo circa proporzionale ad  $n$  (si ricorda che  $\eta_v$  diminuisce andando verso bassi valori di  $n$ , v. fig. 3.27 o fig. 3.28), ma si richiede un motore di comando a numero di giri variabile.

La regolazione on/off viene spesso utilizzata anche in macchine di una certa importanza, ma con una opportuna variante: se la frequenza di accensioni e spegnimenti è elevata, si preferisce far funzionare il compressore *a vuoto* nei periodi in cui non deve essere prodotto gas compresso, in modo da evitare il rischio di pericolosi surriscaldamenti del motore di comando. Questa pratica è evidenziata in fig. 3.39, dove viene proposto uno schema

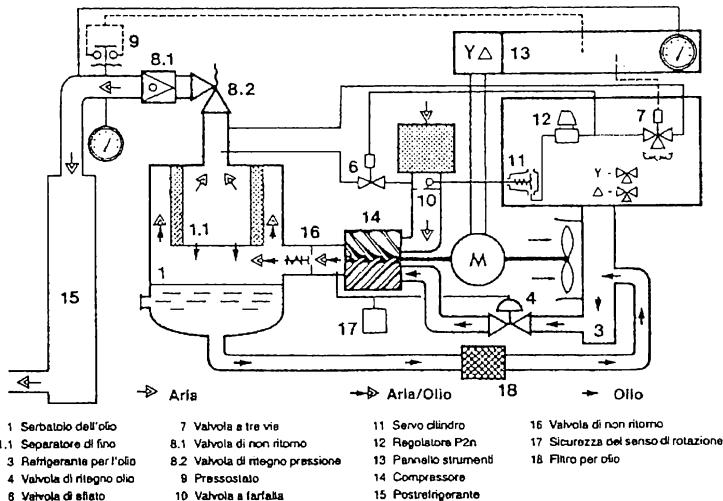
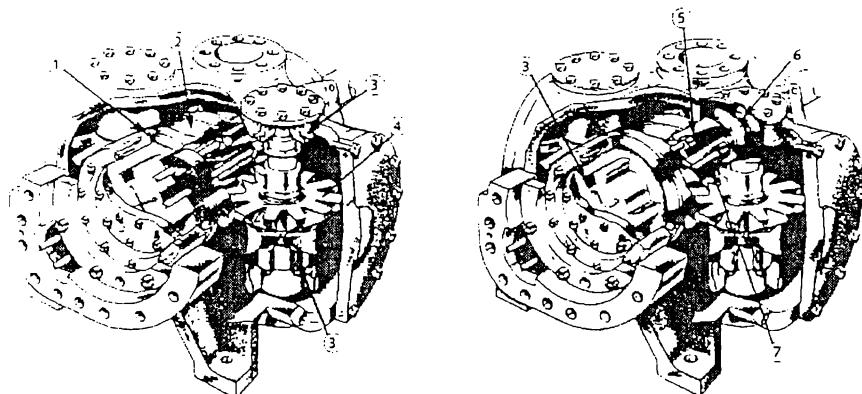


Figura 3.39: schema di compressore a doppia vite con possibilità di funzionamento a vuoto (da catalogo Mannesmann Demag).

completo di un compressore d'aria a vite: quando il pressostato 9 rileva che, a seguito

della riduzione della portata utilizzata, la pressione nella capacità di mandata 15 (ovvero il postrefrigeratore) ha raggiunto il valore massimo accettato, viene chiuso il collegamento del refrigeratore con il compressore, e, contemporaneamente, aperta la valvola di sfato 6. Il compressore assorbe in tali condizioni una potenza molto bassa e si ha il vantaggio di non arrestare il motore.

La regolazione per laminazione viene raramente utilizzata nei compressori a vite e a palette, in quanto, essendo  $\rho$  non molto elevato, si riesce al massimo ad ottenere una piccola riduzione di potenza. La laminazione è invece assolutamente inadatta per il compressore Roots ( $\rho = 1$ ), per il quale si avrebbe un netto aggravio della potenza assorbita. Per analoghi motivi, la regolazione per riflusso viene utilizzata solo laddove si preferisce semplificare l'impianto.



1 tenuta a labirinto (per la riduzione delle fughe di gas compresso verso l'esterno) 2 rotore principale 3 cuscinetti 4 rotori dentati (in materiale composito al carbonio) 5 slitta per la variazione della portata aspirata 6 tenuta a labirinto (sull'albero) 7 slitta per il posizionamento della luce di mandata

Figura 3.40: spaccato di un compressore a singola vite con variazione della posizione delle luci di aspirazione e di mandata per la regolazione della portata e del rapporto di compressione volumetrico (da catalogo Dresser-Rand).

Nel paragrafo 3.3.4, si era mostrata la possibilità, per un compressore alternativo, di variare la durata della fase di aspirazione, e quindi la quantità di gas aspirato, mediante il ritardo o l'anticipo della chiusura della corrispondente valvola. Questo principio viene sfruttato anche nel compressore a singola vite mostrato in fig. 3.40, in cui si nota la slitta 5, che permette di mantenere il collegamento con l'aspirazione anche dopo che il volume ha raggiunto il valore massimo. Corrispondentemente, si riduce il volume aspirato, ma anche il rapporto di compressione volumetrico. Tuttavia, una seconda slitta permette di variare la posizione della luce di mandata e quindi il rapporto di compressione volumetrico.

Ovviamente, questa seconda slitta può essere utilizzata anche al variare della pressione di mandata, in modo da eliminare la compressione per riflusso e la corrispondente perdita triangolare. Grazie alle due slitte, il compressore in fig. 3.40 è in grado di elaborare una portata variabile tra il 20% e il 100% della portata di progetto, con un rapporto di compressione volumetrico variabile tra 2 e 5.

## 3.6 POMPE VOLUMETRICHE ALTERNATIVE

### 3.6.1 Schemi costruttivi e principi di funzionamento

In fig. 3.41 è mostrato lo schema di una pompa alternativa a semplice effetto e del relativo impianto: uno stantuffo 3, azionato da un meccanismo biella-manovella, si muove alternativamente in un cilindro cavo, facendo variare periodicamente il volume della camera 4, da un valore minimo,  $V_4$ , ad un valore massimo,  $V_1$ .

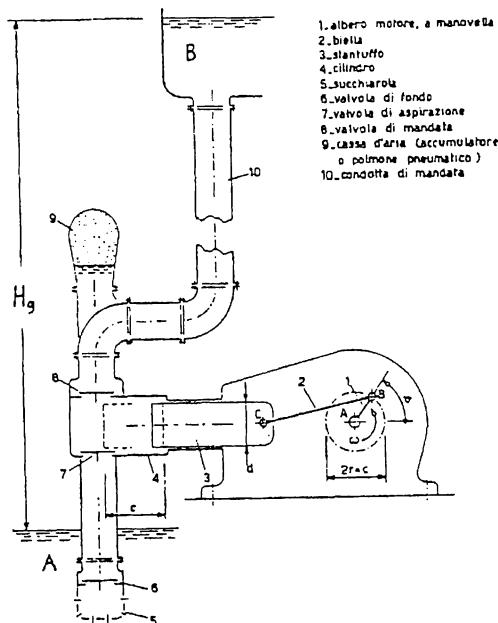


Figura 3.41: schema di pompa volumetrica alternativa e relativo impianto.

Le due posizioni estreme raggiunte dallo stantuffo in corrispondenza dei volumi minimo e massimo vengono rispettivamente denominate punto morto superiore (PMS) e punto morto inferiore (PMI). Nel caso di una pompa monocilindrica a semplice

effetto, il volume spazzato dal pistone nel suo spostamento dal PMS al PMI,  $V_c = V_1 - V_4$ , è infine pari alla cilindrata (totale)  $V$ . Indicando con  $c$  la corsa del pistone (distanza tra PMS e PMI, pari ovviamente al doppio del raggio di manovella,  $c = 2r$ ), e con  $D$  il suo alesaggio (diametro del cilindro),  $V_c$  è ovviamente pari a:

$$V_c = \pi \frac{D^2}{4} c. \quad (3.80)$$

La camera 4 comunica, mediante le due valvole 7 e 8, con le tubazioni di aspirazione e di mandata, che collegano la pompa ai due serbatoi A e B. Le due valvole si aprono per effetto della differenza di pressione fra i due ambienti che essa separano e vengono pertanto dette **valvole automatiche**.

Il principio di funzionamento è il seguente: lo stantuffo 3, spostandosi verso destra dal PMS al PMI crea una depressione all'interno della camera 4, che mantiene aperta la valvola di aspirazione 7 (al contrario di quella di mandata che, per effetto della differenza di pressione tra cilindro e condotto di mandata, rimane chiusa): il liquido, che riempie completamente la tubazione di aspirazione grazie alla valvola di non ritorno 6 (pompa *adescata*), viene quindi aspirato nel cilindro. Raggiunto il PMI, lo stantuffo inverte il suo moto e preme sulla massa liquida aspirata, provocando l'immediata chiusura della valvola di aspirazione. Di conseguenza, la pressione all'interno del cilindro aumenta istantaneamente (il fluido è incomprimibile) fino a superare quella che regna a valle della valvola di mandata, provocandone così l'apertura. Nella corsa di ritorno verso il PMS, lo stantuffo spinge quindi la massa liquida nel condotto di mandata. L'inversione del moto del pistone al PMS fa poi ridurre istantaneamente la pressione, provocando la chiusura della valvola di mandata e la riapertura di quella di aspirazione.

L'impianto è infine dotato di una rete metallica 5 (succhiarola), che impedisce la penetrazione di detriti dal serbatoio al condotto di aspirazione. La funzione della cassa d'aria 9 verrà descritta nel paragrafo 3.6.3.

In fig. 3.42, viene poi proposto uno schema di pompa alternativa a doppio effetto: essa si differenzia da quella a semplice effetto per l'azionamento del pistone, che viene rinviato al meccanismo biella-manovella tramite uno stelo<sup>8</sup>, in modo da ricavare, a destra dello stantuffo, una seconda camera a volume variabile, dotata anch'essa di una valvola di aspirazione,  $V_{a2}$ , e di una di mandata,  $V_{m2}$ , e con una cilindrata solo lievemente inferiore rispetto a quella della camera di sinistra. Una pompa a doppio effetto consente quindi di elaborare una portata quasi doppia rispetto ad una pompa a semplice effetto che utilizzi gli stessi organi meccanici (pistone, biella, manovella).

In fig. 3.43, infine, è mostrato lo schema di una pompa volumetrica alternativa sommersa, utilizzata per prelevare acqua da pozzi profondi. Per raggiungere elevate profondità è ovviamente necessario, anche in questo caso, rinviare il comando del pistone tramite uno stelo, che risulterà quindi di lunghezza piuttosto elevata. La pompa è ancora a semplice effetto, ma sfrutta il volume al di sopra del pistone, in modo da far lavorare lo stelo in trazione durante la mandata, fase in cui deve sopportare un carico molto elevato, ed evitare così il carico di punta. Le valvole di aspirazione sono ricavate nel pistone stesso, per semplicità e compattezza. Per tale configurazione non si richiede ovviamente una valvola di mandata ma piuttosto una valvola di non ritorno posta sul condotto di aspirazione, che resta chiusa durante la fase di riempimento del volume al di sopra del pistone

---

<sup>8</sup>Lo stelo scorre ovviamente a tenuta attraverso l'estremità destra del cilindro.

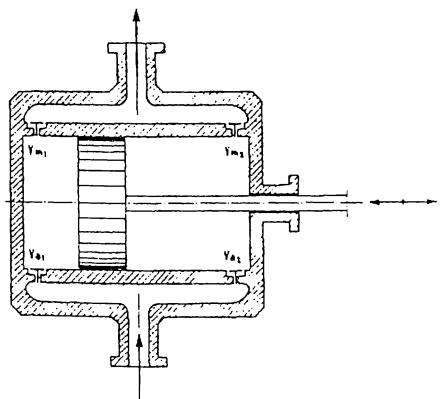


Figura 3.42: pompa volumetrica alternativa a doppio effetto.

(come nella posizione in fig. 3.43, in cui il pistone è in fase di discesa e le valvole sul

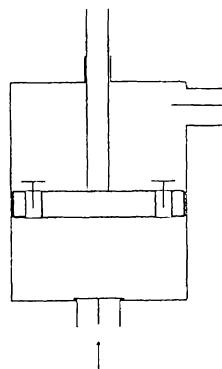


Figura 3.43: schema di pompa volumetrica alternativa sommersa per prelievo da pozzi.

pistone sono conseguentemente aperte) ed aperta nella fase di mandata, durante la quale lo stantuffo richiama altra acqua dal condotto di aspirazione nella camera inferiore.

Il funzionamento di una pompa volumetrica viene analizzato mediante il tracciamento del cosiddetto ciclo di lavoro, che riporta l'andamento della pressione che regna nella camera in cui viene inglobato il liquido<sup>9</sup> in funzione del volume da esso spazzato.

<sup>9</sup>La pressione è supposta uniforme in tutto il volume e quindi pari alla pressione esercitata sulla testa del pistone.

Nel prossimo paragrafo verrà illustrato il ciclo di lavoro ideale, in cui si trascurano le perdite di carico e l'inerzia delle colonne di liquido nei condotti, le laminazioni nelle valvole ed i tempi di apertura e di chiusura delle stesse, la lieve comprimibilità del liquido ed infine le fughe. Nel paragrafo 3.6.3, il ciclo di lavoro verrà quindi riesaminato analizzando le diverse cause che lo differenziano da quello ideale (in entrambi i casi si trascurerà l'energia cinetica del fluido all'interno del cilindro).

### 3.6.2 Ciclo ideale

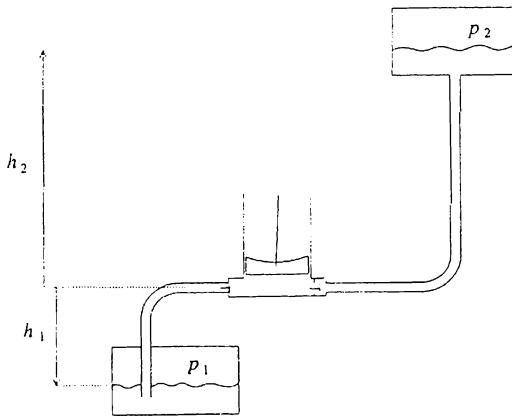


Figura 3.44: impianto di sollevamento con pompa volumetrica alternativa.

Si consideri una pompa a stantuffo che aspira un liquido da un serbatoio a pressione  $p_1$  e lo invia in un serbatoio a pressione  $p_2$ , v. fig. 3.44. In condizioni ideali, la pressione statica alla bocca di aspirazione è pari a  $p_1 + \gamma h_1$  ( $h_1 < 0$  in figura), mentre quella alla bocca di mandata è  $p_2 + \gamma h_2$  ( $h_2 > 0$ ).

Tracciato un sistema di assi cartesiani, riportiamo in ascisse i volumi generati istante per istante dagli spostamenti dello stantuffo, ed in ordinate la pressione che regna, corrispondentemente, nell'interno del cilindro. Costruiamo il ciclo a partire dal punto 1: il pistone, raggiunto il PMI, inverte il suo moto e comincia ad esercitare pressione sulla massa liquida aspirata, provocando la chiusura della valvola di aspirazione; la pressione aumenta sino al valore  $p_2 + \gamma h_2$ , determinando l'apertura della valvola di mandata. Per le ipotesi adottate, l'azionamento delle valvole e la compressione del liquido avvengono istantaneamente, per cui questa fase viene rappresentata nel diagramma  $(p, V)$  mediante la trasformazione 1-2 a volume costante. Il pistone continua quindi la sua corsa verso il PMS, spingendo il volume di liquido  $V_c$ , precedentemente aspirato, nel condotto di mandata. In assenza di laminazioni nelle valvole e di fenomeni dinamici, la fase di mandata 2-3 avviene ovviamente a pressione costante, pari a quella che regna all'imbocco del

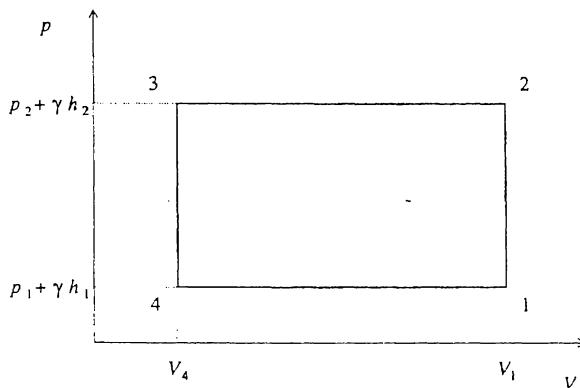


Figura 3.45: ciclo ideale di una pompa volumetrica alternativa.

condotto di mandata,  $p_2 + \gamma h_2$ . Dalla fig. 3.41, si nota che, per consentire l'azionamento delle valvole, lo stantuffo lascia, alla fine della fase di mandata, un volume residuo, ove il liquido rimane senza essere inviato all'utilizzazione. La presenza di questo volume minimo, necessaria per consentire l'azionamento delle valvole, è irrilevante dal punto di vista delle prestazioni della macchina, al contrario di ciò che avviene nei compressori alternativi, v. paragrafo 3.2.2, grazie all'incomprimibilità del fluido. Raggiunto il PMS, il pistone inverte la sua corsa, provocando una brusca riduzione di pressione e la contemporanea chiusura della valvola di mandata; la pressione si riduce quindi istantaneamente fino al valore  $p_1 + \gamma h_1$  (fase di espansione 3-4, a volume costante), provocando l'apertura della valvola di aspirazione. Nel successivo spostamento del pistone dal PMS al PMI, viene poi aspirato un altro volume  $V_c$  di liquido; anche questa fase 4-1 avviene a pressione costante, pari a  $p_1 + \gamma h_1$ .

Il **ciclo ideale** di una pompa alternativa è quindi un rettangolo, costituito da due isobare a massa variabile e due fasi a volume e a massa costanti. Il lavoro fornito al fluido è pari al lavoro speso dal pistone per vincere la forza di pressione esercitata sulla sua superficie:

$$L_c = - \int p dV = \text{area del ciclo } 12341, \quad (3.10)$$

da cui si ottiene:

$$(L_c)_{id} = [(p_2 + \gamma h_2) - (p_1 + \gamma h_1)] V_c = \gamma (H_2^0 - H_1^0) V_c. \quad (3.81)$$

### 3.6.3 Ciclo reale

Una serie di fenomeni concorre a rendere il funzionamento reale della macchina, e quindi il suo ciclo di lavoro, diversi da quelli ideali:

- inerzia delle valvole;

- trafileamenti attraverso le valvole e perdite di carico nei condotti;
- inerzia del liquido contenuto nei condotti di aspirazione e di mandata;
- comprimibilità del liquido;
- perdite per fughe.

Nella fig. 3.46 sono rappresentati gli andamenti del ciclo di lavoro che si ottengono sovrapponendo al ciclo ideale le variazioni indotte singolarmente da ciascuna delle cause citate, nonché il ciclo reale risultante (nel quale si è trascurata ancora la comprimibilità del liquido).

Le prime tre cause provocano delle variazioni di pressione nelle fasi di aspirazione e di mandata (rispetto ai valori ideali  $p_1 + \gamma h_1$  e  $p_2 + \gamma h_2$ ), che vengono individuate tramite i termini  $\Delta p_v$ ,  $\Delta p_i$  e  $\Delta p_l$  (intese come sovrapressioni o come depressioni, nelle fasi rispettivamente di mandata e di aspirazione).

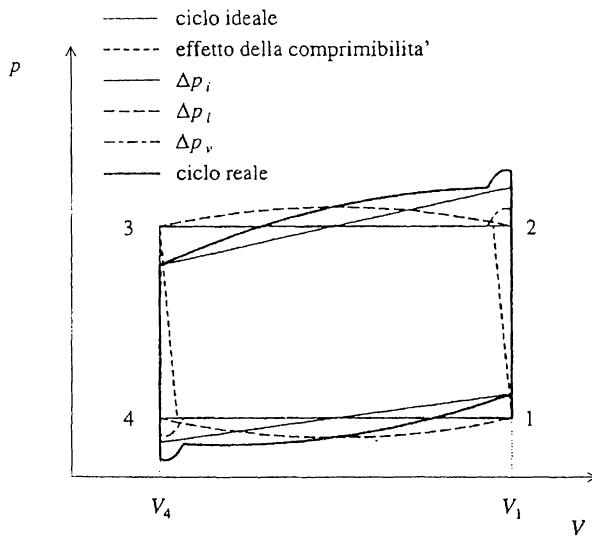


Figura 3.46: funzionamento reale: influenza sul ciclo di lavoro.

Il termine  $\Delta p_v$  dipende dal fatto che le valvole, per quanto leggere, hanno comunque una certa inerzia e richiedono quindi una differenza di pressione ed un certo tempo (comunque piccolo) per la loro completa apertura. A partire dal punto 2 del ciclo ideale, è quindi presente una piccola sovrappressione (limitata ad una piccola parte della corsa o con piccole successive oscillazioni di pressione), mentre in prossimità del punto 4 si realizza, analogamente, una piccola depressione, entrambe causa di un piccolo aumento dell'area del ciclo, v. fig. 3.46.

Come evidenziato nel paragrafo 3.2.3, il passaggio di un fluido attraverso una valvola provoca una caduta di pressione proporzionale al quadrato della velocità di efflusso attraverso la valvola stessa e quindi, per continuità, al quadrato della velocità istantanea del pistone,  $w_p$ . Sebbene esterne alla pompa, le perdite di carico nelle tubazioni (distribuite e concentrate) fanno variare l'andamento della pressione nelle fasi di aspirazione e di manda-ta e vanno quindi anch'esse conteggiate nel termine  $\Delta p_i$ , così come la caduta di pressione necessaria per generare l'altezza cinetica alla manda-ta. Tali perdite sono anch'esse proporzionali al quadrato della velocità del liquido nei relativi condotti, e quindi al quadrato di  $w_p$ . Complessivamente, si ha quindi  $\Delta p_i \propto w_p^2$ , e, di conseguenza (v. paragrafo 3.2.3), l'andamento all'incirca parabolico di  $\Delta p_i$  rappresentato in fig. 3.46.

Durante le fasi di aspirazione e di manda-ta, lo stantuffo spinge, insieme al liquido contenuto nel cilindro, anche tutta la massa contenuta nel corrispondente condotto, che pertanto accelera e decelera periodicamente. Le fasi di ricambio di massa non avvengono quindi a pressione costante ma con delle sovrappressioni o delle depressioni tali da accelerare o rallentare la corrispondente colonna di liquido. In particolare, il liquido accelera (rispettivamente decelera) nella prima (seconda) metà della corsa del pistone, per cui la corrispondente forza d'inerzia determina una sovrappressione (depressione) se la pompa è in fase di manda-ta, ed una depressione (sovrapressione) se è in fase di aspirazione.

Per evidenziare meglio tale fenomeno ed il corrispondente andamento della pressione nel cilindro diagrammata in fig. 3.46, si consideri il condotto di manda-ta, di lunghezza  $L$ , area  $A$  costante e dislivello  $h_2$  ( $h_2 > 0$ ). Applicando il I principio della dinamica alla colonna liquida in esso contenuta, ed indicando con  $p_{\text{manda-ta}}$  la pressione istantanea a monte del condotto e con  $u = u(t)$  la velocità istantanea (costante lungo il condotto per l'incomprimibilità del fluido), si ha:

$$A(p_{\text{manda-ta}} - p_2) = Ah_2\rho g + AL\rho \frac{du}{dt}, \quad (3.82)$$

ovvero

$$p_{\text{manda-ta}} = p_2 + \rho gh_2 + L\rho \frac{du}{dt}. \quad (3.83)$$

Essendo, in condizioni ideali,  $(p_{\text{manda-ta}})_{id} = p_2 + \rho gh_2$ , si ha anche:

$$p_{\text{manda-ta}} = (p_{\text{manda-ta}})_{id} + L\rho \frac{du}{dt},$$

da cui si ricava, infine:

$$\Delta p_i = p_{\text{manda-ta}} - (p_{\text{manda-ta}})_{id} = L\rho \frac{du}{dt}. \quad (3.84)$$

La sovrappressione  $\Delta p_i$  è quindi proporzionale alla lunghezza del condotto e, come ovvio, alla densità<sup>10</sup> e all'accelerazione istantanea del fluido. L'andamento di  $\Delta p_i$  è circa lineare<sup>11</sup>

<sup>10</sup> Per questo motivo, il fenomeno che stiamo descrivendo è poco rilevante nel caso di un compressore ed è stato pertanto trascurato nel paragrafo 3.2.3.

<sup>11</sup> Per un manovellismo di spinta avente raggio di manovella piccolo rispetto alla lunghezza di biella, la velocità dello stantuffo,  $w_p$ , varia, con buona approssimazione, secondo una legge sinusoidale,  $w_p = w\text{rsen}\theta = w\text{rsen}(\omega t)$  (in cui  $\theta$  è l'angolo descritto dalla manovella,  $r$  e  $\omega$  sono rispettivamente la lunghezza e la velocità angolare della manovella). Per continuità, il liquido contenuto nel condotto di manda-ta ha velocità  $u \propto w_p$  ed accelerazione  $du/dt \propto dw_p/dt = \omega^2 r\cos(\omega t) = -\omega^2 x_p$ , essendo  $x_p = -r\cos(\omega t)$  lo spostamento del pistone a partire dal centro corsa.

ed assume valore nullo a metà corsa, posizione per la quale l'accelerazione si annulla. In fase di aspirazione l'andamento della pressione è normalmente meno pendente, in quanto la lunghezza del corrispondente condotto va limitata per problemi di cavitazione (v. paragrafo 2.2.11). L'andamento di  $\Delta p_i$  non altera l'area del ciclo di lavoro; l'irregolarità del

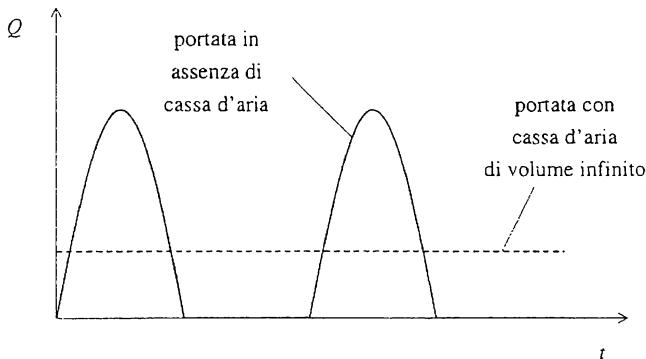


Figura 3.47: andamento della portata in funzione del tempo con e senza cassa d'aria.

moto comporta, però, i seguenti problemi:

- la portata mandata è fortemente variabile nel tempo, come si evince dalla fig. 3.47, in cui è riportato, con linea intera, l'andamento relativo ad una pompa a semplice effetto, per la quale la portata si annulla durante la fase di aspirazione; il ricorso a pompe a doppio effetto consente solo di eliminare il periodo a mandata nulla;
- la sovrappressione in mandata aumenta le sollecitazioni sugli organi meccanici della pompa e sulla stessa tubazione;
- a causa della depressione in aspirazione si può verificare il fenomeno della cavitazione.

Per regolarizzare il moto del liquido, le tubazioni di aspirazione e di mandata vengono collegate a due serbatoi contenenti aria, denominati polmoni o casse d'aria e posizionati quanto più possibile vicino alla pompa, v. fig. 3.48. La cassa d'aria inserita nel condotto di mandata (analogo discorso vale per l'aspirazione), di volume  $V_s$  molto maggiore rispetto alla cilindrata  $V_c$  della pompa, è in grado di assorbire parte del liquido spinto dallo stantuffo nella tubazione M-2; il volume a disposizione dell'aria diminuisce, per cui la pressione nella cassa aumenta: tuttavia, essendo  $V_s \gg V_c$ , la riduzione percentuale di volume è comunque molto piccola, per cui la pressione nel punto 2 aumenta in modo molto contenuto. La massa liquida compresa tra il punto 2 ed il serbatoio di mandata subisce quindi un'accelerazione molto piccola. La massa liquida contenuta nel tratto M-2, invece, risente del movimento del pistone e conserva quindi lo stesso andamento rappresentato con linea intera in fig. 3.47. Tuttavia, essendo il tratto M-2 molto corto, l'inerzia della massa liquida in esso contenuta e, conseguentemente, la sovrappressione  $\Delta p_i$ ,

risultano molto ridotte (la pressione in M dipende essenzialmente dalla pressione in 2 e dall'inerzia della massa M-2, in quanto la pressione nella cassa d'aria è poco variabile). Successivamente, quando la pompa è in fase di aspirazione, la portata nel tratto M-2 si annulla, mentre la massa che si muove nel condotto di mandata richiama altro liquido precedentemente immagazzinato nella cassa d'aria<sup>12</sup>. Analogamente a quanto succede nella fase di riempimento del polmone, la riduzione di pressione nella cassa d'aria ed il rallentamento della colonna liquida nel condotto di mandata sono molto limitati.

Se il polmone avesse volume infinito, il suo riempimento ed il suo svuotamento non comporterebbero alcuna variazione di pressione nel punto 2 e quindi nessuna variazione della velocità del fluido nel condotto di mandata. La portata mandata risulterebbe, in tal caso, costante (linea tratteggiata in fig. 3.47) e pari all'ordinata media della portata istantanea spinta dal pistone nel tratto M-2. Se quest'ultimo avesse lunghezza nulla, inoltre, si annullerebbe la sovrapressione  $\Delta p_i$  nel cilindro durante la fase di mandata. Nel caso reale (capacità di volume finito e tratto M-2 di lunghezza non nulla), l'andamento della portata mandata si discosta dalla linea tratteggiata in fig. 3.47 in modo tanto maggiore quanto minore è il rapporto  $V_s/V_c$ . Analogamente, la sovrapressione  $\Delta p_i$  non si annulla, ma viene comunque tanto più attenuata quanto minore è la lunghezza del tratto M-2.

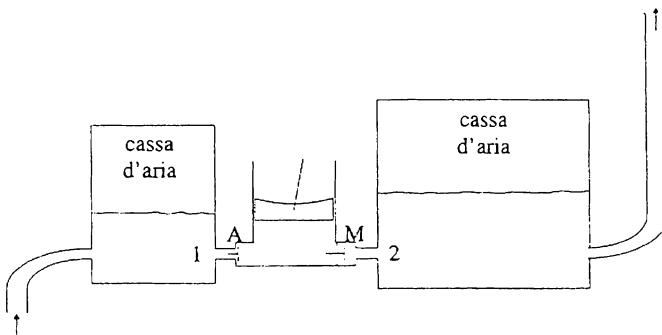


Figura 3.48: impianto di sollevamento con pompa volumetrica alternativa e casse d'aria in aspirazione ed in mandata.

Nel tracciamento del ciclo ideale si era supposto il fluido perfettamente incompressibile; di conseguenza, le fasi 1-2 e 3-4, rispettivamente di compressione e di espansione, risultavano a volume costante. Anche un liquido, tuttavia, soggetto ad una variazione di pressione, subisce una riduzione di volume, quantificabile mediante il cosiddetto modulo di comprimibilità  $\beta$ , definito come la riduzione percentuale di volume che si verifica in un liquido allorquando esso subisce, a temperatura costante, un incremento di pressione

<sup>12</sup>Più correttamente, lo svuotamento della cassa d'aria ha inizio quando il pistone, in prossimità del PMS, spinge nel tratto M-2 una portata istantanea minore di quella che fluisce nel condotto di mandata. Analogamente, il polmone comincia a riempirsi poco dopo l'inizio della fase di mandata.

unitario:

$$\beta = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (3.85)$$

Le fasi di compressione e di espansione si discostano quindi lievemente dalle linee a volume costante tracciate nel ciclo ideale (v. fig. 3.46, in cui tale scostamento è stato esagerato per chiarezza), comportando una piccola riduzione dell'area del ciclo e quindi del lavoro speso. Analizziamo l'entità di questo scostamento: per l'acqua pura si ha  $1/\beta = 2068 \text{ MPa}$ , per cui, se si considera una pompa caratterizzata da un salto di pressione  $\Delta p = 20.68 \text{ bar}$ , si avrà, a seguito della compressione, una variazione percentuale di volume  $\Delta V/V = 1/1000$ . Il fenomeno è quindi trascurabile, a meno che si abbia a che fare con una pompa che elabori salti di pressione ben più elevati oppure con un liquido in cui sia discolta una significativa quantità di gas (tipicamente aria), cui corrisponde un aumento di  $\beta$ .

Le perdite per fughe vengono ridotte a valori bassissimi grazie alla presenza delle fasce elastiche di tenuta, ma possono risultare non trascurabili nel caso in cui il salto di pressione elaborato sia piuttosto elevato. Le fughe non influenzano comunque in modo significativo l'andamento del ciclo e se ne terrà quindi conto solo nel calcolo della portata.

La fig. 3.46 mostra infine il ciclo reale, ottenuto sovrapponendo i primi tre effetti sopra citati (si ricorda che  $\Delta p_i$  viene in realtà fortemente ridotto una volta inserite le casse d'aria), ovvero trascurando ancora la comprimibilità del liquido. Il lavoro al ciclo reale,  $L_c$ , risulta, come già evidenziato, maggiore rispetto a quello ideale, e di ciò si tiene conto tramite il rendimento idraulico<sup>13</sup>,  $\eta_y$ :

$$\eta_y = \frac{(L_c)_{id}}{L_c} = \frac{\text{area del ciclo ideale}}{\text{area del ciclo reale}}. \quad (3.86)$$

La potenza interna fornita dalla pompa al fluido è pari a:

$$P_i = L_c n_c = \frac{(L_c)_{id} n_c}{\eta_y}, \quad (3.87)$$

in cui  $n_c = in$  è il numero di cicli all'unità di tempo ( $i$  è il numero di cicli compiuti ad ogni giro della manovella), che coincide con il numero di giri all'unità di tempo in una macchina monocilindrica a semplice effetto. La potenza interna può anche essere espressa come:

$$P_i = GL'_i, \quad (3.88)$$

ove  $G$  è la portata mandata al serbatoio di valle, che risulta minore della portata elaborata,  $G + \Delta G = \rho V_c n_c$ , per la presenza della portata di fuga  $\Delta G$  che rifiuisce attraverso la macchina; indicando con  $V = iV_c$  la cilindrata della pompa, si ha:

$$G = \eta_y \rho V_c n_c = \eta_y \rho V n. \quad (3.89)$$

Dalle (3.87), (3.88) e (3.89), è quindi possibile valutare il lavoro ad unità di massa mandata all'utilizzatore,  $L'_i$ :

$$L'_i = \frac{P_i}{G} = \frac{L_c n_c}{\eta_y \rho V_c n_c} = \frac{(L_c)_{id}}{\eta_y \eta_v \rho V_c}, \quad (3.90)$$

---

<sup>13</sup>In questo contesto sarebbe improprio parlare di rendimento idraulico, perché l'aumento del lavoro richiesto non è dovuto ad un lavoro delle resistenze passive all'interno della macchina, che si era infatti supposto nullo; nella pratica è comunque usuale continuare ad utilizzare il termine di rendimento idraulico.

ed infine, sostituendo la (3.81):

$$L'_t = \frac{\left(\frac{p_2}{\rho} + gh_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + gh_1\right)}{\eta_y \eta_v} = \frac{g(H_2^0 - H_1^0)}{\eta_y \eta_v} = \frac{gH_t}{\eta_y \eta_v}. \quad (3.91)$$

La potenza assorbita dalla pompa, infine, è pari a:

$$P_a = \frac{P_t}{\eta_m} = \frac{GL'_t}{\eta_m} = \frac{gGH_t}{\eta_y \eta_v \eta_m} = \frac{\gamma QH_t}{\eta_y \eta_v \eta_m} = \frac{\gamma QH_t}{\eta_g}, \quad (3.92)$$

in cui si è indicato con  $\eta_g = \eta_y \eta_v \eta_m$  il rendimento globale dell'impianto piuttosto che quello della pompa, in quanto nel termine  $\eta_y$  vengono incluse anche le perdite di carico nelle tubazioni di aspirazione e di mandata. Si noti che, ad eccezione del modo con cui vengono conteggiate le perdite nei condotti, la (3.91) è identica alla (2.15), precedentemente ricavata per una turbopompa funzionante in condizioni di flusso permanente.

### 3.6.4 Regolazione della portata

La regolazione della portata può avvenire o variando la velocità di rotazione  $n$  dell'albero motore<sup>14</sup>, oppure facendo rifiuire una parte della portata manda all'aspirazione, tramite un opportuno condotto munito di valvole di strozzamento. La regolazione on/off è sconsigliabile, in quanto le brusche accelerazioni e decelerazioni della colonna liquida in mandata (analogamente in aspirazione) determinerebbero forti sovrappressioni e depressioni, rispettivamente, con conseguenti fenomeni di *colpo d'ariete* e di cavitazione.

## 3.7 POMPE VOLUMETRICHE ROTATIVE E ROTOALTERNATIVE

Nelle pompe volumetriche rotative il liquido viene aspirato in un volume delimitato dalla cassa, dal rotore e da altri eventuali organi, e quindi trasferito dall'ambiente di aspirazione a quello di mandata; gli organi su cui vengono esercitate le forze di pressione (quando il fluido viene aggregato alla mandata) non sono dotati di moto alterno nella direzione di tali forze. Nelle pompe rotoalternative, invece, il rotore, mediante contatto diretto, induce il moto alternato di pistoni radiali o assiali, che quindi generano un volume variabile all'interno dei cilindri che li contengono, ricavati nel rotore stesso. In entrambi i casi, le masse in moto alterno vengono quindi significativamente ridotte o addirittura annullate. Inoltre, analogamente ai compressori rotativi, la distribuzione può essere realizzata mediante luci scoperte dal rotore o da organi collegati ad esso, con significativa riduzione delle perdite per laminazione all'aspirazione ed alla mandata. Grazie a queste favorevoli caratteristiche, le pompe rotative e roto-alternative possono quindi lavorare a regimi di rotazione più elevati rispetto alle pompe alternative. Un altro aspetto molto

<sup>14</sup> Questo tipo di regolazione può essere realizzato in continuo se la pompa è comandata da un motore alternativo a combustione interna o da un motore asincrono trifase con variatore di frequenza. Il primo può risultare ovviamente troppo rumoroso per alcune applicazioni, mentre il secondo richiede spese di investimento abbastanza elevate.

importante che caratterizza le pompe rotative e roto-alternative è la possibilità di variarne la cilindrata con continuità.

Nel seguito, verranno analizzati sommariamente i principali tipi di pompa rotativa e rotoalternativa.

### 3.7.1 Schemi costruttivi e principi di funzionamento

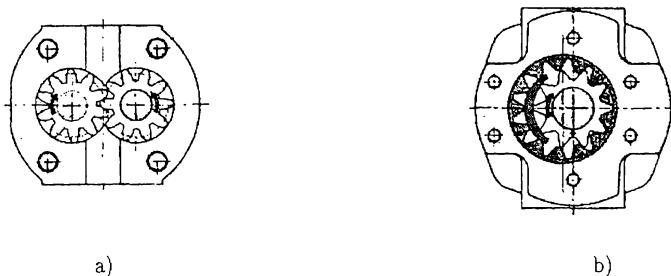


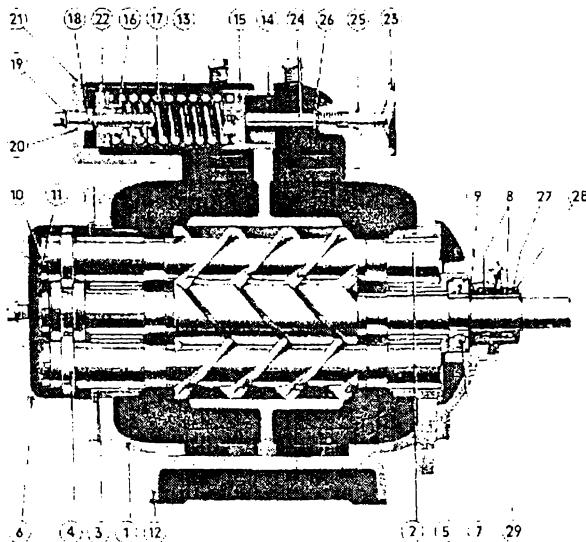
Figura 3.49: pompa (rotativa) ad ingranaggi a) esterni e b) interni.

In fig. 3.49 sono rappresentate due pompe ad ingranaggi, rispettivamente esterni ed interni: il liquido viene inglobato, all'aspirazione (in basso nelle due figure), nei volumi compresi tra due denti successivi e la parte fissa (la cassa nel primo caso ed il setto separatore tra le due ruote nel secondo caso) e trasferito verso l'ambiente di mandata, con conseguente aumento di pressione. Pompe di questo tipo vengono utilizzate, ad esempio, per la lubrificazione dei motori alternativi a combustione interna.

In fig. 3.50 è rappresentata una pompa a vite: un rotore centrale presenta una scanalatura a vite tramite la quale ingrana con gli altri due rotori, delimitando così il volume che viene trasferito alla mandata. Caratteristica di questo tipo di pompa, largamente impiegata nella pratica industriale e non (pompe per lubrificazione, per tenuta, per comandi idraulici, ecc.), è la notevole silenziosità e regolarità di funzionamento.

In fig. 3.51 sono rappresentate due pompe a palette (analoghe del compressore a palette, ma con rapporto di compressione volumetrico ovviamente unitario): il rotore è provvisto di palette che aderiscono alla cassa grazie a delle molle inserite nei corrispondenti vani e/o alla forza centrifuga. Le palette e la cassa delimitano il volume da aspirare e trasferire alla mandata. Chiaramente, nel caso di pompa a doppia camera (fig. 3.51b), il numero di cicli al giro è pari al doppio del numero di palette; il rotore, inoltre, risulta dinamicamente equilibrato. Le pompe a palette vengono utilizzate, ad esempio, in alcuni apparati di iniezione dei motori Diesel.

In fig. 3.52 sono rappresentati due esempi di pompa con funzionamento rotoalternativo: nel primo caso (pompa a pistoni radiali), il rotore, in cui sono ricavati i cilindri, ruota in modo eccentrico, producendo così il moto alternativo radiale dei pistoni, che sono premuti contro la cassa fissa. Nel secondo caso (pompa a pistoni assiali), l'albero, cui sono solidali i cilindri, trascina nella sua rotazione i pistoni, che sono premuti ad un'estremità contro



1 corpo pompa: 2 rotori a vite 3 cuscinetti a strisciamento 4 anelli di centratura 5 coperchio anteriore 6 coperchio posteriore 7 cuscinetto radiale a sfere 8 anello di tenuta strisciante 9 anello Seeger 10 dado scanalato 11 rondella di sicurezza 12 basamento

13 corpo valvola: 14 sede 15 tampone 16 piatto portamolla 17 molla 18 vite di taratura 19 anello Seeger 20 anello di tenuta 21 coperchio 22 spina di fissaggio 23 volantino di regolazione 24 albero di regolazione 25 anello di tenuta 26 collare di riscontro

Figura 3.50: pompa (rotativa) a vite a tre rotori.

una piastra inclinata, così da realizzare ancora un moto alternativo assiale. La corsa di ciascun pistone e quindi la cilindrata della pompa dipendono dall'eccentricità del rotore, nel primo caso, e dall'inclinazione (angolo  $\alpha$ ) della piastra rispetto al blocco cilindri, nel secondo.

### 3.7.2 Caratteristiche di funzionamento delle pompe rotative e rotoalternative

Nelle pompe rotative e rotoalternative, la portata presenta ancora un andamento variabile nel tempo, ma con minori oscillazioni rispetto ad una pompa alternativa grazie al frazionamento della cilindrata. La portata volumetrica mandata è pari al prodotto del volume della singola camera per il numero di cicli all'unità di tempo, ridotta, per via delle

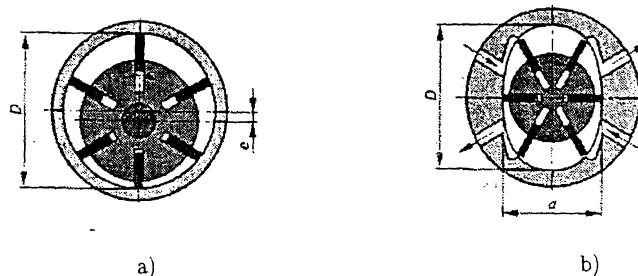


Figura 3.51: pompa (rotativa) a palette a) semplice e b) a doppia camera.

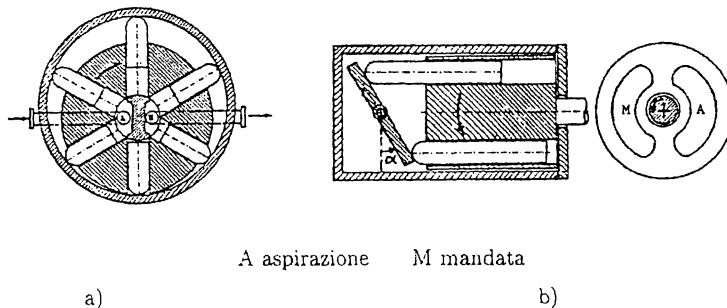


Figura 3.52: pompa (rotoalternativa) a pistoni a) radiali e b) assiali.

fughe, tramite il rendimento volumetrico  $\eta_v$ :

$$Q = \eta_v V n_c = \eta_v V n. \quad (3.93)$$

Il prodotto del volume della singola camera,  $V_c$ , per il numero di cicli al giro,  $i = n_c/n$ , viene denominato *cilindrata (totale)*,  $V$ . Va evidenziato inoltre che in particolari applicazioni che saranno analizzate nel paragrafo 4.3, le pompe rotative (o rotoalternative) elaborano olio ad alta pressione (fino a  $250 \div 300$  bar): la presenza di una portata di fuga che rifluisce attraverso la macchina è quindi particolarmente utile per la lubrificazione e la refrigerazione della macchina, per cui  $\eta_v$  assume valori volutamente piuttosto bassi ( $0.90 \div 0.92$ ).

Il ciclo di lavoro ideale è identico a quello della pompa a stantuffi (il volume minimo è in alcuni casi trascurabile, ma ciò non influenza il lavoro al ciclo). Poiché l'aspirazione e la mandata sono poste da parti opposte rispetto al rotore, è possibile realizzare la distribuzione mediante luci: la perdita dovuta all'inerzia delle valvole non è quindi più presente e si riducono fortemente, eccetto per elevati regimi di rotazione, le perdite per laminazione all'aspirazione e alla mandata. Il ciclo reale presenta quindi solo piccole differenze rispetto al ciclo ideale e si possono comunque utilizzare, per il calcolo del lavoro e della potenza, le formule già ricavate per le pompe a stantuffi; indicando con  $p_1$  e  $p_2$

le pressioni rispettivamente in ingresso ed in uscita dalla macchina (differenza di quota trascurabile tra le due luci), si ha:

$$P_a = \frac{V c_n (p_2 - p_1)}{\eta_m \eta_y} = \frac{V n (p_2 - p_1)}{\eta_m \eta_y} = \frac{Q (p_2 - p_1)}{\eta_m \eta_y \eta_P} = \frac{Q (p_2 - p_1)}{\eta_P}. \quad (3.94)$$

Poiché, come detto, queste macchine trovano particolare applicazione nelle trasmissioni idrostatiche (v. paragrafo 4.3), è importante ricavare anche l'espressione della coppia richiesta,  $C$ :

$$C = \frac{P_a}{\omega} = \frac{P_a}{2\pi n} = \frac{V (p_2 - p_1)}{2\pi \eta_m \eta_y}. \quad (3.95)$$

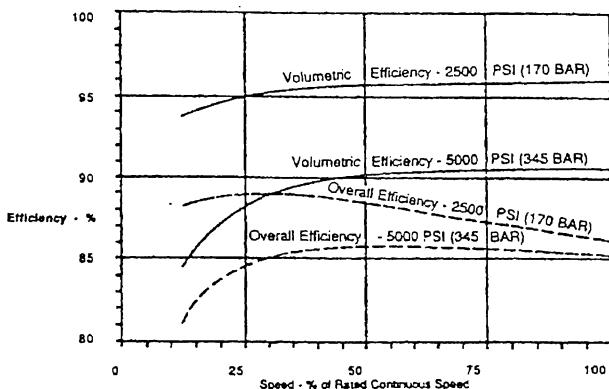


Figura 3.53: andamento dei rendimenti volumetrico e totale per una pompa a pistoni assiali (v. fig. 3.52b).

In fig. 3.53 sono infine riportati gli andamenti di  $\eta_v$  (*volumetric efficiency*) e  $\eta_P$  (*overall efficiency*) per la pompa a pistoni assiali di fig. 3.52b, in funzione del regime di rotazione (espresso in percentuale della velocità massima) per due valori di prevalenza. Dal diagramma si notano subito le elevate pressioni di mandata che possono essere raggiunte utilizzando questo tipo di pompa. Come ovvio, il rendimento volumetrico decresce all'aumentare della prevalenza tra valle e monte della pompa ed assume valori tanto minori quanto minore è la velocità di rotazione, essendo la portata di fuga poco dipendente da  $n$  e la portata aspirata proporzionale ad  $n$ . L'andamento decrescente di  $\eta_P$  rispetto a  $\Delta p$  è conseguenza della riduzione di  $\eta_v$ , compensata dalla minor importanza che assumono gli attriti meccanici e le laminazioni attraverso le luci (con corrispondenti aumenti di  $\eta_m$  ed  $\eta_y$ ) rispetto al lavoro assorbito. A fissato  $\Delta p$ , invece,  $\eta_P$  aumenta inizialmente con  $n$  per la forte influenza di  $\eta_v$ , mentre decresce per alti valori di  $n$  (tanto più alti quanto maggiore è il  $\Delta p$ ) per l'accresciuta importanza delle perdite meccaniche e delle laminazioni (riduzione di  $\eta_m$  ed  $\eta_y$ ). Da curve analoghe a quelle rappresentate in fig. 3.53 si può poi ricavare il diagramma collinare completo, che riporta le linee isorenimento in un

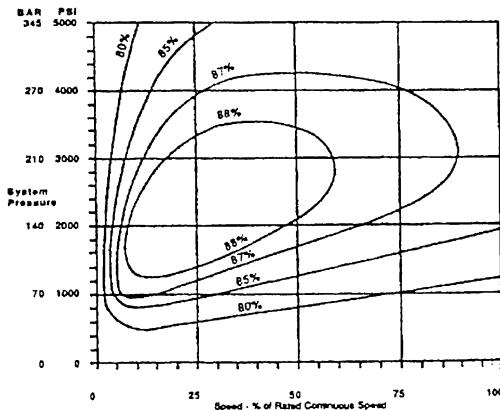


Figura 3.54: diagramma collinare per una pompa a pistoni assiali (v. fig. 3.52b).

diagramma ( $\Delta p, n$ ), v. fig. 3.54. Si riscontra ancora che, a bassi regimi di rotazione, la riduzione di  $\eta_v$  prevale sugli altri rendimenti particolari, con conseguenti bassi valori di  $\eta_P$ . Per regimi di rotazione maggiori si hanno elevati valori di rendimento totale per valori medi di pressione (intorno ai 200 bar), valori che tendono poi a decrescere sia per maggiori (v. sopra) che per minori valori di  $\Delta p$ : tenendo presente che il prodotto  $\eta_m \eta_y$  decresce, come detto, al ridursi di  $\Delta p$ , risulta ovvio che tale diminuzione prevale sull'aumento di  $\eta_v$  per bassi valori di  $\Delta p$ , per i quali le fughe sono poco significative.

### 3.7.3 Regolazione della portata

La portata mandata all'utilizzatore può essere variata, in tutte le pompe rotative e rotoalternative, agendo sulla velocità di rotazione. In talune applicazioni — vedi, ancora, il caso delle trasmissioni idrostatiche, paragrafo 4.3 — si rende necessario regolare la portata mediante variazione della cilindrata. Questo tipo di regolazione è possibile, ad esempio, nella pompa a palette, mediante variazione dell'eccentricità del rotore, e (v. fig. 3.51): riducendo  $e$ , diminuisce il volume di liquido aspirato, ed inoltre parte della portata trasferita nell'ambiente di mandata rifiuisce nuovamente verso l'aspirazione, restituendo, idealmente, tutto il lavoro fornito per la sua compressione. Stesso tipo di regolazione può essere adottato nel caso della pompa a pistoni radiali, v. fig. 3.52a: la variazione dell'eccentricità del rotore ha però, in questo caso, l'effetto di ridurre la corsa del pistone e quindi il volume aspirato. In entrambi i casi, la portata mandata all'utilizzatore si annulla per eccentricità nulla. Nel caso della pompa a pistoni assiali, invece, non si interviene sul rotore: la cilindrata viene regolata, in modo operativamente più semplice, variando l'inclinazione (angolo  $\alpha$ ) della piastra rispetto al blocco cilindri, v. fig. 3.52b; in particolare, per  $\alpha = 0$ , la portata si annulla.

### 3.8 Esercizi

1. Un compressore alternativo monostadio ad aria presenta le seguenti caratteristiche:  $n = 1400 \text{ RPM}$ ,  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 288 \text{ K}$ ,  $p_2 = 3.5 \text{ bar}$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$ ,  $m = 1.33$ ,  $m' = 1.31$ ,  $\eta_m = 0.85$ , cilindrata  $V = 800 \text{ cm}^3$ , grado di spazio morto  $\mu = 0.1$ . Calcolare la portata smaltita,  $G$ , il lavoro ad unità di massa,  $L_i$ , e la potenza assorbita dal compressore,  $P_a$ .

$$G=0.01674 \text{ kg/s} \quad L_i=140.4 \text{ kJ/kg} \quad P_a=2.764 \text{ kW}$$

2. Un compressore alternativo monostadio che aspira aria dall'ambiente ( $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ) presenta le seguenti caratteristiche:  $\beta = 4$ ,  $n = 1430 \text{ RPM}$ ,  $V = 1200 \text{ cm}^3$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $m = m' = 1.35$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$ ,  $\eta_m = 0.86$ . Calcolare la portata smaltita,  $G$ , il lavoro ad unità di massa,  $L_i$ , e la potenza assorbita dal compressore,  $P_a$ .

$$G=0.02500 \text{ kg/s} \quad L_i=157.3 \text{ kJ/kg} \quad P_a=4.573 \text{ kW}$$

Si supponga poi di voler dimezzare la portata fornita dal compressore effettuando uno dei seguenti tipi di regolazione (valutare la convenienza di ciascun tipo di regolazione confrontando i nuovi valori  $\bar{L}_i$  e  $\bar{P}_a$  rispetto a quelli calcolati in condizioni di progetto):

- a) variazione del numero di giri: determinare la nuova velocità di rotazione,  $\bar{n}$  (per il calcolo della potenza si supponga  $\eta_m$  invariato);

$$\bar{n}=645.4 \text{ RPM} \quad \bar{L}_i=141.8 \text{ kJ/kg} \quad \bar{P}_a=2.061 \text{ kW}$$

- b) laminazione all'aspirazione: determinare la pressione  $\bar{p}_1$  a valle della valvola di laminazione;

$$\bar{p}_1=0.6084 \text{ bar} \quad \bar{L}_i=222.8 \text{ kJ/kg} \quad \bar{P}_a=3.238 \text{ kW}$$

- c) anticipo della chiusura della valvola di aspirazione: determinare in quale posizione della corsa di aspirazione deve essere chiusa la valvola;

$$\text{distanza dal PMS}=0.6072 \text{ cm} \quad \bar{L}_i=157.3 \text{ kJ/kg} \quad \bar{P}_a=2.286 \text{ kW}$$

- d) addizione di una capacità supplementare allo spazio morto; calcolare il volume di tale capacità.

$$V_{add}=219.8 \text{ cm}^3 \quad \bar{L}_i=157.3 \text{ kJ/kg} \quad \bar{P}_a=2.286 \text{ kW}$$

3. Un compressore volumetrico bistadio ha le seguenti caratteristiche, comuni ai due stadi:  $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$ ,  $\mu = 0.11$ ,  $m = m' = 1.33$ ,  $n = 750 \text{ RPM}$ ,  $\eta_m = 0.9$ . Il compressore comprime aria ambiente ( $p_a = 1.013 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ) fornendole un rapporto di compressione totale  $\beta = 15.5$ . All'uscita del primo stadio un interriferatore di grande capacità e privo di perdite pneumatiche raffredda l'aria compressa fino alla temperatura  $T_{int} = 295 \text{ K}$ . Sapendo che  $V_1 = 1900 \text{ cm}^3$  e che  $\beta_1 = \sqrt{\beta} - 0.5$ , calcolare la portata mandata,  $G$ , la potenza assorbita,  $P_a$ , e la cilindrata del secondo stadio,  $V_2$ .

$$G=0.02131 \text{ kg/s} \quad P_a=7.402 \text{ kW} \quad V_2=621.8 \text{ cm}^3$$

- \* 4. Un compressore alternativo monostadio a valvole comandate, che aspira aria dall'ambiente ( $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 288 \text{ K}$ ), è progettato per un rapporto di compressione  $\beta = 3.7$ . Sapendo che  $V = 1600 \text{ cm}^3$ ,  $n = 1425 \text{ RPM}$ ,  $\mu = 0.11$ ,  $m = m' = 1.33$ , e trascurando le laminazioni nelle valvole, calcolare la portata,  $G$ , ed il lavoro al ciclo,  $L_c$ , in condizioni di progetto. Successivamente, la pressione nel serbatoio di mandata si riduce a  $p'_2 = 2 \text{ bar}$ ; calcolare il nuovo lavoro al ciclo,  $L'_c$ , e la pressione minima del ciclo,  $p_{min}$ , nel caso in cui il compressore continui a funzionare senza alcuna regolazione sull'apertura e sulla chiusura delle valvole.

$$G=0.03749 \text{ kg/s} \quad L_c=201.8 \text{ J} \quad L'_c=143.9 \text{ J} \quad p_{min}=0.5405 \text{ bar}$$

5. Un compressore Roots di cilindrata  $V = 2.5 \text{ l}$ , che ruota ad  $n = 2750 \text{ RPM}$ , comprime aria ambiente ( $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ) fino ad una pressione  $p_2 = 1.8 \text{ bar}$ . Conoscendo  $\eta_v = \eta_m = 0.94$ , calcolare la portata smaltita,  $G$ , e la potenza assorbita,  $P_a$ .

$$G=0.1303 \text{ kg/s} \quad P_a=9.752 \text{ kW}$$

6. Si vuole progettare un impianto per la produzione di aria compressa che aspiri una portata  $G = 0.35 \text{ kg/s}$  dall'ambiente ( $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ) e la comprima fino ad una pressione  $p_2 = 3.8 \text{ bar}$ . L'impianto deve essere costituito da due compressori Roots in serie ( $n = 2850 \text{ RPM}$ , fughe e laminazioni trascurabili), intervallati da un refrigeratore che riporta la temperatura di aspirazione del secondo compressore ad un valore  $T_1 = 310 \text{ K}$ . Calcolare le cilindrate dei due compressori,  $V_1$  e  $V_2$ , per cui si minimizza la potenza assorbita (ricavare la formula per il calcolo della pressione intermedia che minimizza la potenza assorbita).

$$\beta_1 = \sqrt{\beta_{tot} T_1 / T_a} \quad V_1=6093 \text{ cm}^3 \quad V_2=3243 \text{ cm}^3$$

7. Un compressore a palette, di cilindrata totale  $V = 15 \text{ l}$  e con rapporto di compressione volumetrico  $\rho = 1.8$ , ruota a  $n = 2850 \text{ RPM}$  e comprime aria ambiente ( $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ) fino ad una pressione  $p_2 = 3 \text{ bar}$ . Supponendo  $\eta_v = \eta_m = 0.96$  e trascurando gli scambi terinici con le pareti, calcolare la portata smaltita,  $G$ , e la potenza assorbita,  $P_a$ .

$$G=0.8272 \text{ kg/s} \quad P_a=98.66 \text{ kW}$$

8. Per realizzare un impianto per la fornitura di aria compressa ( $G = 0.4 \text{ kg/s}$ ,  $p_{mand} = 10 \text{ bar}$ ), si decide di utilizzare due compressori a palette simili ( $V_1 = 3V_2$ ,  $\rho = 2$ ,  $m = k$ ,  $\eta_v = 1$ ,  $n = 2900 \text{ RPM}$ , aspirazione dall'ambiente:  $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ), intervallati da un refrigeratore. Calcolare la potenza assorbita,  $P_a$  ( $\eta_m = 0.97$ ), e la portata di acqua refrigerante,  $Q_{H_2O}$  ( $\Delta t_{H_2O} = 12^\circ\text{C}$ ), sapendo che la pressione intermedia è di  $3.25 \text{ bar}$ .

$$P_a=97.94 \text{ kW} \quad Q_{H_2O}=0.7454 \text{ l/s}$$

- \* 9. Si vuole progettare un impianto per la fornitura di aria compressa, che risponda ai seguenti requisiti:

- aspirazione dall'ambiente,  $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ;
- compressore a palette ( $\eta_v \approx 1$ , compressione graduale di tipo politropico con esponente  $m = 1.33$  e rapporto volumetrico  $\rho = 2.5$ ,  $n = 2850 \text{ RPM}$ );
- serbatoio di mandata adiabatico di volume  $V_s$ ;
- pressione nel serbatoio di mandata compresa entro i valori limite  $p_{2,\min} = 4 \text{ bar}$  e  $p_{2,\max} = 6 \text{ bar}$ ;
- portata costante in ciascuna giornata, ma variabile giorno per giorno entro i limiti  $G_{\min} = 0.2 \text{ kg/s}$  e  $G_{\max} = 0.7 \text{ kg/s}$ ;
- regolazione tutto/niente.

Calcolare la cilindrata totale del compressore,  $V$ , e la potenza nominale del motore di comando ( $\eta_m = 0.97$ , si assuma che il motore lavori al massimo al 90% della sua potenza nominale),  $P_n$ .

Calcolare, inoltre, il volume  $V_s$  del serbatoio di mandata, che consente un numero di azionamenti/ora  $\leq 15$ . A tal fine, si supponga che la temperatura nel serbatoio di mandata sia costante e pari a quella che si avrebbe in condizioni di flusso stazionario con  $p_2 = (p_{2,\min} + p_{2,\max})/2$ , e si consideri che la condizione più critica si ha per  $G_{crit} = G_{\max}/2$  (si dimostri che, in generale, la condizione più critica è  $G_{crit} = \max(G_{\min}, G_{\max}/2)$ ).

$$V=12.19 \text{ l} \quad P_n=163.8 \text{ kW} \quad V_s=26.70 \text{ m}^3$$

10. Si vuole progettare un impianto per la fornitura di aria compressa (aspirazione dall'ambiente:  $p_a = 1 \text{ bar}$ ,  $T_a = 288 \text{ K}$ ), costituito da due compressori a palette simili, disposti in serie ( $m = k$ ,  $\rho = 1.7$ ,  $\eta_v = 1$ ,  $n = 2850 \text{ RPM}$  e  $\eta_m = 0.97$ , per entrambi i compressori). L'utenza richiede una portata  $G = 5 \text{ kg/s}$  ripartita come segue:  $G_1 = 35\% G$  a  $p_1 = 2.5 \text{ bar}$  e  $G_2 = 65\% G$  a  $p_2 = 7 \text{ bar}$ . Calcolare le cilindrate dei due compressori,  $V_1$  e  $V_2$ , e la potenza assorbita dall'impianto,  $P_a$ .

$$V_1=87.04 \text{ l} \quad V_2=29.49 \text{ l} \quad P_a=899.6 \text{ kW}$$

11. Una pompa a stantuffo a semplice effetto, installata a 5 m sotto il pelo libero di un lago, manda una portata di acqua  $Q = 6 \text{ l/s}$  in un serbatoio in pressione (pressione relativa  $p_2^{rel} = 5 \text{ bar}$ ) (il cui pelo libero è) a 30 m sopra il livello del lago. Sono noti:  $n = 6 \text{ giri/s}$ , velocità media dello stantuffo  $u = 2 \text{ m/s}$ ,  $\eta_v = 0.95$ ,  $\eta_y = 0.93$ ,  $\eta_m = 0.88$ . Determinare corsa e diametro dello stantuffo, nonché la potenza assorbita dalla pompa.

$$c=166.7 \text{ mm} \quad d=89.7 \text{ mm} \quad P_a=6.129 \text{ kW}$$

12. Dimensionare una pompa a stantuffo a doppio effetto in grado di fornire una prevalenza di 90 m ad una portata d'acqua  $Q = 10 \text{ l/s}$ . Si assumano i seguenti valori: velocità di rotazione  $n = 7 \text{ giri/s}$ , velocità media dello stantuffo  $u = 2.5 \text{ m/s}$ ,  $\eta_v = 0.93$ ,  $\eta_m = 0.88$ ,  $\eta_y = 0.91$ . Calcolare inoltre la potenza assorbita dalla pompa (trascrivere il diametro dello stelo rispetto a quello dello stantuffo).

$$c=178.6 \text{ mm} \quad d=74.00 \text{ mm} \quad P_a=11.85 \text{ kW}$$

13. Una pompa rotoalternativa a pistoni radiali (v. fig. 3.52a) è costituita da un rotore eccentrico, di diametro  $d = 280 \text{ mm}$ , e da una cassa, di diametro interno  $D = 320 \text{ mm}$ . Nel rotore sono ricavate sei cavità, ciascuna con sezione trasversale di area  $A = 125 \text{ mm}^2$ . Sapendo che la velocità di rotazione è  $n = 2850 \text{ RPM}$  e supponendo  $\eta_v = 0.96$ , calcolare la portata volumetrica mandata,  $Q$ . Calcolare, inoltre, l'eccentricità del rotore,  $e$ , in caso di una riduzione della portata del 60% (si supponga  $\eta_v$  invariato).

$$Q=1.368 \text{ l/s} \quad e=8.000 \text{ mm}$$

14. Si vuole dimensionare una pompa rotoalternativa a pistoni assiali che, ruotando a velocità costante,  $n = 2850 \text{ RPM}$ , elabori una portata variabile tra  $Q_{min} = 0.4 \text{ l/s}$  e  $Q_{max} = 1.2 \text{ l/s}$ . La macchina è costituita da una piastra ad inclinazione variabile (massima inclinazione  $\alpha_{max} = 35^\circ$ , v. fig. 3.52b) e da un rotore entro cui sono ricavate sei cavità cilindriche, di diametro  $D$ , il cui asse è a distanza  $R = 60 \text{ mm}$  dall'asse del rotore. Supponendo che il punto di contatto tra pistone e piastra sia sempre in corrispondenza dell'asse del pistone, calcolare il diametro  $D$  e l'inclinazione minima della piastra,  $\alpha_{min}$  (si supponga  $\eta_v = 0.95$ ).

$$D=8.195 \text{ mm} \quad \alpha_{min} = 13.14^\circ$$

# Capitolo 4

## MOTORI IDRAULICI VOLUMETRICI E TRASMISSIONI IDROSTATICHE

### 4.1 MOTORI IDRAULICI VOLUMETRICI

Le macchine motrici volumetriche che operano con fluidi incomprensibili (generalmente olio) vengono comunemente denominate **motori idraulici**, omettendo il termine *volumetrici*, non essendoci il rischio di confusione con le turbine idrauliche.

Il principio comune a tutti i motori idraulici è il seguente: il fluido in pressione agisce sulle parti attive dell'unità (ingranaggi, palette, pistoni radiali o assiali) generando una forza periferica e quindi una coppia motrice all'albero.

Il ciclo ideale dei motori volumetrici è identico a quello delle pompe con la semplice inversione del verso di percorrenza (il volume minimo è in alcuni casi trascurabile, ma ciò non influenza il lavoro al ciclo): con riferimento alla fig. 4.1, ad una fase di irmissione del fluido (*AB*) ad alta pressione ( $p_2$ ) segue una brusca caduta di pressione (*BC*), quando il fluido motore viene in contatto con l'ambiente di scarico; successivamente si ha lo scarico (*CD*) a bassa pressione ( $p_1$ ), seguito da un brusco aumento di pressione (*DA*) quando il fluido entra in comunicazione con l'ambiente di ammissione. Nel ciclo reale si hanno una serie di perdite, analoghe a quelle che si verificano nelle pompe volumetriche, che vanno a ridurre l'area del ciclo e quindi la potenza interna fornita dal fluido agli organi mobili del motore. Si introduce quindi un rendimento idraulico del motore  $\eta_y$  pari al rapporto tra l'area del ciclo di lavoro reale e quella del ciclo di lavoro ideale; pertanto potremo scrivere:

$$L_c = \eta_y V_c (p_2 - p_1), \quad (4.1)$$

dove si è indicato con  $V_c$  il volume della singola camera, delimitata, ad esempio, per un motore a palette, dal rotore, dalla cassa e da due palette successive.

Non tutta la portata proveniente dall'ammissione agisce sulle parti attive del motore; una piccola parte, infatti, trafilà o direttamente verso lo scarico o attraverso i giochi interni della macchina. Quest'ultima, denominata *portata di fuga interna*, svolge una funzione

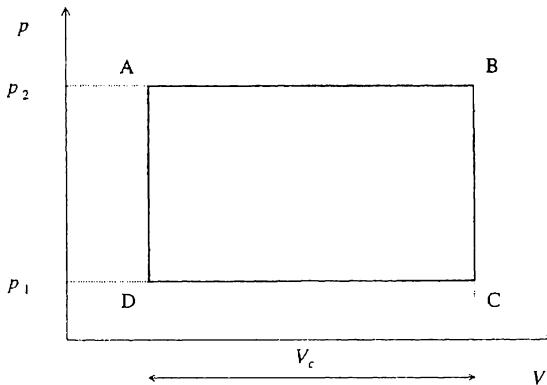


Figura 4.1: ciclo ideale di un motore idraulico.

benefica essenziale: lubrifica le parti in movimento e refrigeria l'intero motore asportando il calore generato dall'inevitabile attrito. Essa inoltre può essere controllata attraverso una valvola di sovrappressione (solitamente questa valvola è interna al motore stesso) a monte di un condotto di trafiletto che riporta direttamente al serbatoio la portata di fuga interna dopo che questa ha svolto la sua funzione di lubrificazione e refrigerazione. Aumentando la pressione di taratura della valvola, la portata di fuga interna diminuisce e quindi il rendimento volumetrico del motore aumenta; diminuiscono, tuttavia, gli effetti benefici della lubrificazione e può quindi essere compromesso il buon funzionamento del motore stesso. Per questo motivo, nella maggior parte dei casi, la suddetta valvola di sovrappressione è tarata dal costruttore e non è modificabile dall'utilizzatore.

Indicando con  $Q$  la portata volumetrica misurata nei condotti di collegamento e con  $\Delta Q$  la portata (totale) di fuga che rifiuisce verso lo scarico, si definisce **rendimento volumetrico**,  $\eta_v$ , il rapporto tra la portata  $Q - \Delta Q$  che fornisce lavoro e quella che attraversa la macchina:

$$\eta_v = \frac{Q - \Delta Q}{Q} \leq 1. \quad (4.2)$$

La portata che attraversa la macchina è quindi pari a:

$$Q = \frac{V_c n_c}{\eta_v} = \frac{V n}{\eta_v}. \quad (4.3)$$

Il prodotto del volume della singola camera,  $V_c$ , per il numero di cicli al giro,  $i = n_c/n$ , viene denominato *cilindrata totale*,  $V$ .

Infine, a causa delle perdite di tipo meccanico, non tutta la potenza interna prodotta è utilizzabile. Per tener conto di tali perdite, si introduce il **rendimento meccanico**,  $\eta_m$ , pari al rapporto tra la potenza utile e quella interna:

$$\eta_m = \frac{P_u}{P_i}. \quad (4.4)$$

Tenendo conto delle suddette perdite, la potenza utile  $P_u$  risulta data da:

$$\begin{aligned} P_u &= \eta_m \eta_y V_c n_c (p_2 - p_1) = \eta_m \eta_y V n (p_2 - p_1) \\ &= \eta_m \eta_y \eta_v Q (p_2 - p_1) = \eta_M Q (p_2 - p_1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

in cui  $\eta_M = \eta_m \eta_y \eta_v$  indica il rendimento totale del motore idraulico. Altra importante grandezza caratteristica è la coppia erogata,  $C$ :

$$C = \frac{P_u}{\omega} = \frac{P_u}{2\pi n} = \frac{\eta_m \eta_y}{2\pi} V (p_2 - p_1). \quad (4.6)$$

La coppia dipende quindi dalla cilindrata del motore e dal salto di pressione elaborato.

Il regime di rotazione di un motore idraulico è essenzialmente legato al suo tipo di costruzione. Si distinguono in proposito motori lenti e motori veloci: un motore veloce funziona in modo soddisfacente per un regime compreso, orientativamente, fra 3000 e 30  $RPM$ , manifestando generalmente, a regimi inferiori, una irregolarità nella velocità di rotazione più o meno accentuata. Un motore lento funziona in genere in modo soddisfacente per regimi inferiori ai 300  $RPM$ , fino a giungere a velocità molto basse, inferiori al giro al minuto. Nel campo di intersezione delle due categorie, considerazioni di convenienza economica e d'ingombro consigliano solitamente l'uso di un motore lento.

Per meglio chiarire le considerazioni precedenti con un esempio, consideriamo un motore idraulico che fornisca una potenza utile  $P_u = 50 kW$  ad un regime  $n = 150 RPM$ , con un salto di pressione elaborato  $\Delta p = 150 bar$ . Assumendo valori plausibili per i rendimenti,  $\eta_v = 0.91$  e  $\eta_m \eta_y = 0.93$ , ed applicando le formule (4.6) e (4.3), si ricavano la coppia, la cilindrata e la portata volumetrica:

$$C = \frac{P_u}{\omega} = \frac{50000}{2\pi \cdot 150/60} Nm = 3183 Nm;$$

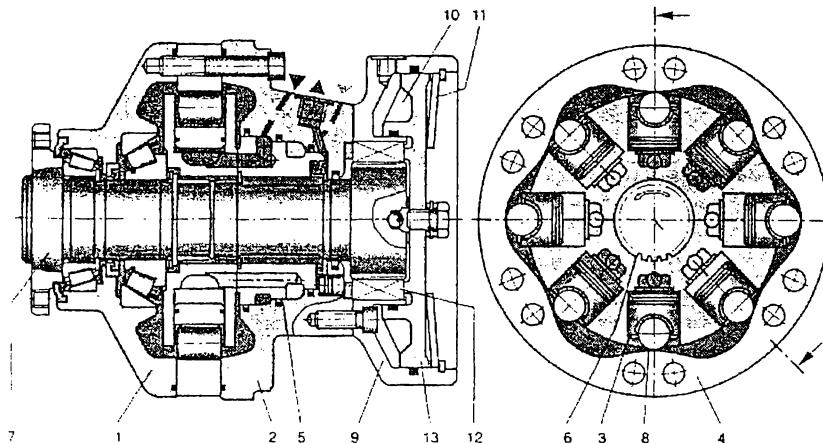
$$V = \frac{2\pi C}{\Delta p \eta_y \eta_m} = \frac{3183 \cdot 2\pi}{150 \cdot 10^5 \cdot 0.93} 10^6 cm^3 = 1434 cm^3;$$

$$Q = \frac{Vn}{\eta_v} = \frac{1434 \cdot 10^{-3} \cdot 150}{0.91} l/min = 236.4 l/min.$$

L'uso di un motore veloce imporrebbe l'adozione di un'unità difficilmente reperibile in commercio, mentre la stessa cilindrata si ritrova in motori lenti di dimensioni e costi assai modesti.

Sotto il profilo costruttivo i motori veloci corrispondono, in buona sostanza, alle soluzioni già descritte per le pompe: motori ad ingranaggi, a palette, a stantuffi radiali o assiali; nella maggior parte dei casi, infatti, le macchine sono addirittura reversibili, potendo funzionare sia da pompa che da motore.

I motori lenti, detti comunemente motori LSHT (Low Speed High Torque), sfruttano invece soluzioni originali che permettono di incrementare la cilindrata facendo compiere allo stesso pistone pompante più cicli di lavoro per ogni giro dell'albero motore. Pur non potendosi soffermare adeguatamente sull'argomento, si riportano alcune delle soluzioni adottate: In fig. 4.2 è riportato un motore a pistoni radiali multicorsa: lo statore è costituito da una pista a camme su cui appoggiano, tramite rulli, i pistoni; per ogni giro dell'albero motore ciascun cilindro viene riempito e vuotato un numero di volte pari al

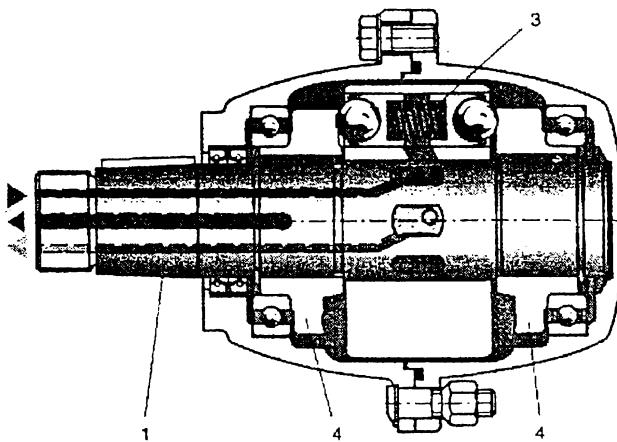


1 corpo 2 corpo del distributore 3 pistone 4 pista a camme 5 fori assiali di distribuzione 6 innesto scanalato 7 albero 8 rulli 9 freno a lamelle 10 vano anulare 11 molla a tazza 12 lamelle 13 pistone freno

Figura 4.2: motore a pistoni radiali multicorsa.

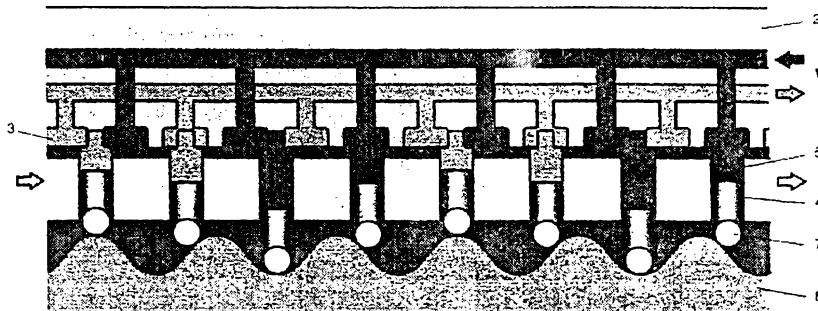
numero di camme esistenti sulla pista. In questi motori assume quindi notevole complessità il sistema di distribuzione, che deve essere in grado di collegare ciascun cilindro con l'ammissione in ogni fase di discesa del pistone, e con lo scarico in ogni fase di risalita. Nell'esempio in esame, ciò è realizzato tramite un anello fisso che presenta una serie di condottini disposti in direzione assiale; di questi, una metà (pari al numero delle camme) è posta in comunicazione con un condotto toroidale collegato con l'ammissione e l'altra metà con un condotto toroidale collegato allo scarico. Il rotore presenta al suo interno i cilindri, in cui alloggiano i corrispondenti pistoni e, per ciascun cilindro, un condottino disposto anch'esso in direzione assiale e collegato al cilindro stesso che, nella rotazione, viene in contatto, alternativamente, con i condotti fissi di alta e bassa pressione. Come appare evidente, la difficoltà di ottenere una buona tenuta tra l'anello fisso della distribuzione ed il rotore è notevole e spiega l'elevato livello tecnologico delle poche industrie produttrici di tali macchine.

In fig. 4.3 è riportato un motore a pistoni assiali multicorsa con corpo rotante: in questo caso le camme sono portate da dei dischi ed hanno uno sviluppo assiale, coerentemente con la disposizione assiale dei pistoni. Lo schema concettuale di funzionamento è mostrato in fig. 4.4 dove è riportato lo sviluppo in piano di una sezione cilindrica: il distributore, solidale con il disco che porta le camme, contiene condotti di alta e bassa pressione ed il corpo mobile che contiene i cilindri ed i relativi pistoni, nel suo movimento, mette in contatto questi ultimi con l'alta o la bassa pressione a seconda che il pistone stia scendendo o risalendo. Nell'esempio riportato, l'albero è fisso ed il sistema di distribuzione è disposto



1 albero (fisso) 3 molle 4 dischi a camme (con distributore solidale)

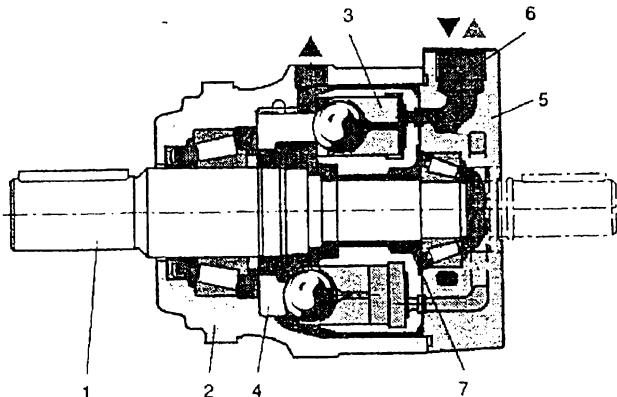
Figura 4.3: motore a pistoni assiali multicorsa con corpo rotante.



1 attacchi per l'ammissione e lo scarico 2 distributore 3 luci di distribuzione  
4 pistone 5 cilindro 7 rullo o sfera d'appoggio 8 pista a camme

Figura 4.4: schema di funzionamento di un motore a pistoni assiali multicorsa.

al suo interno: i cilindri nella loro rotazione vengono in contatto con una serie di forellini radiali uscenti dall'albero, che sono in collegamento alternativamente con l'alta e la bassa pressione. E' da notare (v. fig. 4.3) che ciascun cilindro presenta due pistoni, che poggiano, tramite sfera o rullo, su due dischi a camme, al fine di raddoppiare la corsa e, quindi, la cilindrata. Una possibilità alternativa, ma del tutto simile, è quella riportata in fig. 4.5



1 albero 2 corpo 3 pistoni 4 dischi a camme 5 fondello  
6 attacchi della distribuzione 7 innesto scanalato

Figura 4.5: motore a pistoni assiali multicorsa con albero rotante.

nella quale è l'albero che è solidale con i pistoni e quindi rotante.

Una prerogativa fondamentale dei motori idraulici è la capacità di sviluppare una notevole coppia di spunto (v. equazione (4.6)) capace di vincere la coppia resistente e di avviare il sistema sotto carico senza l'utilizzo di frizioni. Solo i motori a palette, e quelli che sfruttano lo stesso principio, non presentano questa caratteristica: all'avviamento, infatti, le palette non riescono ad aderire ai fianchi dello statore, data l'assenza di forza centrifuga, e manca quindi un'adeguata tenuta necessaria per la creazione della coppia di avviamento.

## 4.2 IMPIANTI OLEODINAMICI

L'oleodinamica è in continua evoluzione e sta sempre più allargando il suo campo di azione raggiungendo i più disparati settori della tecnologia, tra i quali, per esempio, il settore medico, tradizionalmente estraneo all'oleodinamica. Pur nell'impossibilità di scendere nei dettagli delle singole applicazioni, si può suddividere il campo dell'oleodinamica in tre grandi sottosettori:

- la conversione dell'energia;
- l'oleodinamica proporzionale;

- la servoidraulica.

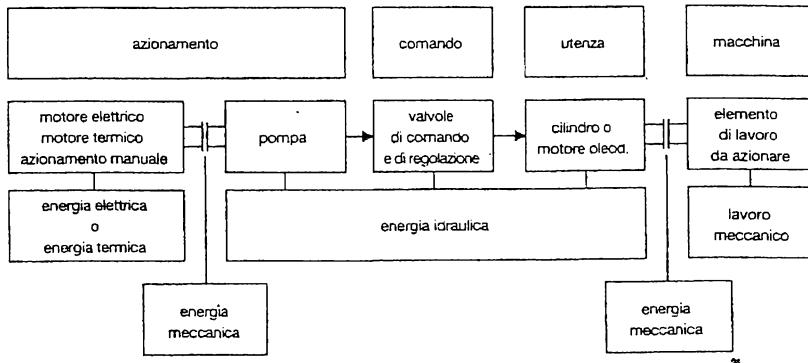


Figura 4.6: schema a blocchi della conversione dell'energia in un impianto oleodinamico.

Per quanto riguarda la conversione dell'energia, su cui entreremo in dettaglio, il diagramma a blocchi in fig. 4.6 riporta uno schema del tutto generale in cui si vede come partendo da energia di tipo termico o elettrico, tramite un motore primo è possibile azionare una pompa che genera energia idraulica. Detta energia, dopo essere stata controllata attraverso circuiti più o meno complessi contenenti valvole di comando e di regolazione, viene utilizzata in un cilindro, o motore oleodinamico, e riconvertita in energia meccanica necessaria per azionare l'utilizzatore. I vantaggi di un siffatto sistema, rispetto a sistemi puramente meccanici ed elettrici, sono numerosi e possono essere così riassunti:

- trasmissioni di grandi forze (o di grandi coppie) con piccoli ingombri;
- possibilità di partenza a pieno carico;
- variazione continua e facile dei parametri del moto (velocità dell'attuatore o regime di rotazione del motore, forza o coppia trasmesse);
- facilità di protezione contro i sovraccarichi;
- possibilità di eseguire o di controllare cicli di movimenti rapidi o anche estremamente lenti;
- possibilità di accumulare energia;
- facilità di centralizzare il generatore di energia anche per l'alimentazione di più utenze e di distribuire le stesse.

Per quanto riguarda il primo aspetto, si fa notare che un cilindro avente un diametro interno di 1 cm soggetto ad una pressione di 250 bar (pressione che potremmo definire media per applicazioni oleodinamiche) sviluppa una forza di:

$$F = \frac{\pi D^2}{4} p = \frac{\pi \cdot 0.01^2}{4} m^2 \cdot 250 \cdot 10^5 N/m^2 = 1963 N.$$

Un motore idraulico avente una cilindrata di 50 cm<sup>3</sup>, che gira a 3000 RPM ed elabora un Δp di 300 bar, presenta i seguenti valori di coppia e potenza utile erogate:

$$C = \eta_m \eta_y \frac{V \Delta p}{2\pi} \approx 0.93 \frac{50 \cdot 10^{-6} \cdot 300 \cdot 10^5}{2\pi} = 222 Nm,$$

$$P_u = C \omega = 222 \frac{2\pi \cdot 3000}{60} W = 69.7 kW.$$

Nel campo dei motori termici, ad esempio, per avere le stesse potenze ci vogliono cilindrate molto più elevate e conseguentemente ingombri molto maggiori.

La possibilità di partenza a pieno carico è legata alla indipendenza della coppia dal numero di giri, il che, come già detto, permette di evitare l'uso di frizioni.

Variando le cilindrata e le portate è possibile regolare in modo continuo i parametri all'utilizzatore, più agevolmente ed economicamente rispetto a sistemi meccanici (con trasmissioni a rapporto variabile) o elettrici (che richiedono il controllo elettronico della frequenza).

Estremamente importante è la necessità e la facile possibilità di proteggere gli impianti oleodinamici dai sovraccarichi: bastano una o più valvole di sovrapressione per assicurare che le pressioni, e quindi le sollecitazioni, siano al di sotto dei limiti di pericolo. Questo requisito non trova corrispondenza negli altri settori e rende quasi indispensabile l'uso di sistemi oleodinamici ogni qual volta si prevedono forti oscillazioni del carico e quindi pericoli di sovraccarichi.

Tenuto conto della scarsa comprimibilità dell'olio, è facile intuire la rapidità di risposta di un sistema oleodinamico a qualsiasi comando: è possibile eseguire e controllare cicli di movimenti che si susseguono in rapida successione, il tutto sfruttando anche le possibilità offerte dall'impiego della microelettronica; i componenti oleodinamici sono infatti oggi giorno costituiti da sistemi integrati nei quali sono presenti, oltre agli attuatori e alle valvole di regolazione, anche gli amplificatori di segnale, i sensori per la trasduzione delle grandezze fisiche manipolate e l'elettronica di regolazione. D'altra parte l'oleodinamica è in grado anche di controllare movimenti estremamente lenti, settori nel quale i sistemi elettrici mostrano delle difficoltà.

L'uso di accumulatori idraulici permette di immagazzinare energia sotto forma di energia di pressione, energia che può essere utilizzata o negli istanti in cui si devono fronteggiare picchi di potenza richiesta o per completare delle operazioni indispensabili in caso di avaria (per esempio, frenare e riportare al piano un'ascensore, permettere ai passeggeri di scendere da una funivia, ecc.).

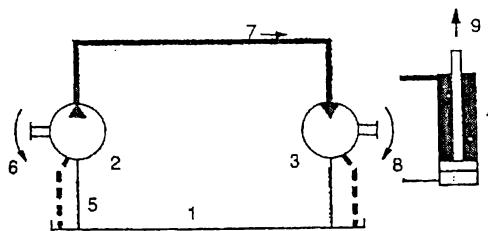
Per quanto attiene alla facilità di centralizzare il generatore di energia e distribuire le utenze, basta tener presente che generatore ed utenze possono essere facilmente collegati fra loro tramite tubi rigidi o flessibili e valvole distributrici; quindi non vi sono vincoli sulla posizione relativa né sul numero di utenze o di generatori.

## 4.3 TRASMISSIONI IDROSTATICHE

### 4.4 Schemi costruttivi

Pompe e motori idraulici possono essere variamente combinati (con l'aiuto di organi intermedi quali valvole di distribuzione, di sicurezza, di aspirazione, nonché di circuiti ausiliari di pilotaggio separati) per formare una trasmmissione idrostatica completa. In effetti una *trasmissione* in senso lato si realizza ogni qualvolta si genera in una pompa dell'energia idraulica e la si riconverte in energia meccanica in un utilizzatore qualsiasi e quindi anche in un cilindro a moto lineare. Tuttavia la trasmmissione idrostatica per antonomasia è quella costituita dalla combinazione di una pompa e di un motore idraulico rotativi o rotoalternativi. Si tratta senza dubbio del dispositivo che per la trasmmissione di potenza da qualche kW fino a parecchie centinaia di kW offre il maggior numero di vantaggi rispetto ai dispositivi meccanici o elettromeccanici:

- eliminazione di giunti e frizioni;
- controllabilità e variabilità di coppia e di regime pressoché immediate;
- accelerazione e frenatura rapidissime e senza danno per le strutture meccaniche;
- eventuale distanziamento fra generatore e utilizzatore senza problemi di interconnessione meccanica;
- limitazione e regolazione della potenza,
- invertibilità dei movimenti finali.

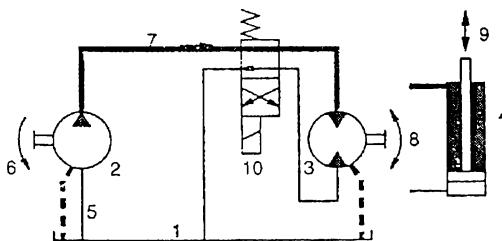


1 serbatoio 2 pompa a cilindrata costante 3 motore idraulico a cilindrata costante 4 cilindro 5 condotto di aspirazione pompa 6 regime di rotazione pompa,  $n_p = \text{cost}$  7 portata,  $Q = \text{cost}$  8 regime di rotazione motore idraulico,  $n_M = \text{cost}$  9 velocità (lineare) dell'attuatore,  $V = \text{cost}$

Figura 4.7: circuito (aperto) base di una trasmmissione idrostatica.

In fig. 4.7 è riportato un primo esempio, estremamente elementare, di trasmmissione idrostatica: una pompa unidirezionale aspira olio dal serbatoio e lo invia ad un motore idraulico

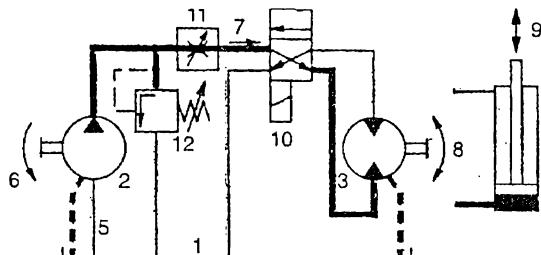
o ad un cilindro che trasformano l'energia idraulica in energia meccanica. Sia il motore che il cilindro in questo caso sono unidirezionali. E' da notare la presenza delle linee tratteggiate, che indicano i condotti di rifiusso della pompa e del motore. Una prima complicazione che si può apportare al circuito è l'introduzione di un distributore che permette di invertire il senso di rotazione del motore (o la direzione di traslazione del cilindro), v. fig. 4.8: invertendo la posizione del distributore si scambiano fra loro il condotto dell'attuatore in contatto con la mandata della pompa e quello in contatto con il serbatoio.



1 serbatoio 2 pompa a cilindrata costante 3 motore idraulico a cilindrata costante 4 cilindro 5 condotto di aspirazione pompa 6 regime di rotazione pompa,  $n_P = \text{cost}$  7 portata,  $Q = \text{cost}$  8 regime di rotazione motore idraulico,  $n_M = \text{cost}$  9 velocità (lineare) dell'attuatore,  $V = \text{cost}$  10 distributore per il controllo del verso del movimento dell'attuatore

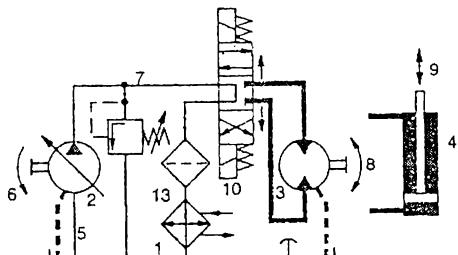
Figura 4.8: schema di trasmissione idrostatica con distributore all'attuatore.

Una ulteriore complicazione è riportata in fig. 4.9, dove è stata introdotta una valvola limitatrice di pressione per impedire che un brusco arresto dell'attuatore possa generare pressioni eccessive sul condotto di mandata della pompa con possibile rottura dei componenti: la valvola di sovrappressione è tarata in modo che essa si apra prima di superare valori di pressione strutturalmente inaccettabili, lasciando così defluire liberamente l'olio verso il serbatoio. Nello schema di fig. 4.9 è presente anche una valvola regolatrice di flusso che serve a controllare la velocità dell'attuatore (proporzionale alla portata di olio). In fig. 4.10 sono stati infine inseriti degli accessori, quali il filtro e lo scambiatore di calore, che sono essenziali per il buon funzionamento dell'impianto. Inoltre, il distributore inserito in questo schema è leggermente più complesso di quello visto in precedenza: esso ha anche una posizione di riposo in corrispondenza della quale l'olio inviato dalla pompa viene scaricato direttamente nel serbatoio (in questo caso la pompa dà una prevalenza minima, ovvero quella che serve a vincere le perdite di carico nei condotti e negli accessori) e l'attuatore resta in posizione bloccata. La freccia sovrapposta al simbolo della pompa sta ad indicare che la pompa è a cilindrata variabile, che consente di variare la velocità dell'attuatore in modo molto più efficiente che non con una valvola regolatrice di flusso.



1 serbatoio 2 pompa a cilindrata costante 3 motore idraulico a cilindrata costante 4 cilindro 5 condotto di aspirazione pompa 6 regime di rotazione pompa,  $n_P = \text{cost}$  7 portata,  $Q \neq \text{cost}$  8 regime di rotazione motore idraulico,  $n_M \neq \text{cost}$  9 velocità (lineare) dell'attuatore,  $V \neq \text{cost}$  10 distributore per il controllo del verso del movimento dell'attuatore 11 regolatore di flusso per regolazione portata 12 valvola limitatrice della pressione per protezione dai sovraccarichi

Figura 4.9: schema di trasmissione idrostatica con valvola limitatrice della pressione e regolatore di flusso.



1 serbatoio 2 pompa a cilindrata variabile 3 motore idraulico a cilindrata costante 4 cilindro 5 condotto di aspirazione pompa 6 regime di rotazione pompa,  $n_P = \text{cost}$  7 portata,  $Q \neq \text{cost}$  8 regime di rotazione motore idraulico,  $n_M \neq \text{cost}$  9 velocità (lineare) dell'attuatore,  $V \neq \text{cost}$  10 distributore per il controllo del verso del movimento dell'attuatore 11 regolatore di flusso per regolazione portata 12 valvola limitatrice della pressione per protezione dai sovraccarichi 13 filtro, sistema di raffreddamento ed altri accessori

Figura 4.10: schema di trasmissione idrostatica con pompa a cilindrata variabile e accessori.

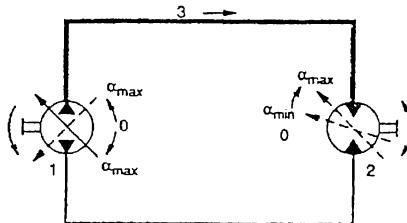
1 pompa 2 motore idraulico 3 portata,  $Q \neq \text{cost}$ 

Figura 4.11: circuito (chiuso) base di una trasmissione idrostatica.

In tutti gli schemi di impianto finora analizzati è interposto, tra lo scarico del motore idraulico e l'aspirazione della pompa, un serbatoio; il circuito viene corrispondentemente denominato *circuito aperto*. Questa soluzione è di uso comune sia nelle applicazioni industriali che in quelle mobili (dalle macchine utensili alle presse, dai verricelli alla trazione di macchine mobili), ma per alcune applicazioni può creare degli inconvenienti dal punto di vista del controllo del transitorio (in caso di brusco arresto della pompa, per inerzia

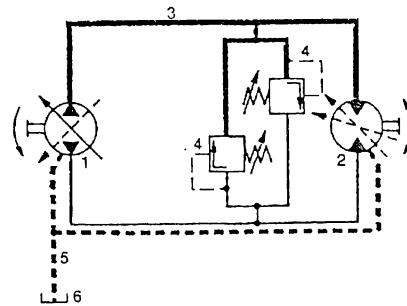
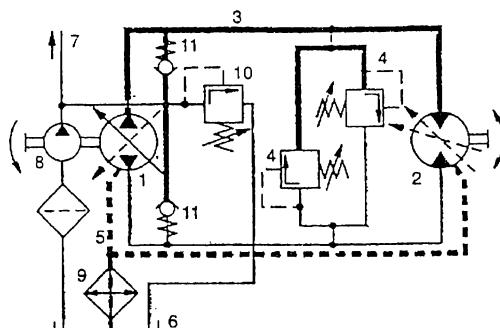
1 pompa 2 motore idraulico 3 portata,  $Q \neq \text{cost}$  4 valvole limitatrici della pressione per protezione dai sovraccarichi (una su ogni ramo) 5 condotti di drenaggio 6 serbatoio per l'olio di drenaggio

Figura 4.12: schema di trasmissione idrostatica con valvole limitatrici della pressione e condotti di rifiusso.

L'attuatore continua a muoversi, richiedendo una portata di olio superiore a quella fornita dalla pompa, il cui condotto di mandata va quindi rapidamente in depressione, con rischio di cavitazione). In questi casi si preferisce perciò adottare un circuito chiuso nel quale l'olio scaricato dall'attuatore ritorna direttamente alla pompa, senza alcun serbatoio intermedio, v. fig. 4.11, in cui viene riportato lo schema elementare di principio, che comprende una pompa ed un motore idraulico collegati da un circuito chiuso.

La pompa è del tipo a pistoni assiali (v. fig. 3.52b), con cilindrata variabile per poter regolare la portata mandata e quindi la velocità di rotazione del motore. Poiché nella quasi totalità dei casi il motore primo di comando non può invertire il verso di rotazione ed essendo assente qualsiasi tipo di distributore, il senso di rotazione del motore viene cambiato invertendo il verso di percorrenza del circuito. La piastra di appoggio dei pistoni nella pompa è infatti inclinabile con continuità fra  $\pm\alpha_{max}$ , passando per la posizione di zero: in tal modo si inverte il senso della portata erogata e quindi il senso di rotazione del motore, che è ovviamente reversibile. Anche la cilindrata del motore è variabile con continuità, per ampliare il campo di regolazione, ma, come indicano le frecce, la piastra del motore è inclinabile su un solo lato, fra  $\alpha_{min}$  e  $\alpha_{max}$ .



1 pompa 2 motore idraulico 3 portata,  $Q \neq \text{cost}$  4 valvole limitatrici della pressione per protezione dai sovraccarichi (una su ogni ramo) 5 condotti di drenaggio 6 serbatoio per l'olio di drenaggio 7 collegamento per comando pompa 8 pompa ausiliaria di alimentazione 9 filtro, sistema di raffreddamento ed altri accessori 10 valvola limitatrice della pressione per la pompa ausiliaria di alimentazione 11 valvola di non ritorno

Figura 4.13: schema completo di trasmissione idrostatica a circuito chiuso.

Anche in questo caso, lo schema di principio va notevolmente complicato affinché sia utilizzabile industrialmente: in fig. 4.12 sono state introdotte due valvole limitatrici di pressione affinché la pressione nei due rami del circuito non raggiunga valori critici. L'uso di due valvole non è dovuto unicamente alla reversibilità del circuito; anche se il motore viene fatto girare in modo unidirezionale, infatti, è necessario prevedere due valvole per le fasi di transitorio: quando la pompa rallenta bruscamente, il motore, per inerzia, risente di questo effetto con un certo ritardo, per cui scarica più portata di quanta ne preleva la pompa: il condotto di ritorno può quindi raggiungere pressioni eccessive. In fig. 4.12 sono anche evidenziati, con linea tratteggiata, i condotti di riflusso della pompa e del motore: la necessità, già sottolineata, di avere una portata di riflusso per lo smaltimento del calore rende indispensabile l'utilizzo di una pompa ausiliaria di alimentazione (pompa di sovrallimentazione) che reintegri l'olio rifiuito verso il serbatoio. Pertanto, uno schema completo di una trasmissione a circuito chiuso è riportato in fig. 4.13: sullo stesso albero

della pompa principale (molto spesso le due pompe sono racchiuse in un unico corpo pompa) vi è una pompa di sovralimentazione a cilindrata fissa che è in collegamento, tramite due valvole di non ritorno, con i due rami del circuito di potenza e, tramite una valvola di sovrappressione con il serbatoio. L'olio della pompa di sovralimentazione va a reintegrare, attraverso una delle due valvole di non ritorno, l'olio mancante sul ramo di bassa pressione, mentre l'altra valvola impedisce il riflusso dell'olio dal ramo di alta pressione verso la pompa. Si noti come la disposizione delle valvole consenta la reversibilità del circuito principale. La portata di sovralimentazione in eccesso rifiuisce al serbatoio attraverso la valvola di sovrappressione che, in pratica, serve a fissare la pressione nel circuito di sovralimentazione e quindi sul ramo di bassa pressione del circuito di potenza (le perdite di carico nella valvola di non ritorno sono trascurabili). Nella fig. 4.13 sono riportati anche il filtro e lo scambiatore di calore: quest'ultimo va posizionato sui condotti di riflusso perché, come già sottolineato, è la portata di riflusso che provvede allo smaltimento del calore dovuto alle perdite; anche il filtro è attraversato dalla portata di sovralimentazione, dopo che si è raffreddata nello scambiatore. Entrambi hanno quindi dimensioni più contenute rispetto al caso del circuito aperto.

In conclusione possiamo riassumere, confrontandole fra loro, le caratteristiche dei circuiti aperti e chiusi:

#### circuito aperto

- filtri e scambiatori:  
sezione di passaggio e dimensioni costruttive determinate dalla portata, in quanto montate sul circuito principale.
- capacità del serbatoio:  
volume proporzionale alla portata massima della pompa; scambiatore di calore non sempre necessario.
- regime di rotazione della pompa:  
limitato dall'altezza d'aspirazione, per evitare la cavitazione.
- disposizione di montaggio:  
la pompa deve essere montata a fianco oppure sotto il serbatoio.
- tubazioni di aspirazione:  
corte e di grande sezione.

#### circuito chiuso

- filtri e scambiatori:  
sezioni di passaggio e dimensioni contenute, in quanto montati sul circuito ausiliario.
- capacità del serbatoio:  
modesta, determinata solo dalla portata della pompa ausiliaria; scambiatore di calore quasi sempre necessario.
- regime di rotazione della pompa:  
ammessi elevati valori massimi, grazie alla sovralimentazione.
- disposizione di montaggio:  
libera.
- senso di rotazione della pompa:  
reversibile attraverso la posizione zero.
- recupero energetico:  
possibile in fase di frenatura.

#### 4.4.1 Prestazioni

Per poter caratterizzare quantitativamente il funzionamento di una trasmissione idrostatica, ovvero definirne le prestazioni, riportiamo alcune equazioni, precedentemente ricavate, relative ad una pompa e ad un motore idraulico:

$$Q_P = \eta_{v,P} V_P n_P, \quad (3.93)$$

$$P_{a,P} = \frac{V_P n_P (p_2 - p_1)}{\eta_{m,P} \eta_{y,P}} = \frac{Q_P (p_2 - p_1)}{\eta_P}, \quad (3.94)$$

$$C_P = \frac{P_{a,P}}{2\pi n_P} = \frac{V_P (p_2 - p_1)}{2\pi \eta_{m,P} \eta_{y,P}}, \quad (3.95)$$

$$Q_M = \frac{V_M n_M}{\eta_{v,M}}, \quad (4.3)$$

$$P_{u,M} = \eta_{m,M} \eta_{y,M} V_M n_M (p_2 - p_1) = \eta_M Q_M (p_2 - p_1), \quad (4.5)$$

$$C_M = \frac{P_{u,M}}{2\pi n_M} = \frac{\eta_{m,M} \eta_{y,M} V_M (p_2 - p_1)}{2\pi}. \quad (4.6)$$

Se la trasmissione funziona in condizioni normali, ovvero con la valvola di sovrappressione chiusa, la portata mandata dalla pompa e quella che attraversa il motore sono, per continuità, uguali. Si ricava, quindi:

$$\eta_{v,P} V_P n_P = \frac{V_M n_M}{\eta_{v,M}}. \quad (4.7)$$

Il rapporto (inverso) tra le cilindrate determina quindi il rapporto di trasmissione  $\nu_T$ :

$$\nu_T = \frac{n_M}{n_P} = \frac{V_P}{V_M} \eta_{v,P} \eta_{v,M}, \quad (4.8)$$

che può quindi essere regolato, entro ampi limiti, variando la cilindrata di una o di entrambe le macchine.

Facendo il rapporto tra la (4.6) e la (3.95), si ricava, poi, il rapporto tra le coppie  $\tau_T$ , che ovviamente dipende anch'esso dal rapporto tra le cilindrate:

$$\tau_T = \frac{C_M}{C_P} = \frac{V_M}{V_P} \eta_{m,P} \eta_{y,P} \eta_{m,M} \eta_{y,M}. \quad (4.9)$$

Il rendimento della trasmissione, infine, può essere ricavato dal rapporto tra la (4.5) e la (3.94), o utilizzando la (4.8) e la (4.9):

$$\eta_T = \frac{C_M \omega_M}{C_P \omega_P} = \tau_T \nu_T = \eta_{m,P} \eta_{y,P} \eta_{v,P} \eta_{m,M} \eta_{y,M} \eta_{v,M} = \eta_P \eta_M. \quad (4.10)$$

Il rendimento della trasmissione è quindi, come ovvio, pari al prodotto dei rendimenti totali delle due macchine: il valore piuttosto basso del rendimento costituisce l'unico aspetto negativo delle trasmissioni idrostatiche.

## 4.5 Esercizi

1. Un motore a pistoni radiali multicorsa ruota a  $n = 30 \text{ RPM}$ , elaborando un salto di pressione  $p_2 - p_1 = 170 \text{ bar}$ . Il motore è costituito da 4 camme e da 6 cilindri, ciascuno di diametro  $D = 36 \text{ mm}$  e corsa  $c = 35 \text{ mm}$ . Assumendo che i rendimenti particolari siano pari a  $\eta_v = 0.92$ ,  $\eta_m = 0.97$ ,  $\eta_y = 0.96$ , calcolare la cilindrata totale,  $V$ , la portata volumetrica,  $Q$ , la coppia erogata,  $C$ , e la potenza utile,  $P_u$ .

$$V = 855.0 \text{ cm}^3 \quad Q = 0.4647 \text{ l/s}$$

$$C = 2154 \text{ Nm} \quad P_u = 6.768 \text{ kW}$$

2. In una prova al banco di un motore a pistoni radiali multicorsa vengono rilevati i seguenti dati:  $C = 650 \text{ Nm}$ ,  $n = 190 \text{ RPM}$ ,  $p_2 - p_1 = 190 \text{ bar}$ ,  $Q = 0.8 \text{ l/s}$ . Sapendo che il motore idraulico è geometricamente simile a quello rappresentato in fig. 4.2 e che il volume spazzato da ciascun pistone è  $V_c = 4.8 \text{ cm}^3$ , calcolare il rendimento volumetrico,  $\eta_v$ , ed il rendimento totale,  $\eta_M$ .

$$\eta_v = 0.9120 \quad \eta_M = 0.8508$$

3. Una trasmissione idrostatica, con rendimenti particolari  $\eta_{vP} = \eta_{vM} = 0.94$ ,  $\eta_{mP} = \eta_{mM} = 0.97$ ,  $\eta_{yP} = \eta_{yM} = 0.96$ , eroga una coppia  $C_M = 700 \text{ Nm}$  a  $n_M = 600 \text{ RPM}$ . Sapendo che la pompa ruota a  $n_P = 2850 \text{ RPM}$  e che  $p_2 - p_1 = 160 \text{ bar}$ , calcolare le cilindrata (totale) della pompa e del motore,  $V_P$  e  $V_M$ , il rapporto di trasmissione tra le coppie,  $\tau_T$ , ed il rendimento della trasmissione,  $\eta_T$ .

$$V_P = 70.33 \text{ cm}^3 \quad V_M = 295.2 \text{ cm}^3$$

$$\tau_T = 3.639 \quad \eta_T = 0.7662$$

4. Si consideri una trasmissione idrostatica caratterizzata dai seguenti dati:

- pompa a cilindrata (totale) variabile:  $V_{P,\min} = 10 \text{ cm}^3$ ,  $V_{P,\max} = 40 \text{ cm}^3$ ,  $n_P = 1450 \text{ RPM}$ ,  $\eta_{vP} = 0.92$ ,  $\eta_{mP} = 0.97$ ,  $\eta_{yP} = 0.96$ ;
- motore a cilindrata (totale) variabile:  $V_{M,\min} = 20 \text{ cm}^3$ ,  $V_{M,\max} = 60 \text{ cm}^3$ ,  $\eta_{vM} = 0.92$ ,  $\eta_{mM} = 0.97$ ,  $\eta_{yM} = 0.96$ ;
- salto di pressione massimo  $(p_2 - p_1)_{\max} = 190 \text{ bar}$ .

Supponendo costanti i rendimenti, determinare il campo di funzionamento del motore idraulico,  $[n_{M,\min}, n_{M,\max}]$ . Calcolare, inoltre, la massima coppia e la massima potenza che possono essere erogate,  $C_{M,\max}$  e  $P_{M,\max}$ . Determinare, infine, il numero di giri del motore idraulico,  $\bar{n}_M$ , per cui si ha contemporaneamente  $P_M = P_{M,\max}$  e  $C_M = C_{M,\max}$ .

$$n_{M,\min} = 204.6 \text{ RPM} \quad n_{M,\max} = 2455 \text{ RPM}$$

$$C_{M,\max} = 169.0 \text{ Nm} \quad P_{M,\max} = 14.48 \text{ kW} \quad \bar{n}_M = 818.2 \text{ RPM}$$

5. Una trasmissione idrostatica è caratterizzata dai seguenti dati:

- pompa: cilindrata totale  $V_P = 40 \text{ cm}^3$ ,  $n_P = 1450 \text{ RPM}$ ,  $\eta_{vP} = 0.94$ ,  $\eta_{mP} = 0.97$ ,  $\eta_{yP} = 0.96$ .

- motore idraulico: cilindrata totale  $V_M$ ,  $\eta_{vM} = 0.94$ ,  $\eta_{mM} = 0.97$ ,  $\eta_{yM} = 0.96$ .

Sapendo che l'utilizzatore, calettato sullo stesso albero del motore idraulico, deve funzionare a  $n_U = 450 \text{ RPM}$  e che per tale regime la coppia richiesta è  $C_U = 340 \text{ Nm}$ , determinare la cilindrata (totale) del motore idraulico  $V_M$ , il salto di pressione elaborato,  $(p_2 - p_1)$ , la potenza assorbita dalla pompa,  $P_{a,P}$ , ed il rendimento della trasmissione  $\eta_T$ .

$$V_M = 113.9 \text{ cm}^3 \quad (p_2 - p_1) = 201.4 \text{ bar}$$

$$P_{a,P} = 20.91 \text{ kW} \quad \eta_T = 0.7662$$

- \* 6. Una macchina per movimentazione terra trasporta materiale (massa complessiva  $M = 2600 \text{ kg}$ ) su un percorso in salita, la cui pendenza è  $\tan(\alpha) = 0.15$ ; sull'asse delle ruote, di diametro  $D_R = 25 \text{ cm}$ , si ha una ulteriore coppia resistente, pari a  $C_R = 3.6 \omega_R$  ( $C_R$  in  $\text{Nm}$  e  $\omega_R$  in  $\text{rad/s}$ ). Il motore di comando ruota a velocità costante,  $n = 1450 \text{ RPM}$ , ed è collegato alle ruote motrici tramite una trasmissione idrostatica ( $V_P = 55 \text{ cm}^3$ ,  $V_M$  variabile tra  $V_{M,\min} = 10 \text{ cm}^3$  e  $V_{M,\max} = 160 \text{ cm}^3$ ,  $p_1 = 10 \text{ bar}$ , pressione massima dell'olio  $p_{2,\max} = 230 \text{ bar}$ ,  $\eta_{y,P} = \eta_{y,M} = 0.98$ ,  $\eta_{m,P} = \eta_{m,M} = 0.98$ ,  $\eta_{v,P} = \eta_{v,M} = 0.93$ ) seguita da un differenziale ( $\nu_d = \omega_R / \omega_M = 0.4$ ,  $\eta_d = 0.97$ ). Calcolare la minima velocità di avanzamento del mezzo,  $V_{av,\min}$ , e la corrispondente pressione di funzionamento della trasmissione,  $p_{2,\min}$ .

Per aumentare la velocità di avanzamento, la cilindrata del motore idraulico viene successivamente portata ad un valore  $V_M$  corrispondente ad una pressione  $p_2 = 0.9 p_{2,\max}$ . Calcolare  $V_M$ , la corrispondente velocità di avanzamento,  $V_{av}$ , e la potenza assorbita dal motore di comando,  $P_a$ .

$$V_{av,\min} = 2.257 \text{ m/s} \quad p_{2,\min} = 103.5 \text{ bar}$$

$$V_M = 84.23 \text{ cm}^3 \quad V_{av} = 4.288 \text{ m/s} \quad P_a = 28.13 \text{ kW}$$

29 GIU. 1999

St. Fac. Ing. Inv. N. 9003353

