第一章 Integration by substitution

1.1 Integrate with a given substitution

给定换元：$u = g(x)$ (记其反函数为 $x = h(u)$)，通过以下方式将关于 x 的不定积分换元为关于 u 的不定积分：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) \stackrel{*}{=} F(h(u)) = \int f(h(u))h'(u)\mathrm{d}u = \int \tilde{f}(u)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$$

换元积分法的基本步骤：

1. 换元过程：通过换元 ($u = g(x)$ 或者 $x = h(u)$)，将原不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 转化为更容易计算的不定积分 $\int \tilde{f}(u)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$
2. 积分过程：计算不定积分 $\int \tilde{f}(u)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$，记积分结果 $\tilde{F}(u)$
3. 回代过程：将 $u = g(x)$ 代入积分结果 $\tilde{F}(u)$

这里我们不熟悉的是换元过程，接下来我们将结合几道例题来讲解如何换元。

例题 1.1 (1) Calculate $\int 4x\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$, using the substitute $u = 2x + 1$

(2) Calculate $\int \frac{8}{x^2+4}\mathrm{d}x$, using the substitute $x = 2\tan u$

总结这两个例子，换元过程需要干两件事情：被积函数 $f(x)$ 转化为 f(u)；微分项 dx 转化为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$.

让我们再看一个例子

例题 1.2 Calculate $\int \sin^2 2x \cos x\mathrm{d}x$, using the substitute $u = \sin x$

我们发现，部分情况下，无须把 $f(x)$ 与 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$ 中的每一个 x 都换元. 适当保留部分 x 可以帮助更快的计算。

一般来说，当给定换元方式为 $u = g(x)$ 时，可以先观察原不定积分, 若其形式为 $\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$，一个便捷的换元方式是计算 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{g'(x)}$（无须换元），若