

# 分毫析厘

陈宇轩

chen\_yuxuan@pku.edu.cn



2025 年 2 月 21 日，版本 2.0

供学习交流使用，欢迎传播，禁止作为商业用途

# 目录

代序	2
<b>1 Hardy–Littlewood 极大函数</b>	<b>3</b>
1.1 Lebesgue 点	3
1.2 Marcinkiewicz 插值定理	7
<b>2 Hadamard 三线定理</b>	<b>12</b>
2.1 Phragmen–Lindelöf 方法	12
2.2 Riesz–Thorin 插值定理	15
<b>3 Brouwer 不动点定理</b>	<b>19</b>
3.1 Euler–Lagrange 方程	19
3.2 证明、应用及推广	22
<b>4 绝对连续 = 连续 + 有界变差 + 保持零测集</b>	<b>26</b>
4.1 第一种证明	26
4.2 第二种证明	28
<b>5 多项式一致逼近</b>	<b>32</b>
5.1 Stone–Weierstrass 逼近定理	32
5.2 Müntz–Szász 定理	34
<b>6 Gauss 整数的 <math>-4</math> 次方和</b>	<b>41</b>
6.1 椭圆函数	42
6.2 Weierstrass $\wp$ 函数	43
<b>7 Picard 定理</b>	<b>47</b>
7.1 Picard 小定理	47
7.2 Picard 大定理	49
7.3 整函数的 Fermat 大定理	50
<b>8 等差数列中有无穷多个素数</b>	<b>52</b>
8.1 Riemann $\zeta$ 函数	52
8.2 离散 Fourier 变换	55
8.3 Dirichlet $L$ 函数	56

## 代序

这本小册子记录了一些我在备考今年丘赛分析项目过程中的收获，以及其他有意思的分析问题。由于我此前并不是分析人，又是头一次写超过几页的文章，所以写作中难免有很多不足（比如若干 typo）。就广度而言，大部分内容都属于实变和复变的范畴，但偶尔涉及到一些泛函。就深度而言，我相信本科高年级学生应该很容易看懂。希望读者能够从中找到分析的乐趣。

可以确定的是，这本小册子里没有任何原创内容，大多出自各种教材以及跟其他人的讨论，我只是将这些东西整理起来。由于并非任何正式材料，以及我比较懒，所以没有完整列出参考文献。在这里向那些在写作过程中提供了帮助的人一并表示感谢，包括但不限于迷神、笑姐姐、cyb 酱，这些人是真正的巨佬。此外，感谢妹子提供的封面标题以及猫猫。

陈宇轩

完稿于 2021 年 7 月 1 日

曾打算在本科毕业前对内容进行一次扩充，但因为种种原因未能完成。如今时隔多年再作订正，尽管物是人非，至少数学内容变化不大，仅对格式以及部分证明进行了调整。现在看来，选题过于侧重实分析、一元复分析以及数论方面的应用，忽视了泛函分析和微分方程中的有趣问题。然而再添加新的章节有违写作的初心。还能说些什么呢？保罗·策兰有诗云：“有些东西被吹散/在孩童的拳头里；/有些东西出自我/而无迹可求”。

更新于 2025 年 2 月 21 日

主要的参考文献如下，皆为标准的本科分析学教材：

- [Ev] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Amer. Math. Soc., 1998.
- [Fo] G. B. Folland, *Real analysis*, second edition, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [Gr] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, third edition, Springer, 2014.
- [Ru1] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1976.
- [Ru2] W. Rudin, *Functional analysis*, second edition, McGraw-Hill, 1991.
- [SS] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton Univ. Press, 2003.

# 1 Hardy–Littlewood 极大函数

微积分基本定理包含两方面的内容：一是  $\mathbb{R}$  上的可积函数  $f$  的变上限积分是否可微，以及导函数是否等于  $f$ ；二是 Newton–Leibniz 公式是否成立，即导函数的积分是否等于原函数在两端点的函数值之差。Hardy–Littlewood 极大函数是研究前一个问题的方便工具，本文对极大函数进行一些讨论。为了行文简洁，并不铺陈从极大函数到微积分基本定理的完整过程（尽管这是极大函数最重要的应用），而假设读者已经熟悉这一套路。此外，定理1.1和定理1.2作为经典结果也默认读者知晓，如有需要可以参考任何一本合理的实分析教材（比如 [Fo]）。

设  $x \in \mathbb{R}^n$ ，记开球  $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$ ，用  $m$  表示  $\mathbb{R}^n$  上的 Lebesgue 测度，如果  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数，通常有两种不同的方式定义极大函数  $Mf$ ，本文采用

$$(Mf)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy.$$

另一种定义方式是对所有包含  $x$  的开球（未必以  $x$  为球心）取上界。但无论是最终结论还是证明方法，采用哪种方式进行定义并无太大差异。

由定义可知  $Mf \geq 0$ ，且对任意  $a \geq 0$  而言  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (Mf)(x) > a\}$  都是开集，所以  $Mf$  是非负可测函数。但是，定义并不保证  $Mf$  是否有限，或者至少几乎处处有限。如果  $f$  不是局部  $L^1$  函数，那么  $Mf$  恒等于  $\infty$ 。本文的最后会证明，如果  $f$  是  $L^p(1 \leq p \leq \infty)$  函数，那么  $Mf$  确实是几乎处处有限的。比较平凡的情况是，如果  $f$  是  $L^\infty$  函数，根据定义立刻得到  $|Mf(x)| \leq \|f\|_\infty$ 。而如果  $f$  是  $L^1$  函数，有如下结论：

**定理 1.1.** 设  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ，则对任意  $a > 0$ ，有

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |(Mf)(x)| > a\}) \leq \frac{3^n}{a} \|f\|_1.$$

特别的， $Mf$  几乎处处有限。

这样的性质称为弱  $L^1$ ，后文将给出弱  $L^p$  的定义。届时将引入 Marcinkiewicz 插值定理，进而推出当  $p \in (1, \infty)$  时，如果  $f$  是  $L^p$  函数，那么  $Mf$  也是  $L^p$  函数。特别的，对于  $1 \leq p \leq \infty$  而言， $L^p$  函数的极大函数一定几乎处处有限。

## 1.1 Lebesgue 点

本文的前半部分先来讨论 Lebesgue 点，利用定理1.1可以得到如下结论：

**定理 1.2.** 设  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ，则对几乎所有  $x \in \mathbb{R}^n$ ，都有

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

满足这样性质的  $x$  称为  $f$  的 Lebesgue 点。特别的, 如果  $x$  是 Lebesgue 点, 那么

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x).$$

有三点需要指出: 第一, 此处的  $f$  应该视为一个具体的函数而不是在  $L^1$  空间中的等价类, 因为定义中涉及到了  $f(x)$  的具体取值; 第二,  $x$  是否是  $f$  的 Lebesgue 点只取决于  $f$  在  $x$  附近的情况, 所以其实定理1.2对于局部  $L^1$  函数都成立, 证明方法是对  $f\chi_{B(0, R)}$  使用定理1.2并令  $R \rightarrow \infty$ ; 第三, 在开球  $B(x, r)$  上取平均不是本质的, 可以换成所谓“良好收缩集”。具体来讲, 设  $E_r \subseteq B(x, r)$  是一族集合 (甚至允许  $E_r$  不包含  $x$ ), 且存在一致的常数  $c$  使得  $m(E_r) > cm(B(x, r))$ , 则称  $E_r$  良好收缩到  $x$ 。因为

$$0 \leq \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)| dy \leq \frac{1}{cm(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy,$$

如果  $x$  是  $f$  的 Lebesgue 点, 令  $r \rightarrow 0+$  可知

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

对于  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , 以  $x$  为中心、边长  $2\delta$  的开方体定义为

$$I(x, \delta) := (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times \cdots \times (x_n - \delta, x_n + \delta).$$

因为  $I(x, \delta) \subseteq B(x, \sqrt{n}\delta)$  且  $m(I(x, \delta)) = (2\delta)^n$ , 所以  $I(x, \delta)$  良好收缩到  $x$ 。设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  是 Lebesgue 可测集, 定义  $E$  在  $x$  处的密度为 (如果极限存在的话)

$$d(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{m(E \cap I(x, \delta))}{m(I(x, \delta))} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{m(I(x, \delta))} \int_{I(x, \delta)} \chi_E(x) dx.$$

因为  $\chi_E$  是局部  $L^1$  函数, 根据定理1.2后面的说明, 立即得到结论:

■ **命题 1.3.** 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  是可测集, 则  $E$  中几乎处处密度为 1, 而  $E$  之外几乎处处密度为 0。

命题1.3的直接推论是, 对于  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ , 不存在可测集  $E \subseteq \mathbb{R}$ , 使得对任意区间  $I$  都有

$$\varepsilon m(I) < m(E \cap I) < (1 - \varepsilon)m(I).$$

与之形成鲜明对比的是下面的命题1.4。回忆  $[0, 1]$  中的 Cantor 集  $C$  定义如下: 第一步去掉中心  $1/3$  的开区间  $(1/3, 2/3)$ , 第二步去掉剩余两段闭区间各自中心的  $1/3$  开区间。接下来每一步都去掉剩余的有限个闭区间各自中心  $1/3$ , 最终定义  $C$  是每一步得到的集合之交; 见图1。



图 1: Cantor 集

如果每一步不是要求去掉  $1/3$ ，而是要求去掉占比  $\delta_n > 0$  的部分，那么得到的集合称为胖 Cantor 集，其测度为  $\prod_n (1 - \delta_n)$ ，只要适当选取  $\delta_n$ ，就能让胖 Cantor 集的测度取到  $[0, 1]$  中的任何一个值。通常的 Cantor 集无非是选取  $\delta_n = 1/3$  的特例，从而  $m(C) = 0$ 。今后为了说话方便，总是假设胖 Cantor 集的测度为正。除了测度方面的差异之外，胖 Cantor 集与 Cantor 集的拓扑性质完全一样，可以证明二者是同胚的。

**命题 1.4.** 存在可测集  $E \subseteq \mathbb{R}$  满足  $m(E) < \infty$ ，且对任意区间  $I$  都有  $0 < m(E \cap I) < m(I)$ 。

证明. 先在  $[0, 1]$  内考虑，对任意  $r \in (0, 1)$ ，存在  $[0, 1]$  中的胖 Cantor 集  $C_1$  使得  $m(C_1) \in (0, r)$ 。接下来，考虑  $[0, 1] \setminus C_1$ ，这是可数个开区间的并，可以在每个开区间中添上一个胖 Cantor 集，记新加入的胖 Cantor 集与  $C_1$  之并为  $C_2$ ，可以使得  $m(C_2) \in (0, r)$ 。以此类推，每一步得到的  $C_n$  是在  $C_{n-1}$  的可数个“空隙”之中添上胖 Cantor 集，使得测度仍然小于  $r$ 。最后，令  $C = \bigcup_n C_n$ ，则  $C$  满足  $m(C) \in (0, r]$ ，且对  $[0, 1]$  中的任何开区间  $I$  都有  $0 < m(C \cap I) < m(I)$ 。

最后，对  $n \in \mathbb{Z}$ ，选取一系列正实数  $r_n$  使得  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n < \infty$ 。在  $[n - 1, n]$  中，如上选取  $C^{(n)} \subseteq [n - 1, n]$  使得  $m(C^{(n)}) \in (0, r_n]$ ，则  $E := \bigcup_n C^{(n)}$  满足要求。  $\square$

正测集未必包含非空开集，比如胖 Cantor 集是无处稠密的闭正测集。但观察到 Cantor 集  $C$  与自身相加  $C + C := \{x + y \mid x, y \in C\}$  包含整个区间  $[0, 2]$ ，这启发探讨两个正测集相加是否一定包含开集。该问题的肯定回答可以由如下 Steinhaus 定理得到：

**定理 1.5 (Steinhaus).** 设  $E$  是  $\mathbb{R}^n$  中的 Lebesgue 可测集，且  $m(E) > 0$ ，则

$$E - E := \{x - y \mid x, y \in E\}$$

以 0 为内点。

证明. 取  $\lambda \in (0, 1)$  待定，则  $m(E) > 0$  保证了存在  $x_0 \in E$  的密度为 1，从而存在  $\delta > 0$

$$m(E \cap I(x_0, \delta)) > \lambda m(I(x_0, \delta)) = \lambda (2\delta)^n.$$

如果  $y_0 \in I(0, \delta)$ ，那么  $x_0 + y_0 \in I(x_0, \delta)$ ，由方体的几何含义可知

$$I(x_0 + y_0, \delta) \cap I(x_0, \delta) \geq \delta^n.$$

根据显然的集合包含关系可以得到

$$\begin{aligned} m(E \cap (y_0 + E)) &\geq m(I(x_0, \delta) \cap (y_0 + I(x_0, \delta))) - m(I(x_0, \delta) \setminus E) - m(y_0 + (I(x_0, \delta) \setminus E)) \\ &\geq m(I(x_0, \delta) \cap I(x_0 + y_0, \delta)) - 2m(I(x_0, \delta) \setminus E) \\ &\geq \delta^n - 2 \times (1 - \lambda)m(I(x_0, \delta)) = (1 - 2^{n+1}(1 - \lambda))\delta^n. \end{aligned}$$

取  $\lambda > 1 - 2^{-n-1}$ , 就有  $m(E \cap (y_0 + E)) > 0$ , 从而  $y_0 \in E - E$ 。根据  $y_0 \in I(0, \delta)$  的任意性可知  $I(0, \delta) \subseteq E - E$ , 所以 0 是  $E - E$  的内点。□

如何由 Steinhaus 定理得出两个正测集相加一定包含开集留给读者思考。另一个应用是证明 Cauchy 方程的可测解都是线性函数。所谓 Cauchy 方程是说

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

其中  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的实值函数。用初等方法可以证明, 如果  $f$  在某一点处连续或者在某个开集上有界, 则  $f$  是线性函数, 即存在  $a \in \mathbb{R}$  使得  $f(x) = ax$ 。而如果不给  $f$  做任何限制, 则利用  $\mathbb{R}$  在  $\mathbb{Q}$  上的 Hamel 基容易构造出  $f$  不是线性函数的例子, 其函数图像在平面上一定是稠密的。

**命题 1.6.** 设可测函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , 则存在  $a \in \mathbb{R}$  使得  $f(x) = ax$ 。

证明. 因为  $f$  可测, 所以  $E_n := \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq n\} (n \in \mathbb{N})$  都是可测集。注意到这些  $E_n$  的并是整个  $\mathbb{R}$ , 所以必有某个  $E_n$  的测度为正。根据 Steinhaus 定理,  $E_n - E_n$  包含某个开区间  $(-\delta, \delta)$ 。对任意  $x_0 \in (-\delta, \delta)$ , 存在  $y_0, z_0 \in E$  使得  $x_0 = y_0 - z_0$ , 所以

$$|f(x_0)| = |f(y_0) - f(z_0)| \leq |f(y_0)| + |f(z_0)| \leq 2n.$$

这就证明了  $f$  在 0 附近有界, 所以  $f$  是线性函数。□

顺带一提乘法版本的 Cauchy 方程。回忆 Banach 代数是指带有 (未必交换的) 乘法的 Banach 空间  $X$ , 满足乘法与线性运算相容, 对任意  $x, y \in X$  都有  $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ , 并且存在乘法单位元  $e$ 。常见的 Banach 代数除了  $\mathbb{C}$  之外, 还有 Banach 空间  $X$  上的线性算子  $L(X)$  (连同算子范数)。特别的,  $L(\mathbb{R}^n) = M(n, \mathbb{R})$  (全体  $n$  阶方阵) 以及矩阵指数函数在高阶线性常微分方程中有着重要地位。指数函数显然可以推广到一般的 Banach 代数中。另外还会用到取值于 Banach 空间的积分 (参见 [Ru2]), 尤其是连续函数可积以及积分与线性算子可交换。

**命题 1.7.** 设  $X$  是 Banach 代数。若函数  $f: [0, \infty) \rightarrow X$  连续, 满足  $f(0) = e$  和

$$f(s + t) = f(s)f(t), \quad \forall s, t \geq 0.$$

则存在唯一的  $A \in X$  使得  $f(t) = e^{tA}$ 。

证明. 唯一性是由  $A = \frac{d}{dt} e^{tA} \big|_{t=0}$ , 下证存在性。因为  $f$  连续且  $f(0) = e$ , 对于充分小的  $\delta > 0$ ,

$$M := \delta^{-1} \int_0^\delta f(s) ds$$

可逆 (因为  $\|M - e\| < 1$ )。利用方程可以将  $f(t)$  改写为

$$f(t) = M^{-1} M f(t) = \delta^{-1} M^{-1} \int_0^\delta f(t + s) ds = \delta^{-1} M^{-1} \int_t^{t+\delta} f(s) ds.$$

这就说明  $f(t)$  是可导的, 并且

$$f'(t) = \delta^{-1} M^{-1}(f(t+\delta) - f(t)) = \delta^{-1} M^{-1}(f(\delta) - e)f(t).$$

考虑辅助函数

$$F(t) = e^{-\delta^{-1} M^{-1}(f(\delta) - e)t} f(t).$$

则  $F'(t) = 0$ , 所以  $F(t) = F(0) = e$ . 换言之, 令  $A = \delta^{-1} M^{-1}(f(\delta) - e)$ , 则有  $f(t) = e^{tA}$ .  $\square$

接下来给出命题1.3的一个妙用. 设  $F$  是  $\mathbb{R}^n$  中的非空点集, 定义一点  $x$  到  $F$  的距离为

$$\text{dist}(x, F) = \inf\{|x - y| \mid y \in F\}.$$

从直观上来看, 到  $F$  的距离等于  $r$  的点组成的是一张“薄膜”, 所以测度应该是 0, 命题1.8表明这个直觉是正确的. 因为  $x$  到  $F$  的距离等于到闭包  $\bar{F}$  的距离, 因此只需考虑闭集的情况:

**命题 1.8.** 设  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  是非空闭集, 则对任意  $r > 0$ , 都有  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, F) = r\}$  是零测集.

证明. 易见  $|\text{dist}(x_1, F) - \text{dist}(x_2, F)| \leq |x_1 - x_2|$ , 所以  $\text{dist}(x, F)$  关于  $x$  是连续函数, 于是  $E := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, F) < r\}$  是可测集. 如果  $x \in \mathbb{R}^n$  满足  $\text{dist}(x, F) = r$ , 因为  $F$  是闭集, 所以  $x \notin F$ , 且存在  $y \in F$  使得  $|x - y| = r$ . 如图2所示, 阴影部分到  $F$  的距离小于  $r$ , 且当  $\delta \rightarrow 0+$  时阴影占据了  $B(x, \delta)$  的  $1/2$ , 所以  $E$  在  $x$  处的密度至少应该是  $1/2$ .

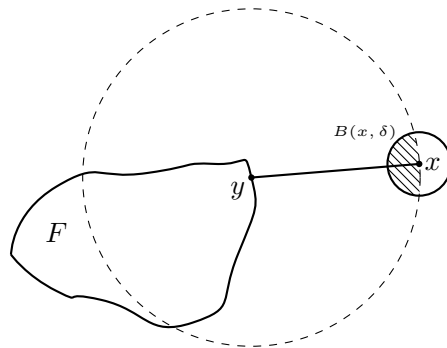


图 2: 阴影部分到  $F$  的距离小于  $r$

然而在  $E$  之外几乎处处密度为 0, 所以  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, F) = r\}$  是零测集.  $\square$

## 1.2 Marcinkiewicz 插值定理

本文的后半部分借助 Marcinkiewicz 插值定理得到极大函数的  $L^p$  估计. 首先引进分布函数和弱  $L^p$  的概念. 对于  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数  $f$ , 定义分布函数  $d_f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$  为

$$d_f(a) := m(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > a\}).$$



显然  $d_f$  单调递减, 所以是可测函数。分布函数的重要性在于可以处理  $L^p$  范数, 从而将对  $L^p$  范数的估计转化为对分布函数的估计:

**引理 1.9.** 设  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数, 则对于  $1 \leq p < \infty$ , 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty a^{p-1} d_f(a) da.$$

证明. 记  $E_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > a\}$ , 则

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= p \int_0^\infty a^{p-1} d_f(a) da = p \int_0^\infty a^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_a}(x) dx da \\ &= p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} a^{p-1} da dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \text{LHS}. \end{aligned}$$

注意积分换序用到了 Fubini 定理, 因为是非负函数所以不需要关心可积性。  $\square$

引理 1.9 的形式其实很简单, 令  $\varphi(x) = x^p (x \in [0, \infty))$ , 则左边是  $\varphi \circ |f|$  的积分, 右边是  $\varphi'(a) d_f(a)$  的积分。一般的, 只要  $\varphi$  是  $[0, \infty)$  到  $[0, \infty)$  的单调递增函数, 满足  $\varphi(0) = 0$ , 且在任意有限区间上绝对连续, 则采用相同的方法可以证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ |f| dm = \int_0^\infty \varphi'(a) d_f(a) da.$$

引进弱  $L^p$  这一概念的动机是 Chebyshev 不等式, 即如果  $f \in L^p$ , 那么  $\|f\|_p^p \geq a^p d_f(a)$ 。设  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数, 定义弱  $L^p (1 \leq p < \infty)$  拟范数为

$$|f|_{p,\infty} := \inf\{C > 0 \mid d_f(a) \leq C^p/a^p, \forall a > 0\}.$$

拟范数与范数的唯一区别在于三角形不等式不成立, 但是存在一致的常数  $M > 0$  使得

$$|f + g|_{p,\infty} \leq M(|f|_{p,\infty} + |g|_{p,\infty}).$$

具体来讲, 注意到  $|f + g| > a$  的必要条件是  $|f| > a/2$  或  $|g| > a/2$ , 所以

$$d_{f+g}(a) \leq d_f(a/2) + d_g(a/2) \leq 2^p(|f|_{p,\infty}^p + |g|_{p,\infty}^p)/a^p.$$

故

$$|f + g|_{p,\infty} \leq 2(|f|_{p,\infty}^p + |g|_{p,\infty}^p)^{1/p} \leq 2(|f|_{p,\infty} + |g|_{p,\infty}).$$

称  $L^p$  拟范数有限的函数为弱  $L^p$  函数, 全体弱  $L^p$  函数在商掉几乎处处相等的意义下组成的空间称为弱  $L^p$  空间, 记为  $L^{p,\infty}$ 。为了方便, 补充定义  $L^{\infty,\infty}$  就是通常的  $L^\infty$  空间。Chebyshev 不等式表明  $|f|_{p,\infty} \leq \|f\|_p$ , 所以  $L^p$  函数都是弱  $L^p$  函数。由此还可证明含入映射

$L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$  连续, 前提是要理解如何从拟范数定义拓扑, 本文不想涉及拓扑线性空间的内容。存在弱  $L^1$  但是不  $L^1$  的函数, 比如  $f(x) = 1/x (x > 0)$  不可积且  $d_f(a) = 1/a$ 。

万事俱备, 下面证明 Marcinkiewicz 插值定理, 这是插值理论的实方法。简单来说, 插值的思想是将  $L^p$  函数拆成  $L^q$  函数与  $L^r$  函数之和, 用  $L^q$  与  $L^r$  的信息来给出  $L^p$  的信息。比如设  $1 \leq p < q < r \leq \infty$ , 任取  $a > 0$ , 可以将  $L^p$  函数  $f$  拆成  $g + h$ , 其中

$$g(x) := \begin{cases} 0 & |f(x)| \leq a, \\ f(x) & |f(x)| > a. \end{cases} \quad h(x) := \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq a, \\ 0 & |f(x)| > a. \end{cases}$$

易见  $\|g\|_q \leq a^{1-p/q} \|f\|_p^{p/q}$  且  $\|h\|_r \leq a^{1-p/r} \|f\|_p^{p/r}$  ( $r = \infty$  的情况按极限理解), 所以  $g \in L^q$  且  $h \in L^r$ 。记  $L^q + L^r := \{g + h \mid g \in L^q, h \in L^r\}$ , 则  $L^p$  可以嵌入  $L^q + L^r$ 。

**定理 1.10** (Marcinkiewicz 插值定理). 设  $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ , 映射  $T$  将  $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$  中的函数映成  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数, 满足

$$|(T(f_1 + f_2))(x)| \leq |(Tf_1)(x)| + |(Tf_2)(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

如果  $T(L^{p_0}) \subseteq L^{p_0,\infty}, T(L^{p_1}) \subseteq L^{p_1,\infty}$ , 且存在  $A_0, A_1 > 0$ , 使得

$$\|T(f)\|_{p_0,\infty} \leq A_0 \|f\|_{p_0}, \quad \forall f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n),$$

$$\|T(f)\|_{p_1,\infty} \leq A_1 \|f\|_{p_1}, \quad \forall f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n),$$

则对于任意  $p_0 < p < p_1$  和  $f \in L^p$ , 都有  $Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , 且存在常数  $A > 0$  使得

$$\|Tf\|_p \leq A \|f\|_p.$$

事实上,  $A$  可以取为

$$A := 2 \left( \frac{p}{p - p_0} + \frac{p}{p_1 - p} \right)^{1/p} A_0^{\frac{1/p - 1/p_1}{1/p_0 - 1/p_1}} A_1^{\frac{1/p_0 - 1/p}{1/p_0 - 1/p_1}}.$$

证明. 首先处理  $p_1 < \infty$  的情况。设  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  且  $a > 0$ , 引进待定参数  $\delta > 0$ , 将  $f$  拆成两个函数之和  $g + h$ , 其中

$$g(x) := \begin{cases} 0 & |f(x)| \leq \delta a, \\ f(x) & |f(x)| > \delta a. \end{cases} \quad h(x) := \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq \delta a, \\ 0 & |f(x)| > \delta a. \end{cases}$$

如之前所说,  $g \in L^{p_0}$  且  $h \in L^{p_1}$ 。因为

$$|(Tf)(x)| \leq |(Tg)(x)| + |(Th)(x)|,$$

所以

$$\begin{aligned} d_{Tf}(a) &\leq d_{Tg}(a/2) + d_{Th}(a/2) \leq \frac{|g|_{p_0, \infty}^{p_0}}{(a/2)^{p_0}} + \frac{|h|_{p_1, \infty}^{p_1}}{(a/2)^{p_1}} \leq \frac{(A_0 \|g\|_{p_0})^{p_0}}{(a/2)^{p_0}} + \frac{(A_1 \|h\|_{p_1})^{p_1}}{(a/2)^{p_1}} \\ &= \frac{(2A_0)^{p_0}}{a^{p_0}} \int_{|f| > \delta a} |f(x)|^{p_0} dx + \frac{(2A_1)^{p_0}}{a^{p_1}} \int_{|f| \leq \delta a} |f(x)|^{p_1} dx. \end{aligned}$$

将以上对  $d_{Tf}(a)$  的估计代入引理1.9可知

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\leq p(2A_0)^{p_0} \int_0^\infty a^{p-p_0-1} \int_{|f| > \delta a} |f(x)|^{p_0} dx da \\ &\quad + p(2A_1)^{p_1} \int_0^\infty a^{p-p_1-1} \int_{|f| \leq \delta a} |f(x)|^{p_1} dx da. \end{aligned}$$

交换求和顺序，前一项里先对  $a^{p-p_0-1}$  从 0 到  $|f(x)|/\delta$  积分，因为  $p_0 < p$ ，所以积分收敛；后一项里先对  $a^{p-p_1-1}$  从  $|f(x)|/\delta$  到  $\infty$  积分，因为  $p_1 > p$ ，所以积分同样收敛，计算得

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\leq \frac{p(2A_0)^{p_0}}{p-p_0} \frac{1}{\delta^{p-p_0}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_0} |f(x)|^{p-p_0} dx \\ &\quad + \frac{p(2A_1)^{p_1}}{p_1-p} \delta^{p_1-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1} |f(x)|^{p-p_1} dx \\ &= p \left( \frac{(2A_0)^{p_0}}{p-p_0} \frac{1}{\delta^{p-p_0}} + \frac{(2A_1)^{p_1}}{p_1-p} \delta^{p_1-p} \right) \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

注意  $\|f\|_p^p$  前面的系数与  $f$  无关，所以这正是定理结论所需的形式。可以通过调整  $\delta$  让系数尽可能小，利用 Young 不等式可以看出系数在

$$(2A_0)^{p_0} \frac{1}{\delta^{p-p_0}} = (2A_1)^{p_1} \delta^{p_1-p}$$

时取到最小值，简单计算可知这个最小值正好是定理最后给出的  $A$  的  $p$  次方。

下面考虑  $p_1 = \infty$  的情形。仍然按照之前的方式定义  $g, h$ ，则根据条件可知

$$\|Th\|_\infty \leq A_1 \|h\|_\infty \leq A_1 \delta \alpha,$$

取  $\delta = 1/(2A_1)$ ，则  $\|Th\|_\infty \leq \alpha/2$ ，即  $d_{Th}(a/2) = 0$ ，所以

$$d_{Tf}(a) \leq d_{Tg}(a/2) + d_{Th}(a/2) \leq \frac{(2A_0)^{p_0}}{a^{p_0}} \int_{|f| > \delta a} |f(x)|^{p_0} dx.$$

跟之前一样，可以得到

$$\|Tf\|_p^p \leq \frac{p(2A_0)^{p_0}}{p-p_0} \frac{1}{\delta^{p-p_0}} \|f\|_p^p = 2^p \frac{p}{p-p_0} A_0^{p_0} A_1^{p-p_0}.$$

这正好是  $p_1 = \infty$  情况下的系数  $A$  的  $p$  次方。 □

实际上, 引理1.9和定理1.10的证明都跟  $\mathbb{R}^n$  毫无关系, 都只用到了 Fubini 定理对积分换序, 因此将  $\mathbb{R}^n$  换成一般的  $\sigma$ -有限测度空间, 结论依然成立。

回到极大函数的问题上来, 最后这个定理不过是 Marcinkiewicz 插值定理的推论:

**定理 1.11** (Hardy–Littlewood). 设  $1 < p < \infty$  且  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , 则  $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , 且

$$\|Mf\|_p \leq 2 \left( \frac{p}{p-1} \right)^{1/p} 3^{n/p} \|f\|_p.$$

证明. 之前已经说过  $f \mapsto Mf$  将可测函数映成非负可测函数, 且根据定义可知

$$(M(f+g))(x) \leq (Mf)(x) + (Mg)(x).$$

将  $M$  限制在  $L^1 + L^\infty$  上, 定理1.1表明对  $f \in L^1$  有

$$\|Mf\|_{1,\infty} \leq 3^n \|f\|_1.$$

平凡观察可知对  $f \in L^\infty$  有

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

所以 Marcinkiewicz 插值定理的条件都已经满足, 将数据代入就得到结论。  $\square$

应该注意的是,  $L^1$  函数的极大函数通常只是弱  $L^1$  而不是真正的  $L^1$  函数。事实上, 如果  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数且  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx > 0$ , 那么存在  $R > 0$  使得

$$c := \int_{B(0,R)} |f(x)| dx > 0.$$

对于任意  $x \in \mathbb{R}$ , 因为  $B(0,R) \subseteq B(x, R+|x|)$ , 所以

$$\begin{aligned} (Mf)(x) &\geq \frac{1}{m(B(x, R+|x|))} \int_{B(x, R+|x|)} |f(y)| dy \\ &\geq \frac{c}{m(B(x, R+|x|))} = \frac{c}{m(B(0,1))} \frac{1}{(R+|x|)^n}. \end{aligned}$$

后者在  $\mathbb{R}^n$  上积分发散。所以除非几乎处处为 0, 任何可测函数的极大函数都不可积。

## 2 Hadamard 三线定理

对于平面有界连通区域  $\Omega$  上的全纯函数  $f$ ，如果  $f$  还在闭包  $\bar{\Omega}$  上连续，那么就有强极值原理成立，即  $f$  的最大值只能在边界上取到，且如果在内点处取到，则  $f$  是常值函数。作为推论，如果  $f$  在  $\partial\Omega$  上满足  $|f(z)| \leq 1$ ，则  $f$  在整个  $\Omega$  上都满足  $|f(z)| \leq 1$ 。

但这样的事对于无界区域不再成立。比如考虑水平方向的带状区域

$$\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Im}(z) < \pi/2\}$$

上的全纯函数  $f(z) = e^{e^z}$ ，则在边界上  $\operatorname{Im}(z) = \pm\pi/2$ ，从而  $e^z$  是纯虚数，所以  $|f(z)|$  在边界上等于 1。然而  $f(z)$  在实轴上显然是无界的。

反例之所以存在，某种程度上是因为  $f$  的增长速度太快。[Ru1] 中介绍了所谓 Phragmen–Lindelöf 方法，在对  $f$  的增长率提出限制的条件下，通过构造辅助函数（偏微分方程中称为“闸函数”），将极值原理推广到带状区域上。特别的，可以得到 Hadamard 三线定理，进而证明 Riesz–Thorin 插值定理并应用于研究 Fourier 变换的  $L^p$  有界性。

### 2.1 Phragmen–Lindelöf 方法

先给出引言中的反例的另一面：只要  $f(x)$  的增长不超过  $e^{e^x}$ ，极值原理就依然成立。

**定理 2.1.** 记  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Im}(z) < \pi/2\}$ 。设函数  $f$  在  $\Omega$  上全纯且在  $\bar{\Omega}$  上连续，满足存在常数  $0 < \alpha < 1$  和  $A > 0$  使得

$$|f(z)| < e^{Ae^{\alpha|\operatorname{Re}(z)|}}, \quad \forall z \in \bar{\Omega}$$

并且对任意  $x \in \mathbb{R}$  都有  $|f(x \pm i\pi/2)| \leq 1$ ，则对任意  $z \in \Omega$  都有  $|f(z)| \leq 1$ 。

证明. 取定常数  $\beta$  使得  $\alpha < \beta < 1$ 。对任意  $\varepsilon > 0$ ，引进辅助函数

$$\varphi(z) = f(z)e^{-\varepsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z})}.$$

显然  $\varphi(z)$  全纯。设  $z = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$ ，因为

$$\operatorname{Re}(e^{\beta z} + e^{-\beta z}) = (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \cos \beta y \geq \delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x}),$$

其中  $\delta := \cos(\beta\pi/2) > 0$ ，所以  $|\varphi(z)| \leq |f(z)|$ ，从而在  $\partial\Omega$  上有  $|\varphi(z)| \leq 1$ 。

根据条件，对任意  $z \in \bar{\Omega}$  有

$$|\varphi(z)| \leq e^{Ae^{\alpha|x|} - \varepsilon\delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})}.$$

因为  $\beta > \alpha$ , 所以存在  $M > 0$ , 使得当  $x \geq M$  时  $|\varphi(z)| \leq 1$ . 将  $\Omega$  分成  $\Omega_1, \Omega_2$  两部分, 其中  $\Omega_1 := \{z \in \Omega \mid |x| < M\}$  是有界开集而  $\Omega_2 := \Omega \setminus \Omega_1$ . 在  $\Omega_1$  的边界上要么  $z \in \partial\Omega$ , 要么  $x = M$ , 均导致  $|\varphi(z)| \leq 1$ , 根据强极值原理可知在  $\Omega_1$  上  $|\varphi(z)| \leq 1$ . 此外, 在  $\Omega_2$  上  $x \geq M$ , 所以  $|\varphi(z)| \leq 1$ . 综上, 对一切  $z \in \bar{\Omega}$  都有  $|\varphi(z)| \leq 1$ . 令  $\varepsilon \rightarrow 0$  可得  $|f(z)| \leq 1$ .  $\square$

下面用类似的方法给出 Hadamard 三线定理, 条件中的有界性至关重要. 为了说话方便, 今后都考虑竖直方向的带状区域  $\{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re}(z) < b\}$ .

**定理 2.2** (Hadamard 三线定理). 记  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re}(z) < b\}$ . 设函数  $f$  在  $\Omega$  上全纯且在  $\bar{\Omega}$  上有界连续. 对于  $a \leq x \leq b$ , 记

$$M_x = \sup_{\operatorname{Re}(z)=x} |f(z)|.$$

则对任意  $a < x < b$  都有

$$M_x \leq M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}.$$

证明. 如果  $M_a = 0$  或  $M_b = 0$ , 利用 Schwarz 反射原理可将  $f$  全纯延拓到对称的区域上, 从而  $f$  只能恒等于 0, 结论成立. 下面考虑  $M_a, M_b > 0$  的情况, 先对命题进行一些简化. 首先, 通过平移和伸缩可以不妨设  $a = 0$  且  $b = 1$ . 其次, 断言只需证明  $M_0 = M_1 = 1$  的情况, 此时目标变为  $|f(z)| \leq 1$ . 事实上, 考虑 (对于非负实数  $A$  而言,  $A^z := e^{z \ln A}$  是全纯函数)

$$g(z) := f(z) M_0^{-(1-z)} M_1^{-z}.$$

$g(z)$  在  $\Omega$  上全纯且在  $\bar{\Omega}$  上连续, 取绝对值得到

$$|g(z)| = |f(z)| M_0^{-(1-\operatorname{Re}(z))} M_1^{-\operatorname{Re}(z)}.$$

由此可见  $g$  在  $\bar{\Omega}$  上有界, 且在  $\operatorname{Re}(z) = 0$  和  $\operatorname{Re}(z) = 1$  上的模长上确界都是 1. 只要能证明  $|g(z)| \leq 1$ , 代回到  $f$  的表达式就得到欲证的结论.

下面来证明  $M_0 = M_1 = 1$  的情况. 对任意  $\varepsilon > 0$ , 引进辅助函数

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{1 + \varepsilon z}.$$

设  $|f(z)|$  在  $\Omega$  上有上界  $M$ . 因为  $\operatorname{Re}(1 + \varepsilon z) \geq 1$ , 所以  $\varphi$  在  $\Omega$  上全纯且在  $\bar{\Omega}$  上有界连续. 当  $\operatorname{Im}(z) \geq M/\varepsilon$  时, 因为  $\operatorname{Im}(1 + \varepsilon z) \geq M$ , 所以  $|\varphi(z)| \leq 1$ . 将  $\Omega$  分成  $\Omega_1 = \{z \in \Omega \mid \operatorname{Im}(z) < M\}$  和  $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$  两部分, 则在  $\Omega_2$  上  $|\varphi(z)| \leq 1$ . 而在有界开集  $\Omega_1$  的边界上  $|\varphi(z)| \leq 1$ , 所以在  $\Omega_1$  上  $|\varphi(z)| \leq 1$ . 于是  $|\varphi(z)| \leq 1$  对一切  $z \in \bar{\Omega}$  成立, 令  $\varepsilon \rightarrow 0$  可知  $|f(z)| \leq 1$ .  $\square$

与 Hadamard 三线定理类似的还有 Hadamard 三圆定理, 其关心的对象是圆环  $r < |z| < R$  ( $0 < r < R$ ) 上的全纯函数. 因为是有界闭区域, 所以有界性自然保证. 三线定理与三圆定理在形式上非常相似, 但辅助函数的构造不尽相同:

**定理 2.3** (Hadamard 三圆定理). 设  $0 < r_1 < r_2$ , 函数  $f(z)$  在圆环  $r_1 < |z| < r_2$  上全纯, 且在  $r_1 \leq |z| \leq r_2$  上连续. 对于  $r_1 \leq r \leq r_2$ , 记

$$M_r := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

则对任意  $r_1 < r < r_2$  都有

$$M_r \leq M_{r_1}^{\frac{\ln r_2 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1}} M_{r_2}^{\frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}}.$$

证明.  $M_{r_1} = 0$  或  $M_{r_2} = 0$  的情况同样可以由 Schwarz 反射原理解决, 下面考虑二者都大于 0 的情况. 引进待定参数  $a$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 记开集

$$U_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2, |f(z)| > \varepsilon\}.$$

则  $\varphi(z) := a \ln |z| + \ln |f(z)|$  是  $U_\varepsilon$  上的调和函数 (这是因为  $\ln |z|$  和  $\ln |f(z)|$  分别是  $\ln z$  和  $\ln f(z)$  的实部, 二者都是  $U_\varepsilon$  上的全纯函数). 在  $U_\varepsilon$  的边界上, 要么  $\varphi(z) = a \ln |z| + \ln \varepsilon$ , 要么  $|z| = r_1$  且  $\varphi(z) \leq a \ln r_1 + \ln M_{r_1}$ , 要么  $|z| = r_2$  且  $\varphi(z) \leq a \ln r_2 + \ln M_{r_2}$ . 选取  $a$  使得

$$a \ln r_1 + \ln M_{r_1} = a \ln r_2 + \ln M_{r_2} =: C,$$

即

$$a = -\frac{\ln M_{r_2} - \ln M_{r_1}}{\ln r_2 - \ln r_1},$$

此时

$$C = \frac{\ln r_2 \ln M_{r_1} - \ln r_1 \ln M_{r_2}}{\ln r_2 - \ln r_1}.$$

只要  $\varepsilon$  充分小, 就能让  $a \ln |z| + \ln \varepsilon < C$  对一切  $r_1 < |z| < r_2$  成立, 同时  $\varepsilon$  不超过  $M_{r_1}, M_{r_2}$  中较小者. 于是在  $U_\varepsilon$  的边界上有  $\varphi(z) \leq C$ , 根据全纯函数的强极值原理可知

$$a \ln |z| + \ln |f(z)| \leq C, \quad \forall z \in U_\varepsilon.$$

即

$$|f(z)| \leq M_{r_1}^{\frac{\ln r_2 - \ln |z|}{\ln r_2 - \ln r_1}} M_{r_2}^{\frac{\ln |z| - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}}, \quad \forall z \in U_\varepsilon.$$

而在  $U_\varepsilon$  之外, 因为  $\varepsilon$  已经取为比右边更小, 所以上式也成立, 这就完成了证明.  $\square$

上面的证明写得比较复杂但道理很简单, 因为  $a \ln |z| + \ln |f(z)|$  在  $f$  的零点之外是调和函数, 且在  $f$  的零点附近趋于  $-\infty$ , 所以最大值一定在边界  $|z| = r_1$  和  $|z| = r_2$  上取到, 适当选取  $a$  使得在  $|z| = r_1$  和  $|z| = r_2$  上最大值相等, 整理即得要证的结论.

运用这一方法可以讨论圆环之间的解析同构. 显然, 任何一个圆环  $r < |z| < R$  ( $0 < r < R$ ) 都解析同构于  $1 < |z| < R/r$ . 直观来看, 对于不同的  $R/r$ , 圆环  $1 < |z| < R/r$  之间不会有解析同构, 所以半径比  $R/r$  完全分类了不同的圆环, 严格证明如下:

**命题 2.4.** 设  $0 < r_i < R_i (i = 1, 2)$ , 则圆环  $r_1 < |z| < R_1$  与  $r_2 < |z| < R_2$  解析同构当且仅当半径比相等, 即  $R_1/r_1 = R_2/r_2$ 。

证明. 充分性是显然的, 下证必要性, 首先讨论边界性质. 设  $f$  是  $r_1 < |z| < R_1$  到  $r_2 < |z| < R_2$  的解析同构, 容易看出当  $z$  趋于边界时  $|f(z)|$  趋于  $r_2$  或者  $R_2$ 。记  $K$  是以原点为圆心、半径为  $\sqrt{r_2 R_2}$  的圆, 则  $f^{-1}(K)$  是紧集, 所以存在  $\varepsilon > 0$  使得  $r_1 < |z| < r_1 + \varepsilon$  的像与  $K$  不交, 又因为这个像是连通集, 所以只能包含在  $r_2 < |z| < \sqrt{r_2 R_2}$  或  $\sqrt{r_2 R_2} < |z| < R_2$  里, 从而当  $z$  趋于  $|z| = r_1$  这条边界时,  $|f(z)|$  收敛到  $r_2$  还是  $R_2$  不取决于  $z$ 。可以不妨设当  $z$  趋于  $|z| = r_1$  时  $|f(z)|$  趋于  $r_2$ , 否则用  $r_2 R_2 / f$  代替  $f$  进行讨论。因为  $K$  将圆环  $r_2 < |z| < R_2$  分成两个连通分支, 所以  $f^{-1}(K)$  也将  $r_1 < |z| < R_1$  分成两个连通分支, 既然  $z$  趋于  $|z| = r_1$  这条边界时  $|f(z)| \rightarrow r_2$ , 那么当  $z$  趋于  $|z| = R_1$  这条边界时只能  $|f(z)| \rightarrow R_2$ 。

有了以上准备工作问题就非常简单了, 和定理 3 的证明一样, 考虑

$$\varphi(z) := a \ln |z| - \ln |f(z)|, \quad \text{其中 } a = \frac{\ln R_2 - \ln r_2}{\ln R_1 - \ln r_2}.$$

因为  $f(z) \neq 0$ , 所以  $\varphi(z)$  是调和函数。当  $|z| = r_1$  或  $R_1$  时

$$\varphi(z) = \frac{\ln r_1 \ln R_2 - \ln r_2 \ln R_1}{\ln R_1 - \ln r_1}.$$

根据调和函数的强极值原理, 既然在边界上是定值, 所以  $\varphi$  只能是常值函数。对  $z$  求导可知

$$0 = \frac{\partial(2\varphi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(a \ln(z\bar{z}) - \ln(f(z)\bar{f}(z))) = \frac{a}{z} - \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

两边沿着圆周  $|z| = \sqrt{r_1 R_1}$  积分, 根据幅角原理,  $f'/f$  积分是  $2\pi i$  的整数倍, 所以  $a$  必须是整数, 于是上式表明全纯函数  $f(z)/z^a$  的导函数是 0, 从而  $f(z) = cz^a (c \in \mathbb{C})$ 。结合  $f$  是单射可知  $a = 1$ , 回顾  $a$  的定义得到  $R_1/r_1 = R_2/r_2$ 。□

从上面的证明过程中还可以看出, 圆环  $r < |z| < R (0 < r < R)$  到自身的解析同构只有两类, 一类是旋转  $z \mapsto cz (c \in \mathbb{C}, |c| = 1)$ , 另一类是旋转复合上反演  $z \mapsto crR/z$ 。

## 2.2 Riesz–Thorin 插值定理

下面给出 Hadamard 三线定理最重要的应用, 这是插值理论的复方法。回忆测度空间上的有限简单函数是指支撑在有限测度集上的简单函数。特别的, 有限简单函数都是  $L^p$  函数。

**定理 2.5** (Riesz–Thorin 插值定理). 设  $(X, \mu), (Y, \mu)$  是  $\sigma$ -有限的测度空间, 线性映射  $T$  将  $X$  上的有限简单函数映成  $Y$  上的可测函数。设  $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$  且  $q_0, q_1$  不同时等于  $\infty$ ,



如果存在  $M_0, M_1 > 0$ , 使得对  $X$  上任意有限简单函数  $f$  有

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}, \quad \|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}.$$

则对任意  $0 < \theta < 1$  和  $X$  上任意有限简单函数  $f$ , 有

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p,$$

其中

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

作为推论, 若  $p < \infty$ , 则  $T$  可延拓为  $L^p(X, \mu)$  到  $L^q(Y, \nu)$  的有界线性映射, 且  $\|T\| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$ .

证明. 设有限简单函数

$$f = \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k},$$

其中  $a_k > 0$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  且  $A_k$  是  $X$  中两两不交的有限测度集. 根据条件可知  $1 \leq q < \infty$ , 对于  $\sigma$ -有限的测度空间而言,  $L^q$  的对偶空间是  $L^{q'}$  (其中  $q'$  代表  $q$  的共轭指标, 即  $1/q + 1/q' = 1$ ), 并且有限简单函数在  $L^{q'}$  中稠密, 所以

$$\|Tf\|_q = \sup_g \left| \int_Y (Tf)(y) g(y) d\nu(y) \right|,$$

其中  $g$  取遍  $Y$  上所有满足  $\|g\|_{q'} = 1$  的有限简单函数. 设

$$g = \sum_{j=1}^n b_j e^{i\beta_j} \chi_{B_j},$$

其中  $b_j > 0$ ,  $\beta_j \in \mathbb{R}$  且  $B_j$  是  $Y$  中两两不交的有限测度集. 令

$$P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1}z, \quad Q(z) = \frac{q'}{q'_0}(1-z) + \frac{q'}{q'_1}z.$$

在  $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$  的闭包  $\bar{\Omega}$  上定义

$$f_z = \sum_{k=1}^m a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}, \quad g_z = \sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{B_j},$$

则  $f_\theta = f$ ,  $g_\theta = g$ . 令

$$F(z) = \int_Y T(f_z)(y) g_z(y) d\nu(y),$$

因为  $T$  是线性映射, 展开可知

$$F(z) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int_Y T(\chi_{A_k})(y) \chi_{B_j}(y) d\nu(y).$$

这些积分都是与  $z$  无关的常数, 所以  $F(z)$  是  $\Omega$  上全纯且在  $\bar{\Omega}$  上有界的连续函数。于是可以使用 Hadamard 三线定理, 前提是求出  $F$  在  $\operatorname{Re}(z) = 0$  和  $\operatorname{Re}(z) = 1$  时的上界。

首先考虑直线  $\operatorname{Re}(z) = 0$ , 设  $z = it (t \in \mathbb{R})$ 。如果  $p_0 < \infty$ , 则

$$\|f_{it}\|_{p_0}^{p_0} = \sum_{k=1}^m (|a_k|^{p/p_0})^{p_0} \chi_{A_k} = \|f\|_p^p,$$

所以

$$\|f_{it}\|_{p_0} = \|f\|_p^{p/p_0}.$$

简单验证可知, 这件事对于  $p_0 = \infty$  的情况也成立。同理可得

$$\|g_{it}\|_{q'_0} = \|g\|_{q'}^{q'/q'_0} = 1,$$

即使对  $q'_0 = \infty$  也成立。利用 Hölder 不等式以及条件可知

$$|F(it)| \leq \|Tf_{it}\|_{q_0} \|g_{it}\|_{q'_0} \leq M_0 \|f_{it}\|_{p_0} = M_0 \|f\|_p^{p/p_0}.$$

下面考虑直线  $\operatorname{Re}(z) = 1$ , 设  $z = 1 + it (t \in \mathbb{R})$ 。同上面的方法可证

$$\|f_{1+it}\|_{p_1} = \|f\|_p^{p/p_1}, \quad \|g_{1+it}\|_{q'_1} = \|g\|_{q'}^{q'/q'_1} = 1,$$

所以

$$|F(1+it)| \leq \|Tf_{1+it}\|_{q_1} \|g_{1+it}\|_{q'_1} \leq M_1 \|f_{1+it}\|_{p_1} = M_1 \|f\|_p^{p/p_1}.$$

综上, 根据 Hadamard 三线定理可知

$$\left| \int_Y (Tf)(y) g(y) d\nu(y) \right| = |F(\theta)| \leq (M_0 \|f\|_p^{p/p_0})^{1-\theta} (M_1 \|f\|_p^{p/p_1})^\theta = M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p.$$

对  $Y$  上所有满足  $\|g\|_{q'} = 1$  的有限简单函数  $g$  取上确界就得到  $\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p$ 。□

利用 Riesz–Thorin 定理可以得到关于卷积的 Young 不等式:

**定理 2.6** (Young 不等式). 设  $1 \leq p, q \leq \infty$  且  $1/p + 1/q \geq 1$ , 由此唯一确定了  $1 \leq r \leq \infty$  使得  $1 + 1/r = 1/p + 1/q$ 。如果  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  且  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , 则  $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$  且  $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ 。

证明. 固定  $p$  和  $f$ , 则  $q = 1$  和  $q = p'$  的情况是熟知的。一般的, 由  $1/p + 1/q \geq 1$  可知  $1 \leq q \leq p'$ , 代入 Riesz–Thorin 定理得到的  $r$  正好是  $1/r + 1 = 1/p + 1/q$ , 细节留给读者。□

回忆 Fourier 系数的定义, 设  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ , 则

$$\hat{f}(n) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

可以将  $\hat{f}$  看成以  $\mathbb{Z}$  到  $\mathbb{C}$  的函数, 其中  $\mathbb{Z}$  取离散拓扑和计数度量。

因为对于有限区间而言  $L^p(1 \leq p \leq \infty)$  包含在  $L^1$  中, 且  $|e^{-inx}| \leq 1$ , 所以  $L^p$  函数的 Fourier 系数是良定义的。如果  $p = 1$ , 显然有

$$|\hat{f}(n)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

或者说  $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ 。如果  $p = 2$ , 那么 Parseval 等式表明

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

利用以上两种情况, 在 Riesz–Thorin 定理中取  $p_0 = 1, p_1 = 2, q_0 = \infty = p'_0, q_1 = 2 = p'_1$ , 对于  $p \in (1, 2)$ , 令  $\theta = 2 - 2/p \in (0, 1)$  可知  $1/q = 1 - 1/p = 1/p'$ , 于是得到如下定理:

**定理 2.7** (Hausdorff–Young 不等式). 设  $1 \leq p \leq 2$  且  $f \in L^p([-\pi, \pi])$ , 则  $\hat{f} \in l^q(\mathbb{Z})$ , 且

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

亦可用 Riesz–Thorin 来证明 Fourier 变换的对应结论, 前提是需要定义  $L^2$  函数的 Fourier 变换。因为  $\mathbb{R}$  上的  $L^2$  函数未必  $L^1$ , 所以直接按照

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx$$

来定义会出现问题。正确的方式是先对  $L^1 \cap L^2$  证明 Plancherel 定理  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ , 然后利用  $L^1 \cap L^2$  在  $L^2$  中的稠密性进行连续延拓。尽管 Fourier 变换本身确实非常有趣, 但实在离题太远, 本文遂不涉及细节。相关内容至少包含如下一些方面: 第一, Poisson 求和公式在算术领域可以用于计算 Gauss 三角和、证明 Riemann  $\zeta$  函数的解析延拓、验证 Jacobi  $\theta$  函数是模形式等等; 第二, Fourier 变换在偏微分方程中有重要价值, 可以用于解决热方程和波方程的初值问题; 第三, 量子力学中的 Heisenberg 不确定性原理是关于 Fourier 变换的不等式

$$\left( \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 |\hat{f}(t)|^2 dt \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2, \quad \forall x_0, t_0 \in \mathbb{R}.$$

这些内容已远非一篇短文所能涵盖, 读者可自行探索这一片天地。

### 3 Brouwer 不动点定理

不动点与若干数学分支紧密联系。分析学的一个重要观点是将解方程  $f(x) = 0$  翻译为求  $x + f(x)$  的不动点，进而运用压缩映射原理等手段。此外，同调论中的 Lefschetz 不动点定理将 Euler 示性数等同于对角线映射的不动点，后者又与代数几何中的相交理论密切相关。

本文要讨论的 Brouwer 不动点定理属于代数拓扑，但分析证明同样精彩。

**定理 3.1** (Brouwer 不动点定理). 设  $B \subset \mathbb{R}^n$  是开单位球，连续映射  $f: \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  必有不动点。

这里  $\mathbb{R}^n$  中的开单位球是指

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Brouwer 不动点定理的 1 维的情形可以用介值原理得到，但 2 维以上情形毫不显然。试想有一杯咖啡，无论怎么搅动（只要不改变液体形状），这杯咖啡里必有一点位于原来的位置上。

#### 3.1 Euler-Lagrange 方程

在给出证明之前需要引入变分法，考虑这样的问题：设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中的有界开集，

$$L(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

是光滑函数。对于光滑函数  $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ，定义 Lagrange 量（可以看成某种能量）

$$I[u] := \int_{\Omega} L(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u, x_1, \dots, x_n) dx.$$

给定边界  $\partial\Omega$  上的连续函数  $g$ ，什么样的  $u$  才能满足  $u|_{\partial\Omega} = g$  且使得  $I[u]$  最小呢？

为此，假设  $u$  是最小值点，考虑对  $u$  进行微扰，即任取  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ 。考虑关于  $\varepsilon$  的函数  $I[u + \varepsilon v]$ 。注意  $v$  在边界上为 0 保证了  $(u + \varepsilon v)|_{\partial\Omega} = g$ ，所以  $I[u + \varepsilon v]$  应该在  $\varepsilon = 0$  处取到最小值，所以在  $\varepsilon = 0$  处的导函数应该等于 0。容易验证积分与求导可以交换，于是

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[u + \varepsilon v] = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du + \varepsilon Dv, u + \varepsilon v, x) v_{x_i} + L_z(Du + \varepsilon Dv, u + \varepsilon v, x) dx.$$

令  $\varepsilon = 0$ ，然后对  $v_{x_i}$  进行分部积分可得（注意  $v$  在边界上为 0，所以边界项消失）

$$\int_{\Omega} \left( - \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) \right) v dx = 0.$$

因为上式对任意  $v \in C_c(\Omega)$  都成立，所以必须有

$$- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) = 0.$$

上式左边称为一阶变分，于是  $I[w]$  取到最小值的必要条件是一阶变分为 0。

变分问题与偏微分方程有着密切联系，最简单的例子就是

$$L(Du, u, x) = \frac{1}{2}|Du|^2 + fu = \frac{1}{2}(u_{x_1}^2 + \cdots + u_{x_n}^2) + fu.$$

容易算出此时得到的变分方程正是 Laplace 方程的 Dirichlet 边值问题

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = g.$$

又比如说将  $(x, y, u(x, y))((x, y) \in \bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2)$  看成  $\mathbb{R}^3$  中的曲面，其表面积为

$$I[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy.$$

由此得到极小曲面方程

$$\left( \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right)_x + \left( \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right)_y = 0.$$

同样的思想可以用于处理  $u = (u^1, \dots, u^m)$  是向量值函数的情况，此时  $L$  是  $\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \bar{U}$  上的函数，通常用  $p_i^k$  表示  $u_{x_i}^k$  对应的分量， $z^k$  表示  $u^k$  对应的分量。此时对  $u$  的每个分量进行微扰都会得到一个方程，所以一阶变分一共有  $m$  个方程，即

$$-\sum_{i=1}^n (L_{p_i^k}(Du, u, x))_{x_i} + L_{z^k}(Du, u, z) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

这被称为 Euler-Lagrange 方程组。

一阶变分可以视为一种导数，导函数恒为 0 的函数必然是常值函数，由此可以猜想：

**命题 3.2.** 设  $L$  满足对一切光滑函数  $w: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$  都有一阶变分为 0，如果另一个光滑函数  $\tilde{w}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$  满足  $w|_{\partial\Omega} = \tilde{w}|_{\partial\Omega} = 0$ ，则  $I[w] = I[\tilde{w}]$ 。换言之， $I[w]$  只取决于  $w$  的边界值。

证明. 考虑关于  $t \in [0, 1]$  的函数  $I[w + t(\tilde{w} - w)]$ ，则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I[w + t(\tilde{w} - w)] &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n L_{p_i^k}(Dw + tD(\tilde{w} - w), w + t(\tilde{w} - w), x) (\tilde{w}_{x_i}^k - w_{x_i}^k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m L_{z^k}(Dw + tD(\tilde{w} - w), w + t(\tilde{w} - w), x) (\tilde{w}^k - w^k) dx \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} \left( - \sum_{i=1}^n (L_{p_i^k}(Dw + tD(\tilde{w} - w), w + t(\tilde{w} - w), x))_{x_i} \right. \\ &\quad \left. + L_{z^k}(Dw + tD(\tilde{w} - w), w + t(\tilde{w} - w), x) \right) (\tilde{w}^k - w^k) dx. \end{aligned}$$

根据 Euler-Lagrange 方程组，大括号内为 0。所以  $I[w + t(\tilde{w} - w)]$  是常数，进而  $I[w] = I[\tilde{w}]$ 。□

对于  $m = n$  的情况, Jacobi 行列式

$$L := \det \frac{\partial(w^1, \dots, w^n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

正好满足命题3.2的条件:

**引理 3.3.** Jacobi 行列式  $L$  满足对任意光滑映射  $w: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  都有一阶变分为 0。

证明. 用  $P = (p_i^k)$  表示 Jacobi 矩阵, 其中  $p_i^k = u_{x_i}^k$  是第  $i$  行第  $k$  列的元素, 则  $L = \det P$ . 记  $\text{adj}(P)$  是  $P$  的伴随矩阵, 即  $\text{adj}(P)$  的  $k$  行  $i$  列是  $p_i^k$  对应的代数余子式, 这正好又等于  $L_{p_i^k}$ . 熟知  $P \times \text{adj}(P) = (\det P)I$ , 比较  $i$  行  $j$  列元素得

$$\delta_{ij} L = \sum_{k=1}^n p_i^k L_{p_j^k}.$$

两边对  $x_j$  求导得

$$\delta_{ij} \sum_{r,s=1}^n L_{p_r^s} u_{x_r x_j}^s = \sum_{k=1}^n (u_{x_i x_j}^k L_{p_j^k} + p_i^k (L_{p_j^k})_{x_j}).$$

两边再对  $j$  从 1 到  $n$  求和可知

$$\sum_{r,s=1}^n L_{p_r^s} u_{x_r x_i}^s = \sum_{j,k=1}^n (u_{x_i x_j}^k L_{p_j^k} + p_i^k (L_{p_j^k})_{x_j}).$$

把左边得求和下标  $r, s$  换成  $j, k$ , 正好就是右边得第一项, 所以

$$\sum_{j,k=1}^n p_i^k (L_{p_j^k})_{x_j} = 0.$$

上式对于  $i = 1, \dots, n$  成立, 将这  $n$  个方程改写为矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ p_n^1 & \cdots & p_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (L_{p_j^1})_{x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (L_{p_j^n})_{x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

如果  $P$  在  $x_0$  处是可逆矩阵, 立即得到

$$\sum_{j=1}^n (L_{p_j^k})_{x_i} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

在  $x_0$  处成立, 这正是 Euler-Lagrange 方程组. 而如果  $P$  在  $x_0$  处不可逆, 考虑辅助函数  $u + \varepsilon x$ , 其 Jacobi 矩阵是  $P + \varepsilon I$ . 对于充分小的  $\varepsilon$  而言,  $P + \varepsilon I$  在  $x_0$  处一定可逆, 从而对应的 Euler-Lagrange 方程组对  $u + \varepsilon x$  成立, 再令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 根据连续性即证.  $\square$

### 3.2 证明、应用及推广

与代数拓扑的方法相同, 证明 Brouwer 不动点定理的关键在于说明  $\partial B$  不是  $\overline{B}$  的收缩核。

**命题 3.4.** 设  $B \subset \mathbb{R}^n$  是开单位球, 不存在光滑映射  $g: \overline{B} \rightarrow \partial B$  满足  $g|_{\partial B} = \text{Id}$ 。

证明. 假设这样的  $g$  存在, 则  $g$  和恒同映射  $\text{Id}$  在边界上相等。令  $L$  是先前定义的 Jacobi 行列式, 则根据命题 3.2 和引理 3.3 可知  $I[g] = I[\text{Id}] = m(B)$ 。另一方面, 因为  $g$  的像集包含于球面, 直观来看  $L = 0$ , 从而  $I[g] = 0$ , 导致矛盾! 如果要严格证明  $L = 0$ , 只需注意到  $g \cdot g = 1$ , 所以  $g_{x_i} \cdot g = 1 (i = 1, \dots, n)$ , 即

$$\begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ p_n^1 & \cdots & p_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^n \end{pmatrix} = 0.$$

由于  $g \neq 0$ , 所以必有  $L = \det P = 0$ 。 □

现在可以给出 Brouwer 不动点定理的分析证明, 共分为两步:

定理 3.1 的证明. 首先, 如果  $f: \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  是没有不动点的光滑映射, 定义  $g: \overline{B} \rightarrow \partial B$  将  $x \in \overline{B}$  映为  $f(x)$  到  $x$  的射线与  $\partial B$  的交点 (见图 3)。因为  $g$  的定义只涉及代数运算, 必然是光滑映射。而  $g$  显然在边界上是恒同, 与命题 3.4 矛盾! 所以 Brouwer 不动点定理对光滑映射成立。

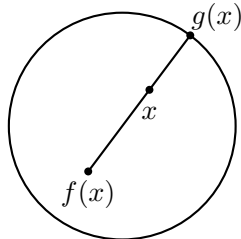


图 3:  $f$  没有不动点保证了  $g$  良定义

一般的, 如果  $f$  只是连续映射, 可以用光滑映射  $f_n: \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  一致逼近  $f$ , 即

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1/n, \quad \forall x \in \overline{B}.$$

注意到  $f_n(x)/(1+1/n)$  是  $\overline{B}$  到自身的光滑映射, 所以存在  $x_n \in \overline{B}$  使得  $f_n(x_n) = (1+1/n)x_n$ 。因为  $x_n \in \overline{B}$ , 根据紧性可知存在子列  $x_{n_i}$  收敛到某一点  $x \in \overline{B}$ , 所以

$$x = \lim_{n_i \rightarrow \infty} (1 + 1/n_i)x_{n_i} = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x_{n_i}) = f(x).$$

最后一步是因为  $f_n$  一致收敛到  $f$ 。至此完成了 Brouwer 不动点定理的证明。 □

应该指出的是, Brouwer 不动点定理在无限维空间中不成立。比如考虑  $l^2(\mathbb{N})$  中的情况, 仍记  $B$  是开单位球, 定义连续映射  $f: \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  为

$$f(x) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots).$$

则  $f$  显然没有不动点。

用分析方法也可以直接证明命题 3.4 对连续映射成立, 方法也是光滑逼近。Brouwer 不动点的定理的代数拓扑证明正是用拓扑的办法来证明命题 3.4 的连续版本, 与分析证明殊途同归。

通常有两种方法进行光滑逼近: 一是 Weierstrass 多项式逼近定理, 二是磨光化子卷积。磨光化子在分析学中非常重要, 常被用于给出函数的光滑逼近。磨光化子有一个非常有趣的应用: 如果平面上的连续函数  $u$  满足平均值公式

$$u(x) = \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} u(x) dx, \quad \forall r > 0.$$

那么  $u$  一定是光滑函数, 从而是调和函数。具体证明可以参考 [Ev], 大致来说令  $\eta_\varepsilon$  是磨光化子, 则卷积  $\eta_\varepsilon * u$  是光滑函数, 在平均值公式成立的条件下可以证明  $\eta_\varepsilon * u$  正好等于  $u$ 。

本文的余下部分给出 Brouwer 不动点定理的若干应用。首先是一个简单的例子:

**定理 3.5** (Perron–Frobenius). 设  $A$  是  $n \times n$  矩阵且各个分量都为正, 则  $A$  有正特征值。

证明. 令  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \|x\|_1 = 1\}$ , 其中  $\|\cdot\|_1$  表示  $l^1$  范数。考虑  $D$  上的映射  $f(x) = Ax/\|Ax\|_1$ , 因为  $A$  的分量都为正, 所以  $f$  的像集包含于  $D$ 。因为  $D$  同胚于  $n-1$  维闭球, 所以  $f$  有不动点  $x_0$ 。注意  $x_0$  正好是  $A$  的特征向量, 其特征值为  $\|Ax\|_1 > 0$ 。□

接下来是区域不变定理, 这也是代数拓扑里的结论:

**定理 3.6** (区域不变定理). 设  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开集,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  是连续单射, 则  $f$  是开映射。

证明. 因为开映射是局部性质, 只需证明如果  $f: \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  是连续单射, 则  $Y := f(\overline{B})$  以  $f(0)$  为内点。此时  $f$  是紧集到 Hausdorff 空间的连续单射, 所以是到像集的同胚, 即逆映射  $f^{-1}: Y \rightarrow \overline{B}$  也连续。利用 Tietze 扩张定理可以将  $f^{-1}$  延拓为  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{B}$ 。

因为  $g$  连续, 对于充分小的  $r > 0$ , 当  $y \in \mathbb{R}^n$  满足  $|y - f(0)| < 2r$  时, 有

$$|g(y) - g(f(0))| = |g(y)| < 1/3.$$

反设  $f(0)$  不是  $Y$  的内点, 则存在一点  $p \notin Y$  满足  $|p - f(0)| < r$ 。通过对  $f$  平移可以不妨设  $p = 0$ , 具体来说是用  $f(x) - p$  代替  $f$ 、用  $g(x + p)$  代替  $g(x)$ 。总结起来, 我们有  $|f(0)| < r$ , 集合  $V := \{y \in Y \mid |y| < r\}$  不包含 0。此外, 当  $y \in \mathbb{R}^n$  满足  $|y| < r$  时  $|y + p - f(0)| < 2r$ , 从而  $|g(y)| < 1/3$ 。下面说明这是不可能的。



在  $Y$  上定义辅助函数  $\Phi(y) = \max\{r/|y|, 1\}y$ , 并记  $K_0 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = r\}$  和  $K_1 = \{y \in Y \mid |y| \geq r\}$ , 则  $V$  被  $\Phi$  映到  $K_0$  上, 而  $Y$  的其余部分被映到  $K_1$  (此时  $\Phi(y) = y$ )。注意  $K_0 \cup K_1$  是紧集, 对任意  $\delta > 0$ , 存在光滑映射  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  满足

$$|g(y) - P(y)| < \delta, \quad \forall y \in K_0 \cup K_1.$$

因为  $g$  在  $K_1$  没有零点 (毕竟在  $Y$  上的唯一零点是  $f(0)$  而  $|f(0)| < r$ ) 且  $K_1$  紧, 所以只要  $\delta$  充分小就能让  $P$  在  $K_1$  上无零点。而对于  $K_0$ , 因为  $P(K_0)$  是零测集, 所以对于充分小的  $c$ , 用  $P+c$  代替  $P$  就能保证  $K_0$  上没有零点, 且仍然满足对  $g$  的一致逼近。

现在, 考虑  $h(y) := P(\Phi(y)) (y \in Y)$ , 则  $h(y)$  在  $Y$  上没有零点。当  $|y| \geq r$  时,  $h(y)$  的定义已经保证了  $|g(y) - h(y)| \leq \delta$ 。而当  $|y| < r$  时, 由  $\Phi(y) \in K_0$  可得

$$|g(y) - h(y)| < |g(y)| + |g(\Phi(y)) - P(\Phi(y))| + |g(\Phi(y))| \leq \delta + 2/3.$$

所以, 只要取定  $\delta < 1/3$ , 就可以保证在  $Y$  上有  $|g(y) - h(y)| < 1$ 。

最后, 注意到上面的式子正好是说  $g(f(x)) - h(f(x)) = x - h(f(x))$  是  $\bar{B}$  到自身的连续映射, 根据 Brouwer 不动点定理可知必然有不动点, 即  $h$  在  $f(\bar{B}) = Y$  上有零点, 矛盾!  $\square$

从直觉上来讲, 如果  $n \neq m$ , 那么  $\mathbb{R}^n$  和  $\mathbb{R}^m$  并不同胚, 毕竟二者维数不同。事实上, 如果  $n > m$ , 那么不存在从  $\mathbb{R}^n$  中的非空开集  $U$  到  $\mathbb{R}^m$  的连续单射。这是因为  $\mathbb{R}^m$  可以视为  $\mathbb{R}^n$  的子集, 区域不变定理表明像集应该是  $\mathbb{R}^n$  中的开集, 但  $\mathbb{R}^m$  并不包含  $\mathbb{R}^n$  的任何非空开集。由此可知  $\mathbb{R}^n$  和  $\mathbb{R}^m$  中的非空开集不可能同胚。

最后是 Schauder 不动点定理, 共有两种形式。其一可视为 Brouwer 不动点定理在无限维赋范空间的推广, 而且还指出闭单位球并非本质, 重要的是紧性和凸性。前文曾指出过 Brouwer 不动点定理在无限维不成立, 问题正是出在无限维空间中的闭单位球不是紧集。

**定理 3.7** (Schauder 不动点定理, 其一). 设  $X$  是赋范线性空间,  $K$  是  $X$  中的紧凸集, 则连续映射  $f: K \rightarrow K$  一定有不动点。

证明. 任意取定  $\varepsilon > 0$ , 因为  $K$  是紧集, 存在有限个点  $x_1, \dots, x_n \in K$  使得

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon).$$

定义连续函数  $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$  为

$$g_i(x) = \max\{0, \varepsilon - \|x - x_i\|\}.$$

则在  $K$  上有  $g_1(x) + \cdots + g_n(x) > 0$ 。再定义连续函数  $f_\varepsilon: K \rightarrow X$  为

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^n g_i(f(x))x_i}{\sum_{i=1}^n g_i(f(x))}.$$

因为

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \frac{\sum_{i=1}^n g_i(f(x))(x_i - f(x))}{\sum_{i=1}^n g_i(f(x))}.$$

对于  $g_i(f(x))$  非零的项而言  $\|x_i - f(x)\| \leq \varepsilon$ , 所以  $\|f_\varepsilon(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$  对一切  $x \in K$  成立。

记  $C$  是  $x_1, \dots, x_n$  的凸包, 根据定义可知  $f_\varepsilon(x) \in C$ , 因为  $K$  是凸集所以  $C \subseteq K$ 。因为  $C$  同胚于有限维闭单纯形, 又  $f_\varepsilon|_C$  是  $C$  到自身的连续映射, 根据 Brouwer 不动点定理可知存在  $x^\varepsilon \in C$  使得  $f^\varepsilon(x^\varepsilon) = x^\varepsilon$ 。最后, 令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 因为  $K$  紧所以  $x^\varepsilon$  存在子列收敛到某个  $x \in K$ , 利用  $f^\varepsilon$  一致收敛到  $f$  可知  $f(x) = x$ 。□

Schauder 不动点定理的第二种形式是第一种形式的推论, 证明之前需要一个引理。所谓闭凸包是指凸包的闭集, 或者闭集的凸包, 在 Banach 空间中两种定义方式是等价的。

**引理 3.8.** 设  $X$  是 Banach 空间,  $K$  是  $X$  中的紧集, 则  $K$  的闭凸包也是紧集。

证明. 熟知 Banach 空间的子集是紧集当且仅当闭且有界, 只需证明  $K$  的闭凸包全有界。而在任何度量空间中, 集合全有界当且仅当其闭包全有界, 所以又只需证明  $K$  的凸包  $C$  全有界。

对任意  $r > 0$ , 因为  $K$  是紧集, 所以存在有限集  $F$  使得  $K \subseteq F + B(0, r/2)$ , 于是  $K \subseteq E + B(0, r/2)$ , 其中  $E$  是  $F$  的凸包。因为凸集加凸集还是凸集, 所以  $C \subseteq E + B(0, r/2)$ 。因为  $E$  是紧集 (同胚于有限维闭单纯形), 所以存在有限集  $F'$  使得  $E \subseteq F' + B(0, r/2)$ , 故

$$C \subseteq F' + B(0, r/2) + B(0, r/2) = F' + B(0, r).$$

根据  $r$  的任意性可知  $C$  全有界, 这就完成了证明。□

**定理 3.9** (Schauder 不动点定理, 其二). 设  $X$  是 Banach 空间,  $C$  是  $X$  中的闭凸集, 连续函数  $f: C \rightarrow C$  满足  $\overline{f(C)}$  是紧集, 则  $f$  一定有不动点。

证明. 记  $K$  是  $\overline{f(C)}$  的闭凸包, 引理 3.8 表明  $K$  是紧凸集。因为  $C$  是闭凸集, 所以  $K \subseteq C$ 。于是  $f|_K$  将  $K$  映到自身, 由第一种形式的 Schauder 不动点定理可知  $f$  在  $K$  上必有不动点。□

虽然本文用分析方法证明了 Brouwer 不动点定理和区域不变定理, 但仍建议读者学习相应的代数拓扑知识。证明方法还有很多, 比如 Brouwer 本人的原始证明采用了映射度的概念, 能用更多不同的观点来看待同一件事总是有益的。

## 4 绝对连续 = 连续 + 有界变差 + 保持零测集

区间  $[a, b]$  上的函数  $f$  称为绝对连续的, 如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对  $[a, b]$  中任意有限个不交开区间  $(a_i, b_i) (i = 1, \dots, n)$ , 只要总长度小于  $\delta$ , 即  $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ , 就有

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

微积分基本定理是说,  $f$  绝对连续当且仅当几乎处处存在导函数  $f' \in L^1$ , 且满足

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x) dx, \quad \forall x \in [a, b].$$

绝对连续的定义并不是那么容易把握。试想任给一个函数, 如果不借助微积分基本定理, 如何判断是否绝对连续? 根据定义不难证明, 绝对连续函数一定连续、有界变差、且将零测集映成零测集。本文的目标是说明这三个条件已经足够:

**定理 4.1.** 设  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  是连续的有界变差函数, 且将零测集映成零测集, 则  $f$  绝对连续。

本文将用两种截然不同的方法给出证明; 特别的, 第二种证明所采用的引理能够给出微积分基本定理的推广 (定理 4.6)。在此之前, 举例说明三个条件缺一不可: 首先, 连续性显然不可或缺, 比如  $f(x) = \chi_{x \geq 0}$ ; 其次, 如果去掉有界变差的条件, 反例是  $[-\pi, \pi]$  上的函数  $f(x) = x \sin 1/x$ ; 最后, 如果去掉保持零测集这一条件, 则可以考虑著名的 Cantor-Lebesgue 函数  $C(x)$ , 它是  $[0, 1]$  到自身的单增连续满射, 在 Cantor 集之外的每一段区间上都是常数。请读者验证这些函数并非绝对连续, 并且均满足三个条件中的另外两个。

### 4.1 第一种证明

第一种证明引入辅助函数  $N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  记录  $f^{-1}(y)$  的元素个数:

$$N(y) = \#\{x \in [a, b] \mid f(x) = y\}.$$

证明的关键是如下引理, 其中  $V_a^b(f)$  表示  $f$  在  $[a, b]$  上的全变差。

**命题 4.2.** 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $N(y)$  是可测函数, 且 (允许两边都是  $\infty$ )

$$V_a^b(f) = \int_{\mathbb{R}} N(y) dy.$$

证明. 对于  $k \in \mathbb{N}$ , 考虑  $[a, b]$  的  $2^k$  等分  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2^k} = b$ , 即对每个  $1 \leq i \leq 2^k$  都有  $x_i - x_{i-1} = (b - a)/2^k$ , 记  $m_i, M_i$  分别是  $f$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上的最小值和最大值, 定义

$$N_k(y) = \sum_{i=1}^{2^k} \chi_{[m_i, M_i]}(y).$$

显然  $N_k$  是可测函数且  $0 \leq N_k(y) \leq N_{k+1}(y)$ , 其积分  $\int_{\mathbb{R}} N_k(y) dy$  也单调递增, 且

$$\int_{\mathbb{R}} N_k(y) dy = \sum_{i=1}^{2^k} (M_i - m_i) \leq V_a^b(f).$$

反过来, 对任意实数  $\lambda < V_a^b(f)$ , 存在  $[a, b]$  的划分  $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_t = b$  使得

$$\sum_{j=1}^t |f(z_j) - f(z_{j-1})| > \lambda.$$

因为  $f$  在  $[a, b]$  上一致连续, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 只要  $k$  充分大, 当  $x, y \in [a, b]$  满足  $|x - y| < 2^{-k}$  时, 就有  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . 此外, 只要  $k$  充分大, 对于  $2^k$  等分区间的情况, 每一小段上最多只有一个  $z_j$ . 考虑在  $2^k$  等分中加入分点  $z_0, \dots, z_t$ , 则每加入一个分点则变差增加不超过

$$|f(x_{i-1}) - f(z_j)| + |f(z_j) - f(x_i)| < 2\varepsilon.$$

以全体  $x_i$  和  $z_j$  作为分点的变差显然不小于仅以  $z_j$  作为分点的变差, 所以

$$\int_{\mathbb{R}} N_k(y) dy \geq \sum_{i=1}^{2^k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \geq \sum_{j=1}^t |f(z_j) - f(z_{j-1})| - 2(t+1)\varepsilon \geq \lambda - 2(t+1)\varepsilon.$$

因为  $\varepsilon$  不依赖于  $t$  而只需要  $k$  充分大, 综合两方面可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} N_k(y) dy = V_a^b(f).$$

最后,  $[a, b]$  中所有可能的  $2^k$  分点只有可数个, 除了这些点对应的函数值之外, 根据定义以及  $f$  的连续性容易看出  $N_k(x)$  收敛到  $N(x)$ . 所以  $N_k(x)$  几乎处处收敛到  $N(x)$ , 从而  $N(x)$  可测. 最后, 结合单调收敛定理就知道  $\int_{\mathbb{R}} N(y) dy = V_a^b(f)$ .  $\square$

顺带一提, 如果  $f$  只是可测函数而不连续, 那么  $N(y)$  未必可测. 比如说, 取函数  $f$  将某个零测集 (比如 Cantor 集) 一一对应到不可测集  $S$  ( $0 \notin S$ ), 并定义其他点处  $f$  等于 0, 那么  $f$  几乎处处为 0 从而可测, 然而使得  $N(y) = 1$  的点组成的集合恰好是  $S$ , 所以  $N(y)$  不可测.

回到主线, 假设  $f \in C[a, b] \cap BV[a, b]$  且将零测集映成零测集, 下面证明  $f$  绝对连续.

定理 4.1 的第一种证明. 若不然, 存在  $\varepsilon > 0$ , 使得对每个  $n \in \mathbb{N}$ , 都存在  $k_n \in \mathbb{N}$  以及  $k_n$  个两两不交开区间  $(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$  ( $1 \leq i \leq k_n$ ), 满足

$$\sum_{i=1}^{k_n} (b_i^{(n)} - a_i^{(n)}) < 1/2^n \quad \text{和} \quad \sum_{i=1}^{k_n} |f(b_i^{(n)}) - f(a_i^{(n)})| > \varepsilon.$$

设  $m_i^{(n)}, M_i^{(n)}$  分别是  $f$  在  $[a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$  上的最小值和最大值, 令

$$\phi_n(y) := \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{[m_i^{(n)}, M_i^{(n)}]}(y).$$

则

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_n(y) dy = \sum_{i=1}^{k_n} |M_i^{(n)} - m_i^{(n)}| \geq \sum_{i=1}^{k_n} |f(b_i^{(n)}) - f(a_i^{(n)})| > \varepsilon.$$

断言  $\phi_n$  几乎处处收敛到 0。记  $E_n = \bigcup_i [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$ , 考虑其上极限  $E := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{l \geq n} E_l$ 。因为  $m(\bigcup_{l \geq n} E_l) \leq 1/2^{n-1}$ , 所以  $m(E) = 0$ , 又因为  $f$  保持零测集, 所以  $m(f(E)) = 0$ 。注意到  $\phi_n(y) \neq 0$  当且仅当  $f^{-1}(y) \cap E_n \neq \emptyset$ , 因此

$$\left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \phi_n(y) > 0 \right\} = \bigcap_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k \geq n} f(E_k) =: A.$$

再记  $B := N^{-1}(\infty)$ , 命题4.2和  $f \in C[a, b] \cap BV[a, b]$  表明  $N(y) \in L^1(\mathbb{R})$ , 所以  $m(B) = 0$ 。对于  $y \in A \setminus B$ , 根据定义可知  $f^{-1}(y)$  与无穷多个  $E_l$  相交, 同时  $f^{-1}(y)$  只包含有限多个点, 所以一定存在其中一点落在无穷多个  $E_l$  中, 这就说明  $y \in f(E)$ 。总结起来,  $A \subset B \cup f(E)$  而后两个都是零测集, 于是断言成立。

最后, 易见  $\phi_n(y) \leq N(y)$  几乎处处成立 (类似于命题(4.2)的证明中  $N_k(y) \leq N(y)$ ), 根据控制收敛定理可知  $\int_{\mathbb{R}} \phi_n(y) dy \rightarrow 0$ , 与  $\int_{\mathbb{R}} \phi_n(y) dy > \varepsilon$  矛盾!  $\square$

## 4.2 第二种证明

以下介绍第二种证明, 需要做两方面准备, 即命题4.4和命题4.5。

直观来看, 可测集  $E$  的像  $f(E)$  的外测度应该不超过  $|f'|$  在  $E$  上的积分, 今后用  $m^*$  来表示外测度。但是存在 Cantor–Lebesgue 函数这样的反例, 其导数几乎处处为 0, 却把 Cantor 集映成  $[0, 1]$ 。命题4.4表明只要  $f$  在  $E$  上逐点可微, 那么结论就是正确的。为此需要引理:

**引理 4.3.** 设  $E \subseteq [a, b]$  是可测集, 定义在  $[a, b]$  上的可测函数  $f$  在  $E$  上逐点可微, 且满足  $|f'(x)| \leq M (\forall x \in E)$ , 则  $m^*(f(E)) \leq M m(E)$ 。

证明. 对任意  $\varepsilon > 0$ , 定义可测集

$$E_n := \{y \in E \mid \forall x \in [a, b] \cap [y - 1/n, y + 1/n], |f(x) - f(y)| < (M + \varepsilon)|x - y|\}.$$

根据条件可知  $E_n$  递增趋于  $E$ 。用长度不超过  $1/n$  的开区间覆盖  $E_n$ , 可知每一段小区间的像的外测度不超过原来的  $M + \varepsilon$  倍, 所以  $m^*(f(E_n)) \leq (M + \varepsilon)m(E_n)$ 。取极限即可。  $\square$

**命题 4.4.** 设  $E \subseteq [a, b]$  是可测集, 定义在  $[a, b]$  上的可测函数  $f$  在  $E$  上逐点可微, 则  $f'$  在  $E$  上可测, 且

$$m^*(f(E)) \leq \int_E |f'(x)| dx.$$

证明.  $f'$  作为差分的极限自然可测. 对任意  $\varepsilon > 0$ , 定义可测集

$$E_n := \{x \in E \mid (n-1)\varepsilon \leq |f'(x)| < n\varepsilon\},$$

则利用引理4.3可知

$$\begin{aligned} \int_E |f'(x)| dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f'(x)| dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\varepsilon m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon m(E_n) - \varepsilon m(E) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(f(E_n)) - \varepsilon m(E) \geq m^*(f(E)) - \varepsilon m(E). \end{aligned}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$  即可. □

一个熟知的结论是: 单调函数几乎处处可微. 其初等证明非常繁琐, 需要巧妙运用 Vitali 覆盖定理. 但是如果利用测度论的 Lebesgue–Radon–Nikodym 定理, 则可以给出一个比较简洁的证明. 下面对于有界变差函数回顾这种方法. 因为有界变差函数是两个单增函数之差, 所以处理单调函数和处理有界变差函数并无太大区别.

设  $f \in BV[a, b]$ , 可以用常值函数将  $f$  延拓到整个  $\mathbb{R}$  上 (例如在  $a$  左侧定义为  $f(a)$ 、在  $b$  右侧为定义  $f(b)$ ). 熟知  $f$  在每一点处的单边极限存在, 定义  $g(x) = f(x+)$  是  $f$  在  $x$  处的右极限, 则  $g(x)$  右连续. 因为  $f - g$  只在可数个点处非零, 又  $f$  有界变差, 可以认为其定义了支撑在可数个点上的有限复测度, 从而其关于 Lebesgue 测度  $m$  的 Radon–Nikodym 导数几乎处处为 0. 特别的,  $f - g$  几乎处处可微且导函数为 0, 用  $g$  代替  $f$  不会影响下面的论述.

根据测度论的知识, 可以定义  $\mathbb{R}$  上的 Borel 正测度  $\mu$ , 满足

$$\mu((c, d]) = g(d) - g(c).$$

根据 Lebesgue–Radon–Nikodym 定理, 存在  $h \in L^1(m)$  和正测度  $\lambda \perp m$ , 使得  $\mu = h dm + \lambda$ , 也就是说对任意 Borel 集  $E$  有

$$\mu(E) = \int_E h(x) dm(x) + \lambda(E).$$

由此立即可得对任意  $c < d$  有

$$g(d) - g(c) = \int_c^d h(x) dm(x) + \lambda((c, d]).$$

因为  $\lambda$  关于  $\mu$  的 Radon–Nikodym 导数几乎处处为 0, 所以  $g$  几乎处处可微且  $g' = h$ 。根据定义容易看出  $\mu$  的全变差  $|\mu|$  正好对应于  $g$  的全变差, 又因为  $|\mu| = |h| dm + |\lambda| \geq |h| dm$ , 所以

$$V_a^b(g) \geq \int_a^b |h| dm = \int_a^b |g'| dm.$$

容易看出  $f$  的全变差不会比  $g$  更小, 汇总以上信息得到:

**命题 4.5.** 设  $f \in BV[a, b]$ , 则  $f$  在  $(a, b)$  上几乎处处可微, 且  $f' \in L^1$  满足

$$\int_a^b |f'(x)| dx \leq V_a^b(f).$$

通常的实变函数教材上只处理了  $f$  单调递增的情况, 那里的结论是

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

对于单调函数而言,  $f'$  几乎处处非负, 且  $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$ , 因此这不过是命题(4.5)的特例。其中不等号不能改成等号, 具体反例依然是 Cantor-Lebesgue 函数, 并且从证明可以看出相差的无非是奇异部分的全变差  $|\lambda|((a, b])$ 。

现在可以完成定理4.1的第二种证明, 假设  $f \in C[a, b] \cap BV[a, b]$  且保持零测集。

定理4.1的第二种证明. 根据有界变差可知,  $f$  几乎处处可微且  $f' \in L^1$ 。设  $D$  是可微点组成的集合,  $N$  是不可微点组成的集合, 则  $m(N) = 0$ , 所以  $m(f(N)) = 0$ 。对任意有限个不交开集  $I_i := (a_i, b_i) (i = 1, \dots, n)$ , 注意到

$$|f(b_i) - f(a_i)| \leq m^*(f(I_i)) \leq m^*(f(I_i \cap D)) + m^*(f(I_i \cap N)).$$

定理 3 表明  $m^*(f(I_i \cap D)) \leq \int_{I_i} |f'(x)| dx$ , 又因为  $m^*(f(I_i \cap N)) \leq m^*(f(N)) = 0$ , 所以

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{I_i} |f'(x)| dx = \int_I |f'(x)| dx.$$

其中  $I = I_1 \cup \dots \cup I_n$ 。根据  $L^1$  函数积分的绝对连续性, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得只要  $m(I) < \delta$ , 就有  $\int_I |f'(x)| dx < \varepsilon$ 。而  $m(I)$  正是  $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ , 证毕。  $\square$

以上两种方法各有千秋, 第一种方法引进了  $N(y)$  作为辅助,  $f$  的连续性保证了介值原理以及可以在闭区间上取最值, 有界变差则保证了  $N(y) \in L^1$ , 最后用控制收敛定理导致矛盾; 第二种方法思路更加自然, 但是命题4.5的证明很难避开测度论的方法。

本文的最后用命题4.5证明另一个版本的微积分基本定理。通常教材上只证明了对绝对连续函数  $f$  而言,  $f$  几乎处处可微且  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$ 。但如果只知道  $f$  几乎处处可微且

$f' \in L^1$ , 并不足以推出微积分基本定理成立, 反例依然是 Cantor-Lebesgue 函数。定理4.6表明, 如果上面的“几乎处处”改为“除可数个点之外”, 则结论成立:

**定理 4.6.** 设  $f \in C[a, b]$  且在  $(a, b)$  上除了可数个点之外可微, 如果  $f' \in L^1$ , 则

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx.$$

证明. 用  $N$  表示  $f$  不可微的点集, 则  $N$  至多可数, 从而  $f(N)$  是零测集。

对任意  $a < c < d < b$ , 对于  $[c, d]$  中任意有限个不交开区间  $I_i = (c_i, d_i) (i = 1, \dots, n)$ , 有

$$\sum_{i=1}^n |f(d_i) - f(c_i)| \leq \sum_{i=1}^n m^*(f(I_i)) = \sum_{i=1}^n m^*(f(I_i \setminus N)) \leq \sum_{i=1}^n \int_{I_i \setminus N} |f'(x)|dx = \int_{\cup_i I_i} |f'(x)|dx.$$

利用  $L^1$  函数积分的绝对连续性, 立即得到  $f \in AC[c, d]$ , 所以

$$f(d) - f(c) = \int_c^d f'(x)dx.$$

令  $c \rightarrow a$  且  $d \rightarrow b$  即可。 □

这里的方法与定理4.1的第二种证明如出一辙。之所以将“几乎处处”换成“可数”之后结论成立, 是因为尽管连续函数可以将零测集映成正测集, 但可数集的像总是可数集。



## 5 多项式一致逼近

大部分数学分析教材上都证明了闭区间  $[0, 1]$  上的连续函数可以被多项式一致逼近，常见的有三种方法：最经典的方法是 Beinstein 多项式

$$B_n(f)(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

其背景源自概率论中的大数定律，考虑参数为  $x$  的二项分布，只有在  $k/n \approx x$  时概率  $C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$  才会比较大，此时  $f(k/n) \approx f(x)$ ；另一种重要的方法是核函数卷积，考虑 Landau 核

$$L_n(x) := c_n^{-1} (1-x^2)^n, \quad \text{其中 } c_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx.$$

总可以将  $f \in C[0, 1]$  延拓为  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ，考虑卷积

$$(L_n * f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y) L(y) dy,$$

因为 Landau 核本身是多项式，所以  $L_n * f$  也是多项式，而核函数的一般性质表明  $L_n * f$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $f$ ；最后一种方法是本文前半部分讨论的 Stone–Weierstrass 逼近定理。

进一步，Stone–Weierstrass 逼近定理作为抽象结果有着若干应用，例如 Fourier 级数中三角多项式一致逼近连续周期函数、泛函分析中 Gelfand 表示是交换  $C^*$  代数到极大谱上连续函数空间的同构等等。与之相关的问题是形如  $1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots$  的函数的线性组合何时能够逼近  $[0, 1]$  上的连续函数，这就是所谓 Müntz–Szász 定理，将在本文的后半部分讨论。

### 5.1 Stone–Weierstrass 逼近定理

Stone–Weierstrass 逼近定理通常有两个版本。为了方便，本文只考虑实值函数，并定义

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

**定理 5.1** (Stone–Weierstrass 逼近定理，其一). 设  $X$  是紧拓扑空间， $L \subseteq C(X, \mathbb{R})$  是包含常值函数且能够区分  $X$  中任意两点的向量格，具体而言满足如下四个条件：

- (1)  $L$  包含所有常值函数；
- (2) 如果  $f, g \in L$ ，则对任意  $a, b \in \mathbb{R}$ ，有  $af + bg \in L$ ；
- (3) 如果  $f, g \in L$ ，则  $f \vee g, f \wedge g \in L$ ；
- (4) 如果  $x \neq y$  是  $X$  中的不同两点，则存在  $f \in L$  使得  $f(x) \neq f(y)$ 。

则  $C(X, \mathbb{R})$  中的任何函数能被  $L$  中的函数一致逼近。

证明. 任取  $f \in C(X, \mathbb{R})$  和  $\varepsilon > 0$ , 下证存在  $g \in L$  使得  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  对任意  $x \in X$  成立。

利用 (1)(2)(4) 三条性质, 容易证明对于任意两点  $x, y \in X$  (未必不同), 存在  $g_{xy} \in L$  使得  $g_{xy}(x) = f(x)$  且  $g_{xy}(y) = f(y)$ 。因为  $f$  和  $g_{xy}$  都连续, 所以存在  $y$  的开邻域  $U_{xy}$  使得

$$g_{xy}(z) < f(z) + \varepsilon, \quad \forall z \in U_{xy}.$$

固定  $x$  而让  $y$  取遍  $X$  中的点, 则这些  $U_{xy}$  构成  $X$  的开覆盖, 根据  $X$  的紧性可知存在有限个  $y_1, \dots, y_n$  使得  $X$  被这些  $U_{xy_i} (i = 1, \dots, n)$  覆盖。令

$$g_x = g_{xy_1} \wedge \dots \wedge g_{xy_n},$$

则 (3) 保证了  $g_x \in L$ , 并且对一切  $z \in X$  都有  $g_x(z) \leq f(z) + \varepsilon$ , 以及满足  $g_x(x) = f(x)$ 。

用类似的推理, 只是这次考虑  $x$ , 则存在  $x$  的开邻域  $V_x$  使得

$$g_x(z) \geq f(z) - \varepsilon, \quad \forall z \in V_x.$$

取  $x_1, \dots, x_m$  使得  $V_{x_i} (i = 1, \dots, m)$  构成  $X$  的有限开覆盖, 并令

$$g = g_{x_1} \vee \dots \vee g_{x_m},$$

则 (3) 保证了  $g \in L$ , 并且对一切  $z \in X$  都有

$$f(z) - \varepsilon \leq g(z) \leq f(z) + \varepsilon.$$

这就完成了证明。 □

Stone–Weierstrass 逼近定理的另一个更常用的形式如下:

**定理 5.2** (Stone–Weierstrass 逼近定理, 其二). 设  $X$  是紧拓扑空间,  $A \subseteq C(X, \mathbb{R})$  是包含常值函数且能够区分  $X$  中任意两点的  $\mathbb{R}$ -代数, 具体而言满足如下四个条件:

- (a)  $A$  包含所有常值函数;
- (b) 如果  $f, g \in A$ , 则对任意  $a, b \in \mathbb{R}$ , 有  $af + bg \in A$ ;
- (c) 如果  $f, g \in A$ , 则  $fg \in A$ ;
- (d) 如果  $x \neq y$  是  $X$  中的不同两点, 则存在  $f \in A$  使得  $f(x) \neq f(y)$ 。

则  $C(X, \mathbb{R})$  中的任何函数能被  $A$  中的函数一致逼近。

证明. 对比定理 5.1, 只需证明如果  $f, g \in A$ , 则有  $f \vee g, f \wedge g \in A$ 。注意到

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \quad f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2},$$

又只需证明如果  $f \in A$ , 则  $|f| \in A$ . 事实上, 因为  $X$  紧, 可以取  $M > 0$  是  $|f|$  的上界. 容易看出  $\sqrt{x}$  在  $[-M, M]$  上可以被一系列多项式  $p_n(x)$  一致逼近 (这里只需要广义二项式定理:  $\sqrt{x} = \sqrt{2M} \sqrt{1 - (1 - x/2M)}$  的 Taylor 级数在  $[-M, M]$  上一致收敛; 而不必使用多项式一致逼近定理本身). 因为  $A$  是代数, 所以  $p_n(f) \in A$  且一致逼近  $|f|$ , 证毕.  $\square$

利用 Stone–Weierstrass 逼近定理, 可以轻易说明  $\mathbb{R}^n$  中任何有界闭集上的连续函数都能被多项式一致逼近、 $2\pi$  周期连续函数都能被三角多项式一致逼近. 另一个有意思的应用如下:

**命题 5.3.** 设  $X$  是紧拓扑空间且  $C(X, \mathbb{R})$  能够区分  $X$  中任意不同两点, 则  $C(X, \mathbb{R})$  在一致拓扑 (即最大模范数诱导的拓扑) 下可分当且仅当  $X$  可度量化.

证明. 先证必要性. 取  $f_n (n \in \mathbb{N})$  是  $C(X, \mathbb{R})$  中的稠密子集, 特别的这些  $f_n$  张成的线性空间在  $C(X, \mathbb{R})$  中稠密. 因为  $X$  紧, 通过伸缩不妨设对任意  $x \in X$  都有  $|f_n(x)| \leq 1$ , 于是

$$X \mapsto [-1, 1]^{\mathbb{N}}: x \mapsto (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

是连续映射. 因为  $f_n$  张成的线性空间在  $C(X, \mathbb{R})$  中稠密, 并且  $C(X, \mathbb{R})$  可区分  $X$ , 所以这是一个单射. 注意到  $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$  是度量空间, 又紧空间到 Hausdorff 空间的连续单射是到像集的同胚, 所以  $X$  可以嵌入度量空间, 于是  $X$  可以度量化.

下证充分性. 易见紧度量空间都是可分的, 取可数稠密点集  $x_n (n \in \mathbb{N})$ . 考虑关于  $x$  的连续函数  $f_n(x) = d(x, x_n)$ , 容易证明这些  $f_n$  能够区分任意两点. 考虑这些  $f_n$  生成的多项式环  $A$ , 则 Stone–Weierstrass 逼近定理表明  $A$  在  $C(X, \mathbb{R})$  中稠密. 再考虑这些  $f_n$  生成的  $\mathbb{Q}$ -系数多项式环, 里面只有可数个元素, 并且在  $A$  中稠密, 从而也在  $C(X, \mathbb{R})$  中稠密.  $\square$

## 5.2 Müntz–Szász 定理

Stone–Weierstrass 逼近定理还断言了比多项式逼近更强的事实, 比如

$$1, x^3, x^6, \dots, x^{3n}, \dots$$

张成的线性空间在  $C[0, 1]$  中稠密. 但由此尚不能判断

$$1, x^2, x^3, x^5, x^7, \dots, x^p, \dots \quad (p \text{ 是素数})$$

或者

$$1, x^2, x^4, \dots, x^{2^n}, \dots$$

张成的线性空间是否在  $C[0, 1]$  中稠密. 熟知  $\sum_{p \text{ 是素数}} p^{-1} = \infty$  而  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ , 于是如下的 Müntz–Szász 定理表明前者稠密而后者不稠密.

**定理 5.4** (Müntz–Szász 定理). 设  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ , 用  $L$  表示

$$1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots$$

张成的  $\mathbb{R}$ -线性空间, 则如下结论成立:

- (1) 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$ , 则  $L$  在  $C[0, 1]$  的一致拓扑下稠密;
- (2) 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < \infty$ , 任取  $\lambda > 0$  使得  $\lambda \neq \lambda_n (\forall n \in \mathbb{N})$ , 则  $x^\lambda$  不在  $L$  的一致闭包中。

简单说明证明思路如下。根据泛函分析中的 Hahn–Banach 定理,  $L$  稠密当且仅当对于  $C[0, 1]$  上的任意有界线性泛函  $\Lambda$ , 只要  $\Lambda$  限制在  $L$  上为 0, 则  $\Lambda$  就等于 0。根据 Riesz 表示定理,  $C[0, 1]$  上的有界线性泛函对应于正则 Borel 复测度  $\mu$ , 即

$$\Lambda\varphi = \int_0^1 \varphi d\mu.$$

考虑定义在右半平面  $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$  上的有界全纯函数

$$f(z) = \int_0^1 t^z d\mu(t)$$

则条件表明  $f(z)$  以全体  $\lambda_n$  为零点。如果能说明  $f(z)$  恒等于 0, 则可以想象  $\mu$  就是 0, 从而说明  $L$  在  $C[0, 1]$  中稠密。关键在于对于具有一定增长速率限制的全纯函数, 其零点的位置也需要满足适当的条件。为了理解这一现象, 简单的例子是在无穷远处增长速度不超过  $C|z|^n$  的整函数只能是至多  $n$  次多项式, 从而零点至多只有  $n$  个。

上述分析将问题的关键转化为全纯函数零点位置的条件 (命题 5.7), 其证明用到 Jensen 公式 (定理 5.6)。为此首先计算一个定积分, 其中对数函数  $\ln$  定义在  $\mathbb{C}$  去掉负实轴上。

**引理 5.5.**

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 - e^{iz}) dz = 0.$$

证明. 可积性不成问题。由于函数  $1 - e^{iz}$  只有在  $\operatorname{Re}(z) = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$  且  $\operatorname{Im}(z) \leq 0$  时取到非负实数, 因此可以在不含这些点的单连通开集上定义全纯函数  $f(z) = \ln(1 - e^{iz})$ 。考虑如图 4 所示的围道  $\gamma$ , 其中  $M > 0$  和  $\varepsilon > 0$  暂时取定。

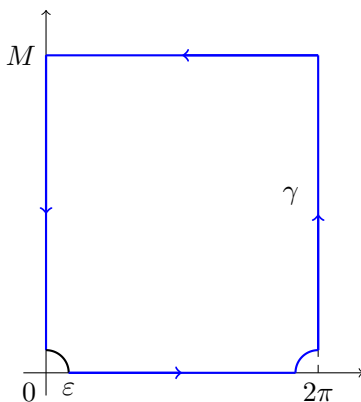


图 4: 围道  $\gamma$  是以  $(0,0), (2\pi,0), (2\pi,M), (0,M)$  为顶点的矩形挖掉两个小扇形

由于  $f$  在  $\gamma$  围成的区域内全纯, Cauchy 积分公式给出

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

因为  $f$  以  $2\pi$  为周期, 所以左右边界的积分抵消。令  $M \rightarrow \infty$ , 则对于上边界而言  $|e^{iz}| = e^{-M}$ , 所以在上边界的积分趋于 0。最后, 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 因为  $1 - e^{iz} \sim -iz$ , 所以在靠近 0 的小圆弧上积分绝对值不会超过  $C\varepsilon|\ln \varepsilon|$ , 极限是 0。靠近  $2\pi$  附近的小圆弧情况完全一样。  $\square$

在 Jensen 公式的证明中会用到的是对引理 5.5 取实部得到的结果

$$\int_0^{2\pi} \ln |1 - e^{iz}| dz = 0.$$

另一个有意思的结果是, 在引理 5.5 中用  $2z$  代替  $z$ , 注意到  $1 - e^{2iz} = -2ie^{iz} \sin z$ , 所以

$$\int_0^{\pi} \left( \ln 2 - \frac{\pi i}{2} + iz + \ln \sin z \right) dz = 0.$$

整理得

$$\int_0^{\pi} \ln \sin z dz = -\pi \ln 2.$$

下面引入 Jensen 公式, 其作用是给出全纯函数零点位置的估计:

**定理 5.6** (Jensen 公式). 设  $f$  是开单位圆盘  $U$  内的非常值全纯函数且  $f(0) \neq 0$ 。对于  $0 < r < 1$ , 设  $a_1, \dots, a_n$  是  $f$  在  $\{|z| < r\}$  内的所有零点 (计重数, 显然只有有限个), 则

$$\ln |f(0)| = - \sum_{i=1}^n \ln \frac{r}{|a_i|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

证明. 设  $b_1, \dots, b_m$  是  $f$  所有位于  $|z| = r$  上的零点, 令

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^n \frac{r^2 - \bar{a}_i z}{r(a_i - z)} \prod_{j=1}^m \frac{b_j}{b_j - z}.$$

则  $g(z)$  依然在  $U$  内全纯, 且在  $|z| \leq r$  内没有零点, 所以  $\ln |g(z)|$  是调和函数 (因为它是全纯函数  $\ln g(z)$  的实部), 根据平均值公式有

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

左边可以直接计算得到

$$\ln |g(0)| = \ln |f(0)| + \sum_{i=1}^n \ln \frac{r}{|a_i|}.$$

熟知对于  $1 \leq i \leq n$ , 当  $|z| = r$  时  $|(r^2 - \bar{a}_i z)/(r(a_i - z))| = 1$ , 所以右边是

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |1 - re^{i\theta}/b_j| d\theta.$$

设  $b_j = re^{i\theta_j}$ , 则上式最后一项积分正好是引理5.5给出的

$$\int_0^{2\pi} \ln |1 - e^{i(\theta - \theta_j)}| d\theta = 0.$$

对这些数据进行整理就能得到要证的等式。 □

特别的, 因为 Jensen 公式中  $|a_i| < r$ , 所以

$$\ln |f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

此即下调和函数  $\ln |f(z)|$  的平均值原理, 而 Jensen 公式表明两边的差由零点给出。

熟知对于任何区域  $\Omega$ , 只要一列点  $a_n$  在  $\Omega$  内部无聚点 (允许聚点在  $\Omega$  的边界上), 那么就存在  $\Omega$  内的全纯函数恰以这些  $a_n$  作为零点。利用 Jensen 公式, 可以证明如果对  $f$  的增长速度有一些要求的话, 那么零点的位置就不能是任意的了。这方面的经典应用是整函数的阶与正规积的关系, 虽然非常精彩但与本文主线无关。稍后将会用到的关键命题是:

**命题 5.7.** 设  $f$  是开单位圆盘  $U$  内的非常值全纯函数, 且满足

$$\limsup_{r \rightarrow 1-} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

设  $a_n (n \in I)$  是  $f$  在  $U$  中的全部零点 (计重数), 其中指标集  $I$  至多可数, 则

$$\sum_{n \in I} (1 - |a_n|) < \infty.$$

证明. 设  $f(z) = z^k g(z)$ , 其中  $g$  是满足  $g(0) \neq 0$  的全纯函数, 则

$$\int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta = 2k\pi \ln r + \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

所以  $g$  也满足  $f$  的条件, 且只比  $f$  多了有限个零点. 不妨设  $f(0) \neq 0$ , 即这些  $a_n$  都非零.

根据 Jensen 公式可知, 当  $r \rightarrow -1$  时存在一致的常数  $C > 0$  使得

$$\prod_{|a_n| < r} \frac{|a_n|}{r} \geq C.$$

对任意有限子集  $J \subset I$ , 只要  $r$  充分接近 1, 就有  $|a_n| < r$  对任意  $n \in J$  成立, 所以

$$\prod_{n \in J} \frac{|a_n|}{r} \geq \prod_{|a_n| < r} \frac{|a_n|}{r} \geq C.$$

令  $r \rightarrow 1-$  得  $\prod_{n \in J} |a_n| \geq C$ , 结合  $J$  的任意性可知  $\prod_{n \in I} |a_n| > 0$ , 从而结论成立.  $\square$

现在可以给出 Müntz-Szasz 定理的证明。

定理 5.4 的证明. 首先处理 (1), 即  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$  的情况. 根据之前关于 Hahn-Banach 定理的解释, 既然先前已经证明过多项式的稠密性, 假设  $[0, 1]$  上的正则 Borel 复测度  $\mu$  满足

$$\int_0^1 t^{\lambda_n} d\mu(t) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

则只需证明对一切  $k \in \mathbb{N}$  都有  $\int t^k d\mu(t) = 0$ .

考虑定义在右半平面  $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$  上的全纯函数 (注意  $t^z$  在  $t > 0$  时良定)

$$f(z) := \int_0^1 t^z d\mu(t).$$

根据条件,  $f$  以这些  $\lambda_n$  为零点. 在右半平面上, 当  $t \in [0, 1]$  时  $|t^z| = t^{\operatorname{Re}(z)} \leq 1$ , 所以  $f(z)$  是有界全纯函数. 熟知从单位圆盘到右半平面的解析同构是

$$z \mapsto \frac{1+z}{1-z}.$$

于是  $g(z) := f(\frac{1+z}{1-z})$  是单位圆盘内的有界全纯函数, 且零点至少包括  $a_n := \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}$ . 如果  $\lambda_n$  有界, 则  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < 1$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)$  发散; 如果  $\lambda_n$  无界, 从某一项起  $a_n > 0$ , 亦有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) = (\text{有限项}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}\right) = (\text{有限项}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n + 1} = \infty.$$

在两种情况下, 由命题5.7可知  $g$  只能是常值函数, 所以  $f = 0$ , 于是 (1) 得证。

值得说明的是  $f$  未必可以连续延拓到 0 处, 因为  $\mu(\{0\})$  未必等于 0。显然条件中加入常值函数 1 也是必要的, 否则只能一致逼近在 0 处等于 0 的函数。这一点也反映下面的证明中, 即如果  $L$  可以逼近  $x^\lambda$ , 则不使用常值函数 1 也能逼近  $\lambda$ 。

接下来处理 (2), 即  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < \infty$  的情况。只需构造正则 Borel 复测度  $\mu$ , 使得

$$\int_0^1 t^{\lambda_n} d\mu(t) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{但} \quad \int_0^1 t^\lambda d\mu(t) \neq 0.$$

定义  $\{\operatorname{Re}(z) > -2\}$  上的全纯函数 (注意条件保证了无穷乘积内闭一致收敛)

$$f(z) := \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}.$$

于是  $f$  恰好以这些  $\lambda_n$  以及 0 为零点, 而极点都不在我们关心的区域内。

当  $\operatorname{Re}(z) \geq -1$  时, 有  $\frac{z}{2+z}$  和  $\frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}$  的模长都不超过 1, 剩下的  $(2+z)^{-2}$  项保证了  $f$  在直线  $\operatorname{Re}(z) = -1$  上可积。取  $R > 0$  待定, 考虑  $f$  在图5所示的围道  $\gamma$  上积分。

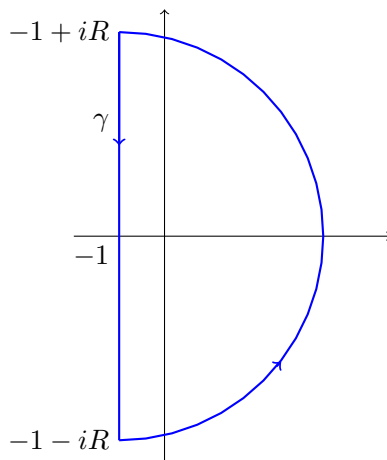


图 5: 围道  $\gamma$  是以  $-1$  为圆心、半径为  $R$  的半圆

根据 Cauchy 积分公式, 对于  $\gamma$  围出的半圆内的点  $z$  有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

当  $R \rightarrow \infty$  时, 因为  $f(\xi)$  被  $|\xi|^{-2}$  控制, 所以在圆弧上的积分值趋于 0, 从而得到

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(-1 + is)}{-1 + is - z} ds, \quad \forall \operatorname{Re}(z) > -1.$$



注意到

$$-\frac{1}{-1+is-z} = \int_0^1 t^{z-is} dt.$$

并且积分顺序显然可以交换（毕竟绝对可积），所以

$$f(z) = \int_0^1 t^z \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is)t^{-is} ds \right) dt.$$

将括号内的部分记为  $g(t)$ ，定义  $d\mu(t) = g(t) dt$ ，则  $f(z)$  的零点信息保证了  $\mu$  满足要求。  $\square$

上述证明来自 [Ru1]，而 Müntz 的原始证明更为初等：先将问题转化为  $L^2$  逼近，然后用 Hilbert 空间中的正交投影（Gram 矩阵）判断稠密性。此外，Stone–Weierstrass 逼近定理和 Müntz–Szász 定理都有对应的复值函数版本，方法层面并无创新，因此本文不再进行深入。

## 6 Gauss 整数的 $-4$ 次方和

Euler 的一项著名结果是解决自然数倒数平方和的 Basel 问题：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

他的原始证明基于比较  $\sin \pi x$  的无穷乘积分解中  $x^3$  项系数

$$\sin \pi x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

更一般的，对上式取对数再求导，并借助 Bernoulli 数可以求出自然数的  $-2k$  次方和：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^k B_{2k} \cdot \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$$

此即 Riemann  $\zeta$  函数的特殊值  $\zeta(2k)$ 。具体细节可见大部分数学分析或复分析教材（如 [SS]）。

本文想要讨论 Gauss 的发现，这一结果涉及到了椭圆积分：

**定理 6.1.**

$$\sum_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(a+bi)^4} = \frac{1}{15} \left(2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)^4.$$

$\pi$  的如下积分表示暗示了 Euler 与 Gauss 的结果之间有着微妙的关联：

$$\pi = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

事实上，二者的证明也是相通的，Euler 使用的正弦函数是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

的反函数，而 Gauss 则是通过研究椭圆积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

的反函数得到了定理 6.1。Gauss 将这一函数称为双扭线正弦函数 (lemniscate sine)，因为这个积分本身于双扭线弧长有关。证明的关键蕴藏在双扭线正弦函数的零点和极点之中。

不同于 Gauss 的原始方法<sup>1</sup>，本文将利用 Weierstrass  $\wp$  函数给出 (2) 式的简单证明。 $\wp$  函数是最简单的椭圆函数之一，下面首先介绍椭圆函数的基础知识，接着说明  $(\wp, \wp')$  可以参数化椭圆曲线  $y^2 = x^3 + ax + b$ ，最后通过比较系数得到证明。

<sup>1</sup> 参见 M. Rosen. Abel's theorem on the lemniscate. Amer. Math. Monthly, 88:387–395, 1981.

## 6.1 椭圆函数

所谓椭圆函数是指复平面上的双周期亚纯函数，即存在两个实线性无关的复数  $\omega_1, \omega_2$  都是  $f$  的周期，于是格  $\Lambda := \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$  中的复数都是  $f$  的周期。周期函数自然只需放在一个周期  $\mathbb{C}/\Lambda$  上去研究，人们习惯称顶点是  $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$  的平行四边形为基本周期，如图6所示。通常认为基本区域包含下边和左边，而不包含上边和右边。记基本周期为  $\Gamma$ ，并定义围道  $\gamma$  是从  $0$  出发逆时针绕  $\Gamma$  的边界一周。

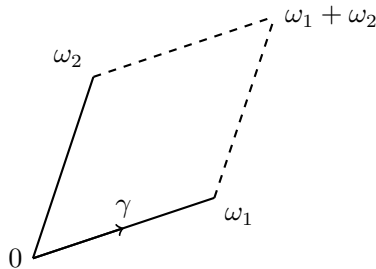


图 6: 基本周期  $\Gamma$  与围道  $\gamma$

**命题 6.2.** 全纯椭圆函数只有常值函数。

证明. 如果椭圆函数  $f$  是全纯函数，那么  $f$  在有界闭集  $\bar{\Gamma}$  上有界，再根据周期性可知  $f$  在  $\mathbb{C}$  上有界，Liouville 定理表明  $f$  只能是常值函数。□

下面讨论非常值椭圆函数的性质，如果  $f$  在  $\gamma$  上没有极点，考虑积分

$$\int_{\gamma} f(z) dz,$$

将它分为四段积分，利用周期性可知等于 0:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{\omega_1} f(z) dz + \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \omega_2} f(z) dz + \int_{\omega_1 + \omega_2}^{\omega_2} f(z) dz + \int_{\omega_2}^0 f(z) dz \\ &= \int_0^{\omega_1} (f(z) - f(z + \omega_2)) dz + \int_0^{\omega_2} (f(z + \omega_1) - f(z)) dz = 0. \end{aligned}$$

如果  $f$  在  $\gamma$  上有极点，因为非常值亚纯函数在紧集上只能有有限个极点，总可以稍微改动  $\gamma$  使之绕开极点，并且围起来的区域还是一个周期。图7展示了恰有一个极点时如何绕开。

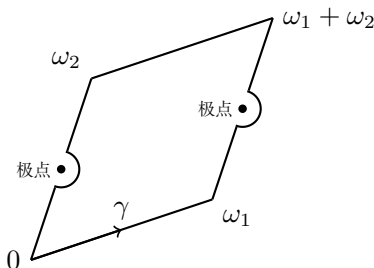


图 7: 围道  $\gamma$  总能绕开极点

相同的论述表明, 沿改动之后的  $\gamma$  对  $f$  积分依然等于 0。通常人们不特别区分  $\gamma$  上是否有极点, 于是得到如下结果:

**引理 6.3.** 设  $f$  是椭圆函数, 则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

结合幅角原理可得如下重要结果:

**命题 6.4.** 设  $f$  是非常值椭圆函数, 则对任意  $c \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = c$  在一个周期内解的个数都等于  $f$  的极点个数 (二者都计重数)。

证明. 注意到  $f'/(f - c)$  也是一个椭圆函数, 根据引理 6.3 以及幅角原理可知

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - c} dz = (f - c \text{ 在一个周期内的零点个数}) - (\text{极点个数}).$$

所以  $f(z) = c$  在基本周期内的零点个数与极点个数相同。□

这一结论实际上是紧 Riemann 面之间全纯映射性质的特例, 设  $X, Y$  是连通紧 Riemann 面, 如果  $f: X \rightarrow Y$  是非常值全纯映射, 则对任意  $y \in Y$ , 原像  $f^{-1}(y)$  的元素个数都相等且有限。特别的, 椭圆函数等价于环面  $\mathbb{C}/\Lambda$  到复球面  $\mathbb{C}P^1$  的全纯映射, 而极点正是  $\infty$  的原像。

## 6.2 Weierstrass $\wp$ 函数

给定上半平面的复数  $\omega$  (即  $\text{Im}(\omega) > 0$ ) 和格  $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z}$ , 定义 Weierstrass  $\wp$  函数为

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right).$$

对于任何有界闭集内的  $z \notin \Lambda$ , 后一项无穷和中的项在  $|\tau| \rightarrow \infty$  时是

$$\frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} = \frac{2z\tau - z^2}{\tau^2(z - \tau)^2} = O(\tau^{-3}).$$

所以  $\wp(z)$  在  $\Lambda$  外内闭一致收敛, 于是  $\wp$  是定义在  $\mathbb{C}$  上的亚纯函数, 并且  $\Lambda$  中的点都是二重极点。下面说明  $\wp$  以  $\Lambda$  为周期, 难点在于  $1/\tau^2$  求和不收敛, 因此不能随意换序。

**引理 6.5.**  $\wp$  是以  $\Lambda$  为周期的椭圆函数。

证明. 因为内闭一致收敛, 所以  $\wp$  可以逐项求导, 得

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\tau \in \Lambda} \frac{1}{(z - \tau)^3},$$

所以  $\wp'(z)$  以  $\Lambda$  中的数为周期。对于  $\lambda = 1$  或  $\omega$ , 亚纯函数  $\wp(z + \lambda) - \wp(z)$  的导数等于 0, 所以只能是常值函数  $C$ 。取  $z = -\lambda/2$ , 这当然不是  $\wp$  的极点, 我们得到

$$\wp\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + C.$$

注意到  $\wp$  是偶函数, 所以  $C = 0$ 。这就说明 1 和  $\omega$  是  $\wp$  的周期, 故  $\Lambda$  都是  $\wp$  的周期。  $\square$

应用椭圆函数的理论, 命题 6.4 表明在基本周期内,  $\wp$  只有一个二重极点 0, 所以  $\wp$  的零点重数之和也等于 2。类似的,  $\wp'$  只有一个三重极点 0, 所以  $\wp'$  的零点重数之和等于 3。

对于  $n > 1$ , 定义 Eisenstein 级数

$$G_{2n}(\omega) = \sum_{\tau \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\tau^{2n}} = \sum_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(a + b\omega)^{2n}}.$$

这里  $n > 1$  保证了绝对收敛。Eisenstein 级数在模形式 (modular form) 理论中具有重要地位, 其 Fourier 展开式系数蕴含了数论信息, 本文按下不表。进一步, 记

$$g_2(\omega) = 60G_4(\omega), \quad g_3(\omega) = 140G_6(\omega).$$

在不引起混淆时, 常省略  $\omega$  而简记为  $G_{2n}$  以及  $g_2, g_3$ 。

**命题 6.6.**  $\wp$  函数满足如下函数方程:

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3.$$

证明. 令  $f(z) = (\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + g_2\wp(z) + g_3$ , 则  $f$  是以  $\Lambda$  为周期的椭圆函数, 唯一可能的极点是 0。考虑 0 处的 Laurent 展开, 按定义有 (注意奇数次方求和抵消等于 0)

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in \Lambda \setminus \{0\}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\tau^2} \left(\frac{z}{\tau}\right)^n = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)G_{2n+2}z^{2n}.$$

所以

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 &= (-2z^{-3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + O(z^5))^2 = 4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + O(z^2), \\ (\wp(z))^3 &= (z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + O(z^6))^3 = z^{-6} + 9G_4z^{-2} + 15G_6 + O(z^2). \end{aligned}$$

于是得到  $f(z)$  在 0 处的 Laurent 展开式

$$f(z) = (4 - 4)z^{-6} + (-24G_4 - 36G_4 + g_2)z^{-2} + (-80G_6 - 60G_6 + g_3) + O(z^2) = O(z^2).$$

所以 0 不是  $f$  的极点, 进而  $f$  全纯且  $f(0) = 0$ 。全纯椭圆函数只有常数, 故  $f$  恒等于 0。□

命题6.6的右边还可以进行因式分解。记

$$e_1 = \wp\left(\frac{1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{1+\omega}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

因为  $\wp'$  是奇函数且以  $\Lambda$  为周期, 所以

$$\wp'\left(\frac{1}{2}\right) = \wp'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\wp'\left(\frac{1}{2}\right),$$

也就是说  $\wp'(1/2) = 0$ , 由此我们可以看出  $\wp(z) - e_1$  在  $1/2$  处有二重零点, 进而这就是全部零点。同理可证  $\wp'((1+\omega)/2) = \wp'(\omega/2) = 0$ , 这就是  $\wp'$  在基本周期内的全部零点。

**命题 6.7.**  $\wp$  满足如下函数方程:

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3).$$

证明. 令

$$h(z) = \frac{(\wp'(z))^2}{4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)},$$

则  $h(z)$  可能的极点是  $\wp'$  的极点 0 和  $\wp(z) - e_i$  的零点  $1/2, (1+\omega)/2, \omega/2$ 。 $\wp'(z)$  的极点 0 有三重, 而  $\wp(z)$  在 0 处是二重极点, 所以分子分母都是六重极点, 表明 0 不是  $h$  的极点。 $1/2$  是  $\wp'$  的一重零点和  $\wp(z) - e_1$  的二重零点, 所以  $1/2$  也不是  $h$  的极点。同理  $(1+\omega)/2, \omega/2$  都不是  $h$  的极点。综上,  $h(z)$  其实是一个全纯函数, 从而是常数。比较 0 处的 Laurent 展开的首项, 分子上是  $(-2z^{-3})^2$ , 分母上是  $4(z^{-2})^3$ , 所以  $h(0) = 1$ , 证毕。□

比较命题6.6和命题6.7可以得到:

**命题 6.8.** 常数  $e_1, e_2, e_3$  满足

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad 4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = -g_2, \quad 4e_1e_2e_3 = g_3.$$

回到定理6.1的证明上来, 需要用到  $\omega = i$  时的 Weierstrass  $\wp$  函数, 这是因为

$$g_2(i) = 60 \sum_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(a+bi)^4}$$

定理6.1的证明. 根据命题6.8, 计算  $g_2(i)$  只消求出  $e_1, e_2, e_3$ . 注意到  $\omega = i$  导致  $i\Lambda = \Lambda$ , 所以

$$\begin{aligned}\wp(iz) &= -\frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(iz - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{\tau \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z + i\tau)^2} - \frac{1}{(i\tau)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{z^2} - \sum_{\tau \in i\Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z + \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right) = -\wp(-z) = -\wp(z).\end{aligned}$$

所以  $e_3 = \wp(i/2) = -\wp(1/2) = -e_1$ , 结合命题6.8的第一个式子可知  $e_2 = 0$ , 进而

$$g_2 = 4e_1^2, \quad g_3 = 0.$$

难点在于计算  $e_1$ . 形式上看, 因为  $\wp(0) = \infty$ , 有如下积分等式:

$$-\int_{\wp(z)}^{\infty} \frac{d\wp}{\wp'} = z.$$

若要仔细说明, 还需要考察极点 (即  $\wp'$  的零点) 和路径选取的影响. 好在下面只取  $z = 1/2$ , 可以严格论述. 注意到  $e_2 = 0$  表明  $(1+i)/2$  是  $\wp$  在基本周期内的 (唯一) 二重零点, 并且按定义可知当  $z \in \mathbb{R}$  时亦有  $\wp(z) \in \mathbb{R}$ . 周期性和奇偶性表明  $\wp(1-z) = \wp(z)$ , 又基本周期内每个值取到 2 次, 并且 0 处 Laurent 展开首项是  $z^{-2}$ , 所以当  $z \in [0, 1/2]$  时  $\wp(z)$  严格单调递减, 取值从  $\infty$  跑到  $e_1 > 0$ . 于是可以定义单调递减的反函数  $\wp^{-1}: [e_1, \infty] \rightarrow [0, 1/2]$ . 考虑任意  $z \in (0, 1/2)$  和充分小的  $\varepsilon > 0$ , 对  $t \in [\varepsilon, z]$  换元  $t = \wp^{-1}(s)$ , 则

$$z - \varepsilon = \int_{\varepsilon}^z dt = - \int_{\wp(z)}^{\wp(\varepsilon)} \frac{dx}{\wp'(\wp^{-1}(s))}.$$

由单调性可知在  $(0, 1/2)$  上  $\wp' < 0$  ( $\wp'$  的零点不在这个范围内), 结合命题6.6得

$$\wp'(\wp^{-1}(s)) = -\sqrt{4s^3 - 4e_1^2 s}.$$

现在令  $z \rightarrow 1/2-$  和  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , 就得到

$$\frac{1}{2} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - 4e_1^2 s}} = \frac{1}{2\sqrt{e_1}} \int_1^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s^3 - s}}.$$

换元  $s = 1/x^2$  可知

$$g_2 = 4e_1^2 = 4 \left( \int_1^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s^3 - s}} \right)^4 = 4 \left( 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} \right)^4.$$

这就完成了定理6.1的证明. □

$\wp$  函数能发挥作用的关键是  $i\Lambda = \Lambda$ , 这就引出所谓复乘 (complex multiplication) 理论, 不过这与分析的关系就不大了. 感兴趣的读者可以尝试通过计算  $g_3(e^{2\pi i/3})$  证明如下恒等式:

$$\sum_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(a + be^{2\pi i/3})^6} = \frac{27}{2240} \left( 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}} \right)^6.$$

## 7 Picard 定理

复变中以下两个结论是熟知的: Liouville 定理表明非常值整函数一定无界; Casorati-Weierstrass 定理表明本性奇点附近的像集一定在  $\mathbb{C}$  中稠密。而两个 Picard 定理则给出了更强的结果: Picard 小定理表明非常值整函数一定能取到除了至多一个例外值以外的所有复数; Picard 大定理是说本性奇点附近能够取到除了至多一个例外值之外的每个复数无穷多次。

本文将用拓扑学中覆叠空间与映射提升的方法证明两个 Picard 定理。如果  $f$  是 (连通) Riemann 面  $X$  到  $Y$  的全纯映射, 那么  $f$  可以提升为  $X$  的万有覆叠空间  $\tilde{X}$  到  $Y$  的任何覆叠空间  $\tilde{Y}$  的全纯映射  $\tilde{f}$ 。记  $\pi_X: \tilde{X} \rightarrow X$  和  $\pi_Y: \tilde{Y} \rightarrow Y$  是相应的覆叠映射, 则有交换图

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

应该注意的是, 本文谈论的覆叠都是 Riemann 面之间的全纯映射。万有覆叠空间在相差解析同构的意义下唯一确定, 解析同构的 Riemann 面具有相同的万有覆叠。解析同构比拓扑的同胚更精细。比如  $\mathbb{C}$  与开单位圆盘  $U$  同胚但不解析同构。

### 7.1 Picard 小定理

如果已知  $\tilde{X} = \mathbb{C}$  且  $\tilde{Y} = U$ , 则 Liouville 定理表明  $\tilde{f}$  是常数, 进而  $f$  只能是常数。因此核心问题是寻找覆叠空间, 特别是如何确定万有覆叠。来看一些例子。

**例 7.1** (穿孔平面  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ )。指数映射  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  是覆叠, 故  $\mathbb{C}^*$  的万有覆叠空间是  $\mathbb{C}$ 。

**例 7.2** (穿孔圆盘  $U^* = U \setminus \{0\}$ )。指数映射限制在左半平面上  $\exp: \{\operatorname{Re}(z) < 0\} \rightarrow U^*$  是覆叠, 而半平面  $\{\operatorname{Re}(z) < 0\}$  同胚于  $U$ , 故  $U^*$  的万有覆叠空间是  $U$ 。

**例 7.3** (复环面  $T := \mathbb{C}/\Lambda$ )。设  $\Lambda := \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$ , 其中  $\omega_1, \omega_2$  是实线性无关的复数。则  $\mathbb{C} \rightarrow T: z \mapsto z + \Lambda$  是覆叠映射, 从而  $T$  的万有覆叠空间是  $\mathbb{C}$ 。

复环面可以说是最简单且具有最丰富结构的 Riemann 面之一, 比如说可以将其实现为椭圆曲线 (所用的工具就是之前介绍过的 Weierstrass  $\wp$  函数)。虽然环面的拓扑结构乃至光滑结构都是唯一的, 但其上的复结构不是唯一的! 这些问题都不在本文的讨论范围内。

计算万有覆叠空间通常是困难的, 读者可以尝试计算平面挖掉两个点, 即  $\mathbb{C} \setminus \{a, b\} (a \neq b)$  的万有覆叠。显然对于任何一对  $a, b$ , 相应的空间都是解析同构的 (借助一次函数即可)。

好消息是前人已经铺好了道路, 即如下的单值化定理, 其证明已经大大超出本文的范围:



**定理 7.4** (单值化定理). 单连通 Riemann 面精确到解析同构只有复平面  $\mathbb{C}$ 、复球面  $\mathbb{CP}^1$ 、开单位圆盘  $U$  三种。一切 Riemann 面的万有覆盖可以分类如下：

- 穿孔平面  $\mathbb{C}^*$ 、复平面  $\mathbb{C}$ 、复环面  $T := \mathbb{C}/\Lambda$  的万有覆盖空间是  $\mathbb{C}$ ；
- 复球面  $\mathbb{CP}^1$  的万有覆盖空间是  $\mathbb{CP}^1$ ；
- 除了与以上四种解析同构的情况之外，任何 Riemann 面的万有覆盖空间都是  $U$ 。

利用单值化定理可知， $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$  的万有覆盖空间是  $U$ ，由此立即可得 Picard 小定理。定理中的例外值（即不属于  $f$  的值域的数）是可能存在的，比如整函数  $e^z$  没有零点。

**定理 7.5** (Picard 小定理). 设  $f$  是非常值整函数，则至多只有一个复数不在  $f$  的值域中。

证明. 如果  $f$  取不到两个值  $a, b$ ，则  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$  可以提升为  $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow U$ ，Liouville 定理表明  $\tilde{f}$  只能是常值函数，从而  $f$  是常值函数，矛盾！ $\square$

Picard 小定理的证明可以不依赖单值化定理。事实上，模形式理论中的  $j$  不变量给出了覆盖映射  $\mathcal{H}' \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1728\}$ ，其中  $\mathcal{H}$  是上半平面  $\mathcal{H} = \{\text{Im}(z) > 0\}$  去掉  $i$  和  $e^{2\pi i/3}$  在  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  的分式线性变换作用下的轨道；因为  $\mathcal{H}$  解析同构于  $U$ ，所以存在开子集  $U' \subset U$  是  $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$  的覆盖空间。映射提升对像空间的任意覆盖都是存在的，未必需要是万有覆盖。于是相同的论述就能证明 Picard 小定理。这一注记也适用于 Picard 大定理。

大致描绘  $j$  不变量的信息如下<sup>2</sup>。所谓分式线性变换，即

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

特别的， $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  的作用保持  $\mathcal{H}$  不变，可以研究其轨道以及商空间。映射  $j: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  的定义与先前介绍过的 Eisenstein 级数有关：

$$j(z) = \frac{1728g_2(z)^3}{g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2}.$$

可以证明  $j(z)$  在  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  作用下不变，从而下降为  $Y(1) := \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathcal{Y}$  上的全纯函数。简单可知  $j(\infty) = \infty$ ，对  $Y(1)$  添入尖点  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})\infty$  得到紧 Riemann 面  $X(1)$ ，则可以证明  $X(1)$  通过  $j$  不变量解析同构于复球面  $\mathbb{CP}^1$ 。因为商映射  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{Y}(1)$  除了在椭圆点（即存在  $\gamma \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  使得  $\gamma z = z$  的  $z \in \mathcal{H}$ ）之外都是覆盖，而椭圆点有且只有  $i$  和  $e^{2\pi i/3}$  的轨道，于是  $\mathcal{H}' \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{j(i), j(e^{2\pi i/3})\}$  是覆盖映射。先前计算过  $g_3(i) = 0$ ，所以  $j(i) = 1728$ ；利用  $\Lambda = \mathbb{Z} + \oplus e^{2\pi i/3}\mathbb{Z}$  的对称性  $e^{2\pi i/3}\Lambda = \Lambda$  可知  $g_2(e^{2\pi i/3}) = 0$ ，所以  $j(e^{2\pi i/3}) = 0$ 。

下面给出 Picard 小定理的简单应用一则：

<sup>2</sup>详细理论可见李文威，模形式初步，科学出版社，2020。

**命题 7.6.** 设  $f, g$  是非常值整函数, 如果  $e^{f(z)} - e^{g(z)}$  是多项式, 则  $f - g$  是  $2\pi i$  的整数倍。

证明. 首先证明  $f - g$  必须是常数。若不然, Picard 小定理表明  $f(z) - g(z)$  能够无穷多次取到  $2\pi i$  的整数倍, 所以  $e^{f(z)} - e^{g(z)}$  有无穷多个零点, 作为多项式只能恒等于 0。但同时  $f(z) - g(z)$  也能取到不是  $2\pi i$  的整数倍的值, 所以  $e^{f(z)} - e^{g(z)}$  不恒为零, 矛盾!

设  $f - g = c \in \mathbb{C}$ , 那么  $e^{f(z)} - e^{g(z)} = e^{g(z)}(e^c - 1)$  是多项式。因为  $e^{g(z)}$  不是常数且没有零点, 所以不可能是多项式。故  $e^c - 1 = 0$ , 即  $c$  是  $2\pi i$  的整数倍。  $\square$

## 7.2 Picard 大定理

现在讨论 Picard 大定理。例外值也是可能存在的, 比如  $f(z) = e^{1/z}$  没有零点。进一步, 因为  $\Omega$  可以取得任意小, 所以  $f$  可以取到除了例外值之外的每个数无穷多次。

**定理 7.7** (Picard 大定理). 设  $f$  在  $0 < |z| < 1$  上全纯且  $0$  是  $f$  的本性奇点, 则对于任意包含  $0$  的开集  $\Omega$ , 至多只有一个复数不属于  $f(\Omega \setminus \{0\})$ 。

证明. 通过伸缩不妨设  $\Omega = U$ 。下面采用反证法, 假设  $f$  在  $\Omega \setminus \{0\}$  上取不到两个值  $a, b$ , 由例 7.2 和单值化定理可将  $f$  提升为  $\tilde{f}: U \rightarrow U$ , 有交换图

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{f}} & U \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ U^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \end{array}.$$

取定  $c \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ , 因为  $f$  在本性奇点附近的像稠密, 所以存在一列  $a_n \in U^*$  满足  $a_n \rightarrow 0$  且  $f(a_n/2) \rightarrow c$ 。定义  $U^*$  到  $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$  的全纯函数  $f_n(z) := f(a_n z)$ , 则  $f_n(1/2) \rightarrow c$ 。任取  $\tilde{x} \in \pi_1^{-1}(1/2)$  和  $\tilde{y} \in \pi_2^{-1}(c)$ , 则可以适当选取  $f_n$  的提升  $\tilde{f}_n: U \rightarrow U$  使得  $\tilde{f}_n(\tilde{x}) \rightarrow \tilde{y}$ 。这些  $\tilde{f}_n$  一致有界, 于是构成正规族, 存在子列  $\tilde{f}_{n_k}$  内闭一致收敛到某个全纯函数  $\tilde{F}: U \rightarrow \mathbb{C}$ 。显然  $\tilde{F}(U) \subseteq \overline{U}$ , 如果  $\tilde{F}(U)$  取到  $\partial U$  中的点, 则根据开映射定理可知  $\tilde{F}$  只能是常值函数; 但构造方式表明  $\tilde{F}(\tilde{x}) = \tilde{y}$  位于  $U$  的内部, 矛盾! 所以  $\tilde{F}(U) \subseteq U$ 。

因为  $\tilde{f}_{n_k}$  在  $\pi_1$  的每个轨道上都相等, 所以  $\tilde{F}$  也在  $\pi_1$  的每个轨道上都相等, 从而可以将  $\tilde{F}$  下降为  $F: U^* \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ 。因为  $\pi_1$  是覆盖, 每个  $U^*$  中的紧集都可以实现为  $U$  中紧集的投影, 所以  $f_{n_k}$  也内闭一致收敛到  $f$ 。因为  $f$  在  $|z| = 1/2$  上有界, 所以  $f_{n_k}$  在  $|z| = 1/2$  上关于  $k$  一致有界, 也就是说  $f(z)$  在  $|z| = |a_k|/2$  上一致有界。由强极值原理, 在圆环  $|a_k| < |z| < |a_1|$  上  $f(z)$  都一致有界, 结合  $|a_k| \rightarrow 0$  可知  $f$  在  $0$  附近有界, 所以  $0$  只是可去奇点, 矛盾!  $\square$

通常的复分析资料借助 Schottky 定理证明 Picard 大定理, 涉及到的计算并不平凡。这里给出的方法巧妙而简洁, 关键是用到 Montel 关于正规族的结论, 或者说 Arzelà–Ascoli 引理的推论: 内闭一致有界的全纯函数列必有内闭一致收敛子列。

下面这个问题是 2021 年丘赛预赛的分析组第四题，可以用 Picard 大定理轻松解决：

**定理 7.8.** 设  $p(z)$  是非零多项式，则  $e^z = p(z)$  在复平面上有无穷多个解。

证明. 因为  $p$  不是 0，所以  $f(z) := e^{1/z}/p(1/z)$  在 0 处是本性奇点且取不到 0，Picard 大定理表明  $f(z) = 1$  一定有无无穷多个解，也就是说  $e^z = p(z)$  有无穷多个解。□

不依赖 Picard 大定理的证明如下：因为  $|e^z - p(z)| \leq Ce^{|z|}$ ，复变的理论表明

$$e^z - p(z) = e^{az+b} \prod_n \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{z/\alpha_n}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

其中  $\alpha_n$  取遍  $e^z - p(z)$  的所有零点（计重数）。如果  $e^z = p(z)$  只有有限多个解，则

$$e^z - p(z) = e^{cz} q(z), \quad c \in \mathbb{C}$$

其中  $q(z)$  是另一个多项式。容易说明这是不可能的！

### 7.3 整函数的 Fermat 大定理

下面借助单值化定理讨论整函数版本的 Fermat 大定理。值得注意的是，存在整函数  $f, g, h$  给出  $f^3 + g^3 = h^3$  的非平凡解。这是因为所有椭圆曲线都可以化为 Weierstrass 标准型

$$Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3,$$

且  $\wp$  函数可以对其参数化。也就是说，存在非常值亚纯函数  $f, g$  满足  $f(z)^3 + g(z)^3 = 1$ 。

如果将亚纯函数加强为整函数，则非平凡解不存在。显然 3 次的要求是必要的，因为 2 次的反例由  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$  给出；而更高次的情况蕴含在稍后的命题 7.10 中。

**命题 7.9.** 不存在非常值整函数  $f, g$  满足  $f(z)^3 + g(z)^3 = 1$ 。

证明. 若不然， $z \mapsto [f(z) : g(z) : 1]$  是  $\mathbb{C}$  到光滑射影三次曲线  $X^3 + Y^3 = Z^3$  的非常值全纯映射，且取不到无穷远点  $[0 : 0 : 1]$ 。单值化定理表明光滑射影三次曲线（解析同构于环面）去掉一个点之后的万有覆盖是  $U$ ，从而  $f, g$  必须是常值函数，矛盾！□

上面的证明之所以对方程  $f(z)^3 + g(z)^3 = h(z)^3$  失效，是因为椭圆曲线亏格为 1，万有覆盖空间是  $\mathbb{C}$ ，不会导致矛盾。另一种基于 Picard 小定理的证明如下：记  $\omega = e^{2\pi i/3}$ ，考虑

$$\phi(z) := \frac{f(z) + \omega g(z)}{f(z) + g(z)}.$$

如果  $f(z)^3 + g(z)^3 = 1$ ，那么  $f(z) + \omega^k g(z) (k = 0, 1, 2)$  都不是 0，由此可见  $\phi(z)$  是整函数，且容易验证  $\phi(z) = 0$  和  $\phi(z) = -\omega^2$  都无解，与 Picard 小定理矛盾！

虽然整函数版本的 Fermat 大定理对于  $n = 3$  并不成立, 但在  $n \geq 4$  时是对的。所谓非平凡解, 指的是  $f, g, h$  均非常值, 且不是同一个整函数的常数倍。

**命题 7.10.** 设正整数  $n \geq 4$ , 则  $f(z)^n + g(z)^n = h(z)^n$  没有非平凡整函数解。

证明. 不妨设  $h$  不恒为 0, 则  $z \mapsto [f(z) : g(z) : h(z)]$  是  $\mathbb{C}$  到光滑射影  $n$  次曲线  $X^n + Y^n = Z^n$  的非常值整函数, 其亏格  $g = (n-1)(n-2)/2 > 1$ , 单值化定理表明万有覆盖空间是  $U$ , 所以  $f/h, g/h$  都是常值函数, 也就是平凡解。□

顺带一提, 复系数多项式的 Fermat 大定理对  $n \geq 3$  都成立; 而  $n = 2$  时有反例

$$(2x^2 - 1)^2 + (2x)^2 = (2x^2 + 1)^2.$$

**命题 7.11.** 设正整数  $n \geq 3$ , 则不存在非常值多项式  $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$  使得  $f(x)^n + g(x)^n = h(x)^n$ 。

证明. 记  $n$  次单位根  $\zeta := e^{2\pi i/n}$ , 设  $(f, g, h)$  是总次数最小的非常数, 则

$$f^n = \prod_{k=0}^{n-1} (h - \zeta^k g).$$

熟知  $\mathbb{C}[x]$  是唯一分解整环, 并且易见对于不同的  $k$  而言,  $h - \zeta^k g$  是两两互素的。又因为乘积是  $n$  次幂, 所以每个  $h - \zeta^k g$  都是  $n$  次幂。断言存在  $\alpha, \beta \neq 0$  使得

$$\alpha(h - g) + \beta(h - \zeta g) = h - \zeta^2 g.$$

事实上, 只需要满足线性方程组

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha + \zeta\beta = \zeta^2. \end{cases}$$

只要  $n \geq 3$ , 就有  $\alpha, \beta$  均不为 0。因为  $\alpha(h - g), \beta(h - \zeta g), h - \zeta^2 g$  都是多项式的  $n$  次幂, 且总次数不会超过  $3/n \times \max\{\deg g, \deg h\}$ , 比  $\deg f + \deg g + \deg h$  严格更小, 矛盾! □

这个证明与原始 Fermat 大定理的一个著名伪证完全一致, 那里出现的问题是代数整数环  $\mathbb{Z}[\zeta]$  未必是唯一分解整环, 而此处  $\mathbb{C}[x]$  作为唯一分解整环上的多项式环一定是唯一分解整环。

## 8 等差数列中有无穷多个素数

与素数分布相关的问题始终位于数论的核心，往往叙述简洁但证明深奥。比如 Bertrand-Chebyshev 定理<sup>3</sup>表明对任意正整数  $n > 1$ ，都存在素数  $p$  满足  $n < p < 2n$ ；著名的素数定理<sup>4</sup>是说，如果用  $\pi(x)$  表示不超过  $x$  的素数个数，则当  $x \rightarrow \infty$  时  $\pi(x) \sim x/\ln x$ ；一个至今无法回答的问题是，是否存在无穷多个形如  $n^2 + 1$  的素数。

本文将证明 Dirichlet 定理，即首项与公差互素的正整数等差数列中一定有无穷多个素数；换言之，任给互素的正整数  $l, q$ ，存在无穷多个素数  $p \equiv l \pmod{q}$ 。精确表述见定理 8.11。

当  $q = 1$  时，Dirichlet 定理退化为素数有无穷多个，其证明最早可以追溯到 Euclid 的《几何原本》：首先素数是存在的，比如 2 就是一个素数；如果只有有限多个素数  $p_1, \dots, p_n$ ，那么  $p_1 \cdots p_n + 1$  的任何素因子必然异于这些  $p_i$ ，矛盾！另一种方式是注意到

$$\sum_{\text{素数 } p} \frac{1}{p} = \infty.$$

由此可见素数有无穷多个。受此启发，要证明 Dirichlet 定理只需验证

$$\sum_{\text{素数 } p \equiv l \pmod{q}} \frac{1}{p} = \infty.$$

证明这两个式子分别需要引入 Riemann  $\zeta$  函数

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

和 Dirichlet  $L$  函数

$$L(z, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z},$$

其中  $\chi$  是模  $q$  的 Dirichlet 特征。

### 8.1 Riemann $\zeta$ 函数

由于系数均大于 0，容易看出 Riemann  $\zeta$  函数在  $\operatorname{Re}(z) > 1$  上全纯。但为了稍后讨论 Dirichlet  $L$  函数方便，这里先回顾 Dirichlet 级数的全纯性。设  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  是一列单增的非负实数，对于系数  $a_n \in \mathbb{C}$ ，定义 Dirichlet 级数

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}.$$

通常所说的 Dirichlet 级数无非是取  $\lambda_n = \ln n$ 。约定幅角  $\arg$  取值范围是  $(-\pi, \pi]$

<sup>3</sup>证明可见 M. S. Aigner and G. M. Ziegler, *Proofs from The Book*, sixth edition, Springer, 2018.

<sup>4</sup>证明可见 P. D. Lax and L. A. Zalcman, *Complex proofs of real theorems*, Amer. Math. Soc., 2012.

**引理 8.1.** 设 *Dirichlet* 级数  $f$  在  $z_0$  处收敛, 则对任意  $0 \leq \alpha < \pi/2$ , 在闭区域

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(z_0), |\arg(z - z_0)| \leq \alpha\}$$

上  $f(z)$  一致收敛, 从而  $f(z)$  是半平面  $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$  上的全纯函数。

证明. 通过平移自变量可以不妨设  $z_0 = 0$ . 记上述闭区域为  $K$ , 对任意  $m < m'$ , 分部求和得

$$\sum_{n=m}^{m'} a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=m}^{m'-1} \left( \sum_{k=m}^n a_k \right) (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}) + \left( \sum_{k=m}^{m'} a_k \right) e^{-\lambda_{m'} z}.$$

因为  $\lambda_n$  单增, 所以

$$|e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| = \left| z \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-tz} dt \right| \leq |z| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-t \operatorname{Re}(z)} dt = \frac{|z|}{\operatorname{Re}(z)} (e^{-\lambda_n \operatorname{Re}(z)} - e^{-\lambda_{n+1} \operatorname{Re}(z)}).$$

条件表明  $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 所以对任意  $\varepsilon > 0$ , 只要  $m$  充分大, 对一切  $n \geq m$  都有  $|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$ . 再注意到在  $K$  上有  $|z|/\operatorname{Re}(z) \leq 1/\cos \alpha$ , 所以对一切  $z \in K$  有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^{m'} a_n e^{-\lambda_n z} \right| &\leq \sum_{n=m}^{m'-1} \frac{\varepsilon}{\cos \alpha} (e^{-\lambda_n \operatorname{Re}(z)} - e^{-\lambda_{n+1} \operatorname{Re}(z)}) + \varepsilon \\ &= \frac{\varepsilon}{\cos \alpha} (e^{-\lambda_m \operatorname{Re}(z)} - e^{-\lambda_{m'} \operatorname{Re}(z)}) + \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{\cos \alpha} + \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了  $f$  在  $K$  上一致收敛, 从而给出半平面  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上的全纯函数。  $\square$

熟知对一切实数  $s > 1$ , 都有  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$  收敛, 于是引理 8.1 表明 Riemann  $\zeta$  函数在半平面  $\operatorname{Re}(z) > 1$  上全纯。如下无穷乘积展开来自 Euler:

**命题 8.2** (Euler 乘积公式). 设  $\operatorname{Re}(z) > 1$ , 则

$$\zeta(z) = \prod_{\text{素数 } p} (1 - p^{-z})^{-1}.$$

证明. 根据定义可知

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^z} = \sum_{2 \nmid n} \frac{1}{n^z}.$$

更一般的, 设不超过  $N$  的素数为  $p_1, \dots, p_k$ , 则

$$\zeta(z) \prod_{\text{素数 } p \leq N} (1 - p^{-z}) = \sum_{p_1, \dots, p_k \nmid n} \frac{1}{n^z}.$$

右边的求和除了第一项是 1 之外, 不会包含不超过  $N$  的项; 又  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$  绝对收敛, 所以

$$\zeta(z) \prod_{\text{素数 } p} (1 - p^{-z}) = 1.$$

因为无穷乘积在  $\operatorname{Re}(z) > 1$  上内闭一致收敛且非零, 所以移到右边可以逐项取逆。□

作为推论,  $\zeta(z)$  在  $\operatorname{Re}(z) > 1$  上没有零点。一个更深刻的结果是, 一旦定义了解析延拓, 则  $\zeta(z)$  在  $\operatorname{Re}(z) = 1$  上也没有零点。这是素数定理的关键, 本文不予讨论 (简单证明可见 [SS])。

下面说明  $\zeta$  函数可以亚纯延拓到  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上, 且仅在  $z = 1$  处有留数为 1 的一重极点:

**命题 8.3.** 存在  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上的全纯函数  $\phi(z)$ , 使得在  $\operatorname{Re}(z) > 1$  上有

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \phi(z).$$

证明. 注意到当  $\operatorname{Re}(z) > 1$  时

$$\frac{1}{z-1} = \int_1^{\infty} t^{-z} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} t^{-z} dt.$$

所以

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (n^{-z} - t^{-z}) dt.$$

定义后一项无穷和为  $\phi(z)$ 。再注意到

$$\left| \int_n^{n+1} (n^{-z} - t^{-z}) dt \right| \leq |n^{-z} - (n+1)^{-z}| \leq \sup_{t \in [n, n+1]} |-zt^{-z-1}| = \frac{|z|}{n^{\operatorname{Re}(z)+1}}.$$

由此可以看出  $\phi$  是  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上的全纯函数。□

进一步,  $\zeta$  函数可以亚纯延拓到整个平面上, 且仍然只在  $z = 1$  处有一重极点, 本文不会用到这一事实, 因而略去证明。用 Poisson 求和公式可以证明函数方程

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-z} \cos \frac{\pi z}{2} \Gamma(z) \zeta(z), \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1.$$

上式右边是  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上的亚纯函数, 照此方式定义  $\zeta(1-z)$ , 就将  $\zeta$  函数延拓到了  $\operatorname{Re}(z) < 1$  上。利用函数方程以及  $\zeta$  函数在  $\operatorname{Re}(z) > 1$  上没有零点的事实, 可以证明  $\zeta$  函数在  $\operatorname{Re}(z) < 0$  上的零点恰好是全体负偶数  $-2, -4, \dots$ , 这些零点称为平凡零点。著名的 Riemann 猜想是说,  $\zeta$  函数的非平凡零点都落在  $\operatorname{Re}(z) = 1/2$  上。之前提到过, 在素数定理的证明中发挥关键作用的是  $\zeta$  函数在  $\operatorname{Re}(z) = 1$  上没有零点, 因而可以想象 Riemann 猜想蕴含了丰富的数论信息。

**命题 8.4.** 当实数  $s \rightarrow 1+$  时, 有

$$\sum_{\text{素数 } p} \frac{1}{p^s} \sim \ln \frac{1}{s-1}.$$

证明. 对于实数  $s > 1$ , 利用 Euler 乘积公式可知

$$\ln \zeta(s) = - \sum_{\text{素数 } p} \ln(1 - p^{-s}) = \sum_{\text{素数 } p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} = \sum_{\text{素数 } p} \frac{1}{p^s} + \sum_{\text{素数 } p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}.$$

最后一步是因为正项级数求和与顺序无关. 注意后一项是一致有界的, 因为对于  $s \geq 1$  有

$$\sum_{\text{素数 } p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \leq \sum_{\text{素数 } p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}} = \sum_{\text{素数 } p} \frac{1}{p^s(p^s - 1)} \leq \sum_{\text{素数 } p} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

命题8.3表明当  $s \rightarrow 1+$  时  $\ln \zeta(s) \sim \ln 1/(s-1)$ , 故结论得证.  $\square$

特别的, 由此可知  $\sum_{\text{素数 } p} 1/p$  发散, 从而素数有无穷多个.

## 8.2 离散 Fourier 变换

设  $G$  是有限 Abel 群, 定义  $V$  是所有  $G \rightarrow \mathbb{C}$  的映射组成的集合, 则  $V$  是线性空间且  $\dim V = |G|$ . 在  $V$  上可以定义复内积

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}.$$

群  $G$  的特征是指从  $G$  到  $\mathbb{C}^*$  的环同态  $\chi$ . 特别的, 常值映射  $x \mapsto 1$  是一个特征, 称为平凡特征; 其余特征称为非平凡特征. 因为  $G$  是有限群, 所以任何特征  $\chi$  的取值都是  $|G|$  次单位根. 对任意  $x \in G$ , 有  $\chi(x)^{-1} = \overline{\chi(x)}$ , 所以  $\|\chi\| := \langle \chi, \chi \rangle = 1$ .

**引理 8.5.** 设  $\chi$  是非平凡特征, 则  $\sum_{x \in G} \chi(x) = 0$ .

证明. 对任意  $y \in G$ , 当  $x$  取遍  $G$  时  $xy$  也取遍  $G$ , 所以

$$\chi(y) \sum_{x \in G} \chi(x) = \sum_{x \in G} \chi(xy) = \sum_{x \in G} \chi(x).$$

因为  $\chi$  是非平凡特征, 存在  $y \in G$  使得  $\chi(y) \neq 1$ . 故  $\sum_{x \in G} \chi(x) = 0$ .  $\square$

**命题 8.6.** 全体特征构成  $V$  的标准正交基, 从而一共有  $|G|$  个特征.

证明. 设  $\chi, \chi'$  是不同的特征, 则  $\chi\chi'^{-1}$  是非平凡特征, 引理8.5表明

$$0 = \sum_{x \in G} \chi(x) \chi'(x)^{-1} = \sum_{x \in G} \chi(x) \overline{\chi'(x)} = |G| \langle \chi, \chi' \rangle.$$



所以不同的特征是正交的。下面证明特征张成的空间是整个  $V$ 。

对于  $x \in G$ ，定义线性算子  $T_x: V \rightarrow V$  为  $(T_x f)(\cdot) = f(x\cdot)$ 。显然  $T_x$  保持内积，而酉算子可以对角化；又  $T_x T_y = T_y T_x$ ，所以这些  $T_x$  可以同时对角化。也就是说  $V$  是所有  $T_x$  的一维公共特征子空间的直和。只需证明每个一维特征子空间都含有群  $G$  的特征。

设  $f \in V$  是所有  $T_x$  的公共特征向量，且  $f$  不恒为 0。用  $\lambda_x$  表示  $T_x$  对应的特征值，则

$$f(x) = (T_x f)(1) = \lambda_x f(1).$$

所以  $f(1) \neq 0$ ，否则与  $f$  不恒为 0 矛盾。注意到

$$f(xy) = (T_x f)(y) = \lambda_x f(y) = \lambda_x \lambda_y f(1).$$

所以  $\lambda_{xy} = \lambda_x \lambda_y$ ，即  $x \mapsto \lambda_x$  是特征。又  $\lambda_x = f(x)/f(1)$  与  $f$  成比例，证毕。  $\square$

显然两个特征的乘积仍是特征，记  $\hat{G}$  是  $G$  上全体特征组成的 Abel 群，则  $|\hat{G}| = |G|$ 。对于  $f \in V$ ，定义  $f$  关于特征  $\chi \in \hat{G}$  的 Fourier 系数为

$$a_\chi := \langle f, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\chi(x)}.$$

因为特征构成  $V$  的标准正交基，所以  $f \in V$  可以写成

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} a_\chi \chi.$$

这就是所谓离散 Fourier 变换。两边取模可以得到离散 Plancherel 公式

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|^2 = \sum_{\chi \in \hat{G}} |a_\chi|^2.$$

### 8.3 Dirichlet $L$ 函数

现在可以引进 Dirichlet 特征和  $L$  函数。给定整数  $q \geq 2$ ，对于  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$  的特征  $\chi$ ，将  $\chi$  按周期  $q$  延拓到全体与  $q$  互素的整数上，再规定当  $(n, q) \neq 1$  时  $\chi(n) = 0$ 。这样的函数  $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$  就称为模  $q$  的 Dirichlet 特征。换言之，Dirichlet 特征就是周期为  $q$  的完全积性函数，且在与  $q$  不互素的整数处取 0。根据命题 8.6，恰好有  $|(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times| = \varphi(q)$  个 Dirichlet 特征，其中  $\varphi(q)$  是 Euler 函数，表示不超过  $q$  且与  $q$  互素的正整数个数。

$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$  的平凡特征诱导平凡 Dirichlet 特征，记为  $\chi_0$ ，则  $\chi_0$  在与  $q$  互素的整数处取 1、不互素的整数处取 0。一个非平凡 Dirichlet 特征的例子是二次剩余的 Legendre 符号。

设  $\chi$  是模  $q$  的 Dirichlet 特征，定义 Dirichlet  $L$  函数为

$$L(z, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z}.$$

因为  $\chi(n)$  只能是 0 或者单位根, 所以对于实数  $s > 1$  而言  $L(s, \chi)$  收敛, 故  $L(z, \chi)$  是  $\operatorname{Re}(z) > 1$  上的全纯函数。仿照  $\zeta$  函数的 Euler 乘积公式, 利用  $\chi$  的完全积性可知:

**命题 8.7** (Euler 乘积公式). 对于  $\operatorname{Re}(z) > 1$ , 有

$$L(z, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z} = \prod_{\text{素数 } p} (1 - \chi(p)p^{-z})^{-1}.$$

由此可知  $L(z, \chi)$  在  $\operatorname{Re}(z) > 1$  上没有零点。亚纯延拓也是常规的:

**命题 8.8.** 对于平凡 *Dirichlet* 特征  $\chi_0$ , 可以将  $L(z, \chi_0)$  亚纯延拓到  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上, 且只在  $z = 1$  处有一重极点。而对于非平凡 *Dirichlet* 特征  $\chi$ , 定义式  $L(z, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n^z$  在  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上是收敛的全纯函数。

证明. 对于平凡 *Dirichlet* 特征  $\chi_0$ , Euler 乘积公式表明当  $\operatorname{Re}(z) > 1$  时

$$L(z, \chi_0) = \zeta(z) \prod_{\text{素数 } p|q} (1 - p^{-z}).$$

而右边是  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上的亚纯函数, 所以  $L(z, \chi_0)$  可以亚纯延拓到  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上, 并且由命题 8.3 可知  $L(z, \chi_0)$  和  $\zeta(z)$  一样只在  $z = 1$  处有一重极点。

而如果  $\chi$  非平凡, 引理 8.5 表明  $\chi(1) + \cdots + \chi(q) = 0$ , 再注意到  $|\chi(n)| \leq 1$ , 所以

$$\left| \sum_{n=1}^k \chi(n) \right| \leq q, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

又因为  $1/n^s$  单调递减趋于 0, 利用数学分析中的 *Dirichlet* 判别法可知, 对一切  $s > 0$  都有  $L(s, \chi)$  收敛。故引理 8.1 表明  $L(z, \chi)$  在  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上是收敛的全纯函数。□

*Dirichlet* 定理的证明中, 最关键的是对非平凡 *Dirichlet* 特征  $\chi$ , 有  $L(1, \chi) \neq 0$ 。这件事的证明需要用到如下关于正项 *Dirichlet* 级数的命题, 难点在于全纯延拓未必等于定义式。

**命题 8.9.** 设  $a_n \geq 0$  且  $\lambda_n \geq 0$  是一列单增正实数, 如果 *Dirichlet* 级数

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

在  $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$  上内闭一致收敛, 且  $f(z)$  可以在  $z_0$  的某个开邻域上全纯延拓, 则存在  $\varepsilon > 0$  使得  $f(z)$  的定义式在  $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0) - \varepsilon$  上内闭一致收敛。

证明. 不妨设  $z_0 = 0$ , 根据条件可知, 存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $f(z)$  在  $z = 1$  处的 Taylor 级数在以

1 为圆心、半径为  $1 + \varepsilon$  的圆上收敛。所以对于实数  $s \in (-\varepsilon, 0)$  有

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (s-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n}}{k!} (s-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n (1-s))^k}{k!} \cdot a_n e^{-\lambda_n}.$$

因为  $a_n, \lambda_n, 1-s \geq 0$ , 所以这是一个正项级数, 可以交换求和顺序, 得到

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n (1-s))^k}{k!} \cdot a_n e^{-\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n (1-s)} \cdot a_n e^{-\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}.$$

这就说明  $f(z)$  的定义式在  $z = s$  处收敛, 由引理 8.1 可知结论成立。□

**引理 8.10.** 设  $\chi$  是非平凡 Dirichlet 特征, 则  $L(1, \chi) \neq 0$ 。

证明. 如果不然, 注意模  $q$  的 Dirichlet 特征只有有限个, 因为  $L(z, \chi_0)$  的亚纯延拓在  $z = 1$  处只有一重极点, 所以  $\prod_{\chi} L(z, \chi)$  可以延拓为  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上的全纯函数。在  $\operatorname{Re}(z) > 1$  上有无穷乘积展开 (交换无穷乘积顺序合法是因为内闭一致收敛)

$$\prod_{\chi} L(z, \chi) = \prod_{\chi} \prod_{\text{素数 } p} (1 - \chi(p) p^{-z})^{-1} = \prod_{\text{素数 } p} \prod_{\chi} (1 - \chi(p) p^{-z}).$$

对于素数  $p$ , 如果  $p \mid q$ , 那么  $\chi(p) = 0$ , 从而在上式中对应的乘积为 1。而如果  $p \nmid q$ , 设  $p$  在  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}$  中的指数为  $f(p)$  (即最小的  $n \in \mathbb{N}$  使得  $p^n \equiv 1 \pmod{q}$ ), 利用有限 Abel 群结构定理容易证明  $\chi(p)$  正好取遍所有  $f(p)$  次单位根, 且每个单位根取到次数都相同, 即  $g(p) := \varphi(p)/f(p)$  次, 所以在上式中对应的乘积是  $(1 - p^{-f(p)z})^{-g(p)}$ 。综上可得

$$\prod_{\chi} L(z, \chi) = \prod_{\text{素数 } p \nmid q} (1 - p^{-f(p)z})^{-g(p)}.$$

上式右边在  $\operatorname{Re}(z) > 1$  上显然内闭一致收敛, 于是可以展开为 Dirichlet 级数, 而且系数都非负。根据命题 8.9 可知这个 Dirichlet 级数 (也就是这个无穷乘积) 在  $\operatorname{Re}(z) > 0$  上都收敛, 但这是不可能的, 因为对于  $s > 0$ , 有

$$\prod_{\text{素数 } p \nmid q} (1 - p^{-f(p)s})^{-g(p)} \geq \prod_{\text{素数 } p \nmid q} (1 - p^{-\varphi(q)s})^{-1} = L(\varphi(q)s, \chi_0).$$

而右边在  $s = 1/\varphi(q)$  时发散! 故不可能对某个  $\chi \neq \chi_0$  有  $L(1, \chi) = 0$ 。□

现在可以完成 Dirichlet 定理的证明了, 因为公差为 1 的情况等价于说素数有无穷多个, 只需考虑公差  $q \geq 2$  的情形。设正整数  $l$  满足  $(l, q) = 1$ , 定义

$$\delta_l(n) = \begin{cases} 1 & n \equiv l \pmod{p}, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

则  $\delta_l$  可以看成  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$  上的函数经过周期延拓再零延拓得到的, 由离散 Fourier 变换可知

$$\delta_l = \sum_{\chi} \langle \delta_l, \chi \rangle \chi = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi(l)} \chi.$$

**定理 8.11** (Dirichlet 定理). 设  $l, q \in \mathbb{N}$ , 其中  $q \geq 2$  且  $(l, q) = 1$ , 则当实数  $s \rightarrow 1+$  时

$$\sum_{\text{素数 } p \equiv l \pmod{q}} \frac{1}{p^s} \sim \frac{1}{\varphi(q)} \ln \frac{1}{s-1}.$$

由此立即可知存在无穷多个模  $q$  余  $l$  的素数。

证明. 当  $s > 1$  时 (请自行检验交换求和顺序是合法的)

$$\begin{aligned} \sum_{\text{素数 } p \equiv l \pmod{q}} \frac{1}{p^s} &= \sum_{\text{素数 } p} \frac{\delta_l(p)}{p^s} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi(l)} \sum_{\text{素数 } p} \frac{\chi(p)}{p^s} \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\text{素数 } p \nmid q} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(l)} \sum_{\text{素数 } p} \frac{\chi(p)}{p^s}. \end{aligned}$$

因为

$$\ln L(s, \chi) = \sum_{\text{素数 } p} \ln(1 - \chi(p)p^{-s}) = \sum_{\text{素数 } p} \frac{\chi(p)}{p^s} + \sum_{\text{素数 } p} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\chi(p)}{kp^{ks}}.$$

类似于命题 8.4 的证明可知, 后一项在  $s \rightarrow 1+$  时一致有界. 对于非平凡 Dirichlet 特征  $\chi$ , 引理 8.10 表明当  $s \rightarrow 1+$  时, 左边收敛于一个有限值, 所以  $\sum_{\text{素数 } p} \chi(p)/p^s$  一致有界. 又命题 8.4 给出  $\sum_{\text{素数 } p \nmid q} 1/p^s \sim \ln 1/(s-1)$ , 代入证明中的第一个表达式就得到 Dirichlet 定理的证明.  $\square$

用  $P$  表示全体素数的集合, 对于  $A \subseteq P$ , 定义  $A$  在  $P$  中的密度为 (如果极限存在)

$$d(A) := \lim_{s \rightarrow 1+} \frac{1}{\ln 1/(s-1)} \sum_{p \in A} \frac{1}{p^s}.$$

根据 Dirichlet 定理立刻得到, 对任何与  $p$  互素的  $l$  都有

$$d(\{p \in P \mid p \equiv l \pmod{q}\}) = 1/\varphi(q).$$

这一结论是类域论中 Chebotarev 密度定理的特例, 后者刻画了数域的扩张中满足某些分歧性质 (称为 Artin 符号) 的素理想密度. 特别的, 素数  $p$  在分圆域  $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/q})$  中的 Artin 符号完全由  $p$  模  $q$  的余数决定, 从而与 Dirichlet 定理密切相关。