

В. П. Горьков¹, Н. Л. Григоренко², Л. Н. Лукьянова³

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ТРЕХМЕРНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ НА ЗАДАННУЮ ЦЕЛЕВУЮ ОРБИТУ *

1. Введение

Рассматривается задача перелета на заданную орбиту управляемого космического аппарата (КА), динамика которого описывается математической моделью движения при гравитационном воздействии на КА одного притягивающего центра [1-2].

Для решения задач управления выводом КА на целевую орбиту в работах [3-5] применен метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов, позволяющий построить управление на бесконечном отрезке времени при котором фазовая точка с увеличением времени асимптотически приближается к целевому множеству. В настоящей работе мы применяем этот подход для решения задачи управляемости в сферических координатах.

Приведен класс позиционных управлений тягой двигательной системы, зависящий от параметров задачи, который решает задачу управляемости на заданную орбиту. Траектория движения фазовой точки при таком управлении определена на бесконечном отрезке времени. На первом интервале времени она приходит в окрестность целевого множества, а далее осуществляет движение в его окрестности, асимптотически приближаясь к нему. Позиционные управления получены в аналитической форме. Приведены результаты расчетов позиционного управления и траекторий движения для различных тестовых параметров процесса и вариантов целевых траекторий КА.

¹С.н.с факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: v-p-gorkov@yandex.ru.

²Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: grigor@cs.msu.ru.

³Н.с факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: lln@cs.msu.ru.

*Работа выполнена при частичной поддержке госбюджетной темы НИР № 3.1.21 ВМК МГУ.

2. Постановка задачи управления движением КА с реактивной тягой при одном притягивающем центре

Рассмотрим невозмущенное движение КА относительно одного притягивающего центра в форме ограниченной задачи двух тел [1-2]. Считаем, что начало инерциальной системы отсчета совмещено с притягивающим центром, а векторное дифференциальное уравнение движения КА в сферических координатах имеет вид

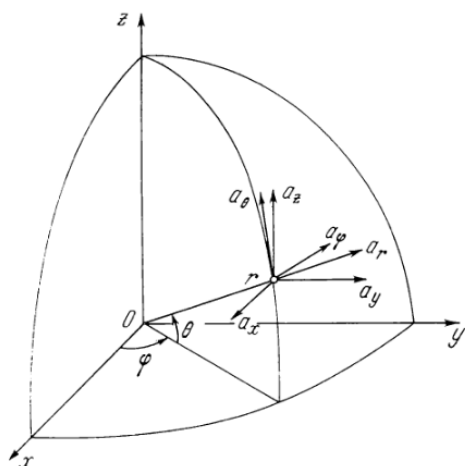


Рис. 1. Координаты R^3

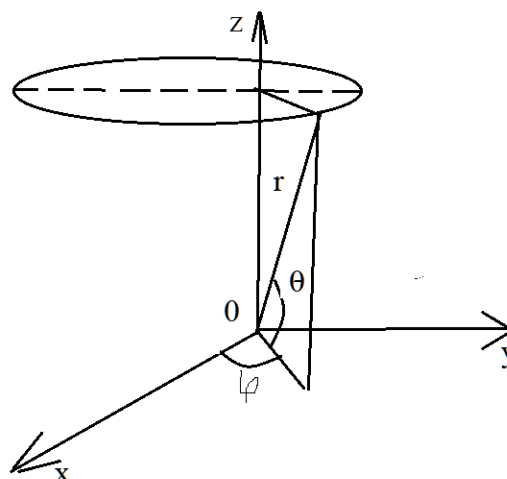


Рис. 2. Целевая орбита R^3

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2 + 1/r^2 = a_r, \quad (1)$$

$$r \cos \theta \ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos \theta - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta = a_\phi, \quad (2)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = a_\theta. \quad (3)$$

Начальные условия:

$$r(0), \dot{r}(0), \phi(0), \dot{\phi}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0). \quad (4)$$

Целевая орбита:

Плоскость целевой орбиты задается параметром \bar{r} :

$$r \sin \theta = \bar{r} = \text{const}, \theta \in (-\pi/2, \pi/2). \quad (5)$$

Траектория движения:

$$r \cos \theta (1 + e \cos \phi) - p = 0. \quad (6)$$

Изменение фазовых переменных во времени (при их движении в малой окрестности равенств (5),(6)) подчиняется закону площадей:

$$r^2 \dot{\phi} - h = 0. \quad (7)$$

Параметры целевой орбиты: \bar{r}, e, p, h .

Рассматривается задача синтеза законов управления a_r, a_ϕ, a_θ системы (1)-(3), обеспечивающих перевод фазовой точки на заданную орбиту (5)-(7) с параметрами \bar{r}, e, p, h . Здесь e - эксцентриситет, h - угловой момент целевой орбиты, p - фокальный параметр целевой орбиты.

2. Построение позиционного управления движением КА с реактивной тягой

Решение задачи синтеза проведем с использованием следующих функций, фигурирующих в законах Кеплера для параметров $r, \bar{r}, \theta, \varphi, e, p, h$ целевой траектории:

$$\omega_1 = r \sin \theta - \bar{r},$$

$$\omega_2 = r \cos \theta (1 + e \cos \varphi) - p \text{ (уравнение конического сечения),}$$

$$\omega_3 = r^2 \dot{\varphi}(t) - h \text{ (закон площадей).}$$

2.1. Синтез законов управления a_r, a_θ, a_φ

Рассмотрим задачу выбора управлений a_r, a_θ, a_φ с целью приведения фазового вектора системы (1)-(3), при начальных условиях (4), на целевое множество с заданными параметрами \bar{r}, e, p, h и последующего движения фазового вектора системы в его окрестности. Синтез законов управления a_r, a_θ, a_φ проведем опираясь на результаты работы [3].

Функции $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ оценивают разность значений фазовых переменных в текущий момент времени и значений фазовых переменных на целевом множестве.

Для каждой из функций рассогласования потребуем удовлетворения своему функциональному уравнению. Эти уравнения содержат производные в силу системы (1)-(3) и зависят от управлений. Перейдем к таким вычислениям.

Рассмотрим рассогласование $\omega_1(t)$.

$$\omega_1 = r \sin \theta - \bar{r},$$

Условие 1. Рассогласование ω_1 удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{\omega}_1 + \dot{\omega}_1 + \omega_1 = 0. \quad (8)$$

Найдем $\dot{\omega}_1, \ddot{\omega}_1$.

$$\dot{\omega}_1 = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta},$$

$$\ddot{\omega}_1 = \ddot{r} \sin \theta + \dot{r} \cos \theta \dot{\theta} + \dot{r} \cos \theta \ddot{\theta} - r \sin \theta (\dot{\theta})^2 + r \cos \theta \ddot{\theta},$$

Из уравнения (8) найдем соотношение для управлений:

$$\ddot{r} \sin \theta + r \cos \theta \ddot{\theta} + 2\dot{r} \cos \theta \dot{\theta} - r \sin \theta (\dot{\theta})^2 + \dot{\omega}_1 + \omega_1 = 0.$$

$$(a_r - F_r) \sin \theta + (a_\theta - F_\theta) \cos \theta = a_1,$$

где

$$F_r = -r\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2 + 1/r^2, \quad F_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$a_1 = -2\dot{r} \cos \theta \dot{\theta} + r \sin \theta (\dot{\theta})^2 - \omega_1 - \dot{\omega}_1,$$

Первое соотношение для управлений a_r, a_θ имеет вид:

$$a_r \sin \theta + a_\theta \cos \theta = a_2,$$

где

$$a_2 = a_1 + F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta = -2\dot{r} \cos \theta \dot{\theta} + r \sin \theta (\dot{\theta})^2 - (\dot{r} \sin \theta +$$

$$+r \cos \theta \dot{\theta}) - (r \sin \theta - \bar{r}) + \sin \theta \left(-r \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta - r \dot{\theta}^2 + 1/r^2 \right) + \\ + \cos \theta \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right).$$

Рассмотрим рассогласование $\omega_3(t)$.

$$\omega_3 = r^2 \dot{\phi} - h.$$

Условие 3. Рассогласование ω_3 удовлетворяет уравнению:

$$T_1 \dot{\omega}_3 + \omega_3 = 0. \quad (9)$$

Найдем $\dot{\omega}_3$:

$$\dot{\omega}_3 = 2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi}.$$

Подставляя ω_3 , $\dot{\omega}_3$ в (9) получаем уравнение:

$$2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} + \frac{\omega_3}{T_1} = 0,$$

из которого следует соотношение для управления a_ϕ :

$$r(a_\phi - F_\phi) = c,$$

где

$$c = -\cos \theta (2r\dot{r}\dot{\phi} + \frac{\omega_3}{T_1}), \quad F_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} \cos \theta - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta.$$

Из последнего уравнения находится

$$a_\phi = \frac{c}{r} + F_\phi = -\frac{\cos \theta}{r} (2r\dot{r}\dot{\phi} + \frac{\omega_3}{T_1}) + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos \theta - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta. \quad (10)$$

Рассмотрим рассогласование $\omega_2(t)$.

$$\omega_2 = r \cos \theta (1 + e \cos \phi) - p.$$

Условие 2. Рассогласование ω_2 удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{\omega}_2 + \dot{\omega}_2 + \omega_2 = 0. \quad (11)$$

Найдем $\dot{\omega}_2$, $\ddot{\omega}_2$:

$$\dot{\omega}_2(t) = \dot{r} \cos \theta (1 + e \cos \phi) - r \sin \theta \dot{\theta} (1 + e \cos \phi) - r \cos \theta e \sin \phi \dot{\phi}, \quad (12)$$

$$\ddot{\omega}_2 = \ddot{r} \cos \theta (1 + e \cos \phi) - \dot{r} \sin \theta \dot{\theta} (1 + e \cos \phi) - \dot{r} \cos \theta e \sin \phi \dot{\phi} - \\ - \dot{r} \sin \theta \ddot{\theta} (1 + e \cos \phi) - r \cos \theta (\dot{\theta})^2 (1 + e \cos \phi) - r \sin \theta \ddot{\theta} (1 + e \cos \phi) + \\ + r \sin \theta \dot{\theta} e \sin \phi \dot{\phi} - \dot{r} \cos \theta e \sin \phi \dot{\phi} + r \sin \theta \ddot{\theta} e \sin \phi \dot{\phi} - \\ - r \cos \theta e \cos \phi (\dot{\phi})^2 - r \cos \theta e \sin \phi \ddot{\phi}.$$

Из уравнения (11) найдем соотношение для управлений:

$$\ddot{r} \cos \theta (1 + e \cos \phi) - r \ddot{\theta} \sin \theta (1 + e \cos \phi) - \ddot{\phi} e r \cos \theta \sin \phi = b_1,$$

где

$$b_1 = -\ddot{\omega}_2 - \dot{\omega}_2 + r' \sin \theta \dot{\theta} (1 + e \cos \phi) + \dot{r} \cos \theta e \sin \phi \dot{\phi} + \dot{r} \sin \theta \ddot{\theta} (1 + e \cos \phi) + \\ + r \cos \theta (\dot{\theta}')^2 (1 + e \cos \phi) - r \sin \theta \ddot{\theta} e \sin \phi \dot{\phi} + \dot{r} \cos \theta e \sin \phi \dot{\phi} -$$

$$-r \sin \theta \dot{\theta} e \sin \varphi \dot{\varphi} + r \cos \theta e \cos \varphi (\dot{\varphi})^2.$$

Второе соотношение для управлений a_r, a_θ, a_φ :

$$a_r \cos \theta (1 + e \cos \varphi) - a_\theta \sin \theta (1 + e \cos \varphi) - a_\varphi e \sin \varphi = b_2,$$

где

$$b_2 = b_1 + F_r \cos \theta (1 + e \cos \varphi) + F_\theta \sin \theta (1 + e \cos \varphi) + F_\varphi e \sin \varphi,$$

$$F_\varphi = (2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \theta - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta).$$

Следовательно

$$a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta = \frac{b_2 + a_\varphi e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} = b_3,$$

где

$$\begin{aligned} b_3 = & \frac{1}{1 + e \cos \varphi} \left(b_1 + F_r \cos \theta (1 + e \cos \varphi) + F_\theta \sin \theta (1 + e \cos \varphi) + \right. \\ & \left. + F_\varphi e \sin \varphi + a_\varphi e \sin \varphi \right) = \frac{1}{1 + e \cos \varphi} \left(-\dot{\omega}_2 - \omega_2 + \right. \\ & + \dot{r} \sin \theta \dot{\theta} (1 + e \cos \varphi) + \dot{r} \cos \theta e \sin \varphi \dot{\varphi} + \dot{r} \sin \theta \dot{\theta} (1 + e \cos \varphi) + \\ & + r \cos \theta (\dot{\theta})^2 (1 + e \cos \varphi) - r \sin \theta \dot{\theta} e \sin \varphi \dot{\varphi} + \dot{r} \cos \theta e \sin \varphi \dot{\varphi} - \\ & - r \sin \theta \dot{\theta} e \sin \varphi \dot{\varphi} + r \cos \theta e \cos \varphi (\dot{\varphi})^2 + \\ & + (-r\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2 + 1/r^2) \cos \theta (1 + e \cos \varphi) - \\ & - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \sin \theta (1 + e \cos \varphi) - \\ & - (2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \theta - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta) e \sin \varphi + \\ & \left. + \left(-\frac{\cos \theta}{r} (2r\dot{r}\dot{\varphi} + \frac{\omega_3}{T}) + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \theta - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \right) e \sin \varphi \right). \end{aligned}$$

Т.о. для управлений a_r, a_θ имеем уравнения

$$a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta = b_3,$$

$$a_r \sin \theta + a_\theta \cos \theta = a_2.$$

Решение этих уравнений

$$a_r = a_2 \sin \theta + b_3 \cos \theta, \quad (13)$$

$$a_\theta = a_2 \cos \theta - b_3 \sin \theta. \quad (14)$$

Фазовый вектор системы (1)-(3) при управлениях (10),(13),(14) через конечное время приходит в окрестность заданной параметрами \bar{r}, e, p, h орбиты и движется в её окрестности согласно требованию закона площадей. В следующем параграфе мы приводим лемму, на основании которой оценка момента времени прихода фазового вектора в заданную окрестность целевой траектории может быть вычислена.

2.3. Оценка времени регулирования

Приведем лемму об оценке времени регулирования устойчивой линейной системы [6]:

$$\dot{x} = Ax. \quad (15)$$

Пусть $x(t) = x(x^0, t)$ - решение уравнения (15) при начальном условии $x(0) = x^0$ и \bar{t}_p - минимальное время, по истечении которого $\|x(t)\|$ не превышает некоторой заданной величины Δ :

$$\bar{t}_p = \min\{t : \|x(t)\| \leq \Delta, \forall t \geq \bar{t}\}.$$

Будем называть \bar{t}_p временем регулирования системы (15) при начальном условии $x(0) = x^0$.

Лемма 1. Пусть матрица B является решением уравнения Ляпунова $A^T B + BA = -I(I - \text{единичная матрица})$, λ_m и λ_M - минимальное и максимальное собственные значения матрицы B . Решение $x(t) = x(x^0, t)$ уравнения (15) при начальном условии $x(0) = x^0$ удовлетворяет условию

$$\frac{V_0}{\lambda_M} e^{-t/\lambda_m} \leq \|x\|^2 \leq \frac{V_0}{\lambda_m} e^{-t/\lambda_M}, \quad (16)$$

где $V_0 = x^{0T} B x^0$, и время регулирования \bar{t}_p определяется соотношением

$$\bar{t}_p = \lambda_M \ln \frac{V_0}{\lambda_m \Delta^2}. \quad (17)$$

Верхняя оценка времени регулирования \bar{t}_{pi} , полученная на основании леммы 1 для уравнений (8),(11), определяется соотношением (17) при

$$\lambda_M = 1.81, \lambda_m = 0.69, V_{0i} = 1.5\omega_i^2(0) + \omega_i(0)\dot{\omega}_i(0) + \dot{\omega}_i^2(0), i = 1, 3. \quad (18)$$

Для уравнения (9) время регулирования \bar{t}_{p2} определяется соотношением

$$\bar{t}_{p2} = T_2 \ln \frac{\omega_2(0)}{\Delta}. \quad (19)$$

Итоговая оценка для времени регулирования \bar{t}_p уравнений (11),(12), согласно (18),(19) определяется соотношением:

$$\bar{t}_p = \max(\bar{t}_{p1}, \bar{t}_{p2}, \bar{t}_{p3}). \quad (20)$$

Отметим, что параметр $T_2 > 0$ задается пользователем.

Полученные в п.2 и п.3 свойства управлений (11),(12) и оценка времени регулирования (20) позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Фазовая точка системы (1),(2),(3) при управлениях (10),(13),(14) через конечное время (20) приходит в Δ окрестность заданной параметрами \bar{r}, e, p, h орбиты и движется в её окрестности согласно параметрам требуемого закона площадей.

3.1. Результаты численного моделирования при целевой эллиптической орбите

На рис. 3-9 приведены результаты моделирования системы управления КА с параметрами целевой эллиптической орбиты: $e = 0.5, p = 0.75, h = 0.86, \bar{r} = 1$, при параметре управления $T_1 = 1$ и начальных условиях $r(0) = 1.17, V_r(0) = 0, \theta(0) = 0, V_\theta(0) = 0.2, \varphi(0) = 1, V_\varphi(0) = 0$. На рис.3 приведена траектория движения фазовой точки из начального положения до целевой орбиты и последующего движения в окрестности этой орбиты. На рис.4-6 приведены графики фазовых переменных как функций времени. На рис.7-9 приведены графики параметров управления как функций времени.

На рис. 10-16 приведены результаты моделирования системы управления КА с параметрами целевой эллиптической орбиты: $e = 0.5, p = 0.75, h = 0.86, \bar{r} = 1$, при параметре управления $T_1 = 1$ и начальных условиях $r(0) = 2, V_r(0) = 0, \theta(0) = 1.57, V_\theta(0) = 0.2, \varphi(0) = 1, V_\varphi(0) = 0$. На рис.10 приведена траектория движения фазовой точки из начального положения до целевой орбиты и последующего движения в окрестности этой орбиты. На рис.11-13 приведены графики фазовых переменных как функций времени. На рис.14-16 приведены графики параметров управления как функций времени.

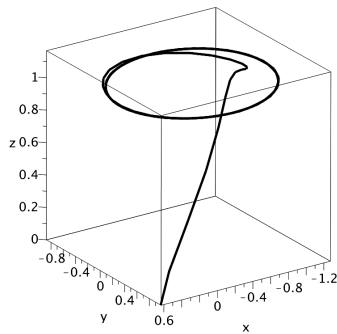


Рис. 3. $z(x, y)$.

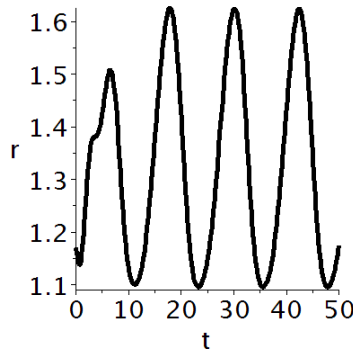


Рис. 4. $r(t)$

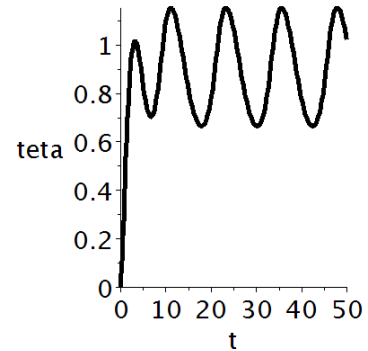


Рис. 5. $\theta(t)$

4. Заключение

В данной работе приведен расчет позиционного управления тягой двигательной системы, зависящий от параметров задачи, который решает задачу управляемости на заданную орбиту. Другие управления из этого класса [3] могут быть найдены при выборе функциональных уравнений (8),(9),(11) обладающих асимптотически устойчивым решением, например, для уравнений (8),(11) в виде

$$T_i^2 \dot{\omega}_i(t) + \varphi_i(\dot{\omega}_i) + f_i(\omega_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

где $f_i(\omega_i)\omega_i > 0$ при $\omega_i \neq 0$, $\varphi_i(\dot{\omega}_i)\dot{\omega}_i(t) > 0$ при $\dot{\omega}_i(t) \neq 0$, $\int_0^{\omega_i} f_i(\omega_i)d\omega_i \rightarrow \infty$ при $|\omega_i| \rightarrow \infty$, а уравнения (9) в форме уравнения Бернулли

$$T_3 \dot{\omega}_3(t) + a_{13}\omega_3 + a_{r3}\omega_3^r = 0, \quad r = 2, 3, \dots$$

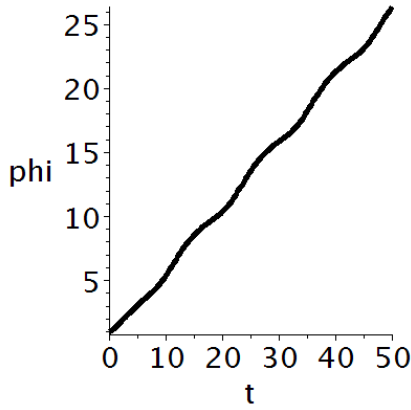


Рис. 6. $\varphi(t)$

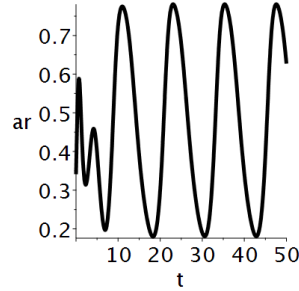


Рис. 7. $a_r(t)$

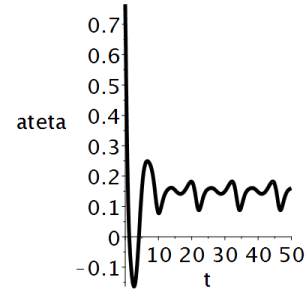


Рис. 8. $a_\theta(t)$

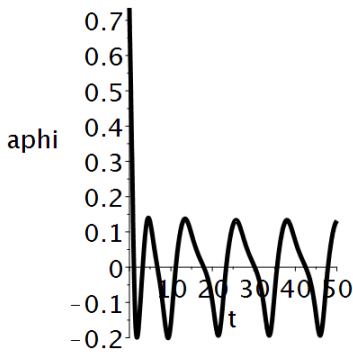


Рис. 9. $a_\varphi(t)$

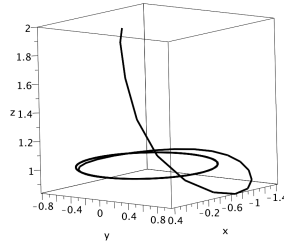


Рис. 10. $z(x,y)$.

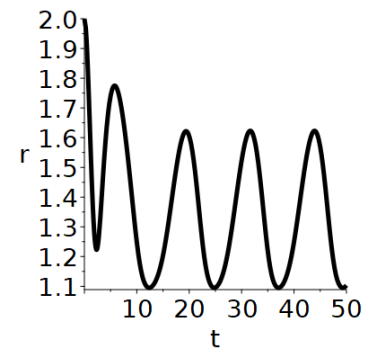


Рис. 11. $r(t)$

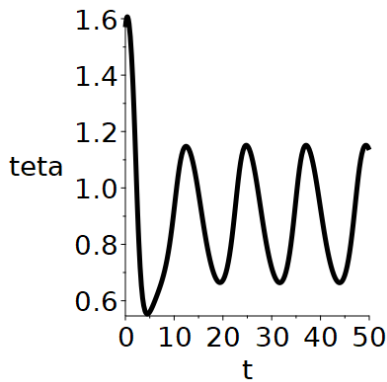


Рис. 12. $\theta(t)$

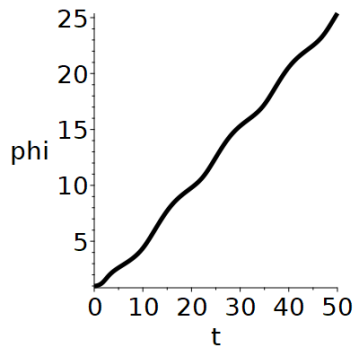


Рис. 13. $\varphi(t)$

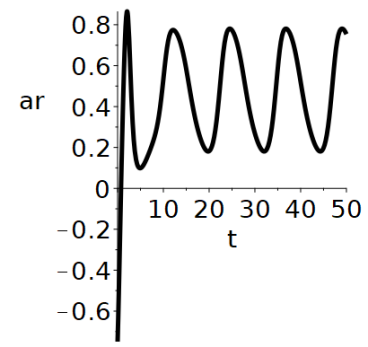


Рис. 14. $a_r(t)$

решение которого при $t \rightarrow \infty$ и $a_{13} > 0$, $a_{r3} > 0$ экспоненциально стремится к $\omega_3 = 0$. Траектория движения фазовой точки при таком управлении определена на бесконечном отрезке времени. На первом интервале времени она приходит в окрестность целевого множества, а далее осуществляет движение в его окрестности, асимптотически приближаясь к нему. По управляющим параметрам восстанавливаются интегральные характеристики, связанные с текущим расходом топлива

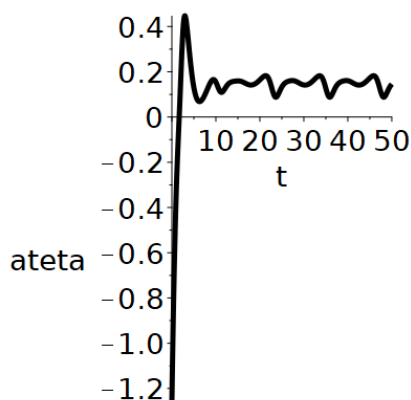


Рис. 15. $a_\theta(t)$

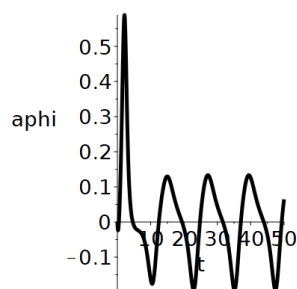


Рис. 16. $a_\varphi(t)$

при найденном управлении и подбирается комплектация гибридной двигательной установки для планируемого полета [7].

Авторы благодарят д.ф.м.н. М.С.Никольского, к.ф.м.н. Е.Н.Хайлова за обсуждение результатов работы.

Литература

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета: Проблемы оптимизации. — М.: Наука, 1975. 702 с.
2. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.Наука, 1990, 448 с.
3. Колесников А.А. Новые нелинейные методы управления полетом. Физматлит. 2013. 196 с.
4. Колесников А.А. Гравитация и самоорганизация . URSS.М. 2015. 108 с.
5. Горьков В.П., Лукьянова Л.Н., Шатков С.А. Позиционное управление движением космического аппарата с гибридной двигательной системой. Прикладная математика и информатика, N 66, МАКС Пресс, 2021,М, с.80-88
6. Ким Д.П. Теория автоматического управления.Физматлит. 2007. 440 с.
7. Алемасов В.Е. Теория ракетных двигателей: учебник для студентов вузов / В.Е. Алемасов, А.Ф. Дрегаллин, А.П. Тишин; под редакцией В.П. Глушко.— М.: Машиностроение, 1989.— 464 с.