

В. П. Горьков¹, Л. Н. Лукьянова², С. А. Шатков³

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ГИБРИДНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ *

Введение

Рассматривается задача перелета на заданную кеплеровскую орбиту управляемого космического аппарата (КА), динамика которого описывается математической моделью движения при гравитационном и световом воздействии на КА Солнца. Двигательная система предполагается гибридной, включающей реактивный двигатель, имеющий запас горючего, и солнечный парус. Управление гибридной двигательной системой позволяет уменьшать расход топлива в процессе перелета. Приведен класс позиционных управлений радиальной и трансверсальной тягой двигательной системы, зависящий от параметров, который решает задачу управляемости на заданную кеплеровскую орбиту. Позиционные управления получены в аналитической форме. Приведены результаты расчетов позиционного управления и траекторий движения для различных тестовых параметров процесса и вариантов целевых траекторий КА.

1. Постановка задачи управления движением КА с реактивной тягой при одном притягивающем центре

Уравнения движения КА в плоскости орбиты имеют следующий вид [1-3]:

$$\dot{r}(t) = V_r, \quad \dot{V}_r(t) = V_\theta^2 r^{-1} - \frac{h_1^2}{p_1} r^{-2} + \bar{U}_r, \quad (1)$$

$$\dot{\theta}(t) = V_\theta r^{-1}, \quad \dot{V}_\theta(t) = -V_r V_\theta r^{-1} + U_\theta. \quad (2)$$

$$r(0) = r_0, \quad V_r(0) = V_{r0}, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad V_\theta(0) = V_{\theta0}. \quad (3)$$

¹С.н.с факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: v-p-gorkov@yandex.ru.

²Н.с факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: lln@cs.msu.ru.

³аспирант факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: zuky1@mail.ru.

*Работа выполнена при частичной поддержке госбюджетной темы НИР № 3.1.21 ВМК МГУ.

Здесь обозначено: r, θ - полярные координаты; V_r, V_θ - радиальная и тангенциальная составляющие скорости; \bar{U}_r, U_θ - радиальная и тангенциальная составляющие вектора тяги; $\theta = \chi + \gamma$, χ - истинная аномалия, γ - угловая постоянная, которая определяет угол между линией апсид и осью OX, h_1 - угловой момент, p_1 - фокальный параметр, $\frac{h_1^2}{p_1} = \mu$, μ гравитационный параметр притягивающего тела, который мы считаем равным единице.

Рассматривается задача синтеза законов управления движением КА при наличии одного притягивающего центра с гравитационным параметром μ , обеспечивающих его перелет на заданную кеплеровскую орбиту с параметрами e_2, p_2, h_2 , $\frac{h_2^2}{p_2} = \mu$, при выполнении ограничения $r(t) \geq R_0$, $R_0 > 0$. Здесь e_2 - эксцентриситет, h_2 - угловой момент системы, p_2 - фокальный параметр заданной орбиты.

Решение этой задачи позволяет получить знания о необходимых ресурсах для управляемости системы (1)-(3) при движущейся целевой точке.

2. Построение позиционного управления движением КА с реактивной тягой

Решение задачи синтеза проведем с использованием следующих функций, фигурирующих в законах Кеплера для параметров e_2, p_2, h_2 целевой траектории:

$$\omega_1 = r(1 + e_2 \cos \theta) - p_2, \text{ (уравнение конического сечения),}$$

$$\omega_2 = r^2 \dot{\theta}(t) - h_2 \text{ (закон площадей).}$$

2.1. Выбор управления \bar{U}_r обеспечивающего фазовое ограничение $r(t) \geq R_0$, $R_0 > 0$

Чтобы решение системы (1),(2) удовлетворяло фазовому ограничению $r(t) \geq R_0$, $R_0 > 0$, $t \geq 0$, выберем управление \bar{U}_r в форме гарантирующей выполнение этого ограничения, следуя подходу работы [3]. Рассмотрим второе уравнение (1), записанное с обозначением $\Phi = V_\theta^2 r^{-1} - \frac{h_1^2}{p_1 r^2}$ в виде: $\dot{V}_r(t) = \Phi(t) + \bar{U}_r$, и выберем управление \bar{U}_r в форме

$$\bar{U}_r = U_r + A \operatorname{tg}(br - r_1), \quad (4)$$

где b, r_1 положительные константы, U_r - параметр управления.

Лемма 1. Управление (4) при выборе констант b, r_1 в форме $b = \frac{\varepsilon}{2R_0}$ и $r_1 = \frac{\pi + \varepsilon}{2}$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, гарантирует выполнение соотношения для фазовой переменной $r(t)$:

$$R_0 < r(t) < R_0 \left(1 + \frac{2\pi}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0. \quad (5)$$

Доказательство. Подставив управление (4) во второе уравнение системы

(1), выразив из него $r(t)$ и выписав для него оценки, имеем

$$\frac{r_1}{b} - \frac{\pi}{2b} < r(t) = \frac{r_1}{b} + \frac{1}{b} \operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{V}_r(t) - \Phi(t) - U_r(t)}{A}\right) < \frac{r_1}{b} + \frac{\pi}{2b}.$$

Выбирая константы b, r_1 виде $b = \frac{\varepsilon}{2R_0}$ и $r_1 = \frac{\pi + \varepsilon}{2}$, получаем (5). \square

2.2. Синтез законов управления U_r и U_θ

Учитывая (4), рассмотрим задачу выбора управлений U_r, U_θ с целью приведения траектории системы :

$$\dot{r}(t) = V_r, \quad \dot{V}_r(t) = V_\theta^2 r^{-1} - \frac{h_1^2}{p_1} r^{-2} + U_r + A \operatorname{tg}(br - r_1), \quad (6)$$

$$\dot{\theta}(t) = V_\theta r^{-1}, \quad \dot{V}_\theta(t) = -V_r V_\theta r^{-1} + U_\theta. \quad (7)$$

на кеплеровскую орбиту с заданными параметрами e_2, p_2, h_2 и последующего движения фазового вектора системы в ее окрестности при начальных условиях (3) системы (6),(7). Синтез законов управления U_r и U_θ , проведем опираясь на метод АКАР [3] .

Выберем в качестве инвариантных многообразий $\omega_1(t) = 0$ и $\omega_2 = 0$. В полярных координатах функции $\omega_1(t) = 0$ и $\omega_2 = 0$ с учетом инварианта

$$\omega_1 = r(1 + e_2 \cos \theta) - p_2$$

имеют вид

$$\dot{\omega}_1(t) = (1 + e_2 \cos \theta) \dot{r}(t) - e_2 r \dot{\theta}(t) \sin \theta = V_r(1 + e_2 \cos \theta) - e_2 V_\theta \sin \theta, \quad (8)$$

$$\ddot{\omega}_1 = \dot{V}_r(1 + e_2 \cos \theta) - V_r e_2 \sin \theta \dot{\theta} - \dot{V}_\theta e_2 \sin \theta - V_\theta e_2 \cos \theta \dot{\theta},$$

и

$$\omega_2 = r^2 \dot{\theta}(t) - h_2 = r V_\theta - h_2. \quad (9)$$

Сформируем следующие инвариантные соотношения:

$$\dot{\omega}_1(t) + \frac{2}{T_1} \dot{\omega}_1(t) + \frac{1}{T_1^2} \omega_1(t) = 0, \quad (10)$$

и

$$T_2 \dot{\omega}_2(t) + \omega_2(t) = 0. \quad (11)$$

Заметим, что решение (10) имеет вид:

$$\omega_1(t) = e^{-\frac{t}{T_1}} (\omega_1(0) + \dot{\omega}_1(0)t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда, подставляя $\omega_1, \dot{\omega}_1, \ddot{\omega}_1$ (8) и ω_2 (9) в (10) и (11), получаем следующие равенства: $U_\theta = -\frac{\omega_2}{r T_2}$,

$$\begin{aligned} & \dot{V}_r(1 + e_2 \cos \theta) - V_r e_2 \sin \theta \dot{\theta} - \dot{V}_\theta e_2 \sin \theta - V_\theta e_2 \cos \theta \dot{\theta} + \\ & + \frac{2}{T_1} (V_r(1 + e_2 \cos \theta) - e_2 V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{T_1^2} (r(1 + e_2 \cos \theta) - p_2) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя (6),(7) в последнее равенство, и выражая из него U_r, U_θ имеем:

$$U_r = \frac{1}{1 + e_2 \cos \theta} \left[e_2 \sin \theta \left(-\frac{\omega_2}{r T_2} \right) - \frac{V_\theta^2}{r} + \frac{(1 + e_2 \cos \theta) h_1^2}{p_1 r^2} - \right.$$

$$-(1 + e_2 \cos \theta) A \operatorname{tg}(br - r_1) - \frac{2}{T_1} \dot{\omega}_1(t) - \frac{1}{T_1^2} \omega_1(t), \quad (12)$$

и

$$U_\theta = -\frac{\omega_2}{rT_2}. \quad (13)$$

В силу соотношений (10),(11) через некоторое время, которое определяется выбором положительных параметров T_1, T_2 , ([3], стр.141) управления (12),(13) будут иметь вид

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{1}{1 + e_2 \cos \theta} \left[-\frac{V_\theta^2}{r} + \frac{(1 + e_2 \cos \theta) h_1^2}{p_1 r^2} - (1 + e_2 \cos \theta) A \operatorname{tg}(br - r_1) \right] = \\ &= -\frac{V_\theta^2}{p_2} + \frac{h_1^2}{p_1 r^2} - A \operatorname{tg}(br - r_1). \end{aligned} \quad (14)$$

и

$$U_\theta = -\frac{\omega_2}{rT_2} = 0. \quad (15)$$

При подстановке (14) во второе уравнение (1), учитывая (9) имеем:

$$\dot{V}_r(t) = \frac{V_\theta^2}{r} - \frac{V_\theta^2}{p_2} = \frac{V_\theta^2}{r} - \frac{h_2^2}{r^2 p_2}.$$

Т.о. показано, что траектория системы (6),(7) при управлениях (12),(13), через конечное время приходит в окрестность заданной параметрами e_2, p_2, h_2 кеплеровской орбиты и движется в её окрестности согласно параметрам требуемого закона площадей.

2.3. Оценка времени регулирования

Приведем лемму об оценке времени регулирования устойчивой линейной системы [5]:

$$\dot{x} = Ax. \quad (16)$$

Пусть $x(t) = x(x^0, t)$ - решение уравнения (16) при начальном условии $x(0) = x^0$ и \bar{t}_p - минимальное время, по истечении которого $|x(t)|$ не превышает некоторой заданной величины Δ :

$$\bar{t}_p = \min\{t : |x(t)| \leq \Delta, \forall t \geq \bar{t}\}.$$

Отметим, что \bar{t}_p при соответствующем выборе начального условия не совпадает со временем регулирования t_p , принятым в теории управления линейных систем. Тем не менее \bar{t}_p также будем называть временем регулирования систем (16) при начальном условии $x(0) = x^0$.

Лемма 2. Пусть матрица B является решением уравнения Ляпунова $A^T B + BA = -I(I - \text{единичная матрица})$, λ_m и λ_M - минимальное и максимальное собственные значения матрицы B . Решение $x(t) = x(x^0, t)$ уравнения (16) при начальном условии $x(0) = x^0$ удовлетворяет условию

$$\frac{V_0}{\lambda_M} e^{-t/\lambda_m} \leq |x|^2 \leq \frac{V_0}{\lambda_m} e^{-t/\lambda_M}, \quad (17)$$

где $V_0 = x^{0T} Bx^0$, и время регулирования \bar{t}_p определяется соотношением

$$\bar{t}_p = \lambda_M \ln \frac{V_0}{\lambda_m \Delta^2}. \quad (18)$$

Верхняя оценка времени регулирования, полученная на основании леммы 2 для уравнения (10), определяется соотношением

$$\bar{t}_{p1} = \ln \frac{T_1(\omega_1(0))^2 + 0.5\omega_1(0)\dot{\omega}_1(0)(T_1^2 - 1)}{\Delta^2}. \quad (19)$$

Для уравнения (11) время регулирования \bar{t}_{p2} определяется соотношением

$$\bar{t}_{p2} = T_2 \ln \frac{\omega_2(0)}{\Delta}. \quad (20)$$

Итоговая оценка для времени регулирования \bar{t}_p уравнений (11),(12), согласно (19),(20) определяется соотношением:

$$\bar{t}_p = \max \left(\ln \frac{T_1(\omega_1(0))^2 + 0.5\omega_1(0)\dot{\omega}_1(0)(T_1^2 - 1)}{\Delta^2}, T_2 \ln \frac{\omega_2(0)}{\Delta} \right). \quad (21)$$

Отметим, что параметры $T_i > 0, i = 1, 2$ задаются пользователем.

Полученные в п.2,3 свойства управлений (12),(13) и оценка времени регулирования (21) позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Траектория системы (6),(7) при управлениях (12),(13), через конечное время (21) приходит в окрестность заданной параметрами e_2, p_2, h_2 кеплеровской орбиты и движется в её окрестности согласно параметрам требуемого закона площадей.*

2.4.1. Результаты численного моделирования при целевой эллиптической орбите

На рис. 1-9 приведены результаты моделирования системы управления КА с параметрами целевой эллиптической орбиты: $e = 0.5, p = 0.75, h = 0.86$, при параметрах управления $T_1 := 0.5, T_2 = 0.5$, и начальных условиях $r(0) = 1.17, V_r(0) = 0, \theta(0) = 0, V_\theta(0) = 1.2$.

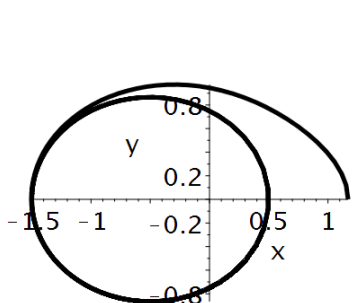


Рис. 1. Фазовый портрет $e = 0.5$

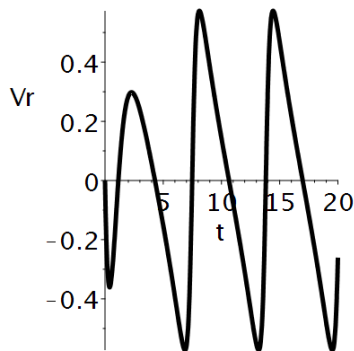


Рис. 2. $\dot{r}(t) = V_r(t)$

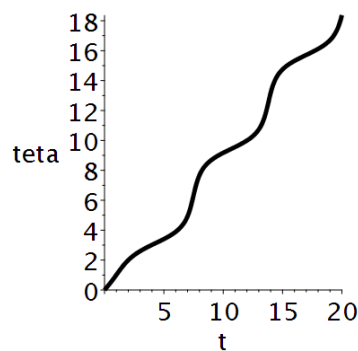


Рис. 3. $\theta(t)$

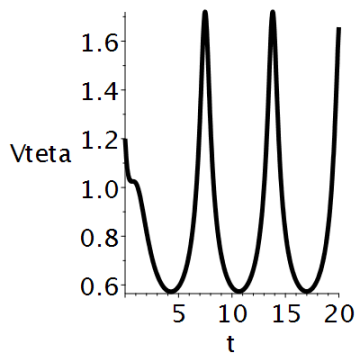


Рис. 4. $V_\theta(t)$

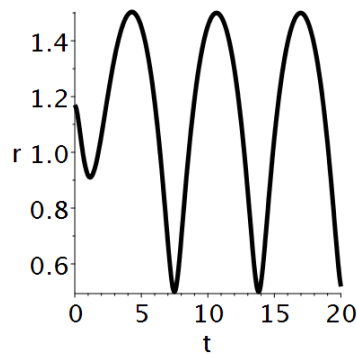


Рис. 5. $r(t)$

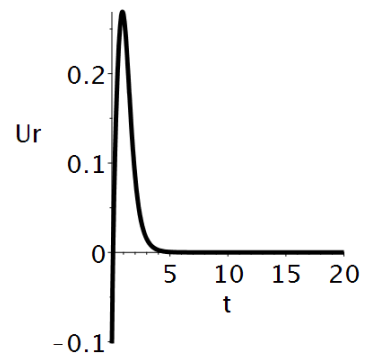


Рис. 6. $U_r(t)$

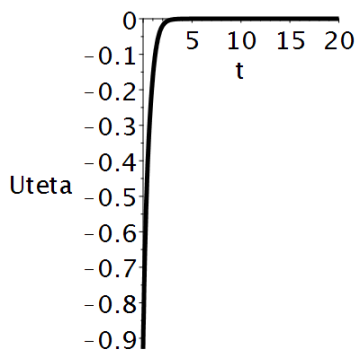


Рис. 7. $U_\theta(t)$

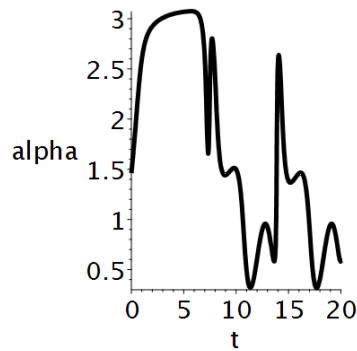


Рис. 8. $\alpha(t)$

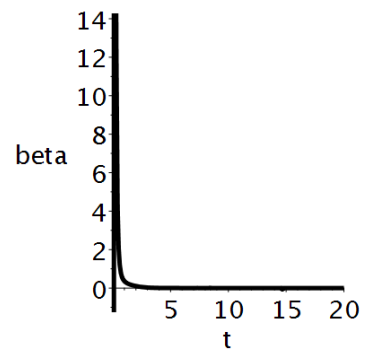


Рис. 9. $\beta(t)$

2.4.2. Результаты численного моделирования при целевой гиперболической орбите

На рис. 10-18 приведены результаты моделирования системы управления КА с параметрами целевой гиперболической орбиты: $e = \sqrt{2}, p = 1, h = 1$, при параметрах управления $T_1 = 1, T_2 = 1$, при начальных условиях $r(0) = 1.17, V_r(0) = 0, \theta(0) = 0, V_\theta(0) = 1.2$.

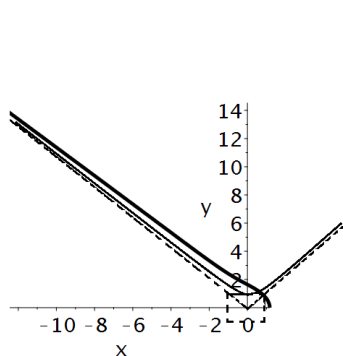


Рис. 10. Фазовый портрет

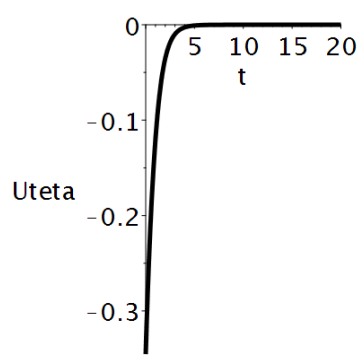


Рис. 11. $U_\theta(t)$

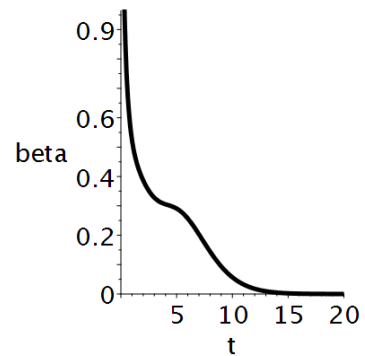


Рис. 12. $\beta(t)$

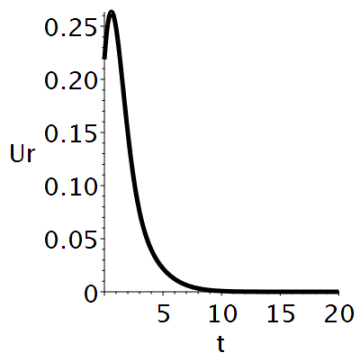


Рис. 13. $U_r(t)$

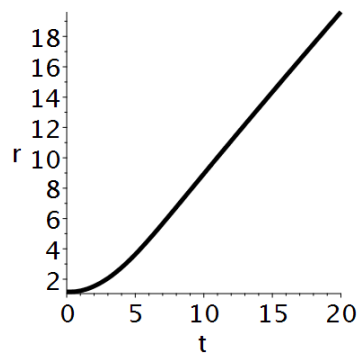


Рис. 14. $r(t)$

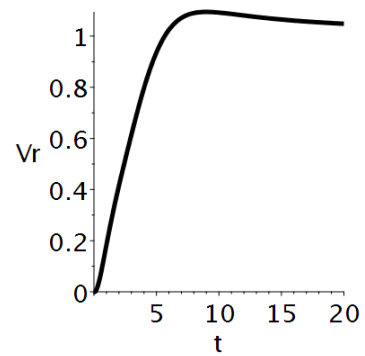


Рис. 15. $V_r(t)$

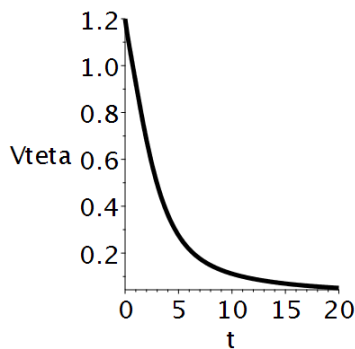


Рис. 16. $V_\theta(t)$

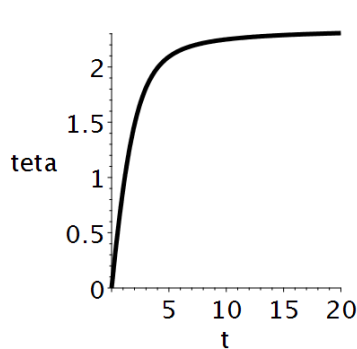


Рис. 17. $\theta(t)$

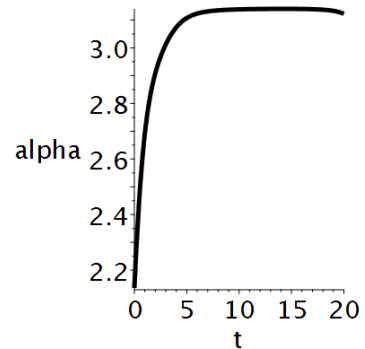


Рис. 18. α

3. Использование тяги солнечного паруса в гибридном варианте двигательной установки

Работам, посвященным движению КА с солнечным парусом посвящены многие фундаментальные работы, из которых отметим [1,2,4]. Рассматривая солнечный парус как двигательную систему, мы рассматриваем вопрос о ее вкладе в реализацию позиционного управления (12),(13) в гибридном варианте, имея в виду возможность одновременной работы реактивной тяги и тяги солнечного паруса. Позиционное управление (12),(13) не требует дополнительных коррекций при движении к целевой орбите и движении по ней. Оно зависит от начальных условий (3), параметров целевого множества α_2, p_2, h_2 и параметров желательного времени перелета T_1, T_2 . Его реализация с помощью гибридной двигательной установки, включающей реактивный двигатель и солнечный парус, представляет, например, интерес с точки зрения экономии топлива. Другие примеры - оценка параметров управления в ситуации, при которой тяга солнечного паруса используется только в формировании тангенциальной компоненты управления, либо в режиме полного отключения реактивной тяги.

Рассмотрим движение (КА) при помощи «солнечного паруса» под воздействием силы солнечного давления на парус. Согласно электромагнитному описанию света, импульс передается солнечному

парусу с помощью электромагнитных волн [1,2,4]. Сила солнечного давления на парус с нормалью \vec{n} и углом α между нормалью паруса \vec{n} и линией солнце-центр паруса [4]:

$$F = \beta \frac{\mu}{r^2} \cos^2 \alpha \vec{n}, \quad (22)$$

где β - безразмерный управляемый параметр паруса, $0 < \beta \leq \beta_{\max}$, μ - гравитационный параметр Солнца. Пример конструкции солнечного паруса с управляемым параметром β приведен в работах [6,7]. Уравнения движения КА с солнечным парусом в плоскости орбиты имеют вид (1),(2), где:

$$U_r = \frac{\beta \cos^3 \alpha}{r^2}, U_\theta = \frac{\beta \sin \alpha \cos^2 \alpha}{r^2} \quad (23)$$

- радиальная и трансверсальная составляющие вектора тяги солнечного паруса [1,2,4]. Рассмотрим случай реализации управлений (12),(13) только тягой солнечного паруса. Найдем значения β, α при которых выполнены оба равенства (23). Решение системы уравнений (23) относительно параметров β, α имеет вид:

$$\beta(t) = \left(U_r^{2/3}(t) + \frac{U_\theta^2(t)}{U_r^{4/3}(t)} \right)^{3/2} r^2(t), \quad \operatorname{ctg} \alpha(t) = \frac{U_r(t)}{U_\theta(t)}. \quad (24)$$

При краевых условиях п.2.4.1, график функции $\beta(t)$ - решения системы (23) представлен на рис.9; график $\alpha(t)$ представлен на рис.8. В этом случае $\beta_{\max} = \max_{t \geq 0} \beta(t) \leq 14$. Отметим, что изменение параметров T_1, T_2 в (10), (11) позволяет уменьшить β_{\max} (увеличив при этом время прихода на целевое множество).

При краевых условиях п.2.4.2, график функции $\beta(t)$ - решения системы (23) представлен на рис.12; график $\alpha(t)$ представлен на рис.18. В этом случае $\beta_{\max} \leq 1$.

Утверждение. Если на каком либо подотрезке времени регулирования (21), параметр $\beta(t)$ солнечного паруса удовлетворяет соотношению, $\beta(t) \leq \beta_{\max}$, то тяга паруса может уменьшить или заменить тягу реактивного двигателя (12),(13) для экономии топлива. Если для моментов времени t : $\beta(t) \geq \beta_{\max}$, то тяга солнечного паруса при реализации управления (12),(13) может рассматриваться только как дополнение к реактивной тяге.

Заключение

В статье рассмотрена задача перелета на заданную кеплеровскую орбиту управляемого КА, динамика которого описывается математической моделью движения при гравитационном и световом воздействии на КА Солнца. Двигательная система предполагается гибридной, включающей реактивный двигатель, имеющего запас горючего и солнечного паруса. Наличие гибридной двигательной системы

позволяет уменьшать расход топлива в процессе перелета. Перелет характеризуется временем его исполнения. При малом времени перелета основной вклад в формирование результирующей тяги отводится реактивному двигателю. При большом времени перелета возрастает вклад солнечного паруса в формирование результирующей тяги. Приведенные в статье управляющие функции позволяют оценить полезность наличия солнечного паруса в гибридной двигательной системе при заданных параметрах целевой орбиты, начальных условиях движения и желательном времени перелета на целевую орбиту.

Авторы благодарят д.ф.м.н. М.С.Никольского, д.ф.м.н. Н.Л.Григоренко за обсуждение результатов работы.

Литература

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета: Проблемы оптимизации. — М.: Наука, 1975. 702 с.
2. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.Наука, 1990, 448 с.
3. Колесников А.А. Новые нелинейные методы управления полетом. Физматлит. 2013. 196 с.
4. Colin R. McInnes Solar Sailing, Technology, Dynamics and Mission Applications. 2004 Springer. 321 p.
5. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Физматлит. 2007. 440 с.
6. A. Caruso, G. Mengali, A. A. Quarta, L. Niccolai Solar sail optimal control with solar irradiance fluctuations, Advances in Space Research, Elsevier, <https://doi.org/10.1016/j.asr.2020.05.037>
7. J. B. Pezent, R. Sood, A. Heaton Contingency target assessment, trajectory design, and analysis for NASA's NEA scout solar sail mission, Advances in Space Research, <https://doi.org/10.1016/j.asr.2020.02.004>