МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# МЕХАНИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

ЛЕМАК
СТЕПАН СТЕПАНОВИЧ

—

МЕХМАТ МГУ

—

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
**МОКИНА АРСЕНИЯ КИРИЛЛОВИЧА**

# Содержание

# 1 Стратегии многоуровневого управления движением

Рассмотрим управляемую систему, состояние которой может быть описано фазовым вектором $y(t) \in R^n$, а её изменение во времени описывается дифференциальными уравнениями $\dot{y}(t) = f(y, u)$ со включением, которое представляет из себя вектор-функцию $u(t) \in R^s$, и с начальными условиями $y(t_0) = y^*$, причём $u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in PC[t_0, t_k] \mid u(t) \in \Omega \subset R^s, t \in [t_0, t_k]\}$,

где $U$ - функциональное множество, которое описывает как стратегии, так и ресурсы управления, Ω - некоторое определенное множество, которое будет выпукло, замкнуто и ограничено.

Такая модель позволяет описать широкий класс исполнительных механизмов. В качестве управлений в данной системе возможны силы и моменты, некоторые управляющие сигналы, которые подаются на исполнительные механизмы. Для того, чтобы реализовать желаемое движение механической системы необходима информация о её состоянии, то есть кроме исполнительных механизмов обязательными элементами являются измерительные устройства, которые дают информацию о движении (Рис. 1).

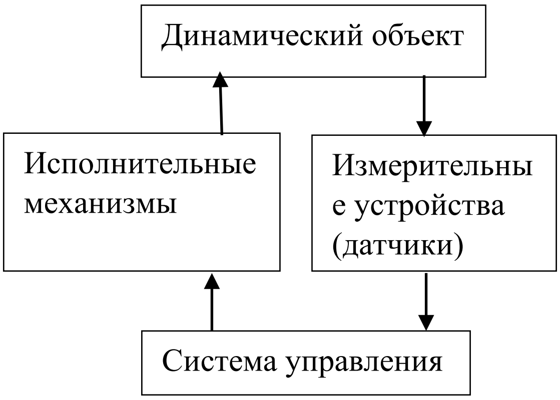


Рис. 1: Схема управляемой системы

## 1.1 Линейная комбинация программного и дополнительного управления при помощи обратной связи

Пусть имеется желаемое программное движение $y^{П}(t) \in R^n$, которое реализуется в силу тождества $\dot{y}^{П} \equiv f(y^{П}, u^{П})$, где программное управление

$u^{П}(t) \in int\, \Omega$ (не тратятся все ресурсы управления).

Будем рассматривать управление $u$ как линейную комбинацию программного и дополнительного управления:

$$u = u^{П}(t) + \Delta u(\tilde{x}, t)$$

Рассмотрим отклонение от программного движения $x(t) = y(t) - y^{П}(t)$, тогда $\tilde{x}$ - это оценка этого отклонения. Для того, чтобы программное движение осуществилось в ходе функционирования управляемой системы, необходимо дополнительное стабилизирующее управление, которое использует информацию о текущем состоянии системы. Для получения этой информации нужны датчики или измерительные устройства, модель которых выглядит следующим образом:

$$Z(t) = \Psi(y) + \xi, \tag{1}$$

где $\xi$ - погрешность измерительных устройств.

Если известен программный процесс $\{y^{\Pi}, u^{\Pi}, [t_0, t_k]\}$, то на основе информации (1) можно сформировать вектор измерений:

$$z(t) = Z(t) - \Psi(y^{\Pi}(t)) \approx H(t)x + \xi, H(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\Big|_{y=y^{\Pi}}$$

На практике кроме управляющих воздействий могут действовать различного рода возмущения при движении механического объекта, то есть возмущающие силы и моменты, которые тоже нужно представить в модели $\dot{y} = f(y, u, v), v(t) \in R^{\ell}, v(\cdot) \in V$.

## 1.2 Модель базового уровня, которая решает задачу стабилизации программного движения.

Для решения задачи стабилизации достаточно использовать линейную модель. Рассмотрим модель, которая решает задачу стабилизации программного движения. Для этого нужно выписать линеаризованное уравнение отклонения:

$$\dot{x} = Ax + B\Delta u + C\Delta v,$$

При этом можно формировать дополнительное управление следующим образом:

$\Delta u = K\tilde{x}$, где $\tilde{x}$-оценка отклонений.

Чтобы получить эту оценку, можно построить линейный оцениватель

$\dot{\tilde{x}} = Ax + B\Delta u + \widetilde{K}(Z - H\tilde{x})$ с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = x^*$, который решает задачу построения оценки отклонений.

Матрицы A, B и C вычисляются вдоль программной траектории, когда программная траектория удовлетворяет тождеству $\dot{y}^{\Pi} \equiv f(y^{\Pi}, u^{\Pi}, 0)$.

$$\begin{cases} A(t) = \dfrac{\partial f}{dy}(y^{\Pi}, u^{\Pi}), \\ B(t) = \dfrac{\partial f}{du}(y^{\Pi}, u^{\Pi}), \\ C(t) = \dfrac{\partial f}{dv}(y^{\Pi}, 0). \end{cases}$$

Оцениватель строится по информации от вектора измерений $Z = Hx + \xi$. При $\Delta v$ =0 и $\xi$ =0 получается, что $\Delta u = K\tilde{x}$ - позиционное управление. Если бы были известны все отклонения, то оно строится как линейная обратная связь по отклонению, но поскольку отклонения неизвестны, то вместо них можно использовать оценки, а оценки получаются независимо, то есть выбор матриц $K$ и $\widetilde{K}$ можно осуществлять независимо из соображений, что при отсутствии возмущений это, например, тот факт, что и ошибка оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$ должна асимптотически стремится к нулю за счёт выбора матрицы $\widetilde{K}$, и сами отклонения $x \to 0$.

Для нахождения программного движения рассмотрим управляемую систему $\dot{y} = f(y, u)$, где $u(\cdot) \in U$. Левый конец этой системы фиксирован:

$y(t_0) = y^*, t \in [t_0, t_k]$. Конечный момент будем определять в момент прихода на некоторое гладкое без особых точек многообразие $M$ (Рис. 2):

$$y(t_k) \in M = \{\varphi_i(y(t_k)) = 0, i = 1\dots m\}, \varphi_i \in C^1, rank\left\|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right\| = m,$$

то есть нормали к гиперповерхностям $\varphi_i$ получаются линейно независимы в каждой точке.

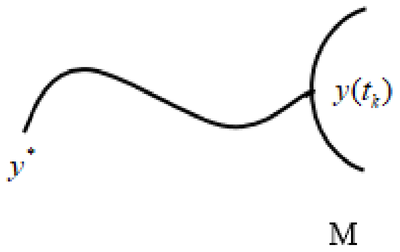


Рис. 2

## 1.3 Оптимизация программного движения. Принцип максимума Понтрягина.

Пусть задано гладкое конечное многообразие без особых точек, $f \in C^1$по всем аргументам, будем считать, что система управляема относительно m, это значит, что существует такое управление $u(\cdot) \in U$, что $y(t_k) \in M$ хотя бы одно. Но, как правило, такое решение не одно и появляется задача найти наилучшее решение. Поставим экстремальную задачу, то есть будем пытаться минимизировать функционал состояния $J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$, который зависит от управления и представляет собой некоторую нелинейную функцию от конечного состояния системы. Сузим задачу и будем искать локальный минимум терминального функционала $\varphi_0 \in \mathrm{C}^1$. Будем считать, что $\exists$ оптимальный процесс $\{y^0(t), u^0(t), [t_0, t_k^0]\}$, который удовлетворяет всем требованиям теоремы А.Т. Филиппова. Условия существования дифференциального уравнения $\dot{y} = f(y, u)$ в классическом виде не выполнены, поэтому уравнение этого дифференциального включения будем рассматривать в смысле Филиппова. Будем считать, что оно существует, более того, существует оптимальное. Оптимальный процесс даёт нам некоторые значения функционала $J(u^0)$, и рассмотрим другой процесс $\{y(t), u(t), [t_0, t_k]\}$, который назовём допустимым, то есть процесс, который удовлетворяет условиям нашей задачи. Введём норму $\|y(t) - y^0(t)\|$, которая характеризует близость допустимых процессов. И тогда будем считать, что локальный минимум доставляет нашему функционалу, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall$ допустимого процесса, который удовлетворяет условию $\|y(t) - y^0(t)\| \le \delta$, а норма берётся из пространства непрерывных функций, тогда выполняется неравенство $J(u^o) \le J(u)$, то есть локальный минимум нашего функционала.

Для нахождения оптимального процесса используется теорема, которая называется принцип максимума Понтрягина. Эта теорема о необходимых условиях оптимальности.

Рассмотрим Функцию Понтрягина $H(\psi, y, u) = \psi^T \cdot f(y, u)$ и введём сопряжённую систему к системе уравнений в отклонениях

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f(y^0, u^0)}{\partial y}\right)^T \psi, \tag{2}$$

то есть это получается сопряженная система к уравнениям в вариациях этой системы, где варьируется только оптимальная траектория. Выпишем уравнения в вариациях

$x = y - y^0, \dot{x} = \left(\frac{\partial f(y^0, u^0)}{\partial y}\right) x.$

**Теорема (ПМП).** Пусть $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$ - оптимальный процесс. Тогда $\exists$ ненулевая пара $(\lambda_0 \geq 0, \psi)$ такая, что выполнены условия:

1)$\forall t \in T \subset [t_0, t_k^0], u^0(t-0) = u^0(t+0)$ и для всех t должно выполняться условие максимума функции Понтрягина $\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))$.

2) Условие трансверсальности:

$$\psi(t_k^0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k^0))}{\partial y} \perp M. \tag{3}$$

4) $H(t) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv 0.$ (4)

**Замечание 1. Двухточечная кривая. Задача.**

Для того, чтобы воспользоваться принципом максимума нужно уметь интегрировать совместно две системы: $\dot{y} = f(y, u)$ - прямую и сопряжённую (2). Проблема в том, что часть граничных условий задана на левом конце, то есть n условий на левом конце, m условий $y(t_k) \in M$ на правом конце, m<n, m-n недостающих условий в (3), таким образом задача замыкается, и систему нужно интегрировать с двух концов. Также в каждый момент времени дополнительно нужно решать задачу (4), то есть определить оптимальное управление. И здесь мы предполагаем, что в каждый момент времени решение $u^0(t)$ достигается в одной точке, такой случай называется регулярным, а когда достигается 2 и больше решения, такой случай называется особым.

$u(t) \in \Omega$ -выпуклое замкнутое множество.

**Замечание 2**. Условия 1 и 2 ПМП остаются верными и при $\Omega = \Omega(t)$, т.е. множество, которое определяет ограничение на управление зависит от времени. Но зависит от времени достаточно хорошим образом, это значит в первом случае, что $\Omega(t)$

кусочно-постоянная, а во втором варианте $\Omega(t)$ - полунепрерывно сверху для

$t \in (t_0, t_k^0)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \colon 0 \leq \Delta t < \Gamma$ выполнено, что расстояние между множествами $\rho(\Omega(t + \Delta t), \Omega(t)) \leq \varepsilon$, где $\rho$ - полунорма Хаусдорфа, которая определяет близость между множествами. Например, пусть у нас есть два множества A и B, тогда $\rho(A, B) = \max\limits_{x\in A} \min\limits_{y\in B} \rho(x, y)$.

## 1.4 Два уровня управления для сингулярно возмущенных систем

Рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\begin{cases} \mu \frac{dz}{dt} = \varphi(z, y, u_1) \\ \frac{dy}{dt} = f(z, y, u_2) \end{cases},$$

где z, y – фазовые координаты подсистем, $0 < \mu = const \ll 1$, $u_1(\cdot) \in U_1$, $u_2(\cdot) \in U_2$. Переменной z соответствуют быстрые движения, а y – медленные.

$u_1 = u_1^0(y) + \Delta u_1(\Delta z, t)$, перейдём к быстрому или компьютерному времени $\tau = \frac{t}{\mu}$. При $\mu \to 0$ этот отрезок управления будет стремиться к бесконечности, т.е. эту систему можно рассматривать как стационарную. В быстрых переменных присоединённая система запишется так: $\frac{dz}{d\tau} = \varphi(z, y, u_1^0)$, в этой системе y рассматривается как параметр, который не меняется во времени, т.е. z меняется во времени. И мы рассматриваем точку покоя этой системы $0 = \varphi(z, y, u_1^0)$, т.е. $u_1^0$ является корнем этого уравнения, это можно записать так: $u_1^0 = \varphi^{-1}(z^0, y)$, где $z^0$- некоторая выбранная нами точка покоя присоединённой системы, а $\Delta z = z(\tau) - z^0$- отклонение от точки покоя.

Теперь $\Delta u_1(\Delta z, t)$ - это дополнительное позиционное управление в точке покоя, обеспечивающее условие теоремы Тихонова, а именно асимптотическую устойчивость точки покоя $z^0$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \mu \frac{dz}{dt} = \varphi(z, y, t) \\ \frac{dy}{dt} = f(z, y, t) \end{cases}$$

с начальными условиями $z(t_0) = z^* \in R^\ell, y(t_0) = y^* \in R^m$.

**Теорема. (1952, А.Н. Тихонов)** Пусть выполнены 5 условий в некоторой открытой области $D: (z, y, t) \in D \subset R^{\ell+m+1}$:

1. Функции $\varphi(z, y, t), f(z, y, t)$ аналитичны в D по всем переменным, т.е. могут быть представлены в виде рядов в этой области.

2. $\varphi(z^0, y, t) = 0$, где y, t - фиксированы, точки покоя $z^0$ изолированы.

3. Точки покоя $z^0$асимптотически устойчивы.

4. Начальные условия $z^*$принадлежат области притяжения $z^0$.

5. $f(\varphi^{-1}(y, t), y, t)$ - аналитична.

Тогда $\exists\ \mu_0 > 0: 0 \le \mu \le \mu_0$ решения полной системы существуют и выполнены следующие условия: $\begin{cases} \forall t \in [t_0, t_k]: \lim\limits_{\mu \to 0} y(t,\mu) = \tilde{y}(t) \\ \forall t \in (t_0, t_k]: \lim\limits_{\mu \to 0} z(t,\mu) = \tilde{z}(t) \end{cases}$ для укороченной системы $\begin{cases} \varphi(\tilde{z}, \tilde{y}, t) = 0 \\ \dot{\tilde{y}} = f(\tilde{z}, \tilde{y}, t) \end{cases}$.

Эта теорема позволяет нам построить дополнительное управление. Оно получается, как позиционное по быстрым переменным, так и медленное, реализующее некоторую точку покоя. И тогда достаточно рассматривать медленную подсистему, т.е. управлять медленной подсистемой отдельно от быстрой. Чтобы реализовать желаемое нам движение, нам нужно организовывать многоуровневое управление, т.е. это есть сумма программного и позиционного управления. Позиционное управление призвано стабилизировать программное движение, а программное будем находить из решения некоторой экстремальной задачи, пользуясь необходимыми условиями оптимальности, а именно принципом максимума Понтрягина.

# 2 Двухуровневое управление планированием летательного аппарата (ЛА)

Рассмотрим упрощённую модель ЛА, представленную на Рис. 3. Будем считать, что корпус аппарата – это твёрдая оболочка, имеющая плоскость симметрии. Смещением центра масс относительно корпуса будем пренебрегать, кроме этого, полёты будем рассматривать на небольшие расстояния, при этом сферичностью и вращением Земли будем пренебрегать. При таких предположениях возможно отделить боковое движение аппарата от движения вертикальной плоскости. Напишем математическую модель вот такого управляемого объекта.

Уравнения движения аппарата распадается на 2 группы:

1) Уравнения движения центра масс в вертикальной плоскости

$M\frac{d\vec{V}}{dt} = M\vec{g} + \vec{A} + \vec{P}$, где $M$ - масса ЛА, $\vec{V}$- абсолютная скорость центра масс,$M\vec{g}$- сила тяжести, $\vec{A}$- равнодействующая аэродинамических сил, $\vec{P}$ - реактивная сила. $\vec{P} = \vec{v}\frac{dM}{dt}$, где $\vec{v}$- относительная скорость топлива.

2) Уравнения движения вокруг центра масс

$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{M}_z$, где $\vec{G}$- кинетический момент корпуса, $\vec{M}_z$- аэродинамический момент.

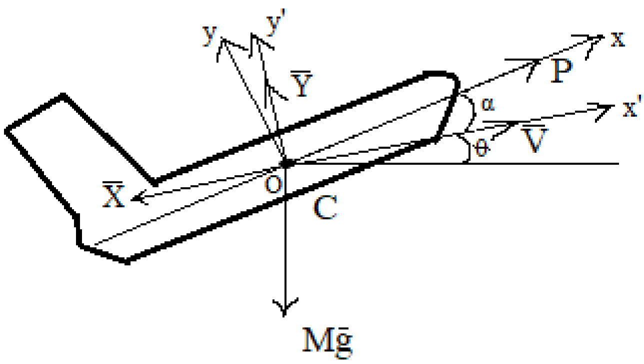


Рис. 3: Модель ЛА

$\theta$ - траекторный угол, $\alpha = \varphi - \theta$ - угол атаки, $\varphi$ - угол тангажа ЛА. $\vec{X},\vec{Y}$- проекции $\vec{A}$ на оси $Cx'y'z'$ - скоростной системы координат.

Спроектируем уравнение движения центра масс на оси скоростной системы: $\vec{V} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, абсолютная угловая скорость вращения этой скоростной системы $\vec{\Omega}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$, а полная производная этого вектора $\frac{dV}{dt} = \dot{V} + [\vec{\Omega}_C \times V]$.

1) Тогда уравнения движения центра масс ЛА в проекциях на оси x', y' примут следующий вид: $M\dot{V} = P\cos\alpha - X(V,\alpha) - Mg\sin\theta$, $MV\dot{\theta} = P\sin\alpha + Y(V,\alpha) - Mg\cos\theta$.

2) Теперь перейдём к уравнениям вокруг центра масс ЛА. Обозначив угловую скорость корпуса через $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$, запишем уравнения в проекции на ось z: $J_z\frac{d\Omega}{dt} = M_z(V,\alpha,\Omega,\delta)$, где $\delta$ - отклонение руля высоты, т.е. это управляющий параметр, с помощью которого мы можем управлять движением ЛА в атмосфере.

3) Кроме этих уравнений, в эту систему следует добавить ещё уравнения изменения массы: $\dot{M} = -U, P = \nu U$, где U- управляющий момент, P–величина тяги. К уравнениям расхода масс добавим ещё кинематические уравнения движения центра масс

$\dot{L} = V\cos\theta$, $\dot{H} = V\sin\theta$, где L-дальность, H-высота.

Для аэродинамических сил справедливо следующее выражение:

$X = \frac{\rho V^2}{2}Sc_x(\alpha), Y = \frac{\rho V^2}{2}Sc_y(\alpha)$, где S-площадь крыла, $\rho$ -плотность воздуха, V-скорость набегающего потока, равная скорости аппарата, $c_x$, $c_y$-аэродинамические коэффициенты. $\begin{cases} c_y(\alpha) = c_y^0 + c_y^\alpha\alpha \\ c_x(\alpha) = c_x^0 + Bc_y^2 \end{cases}$, где $c_y^0, c_x^0, B, c_y^\alpha$- известные константы.

Предположим, что при планировании у нас выполнено следующее:

а) $P \equiv 0$- только пилот контролирует процесс планирования, т.е. весь процесс планирования можно возложить на автомат, который управляет рулём высоты.

б) $\theta < 0$- планирование со снижением.

в) $\rho, g - const$.

г) $c_y^0 = 0, Bc_y^2 = 0$.

д) Выпишем выражение для аэродинамического момента: $M_z = -\frac{\rho V^2}{2}Sb(m_z^\alpha\alpha + m_z^\delta\delta)$, где b-расстояние от центра масс до центра давления аэродинамических сил, $m_z^\alpha$, $m_z^\delta$>0 - const. Мы пренебрегли зависимостью от угловой скорости аппарата, считая, что он достаточно медленно вращается во время снижения. Значит аэродинамический момент зависит только от угла атаки и отклонения руля высоты.

Рассмотрим только ту часть системы, которая описывает процесс планирования. Мы хотим, чтобы планирование осуществлялось с некоторой скоростью $V_* = const$ и

$\theta_* = const < 0$. Теперь выпишем только ту систему, с которой мы будем работать.

$\begin{cases} \begin{cases} M\dot{V} = -X(V,\alpha) - Mg\sin\theta \\ MV\dot{\theta} = Y(V,\alpha) - Mg\cos\theta \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{\varphi} = \Omega \\ J_z\frac{d\Omega}{dt} = M_z(V,\alpha,\delta) \end{cases} \end{cases}$ - эти уравнения описывают процесс спуска с тех позиций, с которых нам нужно.

Теперь построим систему управления для этой системы, воспользовавшись тем, что здесь имеется две группы переменных, у которых разное постоянное время. Первые два уравнения описывают медленное движение, а вторая группа уравнений описывает быстрое движение.

Весь процесс построения этого регулятора распадается на некоторые этапы:

## 2.1 Нормализация и обезразмеривание уравнений движения тяжёлого ЛА.

Рассмотрим характерные времена для ТЛА. Если попытаемся осуществить равномерное прямолинейное движение, и для этого зафиксируем некую постоянную тягу, то получается, что корпус аппарата будет совершать некоторые колебательные движения, которые называются фугоидными, для которых характерное время

$T_2 \sim 1\text{мин}$. Пусть характерная скорость спуска $V_* = 300\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, g – характерное ускорение. $gT_* = V_*$, откуда характерное время спуска $T_* \approx 30c$.

Теперь вычислим характерное время движения вокруг центра масс. Пусть центр масс движется по прямой, т.е. $\theta \equiv 0, \delta \equiv 0$, и с постоянной скоростью. Тогда перепишем вторую систему уравнений следующим образом: $J_z\ddot{\varphi} + \frac{\rho V_* Sb}{2} c_y^\alpha \varphi = 0$, т.к.

$\alpha = \varphi - \theta = \varphi$. Увидим, что это уравнение колебаний вокруг нулевого положения по $\varphi$, т.е. оно может быть переписано как $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$, и можно найти период этих колебаний $T_1^2 \approx \frac{2J_z}{\rho V_*^2 Sb} \approx \frac{1}{6}$ часть периода колебаний вокруг центра масс $\approx 1\text{сек}$.
Получается $T_1 \ll T_*$, введём малый параметр $\mu = \frac{T_1}{T_*} \approx \frac{1}{30}$.

Теперь, чтобы перейти к безразмерным переменным, нужно ещё некоторое соотношение. Будем считать, что при планировании характерные величины сил, действующих на аппарат, тоже одного порядка. Баланс сил:

$$M_* g = \frac{\rho V_*^2}{2} S c_y^\alpha \Rightarrow Mg = \frac{\rho V_*^2}{2} S, \text{ т.к. } M_* = M,\ c_y^\alpha \approx 1.$$

Для введения безразмерных параметров понадобится ещё один параметр. Надо определить характерную угловую скорость движения корпуса ЛА: $\Omega_* = \frac{1}{T_1}$.

Введём безразмерные переменные: $V = vV_*, \Omega = \omega\Omega_*, M = mM_*, T = tT_*$ и подставим в размерные величины.

$\frac{M_* V_* dv}{T_* dt} = -\frac{\rho V_*^2 S}{2} v^2 c_y^\alpha \alpha - M_* g \sin\theta$, где $\frac{V_*}{T_*} = g, \frac{\rho V_*^2 S}{2} = M_* g \Rightarrow$

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{dv}{dt} = -c_x^0 v^2 - \sin\theta \\ \frac{d\theta}{dt} = c_y^\alpha \alpha v - \frac{\cos\theta}{v} \end{cases} \\ \begin{cases} \mu\frac{d\omega}{dt} = -(m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta) v^2 \\ \mu\frac{d\varphi}{dt} = \omega \end{cases} \end{cases}, \tag{5}$$

где $\mu \ll 1, \mu = const$.

Начальные условия для данной системы:

$$\begin{cases} v(t_0) = v_0 \approx 1 \\ \theta(t_0) = \theta_0 < 0 \ll 1 \\ \omega(t_0) = \omega_0 \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \end{cases}.$$

Заметим, что в этой управляемой системе осталось формально только одно управление – это есть роль высоты.

## 2.2 Анализ присоединённой системы и синтез алгоритма стабилизации углового положения ЛА

Сделаем так, чтобы для системы (5) выполнялись условия теоремы Тихонова. Для этого рассмотрим быстрое время $\tau = \frac{t}{\mu}$ , а безразмерное время $t \in [0, t_k], t_k \approx 1$. Теперь запишем вторую подсистему (5) быстрых переменных через параметр $\tau$:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{d\tau} = -(m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta)v^2 \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega \end{cases}$$ - присоединённая система, где $\alpha = \varphi(\tau) - \theta$. (6)

Т.к. медленные переменные$v, \theta - const$, получается линейная система с постоянными коэффициентами 2-го порядка. Выберем точку покоя $(\varphi_*, 0)$, выбираем некоторое $\varphi_*(\theta, v)$ и фиксируем. Приравниваем к нулю правую часть первого уравнения присоединённой системы, откуда сразу получаем, что некоторое балансировочное значение угла руля высоты $\delta_0(\theta, v) = -\frac{m_z^\alpha}{m_z^\delta}(\varphi_* - \theta)$, а полное управление руля высоты будем строить как двухуровневое $\delta = \delta_0(\theta, v) + \Delta\delta$, где $\Delta\delta$ -стабилизирующее управление. Для выполнения условий Тихонова нам нужно две вещи: 1) точка покоя должна быть изолирована, что выполняется в силу линейности присоединённой системы, 2) точка покоя должна быть асимптотически устойчива, т.е. нужно обеспечить асимптотическую устойчивость уравнений в отклонениях:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_*$$

$\Delta\omega = \omega$ - отклонения от точки покоя. Система (6) – управляемая по $\delta$, т.к. её можно представить в виде одного уравнения. Следовательно, можно корректирующее позиционное управление выбрать в виде $\Delta\delta = k_1(\varphi - \varphi_*) + k_2\omega$, т.е. теперь его можно построить и выбрать постоянные коэффициенты $(k_1, k_2)$ таким образом, что точка покоя будет асимптотически устойчивой, более того можно выбрать любую степень устойчивости за счёт выбора коэффициентов. Возможны разные способы выбора этих коэффициентов. Например, опять рассмотрим управляемую линейную систему (6) с постоянными коэффициентами и будем выбирать коэффициенты из решения экстремальной задачи. Осталось одно требование теоремы Тихонова: начальные условия принадлежат области притяжения точки покоя. В силу линейности присоединённой системы областью притяжения является вся плоскость, поэтому это условие выполняется. Итак, с помощью выбора двух уровней управления: $\delta_0$ и $\Delta\delta$ мы обеспечили условия теоремы Тихонова.

## 2.3 Редукция к вырожденной (укороченной) системе

Запишем вырожденную систему:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{v}}{dt} = -c_x^0\tilde{v}^2 - sin\tilde{\theta} \\ \frac{d\tilde{\theta}}{dt} = c_y^\alpha(\tilde{\varphi} - \tilde{\theta})\tilde{v} - \frac{cos\tilde{\theta}}{\tilde{v}}, \\ (\tilde{\varphi}, 0) - \text{точка\_покоя} \\ \tilde{\varphi} = \varphi_*(\tilde{\theta}, \tilde{v}) \end{cases} \tag{7}$$

где $\tilde{v}(t) = v_*, \tilde{\theta}(t) = \theta_*$.

Используя подход Тихонова, можно получить следующий результат:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\mu\to 0}\theta(t,\mu) = \tilde{\theta}(t) \\ \lim\limits_{\mu\to 0}v(t,\mu) = \tilde{v}(t) \\ \lim\limits_{\mu\to 0}\omega(t,\mu) = \tilde{\omega}(t) \\ \lim\limits_{\mu\to 0}\varphi(t,\mu) = \tilde{\varphi}(t) \end{cases}$$ — это выполнено в исходном времени.

Таким образом, теорема Тихонова говорит о том, что решение полной системы близко к решению укороченной системы в каждый момент времени. Поэтому нам достаточно изучать движение вырожденной системы (7), обеспечив при этом нужную степень стабилизации системы в быстром времени. Т.е. решения полной системы в некотором пограничном слое быстро скатывались к нужной нам точке покоя по быстрым переменным. Эта точка покоя фактически является некоторым управляющим параметром для вырожденной системы в медленных переменных.

## 2.4 Построение управления для вырожденной системы и анализ устойчивости программного движения

Покажем, что такой выбор балансировочного управления хорош для вырожденной подсистемы. Во-первых, он обеспечивает нужное нам программное движение при выборе специального $\varphi_*$. Покажем, что в системе (7) возможно обеспечение программного движения, которое мы хотим осуществить, т.е. планирование с постоянной скоростью $\tilde{v} = v_*$ и с некоторым постоянным углом $\tilde{\theta} = \theta_*$. Т.к. скорость постоянна, то правая часть первого уравнения (7) равна нулю. Таким образом, получаем связь между скоростью и нужным углом снижения $sin\,\theta_* = -c_x^0 v_*^2$, откуда получаем $\theta_* = -arcsin(\,c_*^0 v_*^2)$.Аналогично из второго уравнения (7) получаем балансировочный угол тангажа, который обеспечивает планирование:$\varphi_* = \theta_* + \frac{cos\,\theta_*}{c_y^\alpha v_*^2}$.

Если в качестве точки покоя выбрать $(\varphi_*, 0)$, то это есть точка покоя присоединённой системы. С помощью стабилизирующего управления $\Delta\delta$ можно обеспечить устойчивость этой точки. Тогда мы получим нужное нам движение, когда $\tilde{v}(t_0) = v_*$, $\tilde{\theta}(t_0) = \theta_*$.Если эти равенства не выполняются, то нужно убедиться в устойчивости уравнений отклонений от программного движения уже для медленной системы.

Пусть $\tilde{v}(t_0) \neq v_*, \tilde{\theta}(t_0) \neq \theta_*$. Тогда обозначим $\begin{cases} \Delta v = \tilde{v} - v_* \\ \Delta\theta = \tilde{\theta} - \theta_* \end{cases}$ - отклонение от требуемого движения. Для них можно выписать уравнения в отклонениях от программного движения:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta v}{dt} = -2c_x^* v_* \Delta v - \cos\theta_* \, \Delta\theta \\ \dfrac{d\Delta\theta}{dt} = c_y^\alpha(\varphi_* - \theta_*)\Delta v + \dfrac{\cos\theta_*}{v_*^2}\Delta v - c_y^\alpha v_* \Delta\theta + \dfrac{\sin\theta_*}{v_*}\Delta\theta \end{cases}$$

Получились тоже линейные уравнения, и надо просто убедиться, что эти уравнения устойчивы. Для этого достаточно проверить условие Гурвица:

$$det\begin{pmatrix} -2c_x^0 v_* - \lambda & -\cos\theta_* \\ c_y^\alpha \alpha_* + \dfrac{\cos\theta_*}{v_*^2} & \dfrac{\sin\theta_*}{v_*} - c_y^\alpha v_* - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \underbrace{(2c_x^0 v_* + c_y^\alpha v_* - \frac{\sin\theta_*}{v_*})}_{>0}\lambda + \underbrace{\cos\theta_* \, c_y^\alpha \alpha_* + \frac{\cos^2\theta_*}{v_*^2} + 2c_x^0 v_* (c_y^\alpha v_* - \frac{\sin\theta_*}{v_*})}_{>0} = 0$$

Чтобы доказать, что все коэффициенты >0, воспользуемся тем, что мы знаем из планирования:$v_* > 0, \theta_* < 0, c_x^0 > 0$. Получается, что достаточно доказать, что

$2c_x^0 v_* + c_y^\alpha v_* - \frac{\sin\theta_*}{v_*} > 0$ и $\cos\theta_* \, c_y^\alpha \alpha_* > 0$. Значит условие устойчивости выполнено, если угол атаки $\alpha_* > 0$. То есть при положительном угле атаки у нас возможно планирование без тяги, но для этого нужно осуществить два уровня управления: первый - это балансировочное значение, а второе вычисляется как

$\delta = \delta_0(\theta, v) + k_1(\varphi - \varphi_*) + k_2\omega$, где коэффициенты $k_1$и $k_2$ мы умеем выбирать такими, чтобы обеспечивалась асимптотическая устойчивость уравнений в отклонениях от точки покоя присоединённой системы. Таким образом, управление $\delta$ обеспечивает планирование с постоянной скоростью.

# 3 Классическая вариация и необходимое условие слабого минимума

## 3.1 Формула приращения функционала для задачи с фиксированным временем и свободным концом

Рассмотрим управляемую автономную систему $\dot{y} = f(y, u)$ с начальным условием $y(t_0) = y^*$, $u(\cdot) \in U$. Будем рассматривать фиксированное время: $t \in [t_0, t_k]$. Свободный правый конец траектории, т.е. $y(t_k) \in M = R^n$. Функционал по-прежнему терминальный $J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$. Предположим, что у нас есть некое решение, пусть $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot)\}$ - оптимальный процесс, где $u^0$ таково, что получается минимум функционала. Будем считать, что наше управление

$u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in PC^1[t_0, t_k] \mid u(t) \in \Omega \subset R^s, \forall t \in [t_0, t_k]\}$, а оптимальное управление $u^0(t) \in int\,\Omega$. Рассмотрим допустимый процесс $\{y(\cdot), u(\cdot)\}$ и введём норму в $C^1$:$\|y\|_{C^1} = max(\|y\|_C, \|\dot{y}\|_C)$, $\|y\|_C = \max\limits_{t\in[t_0,t_k]} |y(t)|$.

**Определение.** Процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot)\}$доставляет слабый локальный минимум функционалу $J(u^0)$, если $\exists\ \delta > 0$ такое, что для любого процесса, удовлетворяющего следующим условиям:$\|y(\cdot) - y^0(\cdot)\|_{C^1} \le \delta$ выполнено, что $J(u) - J(u^0) = \Delta J(u^0) \ge 0$, т.е. речь идёт о локальном слабом минимуме.

Представим управление как сумму $u(t) = u^0(t) + \Delta u(t)$, где $\Delta u(t)$ -приращение управления. Этому приращению управления соответствует некоторое приращение траектории $y(t) = y^0(t) + \Delta y(t)$, $\Delta y = f(y^0(t) + \Delta y(t), u^0(t) + \Delta u(t)) - f(y^0(t), u^0(t))$ с начальным условием $\Delta y(t_0) = 0$. А теперь посмотрим на соответствующее приращение функционала $J(u) = \varphi_0(y(t_k))$, считая, что правые части нашей системы гладкие по всем переменным и функция $\varphi_0$ тоже гладкая по y. Теперь представим это приращение функционала следующим образом

$$J(u) - J(u^0) = \Delta J(u^0) = \frac{\partial\varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y}\Delta y(t_k) + o_1(|\Delta y(t_k)|),$$

где $\Delta y$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений.

Теперь рассмотрим функцию Понтрягина:

$$H(\psi(t), y(t), u(t)) = \psi^T f(y, u),$$

где $\psi$ - сопряжённые переменные, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f(y^0, u^0)}{\partial y}\right)^T \psi \text{ – сопряжённая система.} \quad (8)$$

Выберем краевое условие для этой сопряжённой системы в следующем виде:

$$\psi(t_k) = -\left(\frac{\partial\varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y}\right)^T \quad (9)$$

На самом деле это есть следствие принципа максимума, где было предложено условие трансверсальности. В нашем случае конечное многообразие – это всё пространство, а условие трансверсальности:

$$\underbrace{\psi(t_k) + \underbrace{\lambda_0}_{\geq 0}\left(\frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{dy}\right)^T}_{=0} \perp \underbrace{M}_{R^n},$$

попозже мы покажем, что $\lambda_0 \neq 0$ и можно нормировать, подставив $\lambda_0 = 1$. Таким образом получаем условие (9). Теперь выражение для приращения функционала мы можем переписать:

$\Delta J(u^0) = \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y}\Delta y(t_k) + o_1(|\Delta y(t_k)|) = -\psi^T(t_k)\Delta y(t_k) + o_1(|\Delta y(t_k)|) + \psi^T(t_0)\underbrace{\Delta y(t_0)}_{=0} = -\int_{t_0}^{t_k}\frac{d}{dt}(\psi^T(t)\Delta y(t))dt + o_1 = -\int_{t_0}^{t_k}(\dot{\psi}^T\Delta y + \psi^T\Delta\dot{y})dt + o_1.$

Уравнение (8) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\psi}^T = -\psi^T\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Теперь нужно ввести классическую вариацию. Будем рассматривать не любые приращения $\Delta u$, а представим в виде классической вариации $\Delta u(t) = \varepsilon\delta u(t), \varepsilon > 0$- малый параметр, а $\delta u(\cdot) \in PC^1[t_0, t_k]$, исключая то, что в начальный момент

$\delta u(t_0) = 0$. $\delta u$ представляет собой классическую вариацию, которая была введена при изучении задач вариационного исчисления.

Вернёмся к выражению для приращения функционала и рассмотрим второе слагаемое под интегралом: $\psi^T\Delta\dot{y} = \psi^T f(y^0 + \Delta y, u^0 + \Delta u) - \psi^T f(y^0, u^0) = H(\psi, y^0 + \Delta y, u^0 + +\Delta u) - H(\psi, y^0, u^0) \pm H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u) = (H(\psi, y^0 + \Delta y, u^0 + \Delta u) - H(\psi, y^0, u^0 + +\Delta u)) + (H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u) - H(\psi, y^0, u^0))$.

Приращение функции Понтрягина, где варьируется только u:

$$\Delta_u H(\psi, y^0, u^0) = H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u) - H(\psi, y^0, u^0).$$

Также распишем первую разность:

$$H(\psi, y^0 + \Delta y, u^0 + \Delta u) - H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u) = \frac{\partial H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u)}{dy}\Delta y + o_2(|\Delta y(t)|).$$

Теперь подставим полученные равенства в выражение для приращения функционала:

$\Delta J(u^0) = -\int_{t_0}^{t_k}[-\psi^T\left(\frac{\partial f(y^0, u^0)}{\partial y}\right)\Delta y + \frac{\partial H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u)}{dy}\Delta y + \Delta_u H(\psi, y^0, u^0)]dt - -\int_{t_0}^{t_k} o_2(|\Delta y(t)|)\,dt + o_1(|\Delta y(t_k)|)$ - формула приращения функционала.

## 3.2 Необходимое условие слабого минимума

$\Delta u(t) = \varepsilon\delta u(t)$, а нужно добиться того, чтобы $u^0(t) + \varepsilon\delta u(t) \in U$. Поскольку мы предположили, что $u^0(t) \in int\,\Omega$, то понятно, что всегда найдётся такое маленькое $\varepsilon$, что нужное условие будет выполнено, т.е. процесс с приращением

$\Delta u(t)$ - допустимый.

Приращение траектории удовлетворяет уравнению

$$\Delta y = f(y,u) - f(y^0,u^0). \tag{10}$$

Мы предположили, что функции гладкие по всем переменным, и для этих условий воспользуемся некоторым результатом из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Рассмотрим уравнение в вариациях для исходной системы, фактически это есть линеаризованное уравнение в отклонениях:

$$\frac{d}{dt}\delta y = \frac{\partial f(y^0,u^0)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f(y^0,u^0)}{\partial u}\delta u \tag{11}$$

с начальным условием $\delta y(t_0) = 0$.

Тогда можно установить связь между приращением нелинейной системы (10) и решение линейной системы (11):

**Теорема.** Правые части системы (10) – гладкие, то $\Delta y(t) = \varepsilon\delta y(t) + o(\varepsilon)$.

Вернёмся к формуле приращения функционала, преобразуя её:

$$\psi^T\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\psi^T f}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

значит $\Delta J(u^0) = -\int_{t_0}^{t_k}[-\frac{\partial H(\psi,y^0,u^0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial H(\psi,y^0,u^0+\Delta u)}{\partial y} + \Delta_u H(\psi,y^0,u^0)]dt -$
$$-\int_{t_0}^{t_k} o_2(|\Delta y(t)|)\,dt + o_1(|\Delta y(t_k)|) = -\int_{t_0}^{t_k}[\frac{\partial\Delta_u H(\psi,y^0,u^0)}{\partial y}\Delta y + \Delta_u H(\psi,y^0,u^0)]dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_k} o_2(|\Delta y(t)|)\,dt + o_1(|\Delta y(t_k)|).$$

Теперь воспользуемся тем, что приращения $\Delta u$ и $\Delta y$ определены через классическую вариацию. Для этого запишем, что $\Delta_u H(\psi,y^0,u^0) = H(\psi,y^0,u^0+\Delta u) - H(\psi,y^0,u^0) =$ $= \frac{\partial H(\psi,y^0,u^0)}{\partial u}\Delta u + o_3(|\Delta u(t)|)$, тогда $\frac{\partial\Delta_u H(\psi,y^0,u^0)}{dy} = \frac{\partial^2 H(\psi,y^0,u^0)}{\partial y\partial u}\Delta u + o_4(|\Delta u(t)|)$.

Подставим полученные выражение в формулу для функционала:

$$\Delta J(u^0) = -\int_{t_0}^{t_k}(\frac{\partial^2 H(\psi,y^0,u^0)}{\partial y\partial u}\varepsilon\delta u\cdot\varepsilon\delta y + \frac{\partial H(\psi,y^0,u^0)}{du}\varepsilon\delta u)dt + o(\varepsilon).$$

Первый член квадратично зависит от $\varepsilon$, поэтому он пропадает.

Итак, получено, что приращение функционала определяется следующим образом:

$\Delta J(u^0) = -\varepsilon\int_{t_0}^{t_k}\frac{\partial H}{du}\delta u\,dt + o(\varepsilon)$. Мы представили, таким образом, приращение для функционала как

$\Delta J(u^0) = \varepsilon\delta J(u^0,\delta u) + o(\varepsilon)$, где$J(u^0,\delta u) = -\int_{t_0}^{t_k}\frac{\partial H(\psi,y^0,u^0)}{du}\delta u\,dt$ - вариация Лагранжа.

Рассмотрим производную по направлению функционала $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{J(u^0+\varepsilon\delta u)-J(u^0)}{\varepsilon}$, которая, как мы видим, совпадает с вариацией Лагранжа.

Теперь получим необходимое условие оптимальности. $\Delta J(u^0)\geq 0$- условие слабого минимума. Получается, что с точностью до$\varepsilon$, должно быть

$\Delta J(u^0) = \varepsilon\delta J(u^0,\delta u) + o(\varepsilon)\geq 0$, значит из необходимых условий следует

$$\int_{t_0}^{t_k}\frac{\partial H(\psi,y^0,u^0)}{du}\delta u\,dt \leq 0. \quad (12)$$

Теперь известно, что $u^0(t)\in int\,\Omega \Rightarrow \delta u(t)$ - допустимая и $-\delta u(t)$ - допустимая. Поэтому из (12) следует, что должно выполняться с необходимость условие:

$\forall t\in[t_0,t_k]: \frac{\partial H(\psi(t),y^0(t),u^0(t))}{\partial u}\equiv 0$ - необходимое условие слабого минимума.

Покажем, что это есть частный случай ПМП. Для этого вспомним исходную задачу:$\dot{y} = f(y,u), y(t_0) = y^*, u(\cdot)\in U$, фиксированное время $t\in[t_0,t_k]$ и свободный конец правой траектории, т.е. $M = R^n$.

Попробуем применить к этой задаче принцип максимума. Для того, чтобы свести формулировку принципа максимума к формулировке из первой лекции, добавим ещё одну переменную, т.е. $\begin{cases}\dot{y} = f(y,u), y(t_0) = y^*, u(\cdot)\in U\\ \dot{y}_{n+1} = 1\end{cases}$.

$J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$.

Введём расширенный фазовый вектор $\tilde{y} = \begin{pmatrix} y\\ y_{n+1}\end{pmatrix}$. Для этой расширенной задачи будет верен принцип максимума Понтрягина.

Рассмотрим расширенную функцию Понтрягина:

$$\widetilde{H} = \tilde{\psi}^T f(\tilde{y},u) = \psi^T f(y,u) + \psi_{n+1} = H(\psi,y,u) + \psi_{n+1},$$

где расширенный фазовый вектор $\psi$ удовлетворяет системе уравнений:$\begin{cases}\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^T\psi\\ \dot{\psi}_{n+1} = 0\end{cases}$.

Тогда принцип максимума утверждает:

если оптимальный процесс найден, то $\exists(\lambda_0\geq 0,\tilde{\psi})$:

1) $\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi,y^0,u) = H(\psi,y^0,u^0)$

2)$\widetilde{M} = \{y_{n+1}(t_k) = t_k\}$, тогда получаем условие трансверсальности в расширенной задаче:$\tilde{\psi}(t_k) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(\tilde{y}(t_k))}{\partial \tilde{y}} \perp \widetilde{M}$.

3)$H(t) = \widetilde{H}(\psi, \tilde{y}, u) = \psi^T f(y,u) + \psi_{n+1} \equiv 0$

Касательное многообразие$T_{\widetilde{M}} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n, 0\} = \{\vec{\gamma}, 0\}, \vec{\gamma} \in R^n$. А теперь запишем, что скалярное произведение равно нулю.

$\vec{\gamma}^T \underbrace{\left(\psi(t_k) + \lambda_0 \frac{\partial {\varphi_0}^T(y(t_k))}{\partial y}\right)}_{=0} + \psi_{n+1} \cdot 0 = 0$, откуда получается условие $\psi(t_k) = -\lambda_0 \frac{\partial {\varphi_0}^T(y(t_k))}{\partial y}$. Для строгости нужно ещё показать невырожденность задачи. Из принципа максимума известно следующее:$\lambda_0 \geq 0$- некоторая константа, покажем, что она не может равняться нулю.

Допустим $\lambda_0 = 0$, тогда получаем $\psi(t_k) = 0$ в этой системе

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^T \psi \\ \psi_{n+1} = const \end{cases}. \tag{13}$$

Рассмотрим Гамильтониан в конечный момент времени:

$$H(t_k) = \psi^T(t_k) f(y,u) + \psi_{n+1} \equiv 0, \text{ тогда } \psi_{n+1} \equiv 0.$$

Получается в системе (13) решение нулевое, и условие принципа максимума выполнено, но при этом получается, что $(\psi, \lambda_0)$ - нулевая пара. Но это утверждение противоречит принципу максимума Понтрягина, значит $\lambda_0 \neq 0$.

Обратим внимание на однородную систему (13). Если разделить левую и правую часть на положительное число, то решение не изменится. Исходя из этого можно нормировать.

Нормировка: $\lambda_0 = 1$, тогда краевое условие для сопряжённой системы (13) получается такое же, как мы получали в формуле приращения функционала: $\psi(t_k) = -\frac{\partial {\varphi_0}^T(y(t_k))}{\partial y}$.

А теперь посмотрим, что происходит с условием максимума.

$\max\limits_{u(t) \in \Omega} H(\psi, y, u) \Rightarrow \frac{\partial H(\psi, y^0, u^0)}{\partial u} \equiv 0 \; \forall t \in T = [t_0, t_k]$, т.е. из принципа максимума мы получили необходимое условие оптимальности, которые получили из формулы приращения функционала. Таким образом, полученное нами условие является частным случаем ПМП, что и требовалось.

Все условия принципа максимума можно привести к следующему виду:

$H = \psi^T f(y,u)$, а уравнения

$$\begin{cases} \dot{y} = \left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^T \\ \dot{\psi} = -\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^T \end{cases}, y(t_0) = y^*, y(t_k) \in M, \psi(t_k) + \lambda_0 \frac{\partial {\varphi_0}^T}{\partial y} \perp M.$$

Это двухточечная краевая задача, которую нужно решать, чтобы найти оптимальное управление из принципа максимума Понтрягина. Она имеет гамильтонову форму, и сама функция Понтрягина превращается в Гамильтониан на оптимальном управлении, т.е. когда произведена операция максимизации.

## 3.3 Лагранжева форма условий оптимальности. Задача Больца в вариационном исчислении

Рассмотрим гладкую кривую $y(t) \in R^n, y(t_0) = y^*, t \in [t_0, t_k]$. Наша задача: выбрать эту гладкую кривую так, чтобы минимизировать следующий функционал:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y, \dot{y}) dt + \ell(y(t_k)),$$

где $f_0 \in C^1, \ell \in C^1$. Зафиксируем только левый конец этой кривой, правый будет произвольный. Для того, чтобы сохранить те значения, которые приняты в вариационном исчислении, перепишем функционал так:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L(y, \dot{y}) dt + \ell(y(t_k)),$$

где $L$ - Лагранжиан, а $\ell$ - терминант. Функционал, который содержит и интегральную, и терминальную часть называется функционалом Больца. А задача минимизации J по всем y называется задаче Больца. Эта задача укладывается в схему принципа максимума, поэтому представим её как задачу оптимального управления без ограничений. Перепишем задачу в более привычной форме.

Рассмотрим управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = f_0(y, u) \\ \dot{y} = u \end{cases}, y_0(t_0) = 0, y(t_0) = y^*,$$

$u$ трактуем как управление, т.е. собираемся управлять производной. За счёт выбора производной выбираем форму кривой.

Тогда функционал $J(u) = y_0(t_k) + \ell(y(t_k)) \to \min\limits_{u(\cdot) \in U}$. Применим к этой задаче ПМП.

# 4 Задача Больца в вариационном исчислении

## 4.1 Уравнение Эйлера и краевое условие для него

Функционал Больца: $J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y, \dot{y})dt + \ell(y(t_k)) = \int_{t_0}^{t_k} L(y, \dot{y})dt + \ell(y(t_k))$, где $L$ -Лагранжиан, а $\ell$ - терминант. И всё это было сведено к задаче оптимального управления следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = f_0(y, u) \\ \dot{y} = u \end{cases}, y_0(t_0) = 0, y(t_0) = y^*.$$

Вводим расширенный вектор состояния $\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix}$, и в этом расширенном векторе записываем экстремальную задачу $J(u) = \varphi_0(\tilde{y}(t_k)) = y_0(t_k) + \ell(y(t_k)) \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$.

Таким образом, мы получили стандартную формулировку для задачи для задачи оптимального управления при фиксированном времени и свободным концом траектории. Функция Понтрягина: $\widetilde{H} = \tilde{\psi}^T \tilde{f}(\tilde{y}, u) = \psi_0 f_0(y, u) + \psi^T u$, где $\psi$ - сопряжённая переменная, которая удовлетворяет сопряжённой системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0 \\ \dot{\psi} = -\psi_0 \left(\frac{\partial f_0(y^0, u^0)}{\partial y}\right)^T, \end{cases} \tag{14}$$

при фиксированном времени краевое условие трансверсальности имеет вид:

$$\tilde{\psi}(t_k)^T = -\frac{\partial \varphi_0(\tilde{y}(t_k))}{\partial \tilde{y}} = -(1, \frac{\partial \ell(y^0(t_k))}{\partial y}),$$

откуда $\psi_0 = -1, \psi(t_k) = -\left(\frac{\partial \ell(y(t_k))}{\partial y}\right)^T$.

Функция Понтрягина перепишется в виде $\widetilde{H} = \tilde{\psi}^T \tilde{f}(\tilde{y}, u) = -f_0(y, u) + \psi^T u$.

Необходимое условие слабого минимума:

$$\forall t \in [t_0, t_k]: \frac{\partial \widetilde{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{y}(t), u(t))}{\partial u} \equiv 0.$$

Выпишем $\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial u} = -\frac{\partial f_0(y^0, u^0)}{\partial u} + \psi^T \equiv 0$, откуда следует, что $\psi(t) = \left(\frac{\partial f_0(y^0, u^0)}{\partial u}\right)^T$.

Вспомним, что $u = \dot{y}, f_0(y, u) = L(y, \dot{y})$, тогда $\frac{\partial f_0}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = L_{\dot{y}}$ и $\frac{\partial f_0}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial y} = L_y$.

Перепишем второе уравнение системы (14) и получим $\frac{d}{dt} L_{\dot{y}} = \dot{\psi}^T = \left(\frac{\partial f_0(y^0, u^0)}{\partial y}\right) = L_y$, откуда получаем дифференциальное уравнение $\frac{d}{dt} L_{\dot{y}} = L_y$ - уравнение Эйлера в вариационном исчислении. Оно говорит, что все подозрительные кривые должны удовлетворять этому уравнения. Как мы видим это уравнение следует из принципа максимума, необходимого условия оптимальности и сопряжённой системы.

Получается, что $L_{\dot{y}}(t_k) = -\frac{\partial \ell(y^0(t_k))}{\partial y}$ - краевое условие для уравнения Эйлера. Был получен результат из теории вариационного исчисления, что оптимальные кривые должны удовлетворять вот этому условию.

Можем использовать ещё одно условие принципа максимума. Нам известно, что на оптимальной траектории $E = L_{\dot{y}} \cdot \dot{y} - L = \psi^T u - f_0 = \widetilde{H}(t) \equiv const$, где E – полная энергия, т.е. $E(t) \equiv const$.

## 4.2 Лагранжева форма условий оптимальности

Рассмотрим задачу оптимального управления $\dot{y} = f(y,u), u(\cdot) \in U, u(t) \in \Omega = R^s$ , $y(t_0) = y^*, y(t_k) = y^+$, где $t_0, t_k, y^*, y^+$фиксированы. Рассмотрим интегральный функционал $J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y(t), u(t))\, dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$ - экстремальная задача. Её можно представить как задачу минимизации функционала при наличии ограничений в виде равенств. Дифференциальную связь представим как $\dot{y} - f(y,u) \equiv 0$. Для решения таких задач используем принцип Лагранжа. Составим функционал Лагранжа $\mathcal{L}(y,u,\psi,\lambda_0) = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_k} f_0(y,u)dt + \int_{t_0}^{t_k\int} \psi^T(\dot{y} - f(y,u))dt \to min$, где $\lambda_0 \geq 0, \psi(t)$ - множители Лагранжа. Теперь в соответствии с принципом Лагранжа мы условие равенства убрали, и теперь можно рассматривать минимизацию функционала Лагранжа по всем переменным отдельно, т.е. остальные переменные можно закрепить, а задачу рассматривать так, как будто они все независимые.

Пусть есть оптимальный процесс$\{y^0, u^0\}$. Тогда нужно решить задачи:

1)$\to \min\limits_{y(\cdot)}\mathcal{L}$, фиксируя $u^0, \psi, \lambda_0$.

2)$\to \min\limits_{u(\cdot)}\mathcal{L}$, фиксируя $y^0, \psi, \lambda_0$

Теперь воспользуемся подходом Лагранжа для того, чтобы определить минимум. Запишем Лагранжиан $L = \lambda_0 f_0(y,u) + \psi^T(\dot{y} - f(y,u)) = \psi^T\dot{y} - \widetilde{H}$, где расширенная функция Понтрягина $\widetilde{H} = \psi^T f - \lambda_0 f_0$.

Решаем первую задачу, т.е. находим необходимое условие стационарности по y. Приращение траектории: $\Delta y(t) = y^0(t) + \varepsilon x(t)$, где$x(t)$ - вариация траектории, т.е.

$x(\cdot) \in KC^1[t_0, t_k]$, но поскольку условия начальные и конечные закреплены, то

$x(t_0) = 0, x(t_k) = 0$.

Рассмотрим функционал Лагранжа в оптимальной точке:

$$F(\varepsilon) = \mathscr{L}(y^0 + \varepsilon x, \dot{y}^0 + \varepsilon\dot{x}, u^0, \psi, \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_k} L(\, y^0 + \varepsilon x, \dot{y}^0 + \varepsilon\dot{x})dt.$$

$f, f_0 \in C^1$, поэтому функция Лагранжа непрерывно дифференцируема по $\varepsilon$. Теперь рассмотрим необходимое условие минимума этой функции: $\left.\frac{\partial F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$, но, поскольку функцию теперь можно дифференцировать под знаком интеграла, получим $\int_{t_0}^{t_k}(L_{y^0}\, x + L_{\dot{y}^0}\dot{x})dt = 0$ - вариация Лагранжа. Тогда условие оптимальности перепишется следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t_k}[\lambda_0 \frac{\partial f_0(y^0,u^0)}{\partial y} x + \psi^T(\dot{x} - \frac{\partial f(y^0,u^0)}{\partial y} x)]dt = 0. \tag{15}$$

$\dot{x} - \frac{\partial f(y^0,u^0)}{\partial y} x = \dot{x} - A(t)x = P$ - линейный оператор, где $A(t) = \frac{\partial f(y^0,u^0)}{\partial y}$. Теперь в выражении (15) заменим линейный оператор на сопряжённый $P^*$, который имеет вид:$P^* = -\dot{\psi} - A^T\psi$. Из определения сопряжённого оператора следует, что

$(y, Px) = (P^*y, x)$, т.е. должно быть выполнено следующее равенство:

$$\int_{t_0}^{t_k} \psi^T(\dot{x} - Ax)dt = \int_{t_0}^{t_k} (-\dot{\psi} - A^T\psi)^T x dt.$$

Убедимся, что это так. Для этого выпишем ещё раз предыдущее равенство:

$$\int_{t_0}^{t_k} (\psi^T\dot{x} - \psi^T Ax + \dot{\psi}^T x + \psi^T Ax)dt = \int_{t_0}^{t_k} (\psi^T\dot{x} + \dot{\psi}^T x)dt = \int_{t_0}^{t_k} \frac{d(\psi^T x)}{dt} dt =$$
$$= \psi^T(t_k)\underbrace{x(t_k)}_{=0} - \psi^T(t_0)\underbrace{x(t_0)}_{=0} = 0.$$

Преобразуем выражение (15), тогда

$$\int_{t_0}^{t_k} [\lambda_0 \frac{\partial f_0(y^0,u^0)}{\partial y} x + \left(-\dot{\psi} - \left(\frac{\partial f(y^0,u^0)}{\partial y}\right)^T \psi\right)^T x]dt = 0.$$

Полученное условие минимума сводится к виду:

$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f(y^0,u^0)}{\partial y}\right)^T \psi - \lambda_0 \left(\frac{\partial f_0(y^0,u^0)}{\partial y}\right)^T$ - сопряжённое уравнение ПМП. (16)

Это уравнение можно представить другим образом: $\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial \tilde{H}(\psi,y,u)}{\partial y}\right)^T$. Если записать ещё и исходное уравнение, то получится гамильтонова форма:

$\begin{cases} \dot{\psi} = -\left(\frac{\partial \tilde{H}(\psi,y,u)}{\partial y}\right)^T \\ y = \left(\frac{\partial H(\psi,y,u)}{\partial \psi}\right)^T \end{cases}$ - условие оптимальности.

Тогда с точки зрения лагранжева подхода, используя $\psi^T = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$, полученное из определения Лагранжиана, уравнение (16) можно представить в виде:$\frac{d}{dt} L_{\dot{y}} = L_y$- уравнение Эйлера-Лагранжа. Мы получили связь между гамильтоновой и лагранжевой формой.

Посмотрим на то, что получается в общем случае. Отличия от того случая, который был рассмотрен, заключаются в том, что начальные условия фиксированы $y(t_0) = y^*$, но граничные условия не фиксированы

$$y(t_k) \in M = \{\varphi_i(y(t_k)) = 0, i = 1 \ldots n, rank \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right| = m\}, \varphi_i \in C^1.$$

Функционал отличается от интегрального: $J = \varphi_0(y(t_k)) \to min$. Также появляется граничное условие $u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in PC[t_0, t_k] | u(t) \in \Omega\}$, где $\Omega$ - замкнутое ограниченное множество. Запишем Лагранжиан $\mathcal{L} = \psi^T(\dot{y} - f)$ и терминант

$\ell(y(t_k)) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \varphi_i( y(t_k))$. Тогда функционал Лагранжа будет $\mathscr{L}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, t_k, \psi, y, u) = \int_{t_0}^{t_k} L dt + \ell$.

Теперь в той же задаче сформулируем принцип максимума в лагранжевой форме и его соответствие гамильтоновой форме.

**Теорема.** Если $\{y^0, u^0, [t_0, t_k]\}$ - оптимальный процесс, то $\exists$ множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \psi_1, \dots, \psi_n$ не все равные нулю. Такие, что выполняется условия:

а) Стационарности по $y(\cdot)$: $-\frac{d}{dt} L_{\dot y} + L_y = 0 \Leftrightarrow \dot\psi = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^T \psi$.

б) Трансверсальности: $L_{\dot y}(t_k) = -\frac{\partial \ell(y(t_k^0))}{\partial y} \Leftrightarrow \psi^T(t_k) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$.

в) Стационарности по $t_k$: $\mathscr{L}_{t_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \ell}{\partial y} \dot y^0(t_k^0) = 0 = -\psi^T(t_k) f(y^0(t_k), u^0(t_k)) = H(t_k) = 0$. Получили краевое уравнение для функции Понтрягина.

г) Минимума по $u(\cdot)$Лагранжиана $L = \psi^T \dot y - H$: $\min\limits_{u\in\Omega} \quad L(y^0(t), \dot y^0(t), u(t), \psi(t)) \Rightarrow \max\limits_{u\in\Omega} H(\psi(t), y^0(t), u) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))$.

д) Неотрицательности множителя: $\lambda_0 \geq 0$.

Задача автономная, т.е. Лагранжиан не зависит от времени, поэтому полная энергия$E(t) = L_{\dot y} \dot y - \underbrace{L}_{=0} = const \Rightarrow \underbrace{\psi^T f(y^0(t), u^0(t))}_{H(t)} = const$, значит

$H(t) = const \equiv 0$ из пункта (в).

То есть получили классическое условие стационарности Гамильтониана, которое было сформулировано на первой лекции. Таким образом, мы разобрали соответствие лагранжевой формы оптимальности и гамильтоновой формы.

## 4.3 О связи ПМП с вариационными принципами механики

Рассмотрим систему материальных точек $m_i$ , у которых координаты $r_i = (y_1^i, y_2^i, y_3^i)$. Система движется в поле потенциальных сил, т.е. известна потенциальная энергия $U(r_1 \dots r_n)$, а кинетическая запишется как $T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot r^2{}_i$.Рассмотрим движение этой системы с закреплённым временем, начальное и конечное положение. Тогда можно ввести функцию действия по Гамильтону $S = \int_{t_0}^{t_k} L(r, \dot r) dt$, где Лагранжиан $L(r, \dot r) = T(\dot r) - U(r)$. Согласно принципу Гамильтона – Остроградского действительное движение этой системы материальных точек должно происходить при экстремальном действии по Гамильтону. Экстремали находятся среди решений уравнений Эйлера $\frac{d}{dt} L_{\dot r} = L_r$, т.е. уравнений Лагранжа 2-го рода для системы материальных точек. А экстремальную задачу можно получить из принципа максимума.

Посмотрим, что получается в гамильтоновой форме. Введём импульсы

$\psi_i = m_i \dot{r}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$. Вспомним связь с функцией Понтрягина:

$$H = \sum \psi_i \dot{r}_i - T + U = \sum m_i \dot{r}^2{}_i - T + U = T + U$$ - полная энергия,

т.е. для данной задачи полная энергия системы совпадает с функцией Понтрягина. Тогда уравнение Эйлера в гамильтоновой форме перепишется

$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} = \frac{\partial H}{\partial r_i} \Rightarrow m_i \ddot{r}_i = F_i$ - уравнения Ньютона. Осталось записать определение импульса: $\dot{r}_i = \frac{\psi_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}$ ⇒гамильтонова форма, которая сводится к уравнениям Ньютона и определению импульса.

# 5 Оптимальная стабилизация при неограниченных ресурсах

## 5.1 Управление линейной системой с квадратичным функционалом на конечном интервале времени

1 уровень управления: мы хотим найти некоторое программное движение

$\dot{y}^{\Pi} = f(y^{\Pi}, u^{\Pi})$, где ресурсы управления ограничены $u^{\Pi}(\cdot) \in U$, начальная точка известна $y(t_0) = y^*$, а в конце мы должны попасть на многообразие $y(t_k) \in M$ и минимизируем функционал $J(u^{\Pi}) \to \min\limits_{u^{\Pi}(\cdot) \in U}$.

2 уровень управления: рассматривается расширенная система $\dot{y} = f(y, u, v)$, где начальное условие$y(t_0) = y^* + x(t_0)$. В правых частях появились постоянно действующие возмущения $v(\cdot) \in V$, которые тоже влияют на поведение управляемой системы. Управление строится в виде двух: $u = u^{\Pi} + \Delta u$, где $\Delta u$ - дополнительное управление. $x(t) = y(t) - y^{\Pi}(t)$ - отклонения от программного движения, которые удовлетворяют линеаризованной системе в отклонениях

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)\Delta u + C(t)v, \tag{17}$$

где матрицы вычисляются следующим образом:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{y=y^{\Pi}}, B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{u=u^{\Pi}}, C(t) = \frac{\partial f}{\partial v}\bigg|_{v=0}.$$

Таким образом, рассматривалась задача 2 уровня, т.е. задача стабилизации линейной системы (17), у которой начальное условие $x(t_0) = x^* \neq 0$. До этого эта задача решалась при $v \equiv 0$. Задача заключалась в выборе $\Delta u$так, чтобы решения линейной системы (17) были асимптотически устойчивы $x(t) \to 0, t \to \infty$. Дополнительное управление можно выбирать в виде линейной обратной связи:

$\Delta u = Kx$, т.е. выбирать матрицу К так, чтобы замкнутая система $\dot{x} = (A + BK)x$ была гурвицевой, т.е. система должна быть асимптотически устойчивой.

Для решения этой задачи стабилизации 2-го уровня попробуем применить тот же подход, который применяли для решения задачи 1-го уровня. Во-первых, временно предположим, что возмущений нет и допустим, что $u^{\Pi} \equiv 0$ в системе (17). Тогда перепишем систему (17) и посмотрим какую задачу можно решить.

$\dot{x} = Ax + Bu$ с некоторым начальным условием $x(t_0) = x^*$. Требуется, чтобы

$x(t) \to 0, t \to \infty$, т.е. нужно сделать отклонения малыми. Но в отличие от задачи стабилизации есть фиксированный отрезок времени $t \in [t_0, t_k]$, на котором мы рассматриваем движение системы.

Попробуем решить задачу: Найти такие $u$, чтобы определить понятие малости с помощью квадратичного функционала

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} (x^T G x + u^T N u) dt + x(t_k)^T S x(t_k) \to \min_{u(\cdot)}.$$

Видно, что явно в этой экстремальной задаче нет формальных ограничений на $u(t)$, поэтому задача и называется задачей с неограниченными ресурсами. $G(t) = G^T(t) \geq 0$,

$N(t) = N^T(t) > 0, S = S^T \geq 0$. Это неравенство для матрицы понимается в том смысле, что $\forall z \in R^n, z \neq 0$получается, что квадратичная форма $z^T S z \geq 0$. Строгое понимается точно также.

Покажем, что квадратичная форма имеет смысл только симметричных матриц. Если рассмотреть квадратичную форму, то есть отображение вектора $x$ на числовую ось:$x^T S x = \alpha \in R^1$. Если транспонировать это, то получится $x^T S^T x = \alpha^T = \alpha$, откуда видно, что $S = S^T$.

Эта задача отличается от той, что уже решалась ранее, отсутствием явных ограничений на управление и тем, что у нас свободный правый конец траектории. Такую задачу мы уже рассматривали для общей нелинейной системы. Проделаем теперь те же выкладки для линейной системы. Придётся сделать допущение, что $\exists$оптимальное решение

$u^0(\cdot) \in PC^1[t_0, t_k]$. Допустим, что решение у этой задачи есть. Решим экстремальную задачу.

Запишем функционал в терминальном виде, для чего рассмотрим расширенный вектор состояния $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}$. Вместо исходной системы рассмотрим следующую:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x^T G x + u^T N u \\ \dot{x} = Ax + Bu \end{cases}, \quad x_0(t_0) = 0, x(t_0) = x^*.$$

Тогда функционал перепишется $J(u) = x_0(t_k) + x^T(t_k) S x(t_k) = \varphi_0(\tilde{x}(t_k)) \to \min\limits_u$. Применим принцип максимума в данном случае как условие слабого локального минимума:

$$H = H(\tilde{\psi}, \tilde{y}, u) = \psi_0(x^T G x + u^T N u) + \psi^T(Ax + Bu).$$

Выпишем сопряжённую систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = 0 \\ \psi = -A^T \psi - 2\psi_0 G x \end{cases}.$$

Условие трансверсальности:

$$\psi^T(t_k) = -\lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(\tilde{x}(t_k))}{\partial \tilde{x}}, \tag{18}$$

где $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tilde{x}} = (1{,}2x^T S)$.

Мы доказывали, что $\lambda_0 \neq 0$, и из условия принципа максимума $\lambda_0 \geq 0$. Поэтому можно нормировать сопряжённую систему и считать $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Из условия (18) следует, что $\psi_0(t_k) = -\frac{1}{2}$, но поскольку эта величина константа, то можно считать $\psi_0 = -\frac{1}{2}$. Тогда из уравнений сопряжённой системы получится $\psi = -A^T \psi + Gx$, а функция Понтрягина $H = H(\tilde{\psi}, \tilde{y}, u) = -\frac{1}{2}(x^T G x + u^T N u) + \psi^T(Ax + Bu)$. Если нет явных ограничений на управление, то, как было доказано, необходимое условие оптимальности принципа максимума выглядит следующим образом: $\frac{\partial H(\tilde{\psi}, \tilde{y}, u)}{\partial u} \equiv 0, t \in [t_0, t_k]$. Попробуем вычислить это условие: $\frac{\partial H}{\partial u} = -u^T N + \psi^T B \equiv 0$, где N>0. Тогда получается, что

$u^0(t) = N^{-1}(t)B^T(t)\psi(t)$ - условие для оптимального решения.

Для того, чтобы найти управление, надо решить следующую систему уравнений размерности 2n:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BN^{-1}B^T\psi \\ \dot{\psi} = -A^T\psi + Gx \end{cases}, x(t_0) = x^*, \psi(t_k) = -Sx(t_k).$$

Будем искать решение сопряжённой системы в следующем виде:

$$\psi(t) = -\mathcal{L}(t)x, \text{ где } \mathcal{L}(t) = \mathcal{L}^T(t) \geq 0.$$

Перепишем оптимальное управление $u^0 = -N^{-1}B^T\mathcal{L}(t)x = K(t)x$ - линейная обратная связь по $x$. Перепишем двухточечную задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BN^{-1}B^T\mathcal{L}x \\ \dot{\psi} = (A^T\mathcal{L} + G)x \end{cases}.$$

$\dot{\psi} = -\dot{\mathscr{L}}x - \mathscr{L}\dot{x} = -\dot{\mathscr{L}}x - \mathscr{L}(A - BN^{-1}B^T\mathscr{L})x = (-\dot{\mathscr{L}} - \mathscr{L}(A - BN^{-1}B^T\mathscr{L}))x = (A^T\mathscr{L} +$
$+G)x,$

$\dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}A + A^T\mathcal{L} - \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L} + G = 0 \Rightarrow$ уравнение Риккати с краевым условием на правом конце $\mathcal{L}(t_k) = S$. То есть нужно интегрировать это уравнение справа налево. Допишем замкнутую задачу:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}A + A^T\mathcal{L} - \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L} + G = 0 \\ \mathcal{L}(t_k) = S, u = -N^{-1}B^T\mathcal{L}x \end{cases}, \tag{19}$$

а замкнутая система выглядит так: $\dot{x} = Ax - BN^{-1}B^T\mathcal{L}x, x(t_0) = x^*$. В том случае, когда решение уравнения Риккати известно, то можно найти оптимальное управление в виде обратной линейной связи, найти $x$, проинтегрировать и найти оптимальное значение функционала, решив задачу в квадратуре.

В прошлом семестре исходная линеаризованная система записывалась как

$\dot{x} = Ax + Bu + \underbrace{Cv}_{q}$, где $q$ - случайный процесс типа белого шума. Когда есть измерение $z = Hx + r$, то для того, чтобы решить задачу Калмановской фильтрации, необходимо было решить задачу относительно симметрической матрицы ковариации ошибки оценки: $P = M[\Delta x \Delta x^T]$, $\Delta x = x - \tilde{x}$, $\tilde{x}$- оценка $x$. Для такой матрицы необходимо было решить уравнение $\dot{P} = AP + PA^T + Q - HPR^{-1}H^TP^T$с начальным условием $P(t_0) = P_0$. Т.е. получилось сопряжённое к предыдущему уравнение Риккати. В каком-то смысле задачи оптимального оценивания и оптимальной стабилизации для квадратичного функционала сопряжены. Если $(A, B)$ - управляемая для линейной системы

$\dot{x} = Ax + Bu$, то тогда можно выбрать управление в виде обратной линейной связи

$u = Kx$ таким образом, что решение будет асимптотически устойчивым.

## 5.2 Оптимальная стабилизация стационарной системы на бесконечном отрезке времени

Рассмотрим некоторый аналог этой задачи, частный случай исходной постановки, т.е. $\dot{x} = Ax + Bu$, $t_k = \infty$, матрицы $A, B = const$,

$J(u) = \int_{t_0}^{\infty}(x^T Gx + u^T Nu)dt + x^T(\infty)Sx(\infty)$, где $\begin{matrix} G = G^T \geq 0 \\ N = N^T > 0 \end{matrix} \Rightarrow const$. Если считать, что$x(t) \not\to 0$при $t \to \infty$, то $J(u) = \infty$, т.е. пропадает смысл в этом функционале на бесконечном отрезке времени, поэтому необходимо ограничиться теми системами, у которых выполнено условие $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Добавим условие управляемости: $(A, B)$ - управляемая полностью, это значит, что $rank(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$. Мы можем выбрать управление в виде обратной связи $u = Kx$ таким образом, что замкнутая система $\dot{x} = (A + BK)x$ получается устойчивая асимптотически, более того, с любым запасом устойчивости, т.е. матрицу можно подобрать так, что

$|x(t)| \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}$, откуда следует, что $J(u)$ - конечен. Поэтому задача минимизации по $u$по-прежнему имеет смысл:

$$J(u) = \int_{t_0}^{\infty}(x^T Gx + u^T Nu)dt + \underbrace{x^T(\infty)}_{\to 0}\underbrace{S}_{=0}\underbrace{x(\infty)}_{\to 0} = \int_{t_0}^{\infty}(x^T Gx + u^T Nu)dt \to \min_u.$$

Но мы знаем решение задачи оптимизации для системы на конечном интервале времени в виде задачи (19) в замкнутом виде. Наложим ещё одно условие на систему, используя, что $G \geq 0, N > 0$. Когда матрица G=0,$G = Q^T Q$и допустим пара $(A, Q)$ - наблюдаемая, т.е. $rank\begin{pmatrix} Q \\ QA \\ \dots \\ QA^{n-1} \end{pmatrix} = n$, тогда воспользуемся следующим результатом:

**Теорема (Калман).** Если пара $(A, B)$ - полностью управляемая, а пара $(A, Q)$ - полностью наблюдаемая, то для $\forall$решений уравнения Риккати $\mathcal{L}(t)$ выполняется следующее условие: $\lim\limits_{t_0 - t_k \to \infty} \mathcal{L}(t_0) = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^T > 0$, где $\mathcal{L}_0$ является единственным решением алгебраического уравнения Риккати

$$\mathscr{L}_0 A + A^T \mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_0 B N^{-1} B^T \mathscr{L}_0 + G = 0. \tag{20}$$

Таким образом, оптимальное управление в данной задаче, которое даёт минимум функционалу, выглядит следующим образом: $u^0 = -N^{-1}B^T\mathscr{L}_0 x = Kx$.

Воспользуемся результатом Калмана, т.е. будем считать, что было получено оптимальное управление, а уравнение (20) имеет единственное положительно определённое решение. Тогда убедимся, что замкнутая система асимптотически устойчива.

Замкнутая система в нашем случае выглядит следующим образом:

$\dot{x} = (A - BN^{-1}B^T\mathcal{L}_0)x$. Покажем, что она будет асимптотически и даже экспоненциально устойчива при таком выборе управления. Для этого рассмотрим функцию Ляпунова для нашей системы в виде квадратичной формы $V = x^T\mathscr{L}_0 x$. Убедимся, что её производная в силу системы отрицательна:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T\mathcal{L}_0 x + x^T\mathcal{L}_0\dot{x} = x^T(A^T - \mathcal{L}_0 BN^{-1}B^T)\mathcal{L}_0 x + x^T\mathcal{L}_0(A - BN^{-1}B^T\mathcal{L}_0)x =$$
$$= x^T(\mathcal{L}_0 A + A^T\mathcal{L}_0 - 2\mathcal{L}_0 BN^{-1}B^T\mathcal{L}_0)x = x^T(-G - \mathcal{L}_0 BN^{-1}B^T\mathcal{L}_0)x = -x^T \underbrace{G}_{\geq 0} x -$$
$$-u^{0^T} \underbrace{N}_{>0} u^0 < 0,$$ используя уравнение (20) и то, что $u^0 = -N^{-1}B^T\mathscr{L}_0 x$.

Мы показали, что в замкнутой системе $\dot{x} = Ax + Bu$ с управлением $u^0$существует функция Ляпунова, производная которой в силу системы отрицательно. То есть замкнутая система асимптотически устойчива.

А теперь убедимся в конечности функционала:

$$J(u^0) = \int_{t_0}^{\infty}(x^T Gx + u^{0^T}Nu^0)dt = \int_{t_0}^{\infty} -\frac{dV}{dt}dt = V(t_0) - \underbrace{V(\infty)}_{=0} = V(t_0),$$

отсюда получается, что $J(u^0) = x^T(t_0)\mathscr{L}_0 x(t_0) = x^{*^T}\mathscr{L}_0 x^*$ - конечен. То есть получен явный вид от начальных условий.

Попробуем теперь найти явные оценки для отклонений в замкнутой системе. Рассмотрим случай, когда $G = G^T > 0$, тогда $\frac{dV}{dt} = -x^T Gx - u^{0^T}Nu^0 \leq -x^T Gx < 0$, где $V = x^T\mathcal{L}_0 x$. Дальше рассмотрим квадратичную форму $x^T Gx$, известно, что существует некоторое преобразование $x = F\xi$, что положительно определённая форма G приобретает диагональный вид$x^T Gx = \sum_{i=1}^n \lambda_i\xi_i^2$, где $\lambda_i > 0$ - собственные числа матрицы G. Тогда для квадратичной формы можно записать следующее неравенство: $\lambda_{\min}|x|^2 \leq x^{\mathrm{T}}Gx \leq \lambda_{\max}|x|^2$, а также $\mu_{\min}|x|^2 \leq x^{\mathrm{T}}\mathsf{L}_0 x \leq \mu_{\max}|x|^2$.

$\frac{dV}{dt} \leq -x^{\mathrm{T}}Gx \leq -\lambda_{\min}|x|^2 \leq -\frac{\lambda_{\min}}{\mu_{\max}}V$, откуда получаем оценку

$\mu_{\min}|x(t)|^2 \leq V(t) \leq V(t_0)e^{-\frac{\lambda_{\min}}{\mu_{\max}}(t-t_0)} \leq \mu_{\max}|x(t_0)|^2$. Получается следующий результат

$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}}|x(t_0)|e^{-\frac{\lambda_{\min}}{2\mu_{\max}}(t-t_0)}$ - явная оценка для решений замкнутой системы

$\dot{x} = (A - BN^{-1}B^T\mathscr{L}_0)x.$

**Замечание.** Пусть $J(u) = \int_{t_0}^{t_k}(x^T Gx + u^T Nu)dt + x^T(t_k)Sx(t_k)$, где $t_k < \infty$. Уравнение Риккати$\dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}A + A^T\mathcal{L} - \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L} + G = 0, \mathcal{L}(t_k) = S$. Допустим, что система стационарна, все условия управляемости, наблюдаемости выполнены, поэтому существует решение (20) строго больше нуля. Если в задаче с конечным временем выбрать матрицу $S = \mathcal{L}_0$- решение уравнения (20), то получается решение $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_0$, т.е. обратная связь $u^0 = -N^{-1}B^T\mathscr{L}_0 x = K_0 x$даёт решение задачи минимизации функционала на конечном отрезке времени, а коэффициенты обратной связи постоянны и находятся из уравнения (20).

# 6 Квадратичная стабилизация и линейные матричные неравенства

До этого рассматривалась задача, где есть линейная система $\dot{x} = Ax + Bu$ с начальным условием $x(t_0) = x^*$. Рассматривался квадратичный функционал

$J(u) = \int_{t_0}^{\infty} (x^T Gx + u^T Nu)dt \to min, A, B, G = G^T \geq 0, N = N^T > 0 - const$ при бесконечном времени управления. Этот функционал описывает в среднем отклонения от заданного движения. Управление $u^0 = -N^{-1}B^T\mathcal{L}_0 x$, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^T > 0$ - единственное решение уравнения $\mathcal{L}_0 A + A^T \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_0 BN^{-1}B^T\mathcal{L}_0 + G = 0$. Оказалось, что замкнутая система $\dot{x} = (A - BN^{-1}B^T\mathcal{L}_0)x$ устойчива, $J^0 = J(u^0) = x^{*^T}\mathcal{L}_0 x^*$. Также существует функция Ляпунова $V = x^T\mathcal{L}_0 x$, $V(t) = \int_t^\infty (x^T Gx + u^{0^T} Nu^0)dt < 0$.

Рассмотрим нельзя ли подобрать постоянную матрицу $\mathcal{L} = \mathcal{L}^T = const > 0$, что

$V = x^T\mathcal{L}x$ - функция Ляпунова для замкнутой системы с управлением $u = -N^{-1}B^T\mathscr{L}x$.

$\dot{x} = (A - BN^{-1}B^T\mathcal{L})x = A_k x$, где $A_k = A - BN^{-1}B^T\mathscr{L}$.

Производная функции Ляпунова в силу системы удовлетворяет условию

$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^T\mathcal{L}x) = \dot{x}^T\mathcal{L}x + x^T\mathcal{L}\dot{x} = x^T A_k^T \mathcal{L}x + x^T\mathcal{L}A_k x = x^T(A_k^T\mathcal{L} + \mathcal{L}A_k)x < 0$, если $\mathcal{L}A_k + A_k^T\mathcal{L} < 0, \mathcal{L} > 0$. Преобразуем это неравенство и получим

$\mathcal{L}A + A^T\mathcal{L} - \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L} < 0$ - квадратичное неравенство, похожее на неравенство Риккати. Матрица $\mathcal{L} > 0 \Rightarrow \exists S = \mathcal{L}^{-1}, S = S^T > 0$. Теперь умножим полученное неравенство слева и справа на матрицу S: $S(\mathcal{L}A + A^T\mathcal{L} - \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L})S < 0$, тогда

$$AS + SA^T - 2BN^{-1}B^T < 0, S > 0. \tag{21}$$

Покажем, что неравенство (21) – линейное матричное неравенство (LMI).

Пусть у нас есть некоторый вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $F(x) = F_0 + x_1F_1 + x_2F_2 + \ldots + x_mF_m$, где

$F_i = F_i^T, i = 0\ldots m$ - действительные симметрические матрицы размера n на n.

$F(x)$ - симметричная матрица, рассмотрим для неё неравенство $F(x) > 0$, которое будет выполнено, если$\forall z \neq 0 \in R^n$: $z^T F(x)z > 0$. Такие неравенства будем называть линейными матричными неравенствами. Рассмотрим более общее, чем (21) неравенство $AX + X^TA + W > 0$, $A - (n \times n), X - (n \times n), W = W^T > 0$ и покажем, что это неравенство является линейным матричным неравенством.$X$ - неизвестная матрица, у которой $m = \frac{n(n+1)}{2}$ различных элементов, т.к. она симметричная, а $W$ - заданная матрица, тогда можно написать следующее разложение

$X = \sum_{i=1}^m x_iE_i = \sum_{i=1}^m x_i(AE_i + E_iA^T) + W > 0$, где $\{E_1, \ldots, E_m\}$- базис пространства симметричных матриц. Обозначим $F_0 = W, F_i = AE_i + E_iA^T$, после чего следует, что (21) – это линейной матричное неравенство.

Рассмотрим некоторые свойства линейных матричных неравенств.

Во-первых, определим некоторое множество решений $\mathcal{F} = \{x | F(x) > 0\}$ - выпукло, поскольку, если $x_1, x_2 \in \mathcal{F}$ и $\forall \alpha \in [0,1]$, то $\mathcal{F}(x) = \alpha F(x_1) + (1-\alpha) F(x_2) > 0$, где

$x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$.

Во-вторых, система линейных матричных неравенств $\begin{cases} F_1(x) > 0 \\ \dots \\ F_k(x) > 0 \end{cases}$ может быть записана как одно неравенство $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_k(x) \end{pmatrix} > 0$. При этом возрастает размерность, но в настоящее время разработаны очень эффективные методы численного решения системы линейных матричных неравенств для высокой размерности, основанные на решении задачи выпуклой оптимизации.

Вернёмся к исходной задаче, которую мы ставили: $\dot{x} = Ax + Bu = (A - BN^{-1}B^T\mathcal{L})x$, $u = -N^{-1}B^T\mathcal{L}x = -N^{-1}B^TS^{-1}x$, где S удовлетворяет неравенству (21). Нужно выбрать матрицу $\mathcal{L}$ или связанную с ней матрицу S из решения системы (21) и связать с функционалом $J = \int_{t_0}^{\infty} (x^TGx + u^TNu)dt$. Перепишем неравенство (21) и усилим его, взяв некоторый параметр

$$\gamma > 0: AS + SA^T - 2BN^{-1}B^T + \gamma(BN^{-1}B^T + SGS) < 0 \tag{22}$$

Запишем полученное неравенство для матрицы $\mathcal{L}$, умножив на эту матрицу слева и справа неравенство (22), и получим:

$\mathscr{L}A + A^T\mathscr{L} + (\gamma - 2)\mathscr{L}BN^{-1}B^T\mathscr{L} + G < 0$ - квадратичное неравенство с параметром. (23)

**Лемма 1.** Матричное уравнение Ляпунова $AP + PA^T + W = 0$, где $W = W^T$, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $Re(\lambda_i + \lambda_j) = 0$, где $\lambda_i$- собственные значения матрицы $A$. Единственное решение выписывается в следующем виде:

$P = \int_{t_0}^{\infty} e^{A(t-t_0)}We^{A^T(t-t_0)}dt$, при этом $P > 0$ тогда и только тогда, когда матрица $A$ устойчива, т.е. гурвицева и либо выполнены условия:

1) $W > 0$.

2) $W = CC^T$и пара $(A, C)$ - полностью управляемая.

Следовательно, если уравнение Ляпунова имеет положительное определённое решение, то матрица $A$обязана быть гурвицевой (устойчивой).

**Следствие 1.** Если матрица$A$ - гурвицева и $W > 0$, при этом $x(t)$ - решения уравнения $\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0$, то функционал $J = \int_{t_0}^{\infty}(x^TWx)dt = x_0^TPx_0$, где $P$ - решение уравнения Ляпунова $PA + A^TP + W = 0$.

Докажем это. Для этого представим $W = D^TD$, тогда пара $(A, D)$ - полностью наблюдаемая. Тогда, если $P$ — это решение уравнения Ляпунова, то по Лемме 1 можно записать: $P = \int_{t_0}^{\infty}(e^{A^T(t-t_0)}We^{A(t-t_0)})dt > 0$. Пусть $x(t)$ - решения уравнения

$\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0$, тогда решение системы $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$. Выпишем функционал $J = \int_{t_0}^{\infty}(x^T W x)dt = \int_{t_0}^{\infty}(x^T D^T D x)dt = \int_{t_0}^{\infty}(x_0^T e^{A^T(t-t_0)} D^T D e^{A(t-t_0)} x_0)dt = x_0^T P x_0$.

**Следствие 2 (Неравенство Ляпунова).** Пусть $A$ - гурвицева и $P_0 \geq 0$ - решение уравнения Ляпунова $AP_0 + P_0 A^T + BB^T = 0$.

(Если пара $(A, B)$ – управляемая, то $P_0 > 0$.)

Тогда неравенство Ляпунова $AP + PA^T \leq -BB^T$- разрешимое и $P \geq P_0$.

Вернёмся к нашей задаче и используем полученные результаты. $\begin{cases} A_k = A - BN^{-1}B^T\mathcal{L} \\ W = G + \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L} \end{cases}$, применим **Следствие 1**:

$$A_k^T \mathcal{L}_k + \mathcal{L}_k A_k = -(G + \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L}) \text{ - уравнение Ляпунова,} \quad (24)$$

которое имеет решение $\mathcal{L}_k > 0$.

$J = \int_{t_0}^{\infty}(x^T W x)dt = x^{*^T}\mathscr{L}_k x^*$. $\mathcal{L}$ удовлетворяет неравенству (23), $\mathcal{L} > 0$.

$\mathcal{L}A_k + \mathcal{L}A_k^T = \mathcal{L}A + A^T\mathcal{L} - 2\mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L} \leq -\gamma(G + \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L})$, разделим на $\gamma$ и получим:

$\frac{1}{\gamma}\mathcal{L}A_k + \frac{1}{\gamma}\mathcal{L}A_k^T \leq -(G + \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L})$. Теперь вычтем из полученного неравенства равенство (24): $A_k^T(\frac{1}{\gamma}\mathcal{L} - \mathcal{L}_k) + (\frac{1}{\gamma}\mathcal{L} - \mathcal{L}_k)A_k \leq 0$, обозначим $P' = \frac{1}{\gamma}\mathcal{L} - \mathcal{L}_k$, тогда в силу неравенства Ляпунова, что $P' \geq 0$- решение полученного неравенства Ляпунова. Для функционала равенство запишется $J(u) = x^{*^T}\mathcal{L}_k x^* \leq \frac{1}{\gamma}x^{*^T}\mathcal{L}x^* = \frac{1}{\gamma}x^{*^T}S^{-1}x^*$. Теперь воспользуемся ещё одной Леммой, чтобы найти граничные значения $\gamma$, при которых существуют решения квадратичного неравенства

$$AS + SA^T + (\gamma - 2)BN^{-1}B^T + \gamma SGS \leq 0. \quad (25)$$

**Лемма 2 (Шур).** Пусть дана блочная матрица $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, где $X_{11}$, $X_{22}$- квадратные матрицы. Если $det|x_{22}| \neq 0$, то $X$ - не вырождена тогда и только тогда, когда матрица $Q = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21}$ (дополнение по Шуру) не вырождена и $det|x| = det|Q|\,det|X_{22}|$.

Если вычесть из первой строки матрицы $X$вторую, умноженную слева на $X_{12}X_{22}^{-1}$, то получим матрицу $X = \begin{pmatrix} X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, откуда следует требуемый результат.

**Следствие 3**. Если $X_{11} = X_{11}^T, X_{21} = X_{12}^T, X_{22} = X_{22}^T$, то $X > 0 \Leftrightarrow Q > 0, X_{22} > 0$.

Рассмотрим случай $det\,X_{12} \neq 0$, а $X_{22} = \beta E_m \Rightarrow X \geq 0$ тогда и только тогда, когда

$\beta > 0, Q \geq 0$.

Обозначив $G = DD^T$, покажем, что неравенство (25) эквивалентно системе неравенств

$$\begin{pmatrix} AS + SA^T + (\gamma - 2)BN^{-1}B^T & \sqrt{\gamma}SD \\ \sqrt{\gamma}D^T S & -E \end{pmatrix} \leq 0, S > 0. \tag{26}$$

Видно, что это есть линейное матричное неравенство относительно матрицы S. Дополнение по Шуру $Q = AS + SA^T + (\gamma - 2)BN^{-1}B^T + \gamma SGS \leq 0$ — это неравенство эквивалентно тому неравенству, что нам нужно. Для того, чтобы найти нужную нам матрицу S, надо решить линейное неравенство (26) при разных фиксированных $\gamma$. Если мы нашли это решение, тогда нашли оценку для функционала сверху. Эта оценка достижима, если решить задачу одномерной оптимизации по $\gamma \in (0, \infty)$. Если найти верхнюю границу $\gamma$, для которой есть решение системы (26), тогда

$J(u^0) = \dfrac{1}{\gamma_{\max}} x^{*^T} S^{-1} x^*$ , где S – это соответствующее $\gamma_{max}$ решение системы (26).

# 7 Стабилизация линейной системы при наличии возмущений

## 7.1 Задача робастной квадратичной стабилизации

Рассмотрим линейную управляемую систему, матрица которой может зависеть от некоторых параметров $\dot{x} = A(q)x + Bu$, $x(0) = x_0$, где вектор $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdots \\ q_m \end{pmatrix}$ не фиксирован, т.е. в линейной управляемой системе присутствует неопределённость,

$q \in Q \subset R^m$, $Q$ - выпуклое, замкнутое, ограниченное множество. Множество выпукло, если точки $q_1, q_2 \in Q$, то и точка $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \in Q, \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Рассмотрим некоторые виды неопределённостей:

а) интервальные неопределённости

$$q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i = 1, \dots, m$$

б) сферические неопределённости

$Q = \{(q - q_0)^T W^{-1}(q - q_0) \leq 1\}$ - эллипсоид с центром в точке $q_0$, заданный матрицей $W = W^T > 0$

в) аффинные неопределённости

$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^m q_i A_i$, где $A_i, i = 0, \dots, m$ - заданы, $q \in Q$ - выпуклый многогранник.

Рассмотрим задачу стабилизации системы, когда в ней присутствует аффинная неопределённость и рассмотрим задачу **робастной** стабилизации. $q$ - фиксировано, тогда есть выбор управления $u = Kx$ так, что матрица $A_k$ всей системы

$\dot{x} = (A(q) + BK)x = A_k x$ была гурвицева (устойчива). То же самое для робастной стабилизации, т.е. чтобы матрица системы была гурвицевой $\forall q \in Q$.

В прошлый задачу стабилизации для линейной системы решали при помощи минимизации квадратичного функционала. Т.е. для задачи робастной квадратичной стабилизации мы хотим подобрать матрицу так, чтобы квадратичный функционал $J(u) = \int_0^\infty (x^T G x + u^T N u) dt$. Если мы постараемся такой функционал минимизировать, то наша система при фиксированных $q$будет асимптотически устойчивой, и матрица замкнутой системы тоже будет устойчива. Пусть мы хотим выбрать одно и то же $K$ $\forall q \in Q$, чтобы $J(u) \leq \mu$, $G = G^T \geq 0$, $N = N^T > 0$. Тогда для фиксированного $q$ мы знаем решение, если найдена матрица $S = S^T > 0$, которая удовлетворяет LMI:

$$\begin{pmatrix} A(q)S + SA(q)^T + (\gamma - 2)BN^{-1}B^T & \sqrt{\gamma}SD \\ \sqrt{\gamma}D^T S & -E \end{pmatrix} \leq 0,$$

т.е. если для заданного $\gamma$ мы найдём решение этой системы линейных матричных неравенств, то $J(u) \leq \gamma^{-1} x_0^T S^{-1} x_0$. Теперь воспользуемся свойством для линейных неравенств, что решение является выпуклым. Если есть система линейных неравенств $F(x, q) \geq 0, q \in Q$, тогда в силу того, что решения выпуклы по $q$, система эквивалентна

$F(x, q^j) \geq 0, j = 1, \dots, \ell$, где $q^j$- вершины $Q$. Поэтому для исходной задачи можно поставить задачу найти S как решение целой системы

$$\begin{pmatrix} A(q^j)S + SA(q^j)^T + (\gamma - 2)BN^{-1}B^T & \sqrt{\gamma}SD \\ \sqrt{\gamma}D^T S & -E \end{pmatrix} \leq 0,$$

где $j = 1, \dots, \ell$.

## 7.2 Стабилизация при наличии аддитивных возмущений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = Y(t, y) + r(t), \tag{27}$$

где $r(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \dots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$ - аддитивные возмущения. Если $y(t_0) = 0$, то $y^* \equiv 0$ при $r \equiv 0$.

$\|r\|_{LP} \leq \eta_0$.

**Определение**. Невозмущённое движение $y^*(t)$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях $r(t)$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta_1(\varepsilon), \eta_2(\varepsilon)$ такие, что решения системы, удовлетворяющие при $t = t_0$ неравенствам$|y(t_0) - y^*(t_0)| \leq \eta_1(\varepsilon)$, удовлетворяют при $t > t_0$ условиям $|y_i(t) - y_i^*(t)| < \varepsilon$ для любых возмущений $\|r(t)\|_{LP} \leq \eta_2(\varepsilon)$.

Рассмотрим линейную управляемую систему с аддитивными возмущениями

$\dot{x} = Ax + Bu + Cw(t)$, пара $(A, B)$ - полностью управляемая, $\|w\|_{L^2} \leq 1, x(0) = 0$, $\|w\|_{L^2}^2 = \int_0^\infty (w^T(t)w(t))dt$. Если $w \equiv 0$, то можем выбрать управление $u = Kx$ так, что матрица замкнутой системы $A_k = A + BK$ - гурвицева, а система $\dot{x} = A_k x$ асимптотически устойчива.

Попробуем решить задачу квадратичной стабилизации при возмущениях.

$$J = \sup_{\|w\|_{L^2}} \int_0^\infty (x^T Gx + u^T Nu)dt \to \min_K,$$

$$\dot{x} = A_k x + Cw\ . \tag{28}$$

Рассмотрим множество точек $x(T)$ в момент времени $T$, тогда множество достижимости $D(T) = \{x(T) | \forall \|w\|_{L^2} \leq 1\}$. Теперь можно ввести множество достижимости на бесконечном времени $D = \bigcup_{T \geq 0} D(T)$- множество всех точек, где могла бы быть система.

**Теорема**. Если пара матриц $(A_k, C)$ - полностью управляемая, то множество достижимости $D(T)$ для системы (28) представляет собой эллипсоид

$D(T) = \{x^T W^{-1}(T)x \leq 1\}$, где матрица $W(T) = \int_0^T e^{A_k t} CC^T e^{A_k^T t} dt$.

Т.к. пара полностью управляемая $W(T) = W^T(T) > 0$. Известна линейная система (28), тогда её решение можно представить в виде свёртки $x(T) = \int_0^T e^{A_k(T-t)} Cw(t)dt$. Теперь $w(t) = C^T e^{A_k^T(T-t)} W^{-1}(T)x(T)$ подставим в выражение для свёртки и получим:

$$x(T) = \int_0^T e^{A_k(T-t)} CC^T e^{A_k^T(T-t)} W^{-1}(T)x(T)dt =$$
$$= \int_0^T [e^{A_k(T-t)} CC^T e^{A_k^T(T-t)}]dt W^{-1}(T)x(T) =$$
$$= W(T)W^{-1}(T)x(T) = x(T)$$

Получили результат, что для любой точки множества достижимости $x(T) \in D(T)$ мы смогли построить такое управление $w(t)$, которое в неё приводит. Теперь вычислим норму этого возмущения, т.е. нужно вычислить

$$\|w\|_{L^2} = \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt = \int_0^\infty x^T(T)W^{-1}(T)e^{A_k(T-t)}CC^T e^{A_k^T(T-t)}W^{-1}(T)x(T)dt =$$
$$= x^T(T)W^{-1}(T)x(T) \le 1,$$

значит множество достижимости – это эллипсоид.

Рассмотрим случай, когда $T \to \infty$, $D = \{x^T W^{-1} x^T \le 1\}$, $W = \int_0^\infty e^{A_k t} CC^T e^{A_k^T t} dt$ - решение уравнения Ляпунова $A_k W + W A_k^T = -CC^T$.

**Теорема.** Если матрица $A_k$- гурвицева, а пара $(A_k, C)$ - полностью управляемая и при некотором $\gamma > 0$ уравнение Риккати $PA_k + A_k^T P + \frac{1}{\gamma^2} PCC^T P + G + K^T N K = 0$ имеет решение $P > 0$, то $J = \sup\limits_{\|w\|_{L^2}} \int_0^\infty (x^T G x + u^T N u)dt \le \gamma^2$.

$$\dot{x} = A_k x + Cw, x(0) = 0$$

Доказательство: Рассмотрим квадратичную форму $x^T P x = V$, $V(0) = 0$, найдем производную в силу системы $\dot{V} = \dot{x}^T P x + x P \dot{x} = (A_k x + Cw)^T P x + x^T P (A_k x + Cw)$. Попробуем найти такие $\gamma, K$, чтобы выполнялось неравенство

$$\dot{V} \le -x^T(G + K^T N K)x + \gamma^2 w^T w. \tag{29}$$

Проинтегрируем неравенство (29):

$0 = \int_0^\infty \dot{V}\, dt \le \int_0^\infty [-x^T(G + K^T N K)x + \gamma^2 w^T w]dt = -J(w) + \gamma^2 \int_0^\infty w^T w\, dt$, откуда $J(w) \le \gamma^2 \int_0^\infty w^T w\, dt = \gamma^2$. Из неравенства (29) получается:

$x^T(PA_k + A_k^T P + G + K^T N K)x + x^T P C w + w^T C^T P x - \gamma^2 w^T w \le 0$ - квадратичная форма $\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$. Выпишем матрицу этой квадратичной формы $\begin{pmatrix} PA_k + A_k^T P + G + K^T N K & PC \\ C^T P & -\gamma^2 E_m \end{pmatrix} \le 0$ - линейной матричное неравенство относительно $P$, и у него есть решение $P > 0$ тогда и только тогда, когда дополнение по Шуру $Q = X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{21} \le 0$. Если подставить теперь в дополнение по Шуру блоки из получившейся матрицы, то получится неравенство

$PA_k + A_k^T P + \frac{1}{\gamma^2} PCC^T P + G + K^T N K \le 0$, которое имеет решение $P > 0$, если уравнение Риккати имеет положительно определённое решение.

**Утверждение**. Если при фиксированных $K$ $\exists \gamma_{\min} = \{\min\limits_{\gamma>0} \gamma \Big| \mathrm{P} > 0, \max\limits_{u} J(u) = \gamma_{\min}^2$ .

## 7.3 Стабилизация линейной стохастической системы

Рассмотрим случайный процесс, который подчиняется стохастическому уравнению $\dot{x} = Ax + Bu + Cw$, где $w$ - белый шум, т.е. $M[w(t)] = 0$, а матрица ковариаций $M[w(t)w^T(\tau)] = E_m\delta(t-\tau)$. Будем считать, что в начальный момент заданы $\mu_x(0)$ и матрица ковариаций $P_x(0) = M\left[\overset{o}{x}(0)\overset{o}{x}^T(0)\right]$. Рассмотрим функционал $J = M[\int_0^{t_k}(x^T Gx + u^T Nu)dt + x^T(t_k)Sx(t_k)] \to \min\limits_{u}$,

где $S = S^T \geq 0, G = G^T \geq 0, N = N^T > 0$. Если $w \equiv 0$, то $u^0 = -N^{-1}B^T\mathscr{L}(t)x = K(t)x$. Можно сказать, что решение исходной задачи совпадает с решением детерминированной задачи, т.е. оптимальное управление не изменится.

Рассмотрим случай детерминированной системы, т.е. $w \equiv 0$, где $\mathcal{L}$ - решение уравнения Риккати $\mathcal{L}A + A^T\mathcal{L} + G - \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L} = 0$ с краевым условием $\mathcal{L}(t_k) = S$. Если задано начальное условие, то подставив оптимальное управление в нашу систему с $w \equiv 0$

$\dot{x} = Ax + Bu + Cw$ и проинтегрировав, получим функцию $u^0(t)$, ясно, что она даст тот же результат по функционалу, что и исходное управление. Получается программное управление и позиционное управление дают один и тот же результат.

# 8 Стабилизация стохастической системы

В прошлый раз мы рассматривали задачу стабилизации при наличии аддитивных возмущений. Рассмотрим немного другую постановку, когда у нас есть управляемая система $\dot{x} = Ax + Bu + Cw$. В качестве аддитивных возмущений будем рассматривать некоторый процесс$w(t)$ - белый шум, т.е. $M[w(t)] = 0$, $M[w(t)w^T(\tau)] = E_m\delta(t-\tau)$. Пусть известны начальные условия $M[x(0)] = \mu_0$ и матрица ковариаций $P_0 = M\left[\overset{o}{x}(0)\overset{o}{x}^T(0)\right]$ у заданной системы. Поставим задачу квадратичной стабилизации, которую мы уже ставили

$$J = M[\int_0^{t_k}(x^TGx + u^TNu)dt + x^T(t_k)Sx(t_k)] \to \min_K,$$

где $u = Kx$, $G(t) = G^T(t) \geq 0, N(t) = N^T(t) > 0, S = S^T$. Запишем систему в несколько другом виде, обозначив $q(t) = Cw$, тогда $M[q(t)q^T(\tau)] = Q\delta(t-\tau), Q = CC^T$, где $q(t)$ - белый шум. Мы уже рассматривали систему, когда $q(t) \equiv 0$, в этом случае $u^0 = Kx$, где $K = -N^{-1}B^T\mathcal{L}(t)x$. Тогда получается, что $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}^T(t) \geq 0$ является решением матричного уравнения Риккати $\dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}A + A^T\mathcal{L} + G - \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L} = 0$ с краевым условием на правом конце $\mathcal{L}(t_k) = S$. Подставив оптимальное управление в нашу систему с $q(t) \equiv 0$ $\dot{x} = Ax + Bu + q$и проинтегрировав, получим функцию $u^0(t)$, ясно, что она даст тот же результат по функционалу, что и исходное управление. Получается программное управление и позиционное управление дают один и тот же результат. Посмотрим, что будет в стохастическом случае.

**Пример**: Пусть есть скалярная дискретная величина $x_0$: $\begin{matrix} x_0 & 0 & 1 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}$, тогда $M[x_0] = \frac{1}{2}$, более того $M[x_0^2] = \frac{1}{2}$. Запишем динамику процесса $x_1 = x_0 + u_0$ и рассмотрим два случая: программное и позиционное управление. Поставим задачу

$J = M[x_1^2] \to \min\limits_{u_0}$. Сначала рассмотрим программный случай $u_0 = c - \frac{1}{2}$. Вычислим

$$M[x_1^2] = M\left[\left(x_0 + c - \frac{1}{2}\right)^2\right] = M[(x_0+c)^2] - M[x_0+c] + \frac{1}{4} = M[x_0^2] + 2M[x_0]c + c^2 -$$
$$-\frac{1}{2} - c + \frac{1}{4} = c^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow u^0 = -\frac{1}{2}, J^0 = \frac{1}{4}.$$

Представим, что $u = -x_0$, тогда $J^0 = 0$. То есть позиционное управление даёт меньше значение функционала, чем программное в данной задаче.

Вернёмся к стохастическому случаю. $u^0 = Kx$,

где $K = -N^{-1}B^T\mathcal{L}(t)x$, где $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}^T(t) \geq 0$ является решением матричного уравнения Риккати 1) $\dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}A + A^T\mathcal{L} + G - \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L} = 0$. В этой задаче изменяется функционал, перепишем его в таком виде $J(u) = Tr\left[SP_x(t_k) + \int_0^{t_k}(G + K^TNK)P_x(t)dt\right]$,

где $P_x = M[xx^T]$, а след$Tr\|a_{ij}\| = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Оказывается, что $\forall a, b \in R^n$: $a^Tb = Tr[ab^T] = Tr[ba^T]$. Используя полученный вид функционала, оптимальное значение функционала может быть получено в следующем виде $J^0 = Tr\left[\mathcal{L}(0)P_x(0) + \int_0^{t_k} Q\mathcal{L}(t)dt\right]$, где $\mathcal{L}(0)P_x(0) = M[x(0)^T\mathcal{L}(0)x(0)]$ - совпадает с детерминированным случаем, $Q \geq 0, \mathcal{L} \geq 0$, т.е. $J^0_{cmox} \geq J^0$.

## 8.1 Совместная задача оценивания и управления стохастической системой

Рассмотрим теперь случай, когда нет полной информации о состоянии стохастической системы

$$\dot{x} = Ax + Bu + q, z = Hx + r, \tag{30}$$

где $q(t), r(t)$ - белые шумы, т.е. $M[r] = M[q] \equiv 0$, а матрицы ковариаций $M[q(t)q^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$, $M[r(t)r^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau)$, $Q \geq 0, R > 0$. Кроме того, $M[x(0)q^T(t)] \equiv 0, M[x(0)r^T(t)] \equiv 0, M[q(t)r^T(\tau)] \equiv 0$. В детерминированном случае формировалась линейная связь по оценке $u^0 = K\tilde{x}$. Оказывается, что в стохастическом случае это можно сделать точно также. Выпишем оптимальную оценку

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + \widetilde{K}(z - H\tilde{x}), \tilde{x}(0) = \mu_0, \tag{31}$$

$\widetilde{K} = PH^TR^{-1}$, где $P = M[\Delta x \Delta x^T]$- матрица ковариаций ошибки оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$, а матрица $P$ находится из решения уравнения Риккати 2)

$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PH^TR^{-1}HP$ с условием в начале $P(0) = P_0$. Посмотрим на общую задачу оценивания управления. С одной стороны, мы можем построить оценку, если знаем $u$, с другой стороны, мы можем построить $u$, если знаем $\tilde{x}$. То есть получается, что эти две задачи связаны, оценка влияет на управление, и наоборот, управление влияет на оценку. И, вообще говоря, не ясно, можно ли разделить эти две задачи. Решения задачи позволяет добиться следующий сильный результат.

**Теорема (Разделения).** В задаче управления стохастической системой (30) по информации от измерения $z(\tau), \tau \in [0, t]$, оптимальное решение имеет вид:

$u^0 = -N^{-1}B^T\mathcal{L}(t)\tilde{x}$, где матрица $\mathcal{L}(t)$ - решение уравнения Риккати1, а $\tilde{x}$ - оптимальная оценка, доставляемая фильтром Калмана (31).

Первый результат: $x, \tilde{x}$- нормальное распределение, а второй результат:

матрица $K = -N^{-1}B^T\mathscr{L}$ такая же, как и при управлении по полным данным, это следствие того, что функционал квадратичный.

## 8.2 Игольчатая вариация и необходимое условие сильного локального минимума

Пусть есть нелинейная управляемая система $\dot{y} = f(y, u)$ с начальным условием $y(t_0) = y^*$, $t \in [t_0, t_k]$ и свободным правым концом. Функционал по-прежнему терминальный $J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$, $U = \{u(\cdot) \in PC^1[t_0, t_k] | u(t) \in \Omega \subset R^3\}$. Есть оптимальный процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot)\}, u^0(t) \in int\,\Omega$. Рассмотрим приращение функционала $\Delta J = J(\tilde{u}) - J(u^0) \geq 0$, а приращение управления искали как

$\Delta u = u^0 + \varepsilon\delta x$, где $\delta x$ - классическая вариация. Получили формулу

$\Delta J(u^0) = -\int_{t_0}^{t_k} (\frac{\partial \Delta_u H(u^0)}{\partial y} \Delta y + \Delta_u H(u^0)) dt - \int_{t_0}^{t_k} o_2(|\Delta y(t)|)\, dt + o_1(|\Delta y(t_k)|)$, а необходимое условие слабого минимума при этом выглядело так: $\frac{\partial H(y,\psi,u)}{\partial u} \equiv 0$. Рассматривались только те вариации, которые приводят к малым изменениям траектории, т.е. $\|\tilde{y}(t) - y^0(t)\|_{C^2} \leq \varepsilon$.

А теперь рассмотрим ту же задачу только изменим класс управлений, будем рассматривать теперь кусочно-непрерывные функции, т.е.

$U = \{u(\cdot) \in PC[t_0, t_k] | u(t) \in \Omega \subset R^3\}$, уберём условие $u^0(t) \in int\, \Omega$, изменим понятие близости.

## 8.3 Доказательство принципа максимума Понтрягина

**Определение**. Процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot)\}$- сильный локальный минимум, если $\forall \varepsilon > 0$ и допустимого $\tilde{u} \in U$такого, что $\|\tilde{y}(t) - y^0(t)\|_C \leq \varepsilon$, где $\|y\|_C = \max\limits_{t\in[t_0,t_k]} |y(t)|$, выполняется $J(u^0) \leq J(\tilde{u})$.

А теперь попробуем получить необходимое условие этого сильного минимума. Мы знаем, что это есть принцип максимума Понтрягина, но попробуем теперь это доказать. Усилим гладкость функций $f, \varphi_0 \in C^2$, построим игольчатую вариацию (Рис. 4), где $\tau \in T, u^0(\tau - 0) = u^0(\tau + 0)$:

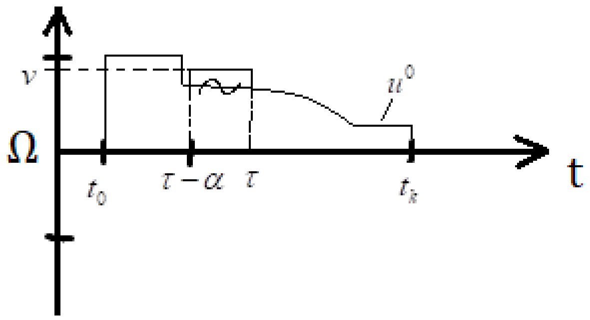


Рис. 4: Игольчатая вариация

Рассмотрим другое управление $u^\alpha = \begin{cases} u^0 & , t \in [t_0, \tau - \alpha) \cup [\tau, t_k] \\ v & , t \in [\tau - \alpha, \tau), v \in \Omega \end{cases}$, $\forall v \in \Omega, \alpha > 0$. А теперь просчитаем приращение функционала для такой вариации, т.е.

$\Delta J = J(u^\alpha) - J(u^0) \geq 0$. Для этого нужно посчитать траекторию, которая соответствует управлению $u^\alpha$, $y^\alpha(t) = y^0(t)$, $t \in [t_0, \tau - \alpha)$. Посчитаем по формуле Тейлора

$y^\alpha(\tau) = y^\alpha(\tau - \alpha) + \alpha \dot{y}^\alpha(\tau - \alpha) + o(\alpha) = y^\alpha(\tau - \alpha) + \alpha f(y^0(\tau - \alpha), v) + o(\alpha)$ и $y^0(\tau) = y^0(\tau - \alpha) + \alpha \dot{y}^0(\tau - \alpha) + o(\alpha) = y^0(\tau - \alpha) + \alpha f\big(y^0(\tau - \alpha), u^0(\tau - \alpha)\big) + {}$ $+ o(\alpha)$, таким образом, приращение $\Delta y(\tau) = \alpha[f(y^0(\tau - \alpha), v) - f(y^0(\tau - \alpha), u^0)] + {}$ $+ o(\alpha)$, где $f(y^0(\tau - \alpha), v) = f(y^0(\tau), v) + o(\alpha)$, поэтому

$\Delta y(\tau) = \alpha[f(y^0(\tau), v) - f(y^0(\tau), u^0)] + o(\alpha) = \alpha \Delta f(\tau, v) + o(\alpha)$. Таким образом, мы нашли приращение траектории в момент $\tau$. Для того, чтобы найти приращение траектории на отрезке $[\tau, t_k]$, понадобится следующая теорему из теории ОДУ.

**Теорема**. Пусть дана система ОДУ $\dot{y} = f(t,y)$, $t \in [\tau, t_k]$ и начальное условие $y(\tau) = \xi$, где правые части гладкие $f \in C^2$. Тогда существует производная по начальным условиям $\frac{\partial f(t,y(t,\xi))}{\partial \xi}$, где $y(t,\xi)$ - решение системы при фиксированном $\xi$.

Найдём каким уравнениям удовлетворяют вариации. Для этого запишем систему

$\dot{y} = f(t,y)$ в следующем виде $\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t} y(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(t, y(t,\xi))$, поскольку функция достаточно гладкая, можно переставить порядок дифференцирования, тогда $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial f(t,y(t,\xi))}{\partial y}\frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi}$. Зафиксируем $\xi$ и обозначим матрицу $\Phi(t) = \frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi}$, и получается линейная система относительно $\Phi(t)$: $\frac{d}{dt}\Phi = \frac{\partial f}{\partial y}\Phi$, $\Phi(\tau) = E_n$. Получается матрица $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица для линейной системы

$\dot{x} = \left(\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right) x$ - уравнения в вариациях для исходной системы. (32)

Рассмотрим систему $\Delta\dot{y} = f(\Delta y, \Delta u)$ и приращение $y(\tau) = \xi + \Delta\xi$, т.е. проварьируем начальное условие, тогда мы хотим найти решение

$y(t, \xi + \Delta\xi) = y(t,\xi) + \frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi}\Delta\xi + o(|\Delta\xi|)$, получается, что приращение траектории $\Delta y(t) = y(t,\xi+\Delta\xi) - y(t,\xi) = \frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi}\Delta\xi + o(|\Delta\xi|) = \alpha\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\Delta f + o(\alpha) = \alpha x(t) + o(\alpha)$ - решение системы (32) в вариациях с начальным условием $x(\tau) = \Delta f$.

Вернёмся к исходной задаче, где была система $\dot{y} = f(y,u)$, мы рассматривали всё на отрезке $t \in [\tau, t_k]$. В нашем случае $\Delta y(\tau) = \alpha \Delta f(\tau, v)$,

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f(y^0,u^0)}{\partial y}\right) x. \tag{33}$$

Функционал был равен $J(u) = \varphi_0(y(t_k))$. Разложим теперь функционал в ряд Тейлора:

$$J(u^\alpha) = J(u^0) + \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y}\Delta y(t_k) + o(\alpha),$$

значит приращение функционала при варьировании с помощью игольчатой вариации получается $\Delta J(u^0) = \alpha\frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y} x(t_k) + o(\alpha)$.

Рассмотрим сопряжённую систему к системе (33): $\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f(y^0,u^0)}{\partial y}\right)^T \psi$. Теперь получается $\frac{d}{dt}\psi^T(t)x(t) \equiv 0$, откуда следует свойство для решения прямой и сопряжённой системы: $\psi^T(t)x(t) = const$. Выберем краевое условие для полученной сопряжённой системы из условия принципа максимума: $\psi^T(t_k) = -\frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y}$, то можно переписать приращение функционала $\Delta J(u^0) = -\alpha\psi^T(t_k)x(t_k) + o(\alpha)$. Теперь верно свойство $\psi^T(t)x(t) = const,\ t \in [\tau, t_k]$, поэтому $\Delta J(u^0) = -\alpha\psi^T(\tau)x(\tau) + o(\alpha)$, т.е. получается, если мы выберем условие трансверсальности $\psi^T(t_k) = -\frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y}$ для сопряжённой системы, то приращение функционала будет следующим

$$\Delta J(u^0) = -\alpha\psi^T(\tau)\Delta f(\tau, v) + o(\alpha) = -\alpha[H(\psi, y^0, v) - H(\psi, y^0, u^0)] + o(\alpha) \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max_v H(\psi(\tau), y^0(\tau), v) = H(\psi(\tau), y^0(\tau), u^0(\tau))$$

Мы получили условие максимума функции Понтрягина в любой точке, а поскольку $\tau$было любое, то получается, что условие должно выполняться для всех точек $\tau$, которые являются точками непрерывного управления, т.е. мы доказали принцип максимума, необходимое условие сильного минимума в задаче с фиксированным временем и свободным правым концом траектории.

# 9 Вторая часть доказательства принципа максимума Понтрягина

В прошлый раз мы рассматривали задачу с фиксированным временем, рассматривалась управляемая система $\dot{y} = f(y, u)$, закреплённое начальное условие $y(t_0) = y^*$, время тоже закреплено $t \in [t_0, t_k]$. Рассматривалась задача минимизации терминального функционала $J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$, для такой задачи мы сформировали специальную игольчатую вариацию и с её помощи доказали первое утверждение принципа максимума, а именно, что

$\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))$, $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k]\}$ - оптимальный процесс.

Эту часть получилось доказать, при этом мы использовали условие трансверсальности $\psi^T(t_k) = -\frac{\partial\varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y}$. Осталось доказать стационарность Гамильтониана, т.е. $\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) = H(t) = const$ вдоль оптимальной траектории. Сопряжённые переменные удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^T \psi. \qquad (34)$$

Покажем непрерывность функции $H(t)$. Для этого рассмотрим разницу $H(t+\Delta t) - H(t-\Delta t) = H(\psi(t+\Delta t), y^0(t+\Delta t), u^0(t+\Delta t)) -$

$$-H(\psi(t-\Delta t), y^0(t-\Delta t), u^0(t-\Delta t)) = H(\psi(t+\Delta t), y^0(t+\Delta t), u^0(t-\Delta t)) -$$
$$-H(\psi(t-\Delta t), y^0(t-\Delta t), u^0(t-\Delta t)) \le H(t+\Delta t) - H(t-\Delta t) \le$$
$$\le H(\psi(t+\Delta t), y^0(t+\Delta t), u^0(t+\Delta t)) - H(\psi(t-\Delta t), y^0(t-\Delta t), u^0(t+\Delta t))$$

При $\Delta t \to 0$ получим, что $H(t+0) - H(t-0) = 0$, отсюда следует, что $H(t)$ - непрерывная функция вдоль оптимальной траектории.

Докажем, что она константа.

$$\frac{H(\psi(t'), y^0(t'), u^0(t)) - H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t))}{t'-t} + \frac{H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t)) - H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))}{t'-t} \le$$
$$\le \frac{H(\psi(t'), y^0(t'), u^0(t')) - H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t))}{t'-t}$$
$$+ \frac{H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t)) - H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))}{t'-t} =$$
$$= \frac{H(t') - H(t)}{t'-t} \pm \frac{H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t))}{t'-t} = \frac{H(t') - H(t)}{t'-t}$$
$$= \frac{H(t') - H(t)}{t'-t} \pm \frac{H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t'))}{t'-t} =$$
$$= \frac{H(\psi(t'), y^0(t'), u^0(t')) - H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t'))}{t'-t} +$$
$$+ \frac{H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t')) - H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))}{t'-t} \le$$

$$\frac{H(\psi(t'),y^0(t'),u^0(t'))-H(\psi(t'),y^0(t),u^0(t'))}{t'-t} + \frac{H(\psi(t'),y^0(t),u^0(t'))-H(\psi(t),y^0(t),u^0(t'))}{t'-t}$$

Перейдём к пределу $t' \to t$, тогда получим неравенства для функции Понтрягина $\frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial H}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dt} \le \frac{dH(t)}{dt} \le \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial H}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dt}$. Функция Понтрягина $H(\psi,y,u)=\psi^T f(y,u)$, прямая система может быть записана $\dot y = \left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^T$, а сопряжённая $\dot\psi = -\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^T$, подставим в неравенство и получим $\underbrace{\frac{\partial H}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^T-\frac{\partial H}{\partial \psi}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^T}_{=0} \le \frac{dH(t)}{dt} \le \underbrace{\frac{\partial H}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^T-\frac{\partial H}{\partial \psi}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^T}_{=0}$, следовательно $\frac{dH(t)}{dt}=0$, а значит $H(t)=const$. Следует заметить, что вообще говоря функция Понтрягина не является функцией Гамильтона, она превращается в функцию Гамильтона только тогда, когда из условия максимума $\max\limits_{u(t)} H$ находим функцию $u^0(\psi,y,t)$ и подставляем в функцию Понтрягина. И тогда эта система имеет канонической вид гамильтоновой системы. Сопряженные переменные $\psi$ аналогичны импульсам в механической системе. Мы доказали следствие общей теоремы Понтрягина, а именно следствие для системы с фиксированным временем и свободным концом правой траектории.

**Следствие 1.** Если $\{y^0(\cdot),u^0(\cdot),[t_0,t_k]\}$ - оптимальный процесс, то $\exists\psi \not\equiv 0$ решение (34) с краевым условием $\psi^T(t_k)=-\frac{\partial\varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y}$, а оптимальное управление $u^0$находится из соотношения $\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t),y^0(t),u(t)) = H(\psi(t),y^0(t),u^0(t)) = H(t) = const$, где $t\in T$, $u^0(t-0)=u^0(t+0)$.

## 9.1 Задача быстродействия

Рассмотрим оптимальную систему

$$\dot y = f(y,u),\ y(t_0)=y^*\ne 0,\ u(\cdot)\in U=\{u(\cdot)\in PC[t_0,t_k] | u(t)\in\Omega\}.$$

Будем считать, в конце процесса $y(t_k)=0$, при этом минимизируем время прихода, т.е. $t_k-t_0 \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$. Можно свести задачу к предыдущей, если рассмотреть $\tilde y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y\end{pmatrix}$- расширенный вектор состояния, а именно такой, что $\begin{cases}\dot y_0 = 1\\ \dot y = f(y,u)\end{cases}$. Тогда функционал становится терминальным $J(u)=\varphi_0(\tilde y(t_k)) = y_0(t_k) \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$, при этом конечное многообразие в расширенном пространстве имеет вид $\widetilde M = \{y(t_k)=0\}$. Мы свели задачу к той, которая уже была, а именно задача прихода на многообразие и минимизация терминального функционала. Применим принцип максимума Понтрягина: $\widetilde H = \psi_0 + \psi^T f(y,u) = \psi_0 + H$, а сопряжённая система будет

$\begin{cases}\dot{\psi}_0 = 0 \\ \dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^T \psi\end{cases}$. Условие трансверсальности запишется как: $\tilde{\psi}(t_k) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tilde{y}} \perp \widetilde{M}$, а касательное многообразие $T_{\widetilde{M}} = \{\gamma, \underbrace{0, \dots, 0}_{n}\}$, тогда $\psi_0 + \lambda_0 = 0 \le 0$.

Если $\psi \equiv 0$, то $\widetilde{H} \equiv 0$, следовательно $\psi_0 = 0, \lambda_0 = 0$ - нулевая пара, что противоречит ПМП.

**Следствие 2.** Если $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$ - оптимальный процесс в задаче быстродействия, то $\exists \psi \not\equiv 0$, то $\forall t \in T$ оптимальное управление находится из соотношения: $\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) = const \ge 0$.

## 9.2 Достаточные условия оптимальности управляемой системы

Рассмотрим ПМП для линейных систем $\dot{x} = Ax + bu$ с начальным условием $x(0) = c \neq 0$ и будем решать задачу быстродействия $x(t_k) = 0$, $t_k \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$, а $A(t), b(t)$ - известны, $u(t) \in R^1$, более того, $\mu \le u(t) \le \nu$, причём $\mu < 0, \nu > 0$. Пусть $\{x^0, u^0, [0, t_k^0]\}$ - процесс, удовлетворяющий ПМП, $x^0(t_k^0) = 0$. Функция Понтрягина имеет вид $H = \psi^T f = \psi^T Ax + \psi^T bu$, где $\psi$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений $\dot{\psi} = -A^T\psi$, $\max\limits_{\mu \le u(t) \le \nu} \psi^T(t) b(t) u(t) = \psi^T b u^0(t) \ge 0$.

Будем считать, что наша система полностью управляемая, это значит, что система векторов линейно независима, т.е. $\det U = \det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0$.

Пусть получено некоторое решение $\{x^0, u^0, [0, t_k^0]\}$ из необходимых условий принципа максимума, докажем, что они являются и достаточными в этом случае. Пусть у нас существует другое управление $\tilde{u}(t)$, которое даёт решение $\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(\tilde{t}_k) = 0$,

$x^0(0) = \tilde{x}(0) = c$, $\tilde{t}_k < t_k^0$, т.е. предположим, что мы нашли лучшее решение. Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned}\psi^T(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) &= \psi^T(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) - \psi^T(\tilde{t}_k)\underbrace{\tilde{x}(\tilde{t}_k)}_{=0} - \psi^T(0)x^0(0) + \psi^T(0)\tilde{x}(0) = \\ &= \psi^T(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) - \psi^T(0)x^0(0) - (\psi^T(\tilde{t}_k)\tilde{x}(\tilde{t}_k) - \psi^T(0)\tilde{x}(0)) \\ &= \int_0^{\tilde{t}_k} \frac{d(\psi^T x^0)}{dt} dt - \int_0^{\tilde{t}_k} \frac{d}{dt}(\psi^T \tilde{x}) dt\end{aligned}$$

Распишем первое подынтегральное выражение

$$\frac{d(\psi^T x^0)}{dt} = \dot{\psi}^T x^0 + \psi^T \dot{x}^0 = -\psi^T A x^0 + \psi^T A x^0 + \psi^T b u^0 = \psi^T b u^0,$$

аналогично для второго. Перепишем выражение и получим

$$\psi^T(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) = \int_0^{\tilde{t}_k} (\psi^T b u^0(t) - \psi^T b \tilde{u}(t)) dt \ge 0.$$

Теперь с другой стороны

$$\psi^T(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) = \psi^T(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) - \psi^T(t_k^0)\underbrace{x^0(t_k^0)}_{=0} = -\int_{\tilde{t}_k}^{t_k^0} \psi^T b u^0(t) dt \le 0,\ t \in [\tilde{t}_k, t_k^0].$$

Следовательно $\psi^T(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) = -\int_{\tilde{t}_k}^{t_k^0} \psi^T bu^0(t)dt = 0$, тогда подынтегральная функция $\psi^T(t)bu^0(t) \equiv 0$, значит $t \in [\tilde{t}_k, t_k^0]$ для $A, b = const$. А так как $u^0(t) = \mu$ либо

$u^0(t) = \nu$, то $\psi^T(t)b \equiv 0$, продифференцируем это неравенство n-1 раз и получим, что $\psi^T U \equiv 0 \Rightarrow det\, U = 0$- противоречит условию управляемости. Таким образом, мы доказали, что принцип максимума в задаче быстродействия для управляемой системы является достаточным условием оптимальности и доставляет не локальный, а глобальный минимум функционалу времени прихода начала координат.

**Пример.** Рассмотрим тележку (Рис. 5), которая двигается с ускорением $w$, $|w(t)| \le g$ по горизонтали, на ней находится перевёрнутый математический маятник.

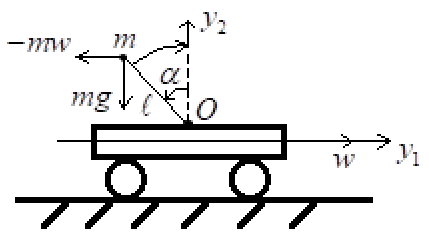


Рис. 5: Тележка на горизонтальной плоскости

Мы хотим стабилизировать вертикальное положение отклонения. При этом будем решать не как классическую задачу стабилизации, а как некую задачу быстродействия, т.е. быстрейшего перевода из заданного положения в начало координат. Введём подвижную систему координат, в которой будем рассматривать только угловое движение маятника. Выпишем уравнения движения этой системы:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \omega \\ J\frac{d\omega}{dt} = mg\ell \sin\alpha + mw\ell\cos\alpha \end{cases}, J = m\ell^2.$$

Будем исследовать малые положения равновесия, т.е. $\alpha$ - мало. Введём отклонения

$x_1 = \alpha, x_2 = \omega$, тогда уравнения перепишутся следующим образом

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g}{\ell}x_1 + \frac{w}{\ell} = x_1 + u \end{cases}, \omega_0^2 = \frac{g}{\ell} = 1, u = \frac{w}{\ell},$$

тогда $|u(t)| \le 1$.

Для получившейся системы будем решать задачу быстродействия

$\bar{x}(0) = x^*, \bar{x}(t_k) = 0, t_k \to min$. Попробуем к этой задаче применить принцип максимума: $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 x_1 + \psi_2 u$, где $\psi_2$ - решение сопряжённой системы $\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \end{cases}$, а оптимальное управление находится из принципа максимума

$u^0 = \begin{cases} 1\ , \psi_2 > 0 \\ -1\, , \psi_2 < 0 \end{cases}$ - регулярное решение. Из сопряжённой системы следует

$\ddot{\psi}_2 - \psi_2 = 0$, откуда решение $\psi_2(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}$ - поскольку это сумма двух монотонных функций, можно сделать вывод, что не более одной смены знака $\psi$ может произойти. Куски оптимальной траектории должны удовлетворять такой системе уравнений $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \pm 1 \end{cases}$, можно переписать эту систему так $\begin{cases} (x_1 \pm 1)^{\dot{}} = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \pm 1 \end{cases} \left| \begin{matrix} x_1 \pm 1 \\ x_2 \end{matrix} \right.$ и от второго уравнения отнять первое, тогда получили, что фазовые оптимальные траектории – есть куски кривых, которые удовлетворяют уравнениям

$x_2^2 - (x_1 \pm 1)^2 = const$, но мы знаем, что их не более двух кусков.

Рассмотрим случай, когда $u^0 = 1$ (Рис. 5):

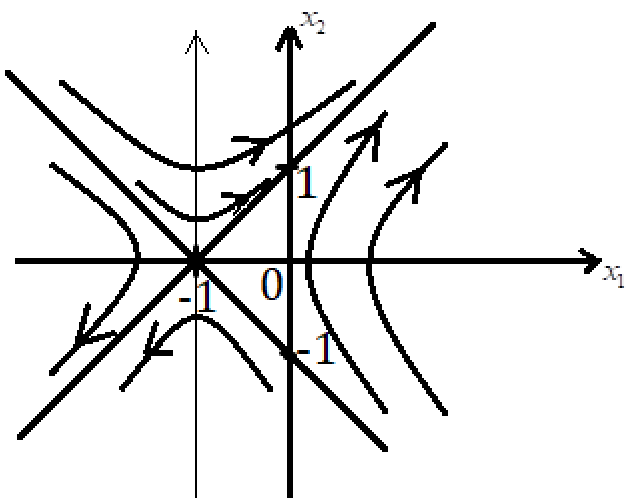


Рис. 5: Оптимальная фазовая траектория в первом случае

Аналогично в случае, когда $u^0 = -1$ (Рис. 6):

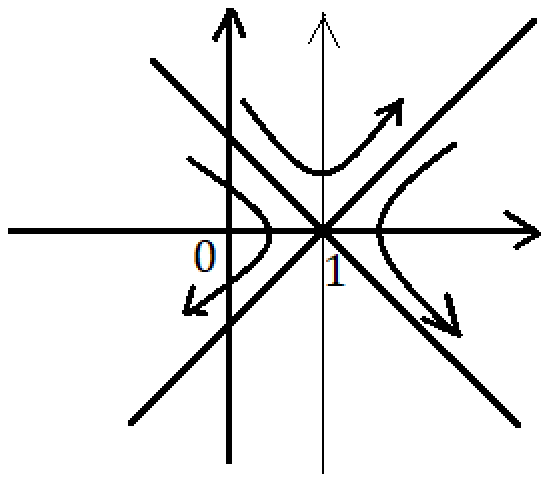


Рис. 6: Оптимальная фазовая траектория во втором случае

Получилось, что оптимальная траектория – это куски гипербол. В ноль приходят обе гиперболы, когда $c = 1$, рассмотрим такой случай (Рис. 7):

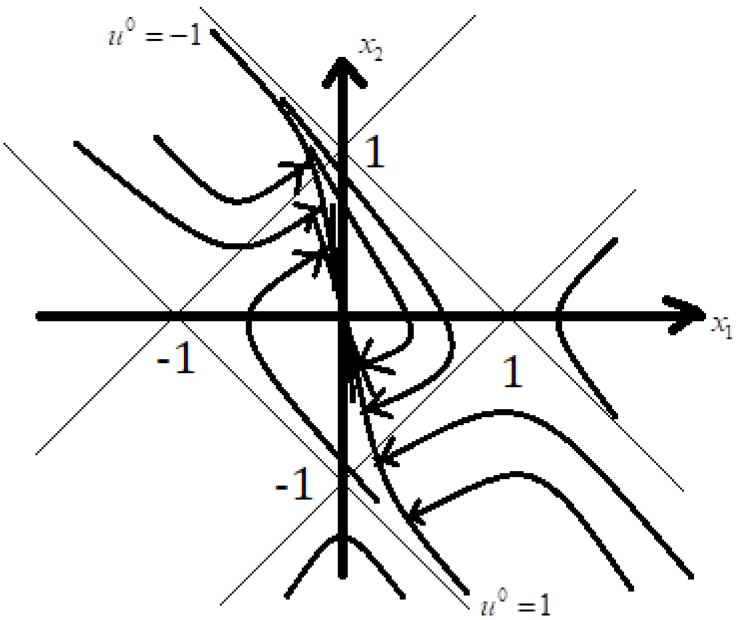


Рис. 7

$x_2 = -\sqrt{x_1^2 + 2x_1}$- уравнение нижней гиперболы, $x_2 = \sqrt{x_1^2 - 2x_1}$ - уравнение верхней гиперболы.

Таким образом, мы заполнили всю полосу оптимальными кривыми, смогли построить синтез оптимального управления. Принцип максимума даёт управление в виде функции времени $u^0(t)$, а если мы сумеем записать как функцию координат $u^0(x_1, x_2)$, то это решена задача синтеза оптимального управления. Таким образом, для того, чтобы решить задачу стабилизации вертикального положения маятника, не надо решать оптимальные задачи в каждый момент времени, а достаточно знать эти кривые. И на борту должны быть устройства, измеряющие угол отклонения маятника и его скорость.

# 10 Достаточные условия оптимальности

## 10.1 Принцип динамического программирования Беллмана как достаточное условие оптимальности

Рассмотрим автономную управляемую систему

$$\dot{y} = f(y,u),\ y(t_0) = y^*,\ u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in PC[t_0,t_k] | u(t) \in \Omega \subset R^3\},$$

отрезок времени $t \in [t_0, t_k]$ считаем фиксированным, правый конец свободный, а функционал следующего вида $J(u) = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y,u,t)dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$. Для таких задач верен принцип оптимальности, сформулированный Беллманом, он заключается в следующем: какого бы ни было начальное условие, последующее управление должно быть оптимальным относительно состояния, соответствующего предшествующему управлению.

Пусть эта задача имеет решение, и существует некоторый оптимальный процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k]\}$, $f, f_0 \in C^1$. Пусть есть некоторая оптимальная траектория (Рис. 8).

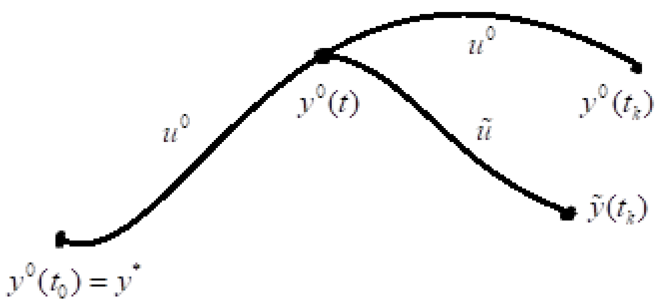


Рис. 8: Оптимальная траектория

Принцип Беллмана говорит, что, если мы находимся в некотором состоянии $y^0(t)$, то оптимальное управление должно быть оптимальном на куске $[t, t_k]$. Данный принцип можно легко доказать в силу аддитивности функционала. Допустим противное, что есть другое управление, которое систему переводит в другое состояние $\tilde{y}(t_k)$. Мы предположили, что решение задачи следующее:

$\int_t^{t_k} f_0(\tilde{y}(\tau), \tilde{u}(\tau), \tau)d\tau < \int_t^{t_k} f_0(y^0(\tau), u^0(\tau), \tau)d\tau$ - противоречие, потому что

$J(u) = \int_{t_0}^{t} f_0(y^0(\tau), u^0(\tau), \tau)d\tau + \int_t^{t_k} f_0(y^0(\tau), u^0(\tau), \tau)d\tau$- противоречие с оптимальностью основного процесса.

Используя этот принцип оптимальности, получим некоторые достаточные условия. Рассмотрим функцию $S(t,y) = \min\limits_{u(\cdot)\in U[t,t_k]} [\int_t^{t_k} f_0(y(\tau), u(\tau), \tau)d\tau]$ - функция Беллмана, где $y$ - решение исходной системы $\dot{y} = f(y,u)$, $y(t) = y$, $u(\cdot) \in U$.

Теперь воспользуемся принципом Беллмана, для этого рассмотрим два состояния: $(t, y)$ и $(t + \Delta t, y + \Delta y)$. Запишем функцию Беллмана:

$$S(t,y) = \min_{u(\cdot)\in U[t,t_k]}[\int_t^{t+\Delta t} f_0(y(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_k} f_0(y(\tau),u(\tau),\tau)d\tau] =$$
$$= \min_{u(\cdot)\in U[t,t+\Delta t]}[\int_t^{t+\Delta t} f_0(y(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \underbrace{\min_{u(\cdot)\in U[t+\Delta t,t_k]}\int_{t+\Delta t}^{t_k} f_0(y(\tau),u(\tau),\tau)d\tau]}_{S(t+\Delta t,y+\Delta y)}$$

Предположим, что $S(t,y)\in C^1$, тогда $S(t+\Delta t, y+\Delta y) = S(t,y) + \frac{\partial S(t,y)}{\partial t}\Delta t +$ $+\frac{\partial S(t,y)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta t|,|\Delta y|)$ - подставим этот результат в определение

$$S(t,y) = \min_{u(\cdot)\in U[t,t+\Delta t]}[\int_t^{t+\Delta t} f_0(y(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + S(t,y) + \frac{\partial S(t,y)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial S(t,y)}{\partial y}\Delta y + $$
$$+o(|\Delta t|,|\Delta y|)],$$

тогда при малых $\Delta t$ получим:

$$0 = \min_{u(\cdot)\in U[t,t+\Delta t]}[f_0(y(\tau),u(\tau),\tau) + \frac{\partial S(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial S(t,y)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + o].$$

Устремим $\Delta t \to 0$, тогда получим уравнение Беллмана с краевым условием $S\big(t_k, y(t_k)\big) = 0$:

$$\frac{\partial S(t,y)}{\partial t} + \min_{u(t)\in\Omega}[f_0(y(t),u(t),t) + \frac{\partial S(t,y)}{\partial y} f(y(t),u(t))] = 0 \qquad (35)$$

**Теорема.** Пусть $\exists S(t,y)$ - решение уравнения Беллмана (35) непрерывно дифференцируемое по всем переменным, а $u^0(t)$ - управление, минимизирующее соответствующую часть (35). Тогда $u^0(\cdot)$- оптимальное управление, доставляющее минимум функционалу $J(u)$.

Доказательство. Пусть есть некое управление $u(t)$ и есть некое решение этой системы $\dot y = f(y,u)$, $y(t_0) = y^*$, $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot)\}$- оптимальный процесс. Рассмотрим как будет выглядеть наше уравнение Беллмана, тогда в силу определения самого уравнения Беллмана получаем следующее:

$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial y} f(y,u) + f_0(y,u,t) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt} + f_0(y,u,t) = \frac{dS(t,y)}{dt} + f_0(y,u,t) \ge 0$, откуда $\int_{t_0}^{t_k}\frac{dS(t,y)}{dt}dt \ge -\int_{t_0}^{t_k} f_0(y,u,t)\,dt$, тогда получаем, что

$\underbrace{S(t_k, y(t_k))}_{=0} - S(t_0, y(t_0)) \ge -J(u)$, значит $S(t_0,y(t_0)) \le J(u)$.

Возьмём вместо $u(t)$ теперь $u^0(t)$, тогда верно

$\dot y^0 = f(y,u^0)$, $y^0(t_0) = y^*$. Тогда в силу уравнения Беллмана, поскольку $u^0(t)$ даёт решение задачи минимизации, потому что мы это предположили, будет равенство

$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy^0}{dt} + f_0(y^0,u^0,t) = 0$. То же самое получаем, действуя аналогично предыдущему случаю: $\int_{t_0}^{t_k}\frac{dS(t,y^0)}{dt}dt = -\int_{t_0}^{t_k} f_0(y^0,u^0,t)\,dt$. Тогда получаем результат, что $S(t_0, y^0(t_0)) = J(u^0)$, но поскольку по условию $S(t_0,y(t_0)) = S(t_0,y^0(t_0))$, то $J(u^0) \le J(u)$ для любого допустимого $u$, что и хотели доказать. Мы доказали глобальный минимум функционала, если будем выбирать $u$ по заданному условию, решая уравнение Беллмана и находя минимум соответствующего выражения в этом уравнении.

## 10.2 Линейная система с квадратичным критерием качества

Рассматривается линейная управляемая система $\dot{x} = Ax + Bu$ с начальным условием $x(0) = x^*$. Требуется решить задачу оптимальной стабилизации, т.е. минимизировать квадратичный функционал

$J(u) = \int_0^{t_k}(x^T(t)Gx(t) + u^T(t)Nu(t))dt \to \min\limits_{u(\cdot)}, G(t) = G^T(t) > 0, N(t) = N^T(t) > 0,$
решение которой мы уже находили из принципа максимума Понтрягина. А сейчас, чтобы найти это решение, воспользуемся достаточными условиями оптимальности, а именно попробуем использовать уравнение Беллмана.

Функция Беллмана имеет вид $S(t,x) = \min\limits_{u(t)\in[t,t_k]} \int_t^{t_k}(x^TGx + u^TNu)d\tau$. Выпишем уравнение Беллмана $\frac{\partial S}{\partial t} + \min\limits_{u\in R^n}[x^TGx + u^TNu + \frac{\partial S}{\partial x}(Ax + Bu)] = 0$, возьмём производную по $u$ от получившегося уравнения, тогда

$2u^TN + \frac{\partial S}{\partial x}B = 0 \Rightarrow u^0 = -\frac{1}{2}N^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T$, подставим это в уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + x^TGx + u^{0^T}Nu^0 + \frac{\partial S}{\partial x}\dot{x} = \frac{dS}{dt} + x^TGx + u^{0^T}Nu^0 = 0.$$

Попытаемся решать получившееся уравнение, представив функцию Беллмана как квадратичную форму $S(t,x) = x^T(t)\mathcal{L}(t)x(t)$, где $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}^T(t) \geq 0$, тогда получаем, что $\frac{\partial S}{\partial x} = 2x^T\mathcal{L}$, отсюда $u^0 = -N^{-1}B^T\mathcal{L}x$. Тогда перепишем уравнение

$\dot{x} = (A - BN^{-1}B^T\mathcal{L})x, \frac{dS}{dt} = \dot{x}^T\mathcal{L}x + x^T\mathcal{L}\dot{x} + x^T\dot{\mathcal{L}}x$ и подставим получившийся результат в уравнение Беллмана:

$$x^T(A^T - \mathscr{L}BN^{-1}B^T)\mathscr{L}x + x^T\mathscr{L}(A - BN^{-1}B^T\mathscr{L})x + x^T\dot{\mathscr{L}}x + x^TGx + x^T\mathscr{L}BN^{-1}B^T\mathscr{L}x =$$
$$= x^T(\mathscr{L}A + A^T\mathscr{L} + G - \mathscr{L}BN^{-1}B^T\mathscr{L})x = 0,$$

где $\mathcal{L}A + A^T\mathcal{L} + G - \mathcal{L}BN^{-1}B^T\mathcal{L} = 0$ - уравнение Риккати, $\mathscr{L}(t_k) = 0$. Если мы найдём решение этого матричного уравнения, то сразу найдётся оптимальное управление, которое в силу достаточного принципа Беллмана даёт глобальный минимум нашего функционала.

## 10.3 Связь метода динамического программирования Беллмана с принципом максимума Понтрягина

По-прежнему рассматривается та же самая задача с фиксированным временем, свободным правым концом и интегральным функционалом. В общем случае функция Беллмана удовлетворяет условию

$$\frac{\partial S(t,y)}{\partial t} + \min_{u(t)\in\Omega}[f_0(y(t),u(t),t) + \frac{\partial S(t,y)}{\partial y}f(y(t),u(t))] = 0$$

с краевым условием $S(t_k, y(t_k)) = 0$. Пусть есть решение уравнения Беллмана

$S(t,y)\in C^2$. Попробуем определить связь с принципом максимума Понтрягина в этой задаче.

Рассмотрим функцию $R(y^0,u^0,t)=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial y}f(y^0,u^0)+f_0(y^0,u^0,t)\equiv 0\forall t\in[0,t_k]$. Для любого другого решения в окрестности $y^0$получается, что

$R(y,u,t)=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial y}f(y,u)+f_0(y,u,t)\geq 0$ в силу уравнения Беллмана. Получается, что эта функция $R$ на оптимальном решении достигает минимума. Одно из необходимых условий минимума функции $R$:

$$\frac{\partial R(y^0,u^0,t)}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial S(t,y)}{\partial t}+\frac{\partial^2 S(t,y)}{\partial y^2}f(y,u)+\frac{\partial S(t,y)}{\partial y}\frac{\partial f(y,u)}{\partial y}+\frac{\partial f_0(y,u,t)}{\partial y}=$$

$$=\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S(t,y)}{\partial y}+\frac{\partial^2 S(t,y)}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial S(t,y)}{\partial y}\frac{\partial f(y,u)}{\partial y}+\frac{\partial f_0(y,u,t)}{\partial y}}_{=0}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)+\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f_0}{\partial y}$$

Введём обозначение $\psi^T(t)=-\frac{\partial S(t,y^0)}{\partial y}$, тогда $\dot{\psi}=-\left(\frac{\partial f(y^0,u^0)}{\partial y}\right)^T\psi+\frac{\partial f_0(y^0,u^0,t)}{\partial y}$.
Рассмотрим расширенную функцию Понтрягина $\widetilde{H}(\psi,y,u)=\psi^T f(y,u)-f_0(y,u,t)$.
$R(y^0,u^0,t)=\frac{\partial S}{\partial t}+\min\limits_{u(t)\in\Omega}[\underbrace{\frac{\partial S}{\partial y}f(y,u)+f_0(y,u,t)}_{-\widetilde{H}(\psi,y,u)}]=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\max\limits_{u(t)\in\Omega}\widetilde{H}(y^0,u(t),\psi(t))=\widetilde{H}(y^0(t),u^0(t),\psi(t))$, т.е. уравнению Беллмана соответствует условие максимума функции Понтрягина для этой системы. Таким образом, найдена связь между принципом максимума и динамическим программированием Беллмана.

## 10.4 Регулярный синтез по В.Г. Болтянскому

Рассмотрим задачу оптимального управления общего вида

$\dot{y}=f(y,u)$, $y(t_0)=y^*$, $u(\cdot)\in U$. Задача прихода на некоторое гладкое многообразие без особых точек$y(t_k)\in M$. Функционал $J(u)=\varphi_0(y(t_k))+\int_{t_0}^{t_k}f_0(y,u)dt\to\min\limits_{u(\cdot)\in U}$.

**Теорема**. Управляемый процесс $\{y^0(\cdot),u^0(\cdot),[t_0,t_k^0]\}$, удовлетворяющий ПМП, является оптимальным, если выполнены 6 условий регулярного синтеза при размерности системы n=2:

1) Пусть $G\subset R^2$- открытая область управляемости, т.е. та область, где могут лежать траектории нашей системы.

а) терминальное множество $M$ - гладкое многообразие.

б)$N$ - особое множество размерности $s\leq 1$.

в) множества $P_0,P_1,P_2$ - кусочно-гладкие, замкнуты в $G$ и нет общих точек с$M$ и $N$.

$P_0$ - нульмерная клетка.

# 11 Регулярный синтез по В.Г. Болтянскому

Должны быть выполнены 6 условий регулярного синтеза при размерности системы n=2:

1) Пусть $G \subset R^2$- открытая область управляемости, т.е. та область, где могут лежать траектории нашей системы.

а) терминальное множество $M$ - гладкое многообразие.

б)$N$ - особое множество размерности $s \leq 1$.

в) множества $P_0, P_1, P_2$ - кусочно-гладкие, замкнуты в $G$ и нет общих точек с$M$ и $N$.

2) 2 типа $P_i$.

3) $P_0$ - всегда множество 2 типа. $P_1$ - 1 или 2 типа. $P_2$ - всегда 1 типа. По этим множествам могут проходить гладкие траектории с гладким управлением.

4) Есть некая траектория, которая называется отмеченной. Она проходит из клетки в клетки, и через конечное число клеток попадает на конечное многообразие $M$.

5) Отмеченная траектория удовлетворяет ПМП.

6) Функционал $J(u^0)$, вычисленный на отмеченной траектории, непрерывно зависит от начальных условий.

**Пример.** Параметрический резонанс колебаний маятника.

Пусть у нас есть математический маятник (Рис. 9), рассмотрим задачу колебания такого маятника. За счёт того, что точка подвеса может перемещаться с ускорением$w$,$|w(t)| \leq g$, постараемся раскачать этот маятник.

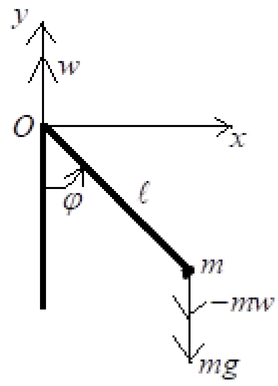


Рис. 9: Математический маятник с подвижной точкой подвеса

Будем выписывать уравнения движения вокруг точки $O$, для этого выберем систему координат, которая перемещается с этой точкой. Для того, чтобы выписывать уравнения в подвижной системе координат, надо к существующим силам добавить силы инерции. Поскольку система $Oxy$не вращается, будет только одна переносная сила. Выпишем уравнения изменения кинетического момента:

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\ell \sin\varphi - mw\ell \sin\varphi,$$

где $J_z = m\ell^2$, тогда $\ddot{\varphi} = -\left(\frac{g+w}{\ell}\right)\sin\varphi$.

Для простоты будем считать $\varphi$ достаточно малым, тогда будем рассматривать линейное уравнение $\ddot{\varphi} = -\left(\frac{g+w}{\ell}\right)\varphi = -u\varphi$. Тогда, введя координаты $\varphi = y_1, \dot{\varphi} = y_2$, получим уравнения $\begin{cases}\dot{y}_1 = y_2\\ \dot{y}_2 = -uy_1\end{cases}$, $0 < l \le u(t) \le r$. Получившиеся уравнения эквивалентны $\ddot{y}_1 + uy_1 = 0$. Известно уравнение $\ddot{y} + y = w = A\sin\omega t$ , в том случае, когда $w = 1$, явление носит название **резонанс**.

Попробуем решить задачу: можно ли организовать $u(t)$ некоторым образом так, чтобы раскачать нашу систему, т.е. амплитуда колебаний росла. Для системы $\begin{cases}\dot{y}_1 = y_2\\ \dot{y}_2 = -uy_1\end{cases}$ начальные условия, следующие $\begin{cases}y_1(t_0) = 1\\ y_2(t_0) = 0\end{cases}$. При заданных условиях получается, что все решения по $y_1$ носят колебательный характер (Рис. 10):

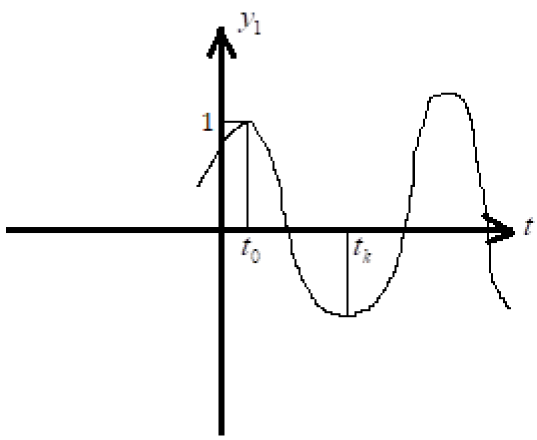


Рис. 10

Тогда конечное многообразие имеет вид $M = \{y_2(t_k) = 0\}$, $y(t_k) = -\alpha < 0$, где $\alpha > 0$-амплитуда колебаний. $\varphi_0(y(t_k)) = y_1(t_k) \to \min_u$. Если удастся увеличить амплитуду, и она будет расти до бесконечности, то у нас тоже появится явление резонанса за счёт выбора параметра $u$. Для решения экстремальной задачи применим принцип максимума Понтрягина: функция Понтрягина $H = \psi_1 y_2 + (-uy_1)\psi_2$, сопряжённые уравнения $\begin{cases}\dot{\psi}_1 = u\psi_2\\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1\end{cases}$, оптимальное управление $u^0(t) = \begin{cases}l\,, y_1\psi_2 > 0\\ r\,, y_1\psi_2 < 0\end{cases}$. Проверим, возможен ли такой случай, где $t \in [t', t''] \subset [t_0, t_k]$, что $\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0 \Rightarrow y_1\psi_2 \equiv 0$.

$y_1$ удовлетворяет уравнению $\ddot{y}_1 + uy_1 = 0$, а $\psi_2$ уравнению $\ddot{\psi}_2 + u\psi_2 = 0$, т.е. получается самосопряжённая система с точки зрения системы управления. $y_1$ не может быть тождественным нулём, так как в начальной точке он не должен быть равен нулю. Условие трансверсальности $\psi(t_k) + \lambda_0 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \perp M$, касательное пространство

$T_M = \{\gamma_1, 0\}$, тогда $(\psi_1(t_k) + \lambda_0)\gamma_1 + \psi_2 \cdot 0 = 0$, откуда $\psi_1(t_k) = -\lambda_0$. Значит, если $\psi_2 \equiv 0$, то и $\psi_1 \equiv 0$, тогда $\lambda_0 \equiv 0$, откуда пара $(\lambda_0, \psi) \equiv 0$ - противоречие ПМП.

Проверим условие $H(t) \equiv 0 \Rightarrow H(t_k) = 0$. Т.к. $M = \{y_2(t_k) = 0\}$, то

$H = \underbrace{\psi_1 y_2}_{=0} + (-\underbrace{u}_{>0} \underbrace{y_1}_{<0})\psi_2(t_k) = 0$, откуда $\psi_2(t_k) = 0$ из условия трансверсальности и условия стационарности Гамильтониана. Отсюда и следует невырожденность задачи, т.е. $\lambda_0 > 0$. Возьмем $\lambda_0 = 1$, тогда $\psi_1(t_k) = -1 \Rightarrow \dot{\psi}_2(t_k) = 1$. Таким образом, на оптимальном управлении должны выполняться уравнения $\begin{cases} \ddot{y}_1 + uy_1 = 0 \\ \ddot{\psi}_2 + u\psi_2 = 0 \end{cases}$, попробуем найти решения этой системы.

Посмотрим, как ведёт себя произведение $y_1\psi_2$ в окрестности точки $t_k$ (Рис. 11):

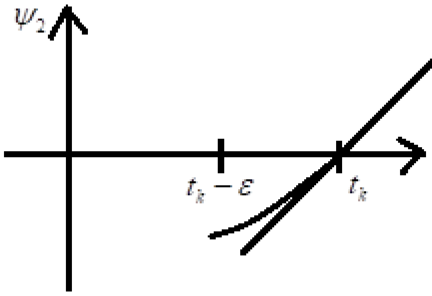


Рис. 11

Можно сделать вывод $\psi_2(t_k - \varepsilon) < 0$, аналогично $y_1(t_k - \varepsilon) < 0$. Значит в некоторой окрестности $t \in [t_k - \varepsilon, t_k]$ произведение $y_1(t)\psi_2(t) > 0 \Rightarrow u^0(t) = l = const$, тогда система $\begin{cases} \ddot{y}_1 + ly_1 = 0 \\ \ddot{\psi}_2 + l\psi_2 = 0 \end{cases}$ легко решается.

Выпишем решение:

$y_1(t) = c_1 \sin\sqrt{l}\,(t - t_k) + c_2 \cos\sqrt{l}\,(t - t_k)$, где краевое условие

$y_1(t_k) = -\alpha, \dot{y}_1(t_k) = 0$, значит $c_1 = 0, c_2 = -\alpha$.

$\psi_2(t) = c_3 \sin\sqrt{l}\,(t - t_k) + c_4 \cos\sqrt{l}\,(t - t_k)$, где краевое условие

$\psi_2(t_k) = 0, \dot{\psi}_2(t_k) = 1$, значит $c_3 = \frac{1}{\sqrt{l}}, c_4 = 0$.

Мы можем продолжать решение до тех пор, пока $y_1(\tau) = 0$, т.е. $\tau - t_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{l}}$.

Продлим решение дальше, за момент времени $\tau$, т.е. $t \in [\tau - \varepsilon, \tau]$, $y_1(t) > 0, \psi_2(t) < 0$. Вычислим $\dot{y}(\tau) = -\alpha\sqrt{l}$. Тогда следует из принципа максимума, что $u^0(t) = r = const$, значит система будет выглядеть $\begin{cases} \ddot{y}_1 + ry_1 = 0 \\ \ddot{\psi}_2 + r\psi_2 = 0 \end{cases}$, где верно решение

$y_1(t) = c_1 \sin\sqrt{r}\,(t - \tau) + c_2 \cos\sqrt{r}\,(t - \tau)$, где краевое условие

$y_1(\tau) = 0, \dot{y}_1(\tau) = -\alpha\sqrt{l}$, значит $c_2 = 0, c_1 = -\frac{\alpha\sqrt{l}}{\sqrt{r}}$.

$\psi_2(t) = c_3 \sin\sqrt{r}\,(t-\tau) + c_4 \cos\sqrt{r}\,(t-\tau)$, где краевое условие $\psi_2(\tau) = ?, \dot{\psi}_2(\tau) = 0$, значит $c_3 = 0, c_4 = -\frac{1}{\sqrt{l}}$.

Мы можем продолжать решение до тех пор, пока $\psi_2(t') = 0$, т.е. $t' - \tau = -\frac{\pi}{2\sqrt{r}}$. Из $\dot{y}_1(t') = 0$ следует, что $t' = t_0$, т.е. $c_1 = -1$ из условия $y(t_0) = 1$. А т.к. $c_1 = -\frac{\alpha\sqrt{l}}{\sqrt{r}}$, то $\alpha = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{l}} > 1$. Значит амплитуда колебаний возросла. Получается результат, где

$t_k = \frac{\pi}{2\sqrt{l}} + \frac{\pi}{2\sqrt{r}}$ (Рис. 12):

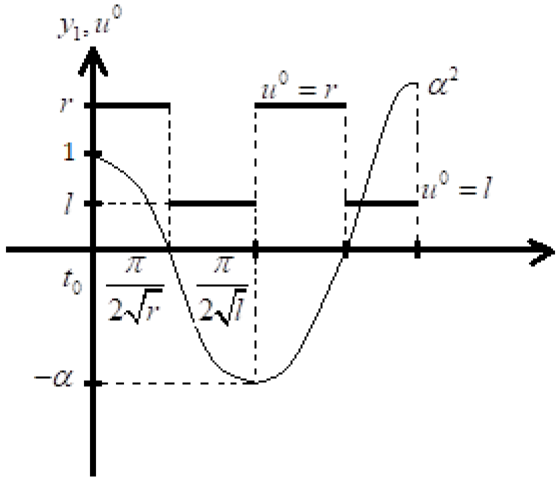


Рис. 12: Параметрический резонанс

Амплитуда растёт как геометрическая прогрессия в отличие от простого резонанса, где амплитуда растёт как линейная функция. Отсюда можно сделать вывод, что частота смены управления получается примерно вдвое выше частоты колебаний, т.е. за колебание нужно два раза сменить управление. Получается, что всегда

$sign(\psi_2) = sign(y_2)$, поэтому оптимальное управление можно качественно представить в виде синтеза $u^0(y_1, y_2) = \begin{cases} l, y_1 y_2 > 0 \\ r, y_1 y_2 < 0 \end{cases}$.

Проверим условие регулярности по Болтянскому этого синтеза. Нарисуем, что у нас происходит на фазовой плоскости (Рис. 13):

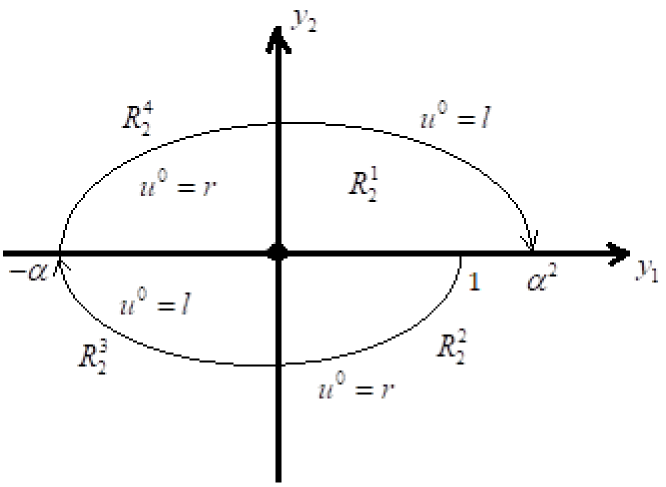


Рис. 13: Регулярный синтез

$\alpha = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{l}}$, $N = \{0\}$, $G = R^2 \backslash \{0\}$- область, где осуществляется синтез, $M = \{y_2 = 0\}$,

$R_1 = \{y_1 = 0\}$ - множество, на котором происходит переключение, $R_2$- набор координатных четвертей, внутри каждой клетки которого гладкие решения в виде синтеза.

Таким образом, здесь выполнены условия регулярного синтеза, тогда наше решение получается оптимальным.

## 11.1 Особые оптимальные управления

Будем рассматривать только частный случай управляемой системы, а именно $\dot{y} = f(y) + g(y)u$, $u(t) \in R^1$, $|u(t)| \le \mu$, $u(\cdot) \in PC[t_0, t_k]$. Пусть начальный момент фиксирован $y(t_0) = y^*$, а приход рассматривается на конечное многообразие $y(t_k) \in M$, а функционал терминальный $J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$, функции $f, g, \varphi_0$ - гладкие по всем переменным. Пусть известен оптимальный процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k]\}$, функция Понтрягина $H = \psi^T(t)(f(y) + g(y)u) = H_0(\psi, y) + uH_1(\psi, y)$, где $H_0 = \psi^T f$ , $H_1 = \psi^T y$, тогда одно из необходимых условий ПМП:

$$\max_{|u(t)|\le\mu} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)), t \in T \,. \quad (36)$$

Это задача максимизации некоторой нелинейной функции на некотором множестве, и, вообще говоря, может иметь не одно решение.

Тогда будем говорить, что, если $\exists!$ решение задачи (36), тогда управление

$u^0(\cdot)$ называется регулярным. Если больше одного решения, то такие случаи называются особыми, и управление будет называться особым. Задача максимизации $H$ имеет неединственное решение только в том случае, когда $\exists t \in [t', t''] \subset [t_0, t_k]$ такой, что $H_1(\psi, y) \equiv 0$. Тогда эта задача имеет бесконечное число решений. В ситуации, когда существуют такие особые решения, принцип максимума перестаёт работать.

Для того, чтобы получить условие оптимальности, Дж. Келли придумал некую вариацию. Вариация Келли представляет собой «комбинацию» классической вариации и игольчатой.

Начнём с классической: мы ищем необходимое условие локального минимума, тогда приращение $\Delta J(u^0) = J(u^0 + \Delta u) - J(u^0) \geq 0$, $\Delta u = \varepsilon \delta u$, где $\delta u(\cdot) \in C^1[t_0, t_k]$ с начальным условием $\delta u(t_0) = 0$, $\varepsilon > 0$. А при вариации Келли $\delta u$ варьируется следующим образом (Рис. 14):

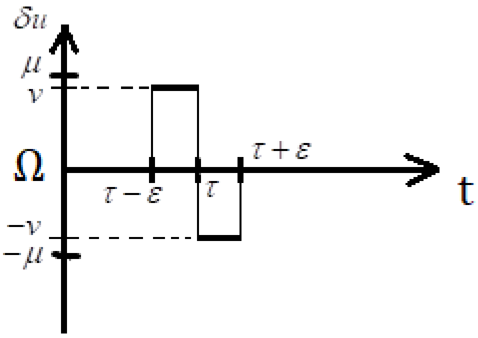


Рис. 14: Вариация Келли

$\delta u(t) \equiv 0$, когда $t \notin [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$. Получается 2-й порядок малости по $\varepsilon$, т.е.

$\Delta J(u^0) = \varepsilon \delta J(u^0) + \varepsilon^2 \delta^2 J(u^0) + o(\varepsilon^2)$. Первая вариация (вариация Лагранжа) $\delta J(u^0) =$ $= -\int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial H}{\partial u} \delta u dt = -\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial u} \delta u dt \equiv 0$, если $\tau \in [t', t'']$, где $\frac{\partial H}{\partial u} = H_1(\psi, y) \equiv 0$. Получается необходимое условие оптимальности $\delta^2 J(u^0) \geq 0$. Отсюда следует, что $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^2}{dt^2}(H_1(\psi, y))\right) \geq 0$.

**Теорема (Необходимое условие Келли).** Пусть известен $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k]\}$ - оптимальный процесс, и

1) выполнен ПМП для этого процесса,

2) на особом участке ($H_1(\psi, y) \equiv 0$) выполнено $|u^0(t)| < \mu$.

Тогда необходимое условие оптимальности $u^0(t)$ следующее: $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^2}{dt^2}(H_1(\psi, y))\right) \geq 0$.

# 12 Особые оптимальные управления

В прошлый раз рассматривался частный случай управляемой системы

$$\dot{y} = f(y) + g(y)u,\ u(t) \in R^1, \Omega = [-\mu, \mu],\ |u(t)| \le \mu,\ u(\cdot) \in PC[t_0, t_k].$$

Пусть начальный момент фиксирован $y(t_0) = y^*$, а приход рассматривается на конечное многообразие $y(t_k) \in M$. Рассматривается задача оптимизации терминального функционала $J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \to \min\limits_{u(\cdot)\in U}$ по всем управлениям. Тогда, как известно из принципа максимума, оптимальное управление должно удовлетворять следующему соотношению $\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))$, которое как раз и определяет принцип максимума, который говорит о том, что оптимальное управление доставляет максимум функции Понтрягина. Мы предполагали, что у это задачи 1 решение, т.е. регулярный случай. А если решений больше одного, то случай называется особый.

В нашем случае функция Понтрягина разбивается на две части:

$$H(\psi, y, u) = H_0(\psi, y) + uH_1(\psi, y).$$

Оказывается, если $\forall t \in [t', t'']$: $H_1(\psi, y) \equiv 0$, то это и будет особый случай, т.к. бесконечно много решений, тогда принцип максимума перестаёт работать, значит нужны другие необходимые условия для нахождения особого управления. На особом участке оптимальной траектории $H(t) \equiv 0 \Rightarrow H_0 \equiv 0$. Идея Келли заключалась в том, что $\dot{H}_1(t) \equiv 0$, тогда $\ddot{H}_1 = a(\psi, y) + ub(\psi, y) \equiv 0$. Из получившегося тождества возможно найти управление, которое ему удовлетворяет. Оно и будет особым управлением $u^{oc} = -\frac{a(\psi,y)}{b(\psi,y)}$, а из необходимого условия Келли следует, что $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^2}{dt^2}(H_1(\psi, y))\right) \ge 0$, тогда найденное особое управление будет оптимальным. Получается, что $b(\psi, y) \ge 0$ - необходимое условие Келли.

## 12.1 Скобки Пуассона

Рассмотрим две гладкие скалярные функции $\alpha(\psi, y)$ и $\beta(\psi, y)$, тогда оператор $\frac{\partial\alpha}{\partial y}\left(\frac{\partial\beta}{\partial\psi}\right)^T - \frac{\partial\alpha}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^T = \{\alpha, \beta\}$ - скобка Пуассона. Основные свойства:

1) $\{\alpha, \beta\} = -\{\beta, \alpha\}$

2) $\{\alpha, \alpha\} = 0$

3) $\{\alpha, \beta + \gamma\} = \{\alpha, \beta\} + \{\alpha, \gamma\}$

4) $\{\alpha, c\beta\} = c\{\alpha, \beta\}, c \in R^1$

Необходимое условие Келли эквивалентно условию $\{H_1, \{H_1, H_0\}\} \le 0$. Если ввести функцию Понтрягина, то исходная и сопряжённая системы запишутся $\begin{cases} \dot{y} = \left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^T \\ \dot{\psi} = -\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^T \end{cases}$.

Рассмотрим произвольную гладкую скалярную функцию $S(\psi, y)$ и найдём её полную производную в силу системы $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial S}{\partial \psi}\dot{\psi} = \frac{\partial S}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^T - \frac{\partial S}{\partial \psi}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^T = \{S, H\}$. Пусть $S = H_1(\psi, y)$, где $H(\psi, y, u) = H_0(\psi, y) + uH_1(\psi, y)$. Найдём производную в силу системы:

$$\frac{dH_1}{dt} = \{H_1, H\} = \{H_1, H_0 + H_1 u\} = \{H_1, H_0\} + u\underbrace{\{H_1, H_1\}}_{=0} \equiv 0,$$

значит $\{H_1, H_0\} \equiv 0$ на особой траектории.

Найдём вторую производную:

$$\ddot{H}_1 = \frac{d}{dt}\{H_1, H_0\} = \{\{H_1, H_0\}, H\} = \{\{H_1, H_0\}, H_0 + uH_1\} = \{\{H_1, H_0\}, H_0\} + \\ +\{\{H_1, H_0\}, H_1\}u \equiv 0$$

**Определение.** Порядком особого участка называется натуральное число q, такое, что $\forall S = 0,1,\dots,2q-1$ выполнено $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^S}{dt^S}\frac{\partial H(\psi,y,u)}{\partial u}\right) \equiv 0$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\frac{\partial H(\psi, y, u)}{\partial u}\right) \neq 0$$

**Теорема (Обобщённое условие Келли).** Пусть q – есть порядок особой траектории $y^0$. Тогда для того, чтобы особое управление $u^{oc}$ было оптимальным, необходимо выполнение условий:

1) ПМП,

2)$|u^{oc}(t)| < \mu$,

3)$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\frac{\partial H}{\partial u}\right) \leq 0$.

Условие для случая q=2 называют условием Коппа-Мойера.

## 12.2 Структура оптимального управления

1. Регулярное управление.

Пусть $\tilde{t}$- точка разрыва оптимального управления (Рис. 14), т.е. $u^0(\tilde{t}+0) \neq u^0(\tilde{t}-0)$.q – нечетный порядок.

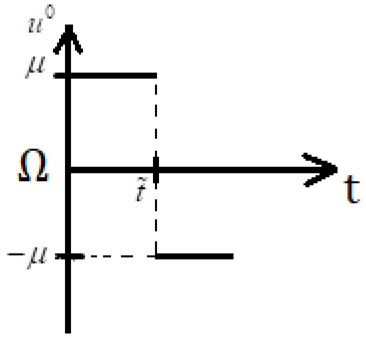


Рис. 14: Точка разрыва в регулярном случае

2) Особый случай.

Пусть $\tilde{t}$- точка сопряжения с регулярным решением (Рис. 15), т.е. $u^0(\tilde{t}+0) \neq u^0(\tilde{t}-0)$.q – нечетный порядок.

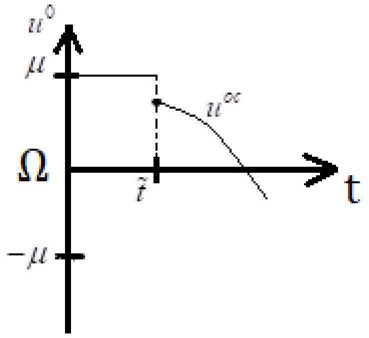


Рис. 15: Точка разрыва в особом случае

**Теорема (Коппа-Мойера).** Пусть оптимальная траектория $y^0(t)$ на особом участке $t \in [t', t'']$ имеет 2-й или любой чётный порядок, и выполнено строгое условие Келли $(-1)^q \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\frac{\partial H}{\partial u}\right) < 0$. Тогда в точке сопряжения $t'$ с регулярным участком $u^0(t)$ не может терпеть разрыв.

3) В точке сопряжения $\tilde{t}$ (Рис. 16) выполнено условие $u^0(\tilde{t}+0) = u^0(\tilde{t}-0)$, но $u'(\tilde{t}+0) \neq u'(\tilde{t}-0)$. q – четный порядок.

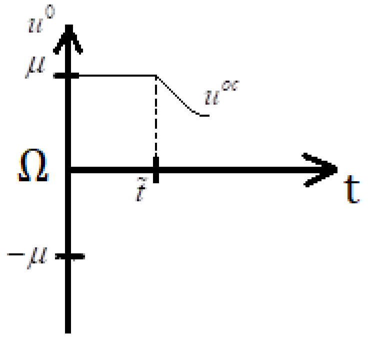


Рис. 16

4) В точке сопряжения $\tilde{t}$ (Рис. 17) выполнено условие $u^0(\tilde{t}+0) = u^0(\tilde{t}-0)$, но $u'(\tilde{t}+0) = u'(\tilde{t}-0)$. q – нечетный порядок.

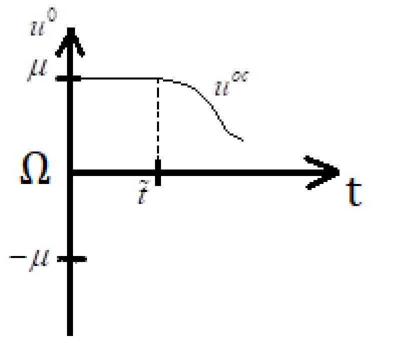


Рис. 17

5) В 1961 году был представлен пример задачи (Рис. 18), в которой был четный участок особой траектории, q – четное, при этом было произведено сопряжение между оптимальным и особым участком, что по теории Коппа-Мойера невозможно. Сопряжение было произведено следующим образом: при приближении к точке сопряжения $\tilde{t}$ оптимальное управление меняло знак, причём точек переключения счётное число, где $\tilde{t}$- точка сгущения точек переключения оптимального управления $u^0(t)$.

Было доказано, что такая траектория оптимальная. Получается, что $u(\cdot) \in L_\infty[t_0, t_k]$. Такой режим называется «чаттеринг-режим».

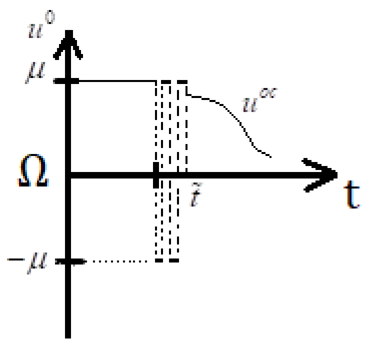


Рис. 18: Чаттеринг режим

## 12.3 Задача Годдарда

На 2 лекции мы рассматривали задачу, где выводили для уравнения движения ЛА в вертикальной плоскости, и строили для неё систему двухуровневого управления. Мы показали, что уравнения движения центра масс можно изучать отдельно в силу теоремы Тихонова.

Теперь рассмотрим частный случай движения, т.е. случай, когда

$\theta(t) = \frac{\pi}{2}, \varphi(t) = \frac{\pi}{2}$ - вертикальный полёт ракеты вверх, на которую действует сила тяжести mg, тяга P и сила сопротивления Q. Тогда уравнения движения следующие:

$$\begin{cases} \dot{h} = v \\ m\dot{v} = -mg - Q + P, \\ \dot{m} = -u \end{cases}$$

где $P = -\gamma\dot{m} = \gamma u$. Сила сопротивления воздуха $Q = \frac{\rho v^2}{2} S c_x^0 = kv^2$.

Задача Годдара:

1) Подъём на максимальную высоту в момент выгорания топлива.

Введём фазовый вектор $\boxed{y = \begin{pmatrix} y_1 = h \\ y_2 = v \\ y_3 = m \end{pmatrix}}$, тогда $\boxed{\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -g + \frac{\gamma u - Q(y_2)}{y_3} \\ \dot{y}_3 = -u \end{cases}}$ с начальными условиями $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = m_0$, где $m_0$- масса ракеты с топливом. Пусть $0 \leq u(t) \leq \mu$, где $\mu$ - максимальный расход топлива, т.е. максимальная тяга. Чтобы ракета могла стартовать и двигаться вверх должно быть $mg < \gamma\mu$. Пусть $0 < m_1 < m_0$ - собственная масса ракеты, тогда момент выгорания топлива $\{y_3(t_k) = m_1\} = M$ - терминальное многообразие в оптимальной задаче. Функционал запишется так:

$$\boxed{J(u) = \max_{0 \leq u(t) \leq \mu} y_1(t_k) = \varphi_0(y(t_k)) = -y_1(t_k).}$$

Выпишем необходимое условие оптимальности ПМП:

$$H = \psi_1 y_2 + \psi_2\left(\frac{\gamma u - Q}{y_3} - g\right) + \psi_3(-u) = H_0(\psi, y) + H_1(\psi, y)u,$$

где $\begin{cases} H_1 = \frac{\psi_2\gamma}{y_3} - \psi_3 \\ H_0 = \psi_1 y_2 - \psi_2\left(\frac{Q}{y_3} + g\right) \end{cases}$. Условие трансверсальности: $\psi(t_k) + \lambda_0 \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} \perp M$, касательное многообразие $T_M = \{\gamma_1, \gamma_2, 0\}$, тогда, если записать условие перпендикулярности как скалярное произведение, получается

$$\underbrace{(\psi_1(t_k) - \lambda_0)}_{=0}\gamma_1 + \underbrace{(\psi_2(t_k))}_{=0}\gamma_2 = 0.$$

Сопряжённая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \frac{\psi_2}{y_3}\frac{\partial Q}{\partial y_2}, \psi_1 = \lambda_0 \geq 0. \\ \dot{\psi}_3 = \left(\frac{\gamma u - Q}{y_3^2}\right)\psi_2 \end{cases}$$

И нужно проверить вырождается ли эта задача, т.е. $\lambda_0 = 0$. Допустим $\lambda_0 = 0$, тогда получается тождественный ноль, т.е. противоречие с принципом максимума. Отсюда следует, что $\psi_1 = \lambda_0 > 0$. Тогда сопряжённую систему можно пронормировать и считать $\psi_1 = 1$, тогда $\begin{cases} \dot{\psi}_2 = -1 + \frac{\psi_2}{y_3}\frac{\partial Q}{\partial y_2} \\ \dot{\psi}_3 = \left(\frac{\gamma u - Q}{y_3^2}\right)\psi_2 \end{cases}$. Получается структура оптимального управления $u^0 = \begin{cases} \mu & , H_1 > 0 \\ 0 & , H_1 < 0 \\ u^{oc} & , H_1 \equiv 0 \end{cases}$. Если в решении присутствует особый участок

$[t', t''] \subset [0, t_k]$, где $H_1(\psi, y) \equiv 0$, тогда нужно воспользоваться теоремой Келли, чтобы найти особое управление. Получается $\frac{\psi_2\gamma}{y_3} - \psi_3 \equiv 0$,

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{\psi}_2\gamma}{y_3} - \frac{\psi_2\gamma}{y_3^2}\dot{y}_3 - \dot{\psi}_3 = \left(-1 + \frac{\psi_2}{y_3}\frac{\partial Q}{\partial y_2}\right)\frac{\gamma}{y_3} + \frac{u\psi_2\gamma}{y_3^2} + \psi_2\left(\frac{Q-\gamma u}{y_3^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{y_3^2}\left[\left(Q + \gamma\frac{\partial Q}{\partial y_2}\right)\psi_2 - \gamma y_3\right] \equiv 0$$

$0 < m_1 \le y_3(t) \le m_0$, тогда $\ddot{H}_1 = -\frac{2}{y_3^3}\dot{y}_3\underbrace{[\dots]}_{=0} + \frac{1}{y_3^2}\Big[\dot{\psi}_2\left(Q + \gamma\frac{\partial Q}{\partial y_2}\right) - \gamma\dot{y}_3 +$

$+\psi_2\left(\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2}\right)\dot{y}_2\Big] =$

$$= \frac{1}{y_3^2}\left[\left(-1 + \frac{\psi_2}{y_3}\frac{\partial Q}{\partial y_2}\right)\left(Q + \gamma\frac{\partial Q}{\partial y_2}\right) + \gamma u + \psi_2\left(\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2}\right)\left(-g - \frac{Q}{y_3} + \frac{\gamma u}{y_3}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{y_3^2}\left[\gamma u\left[1 + \frac{\psi_2}{y_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2}\right)\right]\right] + \frac{1}{y_3^2}\Bigg[\left(Q + \gamma\frac{\partial Q}{\partial y_2}\right)\left(-1 + \frac{\partial Q}{\partial y_2}\frac{\psi_2}{y_3}\right) -$$
$$-\psi_2\left(\frac{Q + gy_3}{y_3}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2}\right)\Bigg] = a(\psi, y) + b(\psi, y)u \equiv 0$$

Из условия Келли следует, что

$$b(\psi, y) = \frac{\gamma}{y_3^2}\left[1 + \frac{\psi_2}{y_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2}\right)\right] \ge 0, \tag{37}$$

где $Q = ky_2^2$. Ракета летит вверх, значит $y_2 \ge 0$. Известно, что $\psi_2(t_k) = 0$, посмотрим на знак $\psi_2$. На особом участке должно выполняться $\left(\underbrace{Q}_{>0} + \gamma\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial y_2}}_{>0}\right)\psi_2 - \gamma\underbrace{y_3}_{>0} \equiv 0$, откуда следует, что $\psi_2 \ge 0$, значит условие Келли (37) выполнено строго:

$$b(\psi, y) = \frac{\gamma}{y_3^2}\left[1 + \frac{\psi_2}{y_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2}\right)\right] > 0.$$

Известно, что на особом участке $t \in [t', t''] H_0(t) \equiv 0$, т.е. $y_2 \equiv \psi_2\left(\frac{Q}{y_3} + g\right)$. Тогда получается следующее соотношение:

$$\gamma y_3\left(\frac{Q}{y_3} + g\right) = y_2\left(Q + \gamma\frac{\partial Q}{\partial y_2}\right),$$

это тождество даёт нам особую кривую, по которой движется ракета в фазовом пространстве.

# 13 Продолжение задачи Годдарда

Рассматривались уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -g + \frac{\gamma u - kv^2}{y_3}, \\ \dot{y}_3 = -u \end{cases}$$

где $Q = kv^2$, $y_3(t_k) = m_1 < m_0$, $0 \le u(t) \le \mu$ и рассматривалась экстремальная задача $\varphi_0(y(t_k)) = -y_1(t_k) \to min$. Функция Понтрягина выглядела следующим образом:

$H = H_0 + H_1 u$, где $H_1 = \frac{\gamma\psi_2}{y_3} - \psi_3$, $H_0 = y_2 - \psi_2\left(g + \frac{ky_2^2}{y_3}\right)$. Структура оптимального решения была $u^0 = \begin{cases} \mu & , H_1 > 0 \\ 0 & , H_1 < 0 \\ u^{oc} & , H_1 \equiv 0 \end{cases}$. При $t \in [t', t_k]$ - особый режим, где $H_1 \equiv 0$ и $H_0 \equiv 0$, тогда

$$\dot{H}_1(\psi, y) \equiv 0 \Rightarrow [(ky_2^2 + 2\gamma k y_2)\psi_2 - \gamma y_3] \equiv 0. \quad (38)$$

После второго дифференцирования

$$\dot{H}_1 = a(\psi, y) + b(\psi, y)u^{\text{oc}} \equiv 0, \quad (39)$$

где $b(\psi, y) = 1 + \frac{\psi_2}{y_3}(2ky_2 + 2\gamma k) > 0, y_2 \ge 0, m_1 \le y_3(t) \le m_0$, т.е. выполнено необходимое условие оптимальности Келли.

$H_0 = y_2 - \psi_2\left(g + \frac{ky_2^2}{y_3}\right) \equiv 0 \Rightarrow \psi_2 = \frac{y_2}{g + \frac{ky_2^2}{y_3}}$, тогда из тождества (38) получается

$\frac{\psi_2}{y_3} = \frac{\gamma}{ky_2^2 + 2\gamma k y_2}$.

Разделим (38) на $y_3$ и подставим полученные выражения, тогда

$\gamma y_3\left(g + \frac{ky_2^2}{y_3}\right) = y_2(ky_2^2 + 2\gamma k y_2)$, откуда $y_3 = \frac{k}{g\gamma}(y_2^3 + \gamma y_2^2)$, где $y_3 = m, y_2 = v$, тогда $m = \frac{k}{g\gamma}(v^3 + \gamma v^2)$ - кривая.

Рассмотрим сечение фазовой плоскости (Рис. 19).

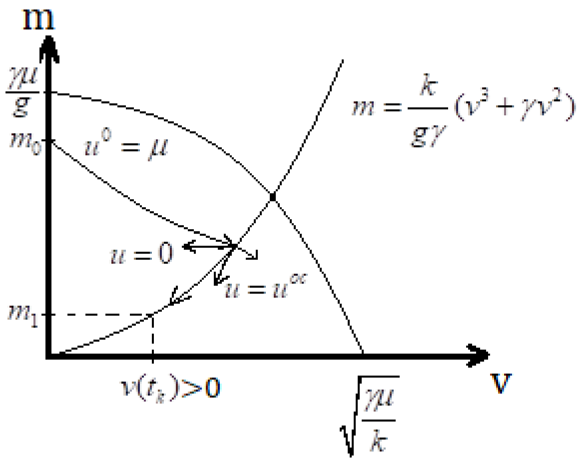


Рис. 19

Для того, чтобы ракета стартовала и двигалась вверх, должно выполняться условие $m_0 g < \gamma\mu$. Пусть $u = \mu$, при этом $\dot{v} = 0$.Перепишем тождество (39):

$$\gamma \frac{y_2^2+4\gamma y_2+2\gamma^2}{k y_2(y_2+2\gamma)} u^{oc} - \frac{k y_2^2+4k\gamma y_2^3+2k\gamma^2 y_2^2+2g\gamma y_2 y_3+2g\gamma^2 y_3}{k y_2(y_2+2\gamma)} \equiv 0,$$

тогда

$$u^{oc} = \frac{k}{\gamma} \frac{k y_2^2+4k\gamma y_2^3+2k\gamma^2 y_2^2+2g\gamma y_2 y_3+2g\gamma^2 y_3}{y_2^2+4\gamma y_2+2\gamma^2} > 0, \tag{40}$$

осталось показать, что $u^{oc} < \mu$. Так как касательная к особой кривой лежит между двумя другими касательными на (Рис.19), то отсюда следует, что $0 < u^{oc} < \mu$. Это можно показать и формально, для этого преобразуем выражение (40):

$$u^{oc} = \frac{1}{\gamma}\left[kv^2 + mg - \underbrace{\frac{mgv(v+2\gamma)}{v^2+k\gamma v+2\gamma^2}}_{\geq 0}\right] \leq \frac{1}{\gamma}(\underbrace{kv^2 + mg}_{<\gamma\mu}) < \mu.$$

Тогда структура решения (Рис. 20) будет выглядеть:

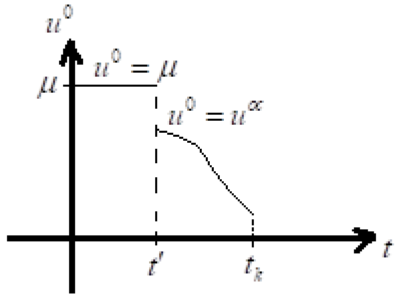


Рис. 20

Получается, что при достижении критической скорости, дальше увеличивать тягу бессмысленно, поскольку всё увеличение тяги идёт на преодоление силы сопротивления, которая квадратичная. Выгоднее уменьшить тягу и двигаться по особому участку. Такой участок с промежуточной тягой соответствует оптимальному движению ракеты вверх.

## 13.1 Задача Б.В. Булгакова о максимальном отклонении и максиминное тестирование качества стабилизации

Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = 0,\ u(\cdot) \in U$. Будем рассматривать, что $u(t) \in R^1, |u(t)| \le \mu$. Пусть известен отрезок времени $t \in [0, t_k]$, и мы хотим решать следующую задачу, которая оценивает отклонения. Чтобы оценить отклонения, нужно $J(u) = \|x(t_k)\|^2 = x^T(t_k)x(t_k) \to \max\limits_{u(\cdot)\in U}$.

Булгаковым рассматривалась несколько другая задача, а именно экстремальная задача $J(u) = \varphi_0(x(t_k)) = -c^T x(t_k) \to min$ - задача о максимальном отклонении по одной координате.

Рассмотрим эту задачу, она легко решается, если применить ПМП, т.е.

$H = \psi^T Ax + \psi^T Bu$. Получается, что $u^0(t) = \begin{cases} \mu &, \psi(t)^T B(t) > 0 \\ -\mu &, \psi(t)^T B(t) < 0 \end{cases}$, а сопряжённая система $\begin{cases} \dot{\psi} = -A^T \psi \\ \psi(t_k) = -\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^T = \mathrm{c} \end{cases}$. Чтобы решить эту задачу, нужно проинтегрировать сопряжённую систему с краевым условием справа налево, а после вычислить оптимальное управление, тогда сразу получаем оптимальное отклонение по одной координате. Рассмотрим геометрический смысл этой задачи (Рис. 21), для этого рассмотрим множество достижимости $D_u(t_k) = \{x(t_k) | \dot{x} = Ax + Bu, u(\cdot) \in U\}$, для линейной системы это множество замкнутое, выпуклое и ограниченное, когда управление ограничено.

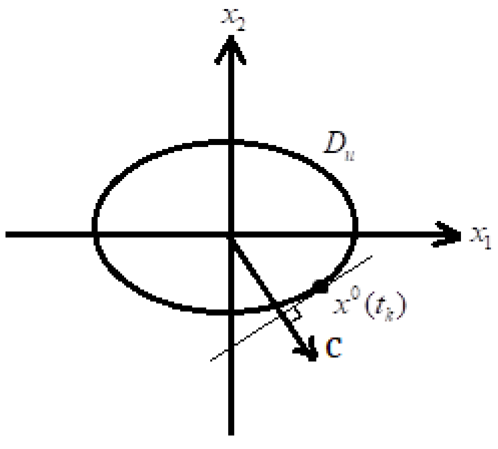


Рис. 20

Попытаемся теперь решить исходную общую задачу Булгакова, т.е. мы хотим найти максимально удалённую точку множества достижимости. Если формально записать принцип максимума, то получается всё то же самое кроме того, что

$\begin{cases}\dot{\psi} = -A^T\psi \\ \psi(t_k) = -\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^T = 2x^0(t_k)\end{cases}$. Получается, нужно решать двухточечную задачу ПМП.

Чтобы пояснить суть метода решения исходной задачи Булгакова, рассмотрим более простую задачу.

## 13.2 Метод условного градиента

Пусть $u \in U \subset R^n$, где $U$ - выпуклое замкнутое множество.

$J(u) \to \min\limits_{u\in U}, J(u) \in C^1$. Пусть есть некоторое приближение $u^i$. Можно вычислить значение функционал $J(u^i)$ и градиент $\frac{\partial J(u^i)}{\partial u}$. Тогда выпишем приращение функционала $\Delta J = J(u) - J(u^i) = \frac{\partial J(u^i)}{\partial u}(u - u^i) + o(\|u - u^i\|)$, т.е. вместо исходной задачи будем решать линейную задачу $\min\limits_{u\in U}\frac{\partial J(u^i)}{\partial u}u = J(\tilde{u}^i) > J(u^i) -?$. Пусть $u_{i+1} = u_i + \alpha(\tilde{u}^i - u^i)$, тогда

а) $\varphi(\alpha) = J(u^i + \alpha(\tilde{u}^i - u^i)) \to \min\limits_{\alpha\in[0,1]}$.

б) $\alpha^0 = 1, \alpha^{j+1} = \frac{1}{2}\alpha^j, j = 0, \dots, s$ , и $s$ прерывается в вычислениях, когда $J(u^s) < J(u^i)$.

Воспользуемся методом условного градиента, чтобы решить задачу Булгакова, рассмотрим систему $\begin{cases}\dot{\psi} = -A^T\psi \\ \psi(t_k) = -\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^T = x^0(t_k)\end{cases}$. Применим некий итерационный процесс, который соответствует методу условного градиента, но уже в бесконечномерном пространстве. Пусть известно $u^i(t)$, тогда $\dot{x} = Ax + Bu^i \Rightarrow x^i(t_k)$. Таким образом, мы решаем задачу:

$$\varphi(x(t_k)) = -x^{i^T}(t_k)x(t_k) \to \min_u = x^{i^T}(t_k)x^{i+1}(t_k) \geq x^{i^T}x^i.$$

Изобразим (Рис. 21) как работает метод решения задачи Булгакова.

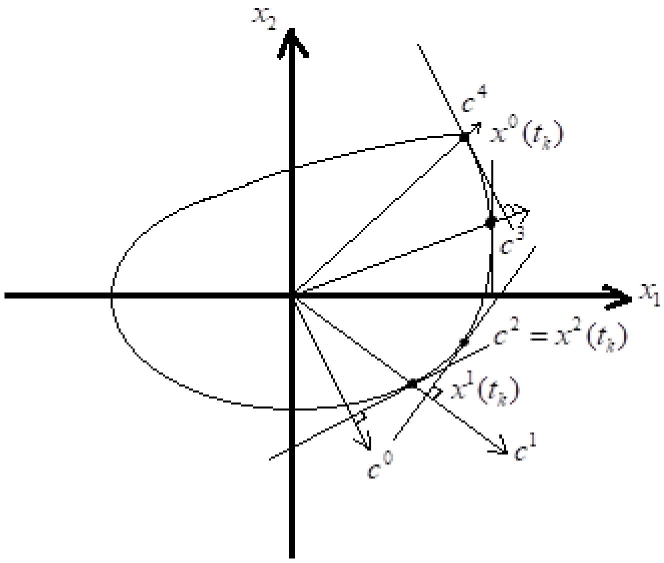


Рис. 21: Алгоритм решения задачи Булгакова

Мы нашли максимально удалённую точку $c^4$, в которой должно выполняться $x^{i+1}(t_k) = x^i(t_k)$, оптимальная точка $x^0(t_k)$ будет соответствовать решению задачи Булгакова. Рассмотрим более общий метод.

## 13.3 Метод Крылова-Черноусько

Рассмотрим общую задачу. Пусть есть нелинейная система $\dot{y} = f(y, u)$, $u(\cdot) \in U$, $t \in [t_0, t_k]$ и терминальный функционал $J(u) = \varphi_0(y(t_k))$. Если к этой задаче применить ПМП, то $\begin{cases} \dot{y} = f(y, u), y(t_0) = y^* \\ \dot{\psi} = -\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^T \end{cases}$ с краевым условием $\psi(t_k) = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\Big|_{y=y(t_k)}$.

В каждый момент времени нужно решать задачу:

$$\max_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t), y(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)).$$

По-прежнему понадобится некоторое текущее приближение $u^i(t)$. Если оно известно, то можно решить задачу:

a) Решается система $\dot{y} = f(y, u^i)$ с начальным условием $y(t_0) = y^*$, после чего вычисляется функция$\psi^i(t_k) = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\Big|_{y=y(t_k)}$.

b) После этого интегрируется сопряжённая система и вычисляются величины $\psi^i(t)$.

c) Тогда $\max\limits_{u^i(t)\in\Omega} H(\psi^{(i)}(t), y^{(i)}(t), u(t)) = H(\psi^{(i)}(t), y^{(i)}(t), \tilde{u}^{(i)}(t))$, откуда можно вычислить $\tilde{u}^{(i)}(t)$.

d) Находим $u^{i+1}(t) = u^i(t) + \alpha(t)(\tilde{u}^i(t) - u^i(t))$, где $\alpha(t)$ подбирается из условия, чтобы $J(u^{i+1}) < J(u^i)$. $\alpha(t) = 0$, если $t \notin [t', t'']$ и $\alpha(t) = 1$, если $t \in [t', t'']$. Этот отрезок нужно выбирать в районе, где функция Понтрягина достигает максимум, тогда можно показать, что такой метод сойдётся при некоторых условиях. Если $\alpha = const$, то нужно брать значение $\alpha$ очень мало.

## 13.4 Проекция точки на множество

Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = 0$, $|u(t)| \le \mu$. Изобразим эту ситуацию, где мы хотим найти проекции точки $y \notin D_u$ на множество достижимости $D_u$ (Рис. 22).

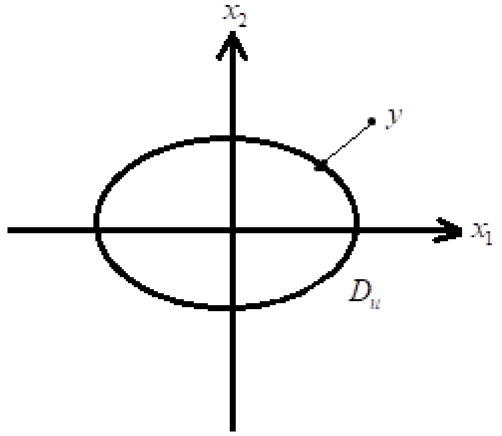


Рис. 22: Проекция точки на множество достижимости

Т.е. решается экстремальная задача $\min\limits_{u(\cdot)\in U}(x-y)^T(x-y)$, которая как раз даёт решение задачи проекции точки на множество. В линейном случае это множество строго выпукло, поэтому эта проекция одна. А формально нужно решить экстремальную задачу, т.е. интегрировать систему $\begin{cases}\dot{\psi} = -A^T\psi \\ \psi(t_k) = -(x-y)^T\end{cases}$. Если известно некое приближение $u^i$, то интегрируется сначала задача $\begin{cases}\dot{\psi} = -A^T\psi \\ \psi(t_k) = -(x^{(i)}-y)^T\end{cases} \Rightarrow \psi^i(t)$, после чего находится $\tilde{u}^{(i)}(t) \to \max\limits_{u(t)} H$, а следующее приближение строится как $u^{i+1}(t) = u^i(t) + \alpha(\tilde{u}^i(t) - u^i(t))$. И здесь вступает в силу соображение насчёт того, чтобы $\alpha$сделать переменным, стараться варьировать в области, где приращение функции Понтрягина максимально. Функция Понтрягина на оптимальной траектории равна нулю с точностью до константы, а во всех остальных точках она отрицательна.

# 14 Максиминное тестирование качества стабилизации

Рассмотрим для начала задачу робастной стабилизации, ограничившись линейной управляемой системой

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv \tag{41}$$

при наличии постоянных возмущений, начальное условие $x(0) = x_0 \in X_0$- замкнутое, выпуклое, ограниченное множество. Возмущения принадлежат функциональному множеству $v(\cdot) \in V$, а значения $v(t) \in Q$. Управление $u(\cdot) \in U$, а значения $u(t) \in \Omega$. Качество стабилизации будем оценивать на фиксированном отрезке времени $t \in [0, t_k]$, качество управления системой будем оценивать при помощи критерия

$$J(u,v) = x(t_k)^T E_s x(t_k), \text{ где } E_s = \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{s} & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Получается мы исследуем задачу стабилизации по первым $s$ координатам. При любых допустимых возмущениях отклонения должны уменьшаться, мы исследуем точность стабилизации при помощи такого терминального критерия. Для того, чтобы сформировать алгоритм робастной стабилизации, будем считать, что $\tilde{u} = u(x,t)$. Разработчику алгоритма придётся решать задачу

$$\min_{u(\cdot)\in U} \max_{v(\cdot)\in V} J(u,v) = J^0(u', v'). \tag{42}$$

Пусть разработчик эту задачу решил. Тогда мы хотим оценить качество разработанного алгоритма стабилизации либо сравнить между собой несколько алгоритмов

$\tilde{u}^i = u(x,t)$, чтобы выбрать лучший.

Вторая задача, когда этот алгоритм, например, в голове человека, т.е. когда управляет не автомат, а человек. Во-первых, мы хотим научить человека решать задачу, во-вторых, сравнить как между собой два разных человека её решает и вообще оценить качество, т.е. провести задачу тестирования.

## 14.1 Тестирование алгоритмов

Чтобы провести тестирование, нужно смоделировать поведение системы. Первая трудность задачи тестирование связана с тем, что алгоритм мы не знаем, т.е. алгоритм представляет собой «чёрный ящик».

Пусть $v$ - случайный процесс, в качестве критерия можно взять $M[J(u,v)]$, то решение этой задачи при наличии информации можно получить в виде линейной обратной связи $\tilde{u} = Kx$. При тестировании коэффициенты $K$неизвестны. Нам известен только «чёрный ящик», единственное, что можно сделать, это на вход алгоритма подать фазовые состояния системы, а на выходе получить результат работы алгоритма $u$.

Тогда для того, чтобы провести тестирование, нам нужен стенд, на котором можно промоделировать состояние. В случае человека стенд – это тренажёр. С помощью такого стенда мы можем обучить оператора или пилота как-то формировать своё управление, а также решить задачу тестирования, т.е. сравнения с другими выполнения этой задачи и определение точности алгоритма. Для того, чтобы решить задачу тестирования, необходимо, чтобы на стенде присутствовала математическая модель самой управляемой системы, т.е. на стенде надо уметь решать задачу (41). А наша задача сформировать возмущения, т.е. при тестировании мы хотим добиться следующего: $\max\limits_{v(\cdot)\in V} J(\tilde{u}, v)$ - нелинейная задача Булгакова. Для простоты рассмотрим случай, когда $s = n$, т.е. хотим оценить отклонения по всем координатам. Тогда на стенде будем решать задачу

$$\max_{v(\cdot)\in V} \min_{u(\cdot)\in U} J(u, v) = J_0(u^0, v^0). \tag{43}$$

Пара выписанных задач (42) и (43) для системы дифференциальных уравнений (41) называется **дифференциальной игрой**, где два игрока: первый – управление, а второй – возмущение. Один старается минимизировать показатель качества, а другой максимизировать. Поиск наихудших возмущений, которые нам нужно сформировать на стенде, мы будем решать путём решения некоторой дифференциальной игры.

Число $J_0(u^0, v^0)$ называется нижним значением игры, а $J^0(u', v')$ - верхнее значение игры. Рассмотрим дифференциальную игру для системы (41).

Сделаем замену $x(t) = y(t) - z(t)$, тогда исходную систему (41) можно переписать в виде двух подсистем $\dot{y} = Ay + Cv, \dot{z} = Az - Bu, y(0) = x_0, z(0) = 0$ для программных стратегий игроков $\begin{cases} u = u(t) \in \Omega \\ v = v(t) \in Q \end{cases}$, $J(u, v) = (y(t_k) - z(t_k))^T(y(t_k) - z(t_k))$, тогда можно провести **редукцию к геометрической игре**:

$D_v = \{y(t_k) | v \in V\}$, $D_u = \{z(t_k) | u(\cdot) \in U\}$, т.е. получится выпуклое замкнутое множество, посмотрим, как выглядит функционал в двумерном случае (Рис. 23):

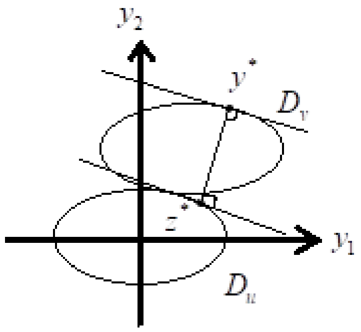


Рис. 23

Тогда получается $J(u, v) = (y(t_k) - z(t_k))^T(y(t_k) - z(t_k)) = \rho^2(y, z)$ - расстояние между двумя точками, где $y \in D_v, z \in D_u$. Перепишем игру в виде

$\max\limits_{y\in D_v} \min\limits_{z\in D_u} \rho(y, z) = \rho_0(y^0, z^0)$, а верхнее значение игры $\min\limits_{z\in D_u} \max\limits_{y\in D_v} \rho(y, z) = \rho^0(y', z')$. В задаче тестирования этой геометрической игры оптимальное поведение игроков существует только в случае наличия **седловой точки игры,** когда $\rho^0 = \rho_0$. Получается, что только в случае седловой точки в игре, обоим игрокам не выгодно отклоняться от стратегии. Для того, чтобы задачу тестирования решить, нужно решить геометрическую игру, проверить существует ли седловая точка и тогда использовать это решение для тестирования.

Пусть есть геометрическая игра, и покажем, что всегда $\rho_0(y^0, z^0) \le \rho^0(y^*, z^*)$. Зафиксируем $\forall y' \in D_v$, тогда $\forall z \in D_u$: $\max\limits_{y' \in D_v} \rho(z, y') \ge \max\limits_{y' \in D_v}\min\limits_{z \in D_u} \rho(z, y') = \rho_0$, откуда $\rho^0 = \min\limits_{z \in D_u}\max\limits_{y' \in D_u} \rho(z, y') \ge \rho_0$, значит всегда $\rho^0 \ge \rho_0$.

Теперь нужно выяснить существует ли седловая точка в этой геометрической игре, для можно воспользоваться следующим результатом.

**Лемма 1.** Пусть $(y^*, z^*)$ - седловая точка, если $\exists\, maxmin, \exists\, minmax$и выполнено неравенство $\rho_0(y^0, z^0) \ge \rho(y, z^0), \forall y \in D_v$.

Пусть некоторая пара даёт нам седловую точку (Рис. 23). Чтобы проверить существует ли она, можно воспользоваться первым критерием, что касательные к множествам достижимости будут параллельны. А по второму критерию нужно найти $\max\limits_{y' \in D_v}\min\limits_{z \in D_u} \rho(y, z)$ , т.е. нужно выбрать максимальную проекцию на множество достижимости. Если все точки $y_i$ окажутся внутри сферы радиуса $\rho_0$, то седловая точка существует.

$\rho(y^0, z^0) = \rho_0$ - нижнее значение игры, а чтобы найти седловую точку, можно рассмотреть итерационный процесс, который будет искать седловую точку. Сначала найти максимально удалённую точку от начала координат (задача Булгакова для линейной системы), потом найти проекцию этой точки на $D_u$, а после найти опять решить задачу Булгакова, но относительно точки $z^0$ и т.д. В конце концов процесс сойдётся к седловой точке.

Таким образом, структуру решения задачи тестирования можно представить так:

1) Решается задача на поиск $\max\limits_{v(\cdot) \in V}\min\limits_{u(\cdot) \in U} J(u, v) = J_0(u^0, v^0)$ путём сведения к геометрической игре. В случае, когда существует седловая точка получается, что $J_0(u^0, v^0) \le J(\tilde{u}, v^0) = \tilde{J}$ для системы $\dot{x} = Ax + B\tilde{u} + Cv^0$, где $J_0(u^0, v^0)$ - «отличный результат», $v^0(t)$ - наихудшее возмущение. Можно вычислить критерий $\tilde{J} = J(\tilde{u}, v^0)$, промоделировав нашу системы, где $v^0(t)$ - тестовые возмущения.

2) Вычисление $\tilde{J} = J(\tilde{u}, v^0)$ путём тренировок на стенде.

3) $\left[\frac{J_0}{\tilde{J}} \cdot 10\right]$ - оценка по 10-балльной шкале.

При отсутствии седловой точки, получается отношение maxmin к minmax.

В таком случае равно можно применять эту схему, но тогда получится схема жёсткого тестирования, т.е. никакой алгоритм не может получить хорошей оценки. Можно перейти к смешанным стратегиям тестирования, когда вместо функционал используется мат. ожидания и тогда по вероятности выбора различных критериев оказывается, что в смешанных стратегиях всегда существует седловая точка.

Данное тестирование очень важно в тех ситуациях, когда высокий риск, где нельзя ошибиться, поэтому приходится на наихудший возможной случай.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ