

Проведенное рассмотрение показывает, что обратные задачи аналитической механики можно трактовать как задачи построения замкнутых систем автоматического управления с обратными связями. Конечно, при постановке этих задач их авторы не вкладывали в их содержание такой физической основы. Тем не менее они допускают, и вполне правомерно, такую интерпретацию и по их формулировке, и по их конечным результатам-решениям. В этом заключается методологическая ценность обратных задач аналитической механики.

Справедливости ради следует сказать, что понимание единства обратных задач аналитической механики и проблематики теории автоматического управления возникло не сразу. Должны были пройти десятилетия развития этой теории, нужно было разработать методы оптимального управления, осознать их истинную ценность, наконец, нужны были задачи автоматического управления системами чрезвычайной сложности, чтобы обратиться к новым идеям, на основе которых удастся построить более эффективные процедуры синтеза алгоритмов управления. Классические работы математиков и механиков по обратным задачам динамики явились источником таких идей и оказали большое влияние на формирование нового понимания задач теории автоматического управления.

§ 1.3. Обратные задачи механики управляемого полета

Как уже отмечалось в § 1.1, первые задачи этого класса были связаны с изучением динамики точки переменной массы. Дальнейшее развитие таких задач проводилось применительно к проблематике управления пространственным движением летательных аппаратов. Если задачи динамики точки переменной массы являются одномерными (в них требуется определить закон изменения массы), то задачи управления летательными аппаратами многомерны; здесь отыскиваются по меньшей мере три управляющие функции: тяга двигателей, угол атаки и крен аппарата, либо — тяга двигателей и составляющие перегрузки. Рассмотрим коротко эти задачи.

1.3.1. Обратные задачи динамики точки переменной массы. По свидетельству А. А. Космодемьянского [1.8, 1.9], «постановка обратных задач динамики точки переменной массы принадлежит И. В. Мещерскому, который первый формулировал этот класс задач и показал несколько простых случаев их решения». С 1897 г., когда была опубликована работа И. В. Мещерского [1.10], задачи динамики точки переменной массы рассматривались многими авторами. Однако интерес к ним стал особенно большим в период развития ракетной техники.

В 40-х годах были опубликованы результаты исследований советских ученых по изучению экстремальных задач дина-

мики точки переменной массы. В качестве математической модели управляемого движения принимались уравнения И. В. Мещерского. В координатной форме эти уравнения записываются следующим образом (в случае плоского движения):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x - V \frac{dm}{dt} \frac{\dot{x}}{v}, \\ m\ddot{y} &= F_y - V \frac{dm}{dt} \frac{\dot{y}}{v}. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Здесь x, y — координаты точки; $m, \frac{dm}{dt}$ — масса и скорость ее изменения; V — скорость излучаемых частиц; F_x, F_y — проекции равнодействующей внешних сил. Кроме того, $v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$ — модуль скорости движения точки.

А. А. Космодемьянский [1.8, 1.9] называет обратными «задачи динамики точки переменной массы, в которых по заданным внешним силам и заданному закону движения определяется закон изменения массы, обеспечивающий заданное движение». В случае математической модели (1.3.1) для постановки обратной задачи динамики необходимо задать составляющие F_x, F_y внешних сил и закон движения точки, например, в виде функций $x(t), y(t)$. Определению подлежит программа изменения массы точки $m(t)$ во времени.

Первые экстремальные задачи динамики точки переменной массы были изучены А. А. Космодемьянским [1.11]. В простейшей постановке задачи назначается закон изменения массы $m(\alpha, t)$ в виде функции времени t и некоторого параметра α . После интегрирования уравнений движения (1.3.1) при заданных начальных условиях определяются функции $x(t, \alpha), y(t, \alpha)$, характеризующие закон движения точки. Неизвестный параметр α определяется затем из условия достижения наибольшей высоты подъема, наибольшей горизонтальной дальности или каких-либо других условий, характеризующих траекторию движения. Другой подход, развитый в [1.11], сводится к решению вариационных задач отыскания закона изменения массы $m(t)$ для случая, когда требуется реализовать движение точки по прямой. В данном случае мы имеем пример непосредственной постановки и решения *обратной задачи*: задается траектория движения (прямолинейная), отыскивается закон изменения массы, при котором эта траектория реализуется.

В 1946 г. Д. Е. Охочимский получил решение задачи определения скорости движения точки в зависимости от закона изменения ее массы [1.13]. Это оказалось возможным в результате построения дифференциального уравнения в вариациях по дифференциальному уравнению вертикального подъема. При этом в качестве независимой переменной здесь выступает масса.

В итоге дело сводится к решению линейного дифференциального уравнения в вариациях без интегрирования дифференциального уравнения движения.

Рассматривая развитие обратных задач динамики точки переменной массы, следует указать работу [1.14], в которой изучена задача определения программы изменения массы точки из условия реализации заданного закона ее движения по какой-либо одной координате. Применительно к математической модели (1.3.1) существом этой задачи представляется следующим образом. Назначается закон движения точки по одной какой-либо координатной оси в виде функции времени и некоторого параметра a . Пусть это будет координата $x = x(t, a)$. При заданном законе $x(t, a)$ из системы (1.3.1) определяется закон движения точки по второй координате $y(t, a)$, а также дифференциальное уравнение относительно массы. Функции $x(t, a)$, $y(t, a)$, $m(t, a)$ содержат неизвестный параметр a . Он может быть найден из условия достижения экстремального значения какой-либо характеристики движения (высота подъема, дальность и др.).

В [1.14] эта процедура названа «полуобратным методом». По существу же здесь можно усмотреть в явном виде схему формулировки и решения обратной задачи динамики, хотя и в ограниченной постановке.

Формулировка и решение обратных задач динамики точки переменной массы в общем случае принадлежит А. А. Космодемьянскому [1.8, 1.9, 1.12]. Рассмотрим вначале задачу осуществления прямолинейной траектории. Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на прямую, по которой совершается движение, записывается так:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - Q_1 - \frac{dm}{dt} V, \quad (1.3.2)$$

где g — ускорение силы тяжести, Q_1 — сила сопротивления среды. Другие обозначения соответствуют (1.3.1). Следуя [1.9], примем

$$m(t) = m_0 f(t), \quad Q_1 = m_0 Q(v, s). \quad (1.3.3)$$

Здесь m_0 — начальное значение массы точки; $f(t)$ — неизвестная функция, которая подлежит определению; $Q(v, s)$ — функция, характеризующая закон изменения силы сопротивления в зависимости от скорости v и координаты s . С учетом (1.3.3) дифференциальное уравнение (1.3.2) принимает вид

$$f(t) \frac{dv}{dt} = -g(s) f(t) - Q(v, s) - \frac{df(t)}{dt} V. \quad (1.3.4)$$

Задача ставится следующим образом. Задан закон изменения координаты $s(t)$; известна функция $Q(v, s)$, определяющая характер изменения внешней силы сопротивления Q_1 . Требуется

найти закон изменения массы, т. е. функцию $f(t)$, из условия реализации закона движения $s(t)$.

Процедура решения задачи заключается в следующем. Поскольку функция $s(t)$ известна, то дифференцированием находим

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}, \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt}.$$

Далее, так как s, v известны, то $g(s)$ и $Q(v, s)$ будут известными функциями времени t . Следовательно, уравнение (1.3.4) будет содержать только одну функцию $f(t)$, которая является искомой. Выполняя необходимые преобразования, на основании (1.3.4) можно получить дифференциальное уравнение

$$\frac{df(t)}{dt} + pf(t) + q = 0. \quad (1.3.5)$$

Здесь приняты обозначения

$$p(t) = \frac{1}{V} \left(\frac{dv}{dt} + g \right), \quad q(t) = \frac{Q}{V}.$$

Общее решение уравнения (1.3.5) имеет вид

$$f(t) = e^{-\int p dt} \left[c - \int q e^{\int p dt} dt \right]. \quad (1.3.6)$$

Соотношение (1.3.6) позволяет получить решения обратных задач динамики для прямолинейных траекторий в самом общем случае. Действительно, задавая выражение $Q(v, s)$ для удельной силы сопротивления, назначая закон изменения $s(t)$, можно вычислить $p(t)$, $q(t)$. Затем по формуле (1.3.6) можно найти $f(t)$, т. е. закон изменения массы.

Аналогично изложенному решаются обратные задачи динамики для криволинейных траекторий движения точки. В таком случае уравнение движения удобно записывать в проекциях на оси естественного трехгранника. Следуя [1.9], рассмотрим плоское движение, принимая в качестве исходных дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -mg \sin \theta - Q_1 - \frac{dm}{dt} V_s \\ m \frac{v^2}{r} &= mg \cos \theta + N_1. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Обозначения в (1.3.7) соответствуют рис. 1.3. Через N_1 обозначена величина нормальной реакции кривой; θ — угол наклона траектории к горизонту; r — радиус кривизны.

2 П. Д. Крутько

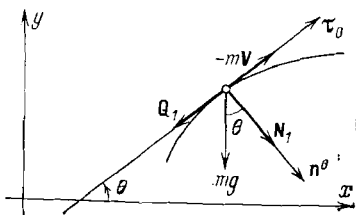


Рис. 1.3

Принимая для краткости

$$\frac{Q_1}{m_0} = Q, \quad \frac{N_1}{m_0} = N,$$

уравнения (1.3.7) можно привести к виду

$$\frac{df(t)}{dt} + f(t) \frac{\ddot{s}(t) + g \sin \theta}{V} + \frac{Q}{V} = 0, \quad (1.3.8)$$

$$N = -f(t) \left(v \frac{d\theta}{dt} - g \cos \theta \right), \quad (1.3.9)$$

поскольку справедливы кинематические соотношения

$$\frac{v^2}{r} = - \frac{v^2}{\left(\frac{ds}{d\theta} \right)} = -v \frac{d\theta}{dt}.$$

Уравнение (1.3.8) при заданном законе движения есть линейное дифференциальное уравнение относительно функции $f(t)$, определяющей закон изменения массы. Действительно, пусть задано уравнение траектории $y = \varphi(x)$ и закон движения точки по ней. Тогда по определению угла наклона траектории имеем:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \varphi'(x).$$

При этом составляющая скорости по горизонтальной оси

$$\dot{x} = v \cos \theta = \dot{s} \sqrt{\frac{1}{1 + [\varphi'(x)]^2}}, \quad \varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Поскольку $s(t)$ задано, то находим далее:

$$\dot{s} dt = dx \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}. \quad (1.3.10)$$

Интегрируя (1.3.10), можно определить $x(t)$. Следовательно, по известным $x(t)$, $\varphi'(x)$ определяется функция $\theta = \theta(t)$.

Таким образом, оказывается, что в уравнении (1.3.8) известны все элементы и оно может быть проинтегрировано. Это дает

$$f(t) = e^{-\int \beta(t) dt} \left[c - \int \frac{Q}{V} e^{\int \beta(t) dt} dt \right], \quad (1.3.11)$$

где известная функция времени

$$\beta(t) = \frac{\ddot{s}(t) + g \sin \theta}{V}.$$

Формула (1.3.11) определяет закон изменения массы, при котором реализуется движение по назначенной траектории. Зная $f(t)$, можно найти величину реакции N кривой для каждого

момента времени. Для этого необходимо воспользоваться равенством (1.3.9).

Соотношение (1.3.11) решает обратные задачи динамики точки для криволинейных движений в самом общем случае задания траекторий на плоскости. Аналогичным образом можно найти соответствующие решения в случае пространственных криволинейных движений.

В рассмотренной задаче примечательным является то обстоятельство, что при ее постановке задается уравнение траектории $y = \varphi(x)$ и закон движения по этой траектории $s(t)$. По этой информации с учетом уравнений движения строится закон изменения управляющего параметра, т. е. массы $m(t)$. Таким образом, здесь можно видеть в полном объеме обратную задачу динамики, содержанием которой является построение программного управления: по заданной траектории и характеристикам движения синтезируется программа изменения массы $m(t)$ во времени.

Обсуждаемые результаты были получены в конце 40-х и начале 50-х годов [1.12]. В дальнейшем обратные задачи динамики точки переменной массы рассматривались многими авторами и в различных постановках применительно к задачам управления движением ракет и искусственных спутников Земли. Мы, однако, не будем обсуждать другие работы этого направления, поскольку процесс возникновения и развития концепций обратных задач динамики точки переменной массы исчерпывающе характеризуется цитированными работами.

1.3.2. Обратные задачи динамики управляемого полета. Задачи управления пространственным движением летательных аппаратов существенно сложнее как по содержанию, так и по процедуре их решения по сравнению с задачами управления движением точки переменной массы. Это обусловлено более высокой размерностью математических моделей движения летательных аппаратов и их нелинейным характером. Задачи этого класса оказались недоступными для известных методов классического вариационного исчисления, а также для методов современной теории оптимального управления, таких как динамическое программирование Р. Беллмана и принцип максимума Л. С. Понтрягина. Их решение оказалось возможным только численными методами на основе применения ЭВМ высокой производительности. Причем выяснилось, что нельзя построить универсальную процедуру, пригодную для решения целого класса оптимизационных задач динамики управляемого полета. Особенности каждой конкретной задачи требовали разработки своей процедуры численного решения. Значительный вклад в разработку численных алгоритмов такого назначения внесли Т. М. Энеев, Л. И. Шатровский, Н. Н. Моисеев, Ф. Л. Черноусько, П. С. Краснощеков, В. В. Федоров и многие другие. Обшир-

ную библиографию по работам этого направления можно найти в [1.15—1.20].

Наиболее эффективные процедуры построения управлений в динамике полета основаны на концепциях обратных задач динамики управляемого движения. Такие процедуры, как установлено их многочисленными практическими применениями, обладают наибольшей степенью универсальности. Разработка практических алгоритмов решения краевых задач в динамике полета летательных аппаратов принадлежит В. Т. Тараненко.

Идею построения таких алгоритмов мы рассмотрим применительно к решению краевой задачи вывода летательного аппарата в назначенную точку фазового пространства. Следуя [1.21], будем рассматривать математическую модель движения такого вида:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g(n_{x1} - \sin \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{v}(n_{y1} \cos \gamma - \cos \theta), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{g}{v \cos \theta} n_{y1} \sin \gamma; \\ \frac{dx}{dt} &= v \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{dz}{dt} = -v \cos \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

В этих уравнениях обозначено: v — модуль воздушной скорости движения летательного аппарата; n_{x1} , n_{y1} — составляющие перегрузки по осям x_1 , y_1 связанной системы координат; они определяются по формулам

$$\begin{aligned} n_{x1} &= \frac{1}{mg} [P \cos(\alpha + \alpha_0) - Q], \\ n_{y1} &= \frac{1}{mg} [P \sin(\alpha + \alpha_0) + v]. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

В (1.3.12) обозначено также γ , θ — углы крена и наклона траектории; m — масса аппарата; φ — угол поворота вектора скорости в горизонтальной плоскости. Кроме того, x , y , z — координаты центра масс летательного аппарата в земной системе.

В соотношениях (1.3.13) обозначено: P — тяга двигателей; α — угол атаки; $\alpha_0 = \text{const}$ — известный установочный параметр; Q — сила лобового сопротивления; g — ускорение силы тяжести.

Отметим, что в [1.21] задачи управления рассматриваются применительно к самолету с вертикальным взлетом и посадкой. Мы не будем концентрировать внимание на этих деталях, поскольку для нас важна методическая сторона формулировки и процедуры решения задачи. Что касается вида уравнений (1.3.12), то они являются общепринятыми и отражают динамику пространственного движения летательного аппарата любой схемы компоновки. Принимается при этом, что масса аппарата постоянна.

Обращаясь к уравнениям (1.3.12) и (1.3.13), отмечаем, что они содержат девять функций времени. Шесть из них: v , θ , φ ,

x, y, z характеризуют состояние управляемого объекта и являются фазовыми координатами. Остальные три: P, α, γ представляют собой управляющие функции, которые подлежат определению из условия достижения цели управления.

Задачу формулируем следующим образом. В начальный момент времени ($t=0$) состояние управляемой системы характеризуется совокупностью значений:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, & z(0) &= z_0; \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0, & \dot{y}(0) &= \dot{y}_0, & \dot{z}(0) &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Требуется найти управляющие функции $P(t), \alpha(t), \gamma(t)$, при которых летательный аппарат за время T перемещается из точки (1.3.14) в назначенную точку

$$\begin{aligned} x(T) &= x_T, & y(T) &= y_T, & z(T) &= z_T; \\ \dot{x}(T) &= \dot{x}_T, & \dot{y}(T) &= \dot{y}_T, & \dot{z}(T) &= \dot{z}_T. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Сформулированная задача представляет собой двухточечную граничную (краевую) задачу. Как уже отмечалось, современные методы не решают ее в аналитическом виде. Дополняя эту задачу каким-либо функционалом, заданным на движениях управляемой системы, можно было бы выписать условия экстремума этого функционала и построить численную процедуру решения краевой задачи. Так и поступают обычно, используя методы решения классических и неклассических задач. Существенно более эффективно краевые задачи могут быть решены на основе концепций обратных задач динамики. Рассмотрим эти вопросы, следуя методике [1.21].

Назначим траекторию движения летательного аппарата из точки (1.3.14) в точку (1.3.15) в виде функций времени $x^*(t), y^*(t), z^*(t)$. Предполагается, что эти функции дифференцируемы по t дважды и такие, что для них выполняются условия

$$\begin{aligned} x^*(0) &= x_0, & y^*(0) &= y_0, & z^*(0) &= z_0; \\ \dot{x}^*(0) &= \dot{x}_0, & \dot{y}^*(0) &= \dot{y}_0, & \dot{z}^*(0) &= \dot{z}_0, \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

и, кроме того, для заданной конечной точки

$$\begin{aligned} x^*(T) &= x_T, & y^*(T) &= y_T, & z^*(T) &= z_T; \\ \dot{x}^*(T) &= \dot{x}_T, & \dot{y}^*(T) &= \dot{y}_T, & \dot{z}^*(T) &= \dot{z}_T. \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Иначе говоря, назначенная траектория удовлетворяет граничным условиям (1.3.14), (1.3.15), что требуется по постановке задачи.

Итак, считая траекторию движения заданной функциями x^*, y^*, z^* , найдем управляющие функции $P(t), \alpha(t), \gamma(t)$, при которых эта траектория реализуется. В соответствии с процедурой

решения обратных задач динамики искомые управляющие функции могут быть найдены в результате подстановки $x^*(t)$, $y^*(t)$, $z^*(t)$ в уравнения движения (1.3.12) вместо $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и последующего исключения промежуточных переменных. Выполним необходимые преобразования, считая, что в любой момент времени выполняются равенства

$$x(t) = x^*(t), \quad y(t) = y^*(t), \quad z(t) = z^*(t), \quad t > 0. \quad (1.3.18)$$

Задание траектории движения в виде функций (1.3.18) означает, что в каждый момент времени определены их производные. Следовательно, на основании последних трех уравнений (1.3.12) можно найти

$$\sin \theta = \frac{\dot{y}}{v}, \quad \sin \varphi = -\frac{\dot{z}}{v \cos \theta}, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (1.3.19)$$

Дифференцируя по времени выражение для квадрата скорости, получим

$$\frac{1}{2v} \frac{d}{dt} (v^2) = \frac{1}{v} (\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}). \quad (1.3.20)$$

Из первых двух равенств (1.3.19) имеем

$$\theta(t) = \arcsin \left(\frac{\dot{y}}{v} \right), \quad \varphi(t) = \arcsin \left(-\frac{\dot{z}}{v \cos \theta} \right). \quad (1.3.21)$$

Таким образом, выражения (1.3.20) и (1.3.21) определяют три переменные состояния через известные функции. Следовательно, функции $\dot{v}(t)$, $\dot{\theta}(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ можно считать известными. Для определения перегрузок n_{x1} , n_{y1} и угла крена γ из первых трех уравнений (1.3.12) удобнее иметь выражения для производных $\dot{\theta}(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$. Они оказываются равными:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v\ddot{y} - \dot{v}\dot{y}}{v^2 \cos \theta}, \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{\cos^2 \varphi (\ddot{x}\dot{x} - \dot{z}\dot{x})}{\dot{x}^2}. \quad (1.3.22)$$

Считая известными \dot{v} , $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, из первых трех уравнений (1.3.12) можно найти

$$n_{x1} = \sin \theta + \frac{\dot{v}}{g}, \quad n_{y1} = \frac{1}{\cos \gamma} \left(\frac{v}{g} \dot{\theta} + \cos \theta \right),$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\dot{\varphi} \cos \theta}{\dot{\theta} + \frac{g}{v} \cos \theta}. \quad (1.3.23)$$

Последнее выражение (1.3.23) непосредственно определяет одну управляющую функцию $\gamma(t)$. Две другие управляющие функции $P(t)$ и $\alpha(t)$ могут быть найдены из соотношений (1.3.13), по-

скольку все входящие в них величины известны. Из этих соотношений имеем

$$P(t) = \sqrt{R_1^2(t) + R_2^2(t)}, \quad R_1 = mgn_{x1} + Q, \quad R_2 = mgn_{y1} - v \quad (1.3.24)$$

и, кроме того,

$$\alpha(t) = \arcsin \left(\frac{R_2(t)}{P(t)} \right) - \alpha_0. \quad (1.3.25)$$

Следовательно, полученные соотношения для управляющих функций $P(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ решают сформулированную задачу вывода летательного аппарата в назначенную точку (1.3.15). Существенно при этом, что выражения для управляющих функций получены в замкнутой форме в результате выполнения конечного числа операций без интегрирования уравнений движения летательного аппарата. Это оказалось возможным вследствие того, что обсуждаемая краевая задача сформулирована как обратная задача динамики.

Для рассматриваемой системы уравнений движения (1.3.12) управляющие функции удастся найти в аналитическом виде. Для систем другого вида может оказаться, что какие-либо переменные состояния не могут быть найдены в явном виде и для их определения требуется применить численные процедуры. В таких случаях решение обратной задачи будет содержать расчетные соотношения в виде аналитических формул и соответствующие алгоритмы для численного решения некоторых уравнений.

Характеризуя рассмотренную задачу синтеза управляющих функций, можно сказать, что она полностью соответствует концепциям обратных задач динамики: управляющие функции отыскиваются из условия, чтобы движение центра масс летательного аппарата проходило по назначенной траектории, определяемой функциями x^* , y^* , z^* . Следовательно, в методическом отношении обратные задачи динамики управляемого полета летательного аппарата не отличаются от обратных задач динамики точки переменной массы. В первом случае мы имеем дело с системой более высокой размерности и с большим числом управляющих функций.

Дальнейшее развитие техники решения краевых задач в динамике управляемого полета было связано с разработкой оптимизационных алгоритмов. При этом методической основой таких алгоритмов явилась процедура построения управляющих функций по методу обратных задач. Необходимость оптимизации диктуется тем, что задание траектории движения функциями x^* , y^* , z^* не может быть произвольным. Дело в том, что конкретная краевая задача по управлению летательным аппаратом сопровождается условием, при котором какой-либо показатель (критерий) принимает экстремальное значение. Например, достижение

назначенной точки происходит с минимальным расходом горючего или за минимальное время и т. д. Следовательно, функции x^* , y^* , z^* , определяющие траекторию движения, должны допустить возможность их варьирования. Практически их принимают в виде линейной комбинации некоторых функций известного вида, а свободными (варьируемыми) оставляют числовые параметры таких линейных комбинаций. В общем виде поэтому можно записать

$$x^* = x^*(t, \mathbf{p}), \quad y^* = y^*(t, \mathbf{q}), \quad z^* = z^*(t, \mathbf{r}), \quad (1.3.26)$$

где \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{r} — векторы параметров. Определяя траекторию движения в виде (1.3.26), в процессе решения задачи нужно найти такие \mathbf{p}^* , \mathbf{q}^* , \mathbf{r}^* , при которых заданный функционал принимает экстремальное значение (минимум времени, минимум расхода горючего и т. д.). Синтез управляющих функций при таком условии составляет содержание оптимизационного алгоритма для краевой задачи динамики управляемого полета.

Имеется и другое обстоятельство, в силу которого траектория, соединяющая начальную и конечную точки, не может быть задана произвольно. Оно связано с тем, что летательный аппарат обладает вполне конкретными летно-техническими характеристиками, к числу которых относятся: допустимое значение нормальной перегрузки, предельное значение тяги двигательной установки, критические значения угла атаки и др. В связи с этим решение задачи по синтезу управляющих функций должно проводиться на таких траекториях, которые физически реализуемы для конкретного летательного аппарата, обладающего определенными характеристиками как управляемый объект. Следовательно, оптимизационная задача должна решаться с учетом ограничений на параметры и управляющие функции.

Многомерность задачи, нелинейность математической модели, наличие многих ограничений есть те факторы, которые делают затруднительным ее решение известными методами теории оптимальных систем (вариационное исчисление, динамическое программирование, принцип максимума). Между тем синтез управляющих функций на основе концепций обратных задач динамики в данной постановке выполняется без затруднений. Структурная схема, отражающая процедуру оптимизации, приведена на рис. 1.4.

Вычислительный процесс проходит в такой последовательности. Для некоторых начальных значений параметров \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{r} , входящих в (1.3.26), формируются функции x^* , y^* , z^* , определяющие траекторию движения. Затем по соотношениям вида (1.3.24), (1.3.25) вычисляются значения управляющих функций и производится интегрирование дифференциальных уравнений движения (1.3.12). После вычисления $P(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ все элементы этих уравнений определены, что дает возможность вы-

числять переменные состояния управляемого объекта. На каждом шаге интегрирования осуществляется проверка ограничений, наложенных на параметры движения и управляющие функции. Если окажется, что какое-либо ограничение не выполняется, то процесс интегрирования прекращается, производится изменение параметров p, q, r , формируется новое продолжение траектории x^*, y^*, z^* , и процедура возобновляется. Важно при этом, что при определении новой траектории в качестве начальной точки принимается та точка, которая предшествовала нарушению ограничения. Это позволяет сохранить и использовать при анализе те результаты, которые соответствуют допустимой части траектории. Такая процедура существенно сокращает объем вычислений при решении этой оптимизационной задачи.

В случае, когда на выбранной траектории движения выполняются ограничения, формируется заданный функционал и оценивается его значение (или в общем случае отыскивается экстремум). Если оказывается, что траектория соответствует экстремальному значению функционала, то задача решена. В противном случае вновь вычисляются новые значения параметров p, q, r и процесс повторяется. Причем новые значения p, q, r рассчитываются целенаправленно, из условия приближения числового значения функционала к точке экстремума.

Практические приемы организации вычислительного процесса, включая вопросы задания ограничивающих условий, поиска экстремума и другие, можно найти в [1.21]. Здесь мы ограничимся кратким изложением схемы решения оптимизационной краевой задачи, построенной на основе идей обратных задач динамики. Подчеркнем только еще раз ее особенность. Она заключается в том, что при таком подходе снимаются трудности, связанные с удовлетворением граничных условий на правом конце траектории. Это оказывается возможным благодаря тому, что назначаемая траектория выбирается такой, чтобы эти условия вида (1.3.16) и (1.3.17) заведомо выполнялись. Это обстоятельство в значительной степени упрощает численное решение краевой задачи.

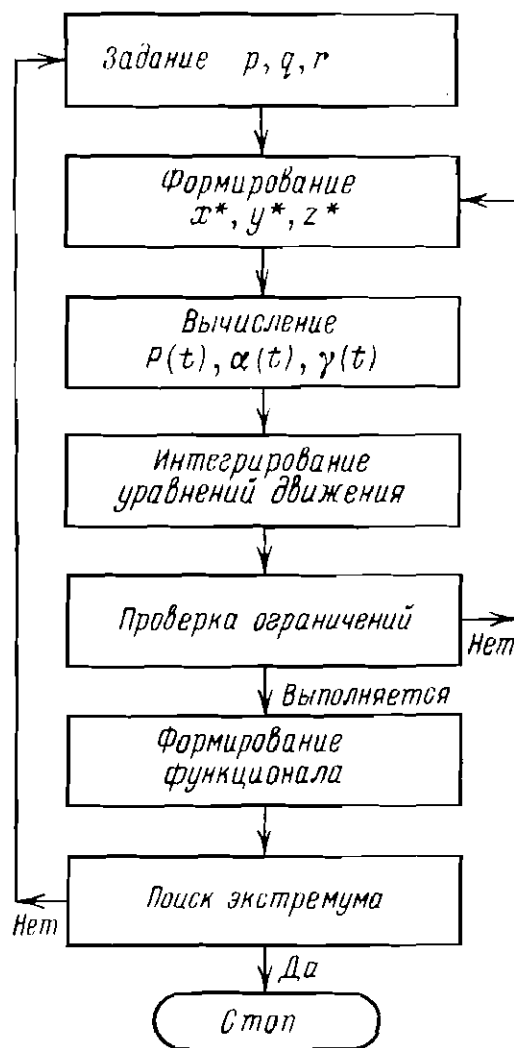


Рис. 1.4

1.3.3. Метод Ритца — Галеркина и обратные задачи динамики. Рассмотренные процедуры решения обратных задач динамики точки переменной массы и динамики управляемого полета с методической точки зрения базируются на применении метода Ритца — Галеркина. Впервые он был предложен Ритцем в 1908 г. для решения вариационных задач, а затем получил развитие в работе Б. Г. Галеркина (1915 г.) применительно к задачам, не связанным с вариационными проблемами. По определению [1,22] «этот метод является совершенно универсальным» и может быть применен для решения различных уравнений: обыкновенных, эллиптических, параболических и др., а также для решения граничных задач, связанных с вариационными проблемами. Чтобы проследить связь метода Ритца — Галеркина с процедурой решения обратных задач динамики, рассмотрим его применение для решения граничной (краевой) задачи обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть задано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t), \quad (1.3.27)$$

где $u(t)$ — некоторая функция. Коэффициенты a_0, a_1 известны; они могут быть постоянными либо функциями времени. Требуется найти такое решение $y(t)$ уравнения (1.3.27), для которого выполняются граничные условия:

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0; \quad y(t_1) = y_1, \quad \dot{y}(t_1) = \dot{y}_1. \quad (1.3.28)$$

Сформулированная задача есть граничная задача для обыкновенного дифференциального уравнения.

Будем искать ее приближенное решение по методу Ритца — Галеркина. Зададим функцию

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k \varphi_k(t), \quad (1.3.29)$$

где φ_k — известные линейно независимые функции; β_k — неизвестные коэффициенты, которые подлежат определению. Предполагается, что конструкция функций φ_k такова, что выполняются граничные условия (1.3.28). Способы выбора таких функций можно найти в [1.22].

Итак, принимая искомое решение граничной задачи известным в виде (1.3.29), найдем постоянные числа β_k такие, при которых функция (1.3.29) наилучшим образом приближается к решению уравнения (1.3.27). В качестве меры близости примем интеграл

$$J = \int_0^{t_1} \varepsilon^2(t) dt \quad (1.3.30)$$

от квадрата невязки $\varepsilon(t)$, определяемой следующим равенством:

$$\ddot{y}_n(t) + a_1 \dot{y}_n(t) + a_0 y_n(t) - u(t) = \varepsilon(t). \quad (1.3.31)$$

Если в (1.3.31) подставить выражения для $y_n(t)$ из (1.3.29), то ε будет функцией параметров β_k . Следовательно, значение интеграла J также будет определяться значениями β_1, \dots, β_n . Если коэффициенты β_k найти из уравнений

$$\frac{\partial J(\beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial \beta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

то функция $y_n(t)$ будет наилучшим решением рассматриваемой граничной задачи в смысле минимума интеграла (1.3.30).

Определим векторы

$$\beta^T = \|\beta_1 \dots \beta_n\|, \quad \psi^T(t) = \|\psi_1 \dots \psi_n\|,$$

где функции

$$\psi_k(t) = \ddot{\varphi}_k(t) + a_1 \dot{\varphi}_k(t) + a_0 \varphi_k(t).$$

С учетом принятых обозначений

$$\varepsilon(t) = \beta^T \psi(t) - u^2(t),$$

$$\varepsilon^2(t) = \psi^T(t) \beta \beta^T \psi(t) - 2u(t) \beta^T \psi(t) + u^2(t).$$

Следовательно, интеграл

$$J(\beta) = \int_0^{t_1} [\psi^T(t) \beta \beta^T \psi(t) - 2u(t) \beta^T \psi(t) + u^2(t)] dt.$$

Отсюда получаем уравнение для искомых параметров

$$\frac{dJ(\beta)}{d\beta} = \int_0^{t_1} \psi(t) \psi^T(t) dt \cdot \beta - \int_0^{t_1} u(t) \psi(t) dt = 0. \quad (1.3.32)$$

При сделанных предположениях относительно функций φ_k матрица $\psi(t) \psi^T(t)$ есть матрица Грама, для которой $\det \|\psi(t) \psi^T(t)\| \neq 0$. На этом основании из (1.3.32) находим вектор параметров

$$\beta = \left(\int_0^{t_1} \psi(t) \psi^T(t) dt \right)^{-1} \int_0^{t_1} u(t) \psi(t) dt, \quad (1.3.33)$$

которые делают приближенное решение $y_n(t)$ наилучшим в указанном смысле.

Таким образом, метод Ритца — Галеркина основан на том, что задается вид решения в классе известных функций. Это решение заведомо удовлетворяет граничным условиям задачи, а параметры вычисляются из какого-либо дополнительного условия. В рассмотренном случае таким дополнительным условием

является требование минимума интеграла (1.3.30). В задачах с конкретным физическим содержанием вычисление параметров, входящих в формулу решения, проводится в результате отыскания экстремумов функционалов, отражающих физическое существо задачи.

Сравнивая процедуру решения краевой задачи по методу Ритца — Галеркина и рассмотренные обратные задачи динамики точки переменной массы и динамики управляемого полета, можно заметить, что им присуща одна и та же методическая основа: решение задачи отыскивается в классе известных функций, при этом параметры решения (или траектории) определяются из дополнительных требований. С этой точки зрения можно говорить, что решение обратных задач динамики, рассмотренных в этом параграфе, основано на применении идей метода Ритца — Галеркина.

§ 1.4. Концепции обратных задач динамики и классические задачи теории автоматического управления

Как уже отмечалось, обратные задачи вышли за пределы аналитической механики и составили методическую основу решения прикладных задач об управлении движением динамических систем. Изменилось, естественно, и содержание обратных задач динамики. Например, в [1.3] дано следующее определение: обратными задачами динамики называются задачи определения активных сил и моментов, приложенных к механической системе, параметров системы и дополнительно наложенных на нее связей, при которых движение с заданными свойствами является одним из возможных движений рассматриваемой механической системы. Как видно, это определение обратных задач динамики значительно шире, чем оно было сформулировано Г. К. Суловым [1.2].

Не подвергая сомнению правомерность приведенного в [1.3] определения обратных задач динамики, отметим, что оно отнесено к механическим системам. Между тем область приложения концепций обратных задач динамики наряду с механическими системами включает также управляемые объекты электромеханической, электрической, квантовой, химической и др. природы. Поэтому применительно к проблематике управления понятие обратных задач динамики следует определять шире и безотносительно к природе управляемых систем.

Представляется, что *содержание обратных задач динамики должно включать определение законов управления движением динамических систем и их параметров из условия осуществления движения по назначенной траектории*. В таком случае область приложения обратных задач динамики не ограничивается

задачами управления механическими системами, а охватывает управление системами всех видов, которые по определению относятся к *динамическим системам*. При этом понятие закона управления также относится к динамическим системам любого вида: в случае механических систем закон управления характеризует (определяет) закон изменения управляющих сил и моментов; в случае электрических систем — закон изменения управляющих токов и напряжений; в случае химических систем — закон изменения концентраций катализаторов химических реакций и т. д.

Наконец, приведенное определение обратных задач динамики включает также задачу отыскания параметров динамической системы, при которых ее движение проходит желаемым образом, или иначе, при которых система обладает желаемыми динамическими свойствами.

Определение закона управления движением динамической системы составляет содержание структурного синтеза системы автоматического управления. Напротив, определение параметров динамической системы есть задача параметрического синтеза, при этом структура системы предполагается известной. Обе эти задачи относятся к числу основных в теории автоматического управления. Они возникли одновременно с зарождением теории управления, и в этом смысле их можно назвать классическими.

Рассмотрим, каким образом эти классические задачи теории автоматического управления связаны с концепциями обратных задач динамики.

1.4.1. Параметрическая оптимизация динамической системы по интегральным квадратичным оценкам как обратная задача динамики. В 40-х годах в работах А. А. Красовского [1.23—1.28] были введены интегральные квадратичные оценки для характеристики качества систем автоматического регулирования. Эти оценки нашли широкое применение для расчета параметров систем с заданной структурой, а также для определения структуры замкнутых систем на основе решения соответствующей оптимизационной задачи. Здесь мы рассмотрим первую задачу о параметрическом синтезе и укажем на ее связь с содержанием обратной задачи динамики.

Пусть состояние системы характеризуется выходной переменной $x(t)$ и ее производными $\dot{x}(t)$, ..., $x^{(n-1)}(t)$. Предполагается, что порядок системы равен n . Пусть в начальный момент

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.4.1)$$

Примем, что собственное движение системы асимптотически устойчиво. Тогда при $t \rightarrow \infty$ система стремится к положению равновесия:

$$x(t) \rightarrow 0, \quad x^{(v)}(t) \rightarrow 0, \quad v = 1, \dots, n-1. \quad (1.4.2)$$

По определению [1.23—1.25] интегральными квадратичными оценками рассматриваемой системы являются:

$$J_0 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt$$

— оценка нулевого порядка,

$$J_1 = \int_0^{\infty} (x^2(t) + \tau_1^2 \dot{x}^2(t)) dt$$

— оценка первого порядка,

$$J_n = \int_0^{\infty} [x^2(t) + \tau_1^2 \dot{x}^2(t) + \dots + \tau_n^{2n} (x^{(n)}(t))^2] dt$$

— оценка порядка n . Величины τ_1, \dots, τ_n постоянны и имеют размерность времени.

Для вычисления интегральных квадратичных оценок разработаны различные приемы и способы; их можно найти в [1.26—1.28], а также в учебной литературе по теории автоматического регулирования. На этих вопросах мы не останавливаемся, так как для нас важна идея применения интегральных квадратичных оценок для определения параметров систем заданной структуры. Эта задача формулируется следующим образом.

Задана структура динамической системы; некоторые параметры системы являются варьируемыми, а остальные должны оставаться неизменными. Требуется найти такие значения варьируемых параметров, при которых реализуется минимум какой-либо интегральной квадратичной оценки.

Сформулированная задача называется задачей параметрической оптимизации динамической системы. Найденные в результате ее решения параметры именуются оптимальными, а систему с такими параметрами называют оптимальной по переходному процессу.

Применительно к задачам автоматического управления параметрическая оптимизация проводится, например, для систем следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j(t) + b_s u(t), \quad s = 1, \dots, n; \\ u(t) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i(t), \quad k \leq n. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Здесь x_s — координаты состояния управляемой системы; u — управляющая функция. Параметры a_{sj}, b_s характеризуют динамику системы, они не подлежат изменению. Параметры α_i пред-

ставляют собой коэффициенты усиления обратных связей, они относятся к числу варьируемых параметров системы и подлежат определению.

Схема решения задачи параметрической оптимизации в аналитической форме такова. Пусть α_i есть те параметры, которые необходимо определить из условия реализации минимума принятой интегральной квадратичной оценки J_m . Выражение для оценки $J_m = J_m(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ содержит неизвестные параметры α_i . Оптимальные значения параметров определяются из уравнений $\partial J_m / \partial \alpha_i = 0$. Практически параметрическая оптимизация проводится по численным алгоритмам, так как в аналитическом виде решение может быть получено в простейших случаях. Выражения для $J_m(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ оказываются громоздкими, а уравнения для оптимальных параметров нелинейными.

Задача параметрической оптимизации системы по интегральным квадратичным оценкам непосредственно связана с идеями обратных задач динамики. Чтобы убедиться в этом, достаточно изучить свойства экстремалей, которые составляют минимум интегральных оценок, принимаемых в качестве меры качества оптимизируемых систем.

Обратимся к оценке J_n и найдем такую функцию $x(t)$, которая удовлетворяет граничным условиям (1.4.1), (1.4.2) и доставляет минимум интегралу J_n . Это есть задача классического вариационного исчисления. Обозначим через $F(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})$ подынтегральное выражение в J_n . Тогда согласно теории вариационного исчисления [1.29] необходимое условие экстремума (минимума) интеграла J_n будет иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} \right) = 0. \quad (1.4.4)$$

Это дифференциальное уравнение называется уравнением Эйлера — Пуассона. С учетом выражения для $F(x, \dots, x^{(n)})$ можно найти

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial x^{(s)}} = 2\tau_s^{2s} x^{(s)}, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

и, кроме того,

$$\frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(s)}} \right) = 2\tau_s^{2s} x^{(2s)}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, уравнение (1.4.4) будет

$$x - \tau_1^2 \ddot{x} + \tau_2^4 x^{(IV)} + \dots + (-1)^n \tau_n^{2n} x^{(2n)} = 0. \quad (1.4.5)$$

Таким образом, экстремаль $x(t)$, на которой интеграл обращается в минимум, является решением дифференциального уравнения (1.4.5) порядка $2n$. При этом $x(t)$ должна удовлетворять

граничным условиям (1.4.1) и (1.4.2). Характеристическое уравнение, отвечающее (1.4.5), таково:

$$1 - \tau_1^2 p^2 + \tau_2^4 p^4 + \dots + (-1)^n \tau_n^{2n} p^{2n} = 0.$$

Оно обладает тем свойством, что его корни попарно симметричны относительно начала координат комплексной плоскости p , т. е. корням p_1, \dots, p_n соответствуют корни $p_{n+1} = -p_1, \dots, p_{2n} = -p_n$. На этом основании решение (1.4.5) можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{v=0}^n (c_v e^{-p_v t} + c_{n+v} e^{p_{n+v} t}), \quad (1.4.6)$$

где постоянные c_v, c_{n+v} должны быть такими, чтобы выполнялись граничные условия.

Пусть для определенности корни таковы, что

$$\operatorname{Re}(-p_v) < 0, \quad \operatorname{Re}(p_{n+v}) > 0, \quad v = 1, \dots, n.$$

В этом случае постоянные c_{n+v} в (1.4.6) должны быть равными нулю в силу того, что согласно (1.4.2) при $t \rightarrow \infty$ функция $x(t)$ и ее производные стремятся к нулю. Таким образом, выражение для экстремали (обозначим ее $x^*(t)$) должно быть

$$x^*(t) = c_1 e^{-p_1 t} + \dots + c_n e^{-p_n t}. \quad (1.4.7)$$

Однако известно, что $x^*(t)$, определяемая формулой (1.4.7), есть решение одного дифференциального уравнения n -го порядка

$$\frac{d^n x^*(t)}{dt^n} + \gamma_{n-1} \frac{d^{n-1} x^*(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \gamma_1 \frac{dx^*(t)}{dt} + \gamma_0 x^*(t) = 0. \quad (1.4.8)$$

Коэффициенты $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ этого уравнения однозначно выражаются через корни $-p_v$ по формулам Виета.

Отметим, что начальными условиями для уравнения (1.4.8) являются (1.4.1).

Из проведенного анализа следует, что экстремаль $x^*(t)$ интеграла J_n при граничных условиях (1.4.1), (1.4.2) является решением однородного дифференциального уравнения (1.4.8), порядок которого равен порядку оптимизируемой системы. На этом основании заключаем следующее: параметрическая оптимизация системы по критерию минимума интегральной квадратичной оценки J_n выполняется из условия, чтобы выходная переменная $x(t)$ системы в свободном движении изменялась во времени по предписанному закону, определяемому дифференциальным уравнением (1.4.8). Это означает в свою очередь, что задачу параметрической оптимизации можно рассматривать как обратную задачу динамики, формулируемую следующим образом: динами-

ческая система заданной структуры имеет варьируемые параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_k$; требуется найти такие значения этих параметров, при которых движение системы проходит по предписанной траектории, определяемой дифференциальным уравнением вида (1.4.8).

Практически не всегда оказывается возможным провести параметрический синтез системы из условия, чтобы ее выходная переменная $x(t)$ в точности была равна переменной $x^*(t)$, которая является экстремалью минимизируемого функционала $J_m(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Применительно к системе (1.4.3) точное равенство $x(t) = x^*(t)$ достигается только при условии $k = n$. В иных случаях параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ можно найти в результате наилучшего (в каком-нибудь смысле) приближения $x(t)$ и $x^*(t)$. Очень часто в качестве меры приближения используют определенные интегралы:

$$\int_0^T (\delta^2 + \beta_1 \dot{\delta}^2) dt, \quad \int_0^T (\delta^2 + \beta_1 \dot{\delta}^2 + \beta_2 \ddot{\delta}^2) dt \quad (1.4.9)$$

и другие. Здесь $\delta(t) = x^*(t) - x(t)$ — отклонение выходной переменной оптимизируемой системы от экстремальной кривой $x^*(t)$; $\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$ — производные по времени; β_1 , β_2 — положительные числа. Выражения (1.4.8) представляют собой, по сути дела, также интегральные оценки, записанные для отклонений траектории синтезируемой системы от назначенной.

В прикладных задачах параметрической оптимизации не всегда используются интегральные квадратичные оценки, порядок которых равен порядку дифференциального уравнения оптимизируемой системы. Очень часто параметрический синтез проводят по квадратичным оценкам первого и второго порядка. В таких случаях параметры системы определяются из условия, чтобы выходная переменная $x(t)$ приближалась к решению дифференциального уравнения первого или соответственно второго порядка.

Действительно, рассмотрим интегральную квадратичную оценку первого порядка. Обозначим подынтегральное выражение

$$x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 = F(x, \dot{x}).$$

Тогда уравнение Эйлера — Пуассона (1.4.4) будет иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0.$$

Подставляя сюда выражение для $F(x, \dot{x})$ и выполняя необходимые преобразования, получим дифференциальное уравнение

$$x(t) - \tau_1^2 \ddot{x}(t) = 0, \quad (1.4.10)$$

решением которого является экстремаль, доставляющая минимум интегралу J_1 . Характеристическое уравнение

$$1 - \tau_1^2 p^2 = 0,$$

отвечающее (1.4.10), имеет корни $p_1 = -1/\tau_1$, $p_2 = 1/\tau_1$. Следовательно, согласно (1.4.6) решение уравнения (1.4.10) будет

$$x(t) = c_1 e^{-t/\tau_1} + c_2 e^{t/\tau_1}.$$

Поскольку экстремаль должна удовлетворять граничным условиям $x(\infty) = 0$, $\dot{x}(\infty) = 0$, то следует принять $c_2 = 0$:

$$x^*(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}, \quad c_1 = x(0).$$

Это означает, что $x^*(t)$ есть решение дифференциального уравнения первого порядка

$$\tau_1 \dot{x}^*(t) + x^*(t) = 0, \quad x(0) = x_0.$$

Таким образом, если для параметрического синтеза используется интегральная квадратичная оценка J_1 , то выбор параметров производится из условия, чтобы выходная переменная системы приближалась к решению дифференциального уравнения первого порядка.

Итак, основываясь на результатах исследований, выполненных в 40-х и 50-х годах, можем заключить следующее: *требование оптимальности системы по переходному процессу в смысле минимума интегральной квадратичной оценки J_m равносильно требованию, чтобы выходная переменная системы в ее свободном движении изменялась в соответствии с решением однородного дифференциального уравнения порядка n .*

Это положение устанавливает прямую связь задачи параметрической оптимизации динамической системы с концепциями обратных задач динамики. Такое понимание задач параметрической оптимизации имеет не только теоретическое значение. Сформулированное положение является методической основой для построения алгоритмических процедур решения обратных задач динамики управляемых систем. Эти вопросы будут подробно рассмотрены в гл. 3 применительно к одномерным системам и в гл. 4 применительно к системам с несколькими управляющими функциями.

В заключение этого раздела отметим, что интегральные квадратичные оценки были использованы также в работе [1.30] Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси для исследования переходных процессов в электрических связанных контурах. Вопросы применения интегральных квадратичных оценок для определения параметров систем автоматического регулирования разрабатывались А. А. Фельдбаумом [1.28, 1.33], а также многими

другими авторами. Библиографию по этим вопросам можно найти в [1.31—1.33].

1.4.2. Синтез замкнутых автоматических систем как обратная задача динамики. Рассмотрим теперь другую задачу теории автоматического регулирования, которая относится к числу основных и которую можно считать классической. Содержанием ее является определение структуры и параметров законов управления. В терминах передаточных функций эту задачу можно сформулировать следующим образом:

известна передаточная функция управляемого объекта; требуется найти передаточную функцию управляющего устройства (корректирующей цепи) из условия, чтобы замкнутая система автоматического регулирования обладала передаточной функцией желаемого вида.

В данном случае назначаемая траектория движения (требуемые динамические свойства синтезируемой системы) определяется видом желаемой передаточной функции замкнутой системы. Искомым здесь является закон управления (регулирования), который представляется в форме передаточной функции управляющего устройства. Соответствующее соединение управляемого объекта и управляющего устройства образует замкнутую систему. Определение закона управления системы и его параметров по указанным исходным данным соответствует содержанию обратной задачи динамики.

Рассмотрим эту задачу применительно к синтезу замкнутой системы с дискретным (цифровым) корректирующим устройством в прямой цепи. Структурная схема такой системы изображена на рис. 1.5, а.

Передаточная функция неизменяемой части системы обозначена через $W(z)$. Передаточная функция дискретного корректирующего устройства обозначена $W_k(z)$. Выходной переменной системы является x , входное воздействие есть g . Их z -изображения (дискретные преобразования Лапласа) обозначим соответственно

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} x(n), \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} g(n), \quad z = e^{-pT}.$$

Здесь T — период дискретности; p — комплексная переменная преобразования Лапласа. Управляющая функция обозначена через $u(n)$, а ее z -изображение есть $U(z)$, так что передаточная функция корректирующего устройства

$$W_k(z) = \frac{U(z)}{E(z)},$$

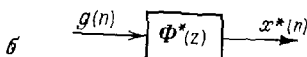
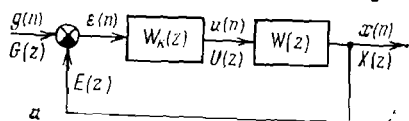


Рис. 1.5

где z -изображение ошибки системы есть

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} e(n).$$

Пусть задана передаточная функция

$$\Phi^*(z) = \frac{X^*(z)}{G(z)}$$

некоторой эталонной системы (рис. 1.5, б). Принимается, что ее свойства соответствуют требованиям проектируемой системы. Задача заключается в том, чтобы найти такую передаточную функцию $W_K(z)$ корректирующей цепи, при которой передаточная функция

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{G(z)}$$

замкнутой синтезируемой системы будет совпадать с $\Phi^*(z)$. Это требование сводится к тому, что выходные переменные синтезируемой и эталонной систем, определяемые как обратные преобразования

$$x(n) = D^{-1}[\Phi(z)G(z)], \quad x^*(n) = D^{-1}[\Phi^*(z)G(z)],$$

должны совпадать. Иначе говоря, передаточную функцию $W_K(z)$ необходимо найти из условия осуществления движения по траектории, которой соответствует $x^*(n)$.

Формально эта задача решается следующим образом. Записывается выражение для $\Phi(z)$ передаточной функции замкнутой синтезируемой системы. Это выражение будет содержать неизвестную передаточную функцию $W_K(z)$ корректирующего устройства. Затем, в соответствии с требованием задачи, принимается $\Phi(z) = \Phi^*(z)$. Это равенство рассматривается как уравнение относительно искомой функции $W_K(z)$, решением которого исчерпывается вопрос об определении структуры и параметров закона управления. Проведем необходимые вычисления.

Передаточная функция замкнутой системы определяется выражением

$$\Phi(z) = \frac{W_K(z)W(z)}{1 + W_K(z)W(z)}.$$

Подставляя вместо $\Phi(z)$ заданную передаточную функцию $\Phi^*(z)$ и разрешая затем полученное уравнение относительно $W_K(z)$, найдем передаточную функцию дискретного корректирующего устройства

$$W_K(z) = \frac{1}{W(z)} \frac{\Phi^*(z)}{1 - \Phi^*(z)}. \quad (1.4.11)$$

Выражение (1.4.11) формально решает задачу синтеза замкнутой системы из условия реализации заданной передаточной

функции. Пусть передаточная функция неизменяемой части системы

$$W(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (1.4.12)$$

где $P(z)$, $Q(z)$ — полиномы относительно z . Подстановка (1.4.12) в (1.4.11) дает

$$W_K(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \frac{\Phi^*(z)}{1 - \Phi^*(z)}. \quad (1.4.13)$$

Используя формулу (1.4.13), найдем передаточную функцию корректирующего устройства для следующих условий:

1) передаточная функция неизменяемой части синтезируемой системы равна

$$W(z) = \frac{0,5}{z - 0,5}; \quad (1.4.14)$$

2) заданная передаточная функция замкнутой системы определяется выражением

$$\Phi^*(z) = \frac{2z + 1}{3z^2}. \quad (1.4.15)$$

Согласно (1.4.12) и (1.4.14) имеем

$$Q(z) = z - 0,5, \quad P(z) = 0,5.$$

Поэтому по формуле (1.4.13) находим

$$W_K(z) = \frac{4z^2 - 1}{3z^2 - 2z - 1} = \frac{U(z)}{E(z)}. \quad (1.4.16)$$

Следовательно, уравнение дискретного корректора в изображениях будет

$$(3z^2 - 2z - 1)U(z) = (4z^2 - 1)E(z),$$

или в оригиналах

$$u(n+2) - \frac{2}{3}u(n+1) - \frac{1}{3}u(n) = \frac{4}{3}\varepsilon(n+2) - \frac{1}{3}\varepsilon(n). \quad (1.4.17)$$

Таким образом, для рассматриваемого примера закон управления представляет собой разностное уравнение (1.4.17) второго порядка. Можно убедиться, что выходная переменная $x(n)$ замкнутой системы с найденным дискретным корректором совпадает при $n = 1, 2, \dots$ с назначенной функцией $x^*(n)$, которая является выходной переменной эталонной системы с передаточной функцией (1.4.15).

Порядок разностного уравнения дискретного корректора и его параметры (коэффициенты) определяются при заданной переда-

точной функции неизменяемой части системы видом передаточной функции $\Phi^*(z)$ эталонной системы. Это непосредственно следует из общей формулы (1.4.13). Другими словами, синтезируемый закон управления и его параметры определяются видом назначаемой траектории $x^*(n)$, которую должна воспроизводить замкнутая система.

Можно отметить, что передаточная функция $\Phi^*(z)$ в рассмотренном примере соответствует процессу с конечной длительностью. В самом деле, из уравнения

$$x^*(n+2) = \frac{2}{3} g(n+1) + \frac{1}{3} g(n),$$

которое соответствует (1.4.13), в случае $g(n) = 1(n)$ и $x^*(0) = 0$ непосредственными вычислениями находим

$$x^*(1) = 2/3, \quad x^*(k) = 1, \quad k = 2, 3, \dots$$

Точно так же из уравнения

$$x(n+1) - 0,5x(n) = 0,5u(n),$$

соответствующего передаточной функции (1.4.14) и дополненного разностным уравнением (1.4.17), в случае $g(n) = 1(n)$ и $x(0) = 0$ можно найти

$$x(1) = 2/3, \quad x(k) = 1, \quad k = 2, 3, \dots;$$

$$u(0) = 4/3, \quad u(1) = 1/9, \dots$$

В обеих системах переходный процесс отработки единичной функции заканчивается за два такта.

В качестве второго примера найдем передаточную функцию дискретного корректора из условия реализации заданной передаточной функции

$$\Phi^*(z) = \frac{z - \beta}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}, \quad (1.4.18)$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad 0 < \beta < 1.$$

В случае, когда входное воздействие $g(n) = 1(n)$, передаточной функции (1.4.18) соответствует процесс

$$x^*(n) = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + A, \quad n \geq 0, \quad (1.4.19)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а величина

$$A = \frac{1 - \beta}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2}.$$

Следовательно, отыскание передаточной функции дискретного корректора из условия реализации (1.4.18) равносильно тому, чтобы выходная переменная синтезируемой системы $x(n)$ воспроизводила $x^*(n)$, определяемую выражением (1.4.19).

Искомую передаточную функцию $W_K(z)$ находим по формуле (1.4.13). Подставляя сюда выражение для $\Phi^*(z)$ из (1.4.18), будем иметь

$$W_K(z) = \frac{2(z - 0,5)(z - \beta)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}. \quad (1.4.20)$$

Этой передаточной функции соответствует разностное уравнение корректора

$$\begin{aligned} u(n+2) - (\alpha_1 + \alpha_2)u(n+1) + \alpha_1\alpha_2u(n) = \\ = 2\varepsilon(n+2) - 2(0,5 + \beta)\varepsilon(n+1) + \beta\varepsilon(n). \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

Как и в первом примере, в данном случае можно убедиться в том, что процессы в замкнутой системе протекают по предписанному закону. В отличие от (1.4.16), дискретный корректор с передаточной функцией (1.4.20) образует такую замкнутую систему, переходный процесс в которой продолжается бесконечно длительное время. Такое свойство синтезированной системы соответствует условиям задачи синтеза; процесс в эталонной системе продолжается также бесконечно долго: $x^*(n) \rightarrow A$, $n \rightarrow \infty$.

Итак, можно сделать заключение о том, что традиционная задача теории автоматического регулирования по синтезу законов управления формулируется и решается как обратная задача динамики в ее непосредственном понимании. Назначаемая траектория движения синтезированной системы представляется здесь в виде передаточной функции $\Phi^*(z)$ некоторой эталонной системы. Искомый закон управления определяется также в виде передаточной функции $W_K(z)$.

Рассмотренное здесь формальное решение задачи синтеза может приводить к некорректным результатам. Это имеет место в тех случаях, когда корни уравнений $P(z) = 0$, $Q(z) = 0$ располагаются за пределами или на окружности единичного радиуса. Для управляемых объектов с такими свойствами передаточную функцию эталонной системы нужно выбирать специальным образом. Мы, однако, не будем останавливаться на этих вопросах, так как для наших целей, как и ранее, интерес представляет методологическая сторона задачи синтеза замкнутой системы.

В различных постановках и различными методами обсуждаемые задачи изучались в многочисленных работах: Я. З. Цыпкин [1.34—1.36], Л. Т. Кузин [1.37], Л. Н. Волгин [1.38], Г. С. Поспелов [1.39], Е. И. Джури [1.40], Ю. Т. Ту [1.41], В. П. Перов [1.42] и др. Библиография по этим вопросам весьма обширна, поэтому мы указали только литературу монографического характера, где можно найти ссылки на многочисленные работы в этой области.

В заключение отметим, что мы обсуждали здесь задачу синтеза дискретных систем. Точно такой же анализ можно было бы провести применительно к непрерывным системам.

§ 1.5. Построение программных управлений движением динамических систем

Здесь мы рассмотрим две задачи, которые связаны с определением программных управляющих функций. Прикладное значение этих задач невелико. Однако в методическом отношении по формулировкам и процедурам их решения они непосредственно примыкают к обратным задачам динамики, хотя здесь и не используется такая терминология.

1.5.1. Осуществление назначенной траектории движения. Задача этого типа изучалась Е. А. Барбашиным в конце 50-х гг. [1.46, 1.47]. В наиболее полной форме она была сформулирована в его монографии [1.48] применительно к дифференциальным уравнениям, которые определены в банаховом пространстве. Мы несколько упростим трактовку этой задачи, сформулировав ее следующим образом. Пусть движение управляемой системы подчиняется дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(u, t), \quad (1.5.1)$$

где $x = \|x_1 \dots x_n\|^T$ — вектор координат состояния; $u = \|u_1 \dots u_m\|^T$ — вектор управляющих функций; $f(x, t)$, $g(u, t)$ — заданные функции. В пространстве состояний задана некоторая траектория

$$x^*(t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < T < \infty. \quad (1.5.2)$$

Путем выбора функций $u_k(t)$ требуется найти такие управляющие силы $g_v(u, t)$, при которых движение системы (1.5.1) точно или приближенно следует по траектории $\psi(t)$.

При условии, что поставленная задача имеет точное решение, искомый вектор управлений определяется из уравнения

$$g(u, t) = \dot{\psi}(t) - f(\psi(t), t). \quad (1.5.3)$$

Найденные отсюда управляющие функции $u_1(t), \dots, u_m(t)$ являются программными, так как они изменяются в соответствии с заданной вектор-функцией (1.5.2). Система управления в таком случае является разомкнутой, ее структурная схема состоит из последовательного соединения регулятора и управляемого объекта (рис. 1.6).

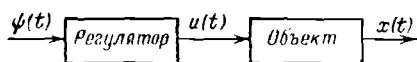


Рис. 1.6

В качестве примера рассмотрим простейший случай, когда управляемый процесс подчиняется дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

где x — скалярная функция. Пусть требуется осуществить движение по траектории $\psi(t)$, определяемой равенством

$$\psi(t) = x_0 e^{-ct}, \quad c > 0.$$

Чтобы найти управляющую функцию, реализующую движение по назначенной траектории, подставим выражение для $\psi(t)$ в уравнение движения вместо $x(t)$. Имеем

$$u(t) = -b^{-1}(c + a)x_0 e^{-ct}.$$

Найденная управляющая функция является программной, так как она определена как функция времени. Схема реализации

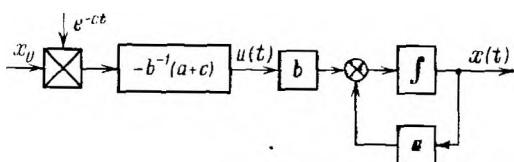


Рис. 1.7

можно видеть, что для формирования управляющей функции $u(t)$ необходимо генерировать функцию времени $\exp(-ct)$, которая определяет назначенную траекторию. С учетом найденного управления процесс в рассматриваемой системе описывается неоднородным уравнением

$$\dot{x}(t) = ax(t) - (a + c)x_0 e^{-ct}, \quad x(0) = x_0.$$

Решение этого уравнения $x_0 e^{-ct}$ в точности совпадает с назначенной траекторией $\psi(t)$.

Уравнение (1.5.3) в интересных для практических приложений случаях оказывается неразрешимым относительно управляющих функций $u_k(t)$. Задача обладает лишь кажущейся простотой. В [1.48] указаны возможные варианты построения программных управлений применительно к математической модели движения управляемого объекта следующего вида:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + \sum_{k=1}^m c_k u_k(t), \quad (1.5.4)$$

где c_k — n -мерные векторы параметров; u_k — скалярные функции — искомые управления.

Следуя [1.48], определим вектор-функцию

$$z(t) = x(t) - \psi(t). \quad (1.5.5)$$

Тогда вместо (1.5.4) можно записать дифференциальное уравнение для новой переменной

$$\dot{z}(t) = f(z, t) + \Delta(t), \quad (1.5.6)$$

где приняты следующие обозначения:

$$f(z, t) = f(z + \psi, t) - f(\psi, t),$$

$$\Delta(t) = f(\psi, t) - \dot{\psi}(t) + \sum_{k=1}^m c_k u_k(t). \quad (1.5.7)$$

Из (1.5.4), (1.5.7) заключаем, что задача осуществления заданной

траектории сводится к аппроксимации функции

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}(t) - f(\psi, t)$$

линейной конструкцией

$$u(t) = \sum_{k=1}^m c_k u_k(t). \quad (1.5.8)$$

Действительно, непосредственная подстановка (1.5.5) в уравнение (1.5.4) дает

$$\dot{\psi}(t) = f(\psi, t) + \sum_{k=1}^m c_k u_k(t).$$

Отсюда следует, что в случае $\dot{\psi}(t) = u(t)$, т. е. при

$$\dot{\psi}(t) - f(\psi, t) = \sum_{k=1}^m c_k u_k(t), \quad (1.5.9)$$

имеет место точная реализация траектории $\psi(t) = x(t)$.

В практических случаях условие (1.5.9), как правило, недостижимо. Поэтому назначенную траекторию можно осуществить с определенной степенью приближения. В [1.48] предлагается приближенно строить вектор управления (1.5.8) из условия реализации минимума величины

$$\delta = \left(\int_0^T \Delta^T(t) \Delta(t) dt \right)^{1/2}, \quad (1.5.10)$$

где символ « Δ » означает операцию транспонирования. В такой постановке возможны три варианта построения управления.

Вариант 1. Заданы функции $u_k(t)$. Требуется найти векторы c_k таким образом, чтобы величина δ , определяемая равенством (1.5.10), была минимальна.

Вариант 2. Заданы векторы c_k . Требуется найти систему функций $u_1(t), \dots, u_m(t)$, при которых реализуется минимум (1.5.10).

Вариант 3. Найти оптимальную систему векторов c_k и функций $u_k(t)$, при которых достигается минимум оценки (1.5.10).

Необходимо отметить, что при обсуждении рассматриваемой задачи предполагается, что начальные точки действительной $x(t)$ и назначенной $x^*(t)$ траекторий совпадают. Если начальное состояние управляемой системы не соответствует желаемому, то, как это рекомендуется в [1.48, с. 213], следует предварительно осуществить переходный процесс.

Задача Е. А. Барбашина имеет ограниченное практическое значение, так как она предусматривает построение разомкнутых систем. Поэтому мы не будем анализировать различные вариан-

ты ее решений. Подробное рассмотрение этих вопросов можно найти в [1.48].

В методическом отношении задача осуществления заданной траектории движения имеет двойное значение. Во-первых, как уже отмечалось, эта задача способствует пониманию проблематики теории автоматического управления с позиций обратных задач динамики. Во-вторых, именно задача осуществления назначенной траектории движения порождает идею построения процедуры параметрической оптимизации динамической системы с требуемыми динамическими характеристиками. Задачи такого содержания часто встречаются в инженерной практике проектирования систем автоматического управления различного назначения. Основываясь на идеях осуществления заданной траектории движения, мы дадим алгоритмическое решение задачи параметрической оптимизации, ориентированное на применение ЭВМ. Это будет выполнено в гл. 3 и 4.

1.5.2. Определение программы отклонения руля высоты летательного аппарата. В [1.49] рассмотрена прикладная задача осуществления требуемой траектории движения, которая по содержанию и процедуре решений близко примыкает к задаче Е. А. Барбашина. Речь идет об управлении продольным движением аэродинамического летательного аппарата путем изменения силы тяги. Содержание задачи заключается в следующем. Предполагается, что летательный аппарат находится в режиме прямолинейного установившегося полета; скорость движения и угол наклона траектории остаются постоянными. Начиная с некоторого момента времени, требуется осуществить разгон или торможение аппарата путем изменения силы тяги двигателей. Вследствие нарушения равновесия сил вектор скорости будет изменять свое направление, что приводит к изменению угла наклона траектории. Необходимо путем соответствующих отклонений руля высоты сохранять первоначальное значение угла наклона траектории к горизонту неизменным. Задача, таким образом, заключается в определении закона изменения угла отклонения руля высоты, обеспечивающего выполнение разгона или торможения аппарата с постоянным углом наклона траектории. Эта задача и решена в [1.49].

При определенных допущениях [1.49] уравнения движения летательного аппарата в отклонениях от установившихся значений параметров имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} + rv &= p, \quad c\alpha + dv = 0; \\ \ddot{\alpha} + a_1\dot{\alpha} + a_0\alpha + bv &= q\delta, \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

где $v = V_0 - V$ — приращение скорости полета по отношению к установившемуся значению V_0 ; α — приращение угла атаки; δ — угол отклонения руля высоты. Величина p есть относительное

приращение силы тяги двигателей. Входящие в (1.5.11) коэффициенты характеризуют летательный аппарат как объект управления. Для конкретного режима полета эти коэффициенты принимаются постоянными.

Так как для наших целей интерес представляет формулировка и процедура решения задачи, то мы не будем останавливаться на физической стороне рассматриваемых вопросов. Основываясь на уравнениях движения (1.5.11), построим программу изменения угла отклонения руля высоты $\delta(t)$ при заданном законе изменения силы тяги $p = p(t)$. Примем, что сила тяги изменяется с помощью соответствующего программирующего устройства по экспоненциальному закону

$$p(t) = \bar{p}(1 - e^{-\beta t}), \quad (1.5.12)$$

где \bar{p} — максимальное значение относительного приращения силы тяги; β — постоянное число, характеризующее динамику («приемистость») двигателей.

Итак, задан закон изменения тяги двигателей (1.5.12) и уравнение движения аппарата (1.5.11). Требуется найти закон отклонения руля высоты $\delta(t)$, при котором угол атаки $\alpha(t)$, а следовательно, и угол наклона траектории (при принятых допущениях), будет оставаться постоянным в процессе разгона (торможения) аппарата.

Схема решения задачи следующая. Поскольку первое уравнение (1.5.11) можно рассматривать независимо от остальных, то из него определяется закон изменения скорости $v(t)$ для заданной зависимости $p(t)$ вида (1.5.12). Затем из последних двух уравнений (1.5.11) можно найти искомую программу $\delta(t)$. Проведем необходимые вычисления.

Из уравнения

$$\dot{v}(t) + rv(t) = \bar{p}(1 - e^{-\beta t}), \quad v(0) = 0,$$

находим после интегрирования

$$v(t) = \frac{\bar{p}}{r} \left(1 + \frac{\beta e^{-rt} - re^{-\beta t}}{r - \beta} \right). \quad (1.5.13)$$

При таком законе изменения скорости полета угол атаки будет равен

$$\alpha(t) = -\frac{d}{c} v(t), \quad (1.5.14)$$

что следует из второго уравнения (1.5.11). Для отыскания $\delta(t)$ необходимо знать производные $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$. Согласно (1.5.13) и (1.5.14)

получим

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \frac{d}{c} \bar{p} \frac{\beta}{r-\beta} (e^{-rt} - e^{-\beta t}), \\ \ddot{\alpha}(t) &= \frac{d}{c} \bar{p} \frac{\beta}{r-\beta} (\beta e^{-\beta t} - r e^{-rt}).\end{aligned}\quad (1.5.15)$$

Подстановка выражений (1.5.13)–(1.5.15) в третье уравнение (1.5.11) дает искомую зависимость

$$\delta(t) = q^{-1} (A_1 e^{-\beta t} + A_2 e^{-rt}). \quad (1.5.16)$$

Постоянные A_1 , A_2 однозначно определяются в результате выполнения соответствующих преобразований.

Таким образом, получаем следующее: изменение силы тяги двигателей по закону (1.5.12) вызывает изменение скорости полета и угла атаки согласно (1.5.13) и (1.5.14) соответственно. В итоге оказывается, что движение летательного аппарата при разгоне (торможении) будет происходить с увеличением или уменьшением угла наклона траектории. Чтобы парировать эти изменения, необходимо с помощью автопилота отклонять руль высоты по закону (1.5.16).

В данном случае мы имеем типичную задачу осуществления требуемой траектории. Действительно, с учетом равенства (1.5.14) дифференциальное уравнение для угла атаки можно записать так:

$$\ddot{\alpha} + a_1 \dot{\alpha} + \left(a_0 - \frac{b}{d}\right) \alpha = q \delta(t).$$

Управляющей функцией здесь является $\delta(t)$, а предписанная траектория движения определяется зависимостью

$$\alpha(t) = -\frac{d}{c} v(t) = -\frac{d}{c} \bar{p} \left(1 + \frac{\beta e^{-rt} - r e^{-\beta t}}{r-\beta}\right).$$

Величина $\delta(t)$, определяемая по (1.5.16), служит задающим воздействием для автопилота.

Особенность задачи Остославского — Стражевой заключается в том, что здесь требуемая траектория движения не назначается непосредственно, а определяется по результату решения прямой задачи: задан закон изменения силы $p(t)$, отыскивается зависимость $v(t)$, на основе которой записывается требуемый закон изменения $\alpha(t)$. Оказывается, таким образом, что задача осуществления назначенной траектории относится к движению летательного аппарата по углу атаки. В этой части она аналогична задаче Е. А. Барбашина и имеет важное методическое значение для формирования концепций обратных задач динамики управляемых систем.

Отметим, что определение программы отклонения руля высоты при управлении силой тяги было выполнено в [1.49] не с

целью создания управляющего автомата. На основе полученного решения в [1.49] проведен анализ свойств управляемости летательного аппарата в рассмотренном режиме полета. Эти вопросы имеют специальный характер и выходят за рамки обсуждаемых идей.

§ 1.6. Реализация заданных программ в системах автоматического регулирования

Под программами в [1.50, 1.51] понимаются «как запрограммированные динамические характеристики системы или программа ее функционирования, так и изменение выходных координат системы по заданной функциональной зависимости». При этом синтез системы автоматического регулирования заключается в построении обратных связей, реализующих расчетную или априорную программу движения.

Можно видеть, таким образом, что речь идет здесь о синтезе замкнутых автоматических систем с позиций обратных задач динамики: задана программа движения управляемого объекта, требуется синтезировать такую систему, движение которой осуществляется по предписанной программе.

В указанных работах Г. С. Поспеловым рассмотрены интересные для практических приложений приемы решения задачи осуществления назначенных траекторий движения. К ним относятся численные алгоритмы определения управляющих функций, формируемых в дискретные моменты времени, структуры замкнутых систем, обеспечивающие сохранение заданного характера переходного процесса при изменяющихся условиях функционирования, а также малоизученный до настоящего времени принцип «регулирования хода часов». Автоматическая система, построенная по этому принципу, позволяет осуществить такое управление, при котором реализуется некоторая заданная функциональная зависимость одной координаты объекта от другой. Рассмотрим коротко идеи работ [1.50, 1.51], поскольку на их основе оказывается возможным построить эффективные алгоритмы автоматического управления, реализующие в системах требуемые динамические характеристики и осуществляющие движение по назначенным траекториям.

Рассмотрим вначале процедуру построения вычислительного алгоритма дискретного управления. Чтобы не загромождать изложение, рассмотрим простую модель движения

$$\dot{x}(t) = f(x, u), \quad (1.6.1)$$

где x, u — скалярные функции. Относительно функции $f(x, u)$ предполагается, что она дифференцируема по u . Задача ставится следующим образом. Пусть в текущий момент времени t известны требуемые значения $x^*(t + T/2)$, $x^*(t + T)$ регулируемой пе-

ременной x , соответствующие моментам времени $t + T/2$, $t + T$. Здесь T — достаточно малая величина, так что с необходимой степенью приближения на основании (1.6.1) можно записать

$$x(t + T) = x(t) + f\left[t + \frac{T}{2}\right]T, \quad (1.6.2)$$

где для краткости обозначено

$$f\left[t + \frac{T}{2}\right] = f\left[x\left(t + \frac{T}{2}\right), u\left(t + \frac{T}{2}\right)\right].$$

Требуется найти такое приращение $\Delta u(t)$ управляющей функции $u(t)$, при котором в моменты времени $t + T/2$, $t + T$ переменная x примет заданные значения.

Представление управляемого процесса в виде (1.6.2) означает, что управляющая функция вычисляется в дискретные моменты времени $t = kT$, $k = 0, 1, \dots$ В интервалах $(t, t + T)$ ее величина остается постоянной, что отражено на рис. 1.8. Поскольку соотношение (1.6.2) лишь приближенно описывает течение управляемого процесса, то можно говорить о приближенной реализации заданной траектории движения $x^*(t + T)$.

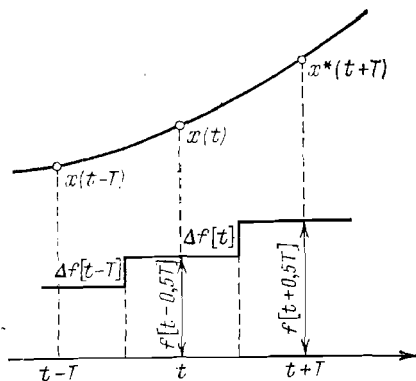


Рис. 1.8

Для определения искомой величины $\Delta u(t)$ поступаем следующим образом [1.50, 1.51]. Согласно (1.6.2) и рис. 1.8 можно записать

$$x(t + T) = x(t) + f\left[t - \frac{T}{2}\right]T + \Delta f[t] \frac{T}{2}. \quad (1.6.3)$$

Если $f(x, u)$ есть медленно меняющаяся функция, то величину $\Delta f[t]$ можно приближенно определить следующим образом:

$$\Delta f[t] \simeq \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Delta u \simeq \frac{\Delta f[t - T]}{\Delta u(t - T)} \Delta u(t).$$

Далее, в соответствии с (1.6.2) справедливы равенства

$$\begin{aligned} f\left[t - \frac{T}{2}\right] &= \frac{2}{T} \left[x(t) - x\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]; \\ \Delta f[t - T] &= f\left[t - \frac{T}{2}\right] - f\left[t - \frac{3}{2}T\right] = \\ &= \frac{2}{T} \left[x(t) - 2x\left(t - \frac{T}{2}\right) + x(t - T) \right]. \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Кроме того, аналогично (1.6.4) можно написать

$$\Delta f[t] = \frac{2}{T} \left[x(t+T) - 2x\left(t + \frac{T}{2}\right) + x(t) \right]. \quad (1.6.5)$$

Следовательно, из формулы

$$\Delta u(t) = \Delta u(t-T) \frac{\Delta f[t]}{\Delta f[t-T]}$$

с учетом (1.6.4) и (1.6.5) находим приращение управляющей функции

$$\Delta u(t) = \Delta u(t-T) \frac{x^*(t+T) - 2x^*\left(t + \frac{T}{2}\right) + x(t)}{x(t-T) - 2x\left(t - \frac{T}{2}\right) + x(t-T)}. \quad (1.6.6)$$

Заметим, что это выражение получено при условии, что в (1.6.5) принято

$$x(t+T) = x^*(t+T), \quad x\left(t + \frac{T}{2}\right) = x^*\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

Иначе говоря, приращение $\Delta u(t)$ найдено из условия, чтобы в моменты времени $t+T/2$, $t+T$ регулируемая переменная принимала заданные значения, как это требуется по формулировке задачи.

Таким образом, соотношение (1.6.6), дополненное равенством

$$u(t) = u(t-T) + \Delta u(t), \quad (1.6.7)$$

составляет содержание алгоритма формирования управляющей функции. Как следует из (1.6.6) и (1.6.7), для вычисления $u(t)$ необходимо знать состояние управляемого объекта для трех моментов времени:

$$x(t), \quad x\left(t - \frac{T}{2}\right), \quad x(t-T).$$

Кроме того, в памяти вычислителя должны сохраняться значения $u(t-T)$, $\Delta u(t-T)$.

Формулы (1.6.6), (1.6.7) могут быть записаны в рекуррентной форме. Для этой цели примем

$$T' = T/2, \quad t = kT', \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.6.8)$$

В таком случае алгоритм вычисления управляющей функции принимает вид

$$\Delta u(kT') = \Delta u[(k-2)T'] \frac{x^*[(k+2)T'] - 2x^*[(k+1)T'] + x(kT')}{x(kT') - 2x[(k-1)T'] + x[(k-2)T']}; \quad (1.6.9)$$

$$u(kT') = u[(k-2)T'] + \Delta u(kT'), \quad k = 0, 1, \dots$$

Согласно (1.6.8) период дискретности определяется величиной T' .

Итак, соотношения (1.6.9) представляют собой алгоритм управления, реализующий движение объекта (1.6.1) по траектории, определяемой последовательностью значений $x^*(kT')$. Особенность этого алгоритма управления состоит в том, что его практическая реализация не требует знания математической модели управляемого движения. Точнее говоря, для вычисления управляющей функции нет необходимости знать вид функции $f(x, u)$ в уравнении (1.6.1). С этой точки зрения представляется важной разработка практических алгоритмов дискретного управления, аналогичных (1.6.9) и пригодных для применения в различных технических приложениях. Специфика задач такого типа может быть обусловлена многомерностью математических моделей управляемых объектов, наличием нескольких управляющих функций, а также тем, что не все компоненты вектора состояния могут быть доступными для измерения.

В рассмотренной задаче построения алгоритмов управления требуемая траектория движения задается в виде функции времени, значения которой экстраполируются на время $T/2$ и T . В [1.50, 1.51] изучены возможности построения замкнутых систем автоматического регулирования, движение которых проходит по траектории, определяемой эталонной системой, математическая модель которой представляется в виде дифференциального уравнения. Рассмотрим эти вопросы, следуя [1.50, 1.51].

Пусть движение управляемого объекта подчиняется уравнению второго порядка

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = u. \quad (1.6.10)$$

Коэффициенты этого уравнения, будучи функциями времени, изменяются в некоторых пределах. Другой информацией о них мы не располагаем.

В начальный момент времени состояние управляемого объекта характеризуется значениями

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (1.6.11)$$

Задача заключается в том, чтобы построить замкнутую систему для объекта (1.6.10), траектория движения которого из точки (1.6.11) к положению равновесия возможно в большей степени приближалась бы к траектории движения эталонной системы

$$\ddot{x}^* + \alpha_1 \dot{x}^* + \alpha_0 x^* = 0, \quad \alpha_0, \alpha_1 > 0; \quad (1.6.12)$$

$$x^*(0) = x_0, \quad \dot{x}^*(0) = \dot{x}_0.$$

Система автоматического управления с требуемыми динамическими свойствами строится следующим образом. Предполагается, что в системе имеется возможность измерять выходную координату x , скорость ее изменения \dot{x} и ускорение \ddot{x} . Так как ве-

личина \ddot{x} измеряется, то в системе можно организовать контур обработки ускорения, что достигается с помощью схемы, показанной на рис. 1.9, а. Здесь \ddot{x}_{np} — программное значение ускорения — является задающим воздействием для системы. В том случае, когда коэффициент усиления k достаточно велик, имеет место приближенное равенство $\ddot{x}_{np} \approx \ddot{x}$. Обработка программного значения ускорения будет идеальной, если $k \rightarrow \infty$. В таком случае величина отклонения $\Delta \ddot{x} = \ddot{x}_{np} - \ddot{x} = 0$. Практически это условие реализовать не представляется возможным. Однако удовлетворительную для технических приложений точность воспроизведения \ddot{x}_{np} удастся достигнуть без затруднений.

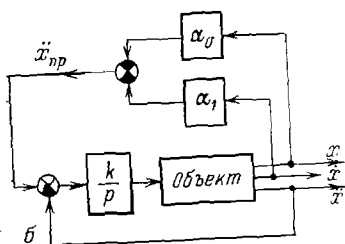
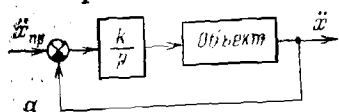


Рис. 1.9

Итак, считаем, что контур рис. 1.9, а позволяет управлять величиной ускорения. Сформируем программное ускорение следующим образом:

$$\ddot{x}_{np} = -\alpha_0 \ddot{x} - \alpha_1 \dot{x}, \quad (1.6.13)$$

что соответствует уравнению (1.6.12). Структурная схема системы для этого случая показана на рис. 1.9, б. При оговоренных ранее условиях независимо от динамических свойств управляемого объекта процесс $x(t)$ будет с определенной точностью повторять решение $x^*(t)$ уравнения (1.6.12). Исследования показывают, что это имеет место при изменении коэффициентов $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ в достаточно широких пределах.

В качестве другого примера построения системы с заданными свойствами можно рассмотреть систему, структурная схема которой приведена на рис. 1.10. Здесь программное ускорение формируется по закону

$$\ddot{x}_{np} = -u_m \operatorname{sgn}[x + \dot{x}|x|/2]. \quad (1.6.14)$$

Выражение (1.6.14) соответствует процессу максимального быстройдействия в системе второго порядка

$$\ddot{x}(t) = u, \quad |u| \leq u_m. \quad (1.6.15)$$

Следовательно, величина \ddot{x}_{np} в (1.6.14) представляет собой управляющую функцию для системы (1.6.15), т. е. $\ddot{x}_{np} = u$. Таким образом, в системе рис. 1.10 реализуется управление, при кото-

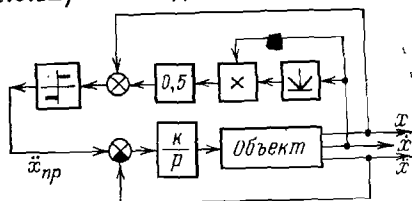


Рис. 1.10

ром объект переходит в состояние покоя за минимальное время (с определенным приближением).

Рассмотренные задачи синтеза систем рис. 1.9 и 1.10 можно интерпретировать иначе. В самом деле, движение изображающей точки эталонной системы (1.6.12) проходит по фазовой траектории, определяемой дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_2^*}{dx_1^*} = -\frac{\alpha_0 x_1^* + \alpha_1 x_2^*}{x_2^*}, \quad (1.6.16)$$

где согласно (1.6.12) переменные $x_1^* = x^*$, $x_2^* = \dot{x}^*$. На рис. 1.11, а изображены фазовые траектории для того случая, когда

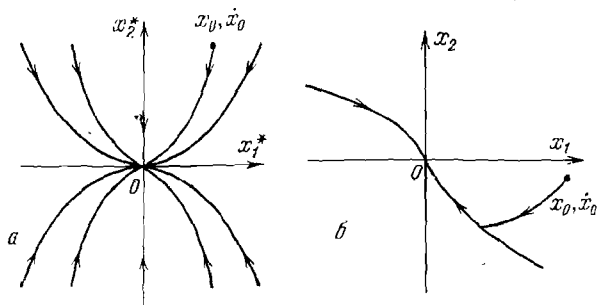


Рис. 1.11

характеристическое уравнение, отвечающее (1.6.12), имеет различные действительные корни $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Уравнение этой траектории, как решение (1.6.16), имеет вид

$$x_2^* = c (x_1^*)^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad c = \text{const.} \quad (1.6.17)$$

Следовательно, задачу построения замкнутой системы рис. 1.9 можно формулировать следующим образом: для управляемого объекта (1.6.11) синтезировать закон управления $u = u(x, \dot{x})$, при котором движение изображающей точки проходит по фазовой траектории, определяемой уравнением (1.6.17).

В соответствии со структурной схемой такой закон управления можно записать так:

$$\ddot{x} = -k(\alpha_0 x + \alpha_1 \dot{x} + \ddot{x}), \quad k > 0.$$

Как уже отмечалось, этот закон управления лишь приближенно реализует требуемое движение. Причем степень приближения тем выше, чем больше величина коэффициента усиления k .

Обратимся теперь к другой системе, которая принимается за эталонную. Если в (1.6.15) управляющая функция

$$u = -u_m \operatorname{sgn} \left(x + \frac{1}{2} \dot{x} |x| \right),$$

то движение изображающей точки проходит по фазовым траекториям, которые определяются уравнением

$$\dot{x}^2 = 2u + c, \quad u = \pm u_m, \quad (1.6.18)$$

где c — постоянная, зависящая от начального состояния объекта. Фазовые траектории (1.6.18) изображены на рис. 1.11, б. Таким образом, задачу синтеза замкнутой системы рис. 1.10 можно формулировать следующим образом: для объекта (1.6.11) найти закон управления $u = u(x, \dot{x})$, при котором движение изображающей точки проходит по фазовой траектории, определяемой уравнением (1.6.18).

Данный закон управления согласно структурной схеме рис. 1.10 имеет вид

$$\dot{u} = -k \left[u_m \operatorname{sgn} \left(x + \frac{1}{2} \dot{x} |x| \right) + \ddot{x} \right].$$

Необходимо, однако, еще раз подчеркнуть, что этот закон управления лишь приближенно реализует требуемую фазовую траекторию. Как и в предыдущем случае, степень приближения определяется величиной коэффициента усиления k . Кроме того, точность воспроизведения назначенной фазовой траектории зависит, конечно, от диапазона изменения параметров управляемого объекта. Практически, как уже отмечалось, для широкого класса объектов, встречающихся в технических приложениях, удастся без затруднений построить замкнутые системы рассматриваемого типа, динамические характеристики которых остаются удовлетворительными при изменении режимов и условий функционирования.

Отметим, что слабая чувствительность таких систем к изменению параметров управляемых объектов является следствием того, что в них осуществляется управление по ускорению. Такой способ управления использован в [1.53] при построении систем логарифмической навигации.

Рассмотрим еще одну схему построения замкнутой системы автоматического регулирования из условия реализации заданной программы движения. Она основана на использовании принципа регулирования «хода часов». При изложении этой идеи будем следовать работам [1.51, 1.52], где рассматривалась задача выдерживания программы набора высоты летательным аппаратом. Примем, что в процессе набора высоты необходимо реализовать функциональную зависимость $H_{\text{пр}} = H_{\text{пр}}(V_{\text{пр}})$ между скоростью полета $V = V_{\text{пр}}(t)$ и высотой $H = H_{\text{пр}}(t)$. Предполагается при этом, что тяга двигателя остается постоянной, а управление осуществляется с помощью руля высоты. Будем считать, далее, что зависимость $H_{\text{пр}} = H_{\text{пр}}(V_{\text{пр}})$ представлена в параметрической

форме:

$$H_{np} = H_{np}(t), \quad V_{np} = V_{np}(t). \quad (1.6.19)$$

Задача заключается в том, чтобы при наборе высоты выполнить программу, заданную в виде функций (1.6.19).

В идеальном случае, когда на летательный аппарат не действуют внешние возмущения, а его параметры как параметры объекта автоматического управления соответствуют расчетным, осуществление программы движения (1.6.19) мыслится с помощью системы, построенной по обычной схеме (рис. 1.12). Задающим воздействием этой системы является функция $H_{np}(t)$, а выходными координатами — фактическое значение высоты $H(t)$ и скорости полета $V(t)$. Если автопилот обеспечивает отработку программы по высоте с большой точностью, то программа по скорости $V_{np}(t)$

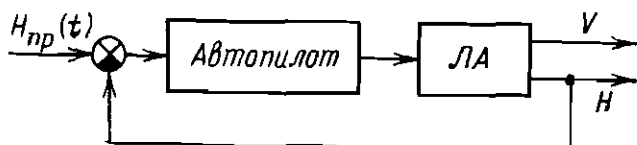


Рис. 1.12

В действительности, однако, описанный идеальный случай практически не осуществим. При наличии внешних возмущений (типа турбулентности атмосферы) в случае отклонения расчетных параметров управляемого объекта от фактических выполнение программы $H_{\text{пр}}(t)$ уже не будет означать $V_{\text{пр}} = V(t)$. Это приводит к тому, что функциональная зависимость $H_{\text{пр}} = H_{\text{пр}}(V_{\text{пр}})$ не реализуется. Для реализации этой зависимости в системе предусматривается коррекция программы. Выполняется это с помощью дополнительного контура (рис. 1.13). В состав

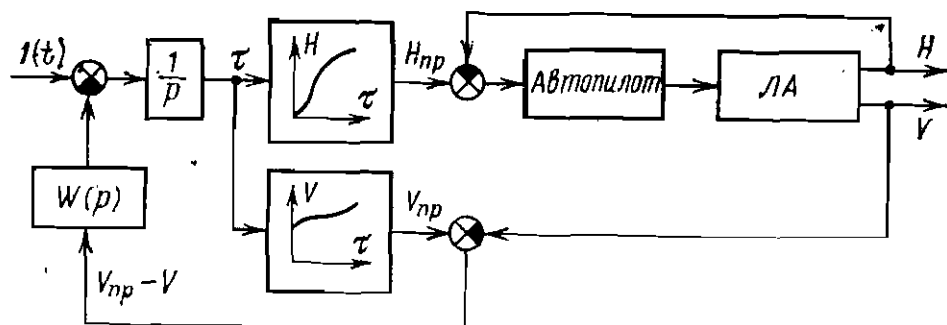


Рис. 1.13

системы входят два программных механизма (терминология условна, так как их функции может выполнять ЭВМ), которые вырабатывают программные значения высоты $H_{пр}$ и скорости полета $V_{пр}$. Сигнал $H_{пр}$ поступает как задающее воздействие на вход системы управления обычной схемы, изображенной на рис. 1.12. Сигнал $V_{пр}$ используется для выработки корректирующего сигнала.

Процесс управления протекает следующим образом. На вход системы в момент времени $t = 0$, соответствующий началу управления, поступает единичное воздействие $1(t)$. В идеальном случае, когда $V_{\text{пр}} - V = 0$, на выходе интегратора будет сигнал времени

$$\int_0^t 1(t) dt = t,$$

истекшего с момента пуска системы. Соответственно значению t программные механизмы вырабатывают значения $H_{\text{пр}}(t)$, $V_{\text{пр}}(t)$. Если окажется, что величина $V(t) \neq V_{\text{пр}}(t)$, то разность $\Delta V = V_{\text{пр}}(t) - V(t)$ поступает на вход цепи с передаточной функцией $W(p)$. Сигнал w , вырабатываемый этой цепью, сравнивается с единичным. Так как величина $|1(t) - w| \neq 1$, то интеграл

$$\int_t^{t'} (1 - w) dt$$

уже не будет характеризовать текущее время. Это будет некоторое «местное» время τ . В соответствии с этим временем в программном механизме вырабатываются значения высоты $H_{\text{пр}}(\tau)$ и скорости $V_{\text{пр}}(\tau)$. В результате оказывается, что часовой механизм программирующих устройств работает неравномерно во времени. Скорость их хода регулируется специальным сигналом w , величина которого прямо пропорциональна ошибке ΔV реализации программы по скорости.

Поскольку заданная функциональная зависимость $H_{\text{пр}} = H_{\text{пр}}(V_{\text{пр}})$ представляется в параметрической форме (1.6.19), то исключение времени τ из функций $H_{\text{пр}}(\tau)$, $V_{\text{пр}}(\tau)$ приводит к назначенной программе. Это означает, что регулирование темпа выработки программных значений управляемых координат системы позволяет существенно повысить точность реализации заданной функциональной зависимости. Заметим при этом, что точность зависит от быстродействия корректирующего контура системы. Это в свою очередь определяется передаточной функцией $W(p)$.

В [1.51] рассмотрены примеры построения систем обсуждаемого типа и высказаны соображения, в соответствии с которыми этот метод может быть обобщен на многомерные системы. Здесь мы не будем останавливаться на этих вопросах. Отметим только, что принцип регулирования «хода часов» до настоящего времени не получил должной разработки применительно к задачам построения автоматических систем, обладающих назначенными динамическими свойствами.

Резюмируя проведенный анализ различных вариантов построения замкнутых систем автоматического управления, можно ска-

зять, что рассмотренные методы позволяют, по сути дела, получить схемные решения обратных задач динамики, формулируемых как задачи осуществления назначенных траекторий движения. Весьма важно при этом то обстоятельство, что синтезируемые таким образом замкнутые системы обладают свойствами инвариантности (слабой чувствительности) по отношению к изменению динамических характеристик управляемых объектов и действующих на них внешних возмущений. Поэтому изучение возможностей таких «схемных» решений обратных задач динамики является важным для практических приложений.

§ 1.7. Построение множества систем дифференциальных уравнений программных движений

В 1952 г. Н. П. Еругин [1.54] сформулировал обратную задачу теории дифференциальных уравнений и указал метод ее решения. Она поставлена в виде задачи построения всего множества систем дифференциальных уравнений по заданным частным интегралам. С 1960 г. А. С. Галиуллин и его ученики И. А. Мухаметзянов и Р. Г. Мухарлямов изучают возможности применения идей Н. П. Еругина для решения обратных задач динамики [1.55—1.64]. Примечательная особенность обсуждаемого подхода заключается в том, что в работах А. С. Галиуллина и его последователей обратные задачи динамики формулируются и решаются как задачи построения *всего множества дифференциальных уравнений программных движений*. То обстоятельство, что согласно постановке задачи требуется найти не закон управления, а множество дифференциальных уравнений, приводит к *неоднозначности* получаемого решения. Эта особенность отражается также и в процедуре решения обратных задач, которая предусматривает использование необходимых и достаточных условий того, что заданные интегралы действительно образуют интегральное *многообразие синтезируемой системы дифференциальных уравнений*.

Изложим основные положения и особенности методики решения обратных задач динамики как задач построения множества дифференциальных уравнений программных движений.

1.7.1. Построение множества систем дифференциальных уравнений первого порядка. Следуя [1.57], будем рассматривать управляемое движение, описываемое дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.7.1)$$

где x — n -мерный вектор координат состояния, u — m -мерный вектор управляющих функций. Принимается, что вектор-функция $f(\dots)$ есть непрерывная ограниченная функция, имеющая частные производные по x_1, \dots, x_n в области определения уравнения (1.7.1).

Задана программа движения системы в виде уравнений

$$\psi_r(x, t) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad s \leq n; \quad t \in [0, T]. \quad (1.7.2)$$

Здесь ψ_r — непрерывные функции своих аргументов, имеющие частные производные

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi_r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \psi_r}{\partial x_n}, \quad r = 1, 2, \dots, s.$$

Принимается, кроме того, что ранг функциональной матрицы

$$\left\| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right\| = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

равен s в каждый момент времени $t \in [0, T]$.

Задача формулируется следующим образом: в классе кусочно-непрерывных функций найти такое управление $u = u(x, t)$, при котором движение системы (1.7.1) проходит по программе (1.7.2) и в каждый момент времени $t \in [0, T]$ квадратичная форма

$$w = \sum_{h=1}^m \alpha_h u_h^2, \quad \alpha_h = \text{const} > 0, \quad (1.7.3)$$

принимает наименьшее значение.

Физическая интерпретация рассматриваемой задачи дана в [1.57]. Не останавливаясь на этих вопросах подробно, отметим, что управление $u(x, t)$, разрешающее задачу (1.7.1) — (1.7.3), соответствует принципу Гаусса о наименьшем принуждении.

Как показано в [1.57], управление, осуществляющее движение по заданной программе и доставляющее минимум величине w , представляется в виде

$$u(x, t) = u^0(x, t) + F(\psi, x, t), \quad (1.7.4)$$

где $u^0(x, t)$ определяется как решение соответствующей системы алгебраических уравнений, а $F(\psi, x, t)$ есть произвольная вектор-функция, обращающаяся в нуль на заданном интегральном многообразии (1.7.2) для уравнения (1.7.1).

Таким образом, рассматриваемая задача не имеет единственного решения. Произвол в выборе вектор-функции F порождает бесчисленное множество управляющих функций (1.7.4), если только множество функций $F(\psi, x, t)$ удовлетворяет условию

$$F(0, x, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Этому бесчисленному множеству управляющих функций вида (1.7.4) соответствует бесчисленное множество дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(x, u^0 + F, t), \quad (1.7.5)$$

для которых заданная программа (1.7.2) является интегральным многообразием.

Следовательно, задача построения множества систем уравнений решена. Остается, однако, открытым вопрос, каким образом следует распорядиться произвольной вектор-функцией $F(\psi, x, t)$. В [1.57] рекомендуется эту вектор-функцию выбирать из каких-либо дополнительных условий, например, условий устойчивости или оптимальности заданного движения.

Обращаясь к синтезированной системе (1.7.5), можно сказать, таким образом, что в ее структуре содержится *неизвестная произвольная вектор-функция* $F(\psi, x, t)$, которая входит аддитивно с вектором известных управляющих функций u^0 . Поэтому можно ввести новую функцию

$$v = u^0(x, t) + F(\psi, x, t), \quad (1.7.6)$$

принять ее в качестве нового вектора управлений и рассматривать вместо (1.7.5) систему

$$\dot{x}(t) = f(x, v, t), \quad x(0) = x_0. \quad (1.7.7)$$

Управляемая система (1.7.7) с точностью до обозначений совпадает с исходной системой (1.7.1). И для нее можно оставить прежнюю формулировку задачи осуществления движения по программе (1.7.2). Искомым здесь будет вектор v новых управляющих функций. Однако в силу (1.7.6) и свойств функции $F(\psi, x, t)$ на управляющие функции должно быть наложено следующее условие:

$$v = \begin{cases} u^0(x, t), & \text{если } \psi(x, t) = 0; \\ v = v(x, t), & \text{если } \psi(x, t) \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы пришли к необходимости решать некоторую новую задачу. Далее будет показано, что число новых управляющих функций меньше числа исходных.

Процедуру построения множества систем дифференциальных уравнений вида (1.7.5) рассмотрим на примере системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t) + u_1, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) + u_2. \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

Программу движения определим равенством

$$\psi(x_1, x_2, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (1.7.9)$$

Предполагается при этом, что $\psi(x, t)$ есть интегральная кривая для уравнений (1.7.8). Только в этом случае можно построить управление $u(x_1, x_2, t)$, которое при выполнении условия

$$\psi(x_1(0), x_2(0), 0) = 0 \quad (1.7.10)$$

реализует движение по назначенной траектории (1.7.9).

Заметим, что условие (1.7.10) предписывает, чтобы в начальный момент времени $t = 0$ состояние системы отвечало за-

данной программе. Иначе говоря, при $t = 0$ управляемая система должна находиться на заданной траектории движения.

Для отыскания управляющих функций рассматривается полная производная по времени функции ψ на движениях систем (1.7.8), а затем решается задача на условный экстремум функции

$$w = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2. \quad (1.7.11)$$

В соответствии с (1.7.9) имеем

$$\frac{d}{dt} \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

или с учетом уравнений движения системы

$$\frac{d}{dt} \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} (f_1 + u_1) + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} (f_2 + u_2) + \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Следуя методике [1.57], потребуем выполнения равенства

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} (f_1 + u_1) + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} (f_2 + u_2) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = R(\psi, \mathbf{x}, t), \quad (1.7.12)$$

где $R(\dots)$ — произвольная функция, обращающаяся в нуль на кривой (1.7.9), т. е.

$$R(0, \mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.7.13)$$

Искомые управляющие функции u_1, u_2 определяются в результате минимизации (1.7.11) при дополнительном условии (1.7.12).

Согласно методу Лагранжа задача сводится к определению минимума функции

$$\hat{w} = w + \lambda \left[\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_j} (f_j + u_j) - R(\psi, \mathbf{x}, t) \right],$$

где λ — неопределенный множитель. Применяя обычную процедуру минимизации, получим два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{w}}{\partial u_1} &= 2\alpha_1 u_1 + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial u_2} &= 2\alpha_2 u_2 + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

относительно искоемых управлений u_1, u_2 и множителя λ . Третьим уравнением является (1.7.12). На основании (1.7.14) находим

$$u_1 = -\frac{1}{2\alpha_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \lambda, \quad u_2 = -\frac{1}{2\alpha_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \lambda. \quad (1.7.15)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1.7.12), будем иметь

$$\sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \lambda \frac{1}{2\alpha_j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)^2 \right] + \frac{\partial \psi}{\partial t} = R(\psi, x, t).$$

Отсюда непосредственно следует

$$\lambda = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial \psi}{\partial t} - R(\psi, x, t)}{\frac{1}{2\alpha_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2\alpha_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2}.$$

С учетом этого выражения из (1.7.15) находим

$$u_i = - \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial \psi}{\partial t} - R(\psi, x, t)}{\frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2}, \quad i = 1, 2. \quad (1.7.16)$$

Управляющие функции (1.7.16) являются искомыми.

Можно видеть, что в формулы для управляющих функций u_i входит неизвестная функция $R(\psi, x, t)$, которая, будучи произвольной, должна только удовлетворять условию (1.7.13). Таким образом, найденные управляющие функции содержат элемент неоднозначности. Обозначим

$$F_i(\psi, x, t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{R(\psi, x, t)}{\frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2}$$

и, кроме того,

$$u_i^0(x, t) = - \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2}.$$

Тогда выражение для управляющих функций (1.7.16) можно записать в виде, соответствующем (1.7.4):

$$u_i(x, t) = u_i^0(x, t) + F_i(\psi, x, t), \quad i = 1, 2. \quad (1.7.17)$$

Функции $F_i(\psi, x, t)$, в силу их определения, таковы, что

$$F_i(0, x, t) = 0, \quad i = 1, 2,$$

поскольку функция $R(\psi, x, t)$ удовлетворяет условию (1.7.13).

Итак, структура законов формирования управляющих функций определяется выражениями (1.7.17). При этом окончательное решение задачи построения замкнутой системы, обладающей требуемыми свойствами, связано с необходимостью определения подходящей произвольной функции $R(\psi, x, t)$. Эта функция мо-

жет быть определена из каких-либо дополнительных требований. Причем для этих целей можно рассматривать редуцированную задачу. Покажем, как это сделать.

В соответствии с выражениями для F_i запишем

$$F_i(\psi, \mathbf{x}, t) = b_i(\mathbf{x}, t)R(\psi, \mathbf{x}, t), \quad (1.7.18)$$

где обозначено

$$b_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2}.$$

Тогда выражения (1.7.17) для управляющих функций будут

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_i^0(\mathbf{x}, t) + b_i(\mathbf{x}, t)R(\psi, \mathbf{x}, t). \quad (1.7.19)$$

Следовательно, синтезированную систему уравнений можно записать так:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= g_1(\mathbf{x}, t) + b_1(\mathbf{x}, t)R(\psi, \mathbf{x}, t), \\ \dot{x}_2(t) &= g_2(\mathbf{x}, t) + b_2(\mathbf{x}, t)R(\psi, \mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.7.20)$$

Здесь принято обозначение

$$g_i(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) + u_i^0(\mathbf{x}, t). \quad (1.7.21)$$

Множество допустимых скалярных функций $R(\psi, \mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих условию (1.7.13), образует такое же множество систем дифференциальных уравнений (1.7.20), для которых программа (1.7.9) является интегралом. Так как $R(\psi, \mathbf{x}, t)$ неизвестна, то для системы (1.7.20) ее можно принять в качестве новой управляющей функции

$$R(\psi, \mathbf{x}, t) = \xi = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \xi(\mathbf{x}, t), & \text{если } \psi(\mathbf{x}, t) \neq 0. \end{cases} \quad (1.7.22)$$

Эту новую управляющую функцию уже можно разыскивать из условия выполнения каких-либо дополнительных требований.

Таким образом, вместо исходной задачи определения двух управляющих функций мы приходим к задаче определения одной управляющей функции ξ , для которой выполняется свойство (1.7.22). Структурная схема исходной системы показана на рис. 1.14, а, а редуцированной — на рис. 1.14, б. Обозначения здесь соответствуют (1.7.19) — (1.7.21).

Как можно было видеть из рассмотренного примера, определение функций $u_i^0(\mathbf{x}, t)$ не связано с большими затруднениями, так как это делается в результате выполнения алгебраических операций. Считая эту задачу решенной, для синтеза системы в полном объеме остается найти одну вспомогательную управляющую функцию ξ . В итоге оказывается, что предлагаемая процедура редукции задачи синтеза позволяет уменьшить ее размер-

ность относительно вектора управлений. Представляется, что изложенный подход заслуживает того, чтобы он стал предметом исследования.

Рассмотрение методики построения всего множества дифференциальных уравнений программных движений продолжим применительно к тому случаю, когда движение управляемого объекта по каждой степени свободы описывается дифференциальными уравнениями второго порядка.

1.7.2. Построение множества систем дифференциальных уравнений второго порядка. Чтобы не загромождать изложение, рассмотрим систему с тремя степенями свободы

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, x_3, t) + u_1, \\ \ddot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, x_3, t) + u_2, \\ \ddot{x}_3(t) &= f_3(x_1, x_2, x_3, t) + u_3.\end{aligned}\quad (1.7.23)$$

Здесь $f_k(\dots)$ — известные функции, свойства которых отвечают условиям теоремы о существовании и единственности решений. Задача заключается в том, чтобы путем выбора управляющих функций построить все множество систем дифференциальных уравнений, для которых программа

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad (1.7.24)$$

является интегралом. Необходимо при этом, чтобы величина

$$w(u_1, u_2, u_3) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2, \quad \alpha_k > 0,$$

принимала наименьшее значение.

Вместо (1.7.23) будем рассматривать эквивалентную систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1, \quad \dot{y}_1 = f_1(\mathbf{x}, t) + u_1, \\ \dot{x}_2 &= y_2, \quad \dot{y}_2 = f_2(\mathbf{x}, t) + u_2, \\ \dot{x}_3 &= y_3, \quad \dot{y}_3 = f_3(\mathbf{x}, t) + u_3, \\ \mathbf{x} &= \|x_1 \ x_2 \ x_3\|^T.\end{aligned}\quad (1.7.25)$$

В соответствии с [1.54] кривая

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \dot{x}_j + \psi_t(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

будет интегральной для уравнений (1.7.25), если кривая (1.7.24)

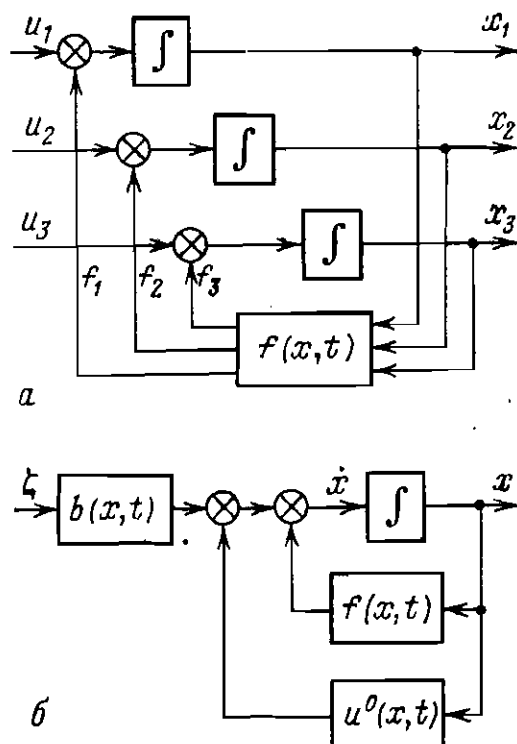


Рис. 1.14

является интегральной для этих же уравнений. Поэтому согласно методике [1.57] для отыскания управляющих функций рассматривают равенство

$$\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)^* = R(\psi, \mathbf{x}, t), \quad (1.7.26)$$

где вторая полная производная по времени определена в силу уравнений движения системы, что в (1.7.26) отмечено символом (*). Функция $R(\psi, \mathbf{x}, t)$ здесь является произвольной, она должна только обращаться в нуль при $\psi = 0$, т. е.

$$R(0, \mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.7.27)$$

Управляющие функции определяются в результате минимизации $w(u_1, u_2, u_3)$ при условии (1.7.26).

По методу Лагранжа задача на условный минимум сводится к задаче на безусловный минимум функции

$$\hat{w} = w + \lambda \left[\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)^* - R(\psi, \mathbf{x}, t) \right]. \quad (1.7.28)$$

Равенство (1.7.26) в раскрытой форме можно записать так:

$$\sum_{j=1}^3 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) y_j + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} (f_j + u_j) + \psi_{tt} \right] = R(\psi, \mathbf{x}, t), \quad (1.7.29)$$

$$\psi_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{x}, t).$$

На этом основании из (1.7.28) получаем уравнения

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial u_j} = 2\alpha_j u_j + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

из которых непосредственно находим управляющие функции

$$u_j = -\frac{1}{2\alpha_j} \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.7.30)$$

Чтобы найти множитель Лагранжа, подставим выражения (1.7.30) в равенство (1.7.29). Выполняя необходимые преобразования, получим

$$\sum_{j=1}^3 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) y_j + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \left(f_j - \frac{\lambda}{2\alpha_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \right] = R(\psi, \mathbf{x}, t) - \psi_{tt}.$$

Отсюда находим

$$\lambda = - \frac{\sum_{j=1}^3 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) y_j + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} f_j \right] - R(\psi, \mathbf{x}, t) + \psi_{tt}}{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\alpha_j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)^2}. \quad (1.7.31)$$

Наконец, подставляя выражения (1.7.31) в (1.7.30), найдем искомые управляющие функции

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) y_j + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} f_j \right]}{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\alpha_j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)^2} + F_i(\psi, \mathbf{x}, t), \quad (1.7.32)$$

$i = 1, 2, 3.$

Функции F_i при этом определяются выражениями

$$F_i(\psi, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\psi_{tt} - R(\psi, \mathbf{x}, t)}{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\alpha_j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}. \quad (1.7.33)$$

Согласно условию (1.7.27) они должны обращаться в нуль на заданной кривой, т. е.

$$F_i(0, \mathbf{x}, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.7.34)$$

Функции (1.7.32) совместно с (1.7.25) образуют то множество систем дифференциальных уравнений, для которых заданная программа (1.7.24) является интегральной кривой. Однако с точки зрения практических приложений задачу синтеза системы нельзя считать решенной, так как остается открытым вопрос о выборе подходящей функции $R(\psi, \mathbf{x}, t)$.

Как и в предыдущем случае, неизвестная функция $R(\psi, \mathbf{x}, t)$ может быть найдена в результате решения некоторой редуцированной задачи. Она может быть сформулирована для видоизмененной системы следующего вида. Обозначим

$$b_i(\mathbf{x}, t) = - \frac{\frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}}{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\alpha_j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)^2}.$$

Тогда в соответствии с (1.7.23) и (1.7.32) можно записать

$$\ddot{x}_i(t) = g_i(\mathbf{x}, t) + b_i(\mathbf{x}, t) R(\psi, \mathbf{x}, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.7.35)$$

Функции $g_i(x, t)$ однозначно определяются в результате подстановки (1.7.32) в (1.7.23).

Уравнения (1.7.35) можно рассматривать как математическую модель некоторой динамической системы с одной управляющей функцией $R(\psi, x, t)$. Поскольку система (1.7.35) построена из условия реализации движения по программе (1.7.24), то управляющую функцию $R(\psi, x, t) = \zeta(x, t)$ следует отыскивать из условия, чтобы точка $x = (x_1, x_2, x_3)$ возвращалась на траекторию $\psi(x, t)$, если по каким-либо причинам она окажется вне ее. При этом искомая функция $\zeta(x, t)$ должна принадлежать классу допустимых функций, удовлетворяющих условию (1.7.22).

Следовательно, задачу синтеза управляемой системы можно решать в два этапа. На первом определяется вектор-функция $u(x, t)$, а на втором — скалярная функция $\zeta(x, t)$.

Рассмотрим пример построения множества систем для уравнений вида (1.7.23):

$$\ddot{x}_i(t) = - \frac{\mu}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} x_i(t) + u_i, \\ \mu = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.7.36)$$

Эти уравнения описывают движение материальной точки в центральном силовом поле [1.57]. Программу движения зададим так:

$$\psi(x, t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \rho(t) = 0, \quad \rho > 0. \quad (1.7.37)$$

Найдем функции $u_i(x, t)$, при которых система (1.7.36) будет иметь (1.7.37) в качестве интегральной кривой. При этом величина $w(u_1, u_2, u_3)$, определяемая формулой (1.7.3), должна быть минимальна.

Представим уравнения (1.7.36) в форме (1.7.35):

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = - \frac{\rho}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} x_i + u_i. \quad (1.7.38)$$

В рассматриваемом случае

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 2x_j, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) = 2\dot{x}_j = 2y_j, \quad \psi_{tt} = \ddot{\rho}(t).$$

Поэтому искомые функции будут равны

$$u_i(x, t) = \frac{x_i}{\alpha_i} \frac{\sum_{j=1}^3 (y_j^2 + x_j f_j)}{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{\alpha_j} x_j^2} + F_i(\psi, x, t), \quad (1.7.39)$$

$$f_j = -\rho \frac{x_j}{r^{3/2}}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

В соответствии с (1.7.34) функции

$$F_i(\psi, x, t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\ddot{\rho}(t) - R(\psi, x, t)}{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{\alpha_j} x_j^2}. \quad (1.7.40)$$

Уравнения (1.7.36) совместно с (1.7.39) образует искомое множество систем, которые имеют $\psi(x, t)$ в качестве интегральной кривой.

Однако, как и в предыдущих случаях, окончательное решение вопроса о построении управлений связано с необходимостью определения произвольной функции $R(\psi, x, t)$, входящей в (1.7.40). Эта функция должна удовлетворять условию (1.7.27).

1.7.3. Заключение. Мы рассмотрели, следуя [1.57], процедуры применения идей Н. П. Еругина [1.54], развитых им при изучении обратных задач теории дифференциальных уравнений, для построения множества систем программных движений. Эти задачи относятся к числу простейших. Дальнейшее развитие указанных идей содержится в [1.3]. Здесь рассмотрены задачи построения функционалов, стационаризуемых в программном движении, задачи построения динамических уравнений движения тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой. При определенных условиях из полученных результатов вытекают известные уравнения Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Здесь также рассмотрены вопросы построения уравнений программного движения в обобщенных координатах.

Отмеченные и аналогичные им результаты в этом направлении представляют известный интерес. Однако областью их приложения является, скорее всего, аналитическая механика. Как мы видели, задачу построения множества систем дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию в прикладном отношении нельзя отождествлять с задачей синтеза замкнутой системы автоматического управления. Это обусловлено тем обстоятельством, что управляющие функции получаемого множества систем дифференциальных уравнений определяются неоднозначно. Они содержат некоторые произвольные функции. Поэтому для построения алгоритма управления движением системы необходимо, как было показано, формулировать дополнительную задачу, в которой в качестве новых управляющих функций выступают эти неизвестные произвольные функции.

Можно предложить конструктивные приемы построения алгоритмов управления движением, которые в известной мере используют идеи построения множества систем дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию. При этом

управляющие функции можно синтезировать на основе применения принципа Гаусса о наименьшем принуждении, а также при дополнительном условии, чтобы функционал, записанный для ошибки, характеризующей отклонение от назначенной траектории, принимал минимальное значение.

§ 1.8. Структурный синтез систем программного движения

Л. М. Бойчук [1.65—1.70] разработал процедуру структурного синтеза систем автоматического управления по заданным переходным процессам регулируемых величин. Идея предложенного метода в его первоначальной форме состоит в определении структуры закона управления регулируемой величины из требуемого дифференциального уравнения движения системы. В дальнейшем возможности метода были расширены, и в том виде, как он представлен в [1.70], с его помощью оказывается возможным решать следующие задачи:

- осуществление программного движения линейными и нелинейными объектами;
- регулирование из условия реализации заданных соотношений между выходными переменными объекта (функциональное регулирование);
- управление с учетом внешних возмущений, действующих на управляемый объект.

Разработанная процедура синтеза основывается на задании требуемого движения в виде дифференциальной программы, в соответствии с которой должны изменяться регулируемые переменные. Важно при этом, что, задавая дифференциальное уравнение, можно назначить желаемое качество переходного процесса в системе, подчинить процесс управления условию выполнения определенных соотношений между переменными состояниями и др.

Процедура определения структуры синтезируемой системы по методу Л. М. Бойчука сводится к выполнению алгебраических операций: исключается высшая производная регулируемой переменной из дифференциального уравнения, представляющего программу движения, и дифференциального уравнения, представляющего математическую модель управляемого объекта. Существенная особенность такого подхода заключается в том, что на его основе оказывается возможным строить управления, реализующие любые возможные движения объекта, которые можно представить как решения соответствующих дифференциальных линейных или нелинейных уравнений.

Мы изложим здесь основные положения метода на примерах решения простых задач синтеза управлений для линейных и нелинейных объектов.

1.8.1. Синтез систем обработки заданий, являющихся функциями времени. Рассмотрим управляемый объект, движение которого подчиняется дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = u, \quad (1.8.1)$$

где $f(\dots)$ — некоторая нелинейная функция. Ставится задача построения такого управления u , при котором изменение выходной координаты x объекта происходит по закону, определяемому дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \alpha_2 \dot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = \beta g(t). \quad (1.8.2)$$

Здесь $g(t)$ — заданная функция времени.

В соответствии с методикой [1.70] для определения искомой управляющей функции из уравнения (1.8.2) следует найти выражение для старшей производной регулируемой величины, а затем подставить его в уравнение движения (1.8.1). Полученное таким образом равенство следует разрешить относительно управления u , которое и будет искомым.

Из (1.8.2) непосредственно находим

$$\ddot{x}^* = \beta g(t) - \sum_{j=0}^2 \alpha_j x^{(j)},$$

где символом $(*)$ обозначено требуемое значение старшей производной. Подстановка этого выражения в (1.8.1) позволяет получить искомую управляющую функцию

$$u(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = \beta g(t) + f(x, \dot{x}, \ddot{x}) - \sum_{j=0}^2 \alpha_j x^{(j)}. \quad (1.8.3)$$

На рис. 1.15 приведена структурная схема контура управления, отвечающая (1.8.3). Можно видеть, что структура найденного закона управления однозначно определяется уравнением математической модели объекта и уравнением (1.8.2) эталонного движения.

Аналогично изложенному решается задача синтеза для того случая, когда уравнение математической модели движения объекта нелинейно относительно управляющей функции u . Пусть, например, уравнение движения есть

$$\ddot{x}(t) = f(x, \dot{x}, u). \quad (1.8.4)$$

Требуется построить управление u , при котором обработка задающего воздействия $g(t)$ осуществляется в соответствии с решением дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = \beta g(t). \quad (1.8.5)$$

На основании (1.8.5) получаем выражение для второй производной регулируемой величины $\ddot{x}^*(t) = \beta g(t) - (\alpha_0 x + \alpha_1 \dot{x})$.

С учетом этого из уравнения движения (1.8.4) находим управляющую функцию

$$u(x, \dot{x}, t) = f^{-1}(\beta g(t) - (\alpha_0 x + \alpha_1 \dot{x})), \quad (1.8.6)$$

где $f^{-1}(\dots)$ есть обратная функция по отношению к $f(\dots)$.

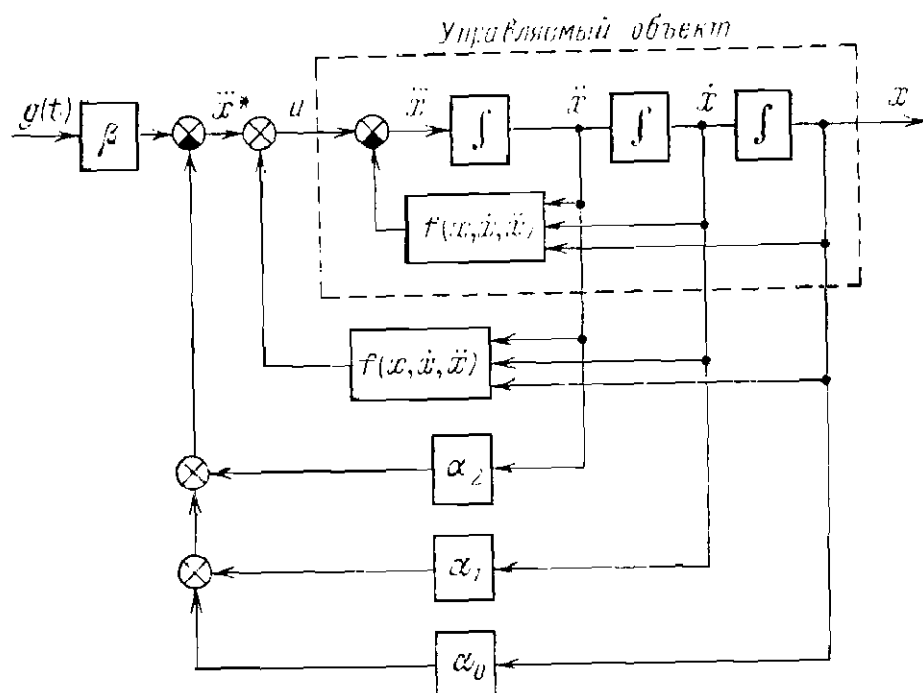


Рис. 1.15

Структурная схема контура управления, отвечающая (1.8.6), приведена на рис. 1.16.

В рассматриваемом случае алгоритм формирования управляющего сигнала содержит операцию обращения функции $f(\dots)$

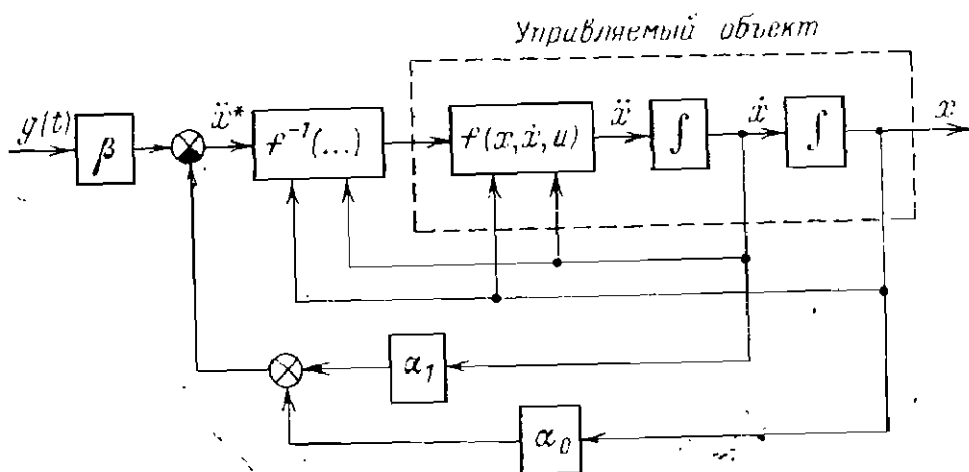


Рис. 1.16

для переменной u . Эта операция может быть представлена в конечной (аналитической) форме, если вид функции $f(x, \dot{x}, u)$ допускает такую возможность. В ином случае операция обращения может быть выполнена с помощью подходящей алгоритмической процедуры.

Рассмотрим теперь задачу построения законов управления для объекта, имеющего две управляющие функции. Пусть уравнения управляемого движения материальной точки имеют вид

$$m\ddot{x}_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1) + u_1, \quad (1.8.7)$$

$$m\ddot{x}_2 = f_2(x_2, \dot{x}_2) + u_2,$$

где x_1, x_2 — координаты точки; m — масса; функции f_1, f_2 характеризуют силы сопротивления; u_1, u_2 — управляющие силы. Ставится задача построения таких управляющих сил, при которых движение материальной точки происходит таким образом, что

$$v = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = v^*(t), \quad x_2(t) = x_2^*(t), \quad (1.8.8)$$

где $v^*(t), x_2^*(t)$ — заданные функции времени. Иначе говоря, требуется решить задачу управления величиной скорости движения и положением точки по координате x_2 .

Следуя методике [1.70], обозначим ошибки выполнения заданий

$$\varphi_1(t) = v^*(t) - v(t), \quad \varphi_2(t) = x_2^*(t) - x_2(t). \quad (1.8.9)$$

Потребуем, чтобы в процессе управления выполнялись равенства

$$\dot{\varphi}_1 + \alpha\varphi_1 = 0, \quad \ddot{\varphi}_2 + \alpha_1\dot{\varphi}_2 + \alpha_0\varphi_2 = 0, \quad (1.8.10)$$

где $\alpha, \alpha_0, \alpha_1$ — известные коэффициенты. Причем эти коэффициенты таковы, что

$$\varphi_1(t) \rightarrow 0, \quad \varphi_2(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Для построения искомых управляющих функций необходимо найти требуемые значения старших производных \ddot{x}_1^* и \ddot{x}_2^* из уравнений (1.8.10), а затем подставить их в уравнения движения (1.8.7) вместо \ddot{x}_1 и \ddot{x}_2 соответственно. В результате будут найдены соотношения, из которых определяются управления u_1, u_2 . Выполним необходимые преобразования.

В соответствии с (1.8.8) и (1.8.9) имеем

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{d}{dt}(v^* - v) = \dot{v}^* - \frac{\dot{x}_1}{v}\ddot{x}_1 - \frac{\dot{x}_2}{v}\ddot{x}_2. \quad (1.8.11)$$

Для ошибки φ_2 справедливы равенства

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{x}_2^* - \dot{x}_2, \quad \ddot{\varphi}_2 = \ddot{x}_2^* - \ddot{x}_2. \quad (1.8.12)$$

С учетом выражения (1.8.11) первое уравнение (1.8.10) записывается так:

$$\dot{x}_1\ddot{x}_{1\tau} + \dot{x}_2\ddot{x}_{2\tau} = v[\dot{v}^* + \alpha(v^* - v)]. \quad (1.8.13)$$

Здесь вторые производные помечены индексом «т», так как они соответствуют требуемым значениям.

Второе уравнение (1.8.10) с учетом (1.8.12) дает возможность непосредственно определить

$$\ddot{x}_{2т}(t) = \ddot{x}_2^* + \alpha_1(\dot{x}_2^* - \dot{x}_2) + \alpha_0(x_2^* - x_2). \quad (1.8.14)$$

Зная $\ddot{x}_{2т}$, из (1.8.13) находим требуемое значение второй производной первой координаты

$$\ddot{x}_{1т}(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}\right)^2} [\dot{v}^* + \alpha(v^* - v)] - \left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}\right) [\ddot{x}_2^* + \alpha_1(\dot{x}_2^* - \dot{x}_2) + \alpha_0(x_2^* - x_2)]. \quad (1.8.15)$$

Таким образом, требуемые значения старших производных определяются выражениями (1.8.14), (1.8.15). Подстановка этих выражений в уравнения движения (1.8.7) дает искомые управляющие функции:

$$\begin{aligned} u_1 &= m\ddot{x}_{1т} - f_1(x_1, \dot{x}_1), \\ u_2 &= m\ddot{x}_{2т} - f_2(x_2, \dot{x}_2). \end{aligned} \quad (1.8.16)$$

Структурная схема контура управления движением объекта (1.8.7) приведена на рис. 1.17. Она соответствует векторному

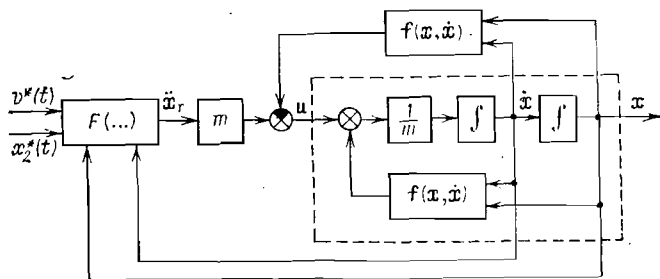


Рис. 1.17

изображению переменных. Оператор $F(\dots)$ определяется правыми частями выражений (1.8.14), (1.8.15).

На вход системы поступают задающие воздействия — функции времени $v^*(t)$, $x_2^*(t)$, которые должны воспроизводиться в процессе управляемого движения. Вычислитель системы формирует требуемые значения $\ddot{x}_{1т}$, $\ddot{x}_{2т}$ в каждый момент времени согласно выражениям (1.8.14) и (1.8.15). Для этого используется

информация о состоянии объекта (x_k, \dot{x}_k) . Отметим, что вычисление функций $f_1(x_1, \dot{x}_1)$, $f_2(x_2, \dot{x}_2)$ может выполняться либо единым вычислителем системы управления, либо специальными функциональными преобразователями. Это зависит от конкретных особенностей системы. На рис. 1.17 отражен случай, когда функции f_1 , f_2 вычисляются отдельными функциональными устройствами. Штриховой линией отмечены блоки, относящиеся к математической модели объекта.

1.8.2. Воспроизведение заданных траекторий. Пусть управляемое движение описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) + u_1, \\ \ddot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + u_2.\end{aligned}\tag{1.8.17}$$

Ставится задача построения управляющих функций u_1 , u_2 , при которых движение проходит по кривой, заданной уравнением

$$\psi_1(x_1, x_2) = 0.\tag{1.8.18}$$

Необходимо при этом, чтобы скорость движения по заданной траектории была постоянной, т. е.

$$\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = v = \text{const}.\tag{1.8.19}$$

Это условие для удобства запишем в следующем виде:

$$\psi_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - v^2 = 0.\tag{1.8.20}$$

В соответствии с методикой [1.70] вводим ошибки, характеризующие отклонение фактической траектории от заданной программы:

$$\delta_1 = \psi_1(x_1, x_2),\tag{1.8.21a}$$

$$\delta_2 = \psi_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - v^2.\tag{1.8.21b}$$

Дифференциальные уравнения, определяющие переходный процесс, назначаем в виде

$$\ddot{\delta}_1 + \alpha_1 \dot{\delta}_1 + \alpha_0 \delta_1 = 0,\tag{1.8.22a}$$

$$\dot{\delta}_2 + \beta \delta_2 = 0,\tag{1.8.22b}$$

где коэффициенты α_0 , α_1 и β таковы, что решения обладают желаемыми свойствами.

Расчетные соотношения для искомых управляющих функций получаются в результате подстановки в (1.8.22) выражений для производных, найденных в силу уравнений движения (1.8.17). Выполним необходимые вычисления. На основании (1.8.21a)

имеем

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= \frac{d}{dt} \delta_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \dot{x}_2, \\ \ddot{\delta}_1 &= \frac{d}{dt} \dot{\delta}_1 = \sum_{j=1}^2 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} \ddot{x}_j \right].\end{aligned}$$

Производные по времени необходимо вычислять на движениях рассматриваемой системы. Поэтому с учетом (1.8.17) следует записать

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= \psi_{11} \dot{x}_1 + \psi_{12} \dot{x}_2, \\ \ddot{\delta}_1 &= \sum_{j=1}^2 \left[\frac{d}{dt} (\psi_{1j}) \dot{x}_j + \psi_{1j} (f_j + u_j) \right].\end{aligned}\tag{1.8.23}$$

Здесь обозначено

$$\psi_{1j} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, с учетом (1.8.21а) и (1.8.23) уравнение (1.8.22а) можно записать так:

$$\psi_{11} u_1 + \psi_{12} u_2 = b_1, \tag{1.8.24}$$

где обозначено

$$b_1 = -\alpha_0 \psi_1(x_1, x_2) - \alpha_1 (\psi_{11} \dot{x}_1 + \psi_{12} \dot{x}_2) - \sum_{j=1}^2 \left[\frac{d}{dt} (\psi_{1j}) \dot{x}_j + \psi_{1j} f_j \right]. \tag{1.8.25}$$

Запишем теперь в раскрытой форме уравнение (1.8.22б). В соответствии с определением (1.8.21б) функции δ_2 имеем

$$\dot{\delta}_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \ddot{x}_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \ddot{x}_2 = 2\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + 2\dot{x}_2 \ddot{x}_2.$$

Принимая во внимание уравнения движения (1.8.17), из последнего равенства получаем

$$\dot{\delta}_2 = 2\dot{x}_1 (f_1 + u_1) + 2\dot{x}_2 (f_2 + u_2).$$

Подстановка этого выражения в (1.8.22б) дает второе уравнение относительно искомых управляющих функций

$$\dot{x}_1 u_1 + \dot{x}_2 u_2 = b_2, \tag{1.8.26}$$

где обозначено

$$b_2 = -\dot{x}_1 f_1 - \dot{x}_2 f_2 - 0,5\beta \psi_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2). \tag{1.8.27}$$

Итак, управляющие функции, реализующие заданную программу движения (1.8.19), (1.8.20), определяются системой алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\psi_{11}(x_1, x_2)u_1 + \psi_{12}(x_1, x_2)u_2 &= b_1, \\ \dot{x}_1 u_1 + \dot{x}_2 u_2 &= b_2.\end{aligned}\quad (1.8.28)$$

Решение этих уравнений существует, если выполняется условие

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \dot{x}_1 \neq 0. \quad (1.8.29)$$

Пусть условие (1.8.29) выполняется, тогда

$$u_1 = \frac{\dot{x}_2 b_1 - \psi_{12} \dot{b}_2}{\psi_{11} \dot{x}_2 - \psi_{12} \dot{x}_1}, \quad u_2 = -\frac{\dot{x}_1 b_1 - \psi_{11} \dot{b}_2}{\psi_{11} \dot{x}_2 - \psi_{12} \dot{x}_1}. \quad (1.8.30)$$

Определением законов формирования управляющих функций (1.8.30) исчерпывается задача синтеза для системы (1.8.17).

Рассмотрим пример [1.70]. Пусть уравнения движения (1.8.17) имеют вид

$$\ddot{x}_1 = u_1, \quad \ddot{x}_2 = u_2, \quad (1.8.31)$$

т. е. для принятых обозначений $f_1 = f_2 = 1$. Программу движения (1.8.18) зададим в виде уравнения параболы

$$\psi_1(x_1, x_2) = x_1 - k_1 x_2^2 - k_2 = 0, \quad k_1, k_2 = \text{const.} \quad (1.8.32)$$

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned}\psi_{11} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = 1, \quad \psi_{12} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = -2k_1 x_2, \\ \frac{d}{dt} \psi_{11} &= 0, \quad \frac{d}{dt} \psi_{12} = -2k_1 \dot{x}_2.\end{aligned}$$

Поэтому система уравнений (1.8.28) имеет вид

$$\begin{aligned}u_1 - 2k_1 x_2 u_2 &= b_1, \\ \dot{x}_1 u_1 + \dot{x}_2 u_2 &= b_2,\end{aligned}\quad (1.8.33)$$

где в соответствии с (1.8.25) и (1.8.27) правые части равны

$$b_1 = -\alpha_0 \psi_1(x_1, x_2) - \alpha_1 (\dot{x}_1 - 2k_1 x_2 \dot{x}_2) - 1 + 2k_1 (x_2 - \dot{x}_2^2), \quad (1.8.34)$$

$$b_2 = -\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - 0,5\beta \psi_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2).$$

В процессе управления условие (1.8.29) выполняется, т. е.

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \dot{x}_1 = \dot{x}_2 + 2k_1 x_2 \dot{x}_1 \neq 0.$$

Поэтому, решая уравнения (1.8.33), находим искомые управляющие функции

$$u_1 = \frac{b_1 + 2k_1 b_2}{\dot{x}_2 + 2k_1 x_2 \dot{x}_1} \dot{x}_2, \quad u_2 = - \frac{\dot{x}_1 b_1 - b_2}{\dot{x}_2 + 2k_1 x_2 \dot{x}_1}. \quad (1.8.35)$$

Структурная схема замкнутой системы (1.8.31), (1.8.35) для векторного изображения переменных приведена на рис. 1.18. Оператор $g(\dots)$ на схеме соответствует правым частям соотношений (1.8.35), т. е.

$$u_1 = g_1(x, \dot{x}), \quad u_2 = g_2(x, \dot{x}).$$

Вычислитель формирует управляющие функции u_1, u_2 в соответствии с расчетными соотношениями (1.8.34) и (1.8.35). Для этого используется информация о состоянии объекта в виде значений x, \dot{x} . Внешней информацией для системы управления является заданная программа движения.

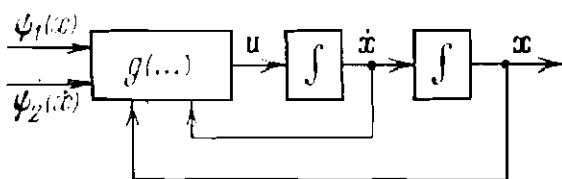


Рис. 1.18

Отметим специфическую особенность методики синтеза управлений из условия реализации назначенного переходного процесса.

Она заключается в следующем. Искомые управляющие функции, осуществляющие требуемое движение системы, определяются в результате решения конечных уравнений (алгебраических или трансцендентных). Может оказаться, что практическая реализация найденных таким образом управляющих функций затруднительна. В общем случае это связано с нарушением условия вида (1.8.29). Чтобы преодолеть такие затруднения, в [1.70] рекомендуется применять замену независимой переменной в дифференциальных уравнениях, определяющих требуемое качество переходных процессов. Именно, вместо переменной времени t можно использовать любую другую переменную τ , которая увеличивается во времени, так что между этими переменными существует соотношение

$$\frac{d\tau}{dt} = \gamma(x, \dot{x}, \dots) > 0, \quad t = \int_0^{\tau} \frac{1}{\gamma} d\tau, \quad (1.8.36)$$

где $\gamma(x, \dot{x}, \dots)$ — неотрицательная функция координат состояния объекта, называемая коэффициентом преобразования. В общем случае функция $\gamma(x, \dot{x}, \dots)$ может быть нелинейной.

Преобразование (1.8.36) известно в математике как преобразование Лиувилля [1.71]. При этом новую переменную τ часто называют фиктивным временем.

Переход к новой переменной τ означает, что функции времени $\delta_j(t)$ преобразуются в функции $\delta_j(\tau)$. Для однозначности функции $\delta_j(\tau)$ необходимо, чтобы преобразование (1.8.36) было однозначным.

Известный произвол в выборе коэффициента $\gamma(x, \dot{x}, \dots)$ позволяет в случае необходимости соответствующим образом определить преобразование (1.8.36). Функция $\gamma(x, \dot{x}, \dots)$ может быть выбрана так, чтобы выражения для управляющих функций не содержали особенностей и были определены для тех значений переменных состояния, которые являются допустимыми по условиям функционирования управляемого объекта. Процедуру применения преобразования (1.8.36) рассмотрим на простейшем примере.

Пусть управляемое движение описывается уравнением

$$\ddot{x} = u. \quad (1.8.37)$$

Требуется построить управляющую функцию u из условия, чтобы переменная x изменялась по гармоническому закону $x(t) = A \sin \omega t$ с амплитудой A и частотой ω .

При гармонических колебаниях между переменными x и \dot{x} существует следующая зависимость:

$$\psi(x, \dot{x}) = x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} - A^2 = 0. \quad (1.8.38)$$

Ошибку выполнения программы обозначим

$$\delta = x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} - A^2. \quad (1.8.39)$$

Управляющую функцию будем строить из условия, чтобы процесс изменения $\delta(t)$ определялся решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\delta(t)}{dt} + \alpha\delta(t) = 0, \quad \alpha > 0. \quad (1.8.40)$$

Проведем необходимые преобразования по определению закона формирования управляющей функции.

Согласно (1.8.39) производная по времени

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = 2x\dot{x} + 2\frac{\dot{x}}{\omega^2}\ddot{x}.$$

Поэтому в силу уравнения движения (1.8.37):

$$\dot{\delta} = 2\dot{x} \left(x + \frac{1}{\omega^2} u \right). \quad (1.8.41)$$

С учетом этого выражения на основании (1.8.40) имеем

$$2\dot{x}\left(x + \frac{1}{\omega^2}u\right) + \alpha\delta = 0.$$

Отсюда находим искомое управление

$$u = -\omega^2\left(x + \alpha \frac{\delta}{2\dot{x}}\right). \quad (1.8.42)$$

Процессы в замкнутой системе (1.8.37), (1.8.42) определяются дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = -\omega^2\left(x + \alpha \frac{\delta}{2\dot{x}}\right). \quad (1.8.43)$$

Если точка (x, \dot{x}) находится на кривой $\psi(x, \dot{x}) = 0$, то ошибка $\delta = 0$. В этом случае из (1.8.43) следует уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Если точка (x, \dot{x}) не скользит по кривой $\psi(x, \dot{x}) = 0$, то управляющая функция имеет составляющую

$$\Delta u = -\omega^2 \alpha \frac{\psi(x, \dot{x})}{2\dot{x}},$$

которая стремится вывести систему на заданную программу движения.

Вычисление величины Δu связано с необходимостью деления на \dot{x} . При наличии колебаний переменная \dot{x} принимает нулевые значения. Поэтому реализация закона управления (1.8.42) связана с известными затруднениями. Чтобы избежать этих затруднений, запишем уравнение (1.8.40) для новой переменной:

$$\frac{d\delta}{d\tau} + \bar{\alpha}\delta = 0, \quad \bar{\alpha} > 0. \quad (1.8.44)$$

Поскольку в соответствии с (1.8.36) дифференциал

$$dt = \gamma^{-1}d\tau, \quad \gamma(x, \dot{x}) > 0,$$

то производная $\dot{\delta}$, определяемая выражением (1.8.41), будет равна

$$\dot{\delta}_\tau = \frac{\partial \delta}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = 2\gamma^{-1}\dot{x}\left(x + \frac{1}{\omega^2}u\right), \quad (1.8.45)$$

где буквой τ обозначена производная по новой независимой переменной. При этом производная по t обозначается, как обычно, \dot{x} .

С учетом выражения (1.8.45) уравнение (1.8.44) принимает вид

$$2\dot{x}\left(x + \frac{1}{\omega^2}u\right) + \gamma\bar{\alpha}\delta = 0.$$

Отсюда находим управляющую функцию

$$u = -\omega^2\left(x + \bar{\alpha}\frac{\delta}{2x}\gamma\right). \quad (1.8.46)$$

Примем теперь $\gamma(x, \dot{x}) = \dot{x}^2$. Эта функция удовлетворяет условию (1.8.36). В таком случае получаем из (1.8.46) искомую управляющую функцию

$$u = -\omega^2(x + 0,5\bar{\alpha}\dot{x}\delta). \quad (1.8.47)$$

Практическая реализация закона управления (1.8.47) не вызывает затруднений.

1.8.3. Заключение. Рассмотренные примеры структурного синтеза систем программного движения свидетельствуют о высокой эффективности процедуры, развитой Л. М. Бойчуком. С помощью этого метода искомая структура алгоритма управления однозначно определяется структурой математической модели управляемого объекта и моделью назначаемой программы движения. По формулировке задачи синтеза и технологии ее решения обсуждаемый подход непосредственно соответствует содержанию и технологии решения обратных задач динамики управляемых систем. С этой точки зрения теория структурного синтеза, развитая в [1.70], в наибольшей степени опирается на концепции обратных задач динамики, и, возможно, поэтому она оказывается более эффективной в технических приложениях.

Как можно было заметить, во всех рассмотренных примерах в уравнениях математических моделей управляемых систем управляющие функции входили линейно. Это обстоятельство не является случайным. Линеиность уравнений движения по отношению к синтезируемым управляющим функциям либо их разрешимость в отношении этих функций являются существенными для рассмотренного метода. В тех случаях, когда управляющие функции входят нелинейно в уравнения движения, непосредственное применение процедуры определения высшей производной исключено, если не удастся найти соответствующие обратные операторы. Однако идеи обсуждаемого подхода могут быть развиты и для этого класса управляемых объектов.

§ 1.9. Управление конечным состоянием

Еще одно направление применения идей, близких к методу обратных задач динамики, связано с построением алгоритмов терминального управления. Наиболее интересные с точки зрения практических приложений результаты получены в рабо-

тах А. П. Батенко [1.74, 1.75]. Развитые здесь приемы определения терминальных управлений основаны на представлении управляющих функций в виде полиномов относительно времени. Коэффициенты этих полиномов определяются таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия на концах траектории движения управляемого объекта. В результате выполнения такой процедуры получается программный закон управления, а затем на его основе строится закон управления с обратной связью. Изложим основные положения этого метода на простом примере.

Пусть управляемое движение подчиняется дифференциальному уравнению

方程
$$m\ddot{x}(t) = F(x, \dot{x}, u), \quad (1.9.1)$$

где m — масса, F — результирующая действующих сил, u — управляющая функция, с помощью которой создается управляющая сила. Пусть в начальный момент времени состояние управляемого объекта характеризуется значениями

边界条件
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (1.9.2)$$

Ставится задача синтезировать алгоритм управления, с помощью которого объект переводится из точки (1.9.2) в назначенную конечную точку

边界条件
$$x(T) = x_T, \quad \dot{x}(T) = \dot{x}_T \quad (1.9.3)$$

за время T .

В соответствии с методом, развитым в [1.74], задача решается следующим образом. Вместо уравнения (1.9.1) рассматривается следующее:

$$\ddot{x}(t) = \varepsilon, \quad \varepsilon = m^{-1}F. \quad (1.9.4)$$

Здесь через ε обозначено ускорение по координате x . Принимается, что в интервале $[0, T]$ управляющее ускорение должно изменяться по линейному закону

$$\varepsilon = c_0 + c_1 t, \quad (1.9.5)$$

где параметры c_0, c_1 определяются таким образом, чтобы выполнялись граничные условия (1.9.3) на правом конце траектории.

Подставим (1.9.5) в (1.9.4) и выполним двукратное интегрирование по времени в пределах $[0, T]$. В результате получим с учетом (1.9.3):

$$\begin{aligned} \dot{x}_T &= \dot{x}_0 + c_0 T + c_1 \frac{1}{2} T^2, \\ x_T &= x_0 + \dot{x}_0 T + c_0 \frac{1}{2} T^2 + c_1 \frac{1}{6} T^3. \end{aligned} \quad (1.9.6)$$

Равенства (1.9.6) представляют собой уравнения относительно

известных параметров c_0, c_1 . Решая их, найдем

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{6x_0}{T^2} + \frac{6x_T}{T^2} - \frac{4\dot{x}_0}{T} - \frac{2\dot{x}_T}{T}, \\ c_1 &= \frac{12x_0}{T^3} - \frac{12x_T}{T^3} + \frac{6\dot{x}_0}{T^2} + \frac{6\dot{x}_T}{T^2}. \end{aligned} \quad (1.9.7)$$

Таким образом, если с помощью системы управления объекту сообщается ускорение (1.9.5), где параметры c_0, c_1 определяются по (1.9.7), то в процессе движения объект будет переведен из точки (1.9.2) в назначенную точку (1.9.3). Особенность закона управления (1.9.5) заключается в том, что он является программным. В самом деле, параметры c_0, c_1 вычисляются по информации о положении начальной (x_0, \dot{x}_0) и конечной (x_T, \dot{x}_T) точек. В процессе управления они должны оставаться постоянными. Ускорение ε на траектории движения изменяется по линейному закону во времени.

Чтобы построить закон управления с обратной связью, необходимо непрерывно вычислять требуемое ускорение ε по текущему состоянию управляемого объекта. Расчетные соотношения для этого случая непосредственно получаются из (1.9.7), если считать, что текущее состояние объекта является начальным. Принимая в (1.9.7) $x_0 = x(t)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(t)$ и полагая в (1.9.5) $t = 0$, найдем

$$\varepsilon = -\frac{6x}{(T-t)^2} + \frac{6x_T}{(T-t)^2} - \frac{4\dot{x}}{T-t} - \frac{2\dot{x}_T}{T-t}. \quad (1.9.8)$$

Заметим, что в выражении для c_0 величина T заменена на оставшееся время $T - t$ движения в конечную точку.

Закон управления (1.9.8) строится по схеме с обратной связью, так как управляющее ускорение ε вычисляется по текущим значениям $x(t)$, $\dot{x}(t)$. Можно видеть, однако, что в окрестности назначенной точки $T - t \rightarrow 0$. Вследствие этого коэффициенты закона управления неограниченно увеличиваются. В [1.74] рассмотрено несколько приемов, позволяющих обойти указанную особенность. Наиболее удобным для практической реализации является способ преследования ведущей точки, которая отстоит от управляемой точки (x, \dot{x}) на величину временного интервала $\Delta T > 0$. Получим закон управления для этого случая.

Обозначим через x^*, \dot{x}^* координату ведущей точки и скорость ее движения. Так как эта точка подчиняется такому же закону движения, что и управляемая точка-объект, то аналогично (1.9.6) можно записать

$$\begin{aligned} x^* &= \dot{x}_0 + c_0(t + \Delta T) + c_1 \frac{1}{2}(t + \Delta T)^2, \\ x^* &= x_0 + \dot{x}_0(t + \Delta T) + c_0 \frac{1}{2}(t + \Delta T)^2 + c_1 \frac{1}{6}(t + \Delta T)^3. \end{aligned} \quad (1.9.9)$$

Входящие сюда коэффициенты c_0, c_1 определяются формулами (1.9.7), а время t изменяется в пределах $[0, T]$.

Обратимся теперь к закону управления (1.9.8). Поскольку назначенная точка является подвижной и отстоит от управляемой точки на величину ΔT , то в (1.9.8) вместо T следует положить $t + \Delta T$. В таком случае вместо (1.9.8) будем иметь

$$\varepsilon = -\frac{6x}{\Delta T^2} + \frac{6\dot{x}}{\Delta T^2} - \frac{4x}{\Delta T} - \frac{2\dot{x}}{\Delta T}. \quad (1.9.10)$$

Если система управления сообщает объекту ускорение, вычисляемое по (1.9.10), то его движение будет повторять движение точки (x^*, \dot{x}^*) , никогда не достигая ее. Поскольку, однако, подвижная точка проходит через назначенную граничную точку (x_T, \dot{x}_T) , то через время T управляемый объект достигнет этой точки. Причем при $t = T$ будут выполняться условия, наложенные на движение.

Запишем закон управления (1.9.10) с учетом (1.9.9). Выполняя подстановку выражений для x^*, \dot{x}^* в (1.9.10), найдем

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^3 k_i t^i + r_0 x + r_1 \dot{x}, \quad (1.9.11)$$

где постоянные коэффициенты определяются формулами:

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{6x_0}{\Delta T^2} + \frac{4\dot{x}_0}{\Delta T} + c_0, & k_1 &= \frac{6\dot{x}_0}{\Delta T^2} + \frac{4c_0}{\Delta T} + c_1, \\ k_2 &= \frac{3c_0}{\Delta T^2} + \frac{2c_1}{\Delta T}, & k_3 &= \frac{c_1}{\Delta T}, & r_0 &= -\frac{6}{\Delta T}, & r_1 &= -\frac{4}{\Delta T}. \end{aligned} \quad (1.9.12)$$

Из (1.9.11) видно, что закон управления ускорением имеет программную составляющую в виде полинома третьей степени относительно времени и составляющую, которая представляет собой обратную связь по координате x и скорости ее изменения \dot{x} . Коэффициенты закона управления постоянны.

В соответствии с (1.9.11) и (1.9.12) процесс управления организуется следующим образом. Перед пуском системы измеряется фактическое состояние управляемого объекта (x_0, \dot{x}_0) , и соответствующие числовые значения вводятся в вычислитель. Наряду с этим в вычислитель вводятся координаты назначенной точки (x_T, \dot{x}_T) . Эта информация используется для расчета коэффициентов c_0, c_1 по формулам (1.9.7) и коэффициентов закона управления (1.9.11) по формулам (1.9.12). После пуска (включения) системы управления требуемое ускорение ε вычисляется согласно (1.9.11). Для этого используется текущее время t , а также информация о текущем состоянии $x(t), \dot{x}(t)$ управляемого объекта. Ускорение ε является входным задающим воздействием для автоматической системы.

На рис. 1.19 показана структурная схема замкнутой системы терминального управления. В системе имеется контур отработки ускорения, который реализует соотношение

$$\dot{u} = k_{\varepsilon}(\varepsilon - \ddot{x}). \quad (1.9.13)$$

Значение коэффициента усиления k_{ε} должно быть достаточно большим, чтобы время переходных процессов в контуре ускорения было значительно меньше величины T . Таким образом, искомый алгоритм терминального управления строится по соотношениям (1.9.11), (1.9.13).

Изложенная процедура построения алгоритмов управления близка по своему существу к концепциям обратных задач динамики. Хотя здесь траектория движения управляемого объекта

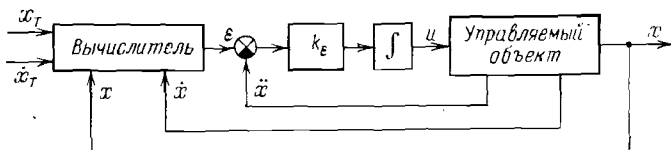


Рис. 1.19

непосредственно не назначается, тем не менее она вполне определена, если для математической модели вида (1.9.4) задается закон изменения управляющего ускорения (1.9.5). В таком случае алгоритм управления синтезируется из условия, чтобы траектория движения в назначенную точку имела вид полинома второй степени относительно времени t . На этом основании процедуру синтеза терминальных законов управления, развитую А. П. Батенко, можно отнести к числу тех, которые развивают идеи обратных задач динамики. Отметим, что в [1.76] дано развитие методов синтеза алгоритмов управления конечным состоянием. Здесь назначаемая траектория движения определяется в результате решения задачи оптимизации.

Интересное направление по применению концепций обратных задач динамики для синтеза систем терминального управления развивается в работах А. П. Крищенко. Библиографические справки по этим вопросам можно найти в [1.79].

§ 1.10. Бинарные системы автоматического управления

В последнее время возникло новое направление в теории синтеза нелинейных систем автоматического управления. Принципиальная особенность этого направления заключается в том, что искомые законы управления строятся из условия, чтобы замкнутая система была асимптотически устойчивой, а траектория ее движения следовала бы за траекторией движения некоторой системы сравнения. Существенно при этом, что задача синтеза

решается по неполной информации о математической модели управляемого объекта, а найденные законы управления обеспечивают выполнение заданных требований при параметрических и координатных возмущениях. Обсуждаемое направление развивается С. В. Емельяновым и его сотрудниками [1.80—1.87].

Изложим коротко исходную идею новой теории. Пусть управляемый объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.10.1)$$

где \mathbf{x} , \mathbf{u} — n -мерные векторы координат состояния и управляющих функций. Относительно вектор-функции \mathbf{f} предполагается, что она непрерывна и по \mathbf{x} удовлетворяет условию Липшица. Для простоты будем считать, что $\mathbf{B} = \text{const}$. Наряду с моделью (1.10.1) задана математическая модель системы сравнения

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{G}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (1.10.2)$$

движение которой соответствует требованиям замкнутой синтезируемой системы.

При сформулированных условиях необходимо построить закон управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, при котором замкнутая система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.10.3)$$

асимптотически устойчива в целом, а траектория $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ ее движения из точки \mathbf{x}_0 в начало координат $\mathbf{x} = 0$ проходит в окрестности траектории $\mathbf{y}(t, \mathbf{x}_0)$ движения системы (1.10.2) из точки $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0$. Для случая, когда \mathbf{B} есть диагональная матрица, искомые управляющие функции строятся по формуле

$$u_j(\mathbf{x}, t) = \psi_j(\delta) \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (1.10.4)$$

где $\Phi(\mathbf{x}, t)$ — мажоранта всех $|\varphi_i(\mathbf{x}, t)|$. Существование $\Phi(\mathbf{x}, t)$ гарантируется условиями, наложенными на вектор-функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Множители ψ_j в (1.10.4) определяются как функции отклонений $\delta_i = x_i - y_i$ координат \mathbf{x} , состояния управляемой системы (1.10.3) от координат \mathbf{y} , системы сравнения (1.10.2). При этом для формирования $\psi_j(\delta)$ могут использоваться лишь некоторые компоненты вектора \mathbf{x} , доступные для измерения.

Как следует из (1.10.4), выражения для управляющих функций u_j содержат два сомножителя (сигнала). На этом основании системы с такими законами управления называют бинарными.

В [1.80—1.87] изучены основные свойства бинарных законов управления и возможности их применения в нелинейных и нестационарных системах. В указанных работах рассмотрены принципиальные положения новой теории синтеза. Разработка вопросов применения этих положений для решения задач управления движением различных классов объектов представляет большой теоретический и практический интерес.

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ НАЗНАЧЕННЫХ ТРАЕКТОРИЙ
ДВИЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Теория автоматического регулирования и управления достигла к настоящему времени достаточно высокого уровня развития. Разработанная теория оптимальных процессов и развитые конструктивные процедуры построения оптимальных алгоритмов решают многие задачи проектирования автоматических систем. Основу теории оптимальных систем составляет математический аппарат решения задач оптимизационного характера. К ним относятся принцип максимума, динамическое программирование, метод моментов, функций Ляпунова, классическое вариационное исчисление. Библиография по теории оптимального управления весьма обширна. Систематическое изложение этих методов можно найти в монографиях [2.1—2.10], где имеются ссылки на многочисленные работы в этой области.

В этой главе мы рассмотрим задачи построения алгоритмов управления из условия реализации заданных движений. В методическом отношении излагаемые процедуры основываются на концепциях обратных задач динамики, вытекающих из свойств симметрии в автоматических системах.

В математике, современной физике и квантовой химии установлены свойства симметрии. Использование таких свойств значительно упрощает теоретические исследования, позволяет выдвигать гипотезы и выводить существенно новые заключения о закономерностях, присущих изучаемым математическим объектам и объектам материального мира. Симметрия как совокупность свойств математических моделей и физических явлений определяет методологию проведения исследований в различных областях знаний [2.11—2.15]. Свойства симметрии можно обнаружить и в теории систем автоматического управления. Об этом свидетельствуют, в частности, выявленные А. А. Красовским свойства симметрии определенного класса законов управления в оптимальных автоматических системах [2.7].

В этой главе устанавливаются свойства симметрии линейных управляемых систем, вытекающие из рассмотрения задачи осуществления движения по назначенной траектории. Затем изучаются задачи конструирования алгоритмов управления движением на основе общих положений, определяемых свойствами симметрии. Привлечение таких понятий дает возможность построить эффективные процедуры синтеза алгоритмов из условия обеспечения предписанных динамических характеристик управляемого процесса.