Н. Л. Григоренко[1]

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПО ЗАДАННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРАЕКТОРИИ *

Введение

Рассматривается задача аналитического синтеза управления для нелинейной математической модели, обеспечивающего движение части координат фазового вектора по заданной траектории в R^3. Решение классов задач управления движением по определенной траектории для нелинейных систем содержится в работах [1,2,3], в которых предложены подходы к аналитическому конструированию соответствующих управлений. В настоящей работе предложен алгоритм управления, гарантирующий асимптотическое сближение и удержание части компонент фазового вектора нелинейной системы на желаемой траектории движения. Эта траектория задается в виде некоторой кривой в местной пространственной системе координат. Предлагаемый алгоритм управления может быть востребован для реализации различных задач робототехники, например, задач мониторинга окружающей среды.

Математическая модель.

Рассматривается движение фазового вектора $y \in R^3$ описываемое системой уравнений

$$\ddot{y} = A(y,\dot{y}) + B(y,\dot{y})v, \;\; y(0) = y_0, \;\; \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \qquad (1)$$

где $v \in R^3$ - вектор управления; функция $A(y,\dot{y}) \in R^3$ и 3×3 матрица $B(y,\dot{y})$ удовлетворяют условиям теорем уществования, единственности и нелокальной продолжимости решений системы (1) в классе измеримых по Лебегу управлений $v(t), t \geqslant 0$.

Постановка задачи.

Поставим задачу определения вектора управления v как функции координат состояния $v = v(y,\dot{y})$ обеспечивающих асимптотическое движение вектора $y(t)$ к заданной траектории в R^3 и движение вдоль нее.

[1]Профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, e-mail: grigor@cs.msu.ru.

*

Заданная траектория представляет собой кривую в R^3 в виде пересечения двух поверхностей

$$f_1(y)=0,\ f_2(y)=0, \tag{2}$$

где f_1, f_2 - дифференцируемые функции.

Простроение управления движением системы (1) в R^3.

В основу решения рассматриваемой задачи синтеза положены алгоритмы формирования притягивающих предельных множеств в виде кривых в пространстве координат движения, т. е. аттракторов заданной геометрической формы [1,2,3]. С точки зрения процедуры синтеза регуляторов это выражается в виде задаваемых инвариантных многообразий. Инвариантные многообразия задаются таким образом, чтобы уравнения декомпозированной системы на пересечении многообразий соответствовали бы некоторым эталонным дифференциальным уравнениям, описывающим динамику систем с заданным геометрическим аттрактором. Обозначим

$$f(y)=f_1^2(y)+f_2^2(y). \tag{3}$$

Предположение 1. *а). $f_1 \cap f_2 \neq \emptyset$;*
б). Кривая пересечения функций f_1, f_2 не содержит особых точек [4];
в). Существует окрестность $D(y_0, \dot{y}_0)$ начальной точки $(y_0, \dot{y}_0)$ и положительная константа α_0 такие, что для векторов $y \in D(y_0, \dot{y}_0)$ выполненно условие $\varphi(y)=f_{y_1}'^2+f_{y_2}'^2+f_{y_3}'^2 \geqslant \alpha_0$.

Лемма 1. *Модель динамической системы с аттрактором в виде пересечения двух поверхностей f_1, f_2, заданных соотношениями (2) в R^3, имеет вид:*

$$\begin{cases} \dot{y}_{1t} &= -wf'_{y_1}f \pm kf'_{2y_3}f'_{1y_2} \mp kf'_{2y_2}f'_{1y_3}, \\ \dot{y}_{2t} &= -wf'_{y_2}f \mp kf'_{2y_3}f'_{1y_1} \pm kf'_{2y_1}f'_{1y_3}, \\ \dot{y}_{3t} &= -wf'_{y_3}f \pm kf'_{2y_2}f'_{1y_1} \mp kf'_{2y_1}f'_{1y_2}. \end{cases} \tag{4}$$

где $k(y)>0, w(y)>0$ - дифференцируемые функции, $\dot{y}_{it}=\frac{dy_i}{dt}$, $f'_{jy_i}=\frac{\partial f_j}{\partial y_i}$, $f'_{y_i}=\frac{\partial f}{\partial y_i}$, $i=1,2,3, j=1,2$. Знаки $\pm$ и $\mp$ в (4) позволяют выбрать желательное направление движения вектора $y(t)$ по линии пересечения поверхностей f_1, f_2.

Доказательство. Из (3) учитывая $f'_{y_i}=2f_1f'_{1y_i}+2f_2f'_{2y_i}$, $i=1,2,3$ имеем:

$$\dot{f}_t=f'_{y_1}y'_{1t}+f'_{y_2}y'_{2t}+f'_{y_3}y'_{3t}=-w(f_{y_1}'^2+f_{y_2}'^2+f_{y_3}'^2)f=-w\varphi(y(t))f.$$

Согласно предположения 1: $\varphi(y)>0$ и для решений системы (4), решение уравнения $f'(t)+w\varphi(t)f(t)=0$ удовлетворяет условию $f(y(t)) \to 0$ при $t->\infty$. Следовательно, в некоторый конечный момент времени T^*, траектория системы (4) попадает в малую окрестность линии пересечения поверхностей f_1, f_2. Для $f_1(y(t)), f_2(y(t))$ при $t \geqslant T^*$ справедливо аналогичное утверждение. Таким образом, для $t>T^*$ вектор

$y(t)$ движется асимптотически приближаясь к линии пересечения. Движение происходит по одному из направлений, задаваемому знаками $\pm$ и $\mp$ в уравнении (4). Функции w, k выбираются из условия нелокальной продолжимости решений системы (4). ■

Для решения поставленной задачи применим метод структурного синтеза [2,3]. Введем функции рассогласования таким образом, чтобы уравнения декомпозированной системы совпадали с уравнениями (4):

$$\psi = \dot{y} - C(y, w, k), \ \psi \in R^3, \tag{5}$$

где $C(y, w, k) \in R^3$ - правая часть системы (4).

Предположение 2. *Вектор-функция рассогласования ψ удовлетворяют функциональным уравнениям*

$$T\dot{\psi}_t + \psi = 0, \tag{6}$$

где T - (3×3) диагональная матрица, с элементами на диагонали - константами $T_i > 0$. Матрица $B(y, \dot{y})$ невырождена для $(y, \dot{y}) \in D(y_0, \dot{y}_0)$.

Найдем управления как решение функциональных уравнений (7). Из (5),(6) имеем:

$$\ddot{y} = \dot{C}_t(y, w, k) - T^{-1}\psi. \tag{7}$$

Из (6),(7) получаем систему уравнений отностельно параметров управления :

$$A(y, \dot{y}) + B(y, \dot{y})v = \dot{C}_t(y, w, k) - T^{-1}\psi. \tag{8}$$

Решение системы (8), относительно $v \in R^3$, имеет вид:

$$v = B^{-1}(y, \dot{y})\Big[-A(y, \dot{y}) + \dot{C}_t(y, w, k) - T^{-1}\psi\Big]. \tag{9}$$

Оценка времени T^* попадания вектора (y_1, y_2, y_3) в малую окрестность пересечения поверхностей (2) из заданной начальной позиции системы (1) выполняется из анализа уравнения Ляпунова [5] для решений уравнений (6).

При управлении (9) для $\psi_i(t), \ i = 1, ..., n$ выполнено соотношение $\psi_i(t) - > 0, t - > \infty$ и для $t > T^*$, уравнения для переменных y_1, y_2, y_3, приобретают форму (4). Решение системы (1) сначала приходит в малую окрестность пересечения поверхностей f_1 и f_2 а за тем движется в малой окрестности линии пересечения [2,3].

Теорема 1. *При выполнении предположений 1 и 2, и выборе функций рассогласования в форме (6), управления (9) гарантируют приход вектора $y(t)$ в малую окрестность пересечения поверхностей (2) за конечное время и дальнейшее асимптотическое движение в окрестности пересечения.*

Замечание 1. *Направление движения вектора $y(t)$ по линии пересечения, для моментов времени $t > T^*$, определяется выбором знака (верхнего или нижнего) в уравнениях (4).*

Простроение управления движением системы (1) в R^n при заданной скорости движения.

Для случая движения по линии пересечения поверхностей f_1, f_2 с заданной скоростью $V(y)$ [1], используется система уравнений (4) вида:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} & = \omega\ \Phi(y), \\ ||\dot{y}|| & = V(y), \end{cases}$$

где $\Phi(y)$ - вектор правой части системы (4); $\omega = \frac{V}{||\Phi(y)||}$.

Пример математической модели, имеющий форму уравнений (1).

Рассмотрим математическую модель движения центра масс твердого тела в трехмерном пространстве [6]:

$$\begin{array}{rclrcl} \dot{V} & = & -g\sin\theta + gv_1, & \dot{H} & = & V\sin\theta, \\ \dot{\theta} & = & -\frac{\cos\theta}{V}g + \frac{g}{V}v_2, & \dot{L} & = & V\cos\theta\cos\psi, \\ \dot{\psi} & = & -\frac{g}{V\cos\theta}v_3, & \dot{Z} & = & -V\cos\theta\sin\psi, \end{array} \tag{10}$$

где V - земная скорость твердого тела, м/с; θ - угол наклона траектории, рад; ψ - угол пути, рад; H - высота, м; L - дальность, м; Z - боковая дальность, м; (v_1, v_2, v_3) - вектор управления, м/c^2.

Систему (10) запишем в виде трех уравнений второго порядка. Выбрав в качестве новых неизвестных функции $y_1 = H,\ y_2 = L,\ y_3 = Z$ и положив $y_4 = \dot{y}_1,\ y_5 = \dot{y}_2,\ y_6 = \dot{y}_3$, получим шесть функций, определяющих в области фазового пространства системы (10), заданной ограничениями

$$V > 0,\ |\theta| < \frac{\pi}{2},\ -\pi < \psi < \pi, \tag{11}$$

обратимую замену переменных, поскольку

$$\begin{cases} V & = & \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}, \\ \sin\theta & = & \frac{y_4}{\sqrt{y_4^2+y_5^2+y_6^2}}, \cos\theta & = & \frac{\sqrt{y_5^2+y_6^2}}{\sqrt{y_4^2+y_5^2+y_6^2}}, \\ \sin\psi & = & -\frac{y_6}{\sqrt{y_5^2+y_6^2}}, \cos\psi & = & \frac{y_5}{\sqrt{y_5^2+y_6^2}}. \end{cases} \tag{12}$$

В переменных $y_i,\ i = 1,\dots,6$, система (10) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 & = & y_4,\ \dot{y}_4 & = & -g + v_1 g\sin\theta + v_2 g\cos\theta, \\ \dot{y}_2 & = & y_5,\ \dot{y}_5 & = & v_1 g\cos\theta\cos\psi - v_2 g\sin\theta\cos\psi + v_3 g\sin\psi, \\ \dot{y}_3 & = & y_6,\ \dot{y}_6 & = & -v_1 g\cos\theta\sin\psi + v_2 g\sin\theta\sin\psi + v_3 g\cos\psi, \end{cases} \tag{13}$$

где величины $V, \sin\theta, \cos\theta, \sin\psi, \cos\psi$ определяются соотношениями (12). Систему (13) с учетом (12) можно записать как систему трех уравнений второго порядка относительно неизвестных функций y_1, y_2, y_3 :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 & = & -g + v_1 g\sin\theta + v_2 g\cos\theta, \\ \ddot{y}_2 & = & v_1 g\cos\theta\cos\psi - v_2 g\sin\theta\cos\psi + v_3 g\sin\psi, \\ \ddot{y}_3 & = & -v_1 g\cos\theta\sin\psi + v_2 g\sin\theta\sin\psi + v_3 g\cos\psi. \end{cases} \tag{14}$$

В векторной форме система (14) имеет вид (1) где

$$\begin{cases} y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H\\ L\\ Z\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix},\ A=-g\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \\ B(y,\dot{y})=g\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0\\ \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta\cos\psi & \sin\psi\\ -\cos\theta\sin\psi & sin\theta\sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}\end{cases} \tag{15}$$

и величины $\sin\theta,\cos\theta$, $\sin\psi,\cos\psi$ определены через y_4,y_5,y_6 по формулам (15). Матрица $\frac{1}{g}B^{-1}(y,\dot{y})$ является ортогональной, так что $B^{-1}(y,\dot{y})=\frac{1}{g^2}B^T(y,\dot{y})$. Соголасно (15), система (14) имеет форму уравнений (1). Приведем для нее примеры построения управлений и траекторий решающих поставленную задачу управления для ряда уравнений поверхностей, задаюших кривую пересечения.

Управление движением по линии пересечения двух плоскостей.

Рассмотрим поверхности, определяющие целевую траекторию (2) следующего вида: $f_1(y_1,y_2,y_3)=a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+d_1$, $f_2(y_1,y_2,y_3)$=$b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3+d_2$.

Динамическая система (4) с аттрактором в виде пересечения поверхностей f_1,f_2, при выполнении предположения 1 имеет вид:

$$\begin{cases} y'_{1t} &= -2w(f_1a_1+f_2b_1)f\pm vb_3a_2\mp vb_2a_3;\\ y'_{2t} &= -2w(f_1a_2+f_2b_2)f\mp vb_3a_1\pm vb_1a_3;\\ y'_{3t} &= -2w(f_1a_3+f_2b_3)f\pm vb_2a_1\mp vb_1a_2.\end{cases}$$

Знаки $\pm$ и $\mp$ соответствуют желательному направлению движения вектора $(y_1(t),y_2(t),y_3(t))$ по линии пересечения поверхностей f_1,f_2. Функции рассогласования (5) имеют вид

$$\begin{cases} \psi_1 &= y_4-[-2w(f_1a_1+f_2b_1)f\pm vb_3a_2\mp vb_2a_3],\\ \psi_2 &= y_5-[-2w(f_1a_2+f_2b_2)f\mp vb_3a_1\pm vb_1a_3],\\ \psi_3 &= y_6-[-2w(f_1a_3+f_2b_3)f\pm vb_2a_1\mp vb_1a_2].\end{cases} \tag{16}$$

Закон управления находится как решение функциональных уравнений (6). Подставляя (16) в (6) имеем:

$$\begin{cases} T_1\left(y'_{4t}-[-2w(f_1a_1+f_2b_1)f]'_t\right)+\psi_1=0;\\ T_2\left(y'_{5t}-[-2w(f_1a_2+f_2b_2)f]'_t\right)+\psi_2=0,\\ T_3\left(y'_{6t}-[-2w(f_1a_3+f_2b_3)f]'_t\right)+\psi_3=0.\end{cases} \tag{17}$$

Преобразуем уравнения (17) с учетом (14):

$$y'_{4t}=[-2w(f_1a_1+f_2b_1)f]'_t-\frac{1}{T_1}\psi_1;\quad v_1g\sin\theta+v_2g\cos\theta=\Gamma_1+g; \tag{18}$$

$$y'_{5t}=[-2w(f_1a_2+f_2b_2)f]'_t-\frac{1}{T_2}\psi_2,$$
$$v_1g\cos\theta\cos\psi-v_2g\sin\theta\cos\psi+v_3g\sin\psi=\Gamma_2, \quad (19)$$
$$y'_{6t}=[-2w(f_1a_3+f_2b_3)f]'_t-\frac{1}{T_3}\psi_3,$$
$$-v_1g\cos\theta\sin\psi+v_2g\sin\theta\cos\psi+v_3g\cos\psi=\Gamma_3. \quad (20)$$

В фомулах (18),(19),(20) через $\Gamma_i, i=1,2,3$ обозначены правые части выражений $y'_{i+3}, i=1,2,3$. Решение системы (18),(19),(20), относительно $v_i, i=1,2,3$, имеет вид (9).

На рис.1 приведен фазовый портрет замкнутой системы, демонстрирующий движение вектора $y(t)$ по линии пересечения f_1 и f_2. Параметры: $g=9.8$; $a_1=1$; $a_2=2$; $a_3=3$; $d_1=1$; $b_1=3$; $b_2=1$; $b_3=2$; $d_2=-1$; $T_1=0.02$; $T_2=0.02$; $T_3=0.02$; $w=1$; $v=0$; $z=1$; $y_1(0)=2$; $y_2(0)=3$; $y_3(0)=2$; $y_4(0)=0$; $y_5(0)=-0.5$; $y_6(0)=-0.5$.

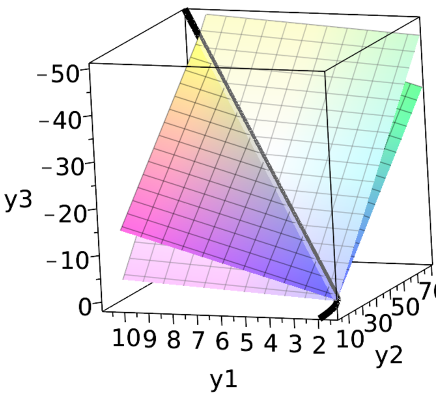

Рис. 1

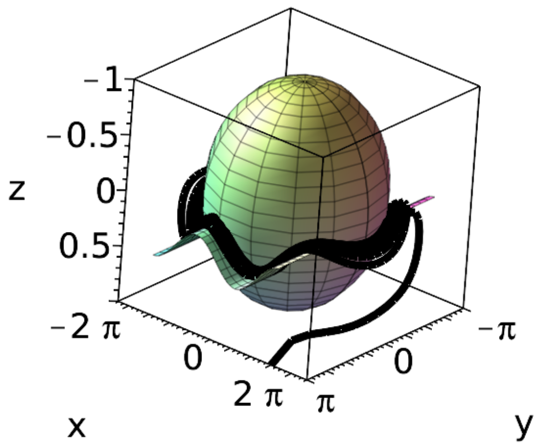

Рис. 2

Управление движением по линии пересечения эллипсоида и цилиндрической поверхности R^3.

Пусть желаемая траектория представляет собой пересечение эллипсоида и цилиндрической поверхности в R^3: $f_1(y_1,y_2,y_3)=\frac{y_1^2}{25}+\frac{y_2^2}{4}+y_3^2-1$, $f_2(y_1,y_2,y_3)=y_3-\frac{1}{6}\sin(y_1)-0.5$. Соответствующая динамическая система (4) с аттрактором в виде пересечения повехностей f_1 и f_2 имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'_{1t} & = & -w(\frac{4}{25}f_1y_1-\frac{1}{3}f_2\cos(y_1))f\pm\frac{v}{2}y_2, \\ y'_{2t} & = & -w(f_1y_2)f\mp v\frac{2}{25}y_1\mp v\frac{1}{3}\cos(y_1)y_3, \\ y'_{3t} & = & -w(4f_1y_3+2f_2)f\pm\frac{v}{12}\cos(y_1)y_2. \end{array}\right. \quad (21)$$

Здесь:$y'_{it}=\frac{dy_i}{dt}$, $i=1,2,3$.

Введем инвариантные многообразия таким образом, чтобы уравнения декомпозированной системы совпадали с уравнениями (21):

$$\begin{cases} \psi_1 &= y_4-(-w(\frac{4}{25}f_1y_1+2f_2\cos(y_1))f\pm\frac{v}{2}y_2), \\ \psi_2 &= y_5-(-w(f_1y_2)f\mp v\frac{2}{25}y_1\pm v\frac{2}{6}\cos(y_1)y_3), \\ \psi_3 &= y_6-(-w(4f_1y_3+2f_2)f\mp\frac{v}{12}\cos(y_1)y_2). \end{cases} \tag{22}$$

Закон управления ищется как решение функциональных уравнений

$$T_i\psi'_{it}+\psi_i=0,\ i=1,2,3. \tag{23}$$

Подставляя (21) в (22) имеем:

$$\begin{cases} y'_{4t} &= (-w(\frac{4}{25}f_1y_1-\frac{1}{3}f_2\cos(y_1))f\pm\frac{vy_2}{2})'_t-\frac{1}{T_1}\psi_1; \\ y'_{5t} &= (-w(f_1y_2)f\mp v\frac{2}{25}y_1\mp v\frac{1}{3}\cos(y_1)y_3)'_t-\frac{1}{T_2}\psi_2; \\ y'_{6t} &= (-w(4f_1y_3+2f_2)f\pm\frac{v}{12}\cos(y_1)y_2)'_t-\frac{1}{T_3}\psi_3. \end{cases} \tag{24}$$

Из (14),(24) получим систему (8), решение которой относительно $v_i, i=1,2,3$, имеет вид (9).

На рис.2 приведен фазовый портрет замкнутой системы, демонстрирующий движение вектора $y(t)$ и соответствующий аттрактор. Параметры: $g=9.8;\ T_1=0.02;\ T_2=0.02;\ T_3=0.02;\ w=10^{-1};\ v=20;$ $y_1(0)=\frac{3}{2}\pi,\ y_2(0)=\pi,\ y_3(0)=1,\ \ y_4(0)=0,\ \ y_5(0)=-0.5,\ y_6(0)=-0.5.$

Управление движением по линии пересечения сферы и цилиндра в R^3.

Пусть желаемая траектория представляет собой линию, задаваемую как пересечение цилиндрической и сферической поверхностей, задаваемыми уравнениями в R^3: $f_1(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2-4r^2=0$, $f_2(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-2r_1y_2=0$. Здесь r,r_1 -константы. Соответствующая динамическая система (4) с аттрактором в виде пересечения цилиндра $f_2=0$ и сферы $f_1=0$ имеет вид :

$$\begin{cases} y'_{1t} &= -w(2f_1y_1+2f_2y_1)f\mp v(2y_2-2r_1)2y_3, \\ y'_{2t} &= -w(2f_1y_2+2f_1(2y_2-2r_1)f\pm v4y_1y_3, \\ y'_{3t} &= -w(2f_1y_3)f\pm v(2y_2-2r_1)2y_1\mp v4y_1y_2. \end{cases} \tag{25}$$

Здесь:$y'_{it}=\frac{dy_i}{dt},\ i=1,2,3.$

Введем инвариантные многообразия таким образом, чтобы уравнения декомпозированной системы совпадали с уравнениями (25):

$$\begin{cases} \psi_1 &= y_4-(-w(2f_1y_1+2f_2y_1)f\mp v(2y_2-2r_1)2y_3), \\ \psi_2 &= y_5-(-w(2f_1y_2+2f_1(2y_2-2r_1)f\pm v4y_1y_3), \\ \psi_3 &= y_6-(-w(2f_1y_3)f\pm v(2y_2-2r_1)2y_1\mp v4y_1y_2). \end{cases} \tag{26}$$

Закон управления ищется как решение функциональных уравнений

$$T_i\dot{\psi}_i+\psi_i=0,\ i=1,2,3. \tag{27}$$

Подставляя (26) в (27) имеем:

$$\begin{cases} y_4' &= \Big(-w(2f_1y_1+2f_2y_1)f \mp v(2y_2-2r_1)2y_3\Big)_t' - \frac{1}{T_1}\psi_1; \\ y_5' &= \Big(-w(2f_1y_2+2f_1(2y_2-2r_1)f \pm v4y_1y_3\Big)_t' - \frac{1}{T_2}\psi_2; \\ y_6' &= \Big(-w(2f_1y_3)f \pm v(2y_2-2r_1)2y_1 \mp v4y_1y_2\Big)_t' - \frac{1}{T_3}\psi_3. \end{cases} \quad (28)$$

Из (14),(28) получаем систему (8), решение которой относительно $v_i, i=1,2,3$, имеет вид (9).

На рис.3,4 приведен фазовый портрет замкнутой системы, демонстрирующий движение вектора $y(t)$ и соответствующий аттрактор. Параметры: $g=9.8$; $T_1=0.02$; $T_2=0.02$; $T_3=0.02$; $w=10^{-5}$; $v=1$; $y_1(0)=6$, $y_2(0)=6$, $y_3(0)=6$, $y_4(0)=-0.3$, $y_5(0)=0.2$, $y_6(0)=-0.5$.

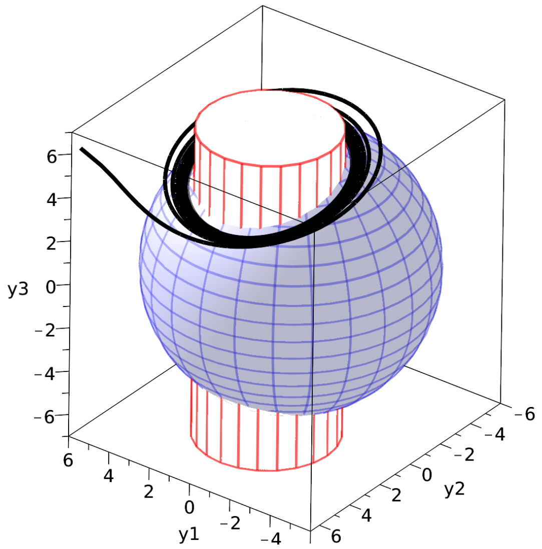

Рис. 3

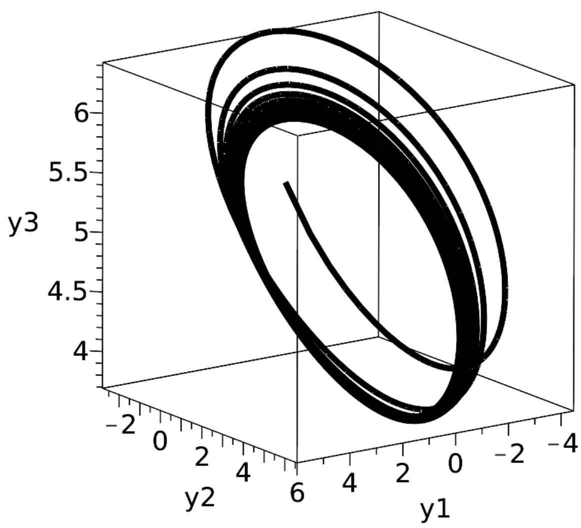

Рис. 4

Литература

1. *Игнатьев М. Б.* Голономные автоматические системы // ,М-Л.,Издательство АН СССР, 1963,с.204.

2. *Колесников А. А.* Новые нелинейные методы управления полетом // ,М.,Физматлит, 2013,с.196.

3. *Бойчук Л. М.* Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления // ,М.,Энергия, 1971,с.160.

4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления (том 1) // ,М.,Наука, 1969,с.516-518.

5. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления (том 1) //, М.,Физматлит, 2010,Вып.7,с.79-94.

6. *Канатников А. Н.,Шмагина Е. А.* Задача терминального управления движением летательного аппарата // Нелинейная динамика и управление,М.,Физматлит, 2010,Вып.7,с.79-94.