

Глава 1

Лукьянова Л.Н. Задача уклонения от столкновения. Приложение 3.

1.1 Модель движения самолета вертикального взлета.

Поперечное расположение двигателей

Рассмотрим движение самолета вертикального взлета, имеющего два двигателя прикрепленные по разные стороны фюзеляжа, на этапе выполнения предпосадочных маневров. Приведем упрощенную модель (рис.1.1), которая учитывает только движение в вертикальной плоскости, перпендикулярной продольной оси самолета. Это движение описывает система уравнений [1]:

$$\begin{cases} \ddot{x} = u_1 \sin \theta - \varepsilon u_2 \cos \theta, \\ \ddot{z} = u_1 \cos \theta + \varepsilon u_2 \sin \theta - 1, \\ \ddot{\theta} = u_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

x, z — нормированные координаты самолета по горизонтальной и вертикальной осям соответственно;

θ — угол крена;

u_1 — управление, пропорциональное общей тяге двигателей;

u_2 — управление пропорциональное разности тяг двух двигателей;

ε — малая константа.

Вектор с координатами $x, \dot{x}, z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}$ задает состояние системы, вектор (u_1, u_2) — ее управления.

Параметры модели имеют следующую интерпретацию.

Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ фиксированная инерциальная система и $(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$ подвижная система координат привязанная к самолетным осям. Обозначим θ угол между подвижными и инерциальными осями. Силы, действующие на систему имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= (\cos \alpha \vec{k}_b + \sin \alpha \vec{i}_b) F_1 \\ \vec{F}_2 &= (\cos \alpha \vec{k}_b - \sin \alpha \vec{i}_b) F_2 \\ m \vec{g} &= -mg \vec{k} \end{aligned}$$

где α — фиксированный угол.

Сила тяжести $m \vec{g}$ приложена в центре масс C ; тяги \vec{F}_1 и \vec{F}_2 приложены в точках M_1 и M_2 соответственно, где

$$\overrightarrow{CM_1} = \ell \vec{i}_b - h \vec{k}_b, \quad \overrightarrow{CM_2} = -\ell \vec{i}_b - h \vec{k}_b.$$

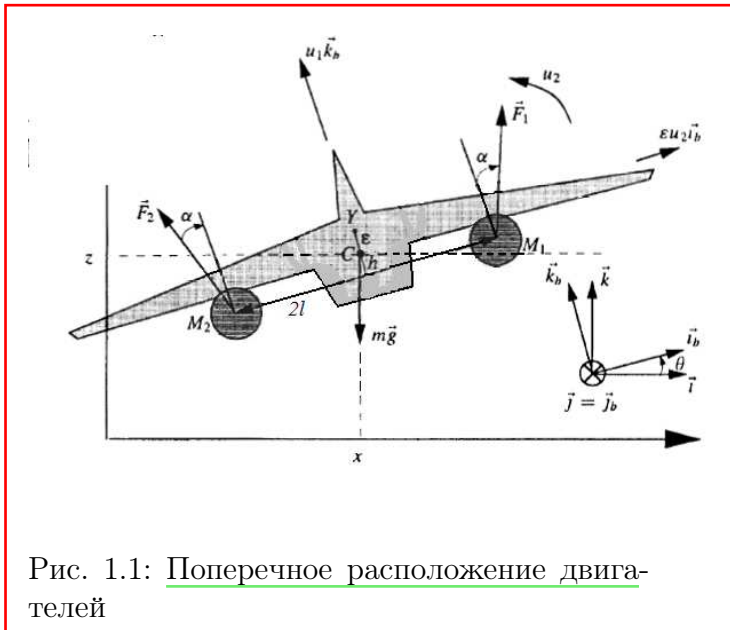


Рис. 1.1: Поперечное расположение двигателей



Рис. 1.2: Bell-430

Уравнения движения записанные для центра масс C имеют вид

$$\begin{aligned} m\dot{\vec{V}}_C &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g}, \\ \dot{\vec{\sigma}}_C &= \vec{CM}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{CM}_2 \times \vec{F}_2, \end{aligned}$$

где \vec{V}_C — скорость точки C ;
 $\vec{\sigma}_C$ — угловой момент относительно точки C .

Расписывая эти уравнения в проекциях на оси фиксированной системы координат, имеем

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= (F_1 + F_2) \cos \alpha \sin \theta + (F_1 - F_2) \sin \alpha \cos \theta, \\ m\ddot{z}_C &= (F_1 + F_2) \cos \alpha \cos \theta + (F_1 - F_2) \sin \alpha \sin \theta - mg, \\ J\ddot{\theta} &= (F_2 - F_1)(\ell \cos \alpha + h \sin \alpha). \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [\sin \alpha / (\ell \cos \alpha + h \sin \alpha)] J / mg, \\ u_1 &= [\cos \alpha / mg](F_1 + F_2), \\ u_2 &= [(\ell \cos \alpha + h \sin \alpha) / J](F_2 - F_1), \\ x &= x_C / g, \\ z &= z_C / g, \end{aligned}$$

получаем уравнения движения (1.1). Величина параметра ε в общем случае мала, поскольку угол α у такой конструкции мал. Нормализованные расстояния x и z соответствуют естественным длинам, деленным на гравитационную постоянную g , следовательно, нормализованное расстояние 1 соответствует расстоянию 10 м.

Два управляющих параметра u_1 и u_2 пропорциональны вертикальному ускорению и вращающему моменту, соответственно, приложенным в центре масс.

Задача управления заключается в нахождении управления $(u_1(t), u_2(t))$, переводящего систему из начального состояния $x(0), \dot{x}(0), z(0), \dot{z}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)$ в состояние $x(T), \dot{x}(T), z(T), \dot{z}(T), \theta(T), \dot{\theta}(T)$.

1.2 Линеаризуемость динамического расширения модели самолета ВВП. Конспект.

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m,$$

1. 找到函数 $y_1 = h_1, \dots, y_m = h_m$, 其形式为 $h_i(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\ell_i)})$, 形成系统的平均输出;
2. 将变量 x 表达为 t 和函数 $\tilde{y} = (y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_m^{(n_m-1)})$, 交集中证明, 最终 n_i 一定存在;
3. 选择函数向量 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, 其中 $\xi = H(t, \tilde{y})$, 确保矩阵可逆 $\partial(\xi, x)/\partial \tilde{y}$ 非奇异;
4. 通过方程 ξ_1, \dots, ξ_n 的导数, 以及 u_1, \dots, u_m 的形式, 用 $t, \tilde{y}, v = (v_1, \dots, v_m)$ 表达, 其中 $v_i = y_i^{(n_i)}, i = 1, \dots, m$;
5. 转换 t, ξ, v 到 t, x, u 后, 得到原系统的动态扩展的线性化形式.

Поиск линеаризующей обратной связи может быть проведен следующим образом:

1. Находятся функции $y_1 = h_1, \dots, y_m = h_m$ в виде $h_i(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\ell_i)})$ образующие плоский выход системы вида (??).
2. Переменные x выражаются через t и функции $\tilde{y} = (y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_m^{(n_m-1)})$. (В работе [?] показано, что конечное $n_i, i = 1, \dots, m$ обязательно существует.)
3. Выбирается вектор функция $\bar{\xi} = (\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(k_3)})$, где $\xi = H(t, \tilde{y})$ переменных t, \tilde{y} так, чтобы матрица Якоби $\frac{\partial(\xi, x)}{\partial \tilde{y}}$ была невырожденной.
4. Производные $\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_l$ этих функций в силу системы (??) и функции u_1, \dots, u_m выражаются через $t, \tilde{y}, v = (v_1, \dots, v_m)$, где $v_i = y_i^{(n_i)}, i = 1, \dots, m$.
5. Переходя от переменных t, \tilde{y}, v к переменным t, ξ, x, v , получаем линеаризуемый, динамически расширенный вариант исходной системы.

Модель СВВП имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} &= u_1 \sin \theta - \epsilon u_2 \cos \theta, \\ \ddot{z} &= u_1 \cos \theta + \epsilon u_2 \sin \theta - 1, \\ \ddot{\theta} &= u_2. \end{cases} \quad (1)$$

Плоский выход - центр колебаний Гюйгенса

$$(y_1, y_2) = (x + \epsilon \sin \theta, z + \epsilon \cos \theta) \quad (2)$$

$$\begin{cases} y_1 &= x + \epsilon \sin \theta, \\ y_2 &= z + \epsilon \cos \theta, \\ y_1^{(1)} &= v_x + \epsilon v_\theta \cos \theta, \\ y_2^{(1)} &= v_z - \epsilon v_\theta \sin \theta, \\ y_1^{(2)} &= (u_1 - \epsilon(v_\theta)^2) \sin \theta, \\ y_2^{(2)} &= -1 + (u_1 - \epsilon(v_\theta)^2) \cos \theta, \\ y_1^{(3)} &= \frac{d}{dt}((u_1 - \epsilon(v_\theta)^2) \sin \theta), \\ y_2^{(3)} &= \frac{d}{dt}((u_1 - \epsilon(v_\theta)^2) \cos \theta), \\ y_1^{(4)} &= \frac{d^2}{dt^2}((u_1 - \epsilon(v_\theta)^2) \sin \theta), \\ y_2^{(4)} &= \frac{d^2}{dt^2}((u_1 - \epsilon(v_\theta)^2) \cos \theta), \end{cases} \quad \begin{cases} x &= y_1 - \epsilon \frac{y_1^{(2)}}{\sqrt{(y_1^{(2)})^2 + (y_2^{(2)} + 1)^2}} \\ z &= y_2 - \epsilon \frac{y_2^{(2)} + 1}{\sqrt{(y_1^{(2)})^2 + (y_2^{(2)} + 1)^2}} \\ \theta &= \arctg\left(\frac{y_1^{(2)}}{y_2^{(2)} + 1}\right) \end{cases} \quad (3)$$

Динамическое расширение выберем в виде $\xi_1 = u_1 - \epsilon(v_\theta)^2$ и $\dot{\xi}_1 = \xi_2$. Согласно (3) имеем

$$\begin{cases} y_1^{(2)} &= \xi_1 \sin \theta, \\ y_1^{(3)} &= \xi_2 \sin \theta + \xi_1 v_\theta \cos \theta, \\ y_2^{(2)} &= -1 + \xi_1 \cos \theta, \\ y_2^{(3)} &= \xi_2 \cos \theta - \xi_1 v_\theta \sin \theta, \end{cases} \quad (4)$$

и следовательно

$$y_1^{(4)} = \dot{\xi}_2 \sin \theta + 2\xi_2 v_\theta \cos \theta + \xi_1 u_2 \cos \theta - \xi_1 v_\theta^2 \sin \theta = v_1,$$

$$y_2^{(4)} = \dot{\xi}_2 \cos \theta - 2\xi_2 v_\theta \sin \theta - \xi_1 u_2 \sin \theta - \xi_1 v_\theta^2 \cos \theta = v_2.$$

Обращение этой линейной системы относительно $\dot{\xi}$ и u_2 дает следующий динамический компенсатор:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta + (v_\theta)^2 \xi_1, \\ u_1 &= \xi_1 + \epsilon(v_\theta)^2, \\ u_2 &= \frac{1}{\xi_1}(v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta - 2v_\theta \xi_2). \end{cases} \quad (5)$$

Итоговый линеаризованный вариант системы (1)

$$y_k^{(4)} = v_1, \quad y_2^{(4)} = v_2. \quad (6)$$

На **первом этапе** построения итоговой траектории, например, если мы хотим перейти из заданной точки покоя в другую точку покоя, любая кривая, удовлетворяющая этим ограничениям, например, многочлен седьмой степени относительно времени t , а именно

$$y_j(t) = \sum_{k=0}^7 a_{j,k} t^k, j = 1, 2,$$

удовлетворяющий

$$\begin{cases} y_1(0) &= x_0 + \epsilon \sin \theta_0, & y_1(t_f) &= x_f + \epsilon \sin \theta_f, \\ y_2(0) &= z_0 + \epsilon \cos \theta_0, & y_2(t_f) &= z_f + \epsilon \cos \theta_f, \\ y_j^{(1)}(0) &= y_j^{(2)}(0) = & y_j^{(1)}(t_f) &= y_j^{(2)}(t_f) = \\ = y_j^{(3)}(0) &= 0, j = 1, 2, & = y_j^{(3)}(t_f) &= 0, j = 1, 2, \end{cases}$$

генерирует подходящую **эталонную** (программную) траекторию системы, путем решения двух систем линейных уравнений относительно $2 \times 8 = 16$ коэффициентов

$$\{a_{j,0}, \dots, a_{j,7}, j = 1, 2\}$$

Обозначим через

$$y^* = (y_1^*, y_2^*)$$

соответствующую **эталонную траекторию**. Здесь мы хотим, чтобы такой перелет произошел за 10 с (расстояния нормированы относительно гравитационного поля, следовательно, длина 10 представляет собой около 100 м).

На **втором этапе** мы замыкаем цикл, стабилизируя эталонную траекторию y^* . Достаточно использовать (6) с

$$v_i = (y_i^*)^{(4)} + \sum_{j=0}^3 k_{i,j} (y_i^{(j)} - (y_i^*)^{(j)}), i = 1, 2, \quad (7)$$

Коэффициенты $k_{i,j}$ выбираются так, чтобы решение уравнения динамики ошибок (6) при управлении (7)

$$e_i^{(4)} = \sum_{j=0}^3 k_{i,j} e_i^{(j)}, i = 1, 2$$

с $e_i^{(j)} = y_i^{(j)} - (y_i^*)^{(j)}$ было устойчиво.

Задание. Проиллюстрировать этот подход моделированием варианта с начальной точкой покоя $x_i = 10, z_i = 5$ и конечной точкой $x_f = z_f = 0$ с $t_f - t_0 = 10s$.

1.3 Модель движения квадрокоптера и задача терминального управления

Основные силы, действующие на квадрокоптер, есть сила тяжести mg и силы $f_i, i = 1, \dots, 4$, создаваемые вращающимися пропеллерами на концах двух балок, длиной 2ℓ каждая, расположенными взаимно перпендикулярно. Чтобы квадрокоптер мог находиться в покое, его

суммарная сила роторов, должна уравновешивать его вес $F_0 = mg$. Поскольку подъемная сила $u(t)$ в подвижной системе отсчета всегда направлена по оси Oz' , то для движения тела в направлении оси Ox' необходимо его вращение вокруг оси Oy' на угол θ , чтобы появилась составляющая силы u в направлении Ox' .

Для простейшей модели квадрокоптера уравнения для поступательного движения будут иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -f \sin \theta, \\ \ddot{y} = -f \cos \theta \sin \gamma, \\ \ddot{z} = -g + f \cos \theta \cos \gamma, \end{cases} \quad (1)$$

и для вращательного

$$\begin{cases} \ddot{\gamma} = \frac{\tau_{x'}}{I_{x'x'}}, \\ \ddot{\theta} = \frac{\tau_{y'}}{I_{y'y'}}, \\ \ddot{\psi} = \frac{\tau_{z'}}{I_{z'z'}}, \end{cases} \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} x(0) = x_0, & \dot{x}(0) = \dot{x}_0, & x(T) = x_1, & \dot{x}(T) = \dot{x}_1, \\ y(0) = y_0, & \dot{y}(0) = \dot{y}_0, & y(T) = y_1, & \dot{y}(T) = \dot{y}_1, \\ z(0) = z_0, & \dot{z}(0) = \dot{z}_0, & z(T) = z_1, & \dot{z}(T) = \dot{z}_1, \\ \theta(0) = \theta_0, & \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, & \theta(T) = \theta_1, & \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_1, \\ \gamma(0) = \gamma_0, & \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}_0, & \gamma(T) = \gamma_1, & \dot{\gamma}(T) = \dot{\gamma}_1, \\ \psi(0) = \psi_0, & \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0, & \psi(T) = \psi_1, & \dot{\psi}(T) = \dot{\psi}_1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Поскольку параметр ψ входит только в одно уравнение, мы не будем его рассматривать в системе. Итак, у нас имеется терминальная задача с десятью фазовыми переменными $x, \dot{x}, \dots, \theta, \dot{\theta}$, и четырьмя управлениями $f, \tau_{x'}, \tau_{y'}, \tau_{z'}$ которые ограничены

$$z \geq 0, \quad 0 \leq f \leq \rho_1, \quad |\tau_x| \leq \rho_2, \quad |\tau_y| \leq \rho_3, \quad |\tau_z| \leq \rho_4. \quad (2.2)$$

Будем рассматривать вариант, когда в начальном и конечном состояниях квадрокоптер покоится, т.е. $\dot{x}_0 = 0, \dot{x}_1 = 0, \dot{y}_0 = 0, \dot{y}_1 = 0, \dot{z}_0 = 0, \dot{z}_1 = 0$. Кроме того, подъемная сила F должна быть равна силе тяжести квадрокоптера $mg = 0.468 * 9.81 = 4.591H$. $4kv^2 = mg$, $v^2 = 6.4908 * 10^6$, $v = \sqrt{\frac{mg}{4k}}$, $v = 2548$. Начальные значения z_0, θ_0 должны обеспечить полет квадрокоптера в пространстве.

1.3.1 Линеаризуемость модели движения квадрокоптера

Для системы (1),(2) существует линеаризуемое динамическое расширение. Покажем это.

1. [rgb]0,0,1 Рассмотрим плоский выход вида $y_1 = x, y_2 = y, y_3 = z$.

2. Их производные $\dot{y}_1 = \dot{x}, \dot{y}_2 = \dot{y}, \dot{y}_3 = \dot{z}$.

Чтобы выразить θ и γ , запишем первые три уравнения системы (1),(2) в виде

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\frac{u}{m} \sin \theta, \\ \ddot{y}_2 = -\frac{u}{m} \cos \theta \sin \gamma, \\ \ddot{y}_3 + g = \frac{u}{m} \cos \theta \cos \gamma. \end{cases} \quad (3)$$

Поделив второе уравнение в (3) на третье и выразив из полученного выражения γ получим

$$\gamma = \arctg \left(\frac{\ddot{y}_2}{\ddot{y}_3 + g} \right), \quad (4)$$

а поделив первое уравнение в (3) на третье и выразив оттуда θ , получим

$$\theta = -\arctg\left(\cos\gamma\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_3+g}\right). \quad (5)$$

где γ выражается через h с помощью (4).

Дифференцируя по времени равенства (4) и (5), получаем выражения для $\dot{\theta}$ и $\dot{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\ddot{y}_2}{\ddot{y}_3+g}\right)^2} \frac{\ddot{y}_2(\ddot{y}_3+g) - \ddot{y}_2\ddot{y}_3}{(\ddot{y}_3+g)^2} = \\ &= \frac{\ddot{y}_2(\ddot{y}_3+g) - \ddot{y}_2\ddot{y}_3}{(\ddot{y}_3+g)^2 + \ddot{y}_2^2} = \frac{\gamma_1(\ddot{y}_2, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3)}{\gamma_2(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{1}{1 + \left(\cos\gamma\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_3+g}\right)^2} \left(-\sin\gamma\dot{\gamma}\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_3+g} + \cos\gamma\frac{\ddot{y}_1(\ddot{y}_3+g) - \ddot{y}_1\ddot{y}_3}{(\ddot{y}_3+g)^2} \right) = \\ &= \frac{-\sin\gamma\dot{\gamma}\ddot{y}_1(\ddot{y}_3+g) + \cos\gamma(\ddot{y}_1(\ddot{y}_3+g) - \ddot{y}_1\ddot{y}_3)}{(\ddot{y}_3+g)^2 + (\cos\gamma\ddot{y}_1)^2} = \\ &= \frac{\theta_1(\ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \gamma, \dot{\gamma})}{\theta_2(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \gamma)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что управления u , τ_θ и τ_γ могут быть выражены через t , y_i^j , $i = 1, 2, 3$, $j = 0, \dots, 4$.

Действительно, возведем в квадрат выражения (3) и сложим их. После всех сокращений получим

$$u = m\sqrt{\ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_2 + (\ddot{y}_3 + g)^2}. \quad (8)$$

Дифференцируя по времени полученные выражения (6), (7) для $\dot{\theta}$ и $\dot{\gamma}$, получаем выражения для $\tau_\theta = \ddot{\theta}$ и $\tau_\gamma = \ddot{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} &= \frac{(\ddot{y}_2(\ddot{y}_3+g) - \ddot{y}_2\ddot{y}_3 - \ddot{y}_2\ddot{y}_3 - \ddot{y}_2\ddot{y}_3)((\ddot{y}_3+g)^2 + \ddot{y}_2^2)}{\left((\ddot{y}_3+g)^2 + \ddot{y}_2^2\right)^2} - \\ &\quad - \frac{(\ddot{y}_2(\ddot{y}_3+g) - \ddot{y}_2\ddot{y}_3)(2(\ddot{y}_3+g)\ddot{y}_3 + 2\ddot{y}_2\ddot{y}_2)}{\left((\ddot{y}_3+g)^2 + \ddot{y}_2^2\right)^2} = \\ &= \frac{\gamma_3(\ddot{y}_2, \ddot{y}_2, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3)}{\gamma_4(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \gamma)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\theta_3(\ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{\theta_4(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \gamma)}. \quad (10)$$

Соотношения между новыми переменными и старыми запишем в следующей форме. Левый столбец — выражения новых переменных через фазовые переменные, правый столбец

— выражение старых переменных через новые:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x, & x &= y_1, \\
y_2 &= y, & y &= y_2, \\
y_3 &= z, & z &= y_3, \\
\dot{y}_1 &= \dot{x}, & \gamma &= \operatorname{arctg} \left(\frac{\ddot{y}_2}{\ddot{y}_3 + g} \right) = g_\gamma(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3), \\
\dot{y}_2 &= \dot{y}, & \theta &= -\operatorname{arctg} \left(\cos \gamma \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_3 + g} \right) = g_\theta(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \gamma), \\
\dot{y}_3 &= \dot{z}, & u &= m \sqrt{\ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_2^2 + (\ddot{y}_3 + g)^2}, \\
\ddot{y}_1 &= -\frac{u}{m} \sin \theta, & \tau_\gamma &= \frac{\gamma_3(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \dot{\gamma})}{\gamma_4(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \gamma)}, \\
\ddot{y}_2 &= \frac{u}{m} \cos \theta \sin \gamma, & \tau_\theta &= \frac{\theta_3(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \dot{\gamma})}{\theta_4(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \gamma)}, \\
\ddot{y}_3 &= \frac{u}{m} \cos \theta \cos \gamma - g. & \dot{x} &= \dot{y}_1, \\
\ddot{\dot{y}}_1 &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{u}{m} \sin \theta \right), & \dot{y} &= \dot{y}_2, \\
\ddot{\dot{y}}_2 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{m} \cos \theta \sin \gamma \right), & \dot{z} &= \dot{y}_3, \\
\ddot{\dot{y}}_3 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{m} \cos \theta \cos \gamma \right), & \dot{\gamma} &= \frac{\gamma_1(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \dot{\gamma})}{\gamma_2(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3)} = g_\gamma(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{\dot{y}}_3), \\
\ddot{\dot{\dot{y}}}_1 &= \frac{d^2}{dt^2} \left(-\frac{u}{m} \sin \theta \right), & \dot{\theta} &= \frac{\theta_1(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \dot{\gamma})}{\theta_2(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \gamma)} = g_\theta(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \ddot{\dot{y}}_3, \gamma, \dot{\gamma}). \\
\ddot{\dot{\dot{y}}}_2 &= \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{u}{m} \cos \theta \sin \gamma \right), \\
\ddot{\dot{\dot{y}}}_3 &= \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{u}{m} \cos \theta \cos \gamma \right),
\end{aligned} \tag{11}$$

Фазовых переменных в исходной системе десять: $x, y, z, \gamma, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}$. Они выражаются через двенадцать новых переменных $y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{\dot{y}}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, \ddot{\dot{y}}_2, y_3, \dot{y}_3, \ddot{y}_3, \ddot{\dot{y}}_3$ в области $U = \{(y_1, y_2, y_3, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{\dot{y}}_1, \ddot{\dot{y}}_2, \ddot{\dot{y}}_3) : \ddot{y}_3 + g \neq 0, \gamma_2(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3) \neq 0, \theta_2(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3) \neq 0\}$.

Для наличия взаимно однозначного соответствия в области U , добавим две новые переменные ξ_1, ξ_2 из условия однозначной разрешимости компонент вектора $x, y, z, \gamma, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}, \xi_1$ через компоненты вектора $y_1, y_2, y_3, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{\dot{y}}_1, \ddot{\dot{y}}_2, \ddot{\dot{y}}_3$.

[rgb]0,0,1B в качестве претендента дополнения новых переменных положим:

$$\xi_1 = u = \sqrt{\ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_2^2 + (\ddot{y}_3 + g)^2}, \quad \xi_2 = \dot{\xi}_1. \tag{12}$$

Функции $y_1, y_2, y_3, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, g_\gamma, g_\theta, g_\gamma, g_\theta$ — функционально независимы в области U и таким образом отображение $(x, y, z, \gamma, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}, \xi_1, \xi_2) \Leftrightarrow (y_1, y_2, y_3, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{\dot{y}}_1, \ddot{\dot{y}}_2, \ddot{\dot{y}}_3)$ взаимно однозначно.

Такой выбор дополнительных переменных объясняется тем, что функции (12) вместе с функциями состояния системы (1),(2) определяют обратную замену переменных к переменным $y_i^{(j)}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Используя указанную замену переменных, выразим производные $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$ и входы системы через ξ_1, ξ_2 , переменные состояния и

$v_i = y_i^{(4)}$, $i = 1, 2, 3$. Продифференцировав (12) по времени, получаем

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1(\cos^2 \theta \dot{\gamma}^2 + \dot{\theta}^2) - v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta \sin \gamma + v_3 \cos \theta \cos \gamma. \end{cases} \tag{13}$$

Суммарная сила тяги u выражается, исходя из (11) и (12), так :

$$u = m\xi_1. \tag{14}$$

Чтобы выразить τ_γ и τ_θ , используем равенства (1),(2) и (13). Получаем

$$\begin{cases} \tau_\gamma &= \frac{1}{\xi_1} \left(\sec \theta (v_2 \cos \gamma - v_3 \sin \gamma) - 2\dot{\gamma}(\xi_2 - \xi_1 \dot{\theta} \operatorname{tg} \theta) \right), \\ \tau_\theta &= -\frac{1}{\xi_1} \cos \gamma |\sec \gamma| \left(v_1 \cos \theta + (v_3 \cos \gamma + v_2 \sin \gamma) \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. + \xi_1 \dot{\gamma}^2 \cos \theta \sin \theta + 2\xi_2 \dot{\theta} \right) \end{cases} \tag{15}$$

Формулы (13), (15), (14) определяют динамическую обратную связь, линеаризующую систему (1),(2).

При использовании добавленных переменных ξ_1, ξ_2 соотношения между новыми и старыми переменными имеют вид:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x, & x &= y_1, \\
y_2 &= y, & y &= y_2, \\
y_3 &= z, & z &= y_3, \\
\dot{y}_1 &= \dot{x}, & \gamma &= \arctg\left(\frac{\ddot{y}_2}{\ddot{y}_3+g}\right) = g_\gamma(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3), \\
\dot{y}_2 &= \dot{y}, & \theta &= -\arctg\left(\cos \gamma \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_3+g}\right) = g_\theta(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \gamma), \\
\dot{y}_3 &= \dot{z}, & \xi_1 &= m\sqrt{\ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_2 + (\ddot{y}_3 + g)^2}, \\
\ddot{y}_1 &= -\frac{\xi_1}{m} \sin \theta, & \tau_\gamma &= \frac{\gamma_3(\ddot{y}_2, \ddot{y}_2, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3)}{\gamma_4(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \gamma)}, \\
\ddot{y}_2 &= \frac{\xi_1}{m} \cos \theta \sin \gamma, & \tau_\theta &= \frac{\theta_3(\ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \gamma, \gamma)}{\theta_4(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \gamma)}, \\
\ddot{y}_3 &= \frac{\xi_1}{m} \cos \theta \cos \gamma - g. & \dot{x} &= \dot{y}_1, \\
\ddot{y}_1 &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{\xi_1}{m} \sin \theta\right), & \dot{y} &= \dot{y}_2, \\
\ddot{y}_2 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_1}{m} \cos \theta \sin \gamma\right), & \dot{z} &= \dot{y}_3, \\
\ddot{y}_3 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_1}{m} \cos \theta \cos \gamma\right), & \dot{\gamma} &= \frac{\gamma_1(\ddot{y}_2, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3)}{\gamma_2(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3)} = g_\gamma(\ddot{y}_2, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3), \\
\ddot{y}_1 &= \frac{d^2}{dt^2}\left(-\frac{\xi_1}{m} \sin \theta\right), & \dot{\theta} &= \frac{\theta_1(\ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \gamma, \gamma)}{\theta_2(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \gamma)} = g_\theta(\ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \gamma, \gamma), \\
\ddot{y}_2 &= \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi_1}{m} \cos \theta \sin \gamma\right), & \xi_2 &= \dot{\xi}_1, \\
\ddot{y}_3 &= \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi_1}{m} \cos \theta \cos \gamma\right), & &
\end{aligned} \tag{16}$$

Учитывая ранее введенные функции (новые управления) $v_i, i = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = v_1, \\ \ddot{y}_2 = v_2, \\ \ddot{y}_3 = v_3, \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} y_1(0) = x_0, \\ \dot{y}_1(0) = \dot{x}_0, \\ \ddot{y}_1(0) = \ddot{x}_0, \\ \ddot{y}_1(0) = \ddot{x}_0, \\ y_1(T) = x_1, \\ \dot{y}_1(T) = \dot{x}_1, \\ \ddot{y}_1(T) = \ddot{x}_1, \\ \ddot{y}_1(T) = \ddot{x}_1, \end{cases} \begin{cases} y_2(0) = y_0, \\ \dot{y}_2(0) = \dot{y}_0, \\ \ddot{y}_2(0) = \ddot{y}_0, \\ \ddot{y}_2(0) = \ddot{y}_0, \\ y_2(T) = y_1, \\ \dot{y}_2(T) = \dot{y}_1, \\ \ddot{y}_2(T) = \ddot{y}_1, \\ \ddot{y}_2(T) = \ddot{y}_1, \end{cases} \begin{cases} y_3(0) = z_0, \\ \dot{y}_3(0) = \dot{z}_0, \\ \ddot{y}_3(0) = \ddot{z}_0, \\ \ddot{y}_3(0) = \ddot{z}_0, \\ y_3(T) = z_1, \\ \dot{y}_3(T) = \dot{z}_1, \\ \ddot{y}_3(T) = \ddot{z}_1, \\ \ddot{y}_3(T) = \ddot{z}_1. \end{cases} \tag{18}$$

Решая (17) для заданных краевых условий (18), находим $y_1^i(t), y_2^i(t), y_3^i(t), i = 0, 1, 2, 3, 4$; функции ξ_1, ξ_2 согласно (13):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1(\cos^2 \theta \dot{\gamma}^2 + \dot{\theta}^2) - v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta \sin \gamma + v_3 \cos \theta \cos \gamma; \end{cases}$$

функцию u , согласно (14):

$$u = m\xi_1;$$

функции τ_γ, τ_θ согласно (9),(10):

$$\tau_\gamma = \frac{\gamma_3(\ddot{y}_2, \ddot{y}_2, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3)}{\gamma_4(\ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \gamma)},$$

$$\tau_\theta = \frac{\theta_3(\ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \ddot{y}_3, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{\theta_4(\ddot{y}_1, \ddot{y}_3, \gamma)}.$$

Таким образом управляемая система (1),(2) динамически линеаризуема и ее линейным аналогом является система (17),(13),(14),(9),(10).

Начальные и конечные условия для (17) находятся по краевым условиям для исходных фазовых переменных (2.1) и условиям $\xi_1(0) = g, \xi_2(0) = g, \xi_1(T) = 0, \xi_2(T) = 0..$

1.3.2 Решение задачи терминального управления


Рассмотрим случай отсутствия ограничений (2.2). Будем искать фазовые переменные $y_i(t), i = 1, 2, 3$ в классе полиномов от времени. Поскольку на каждую переменную имеется по четыре дополнительных набора краевых условий при $t = 0$ и $t = T$, степень соответствующего полинома будет семь:

$$y_i(t) = \sum_{k=0}^7 a_k^i t^k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Первые четыре коэффициента для новой переменной y_i равны

$$\begin{cases} a_0 &= y_1(0) = x_0, \\ a_1 &= \dot{y}_1(0) = \dot{x}_0, \\ a_2 &= \ddot{y}_1(0) = \ddot{x}_0, \\ a_3 &= \ddot{\ddot{y}}_1(0) = \ddot{\ddot{x}}_0. \end{cases}$$

Остальные коэффициенты полинома будем искать из системы



$$\begin{cases} a_4 T^4 + a_5 T^5 + a_6 T^6 + a_7 T^7 &= x_1 - x_0 - \ddot{x}_0 T^2 - \ddot{\ddot{x}}_0 T^3, \\ 4a_4 T^3 + 5a_5 T^4 + 6a_6 T^5 + 7a_7 T^6 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_0 - 2\ddot{x}_0 T - 3\ddot{\ddot{x}}_0 T^2, \\ 12a_4 T^2 + 20a_5 T^3 + 30a_6 T^4 + 42a_7 T^5 &= \ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_0 - 6\ddot{\ddot{x}}_0 T, \\ 24a_4 T + 60a_5 T^2 + 120a_6 T^3 + 210a_7 T^4 &= \ddot{\ddot{x}}_1 - 6\ddot{\ddot{x}}_0, \end{cases}$$

Решим эту систему, последовательно исключая неизвестные:

$$\begin{cases} a_5 T^4 + 2a_6 T^5 + 3a_7 T^6 &= -\frac{4(x_1 - x_0)}{T} + \dot{x}_1 + 3\dot{x}_0 + 2\ddot{x}_0 T + \ddot{\ddot{x}}_0 T^2, \\ 5a_5 T^3 + 12a_6 T^4 + 21a_7 T^5 &= -\frac{3(\dot{x}_1 - \dot{x}_0)}{T} + \ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_0 + 3\ddot{\ddot{x}}_0 T, \\ 20a_5 T^2 + 60a_6 T^3 + 126a_7 T^4 &= -\frac{2(\ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_0)}{T} + 6\ddot{\ddot{x}}_0 + \ddot{\ddot{x}}_1. \end{cases}$$

Далее (1)

$$\begin{cases} 2a_6 T^4 + 6a_7 T^5 &= \frac{20(x_1 - x_0)}{T^2} - \frac{8\dot{x}_1 + 18\dot{x}_0}{T} + \ddot{x}_1 - 6\ddot{x}_0 - 2\ddot{\ddot{x}}_0 T, \\ 12a_6 T^3 + 42a_7 T^4 &= \frac{12(\dot{x}_1 - \dot{x}_0)}{T^2} - \frac{(2\ddot{x}_1 + 20\ddot{x}_0)}{T} - 6\ddot{\ddot{x}}_0 + \ddot{\ddot{x}}_1. \end{cases}$$

Далее (2)

$$\{6a_7 T^4 = -\frac{120(x_1 - x_0)}{T^3} + \frac{60\dot{x}_1 + 36\dot{x}_0}{T^2} - \frac{8\ddot{x}_1 - 16\ddot{x}_0}{T} + 6\ddot{\ddot{x}}_0 + \ddot{\ddot{x}}_1.$$

Для простейшей задачи, когда отличными от нуля являются данные начального и конечного положения тела, полином $y_1(t)$ имеет вид

$$y_1(t) = -20z_*(\hat{t})^7 + 70z_*(\hat{t})^6 - 84z_*(\hat{t})^5 + 35z_*(\hat{t})^4,$$

где $z_* = x_1 - x_0$, а $\hat{t} = \frac{t}{T}$. Множество вариантов дополнительных условий позволит решать различные прикладные задачи. Разберем некоторые примеры.

1.3.3 Вывод квадрокоптера в заданное состояние по вертикали

Рассмотрим вариант поступательного движения квадрокоптера, т.е. случай, когда все точки тела описывают одинаковые траектории. Эти задачи являются простейшими задачами терминального управления. Будем рассматривать движение центра масс квадрокоптера. Необходимо найти функцию управления, которая обеспечит вывод квадрокоптера по вертикали из начального состояния z_0, \dot{z}_0 в конечное z_1, \dot{z}_1 за промежуток времени $[0, T]$.

Из системы (1) нам потребуется последнее уравнение, два остальных дают постоянные значения $x = x_0, y = y_0$,

$$\ddot{z} = -g + f, \quad (19)$$

с краевыми значениями $z(0) = z_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0, z(T) = z_1, \dot{z}(T) = \dot{z}_1$. Поскольку мы имеем 4 краевые величины, то искомая траектория в классе полиномов будет полиномом 3 степени:

$$z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3.$$

Из уравнения (19) следует, что искомое управление будет полиномом 1 степени:

$$f = g + 2c_2 + 6c_3 t. \quad (20)$$

Уравнение движения принимает вид:

$$\ddot{z} = 2c_2 + 6c_3 t.$$



Проинтегрировав дважды предыдущее уравнение и используя начальное и конечное состояния квадрокоптера, получим:

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_0 + v_0 T + 2c_2 T + 3c_3 \frac{T^2}{2}, \quad (21)$$

$$z_1 = z_0 + \dot{z}_0 T + c_2 \frac{T^2}{2} + c_3 \frac{T^3}{6}.$$

Из предыдущей системы получим коэффициенты c_2, c_3 :

$$c_2 = \frac{6(z_1 - z_0)}{T^2} - \frac{(2\dot{z}_1 + 4\dot{z}_0)}{T},$$

$$c_3 = -\frac{12(z_1 - z_0)}{T^3} + \frac{6(\dot{z}_1 + \dot{z}_0)}{T^2}.$$

При начальных и конечных значениях фазовых переменных $z_0 = 0m, \dot{z}_0 = 0m/s, z_1 = 100m, \dot{z}_1 = 0m/s, T = 20s$, функция управления будет

$$f = c_2 + c_3 t,$$

где $c_2 = 0.75m/s^2, c_3 = 0.025m/s^3$. Она обеспечивает перемещение квадрокоптера из начального в конечное состояние (на рисунках-голубые линии).

Рис. 1.3: Функция управления исходной системой

Рис. 1.4: Функция управления линеаризованной системой

Рис. 1.5: Траектории квадрокоптера

Второй вариант задачи. Пусть в начальном состоянии управляемая сила квадрокоптера уравнивает силу тяжести $f(0) = g$, что приводит к дополнительному условию $\ddot{z}(0) = 0$. Искомую траекторию можно искать среди полиномов 4-ой степени:

$$z(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3 + e_4 t^4.$$

Тогда из уравнения (19) следует, что искомое управление будет полиномом 2 степени

$$f = g + 2e_2 + 6e_3t + 12e_4t^2, \quad (22)$$

где $e_2 = 0$. Уравнение движения принимает вид

$$\ddot{z} = 2e_0 + 6e_3t + 12e_4t^2.$$

Учитывая, что $e_2 = 0$, уравнение принимает вид:

$$\ddot{z} = 6e_3t + 12e_4t^2.$$

Проинтегрируем дважды это уравнение:

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(0) = 3e_3t^2 + 4e_4t^3,$$

$$z(t) - z(0) - \dot{z}(0)t = e_3t^3 + e_4t^4.$$

Запишем эти уравнения для момента $t = T$ и получим систему для определения e_3, e_4 :

$$e_3T^3 + e_4T^4 = z_1 - z_0 - v_0T, \quad (23)$$

$$3e_3T^2 + 4e_4T^3 = \dot{z}_1 - \dot{z}_0.$$

Ее решением будут величины

$$e_3 = \frac{4(z_1 - z_0)}{T^3} - \frac{\dot{z}_1 + 3\dot{z}_0}{T^2},$$

$$e_4 = -\frac{3(z_1 - z_0)}{T^4} + \frac{(\dot{z}_1 + 2\dot{z}_0)}{T^3}.$$

При начальных и конечных значениях фазовых переменных $z_0 = 0m, \dot{z}_0 = 0m/s, \ddot{z}_0 = 0, z_1 = 100m, \dot{z}_1 = 0m/s, T = 20s$, функция управления будет $u = c_2 + c_3t$, где $c_2 = 15.81m/s^2, c_3 = -1.2m/s^3$. Она обеспечивает перемещение квадрокоптера из начального в конечное состояние (на рисунках-черные линии).

Третий вариант задачи. Потребуем, чтобы квадрокоптер в конечной точке смог зависнуть. Для этого его скорость не должна меняться в этой точке. Следовательно, в конечной точке появляется условие $\ddot{z}_1 = 0$. Уравнением траектории будет полином 4 степени:

$$z(t) = d_0 + d_1t + d_2t^2 + d_3t^3 + d_4t^4.$$

Уравнение движения принимает вид

$$\ddot{z} = 2d_2 + 6d_3t + 12d_4t^2.$$

Для решения этой задачи управление будем искать в виде полинома второй степени

$$f = g + 2d_2 + 6d_3t + 12d_4t^2. \quad (24)$$

Проинтегрируем уравнение движения (19). Получим систему уравнений для коэффициентов d_2, d_3, d_4 .

$$d_2 + 3d_3T + 6d_4T^2 = 0,$$

$$2d_2T + 3d_3T^2 + 4d_4T^3 = \dot{z}_1 - \dot{z}_0,$$

$$d_2T^2 + d_3T^3 + d_4T^4 = z_1 - z_0 - \dot{z}_0T.$$

Ее решением будет

$$d_4 = -\frac{2\dot{z}_1 + \dot{z}_0}{T^3} + \frac{3(z_1 - z_0)}{T^4},$$

$$d_3 = \frac{(5\dot{z}_1 + 3\dot{z}_0)}{T^2} - \frac{8(z_1 - z_0)}{T^3},$$

$$d_2 = -3d_3T - 6d_4T^2.$$

При тех же начальных и конечных значениях фазовых переменных и при $\ddot{z}_1 = 0$ расчеты функции управления, скорости тела и его траектории представлены на графиках (зеленые линии).

Рассмотрим четвертую задачу. Квадрокоптер в начальной и конечной точках может зависать. Для этого его скорость не должна меняться в этих точках. Следовательно, в конечной точке появляется условие $\ddot{z}_1 = 0$. Уравнением траектории будет полином 5 степени:

$$z(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3 + p_4t^4 + p_5t^5.$$

При $t = 0$ получим коэффициенты:

$$p_0 = z(0), p_1 = \dot{z}(0), p_2 = \ddot{z}(0).$$

Для остальных коэффициентов получим систему при выполнении условий при $t = T$:

$$p_3T^3 + p_4T^4 + p_5T^5 = z_1 - z_0 - v_0T,$$

$$3p_3T^2 + 4p_4T^3 + 5p_5T^4 = v_1 - v_0,$$

$$6p_3T + 12p_4T^2 + 20p_5T^3 = 0.$$

Ее решением будет

$$p_3 = -\frac{(4\dot{z}_1 + 6\dot{z}_0)}{T^2} + \frac{10(z_1 - z_0)}{T^3},$$

$$p_4 = \frac{(7\dot{z}_1 + 8\dot{z}_0)}{T^3} - \frac{158(z_1 - z_0)}{T^4},$$

$$p_5 = -\frac{3(\dot{z}_1 + \dot{z}_0)}{T^4} + \frac{6(z_1 - z_0)}{T^5}.$$

При тех же начальных и конечных значениях фазовых переменных расчеты функции управления, скорости тела и его траектории представлены на графиках (красные линии).

Литература

- [1] Michel Fliess , Jean L?vine , Philippe Martin, Pierre Rouchon, Flatness and defect of nonlinear systems: CAS internal report A-284, January 1994.