

太阳磁流体力学讲义

毛信杰 编著



中国科学院国家天文台
怀柔太阳观测基地

目 录

- | | |
|------|-------------|
| 第一章 | 引言和太阳及其磁场简介 |
| 第二章 | 磁流体力学的基本方程 |
| 第三章 | 磁流体静力学 |
| 第四章 | 波 |
| 第五章 | 激波 |
| 第六章 | 太阳上层大气的加热 |
| 第七章 | 不稳定性 |
| 第八章 | 黑子 |
| 第九章 | 发电机理论 |
| 第十章 | 太阳耀斑 |
| 第十一章 | 日珥（暗条） |

第一章 引言和太阳及其磁场

1.1 磁流体力学

宇宙中大多数物质处于等离子体状态，磁流体力学(MHD)研究等离子体和磁场的相互作用。太阳磁流体力学是理解许多太阳现象的重要工具，因为很多太阳现象与磁场有关。如：地球上除了有强磁场外，还有十八度的磁场¹，色球上有许多针状体，内存喷流和色球²，日冕由大重磁场构成，小尺度上可以认为是射线的湍流，认为是上³学的行磁场逆变，产生微光耀斑，日冕的加热认为也与磁场有关，其他诸如太阳耀斑，日珥的形成与演化，太阳活动周的时程等，本质上与磁场、等离子体间的“作用”有关。

太阳作为自然实验室，可以用许多方法研究等离子体的众多物理行为，与地球实验室相比，这并不⁴ 1. 适合 2. 调查方便 3. 引力影响 4. 磁场需施加的大小。

1.2 发展历史

公元前350年 雅典人 Theophrastus 用肉眼观测太阳黑子

公元前23年 从远东到欧洲中世纪(公元500-1500年)中国天象记录⁵

星子

(1) 拉莫叫的拉西尼

1610年 长时期内西方忘记了星子，伽利略等人观测了星子

他后来因“黑点理论”受审受审的罪行之一是他谈到了

星子，这与基督教徒的正统基督教义相冲突。正统理论认为太阳是无瑕疵的。有些相信有星子的人认为这是行星，另一些人认为星子是“太阳”，大约大数后的小行星，或是暗的陨石。

1842 中世纪俄罗斯的记录中，提及 1733 年 Vassenius 观测到日珥，这一年在一次日蚀中，再次发现日珥，而且清楚地看到不隔不氯的小岛，色彩和日冕

1843 Schwabe 提出，每隔 11 年出现一次日珥的周期

1851 在日蚀事件中，第一次得到日冕的照片，形如雨伞，环绕着太阳。也看到与太阳相连的日珥

1852 Sabine, Wolf 和 Gautier 发现星子周期的地磁暴有关。

1858 Carrington 发现太阳圈内星子的纬度漂移。

1859 Carrington 和 Hodgson 第一次观测到太阳冕流。

1861 Sporer 发现星子分布规律

1874 Langley 详细描述了太阳表面（光球）上的精细结构，称为米粒。

1908 Hale 发现星子具有强磁场

1909 Evershed 观测到星子带系的外向流。

1934 Cowling 提出一个星子理论，一个无发热机制模型

1941 Biermann 提出因为对流抑制，星子是冷的

1942 Alfvén 提出磁波理论

1945 Roberts 命名至详细描述了针状体。

1948 Biermann 和 Schwarzschild 提出外层不随太阳而同步进动的
声波从对流区向外传播，磁场呈不均匀加速度过程，直到很久之后
S. Osterbrock 才改善这一观点。

1952 Babcock 发明磁象仪，太阳磁场的倒立重得更大进展

1956 Cowling 基于磁流体力学的基本理论。

1958 Parker 提出不随风向而逆转，提出了他的模型。

1960 Leighton 发现光球上的 5 分钟振荡

1962 Leighton, Noyes 和 Simon 发现网状

二十世纪七十年代以后，磁流体力学理论在太阳物理领域中得到
进一步的发展和应用，地面和空间太阳望远镜的高分辨率观测技术被
赋予了光球、色球和日冕射线的手段，对理论的发展提供了新的机遇。

在 1986 年国家天文台研制的太阳磁场望远镜也开始参与太阳
磁场的观测，跻身于国际的先进行列。

1.3 太阳的基本参数

半径 4.5×10^9 千米

质量 $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ 千克

半径 $R_\odot = 6.963 \times 10^8$ 米

平均密度	1.4×10^3 千克/米 ³ ($= 1.4$ 克/厘米 ³)
离地心的平均距离	$1AU = 1.50 \times 10^{11}$ 米 ($= 215 R_\odot$)
表面引力	$g_\odot = 274$ 牛/千克 ²
赤道逃逸速度	618 公里/秒
辐射 (光度)	$L_\odot = 3.86 \times 10^{26}$ 瓦 ($= 3.86 \times 10^{26}$ 瓦特/秒)
赤道转动周期	26天
角动量	1.7×10^{41} 千克米 ² /秒
质量损失率	10^9 千克/秒
有效温度	5785 K
1角秒 (= 1'')	726 公里

1.4 太阳的分层结构

太阳本质上是炽热的气体球，按物理性质可明显地分成以下几个层次

如图 1.1 所示

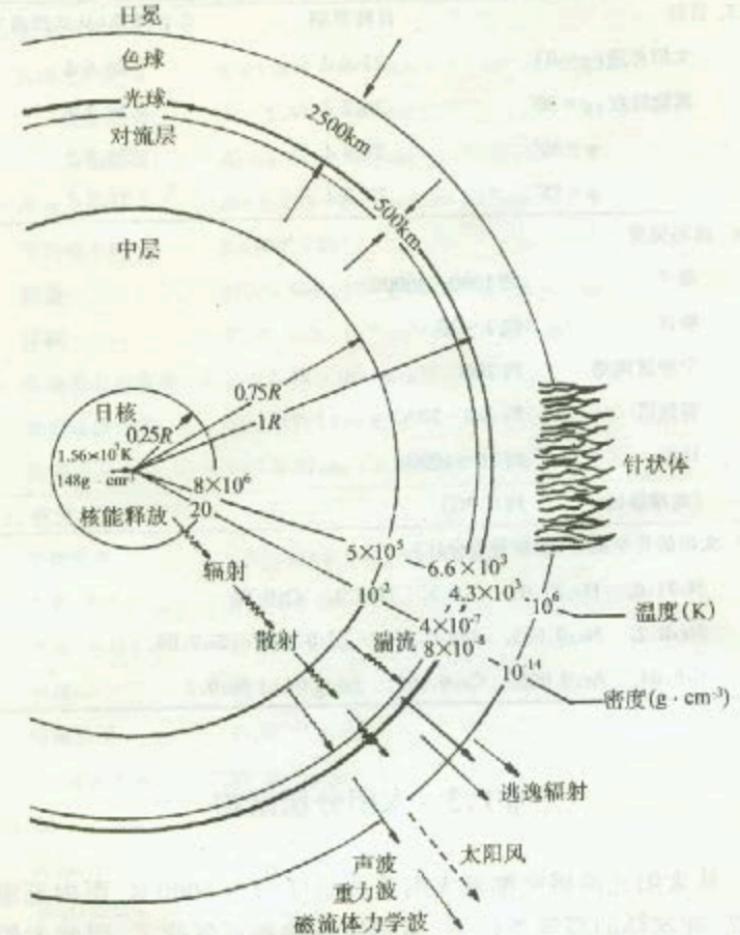


图 1.1 太阳球体分层结构

A DESCRIPTION OF THE SUN

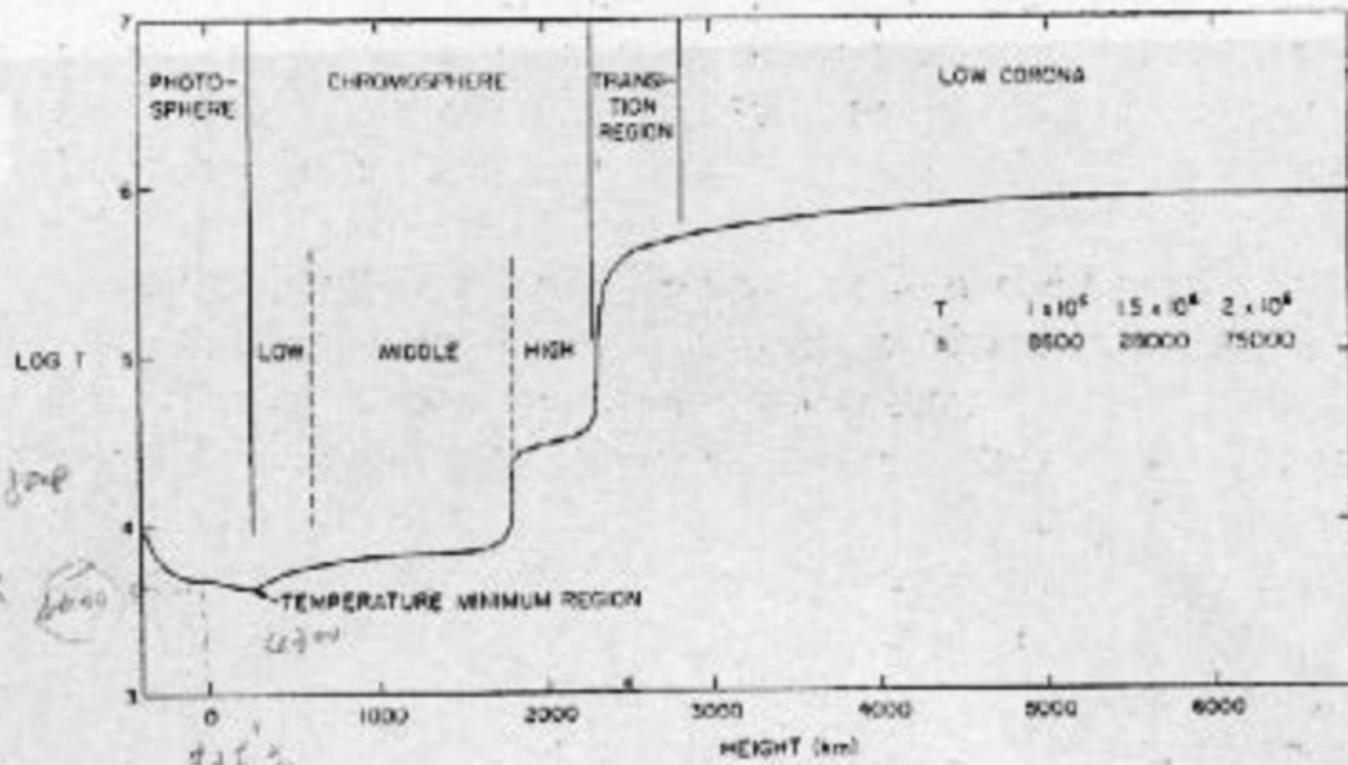


Fig. 1.2. An illustrative model for the variation of the temperature with height in the solar atmosphere (Athay, 1976).

其中所见的明亮日輪為光球層約500公里，光球之下為對流層，其上為色球層約2500公里，色球以上為冕針狀伸展，色球之上為日冕，形狀不規則，光明是邊界，可以延伸到太陽系邊緣，通常把光球、色球和日冕稱為太陽大氣，它们的輻射可以達到地球，擔任許多相關的信息，太陽大氣的性質及隨之變化的變化市下面1.2

對流層、中層和日核稱為太陽內部，它們的輻射被太陽氣体物質所吸收，不能達到地球，有关信息則以太陽大氣的觀測作為之值，主要依據理論推測。

1.5 宁静太阳、太阳活动区

宁静太阳是静态，可討論的最高程度，一般近似下，它的物理性質僅由離核心的幾何半徑有關，磁場可以忽略，活動太陽由四個組成，即電子、暗流和耀斑等，迭加於宁静太氣上，大部分為磁場所至。

上述的劃分並非完善，事實上宁静太氣明顯受到磁場影響，如起來自銀心周圍和上方的磁網帶，外層太氣的磁力學等。

1.6 太陽磁場

時只對光球層的磁場分布，可用光學方法進行比較精確的測量，對色球的磁場測量精度較差，日冕磁場只能用射電方法粗略估計，通常以光球磁場作為之值，按某種理論模型外推，以估計光球以上太陽太氣

磁场

太阳磁场可分为以下类型：

1. 活动区磁场

太阳上最强的磁场在演化成黑子的中心的活动区中，黑子的磁场强度约1000至6000高斯，多数为双极结构。黑子附近的喷发区中，强度一般为几百高斯。活动区上空日珥和日冕中的磁场约为几百高斯至几千高斯，活动区在日面上延伸的范围约几百至十几万公里。

2. 极区磁场

太阳：极的磁场约为1-2高斯，类地：极的磁场极性相反。
在太阳活动极大期附近会发极性转换。极区磁场只限于极区附近，而其他的偶极运动同，主要起源于太阳内部的偶极磁场，约180

活动区磁场关系密切

3. 宁静区磁场

宁静区中有弱磁场分布，形成网状磁场，沿起来往边界和色球间
相对应，网格大约300⁴公里，常沿起来往边界延伸成链状，强度为
20-200高斯，寿命可超过一天，(4)宁静区磁场也不为零，在许多高数

“鸟”称太阳风内磁场，强度约为 $2-25$ 高斯，最大尺度约几百公里，寿命几分之几十分钟。

4. 日地空间的大尺度磁场

黄道面上行星际磁场之扇形结构，每一扇形区中磁场极性各相同，相邻扇形极性相反，一为指向太阳，另一为背离太阳。扇形磁场由太阳风流进到行星际空间，是太阳磁场的延伸。地球轨道附近磁场强度量级为 $10^{-4}-10^{-5}$ 高斯，扇形边界厚度小于 1.5×10^5 公里，扇形磁场变化很大，有时强弱明显，有时又明显，有时一个不强的范围内有4个扇形区，有时仅有2个。

第二章 磁流体力学的基本方程

和流体的守恒律

等离子体的行为由 Maxwell 方程组¹⁾、流体定律(氢氦气体连续)和粘性方程、运动方程以及质量方程来描述。当然也可以从荷拉索夫方程出发，求得元方程从而推出磁流体力学方程组。为取代 Maxwell 方程组，我们引出磁感应方程。简化了磁流体力学方程组。

2.1. 电磁方程

2.1.1 Maxwell 方程

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho^* \quad (\rho^*: \text{电荷密度}) \quad (2.4)$$

已利用了本构方程 $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. 因此方程中不再出现磁场强度 \vec{H} 和电位移矢量 \vec{D} .

对于太阳等离子体, μ_0, ϵ_0 为近似地用真值 μ_0, ϵ_0 替代.

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Henry/m}^2, \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ Farad/m} = \frac{1}{4\pi \times 10^9 \text{ N/C}} \text{ 安培秒/库伦}$$

$$\text{真空中光速 } C = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \vec{E}: \text{Vm}^{-1} \text{ 伏/米} \quad \vec{B}: \text{T m}^{-2} \text{ 特斯拉 Tesla}$$

$\vec{j}: \text{A m}^{-2}$ 安培/平方米

磁感应强度 \vec{B} 用 tesla 做度. 但本文中经常用高斯 $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$.

高斯常用 $M_m = 10^6 \text{ m}$. $1'' \approx 1 M_m = 7.26 \times 10^5 \text{ m}$. 高斯密度典型值为 $5 M_m$

米粒组织直径 $\sim 1 M_m$, 超米粒团 $\sim 30 M_m$

因为等离子体中磁化强度 M 和空间的关系不再单纯
 $M = \frac{\mu_0 \vec{B}}{\vec{B}} \sim \frac{1}{\vec{B}}$, $M \sim \frac{1}{\vec{B}}$.

低频等离子体色散

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi \rho}{B^2} \quad (\rho: \text{电荷密度})$$

又有 $\vec{P} = \vec{X} \vec{E}$, $\epsilon = 1 + \rho X$ 的关系. 因此对于等离子体这种介质无法引入 M, D .

利用真空中 Maxwell 方程, 式中的电荷和电流对包括所有的电荷和电流

已利用了本构方程 $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. 因此方程中不再出现磁场强度 \vec{H}

(f. 陈, p. 33)

磁流体力学的基本假定:

速度相对论, 即 $V_0 \ll c$ (2.5)

这里 $V_0 = \frac{l_0}{t_0}$, l_0, t_0 分别是 ^{典型 (typical)} 长度和 ^{典型 (typical)} 时间; V_0 是等离子体的特征速度.

由方程(2.3) 用 ^{典型值} 来代替微商

$$\frac{\bar{E}_0}{\bar{l}_0} = \frac{\bar{B}_0}{\bar{t}_0} \quad (2.6)$$

\bar{E}_0, \bar{B}_0 为典型值. 同样方法来处理(2.1), 可以发现传播电流与

$$\frac{\bar{E}_0}{c^2 \bar{t}_0} \approx \frac{\bar{B}_0 \bar{l}_0}{c^2 \bar{t}_0} = \frac{V_0^2 \bar{B}_0}{c^2 \bar{l}_0} \approx \frac{V_0^2}{c^2} |\vec{B} \times \vec{v}| \quad (\text{利用了(2.6)式})$$

相比较(2.1)式的左边. 传播电流次要得多. 因此基本假定(2.5)下

① $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 可以忽略 ② 因为忽略了传播电流, (2.1) 式已取散度. 电荷守恒定律变成 $\nabla \cdot \vec{j} = 0$. 这意味着局部的电荷量和最终不可忽略的电流构成回路.

从(2.6)式可知静电场密度与磁场之比

$$\frac{\epsilon \bar{E}_0^2}{\bar{B}_0^2} \approx \frac{\bar{l}_0^2}{\bar{t}_0^2 \cdot c^2} = \frac{V_0^2}{c^2} \ll 1 \quad (\text{利用(2.6)式})$$

因而可以忽略电场.

太阳风中等离子体处于波电中性状态. $n_+ - n_- \ll n$ (2.7)

假设稀薄等离子体中, $n \approx 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. 正负电荷偏高电中性 1%. 引起

电场强度为 $|\vec{E}| = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{n}{100} \cdot \frac{e}{r^2} \approx 2r$ 静电斥抗/库 $= 6 \times 10^4 \text{ r 库}$

$\approx 600 \text{ 伏特}/厘米$

$$\sqrt{2} r = 1 \text{ cm. } Q = \frac{QE}{m} = \frac{4.8 \times 10^{10} \cdot 2}{9.1 \times 10^{-28}} \sim 1 \times 10^{18} \text{ am/s}$$

电子的加速度和此之比， $\sim 3 \times 10^9$ [K 布拉顿电极]。

不平衡的小电流密度 $P^* = (n_+ - n_-)e$. 根据(2.4)式

$$P^* \approx \frac{\epsilon_0 E_0}{l_0}$$

$$E_0 \text{ (2.6) } \propto \lambda. t_0 = \frac{V_0}{l_0}$$

$$P^* \approx \frac{\epsilon_0 V_0 B_0}{l_0}$$

$$\frac{\epsilon_0 V_0 B_0}{l_0} \approx n_+ - n_- \ll n \quad (\text{表示几倍数})$$

$$\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}, e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C (库伦)}, B_0, \text{ Tesla}$$

$$6 \times 10^7 \frac{V_0 B_0}{l_0} \ll n \quad (2.8)$$

(2.5) 和 (2.8) 式在太阳物理中均能很好地满足。

130 fm: 太阳上黑子附近，^{带电粒子}^{带电粒子}运动 $V_0 \approx 10^4 \text{ m s}^{-1} \ll c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, 那么
带电粒子典型值 $B_0 \approx 0.1 \text{ T}$ (10^3 G), ~~带电粒子~~ $l_0 \approx 10^5 \text{ m}$, $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$
 代入 (2.8) $6 \times 10^5 \ll 10^{20}$

实际上，电荷不平衡只发生在小于 Debye 范围的尺度内。

2.1.2 欧姆定律

i. 通过二流体模型导出广义欧姆定律

i) 假设：等离子体是电中性的 $n_e = n_i = n$

ii. 特定时间 粒子的平均碰撞时间 不得多，即等离子体
 对局部热运动平衡状态 $P_e = P_i$, $m_e V_e \approx m_i V_i$.

iii. 单流体描述要求离带电粒子的局部平均速度 $\vec{u}_e \approx \vec{u}_i$, 而局部速度
 速度 (即速度) $\vec{u} \sim \vec{u}_e \sim \vec{u}_i$

相对补充的碰撞次数

流速 \vec{U}_e 以及 \vec{U}_i , $\vec{U}_e \cdot \vec{U}_i$ 为力量, 它们的次序可以忽略

IV. $m_e \ll m_i$. 含 m_e/m_i 的项可以忽略. V. 无粘性, 压强为常数

VI. 碰撞模型: 平均碰撞模型近似.

②二元流体的运动方程为:

$$nm_e \left[\frac{\partial \vec{U}_e}{\partial t} + (\vec{U}_e \cdot \nabla) \vec{U}_e \right] = -\nabla P_e - ne (\vec{E} + \vec{U}_e \times \vec{B}) + \vec{M}_{ei} \quad (2.1.2-1)$$

$$nm_i \left[\frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t} + (\vec{U}_i \cdot \nabla) \vec{U}_i \right] = -\nabla P_i + ne (\vec{E} + \vec{U}_i \times \vec{B}) + \vec{M}_{ie} \quad (2.1.2-2)$$

式中 M_{ei} 为二种流体因碰撞引起的动量变化率的平均值.

\vec{M}_{ei} : 一单位时间内离开流体以逆流单位体积电子流体的动量.

\vec{M}_{ie} : 另为相反的过程.

\vec{M}_{ei} 是推力, 由牛顿定律 $\vec{M}_{ei} = -\vec{M}_{ie}$.

质量为 m_1, m_2 速度为 \vec{U}_1, \vec{U}_2 两个粒子作弹性碰撞时, 动量变化

$$\text{的平均值是 } \vec{M}_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{U}_2 - \vec{U}_1)$$

其中已假定粒子由于碰撞而偏转至任何角度的几率相等.

$$\text{因此 } \vec{M}_{ei} = -\vec{M}_{ie} = V_{ei} n \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} (\vec{U}_i - \vec{U}_e)$$

V_{ei} 为电离-离子(质子)的平均碰撞频率.

用 $\frac{e}{m_e}$ 来(2.1.2-1)式, $\frac{e}{m_i}$ 来(2.1.2-2)式, 由于 e 大于 m_e, m_i 忽略.

$$ne \left[\frac{\partial \vec{U}_e}{\partial t} + (\vec{U}_e \cdot \nabla) \vec{U}_e \right] = -\frac{e}{m_e} \nabla P_e - \frac{ne^2}{m_e} (\vec{E} + \vec{U}_e \times \vec{B}) + \frac{e}{m_e} \vec{M}_{ei}$$

$$ne \left[\frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t} + (\vec{U}_i \cdot \nabla) \vec{U}_i \right] = -\frac{e}{m_i} \nabla P_i + \frac{ne^2}{m_i} (\vec{E} + \vec{U}_i \times \vec{B}) + \frac{e}{m_i} \vec{M}_{ie}$$

$$\vec{M}_{ie} = -\vec{M}_{ei}$$

二式相减

$$ne \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u}_i - \vec{u}_e) + ne [(\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{u}_i - (\vec{u}_e \cdot \vec{v}) \vec{u}_e] \\ = -\frac{e}{m_i} \nabla P_i + \frac{e}{m_e} \nabla P_e + ne^2 \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e} \right) \vec{E} + ne^2 \left[\frac{1}{m_i} \vec{u}_i \times \vec{B} + \frac{1}{m_e} \vec{u}_e \times \vec{B} \right] - e \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e} \right) \vec{v}_{ei} \quad (2.1.2-3)$$

因为向都热运动平衡 (1.2.2 ii.) $P_i \approx P_e = \frac{1}{2} P$, ($P = P_i + P_e$), $\frac{m_e}{m_i} \ll 1$

$$(2.1.2-3) \text{ 左边 } \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u}_i - \vec{u}_e) \text{ 化为 } \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} P \vec{v}$$

$$\text{左边第3项: } ne^2 \frac{1}{m_e} \vec{E}$$

$$\text{左边第4项: } m_e \vec{u}_i + m_i \vec{u}_e = (m_i \vec{u}_i + m_e \vec{u}_e) - (m_i - m_e) (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$$

$$\approx m_i \vec{u}_i - \frac{m_i}{ne} \vec{j}$$

$$\text{这里 } \vec{v} = \frac{m_e \vec{u}_e + m_i \vec{u}_i}{m_e + m_i} \approx \frac{m_e \vec{u}_e + m_i \vec{u}_i}{m_i} \text{ 且 } \vec{v} \perp \vec{B}, \text{ 因此 (2.1.2-3) 成立。}$$

速度:

$$\Rightarrow \vec{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} v_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} = ne (\vec{u}_i - \vec{u}_e) \quad \text{已利用 } n_e = n_i = n$$

$$\text{第四项最终变为: } ne^2 \cdot \frac{m_i \vec{u}_i - \frac{m_i}{ne} \vec{j}}{m_i m_e} \times \vec{B} = (ne^2 \cdot \frac{1}{m_e} \vec{u} - \frac{e}{m_e} \vec{j}) \times \vec{B}$$

$$\text{第五项: } \vec{M}_{ei} = V_{ei} n \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$$

$$\approx V_{ei} n m_e \frac{\vec{j}}{ne} = V_{ei} \frac{m_e}{e} \vec{j}$$

$$\text{第六项第五项为: } -\frac{e}{m_e} \cdot V_{ei} \frac{m_e}{e} \vec{j} = -V_{ei} \vec{j}$$

(2.1.2-3) 式左边第2项 \vec{u}_i, \vec{u}_e 是二次项, 按 1.2.2 iii. 可忽略

$$\text{左边} = ne \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$$

$$= ne \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{j}}{ne}$$

$$= \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

将上式代入 (2.1.2-3) 两边再乘 $\frac{m_e}{ne}$

$$\frac{m_e}{ne} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{1}{2ne} \nabla P + \vec{E} + \left(\vec{u} - \frac{\vec{j}}{ne} \right) \times \vec{B} - \frac{m_e}{ne} V_{ei} \vec{j} \quad (2.1.2-4)$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ " 1/2

各项的物理意义：

① 惯性力引起的速度 $\frac{mc}{ne^2} \frac{\partial}{\partial t} ne(\vec{u}_i - \vec{u}_e) \sim mc \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$ 与惯性力。但当时间与电子-离子碰撞时间 $\frac{1}{\nu_{ei}}$ 相当时，该项次也很重要。

② 压力梯度引起的热电效应。

③ 电场 \vec{E} 引起的电流，因为电导率 $\sigma = \frac{ne^2}{m_e l_e}$ ：

$$\frac{mc}{ne^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \sim \frac{mc}{ne^2} l_e \cdot \vec{j} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} \sim \vec{E}, \quad \vec{j} \sim \sigma \vec{E}$$

④ 导电流体在磁场中运动速度 v 产生压强，从而有感生电流。

⑤ Hall 电流

⑥ 电阻耗散 $\frac{mc l_e i}{ne^2} \vec{j} = \frac{i}{\rho}$

2. 离子 Ohm 定律的近似形式

一般情况下等离子体中的电流不仅与等离子体本身的物理性质（如电导率）和电场强度有关，而且也取决于波研究问题的力学特征（如速度、质量等）以及磁场强度的大小。但对于高密度等离子体（在磁流体力学中常采用），质量密度 $\rho (= m_i n_i + m_e n_e)$ 大，反映在(2.1.2-4)式中，即 η 大，可以略去 η 相关项。

① ② ⑤. ⑥ $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$

式中第⑥项可忽略，因为 η 大，碰撞频率 ν_{ei} 也大。 $\frac{mc}{ne^2} \eta (\pi r_0^2) U \vec{j} \sim \vec{j}/\sigma$

⑥ 理想导体 $\sigma \rightarrow \infty$ ，第⑤项变为 $\frac{1}{\sigma} \rightarrow 0$ ，可以忽略。于是理想导体之高密度等离子体则有 $\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0$

⑥ 冷等离子体时 $P=0$ （所谓冷等离子体即温度很低，因此可以忽略粘滞运动，所以压强、速度均可忽略。当波幅相速 $>$ 热运动速度时，

时，尽管速度可以不同，没有高的速度们仍然成立）

对等离子体。再加上电荷守恒律 $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ 得：

$$(2.1.2-4) \text{ 简化为 } \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \frac{1}{ne} \vec{j} \times \vec{B}$$

或者引入质量密度 $\rho = n(m_e + m_i) \approx nm$:

$$\frac{m_i m_e}{\rho e^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \frac{m_i}{\rho e} \vec{j} \times \vec{B}$$

④ 稳恒场 $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$, 且 $\vec{B} = 0$, $\nabla \vec{P} = 0$. 则有 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

3. 等高体逼近

① 该方程 (2.4) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho^*$, 或 $\rho^* = (n_+ - n_-)e$. 同时我们知等高作近似电中性即 $n_+ = n_- = n$. 于是我们看到 $\rho^* = 0$.

等高体逼近：假设 $n_+ = n_-$ 和 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 同时成立.

一般情况下，若从给定的电荷密度 ρ ，通过泊松方程 $\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \psi = \frac{1}{\epsilon} \rho$ 求 \vec{E} ，但在等高体中一般用相反的程序：从运动方程求出 \vec{E} ，由泊松方程求出电荷密度 ρ . 原因是等高体具有强烈的保持中性的倾向. 所以在运动过程中， \vec{E} 和 \vec{v} 处理不断同时满足泊松方程. (为此仅对于低速运动才如此). 因为可以不必考虑电子的负性). 通常我们

不用泊松方程求解 \vec{E} . 在磁流体方程中可以不列入 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho^*$. 而是 $n_+ = n_- = n$ 来减少未知数. (通过运动方程求 \vec{E} . 但我们知道 \vec{E} 和 ρ^* 的关系. 因此得 $n_+ = n_- = n$. $\therefore \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho^*$)

② 等高体逼近引出的误差，可以认为是 λ_D 的量级. $\lambda_D = \frac{2\pi}{k}$. 其为 Debye 长度. 大多数情况下 λ_D 是微米. $\lambda_D(\mu\text{m}) = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2} \right)^{1/2} = 0.69 \times 10^{-3} T_e^{1/2} n_e^{-1/2}$

除了极短的光波外，等高体逼近是正确的。

③ 磁流体方程中，通常二种程序是流体 $\rightarrow \vec{B} \rightarrow \vec{j} \rightarrow \vec{E}$.

实验条件下 $\vec{E} \rightarrow$ 电流 $\vec{j} \rightarrow \vec{B} \rightarrow$ 流向流体

3. 带中性粒子三元流模型扩展之欧姆定律

n_e : 电子密度, n : 一质子密度, n_a : 一中性粒子密度

$$n_e e \left(\vec{E}_0 + \frac{\nabla P_e}{n_e e} \right) = \frac{m_e}{e} \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \nabla (\vec{v} \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \vec{v}) \right) + \left(\frac{1}{\Omega \tau_{ei}} + \frac{1}{\Omega \tau_{en}} \right) B \vec{j} + \vec{j} \times \vec{B} + \frac{f \Omega \tau_{in}}{B} [\nabla P_e \times \vec{B} - (\vec{j} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \quad (2.9a)$$

\vec{v} : 速率, $\vec{E}_0 = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$, $\Omega = \frac{eB}{m_e}$, 电子回旋频率

τ_{ei} : 电子-离子碰撞时间 [ns], τ_{en} τ_{in} 分别为电子-中性粒子, 离子-中性粒子碰撞时间 [ns] (Cowling, 1926)

$$f = \frac{n_a}{n_a + n_e} \text{ 未电离的分数.}$$

推导中已忽略 m_e/m_i 次, 实际应用中, 电子的质量 m_e 与离子质量 m_i 可忽略. (2.9a) 可化为

$$\sigma \vec{E}_0 = \vec{j} + \frac{\Gamma}{n_e e} \vec{j} \times \vec{B} - \frac{\Gamma}{n_e e} \frac{f \Omega \tau_{in}}{B} (\vec{j} \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (2.10)$$

[把 (2.9a) 在巴第一次全部略去, 对巴第第二次利用 (2.11)]

碰撞频率
为碰撞频率
与碰撞时间
 $\sigma = \frac{n_e e^2 m_i}{\tau_{ei} + \tau_{en}}$

$$\frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{en}} = \frac{n_e e^2}{m_i \sigma}, \Rightarrow \frac{1}{\Omega} \left(\frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{en}} \right) B \vec{j} = \frac{m_e}{eB} \frac{n_e e^2}{m_i \sigma} B \vec{j} = \frac{n_e e}{\sigma} \vec{j}$$

$$\Rightarrow (2.9a) = \text{巴第 } \frac{n_e e}{\sigma} \vec{j}$$

(2.11) 特别情形 i.

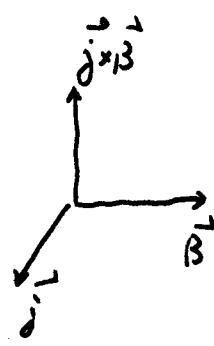
$$\Gamma = \frac{n_e e^2}{m_i \tau_{ei}}, \quad i, \quad \vec{j} \parallel \vec{B}$$

$$(2.10) \text{ i. } \vec{j} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}_0 = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\text{ii}, \quad \vec{j} \perp \vec{B}$$

$$\sigma \vec{E}_0 = \vec{j} + \frac{\Gamma}{n_e e} \vec{j} \times \vec{B} - \frac{\Gamma}{n_e e} \frac{f \Omega \tau_{in}}{B} \vec{j} \times \vec{B} (-\vec{j})$$

$$= \vec{j} + \frac{\Gamma}{n_e e} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{\Gamma}{n_e e} f \Omega \tau_{in} B \vec{j}$$



$$= \left(1 + \frac{\sigma}{n_e e} f S L T_{ion} B \right) \vec{j} + \frac{\sigma}{n_e e} \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\therefore \vec{v}_3 = \frac{\sigma}{1 + f S L T_{ion} B / (n_e e)} , \text{ Cowling 电导率}$$

可将速度垂直于磁场的分量记为

$$(2.12) 上式变为 \vec{v}_3 \vec{E}_0 = \vec{j} + \frac{\sigma_3}{n_e e} \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.12)$$

\vec{E}_0 为矢量 \vec{j} 和 $\vec{j} \times \vec{B}$ 合成在 $(\vec{j}, \vec{j} \times \vec{B})$ 平面内，垂直于 \vec{B} ， \vec{v}_3 为矢量：

$$(2.12) = \vec{j} \text{ 与 } \vec{v}_3 \text{ 垂直} \Rightarrow \vec{v}_3 \vec{E}_0 \cdot \vec{j} = j^z , \vec{v}_3 = \frac{\vec{j}}{E_0 \cdot \vec{j}} \cdot \text{ 分别为 } \vec{E}_0 \text{ 和 } \vec{j} \text{ 方向分量。即 } \vec{j} = (\vec{E}_0 \cdot \vec{j}) \cdot \vec{v}_3$$

再代入 (2.12) 求出 \vec{j} 。

$$(2) \vec{B} \times (2.12) = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_3 (\vec{B} \times \vec{E}_0) &= \vec{B} \times \vec{j} + \frac{\sigma_3}{n_e e} \vec{B} \times (\vec{j} \times \vec{B}) \\ &= \vec{B} \times \vec{j} + \frac{\sigma_3}{n_e e} \left(\vec{B} \vec{j} - \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{j}) \right) \\ &= \vec{B} \times \vec{j} + \frac{\sigma_3}{n_e e} \vec{B} \vec{j} \quad \because \vec{j} \perp \vec{B} \end{aligned}$$

$$\text{从 (2.12) 得 } \vec{B} \times \vec{j} = \frac{n_e e}{\sigma_3} (\vec{j} - \vec{v}_3 \vec{E}_0) \text{ 代入上式}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_3 (\vec{B} \times \vec{E}_0) &= \frac{n_e e}{\sigma_3} (\vec{j} - \vec{v}_3 \vec{E}_0) + \frac{\sigma_3}{n_e e} \vec{B} \vec{j} \\ &= \left(\frac{n_e e}{\sigma_3} + \frac{\sigma_3 B}{n_e e} \right) \vec{j} - n_e e \vec{E}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{j} = \frac{n_e e \vec{E}_0 + \vec{v}_3 (\vec{B} \times \vec{E}_0)}{\frac{n_e e}{\sigma_3} + \frac{\sigma_3 B}{n_e e}}$$

$$= \frac{\vec{v}_3}{1 + \left(\frac{\sigma_3 B}{n_e e} \right)} \vec{E}_0 + \frac{\sigma_3}{n_e e} \sigma_3 \vec{B} \times \vec{E}_0$$

$$= \sigma_1 \vec{E}_0 + v_2 \frac{\vec{B} \times \vec{E}_0}{B}$$

式中 $\sigma_1 = \frac{v_3}{1 + \left(\frac{\sigma_3 B}{n_e e} \right)}$

direct conductivity

$$\sigma_2 = \frac{v_3 B}{n_e e} \sigma_1$$

Hall 电导率



$$= \sigma_1 \vec{E}_0 + \sqrt{\sigma_3} \frac{\vec{B} \times \vec{E}_0}{B}$$

式中 $\sigma_1 = \frac{\sigma_3}{1 + (\frac{\sigma_3 B}{n_e e})}$ direct conductivity

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_3 B}{n_e e} \sigma_1 \quad \text{Hall 电导率}$$

→

4. 根据(2.12)求得 载流子: $\vec{E}_0 \cdot \vec{j} = \partial \vec{j} / \partial z$

σ_3 中包含中性粒子的贡献. 当全部电离时, $f=0$, $\sigma_3 \rightarrow \sigma$. 这时载流子数为零. 由于中性粒子的带电粒子碰撞, 增加了碰撞频率, 电导率应该下降. $\therefore \sigma_3 < \sigma$ (因为 σ_3 表达式中, 分母中增加了一项非带电的贡献)

同理 $\frac{\vec{j}}{\sigma_3} > \frac{\vec{j}}{\sigma}$ $\Rightarrow \sigma = \frac{n_e e^2 m_e^{-1}}{\tau_{e_i}^{-1} + \tau_{e_n}^{-1}}$ (载流子电离与中性粒子的碰撞)
 $\Rightarrow \sigma_3 = \frac{\sigma}{1 + f B \sigma = 2 \tau_{e_i} (n_e e)}$ (附加碰撞损失: 再加上高带电中性粒子的碰撞)

实际上, σ_3 可以近似为 σ (说明有足够多的中性粒子), 可能有很重要的双极扩散 (ambipolar diffusion): 带电粒子相对中性粒子的扩散.

5. 当气体完全电离, $n_a=0$, 电导率简化为

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_{e_i} \quad (= \sigma_1, \text{ 无一平行于磁场, 纵向电导率})$$

σ 表示中元子. 即为沿磁场方向运动

$$\sigma_3 = \sigma$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_3}{1 + (\frac{\sigma_3 B}{n_e e})} = \frac{\sigma}{1 + (\frac{n_e e^2}{m_e} \tau_{e_i} \cdot \frac{B}{n_e e})} = \frac{\sigma}{1 + \Omega^2 \tau_{e_i}^{-2}} \quad (= \sigma_1, \text{ 横向电导率})$$

$\Omega \rightarrow B$ 的相关系数

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_3 B}{n_e e} \sigma_1 = \frac{\sigma B}{n_e e} \sigma_1 = \frac{n_e e^2}{m_e} \cdot \tau_{e_i} \cdot \frac{B}{n_e e} \cdot \sigma_1 = \Omega \tau_{e_i} \sigma_1$$

$$= \Omega \tau_{e_i} \frac{\sigma}{1 + \Omega^2 \tau_{e_i}^{-2}} = \frac{\sigma \Omega \tau_{e_i}^{-1}}{\tau_{e_i}^{-2} + \Omega^2} \quad (= \sigma_H, \text{ Hall 电导率})$$

磁场的作用减小了平行于电场, 于是额外的 Hall 电导率 (平行于 \vec{E}_0 和 \vec{B})

电导率与电荷

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\perp} & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{||} \end{pmatrix}$$

Hall 电流垂直于 \vec{E}_0 , \vec{B} . 2.3) 入门加速度耗散 ($j_{Hall}^2 = 0 = \frac{1}{\sigma}$)

Hall 效应产生是由于带电粒子穿过磁场的漂移. 为 $S_2 T_{ei} \gg 1$, 即带电粒子与碰撞次数 (碰撞时间), 粒子可以自由地作多次碰撞运动. Hall 效应主要作用. 当 $S_2 T_{ei} \ll 1$ 时, 该次就不重要. ($\sigma_H = \sigma_2 = \frac{\sigma_2 e E_{ci}}{V_{ci}^2 + S_2^2} = \frac{(Nee^2/m_e) \cdot S_2}{V_{ci}^2 + S_2^2}$)

当大电流集中于极薄的区域, 既妨碍耗散完全偏高 $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$
也必须计入电阻. $\rightarrow \sigma \text{ 为 } \infty$

2.1.4 威廉方程

利用 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ (速度等于零时)
得威廉方程.

由欧姆定律解得 $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{v} \times \vec{B}$, 代入麦克斯韦式

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left(\frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \text{ 代入上式}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B})$$

这里 $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$, 称为磁扩散系数 (magnetic diffusivity), σ , 电导率

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\text{最后得到 } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (2.13)$$

这就是实用的威廉方程. 在这里已假定 η 为常数, 常数.

当 \vec{v} 已知时 (\vec{v} 为流速), 可求解 \vec{B} . 当我们要满足 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (2.14)

威廉方程写作
即已利用了
既得结果. Maxwell
方程组的三个方
程. $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$
根据奇偶对称
性质. $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
且 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$进而可求得 \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \quad (2.15)$$

$$\text{再由 } \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.16) \quad \text{通过(2.4)式 } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho^*}{\epsilon}$$

求得电荷密度。

在磁流体力学中，我们看到的是这样一个过程：从流体速度
 $\vec{v} \rightarrow \vec{B} \rightarrow \vec{j} \rightarrow \vec{E} \rightarrow \rho^*$ ，与实验室中的过程相反。实验室
 中先用电势（可用 V 表示） \rightarrow 产生电流 \rightarrow 产生磁场 \rightarrow 影响流体。磁
 流体力学中互不遵循所谓从“原”求 B 或 E 的方法。在等离子体
 问题中我们也曾提起过，我们用求得的 E 来待求电荷分布。

这里磁场是第一位的，电流和电场则位居其次。注意，由(2.16)
 相比，宁可用(2.15)来求电流。

太阳物理中，特征长度很长，所以由(2.15)可见， \vec{j} 很小，因此
 (2.16)中的 \vec{j} 可以忽略（电流密度已除外，如电流片），从而有
 $\vec{E} \approx -\vec{v} \times \vec{B}$ ，通常记为 $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$ 。认为处理长导体 $\sigma \rightarrow \infty$ 的结果。
 但 $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$ 认为是特征长度长的结果。（因为在天体物理中（等地
 球等离子体相似）(2.16)电流项必须忽略，起因于特征尺度比较大、电
 流等离子体相似）。

等离子体本身没有什么变化。

印度心通及方程组 当流体不运动时，电流和电场由(2.15)和(2.16)确定。由于特征
 长度大，电场和电流非常小。例如，典型活动区的磁场 $100 G$ ，等离
 子体速度 $10^3 m s^{-1}$

$$E_0 \approx v_0 B_0 \approx 10 \text{ Vm}^{-1}$$

当流体不运动，但流体静止 $\vec{v} = 0$ ，特征长度 $l_0 = 10 \text{ Mm} (= 10^7 \text{ m})$

$$j_0 \approx \frac{B_0}{\mu_0} \approx 8 \times 10^{-4} A/m^2$$

$$\sigma = 10^3 mho/m^2$$

$$E_0 \approx \frac{j_0}{\sigma} \approx 8 \times 10^{-7} V/m^2, \text{ so 在此运动区中的 } E_0 \text{ 为 } 10^7 \text{ 伏/m}$$

这里要找的是流速就是局部质心速度 $\vec{v} = \frac{m_e \vec{u}_e + m_i \vec{u}_i}{m_e + m_i}$

$$\vec{j} = n_e (\vec{u}_i - \vec{u}_e) \quad \text{当 } \vec{v} = 0, m_e \vec{u}_e + m_i \vec{u}_i = 0$$

$$\vec{j} = n_e \left(-\frac{m_e}{m_i} \vec{u}_e - \vec{u}_e \right) \approx -n_e \vec{u}_e$$

当 $\vec{v} \neq 0$,

$$-\vec{j} = n_e (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$$

$$③ \vec{u}_i, \vec{u}_e \text{ 为局部平均速度 } \vec{u}_i > \langle \vec{v}_i \rangle = \frac{1}{n} \int \vec{v}_i f d\vec{v}$$

$$④ \text{无规速度 } \vec{w}_i = \vec{v}_i - \vec{v}, \text{ 以定压加速度 } P_{ij} = mn \langle w_i w_j \rangle = m \int w_i w_j f d\vec{v} \\ \text{相对质心速度} = P_{ji}$$

$$\text{热流量 } q_{ijk} = mn \langle w_i w_j w_k \rangle = m \int w_i w_j w_k f d\vec{v}$$

2.1.5 电离率

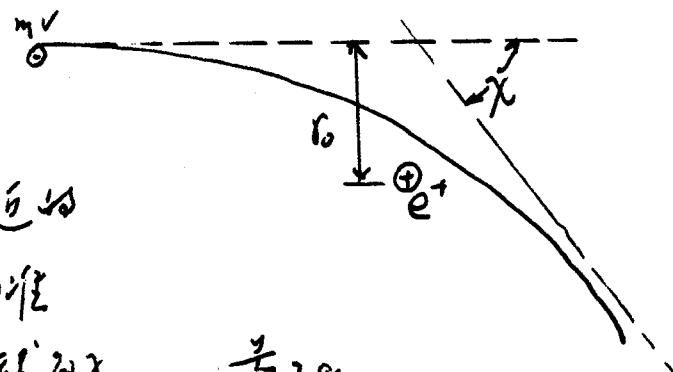
完全电离，碰撞所致的电离率由(2.11) 得

$$\tau = \frac{n_e e^2 \tau_{ei}}{m_e}$$

现在我们估计碰撞时间 τ_{ei} (用麦克斯韦统计)

当电子和中性原子碰撞时，电子运动向原子靠近，比速率 v_{rel} 大的只及之前，它还受引力 (库仑引力)，这种碰撞相当于二了中性原子的碰撞。当电子和离子相碰时，由于离子的长程库仑力作用，电子逐渐地偏转，我们估计碰撞截面的大小。

在高 v 中，速度为 v 的电子



若近电荷为已知的固定离子，则只有库仑力时，电子运动时，离开离子最近的距离称为碰撞半径 r_0 (也称为瞄准距离)。当库仑力 $F=0$ 时，则有偏转角 χ

$$\text{库仑力 } F = -\frac{e^2}{r^2}, \text{ 负号表示引力}$$

电子在高 v 附近时，才明显地感受到这力。受力的时间约 $T \approx \frac{r_0}{v}$

$$\text{这时电子动量变化为 } \Delta(m_e v) = |FT| = \frac{e^2}{r_0 v}$$

我们要估计大角度碰撞 ($\chi \geq 90^\circ$) 的截面，考虑到 χ 为 90° 时，初速 $m_e v$ 的变化具有本身的速度 (散射角为 180° 时，动量变化为 $\Delta(m_e v) = 2m_e v$ 等于弹性碰撞)

$$\Delta(m_e v) \approx m_e v = \frac{e^2}{r_0 v} \quad \therefore r_0 = \frac{e^2}{m_e v^2}$$

$$\text{碰撞截面 } S = \pi r_0^2 = \frac{\pi e^4}{m_e^2 v^4}$$

$$\text{碰撞频率 } V_{ei} = n S v = \frac{n \pi e^4}{m_e^2 v^3} \quad v: \text{ 电子速度; } n: \text{ 离子密度}$$

$$2.1.2 \text{ 中已得到 } \eta_e = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{ne^2} V_{ei} \quad \eta_e: \text{ 为电阻率 (T. 体“比”/ 磁场 “数”)}$$

$$\therefore \eta_e = \frac{m_e}{ne^2} V_{ei} = \frac{m_e}{ne^2} n v \frac{\pi e^4}{m_e^2 v^4}$$

$$= \frac{\pi e^2}{m_e v^3}$$

$$2.1.3 \text{ Maxwell 分布的电子。有 } V^2 \sim \frac{k_B T_e}{m}$$

$$V_{ei} = \frac{n \pi e^4}{m_e \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{3/2}} = \frac{n \pi e^4}{m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}$$

$$\eta_e = \frac{\pi e^2 m_e}{(k_B T_e)^{3/2}}$$

2.1.3 MKS 单位制：

$$\begin{aligned} \eta_e &= \frac{1}{\mu_0 v} \\ \eta_e &= \frac{m_e}{\mu_0 n e^2} V_{ei} \\ &= \frac{\pi e^2}{\mu_0 m_e v^3} \\ &= \frac{\pi e^2 m_e}{m (k_B T_e)^{3/2}} \end{aligned}$$

上式中的电导率 η_e 是否正确?碰撞系数 $\ln \lambda$ 实际上因为库仑力是长程力, 小角度碰撞要加散射系数, 结果是许多小角度碰撞的累加, 其影响大于大角度碰撞(简单)的。Spitzer 在他的表达式中应乘上库仑对数 $\ln \lambda$ 。

$$\eta_e = \frac{\pi e^2 m_e \chi}{(k_B T_e)^{3/2}} \ln \lambda$$

$$\therefore \text{碰撞时间} T_c = V_{c_i}^{-1} = \frac{m_e \chi (k_B T_e)^{3/2}}{\pi \pi e^4 \ln \lambda}$$

式中 n 为单位 cm^{-3} , $\lambda = (\frac{\lambda_D}{T_e})^{1/2}$, λ_D : Debye 波长

库仑对数 对温度 T_e 和密度 n 有弱的依赖关系, $\because \lambda_D \sim (\frac{T_e}{n})^{1/2}$

但对于等离子体参数的实用价值是不敏感的。 $r_0 \sim \frac{1}{T_e}, \lambda = \frac{\lambda_D}{T_e} \sim \frac{T_e^{3/2}}{n^{1/2}}$

能量耗散率 $\ln \lambda^{1/2} n$ 表达 (单位)

$T(\text{K})$	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}	10^{16}	10^{17}
10^4	16.3	12.8	9.43	5.97	-	-
10^5	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97	-
10^6	22.8	19.3	15.9	12.4	8.96	5.54
10^7	25.1	21.6	18.1	14.7	11.2	7.85

等离子体参数比许多更优, $\ln \lambda$ 基本上于 $T_e^{1/2}$ 。一般取 $\ln \lambda = 10$ (关于 $\ln \lambda$ 的公理和理由)

$$\sigma = \frac{n e^2 T_{ei}}{m_e} = \frac{n e^2}{m_e} \frac{m_e^{3/2} (k_B T_e)^{3/2}}{n \pi e^4 \ln \Lambda} = \frac{(k_B T_e)^{3/2}}{m_e^{1/2} \pi e^2 \ln \Lambda} \quad (2.17)$$

$$\text{碰撞系数 } \eta = \frac{1}{\mu \sigma} = \frac{m_e}{\mu \pi e^2 T_{ei}} \quad (2.18)$$

色球和日冕中 η 分别为 $8 \times 10^{-3} T^{-3/2}$ 和 $10^9 T^{-3/2} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ (假设色球高)

当太阳大气中的氢仅部分电离时，有中性粒子存在，根据

$$(2.11) \text{ 式 } J = \frac{n_e e^2 m_e^{-1}}{T_{ei}^{-1} + T_{en}^{-1}} = \frac{n_e e^2}{m_e} T_{ei} \cdot \frac{1}{1 + \frac{T_{ei}}{T_{en}}} \quad (2.19)$$

可见 (2.18) 中碰撞系数乘以因子 $(1 + \frac{T_{ei}}{T_{en}})$

$T_{en} = (n_n S_H V_t)^{1/3}$, n_n : 中性粒子密度, S_H : 中性原子的截面积.

V_t : 电子热运动速度.

$$\frac{T_{ei}}{T_{en}} = \frac{m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}{n_e \pi e^4 \ln \Lambda} \cdot n_n S_H V_t \sim \frac{n_n T^2}{n_e \ln \Lambda}$$

已假定热平衡 $T_e = T_n = T$.

对于湍动等离子体 (Turbulent plasma), 碰撞时间从相应的电导率 σ Spitzer 的值小很多.

讨论湍动等离子体时, 先介绍下列概念.

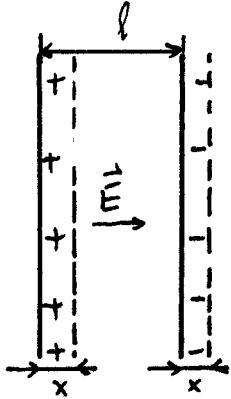
• 等离子体根平均速率

假如等离子体中的电子以均匀的速度本底有一个位移, 则有电场产生, 要把电子拉回原点的往复. 为了恢复等离子体的电中性, 由于电子的惯性, 它们将冲过平衡位置, 围绕平衡位置, 以特征频率振荡. 这个特征频率即为等离子体频率.

波动和根平均速率

设管为l的等离子体薄片，电子相对于离子移动x
在薄片二侧面上形成密度为 $\pm n_{e0}x$ 的面电荷
这时片内产生强度为 $\frac{n_{e0}ex}{\epsilon_0}$ 的电场。试简述电子
运动原因。电子质量为 m_e ， \vec{E} 了电子的运动方程为

$$m_e \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -e \vec{E} = -e \frac{n_{e0}ex}{\epsilon_0} = -\frac{n_{e0}e^2}{\epsilon_0} x$$



这是很简单方程。频率为 $\omega_{pe} = \left(\frac{n_{e0}e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2}$

相应地可得离子频率 $\omega_{pi} = \left(\frac{n_i e^2}{m_i \epsilon_0} \right)^{1/2}$

以折合质量 $m = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i}$ 代替 m_e ，可以推得

$$\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$$

$$\because \omega_{pi} \ll \omega_{pe} \quad \therefore \omega_p \approx \omega_{pe}$$

上述方程只计热运动，无磁场。

实际上电子高能都运动
是连同热运动一起的，
电子质量为 $m = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i}$ 代入
折合质量 $\omega_p^2 = \frac{n_{e0}e^2}{m \epsilon_0} = \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e} \right) \frac{n_{e0}e^2}{\epsilon_0}$
 $= \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$

• 离子声波 (ion acoustic waves)

低频情况下 $\omega \ll \omega_{pi}$ ，离子的运动起主要作用。当带电粒子一起随
离子一起运动，以保持中性，因此低频波不仅电子和离子的运动
需要用二元流的方程来描述。

电子

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{V}_e) = 0$$

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \nabla) \vec{V}_e \right] = -Y_e k_B T_e \nabla n_e - e n_e \vec{E}$$

$$n_i = n_e = n \quad \text{不再使用连续方程} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} e(n_i - n_e)$$

离子

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{V}_i) = 0$$

$$m_i n_i \left[\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + (\vec{V}_i \nabla) \vec{V}_i \right] = -Y_i k_B T_i \nabla n_i + e n_i \vec{E}$$

式中 $Y k_B T \nabla n$ 表示理想热平衡条件下的关系 $\frac{d}{dt} (P F^{-1}) = 0$ 。不正确。

受小扰动后，物理量变为平衡值（下标“0”表示）和扰动量（下标“1”表示）之和。平衡时 $\vec{E}_0 = 0$, $\vec{V}_{e0} = \vec{V}_{i0} = 0$, 不计磁场, $n_i = n_e = n_0$

线性化方程:

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{V}_{e1} = 0$$

$$m_e n_0 \frac{\partial \vec{V}_{e1}}{\partial t} = -Y_e k_B T_e \nabla n_{e1} - e n_0 \vec{E}_1$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{V}_{i1} = 0$$

$$m_i n_0 \frac{\partial \vec{V}_{i1}}{\partial t} = -Y_i k_B T_i \nabla n_{i1} + e n_0 \vec{E}_1$$

可以认为 $n_i = n_{e1}$, 因此由(1)的方程 $\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} e(n_i - n_{e1})$
电子质量大, 对于低频情况可忽略其惯性令 $m_e \rightarrow 0$, 于是有

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{V}_{e1} = 0 \quad (\text{ion-1})$$

$$Y_e k_B T_e \nabla n_{e1} + e n_0 \vec{E}_1 = 0 \quad (\text{ion-2})$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{V}_{i1} = 0 \quad (\text{ion-3})$$

$$m_i n_0 \frac{\partial \vec{V}_{i1}}{\partial t} = -Y_i k_B T_i \nabla n_{i1} + e n_0 \vec{E}_1 \quad (\text{ion-4})$$

$$n_{e1} = n_{i1} \quad (\text{ion-5})$$

扰动量 $\sim e^{-i(wt-kx)}$ - 沿 x 方向

代入(ion-1)(ion-3)式, 考虑(ion-5)有 $V_{e1} = V_{i1}$

低频情况下, 电子能随同离子一起运动, 二者运动速度应该相同。

扰动量代入(ion-2)-(ion-4):

$$Y_e k_B T_e \nabla n_{e1} + e n_0 \vec{E}_1 = 0 \quad (\text{ion-6})$$

$$-i\omega n_{i1} + i n_0 k V_{i1} = 0 \quad (\text{ion-7})$$

$$-i m_i n_0 \omega V_{i1} = -i Y_i k_B T_i \nabla n_{i1} + e n_0 \vec{E}_1 \quad (\text{ion-8})$$

$$\text{从(ion-6)得 } \vec{E}_1 = -i \frac{Y_e k_B T_e \nabla n_{e1}}{e n_0}$$

$$(ion-7) \text{ 得 } V_{i1} = \frac{\omega}{n_0 k} n_{i1}$$

E_i, v_{s1} 代入 (ion-8) 并利用 $n_{ii} = n_{ei}$, 得

$$\omega^2 = \frac{Y_i k_B T_i + Y_e k_B T_e}{m_i} \gamma^2 = 0$$

定义: $V_s = \left(\frac{Y_e k_B T_e + Y_i k_B T_i}{m_i} \right)^{1/2}$

称为高子声速

又有 $\omega = k^* V_s$

① 在气体中的声速很相似, 但气体温度为零时, 声速便增加 12 倍。温度为零时, 高子声波很慢化。

② 高子声波的群速度等于相速度。

③ 高子声波是低频波 (因为质量大的高子化振动), 电子几乎可无惯性地跟随着运动, 因为电子运动速度快, 所以有时间延迟 τ 使电子和电场相同, 因此电子等温系 $Y_e = 1$ 。高子非弹性运动, 故 $Y_i = 3$

$$V_s = \left(\frac{k_B T_e + 3 k_B T_i}{m_i} \right)^{1/2}$$

④ 驱动高子声波有两种力: 高子的热压力和来自电场的作用。

当带高子受到微弱扰动形成不规则稀疏区时, 高子的热压力使高子向稀疏区扩展, 对应于 V_s 表达式中的第一次; 同时由于扰动高子的聚集, 即正电荷的聚集, 有分散的趋势, 但是高子受到周围电子的屏蔽, 由于电子的热运动屏蔽并不完全, 有类似于 $k_B T_e/e$ 的电势 ϕ 作用, 左侧的电势对聚集的正高子有作用, 引起的速度为 $(\frac{e\phi}{m_i})^{1/2}$ 。右侧的电势对聚集的正高子没有作用。

这对应用于 V_s 中的第一次, 这个电势作用使高子由不规则区向稀疏区扩展, 中性气体具有这种性质, 所以等离子体中即使高子温度为零, 在电场力作用下, 仍有高子声速, $V_s = (\frac{k_B T_e}{m_i})^{1/2}$

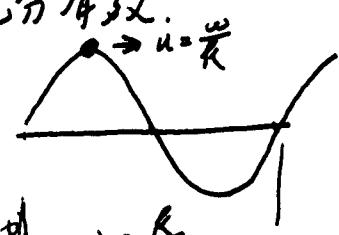
⑤ 动力学效应 $T_e \sim T_i$ 时 $\frac{\omega}{\nu} = v_s \sim \left(\frac{k_B T_i}{m_i}\right)^{1/2}$, 相速度和离子的热运动速度相近. 离子声波受到强阻尼. 仅当 $T_e \gg T_i$ 时, 离子声波饱和.

• Landau 阻尼的物理机制

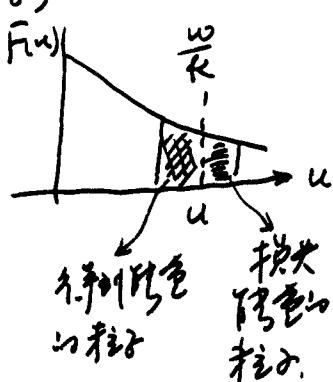
从荷拉兹方程出发, 通过理论计算, 得到 Landau 阻尼 $\gamma \sim -F'_k(\omega)$ (对于朗缪尔波), 其中 k 是朗缪尔波的相速, $F'_k(\omega)$ 是一维的速度分布函数 $F_k(u)$, u 为速度 u 与于波的相速 v_s 的斜率. 对于 Maxwell 分布 $F'_k(\omega) < 0$, 即 $\gamma > 0$, 有阻尼饱和. Landau 阻尼可以理解为电子与波的共振效应, 电子在波场中运动参量集中 (即以相速 v_s 与波一起行进而存在系) 于高频率的电场. 由于 $\lambda = \frac{L}{2\pi}$ 为空间周期的静息分布, 一根粒子在此参考系中基本运动, 因此与波之间交换能量最为充分. 例如非共振粒子以较大 (或+) 速度运动, 电场对它们作用力平均值几乎为零, 交换的能量很少, 可以证明在一根粒子中, $u < v_s$ 的粒子从电场获得能量, $u > v_s$ 的粒子则向电场释放能量. $F'_k(u) < 0$ 表示得到能量的粒子 (前一种粒子) 多于失去能量的粒子 (后一种粒子). 这样效果使带电粒子的能量向衰减, 这就是 Landau 阻尼.

需要注意的是 $u > \frac{v_s}{k}$ 时, 粒子吸收能量, 使从而获得能量而增强, 这相当于发射等离子体波. 这一切与柯夫辐射相似. 不同之处在于现代是超相速的粒子发射等离子体波, 不是电磁横波. 这一种意义的柯夫辐射.

等离子体中的电磁横波相速大于光速, 因此不可能的粒子共振, 也没有 Landau 阻尼.



$$\lambda = \frac{L}{2\pi}$$

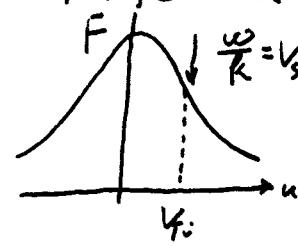


• 离子声波不稳定性

当 $T_e \gg T_i$ 时 有离子声波 $v_s = (\frac{k_B T_e}{m_i})^{1/2}$

当 $T_e \ll T_i$ 时，离子声波的相速度 $\frac{\omega}{k}$ 接近于离子热运动速度 $v_{T_i} \sim (\frac{k_B T_i}{m_i})^{1/2}$ 。从分布函数看，有较多的粒子分布在 $v_i > v_s$ 处，波被严重地吸收阻尼，离子声波存在的条件是

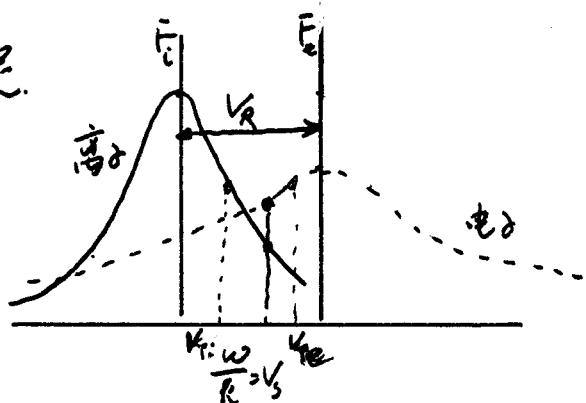
$T_e \gg T_i$ ，这时离子声波的相速度 $v_s = \frac{\omega}{k}$



若把离子分布函数末端斜率很大，由离子引起的阻尼可忽略，对电子分布函数而言，若带电致平坦的部分，从而电子引起的阻尼也很小，则波可以稳定化。

如果由于某种原因使得高能电子成分相对于低能成分有一相对速度 v_R ，当相对速度超过某临界值时，扰动为不稳定。目前可把相速度 $\frac{\omega}{k}$ 表达下列范围

$$(\frac{k_B T_i}{m_i})^{1/2} \ll \frac{\omega}{k} \ll (\frac{k_B T_e}{m_e})^{1/2}$$



的离子声波才不会被高能电子所吸收。

引起这种类型的 Landau 阻尼。但若之带电的电子速度不太快，而且向波提供能量的电子数 ($u > \frac{\omega}{k}$) 比吸收波的能量的电子数 ($u < \frac{\omega}{k}$) 要多，所以波增长 — 不稳定。

令 $\frac{d\gamma}{dt} = Y = 0$ ，即可求得 v_R (相对速度) 的临界值。

$$Y = -(\frac{\pi}{8})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma \left[(v_s - v_R) + v_s \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{T_e}{2T_i}} \right]$$

v_s ：— 离子声速。 $v_R > v_s$ 时有 $Y > 0$ ，波增长 — 不稳定。
 $r=0$ ，求得相对速度 v_R 的下限

$$v_R = v_s \left[1 + \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{T_e}{2T_i} \right) \right]$$

• 激发等离子体

1. 由不稳定性引起

2. 等离子体中一种或几种模式的波在一定频率和波数范围内被激发，这种状态称为等离子体激励。

激发是由激励源维持，即要维持激励，等离子体不稳定性要不断产生。

3. 能量被可传模式和频率重新分配，热自由度均分。这种波-粒子相互作用相当于粒子的能量耗散，用带电粒子对不同频率的吸收率表示。

4. 波与粒子的相互作用会产生反常电阻，电磁波的辐射，粒子的加速等物理现象。高斯不稳定性产生高斯激励，与反常电阻率有密切的关系。

5. 激励状态中的各种波称为等离子激元 (plasmons)，引起谱密度数

$N_{\vec{k}}$ 和波谱强度密度 $W_{\vec{k}}$

$$W_{\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \hbar \omega(\vec{k}) N_{\vec{k}}$$

$N_{\vec{k}}^T$: - 等离子激元分布函数或
单位体积内 (\vec{r}, t) 体积数
 σ : - 巴克利模型

$$(2\pi)^3 \text{ 是归一化因子。} \quad \text{波的强度} W = \int W_{\vec{k}} d\vec{k} = \int \hbar \omega(\vec{k}) N_{\vec{k}}^T \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}$$

6. 用相关函数描写激励场 (加速磁场，电场，磁场等)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \langle \vec{A}(\vec{r}, t) \rangle + \vec{A}^T(\vec{r}, t)$$

$\langle \cdot \rangle$: 表示对场的随机性取平均。 \vec{A}^T : 场的随机部分。

因为激励 $\langle \vec{A}^T(\vec{r}, t) \rangle = 0$

激励场的强度定义为 $\langle A_i^T(\vec{r}, t) A_j^T(\vec{r}, t) \rangle = A_{ij}$ (强度)

7. 弱激励的强度

度量了不同时空点激励场的相位差

$$\gamma = \frac{W}{n k_B T}$$

W : - 单位体积的激励波能量

$n k_B T$: - 热能

$\eta \ll 1$ 弱湍动
 $\eta \sim 1$ 强湍动

我们重新回到 P.16 讨论湍动时的碰撞时间和平滑率。因为很多波，即等离子体也起着粒子的作用，所以碰撞时间要缩短。电离率要减小。才有低频高声湍动时（大体物理条件下，反常电阻率很密切），反常碰撞时间

$$\tau^* \approx w_{pe}^{-1} \frac{n k_B T}{W}$$

W : 湍动耗散率， w_{pe} : 电子等离子体振荡频率

反常电率：

$$\sigma^* = \frac{n e \tau^*}{m_e}$$

对于弱湍动 $W \approx 0.01 n k_B T$

$$\tau^* \approx 1.8 n_e^{-1/2} \text{ s} \quad (n_e \text{ in } \frac{1}{\text{m}^3}) \quad (\text{参考 } \tau_{ei} = 0.266 \times 10^6 \frac{T^{3/2}}{n_e k_B T})$$

$$\sigma^* \approx 5.0 \times 10^{-8} n_e^{1/2} \text{ mho m}^{-1} \quad (\sigma = 1.53 \times 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{\text{m} \cdot \text{A}})$$

注意 $n_e \sim 10^{14} / \text{m}^3$

7. 考虑湍动

• 湍动的度量，起因于粒子电流密度和磁场的梯度扩散。

当电流太小时，电子相对于离子的漂移速度过大，当漂移速度比（本文中指相对速度 v_r ）大于高声速 v_s （相速）时，就有切向不可逆辐射高声湍动，漂移速度 v_r 可用电流密度表示 $v_r = j/n_e$ 。用电子的高声波的“碰撞”来代替电子与其他粒子的碰撞频率。

$$j = \sigma E = \frac{\epsilon_0 w_{pe}}{k_B T_{eff}} E, \quad T_{eff} = \text{一电子-高声波等效碰撞频率}$$

代入 $v_r = j/n_e$ 得到漂移速度 v_r

当 $v_s < v_r < V_{Te}$ 就发生高声激发 (Kaplan)

Priest 在书中指出的条件 (P.80): 漂移速度 $v_r > V_{Te}$ 即 $v_r > (\frac{k_B T_e}{m_e})^{1/2}$ 引起的是 Brannen 不稳定性，增长率很大 $\gamma = \sqrt{3} (\frac{m_e}{2m_i})^{1/3} w_{pe}$ 。激发湍动后，湍动的迅速变为热流，增大 V_{Te} ，系统变为 $T_e > T_i$ ，即 $v_r < V_{Te}$ ，无高声湍动。(Kaplan)

Vlasov 方程简介：

1. Vlasov 方程是非平衡统计，粒子分布函数 $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ 的演化方程之一。它既不同于二体碰撞强相互作用的 Boltzmann 方程 [1]，也不同于适用于多体碰撞 [2] 的 Fokker-Planck 方程 [3]。Vlasov 方程的特点是运动力学方程中的碰撞项可以忽略。

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = 0$$

其中 $\vec{F}_\alpha = q_\alpha (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

2. 等离子体中，带电粒子在长程库仑力的作用下，主要是多体弱碰撞，平均碰撞频率的倒数 ν_c 可用电离高 λ_D 表示，由 Debye 半径 b_0 和 Debye 半径 λ_D 定义为

$$\nu_c \sim \frac{n_e e^4 \ln \Lambda}{m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}$$

$$\ln \Lambda = \ln \frac{\lambda_D^2}{b_0} \quad , \quad \lambda_D: Debye 半径, \quad b_0: 阳离子角为 \frac{\pi}{2} 的临界距离.$$

可见 ν_c 与粒子数密度成正比，与 λ_D^2 成反比。同元素忽略碰撞次数 ν_c 不直接依赖于电离度，即依赖于 (稀薄)。而且，当完全电离时等离子体中带电粒子的碰撞不可忽略。

3. 弱电碰撞：是带电粒子间的碰撞，即库仑散射，而带电粒子与中性粒子间的作用忽略。实际上等离子体内局部电荷分离造成的空间电荷产生的电场起着重要作用，这正是带电粒子产生的宏观平均场，反映等离子体内部的集体相互作用。是等离子体许多重要性质的根源。

Vlasov 方程中的 E 应包括外场 E_{ext} 和集电极到阴极的两场 E_{in} 与 E_{out} 。即前称的自洽场。

4. Vlasov 方程适用的时间尺度 — 等离子体振荡时间 τ_p

等离子体内部带电粒子的相互作用有两类

i. 碰撞：带电粒子间的库仑散射，带电粒子与中性粒子碰撞。

碰撞过程的时间尺度 $t_c \sim \frac{1}{\nu_c}$ ，在短时间内等离子体大型可趋于平衡。 t_c 时间内可以忽略碰撞过程和输运过程，碰撞起决定作用 Vlasov 方程不适用。

ii. 集体相互作用

等离子体很薄，时间尺度 $t_p \sim \frac{1}{\omega_p} \sim \left(\frac{m_e}{n_e}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e}$

$$\frac{t_p}{t_c} \sim \frac{e^3 (n_e)^{\frac{1}{2}} \ln \lambda}{(k_B T_e)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{b_0}{\lambda_D} \ln \frac{\lambda_D}{b_0} \ll 1 \quad (b_0 \sim \frac{e^2}{mv^2})$$

这两种时间尺度有很大不同，在 t_p 时间尺度内存在等离子体厚和不稳定性，以及非线性效应和湍流等。这些过程中碰撞“假定”可以忽略。

Vlasov 方程适用于快过程，低频段时间尺度大，要考虑碰撞。但 MHD 理论更合适。Vlasov 方程忽略了碰撞，讨论问题时不可以简单地认为碰撞没有影响。带电粒子相互作用是 Landau 型的。

5. Vlasov 方程的性质

1. Boltzmann
Fokker-Planck $\xrightarrow{\text{碰撞}} 2. \text{可逆} \rightarrow \text{平衡态 (Maxwell 分布)}$

因为碰撞而不可逆。

2. Vlasov 方程可逆，具有时间反演性， $t \rightarrow -\bar{t}$, $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ 方程不变。

Boltzmann 方程、F-P 方程是守恒律（耗散）的，即 Maxwell 分布。V 方程是守恒律有限多的。它们不代表平衡态；在 t_p 及更短内，因为碰撞而不变。

2.2. 等高物体运动

2.2.1 压强守恒

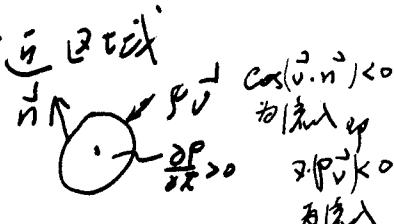
由质量方程描述的运动行为，通过方程(13)中的速度梯度 $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$ 和等高物体相联系，等高物体运动则由连通性方程、运动方程和浮力方程确定。压强守恒方程：

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \vec{v} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.19)$$

$$\text{或 } \frac{\partial P}{\partial x} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{式中随体导数 } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

$$(2.20) \text{ 表示某处密度的增加 } \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0, \text{ 意即为质量流入该处附近区域 } \\ \nabla \cdot (\rho \vec{v}) < 0$$



2.2.2 运动方程

体积为 V 的流体，由牛顿第二定律， V 中流体质点变化率等于作用于该体积及其表面上所有力之和， \vec{F} 为因为力的作用而产生的加速度， \vec{P}_n 为作用于单位面积上的向力， \vec{n} 为该单位面积的方向（由于粘性作用）， \vec{P}_n 与 \vec{n} 垂直于 \vec{n} 的方向，因此 \vec{P}_n 在法向、切向分别有关系 P_{nn}, P_{nt} ， $\vec{P}_n = \vec{P}_n \vec{n}$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{P}_n dV + \int_S \vec{P}_n ds$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \frac{D}{Dt} (\rho \vec{v}) \cdot dV + \int_S \rho \vec{v} \frac{D}{Dt} ds$$

$$\vec{D} \cdot \vec{v} = \frac{1}{dV} \frac{d}{dt} (dV)$$

$$\text{上式} = \int_V \left(\vec{v} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \rho \vec{v} \vec{D} \cdot \vec{v} \right) dV$$

$$= \int_V \left[\vec{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \vec{v} \cdot \vec{j} \right) + \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \right] dV$$

$$= \int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV$$

$$= \int_V \rho \vec{a} dV + \int_S \vec{P} \cdot \vec{n} ds$$

$$= \int \rho \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int \nabla \cdot \vec{p} dV$$

$$\therefore \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} + \nabla \cdot \vec{p} \quad , \quad \vec{F} = \rho \vec{a}$$

等离子体中，在电中性条件下，运动方程为

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{F} \quad (2.21)$$

这是单流体方程，其中 $\rho = m_i n_i + m_e n_e$, $\vec{V} = \frac{m_i n_i \vec{u}_i + m_e n_e \vec{u}_e}{m_i n_i + m_e n_e}$ 表示总速度。 $\vec{j} = n_i e \vec{u}_i - n_e e \vec{u}_e$, 实际 $\vec{u}_i \approx \vec{u}_e$

式中 $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_v$, 引力和粘滞力之和

$$\vec{F}_g = -\rho g(r) \vec{r} \quad (2.22a)$$

\vec{r} : 单位矢量，从太阳中心指向外。

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (2.22b)$$

$M(r)$ 为 r 之内太阳质量, G : 引力常数。

太阳表面(忽略表面) $r = R_\odot = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$,

$$M = M_\odot = 1.991 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad g_\odot = 274 \text{ m s}^{-2}$$

$$\text{粘滞力 } \vec{F}_v = \rho \nu (\nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \nabla \cdot \nabla \vec{V}) \quad (2.23)$$

为理解粘滞力公式 (2.23), 我们回顾一下流体力学的相关部分

1. 流体速度分解

① 将流体速度 \vec{V} 在 M_\odot 球对称内/外用 Taylor 展开式表示: $\vec{V} = \vec{V}_0 + \sum \vec{V}_j$, 其中

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z_j} \delta z_j$$

$$\text{或写成 } V_j = V_{0j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \delta x_i;$$

$V_0, V_{0j}, \delta x_j$ 为常量, $\frac{\partial V_j}{\partial x_i}$ 为一阶增量

② 一阶增量 V_j 可分解为反向流动增量 A 和正向增量 S 之和

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

$$= A_{ij} + S_{ij}$$

$$= A + S$$

反对称分量 $a_{ij} = -a_{ji}$; 对称分量 $s_{ij} = s_{ji}$

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

反对称分量 $\vec{\omega}$ 分量构成的矢量，即 $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$

2. 本构方程—应力分量和速度梯度分量之间的关系

假设：

① 运动流体的应变梯度化运动停止后，趋于与静止流体的应力分量。应力分量可写成二向同性部分 \vec{P}^I （只与因为压缩而引起的线方向相反）和二向异性部分之和

$$\vec{P} = -\vec{P}^I + \vec{P}' \quad \text{或} \quad P_{ij} = -P \delta_{ij} + C_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & P_{yx} & P_{zx} \\ P_{xy} & P_{yy} & P_{zy} \\ P_{xz} & P_{yz} & P_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

② 偏应力分量 T_{ij} 的各分量是局部速度梯度分量 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 的分量的线性一次函数，当速度在空间均匀分布时，偏应力分量为零。

③ 流体各向同性，即流体所有性质（粘滞性，热导率等），化为各分量方向上相同，流体的性质不依赖方向或坐标系转换。

根据假设③，有

$$T_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

C_{ijkl} 表示流体粘性的常数, $\pm 3^4 = 81$, 当流体各向同性时 $C_{ijkl} = 0$,

$\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ 可写成变形速度对称的反对称增量之和

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = S_{kl} - \varepsilon_{klm} \omega_m$$

量纲恒定: $\varepsilon_{klm} = \begin{cases} 1 & \text{若 } klm \text{ 为 } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{若 } klm \text{ 为 } 2, 3, 1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} - C_{ijkl} \varepsilon_{klm} \omega_m \quad (C-1)$$

根据恒定③, C_{ijkl} 是六向同性增量, 且对称于

i, j 对称且对称于 k, l .

$$(\because T_{ij} \text{ 是对称增量}) \quad C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{说明部分见 "流体力学" P77})$$

简化得常数叫 λ, μ , 然后记作 $C_{ijkl} \propto k, l$ 也对称

$$C_{ijkl} = C_{jilk}, \quad S_{kk} = S_{RR}, \quad \therefore -\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{Rlm}$$

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{lk} = C_{ijkl} \varepsilon_{lkm} \omega_m \quad | = C_{ijkl} S_{kl} + C_{ijkl} \varepsilon_{klm} \omega_m \quad (C-2)$$

(已利用了 $i-j$ 与 $k-l$ 互换式)

比较 (C-1), (C-2) 式, 可见 (C-1) 在 $i=j$ 时为零, 即消除了剪应力的旋转无关, y, z 和 x 有关.

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} S_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) S_{kl}$$

$$= \lambda S_{RR} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij}$$

$$P_{ij} = (-P + \lambda S_{RR}) \delta_{ij} + 2\mu S_{ij}$$

$$\text{引进 } \mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

$$P_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\mu (S_{ij} - \frac{1}{3} S_{RR} \delta_{ij}) + \mu' S_{RR} \delta_{ij}$$

除了上述或称声波等极弱情况, 对于一般的气体运动

$$\mu' = 0$$

μ' : 气体膨胀压缩时引起内耗, μ' 被认为是零

μ : 流体抵抗变形的摩擦系数.

$$P_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\mu (S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij})$$

$$S_{ij} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad S_{kk} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right)$$

$$P_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left[\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) \right]$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left[\nabla^2 V + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot V) \right]$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{P} = -\nabla P + \rho \nu \left[\nabla^2 V + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot V) \right] \quad (2.23a)$$

运动粘滞系数 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, μ : 动力粘滞系数

方向同化的压强梯度引致力 $-\nabla P$

半径力 $\rho \nu \left[\nabla^2 V + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot V) \right]$

对于不可压缩流体 $\vec{F}_v = \rho \nu \nabla^2 \vec{V}$ $(2.23b)$

对于完全电离的 H 离子流体, Spitzer 1953 $P_D = 2.21 \times 10^{-16} \frac{T^{5/2}}{B_m} \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$

相对于惯性参考系, 以自身运动速度 \vec{v} 为流动参考系, 高斯场 \vec{r} 为,

(2.21) 式 1.3 为

$$\rho \left(\frac{D \vec{V}}{Dx} + 2 \vec{J} \times \vec{B} + \vec{f} + \rho \vec{r} \times \frac{d \vec{J}}{dt} + \frac{1}{2} \rho \vec{v} |\vec{J}|^2 \right). \quad (2.24)$$

2.2.3 完全气体定律 (Perfect gas law)

$$\underline{\text{Priest: }} P = \frac{\tilde{R}}{\mu} \rho T \quad (2.26) \quad \underline{\text{和 (1) }}; \rho V_0 = R T$$

V_0 质分子体积, 常温为 $L^3 / [\text{分子}]$

完全气体: ① 1787 年 12 月从理想气体 - 乌拉特定律 $PV = \text{const.}$ 盖吕萨克

定律 $V_t = V_0 (1 + \alpha_v t)$ (压强一定) $\alpha_v = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$

油气体.

由理论力学可知，绝对速度 \vec{V}_a 和相对速度之间关系为

$$\vec{V}_a = \vec{V}_o + \vec{V}_r$$

其中 \vec{V}_r 是牵连速度， $\vec{V}_o = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}$

\vec{V}_o 是运动系相对静止系的速度，而为运动系绕自身轴的转动切线速度。

绝对加速度和相对加速度之间关系为

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

\vec{a} ：绝对加速度， \vec{a}' ：相对加速度。

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{V}_o}{dt} \times \vec{r} + \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \vec{a}_t \text{ 与运动系的转动有关。}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad \text{Coriolis 加速度，} \vec{v}' \text{ 相对速度}$$

该质点受到合力为 $\vec{F} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{f}'$

$$2.1 \quad \vec{F} = \rho \vec{a}$$

$$\rho \vec{a}' = \vec{f} - \rho \vec{a}_t - \rho \vec{a}_c$$

$$= -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{f}' + \rho \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \rho (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{r} - 2\rho \vec{r} \times \vec{v}'$$

$$\rho \vec{a}' = \rho \frac{D\vec{v}'}{Dt} \quad \left(\text{a: } \vec{v}' \text{ 为运动系内物体位置} \right)$$

$$\rho \left(\frac{D\vec{v}'}{Dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \right) = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{f}' + \rho \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \rho (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{r}$$

~~$$\text{带此式得: } \nabla \left(\frac{V}{2} \right) = \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \nabla \times (\vec{V} \times \vec{V}) = \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \vec{V} \times \nabla \vec{V} \quad \left(\begin{array}{l} \vec{V} \text{ 为流体的速度} \\ \vec{V} \text{ 为坐标系的运动速度} \end{array} \right)$$~~

~~$$\text{带此式得: } \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \vec{V} \times \nabla \vec{V} = \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \quad \left(\text{流体速度} \right)$$~~

~~$$\therefore (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{r} = \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \quad \left(\text{带此式得: } (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{r} = \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right)$$~~

~~$$\therefore (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{V}^2 + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{V}^2 + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) \quad \left(\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right)$$~~

$$\rho \left(\frac{D\vec{v}'}{Dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \right) = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{f}' + \rho \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{1}{2} \rho \nabla |\vec{V} \times \vec{r}|^2$$

~~$$\text{带此式得: } \frac{D\vec{V}}{Dt} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \vec{V} \times \nabla \vec{V} = \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{V}^2 + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) \quad (2.24)$$~~

以上式子与 \vec{r} (坐标系运动速度)相关。现 $\vec{V} \rightarrow \vec{v}$ 为流体速度，则有

运动坐标系内，我们有 $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ (角速度) 相对于运动坐标系 \vec{r} ， \vec{r} 为坐标系的运动速度

(2.24) = 运动坐标系内：

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot \vec{v} + \vec{V} \cdot \nabla + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{D\vec{v}}{Dt} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{V} \right) \Rightarrow \rho \left(\frac{D\vec{v}}{Dt} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{V}) \right) = \rho \left(\frac{D\vec{v}}{Dt} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} \right)$$

已考虑到 $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$ 。

$$\nabla \times (\vec{B} \times \vec{V}) = 2\vec{B} \cdot \nabla \vec{V} - 2\vec{V} \cdot \nabla \vec{B} + (\vec{V} \cdot \vec{V}) \vec{B} - 2(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V}$$

$\vec{B} \cdot \nabla \vec{V}$ が省略

$$x \cdot j \cdot \vec{V} \cdot \vec{V} \text{ は } \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} - 2\vec{B} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \nabla \times (\vec{j} \times \vec{B}) + \nabla \times \vec{f}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = \rho [(\vec{\omega} + 2\vec{B}) \cdot \nabla \vec{v}] + \nabla \times (\vec{j} \times \vec{B}) + \nabla \times \vec{f} \quad (2.25a)$$

$$\text{左端} \quad \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega}$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega}$$

$$\text{左端} (2.25a), \text{ 右端} (2.25a) \text{ が } \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} \text{ の } 1/2 \quad \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} \text{ が } \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} \text{ と等しい。} \quad (2.25a)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x} - \rho \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = 2\rho (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{j} - (\vec{j} \cdot \nabla) \vec{B} + \nabla \times \vec{f} \quad (2.25b)$$

$$(\nabla \cdot \vec{j} = 0)$$

⇒ 完全遵守玻耳定律和道耳定律（内部无运动的分子）的气体称为完全流体 — 理想

$PV_0 = RT$ 对于一克分子的流体成立。对于 m 克流体，如果分子数 μ 为流体分量 $PV_0 = RT \Rightarrow PV = \frac{m}{\mu} RT$

R：尔格/度·分母
(分子：质量单位，物理即“分子”无作为单位的)

(2.26) 或 $P = \frac{\tilde{R}}{\mu} \rho T$, \tilde{R} 平均原质量 (m_p 原质量为单位)，本流体质
 $\tilde{\mu} = \frac{m}{m_p}$. \tilde{R} 单位与 R 相同 ($\tilde{R} = R$)

3. Boltzmann 常数

$$\tilde{R} = \frac{Pr_{est}}{\frac{k_B}{m_p}}$$

$$\frac{"我们"}{k_B} = \frac{R}{N}$$

N: 物质的量摩尔数

$$[N] = \frac{1}{6.02 \times 10^{23}} = [M]$$

$$\rightarrow \text{分子或原子质量 } m = \frac{\mu}{N}$$

μ 为分量 (或) 原质量

$$\text{对于 } \tilde{\mu} \text{ 及 } m_p = \frac{1}{N} \quad (\text{原质量单位})$$

$$\therefore k_B = \tilde{R} m_p = \frac{\tilde{R}}{N} \quad \text{由“我们”可知} \quad (\text{我们同一分子时 R 为 } k_B, \\ Pr_{est} = m_p \text{ 不等于一分子})$$

<u>Pr_{est}T</u>	<u>"我们"</u>
$P = \frac{\tilde{R}}{\mu} \rho T$	$PV = \frac{m}{\mu} RT$
$k_B = \tilde{R} m_p$	$k_B = \frac{R}{N}$

利用 Boltzmann 常数, (2.26) 变为 $P = \frac{k_B}{\tilde{\mu} m_p} \rho T = \frac{k_B}{m_p} \rho T \quad (2.26a)$

$$\rho = mn \quad (= n \tilde{\mu} m_p)$$

$$P = n k_B T \quad (2.27)$$

全部电离 H 等离子体，有二种粒子：质子、电子 (既电中性成立)

$$\tilde{\mu} \text{ 为平均原质量. } \tilde{\mu} = \frac{1}{2} (m_p + m_e) / m_p \approx \frac{1}{2} \quad (\bar{\mu} \text{ 质量范围})$$

$$n = n_p + n_e = 2n_c, \quad \rho = n_p m_p + n_e m_e \approx n_e m_p$$

太阳大气中还有其他元素, 以 $\mu = \frac{1}{N} (m_p + m_e + \dots + m_N) / m_p \approx 0.6$

$$n \approx 1.9 n_e$$

光球及其近旁 (H, He) 没有完全电离, 太阳不带电 (组合问题) 2.75(4) 上述
式表示.

$$H \text{ 原子 } 94\%, \quad He 1.76\%$$

$$\begin{aligned} H \text{ 部分电离 } n &= 2 \times 0.94 \\ &= 1.88 \sim 1.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= [(m_p + m_e) 0.94 + 0.06 \cdot 4 m_p] \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0.59 \rightarrow 0.6 \end{aligned}$$

2.3 修正方程

2.3.1 修正方程的引向形式

① 基本方程

$$PT \frac{DS}{DX} = -\omega$$

$$(2.28a)$$

$$n = n_p + n_e = 2n_c, \rho = n_p m_p + n_e m_e \approx n_e m_p$$

$$\text{太陽大氣中還有其他元素, } \bar{\mu} = \frac{1}{N} (m_p + m_e + \dots + m_N) / m_p \approx 0.6$$

$$n \approx 1.9 n_e$$

在質子數 光球及其附近 (H, He 沒有完全電离), 太陽核心 (細分之間) 2. 13(4) 上述
式表示.

$$H \text{ 質子 } 94\%, He 1.76\%$$

$$H \text{ 部分電离 } n = 2 \times 0.94 \\ \approx 1.88 \rightarrow 1.9$$

$$\bar{\mu} = [(m_p + m_e) 0.94 + 0.06 \cdot 4 m_p] / m_p \\ = 0.59 \rightarrow 0.6$$

2.3 伯查方程

2.3.1 伯查方程的三種形式

① 基本方程

$$PT \frac{DS}{DT} = -\lambda \quad (2.28a)$$

L: 熱量損失率, 是熱吸收和輻射效應結果的字面.

S: 熱 $\frac{Q}{T}$ 熱量轉變為功的本質. (2.28a) 中的 S 為單位質量的

Q: 總加的可逆過程中以外界吸收的熱量.

T: 係統溫度 (即周圍溫度)

其他形式

$$② P \left(\frac{De}{DT} + P \frac{D}{DT} \left(\frac{1}{P} \right) \right) = -\lambda \quad (2.28b)$$

$$③ P \frac{De}{DT} - \frac{P}{P} \frac{DP}{DT} = -\lambda \quad (2.28c)$$

e: 內能 單位质量的

$$\delta Q = T dS = de + P dV, \text{ 代入 } V = \frac{1}{P} \quad \text{代入} (2.28a)$$

$$\begin{aligned} \text{代入单位质量} \quad PT \frac{DS}{DT} &= P \left(\frac{De}{DT} + P \frac{D}{DT} \left(\frac{1}{P} \right) \right) \\ \text{代入单位质量} \quad &= P \frac{De}{DT} - \frac{P}{P} \frac{DP}{DT} = -\lambda \end{aligned}$$

下面要列一些簡單的關係式, 推導 2.13(4) 式的伯查方程[14].

1. 对于1克分子气体： $PV_0 = RT$

对于m克气体，对应的体积为V。可以认为1克分子体积， $V_0 = \frac{V}{m/\mu}$, μ 是分子质量。 $PV_0 = P \frac{V}{m/\mu} = RT$.

对于1克质量m，有 $PV = \frac{m}{\mu} RT$.

$R = 8.31 \times 10^7 \text{ 帕斯卡} \cdot \text{米}^3 / \text{摩尔} \cdot \text{开尔文}$ (CGS), $R = 84.789 \text{ 千帕} \cdot \text{米}^3 / \text{摩尔} \cdot \text{开尔文}$ (MKGS)

对于单位质量，例如1克，分子数为 $\frac{1}{\mu}$ ，体积为 V, $V_0 = \frac{V}{\mu}$,

$$PV = \frac{1}{\mu} RT. \quad \dots \quad (1)$$

此即 Priest 式 (2.26) 式。 $P = \frac{\tilde{R}}{\mu} RT$. (分子平均质量 \tilde{R})
又平行半径 $\tilde{\mu}$ 为平均质量 m_p (j, s) 的单位。 $\tilde{R} = R$.

2. Boltzmann 定律

$$k_B = \frac{R}{N}, \quad N: \text{阿伏加德罗常数} [N] = \frac{1}{368} = [M]^{-1}$$

$$\text{分子数} / \text{总分子质量} m = \frac{N}{\tilde{\mu}} \quad \dots \quad (2)$$

$$\text{质量} / \text{总质量} m_p = \frac{1}{N} \quad \therefore k_B = R m_p \quad \tilde{R} = \frac{k_B}{m_p} \quad (\text{Priest } p. 82)$$

3. “我们” (1克分子)

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \quad (\text{单位质量 } m)$$

对于单位质量

$$PV = \frac{1}{\mu} RT$$

$$k_B = \frac{R}{N}$$

$$\text{1克分子, } G - C_V = R$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$C_P = \gamma C_V = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$e = C_V T = \frac{R T}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} P$$

Priest (单位质量)

$$P = \frac{1}{\mu} \tilde{R} RT \quad (\text{单位质量})$$

$$k_B = \tilde{R} m_p \cdot \frac{R}{N}$$

$$\text{1克分子质量} \rightarrow \frac{\tilde{R}}{\mu} \quad (\text{2.27式})$$

$$\frac{\tilde{R}}{\mu} = \frac{k_B N}{\tilde{\mu}} = \frac{k_B}{\frac{\tilde{\mu}}{N}} = \frac{k_B}{m} \quad (\text{2.28式})$$

$$C_P - C_V = \frac{k_B}{m}$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

$$C_V = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m}$$

$$C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m}$$

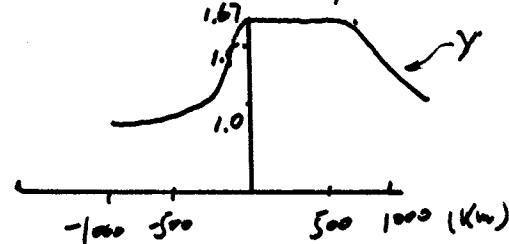
$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m} \cdot T = \frac{1}{\gamma - 1} P \quad (2.29 \text{ b})$$

$$Y = \frac{\tilde{N}+2}{\tilde{N}}$$

\tilde{N} 等高气体的自由度数

(2.28c)

完全电离的 H, $\tilde{N}=3$. $Y=\frac{5}{3}$. 一般地 $1-\frac{5}{3} \approx 0$. 太阳不亮时部分电离
Y 从极大 $\frac{5}{3}$ (这时 $T_{5000} = 1.15$ 电子温度 参照 1.11(a)) 降低到 $Y_{min} = 1.1$
(这时 $T_{5000} \approx 1.0$). 然后再逐步上升 $\frac{5}{3}$
(当电离率高)



$$\textcircled{4} \quad \frac{P^r}{r-1} \frac{D}{DT} \left(\frac{P}{P^r} \right) = -\mathcal{L} \quad (2.28d) \quad \text{若 2.1a}$$

(2.29b) 代入 (2.28c) $\quad (2.29b)$

$$\begin{aligned} P \frac{De}{Dt} - \frac{P}{P} \frac{DP^0}{Dt} &= \frac{P}{r-1} \frac{D}{Dt} \left[\left(\frac{P}{P^0} \right)^r \right] - \frac{P}{P^0} \frac{DP^0}{Dt} \\ &= \frac{P}{r-1} \left[\frac{1}{P} \frac{DP}{Dt} - P^{r-1} \frac{DP^0}{Dt} \right] - \frac{P}{P^0} \frac{DP^0}{Dt} \\ &= \frac{1}{r-1} \frac{DP}{Dt} - \frac{Y^r}{(r-1)P^0} \frac{DP^0}{Dt} \end{aligned}$$

(2.28d) 代入

$$\frac{P^r}{r-1} \left[\frac{1}{P^r} \frac{DP}{Dt} - Y P P^{r-1} \frac{DP^0}{Dt} \right] = \frac{1}{r-1} \frac{DP}{Dt} - \frac{Y^r}{(r-1)P^0} \frac{DP^0}{Dt} = \text{上式}$$

$$\textcircled{5} \quad r C_v T \frac{D}{Dt} \ln \frac{P}{P^r} = -\mathcal{L} \quad (2.28e)$$

$$C_v T = e = \frac{P}{(r-1)P^0} \text{ 代入上式}$$

$$\rho \frac{P}{(r-1)\rho} \cdot \frac{\rho^r}{P} \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho^r} \right) = \frac{\rho^r}{r-1} \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho^r} \right) = -\lambda = (2.28d)$$

$$b) \frac{DP}{Dt} - \frac{\gamma P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -(\gamma-1)\lambda \quad (2.28f)$$

由(2.28d) $\rho^r \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho^r} \right) = -(\gamma-1)\lambda$

$$\text{左邊} = \rho^r \left[\frac{1}{\rho^r} \frac{DP}{Dt} - \frac{\gamma P}{\rho^{r+1}} \frac{D\rho}{Dt} \right] = \frac{DP}{Dt} - \frac{\gamma P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (\text{由 } 2.28f) = -(\gamma-1)\lambda.$$

$$7) \rho \frac{D}{Dt} (C_p T) - \frac{D\rho}{Dt} = -\lambda \quad (2.28g)$$

$$C_p T = C_v T + \frac{k_B}{m} T = C_v T + \frac{P}{\rho} = e + \frac{P}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) - \frac{D\rho}{Dt} &= \rho \frac{De}{Dt} + \rho \cdot \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \frac{D\rho}{Dt} \\ &= \rho \frac{De}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (2.28c) = -\lambda \end{aligned}$$

$$8) \rho \frac{De}{Dt} + P D \vec{v} = -\lambda \quad (2.28h)$$

連續性方程(2.19) $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$. $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \vec{v} \cdot \vec{v}$ 代入(2.28c) 得到(2.28h).

9) 壓強保持為常數時

$$\rho G_p \frac{DI}{Dt} = -\lambda \quad (2.30a)$$

$$e = C_v T = C_p T - R T \quad \text{代入}(2.28c)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} &= \rho \frac{DI}{Dt} (C_p T - R T) - R T \frac{D\rho}{Dt} \\ &= \rho G_p \frac{DI}{Dt} - \rho R \frac{DT}{Dt} - R T \frac{D\rho}{Dt} \\ &= \rho G_p \frac{DI}{Dt} - R \frac{D}{Dt} (T P) \end{aligned}$$

$$P = R P T, \quad T P = \frac{P}{R} \quad \text{代入上式}$$

$$\rho G_p \frac{DI}{Dt} - \frac{D\rho}{Dt} = -\lambda$$

$$P \text{ 保持為常數} \therefore \rho G_p \frac{DI}{Dt} = -\lambda$$

由單位质量的內能 $e = \frac{1}{m} \tilde{e}$

$$e = C_v T = C_p T - \frac{k_B}{m} T \quad \text{代入} \quad (2.28c)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

$$= \rho \frac{DI}{Dt} (C_p T - \frac{k_B}{m} T) - \frac{\tilde{e}}{m} T \frac{D\rho}{Dt}$$

$$= \rho G_p \frac{DI}{Dt} - \rho \frac{k_B}{m} \frac{DT}{Dt} - \frac{k_B}{m} T \frac{D\rho}{Dt}$$

$$= \rho G_p \frac{DI}{Dt} - \frac{k_B}{m} \frac{D}{Dt} (PT)$$

$$= \rho G_p \frac{DI}{Dt} - \frac{k_B}{m} \frac{D}{Dt} \left(\frac{m}{k_B} P \right)$$

$$= \rho G_p \frac{DI}{Dt} = -\lambda.$$

当等离子体处于绝热状态，即没有热量交换($\lambda=0$)，则状态的变化称为绝热过程，由(2.28a)可得 $\frac{P}{\rho r} = \text{const.}$ 。绝热率“ γ ”指的是一边过边界时热流密度为零。对于理想流体，表高不变。

(2.28a) = (2.28c)，可推得

$$P_T \frac{\partial S}{\partial T} = P_C T \frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{P}{\rho r}$$

$$S = C_V \ln \frac{P}{\rho r} + \text{const.} \quad (C_V \text{ 为常数})$$

当 P, ρ 下变化的时刻比距离小，停等和加热的时刻不小时， γ 时 λ 可忽略，对于绝热过程和流动或不稳态时，上述条件都成立。

(2.28d) 式的推导过程中 (见本节 P.31)，利用了 (2.29b) 式，即 $e = \left(\frac{P}{rT}\right)^{\gamma}$ ，包含了完全气体的条件。所以此式 $P\rho^{\gamma-1} = \text{const.}$ 表明等温、绝热、平衡是等价的。

2.3.2 热传导

依次考虑传耗函数的项次，将耗散项写成能量损失率减去能量增加率

$$\vec{L} = \nabla \cdot \vec{q} + L_r - \vec{q} \cdot \vec{n} - H$$

\vec{q} : 热流矢量，起因于粒子的运动

L_r : 净辐射

\vec{q}_r : 电子耗损

H : 其他加热方式的总和

(能量增加部分有负号)

$$\text{热流矢量可写成 } \vec{q} = -K \cdot \nabla T \quad (2.33)$$

K 是热导率。有磁场的情况下，简单起见，热导率可以分解成沿磁场方向的 $K_{||}$ 和垂直磁场的 K_{\perp} ， $K_{||}, K_{\perp}$ 为椭圆

$$\nabla \vec{q} = \nabla_{||} \cdot (K_{||} \nabla_{||} T) + \nabla_{\perp} \cdot (K_{\perp} \nabla_{\perp} T)$$

沿着磁场方向的热传导，从微观上来讲，主要依靠电子，对于完全电离的H等离子体，Spitzer (1962) 给出

$$K_{||} = 1.8 \times 10^{-10} \frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

因为库仑对数中的 $\Lambda = (\frac{e^2}{k_B T})^{1/2}$ ，Debye 半径 λ_D 是带电粒子有效电荷温度无关。

典型的热导率值 ($K_{||}$)

光球 $4 \times 10^{-11} T^{5/2}$

色球 $10^{-11} T^{5/2}$

日冕 $9 \times 10^{-12} T^{5/2}$

超越碰撞的碰撞速率依赖原子，对于完全电离等离子体， K_1 依赖于

$$\Omega_1 T_{ee} = 1.63 \times 10^{15} \frac{BT^{3/2}}{\ln \Lambda \cdot n}$$

Ω_1 : 高速回旋频率； T_{ee} : 高速-高速碰撞时间

$T_{ee} = (\frac{m_e}{m_a})^{\frac{1}{2}} \cdot T_{ei}$ ，现在我们求 T_{ee} ，^{从物理上}得出了一个完整的结果。

等离子体物理中，非平衡态向平衡态过渡的过程叫做弛豫过程。弛豫过程的特征时间叫做弛豫时间。

假定等离子体中，除了一个试探粒子外，其余粒子达到热平衡，形成 Maxwell 分布，通过试探粒子与这些达到 Maxwell 分布的场粒子相互作用求弛豫时间。

我们知道大角度偏转速度是由多次碰撞（小角度碰撞）积累而成。我们可以求一个试探粒子为标准， 90° 偏转时间，需要在等离子体内走过的“有效自由程”

(碰撞率数与偏转时间的关系)

二体库仑碰撞的详细计算，可求得 $T_{\theta/2} = \frac{b_0}{b}$ ， θ 是试探粒子轨迹二渐近线之间的夹角， b 为碰撞参数（碰撞半径）， b_0 为偏转 90° 时的碰撞参数，由于偏转角为 θ ， $\therefore T_{\theta/2} = \frac{b_0}{b} \approx \frac{\theta b}{2}$ 。由于一个试探粒子每次偏转的大小和方向是无规则的，因此系统平均后

$$\begin{aligned}\langle \theta \rangle &= \langle \Delta \theta_1 + \Delta \theta_2 + \dots + \Delta \theta_N \rangle \\ &= \langle \Delta \theta_1 \rangle + \langle \Delta \theta_2 \rangle + \dots + \langle \Delta \theta_N \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

一个粒子与多个粒子相互作用时，多次碰撞可近似看作一系列二碰撞，撞的线性叠加。

理由是每次偏转的平均 $\langle \Delta \theta_i \rangle = 0$ ，但是均方偏转 $\langle \theta^2 \rangle$ 不为零。

$$\begin{aligned}\text{因为 } \theta^2 &= (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2 + \dots + \Delta \theta_N)(\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2 + \dots + \Delta \theta_N) \\ &= \sum_{i=1}^N (\Delta \theta_i)^2 + \sum_{i \neq j} \Delta \theta_i \Delta \theta_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \Delta \theta_i \Delta \theta_j\end{aligned}$$

$$\text{系综平均 } \langle \theta^2 \rangle = \sum_{j=1}^N \langle \theta \theta_j \rangle + \sum_{i,j} \langle \Delta \theta_i \Delta \theta_j \rangle \\ = N \langle (\Delta \theta)^2 \rangle$$

$$\therefore \langle (\Delta \theta_1)^2 \rangle = \langle (\Delta \theta_2)^2 \rangle = \dots = \langle (\Delta \theta_N)^2 \rangle = \langle (\Delta \theta)^2 \rangle$$

$$\sum_{i,j} \langle \theta \theta_i \Delta \theta_j \rangle = 0 \quad (\text{参见 "统计物理" (Berkeley Physics Course) Kub})$$

$= \sum_{i,j} \langle \Delta \theta_i \rangle \langle \Delta \theta_j \rangle \quad \text{无相关性.}$

上式中 N 为碰撞次数. 这是无耗行进问题

$$\text{现代求} \langle (\Delta \theta)^2 \rangle$$

$$1. \text{近碰撞壳层 } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad \text{碰撞参数} b, \quad 0 \leq b \leq \langle b_0 \rangle \quad (\text{图})$$

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}} \quad \text{由 Maxwell 分布求平均} \quad (P.14 \quad T \approx \frac{e^2}{m_0 v^2})$$

$$\langle b_0 \rangle = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_{\alpha\beta} \langle V_{\alpha\beta} \rangle}, \quad m_{\alpha\beta} \langle V_{\alpha\beta}^2 \rangle \approx k_B T$$

$$= \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 K_B T}$$

$$= \lambda_L$$

λ_L : Landau 长度 (α 粒子和 β 粒子碰撞时的最近距离)

该距离下, 二类粒子库伦相互作用势能等于其运动初能

$$\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \lambda_L} = k_B T$$

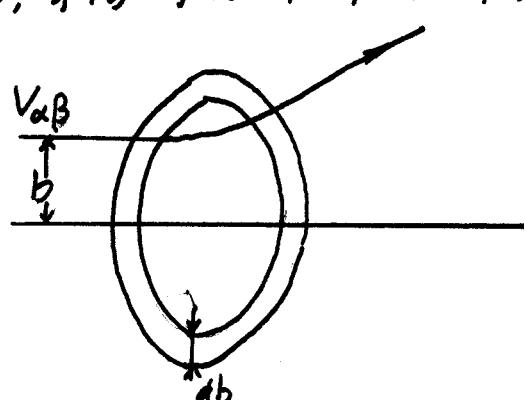
$$\text{近碰撞截面近似为 } \overline{O}_{\alpha\beta, \text{近}}^{(t)} = \pi \langle b_0 \rangle^2 = \pi \lambda_L^2$$

2. 远碰撞指 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 的碰撞. $\langle b_0 \rangle < b \leq \lambda_D$

λ_D 是临界距离的最大值, 大于 λ_D , 离高处为电中性, 无库伦散射.

$$\text{截面 } \overline{O}_{\alpha\beta, \text{远}}^{(t)} = 2\pi \int_{\langle b_0 \rangle}^{\lambda_D} b db \quad (\text{上图})$$

$$= \pi (\lambda_D^2 - \langle b_0 \rangle^2)$$



$$\frac{\sigma_{\alpha\beta,\text{速}}^{(t)}}{\sigma_{\alpha\beta,\text{固}}} = \left(\frac{\lambda_D}{\langle b_0 \rangle}\right)^2 \approx \left(\frac{\lambda_D}{\langle b_0 \rangle}\right)^2 = \lambda^2$$

$$\text{这里 } \lambda = \frac{\lambda_D}{\langle b_0 \rangle} \cdot \frac{\lambda_D}{\lambda_L} = \frac{\left(\frac{e_0 k_B T_e}{4\pi e_0 k_B T}\right)^{\frac{1}{2}}}{e^2} \approx n_e \lambda_D^2 \gg 1, \text{ 速度角数 } \ln \lambda \gg 1.$$

(热平衡, $T_e = T$)

可见速度角的机率远远大于碰撞的机率得多。(数密度由代表粒子数表示)

$$\therefore \langle (\Delta\theta)^2 \rangle = \frac{\int_{\langle b_0 \rangle}^{\lambda_D} (\Delta\theta)^2 \cdot 2\pi b db}{\int_{\langle b_0 \rangle}^{\lambda_D} 2\pi b db}$$

由上式得, 粒子走过单位长度碰撞的平均粒子数是

$$N' = n_p \int_{\langle b_0 \rangle}^{\lambda_D} 2\pi b db$$

n_p 是端粒子密度。

- 由式得粒子走过的长度应与均匀分布的平均距离相等为

$$\langle \theta^2 \rangle = \lambda N' \langle (\Delta\theta)^2 \rangle = \lambda n_p \int_{\langle b_0 \rangle}^{\lambda_D} (\Delta\theta)^2 \cdot 2\pi b db$$

用 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b_0}{b} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$ 代入上式

$$\langle \theta^2 \rangle = \lambda n_p \int_{\langle b_0 \rangle}^{\lambda_D} \left(\frac{2b_0}{b}\right)^2 \cdot 2\pi b db$$

$$= 8\lambda n_p \pi b_0^2 \ln \frac{\lambda_D}{\langle b_0 \rangle}$$

$$= 8\lambda n_p \pi b_0^2 \ln \lambda$$

令 λ_{90° 为试探粒子偏转 90° , 在 90° 中走过的距离, 并粗略地代入 $\langle \theta^2 \rangle$ 和式

$$\text{令 } \langle \theta^2 \rangle_{\lambda=\lambda_{90^\circ}} = 2, \text{ 则有}$$

$$\lambda_{90^\circ} = \frac{1}{4\pi n_p b_0^2 \ln \lambda}$$

	λ_D (cm)	n_p (cm ⁻³)
日光	10^{-2}	10^{12}
电弧	10^{-2}	10^{12}

可看作库仑碰撞的“有效自由程”，由此可定义碰撞频率 σ
偏转角的“有效碰撞截面”

$$\text{碰撞频率 } \nu = n \sigma v \\ = \frac{v}{\lambda_m} \\ \therefore \text{自由程 } \lambda_m = \frac{1}{n \sigma} \\ \sigma = \frac{1}{n \lambda_m}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(t)}(90^\circ, \text{速}) = \frac{1}{n_\beta \lambda_{90^\circ, \text{速}}} = 4\pi b_0^2 \ln \Lambda \\ = 4 \ln \Lambda \sigma_{\alpha\beta}^{(t)}$$

- 试粒子逐渐偏转到 90° 所需的时间称为向弛豫时间
或偏转时间 τ 。（利用 b_0 的表达式）。

$$\tau = \frac{1}{n_\beta \sigma_{\alpha\beta}^{(t)}(90^\circ, \text{速})} V_{\alpha\beta} = \frac{4\pi \epsilon_0^2 m_{\alpha\beta}^2 V_{\alpha\beta}^3}{n_\beta e^4 \ln \Lambda}$$

式中 $m_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$ 才合质量， $V_{\alpha\beta} \propto \left(\frac{k_B T}{m_{\alpha\beta}}\right)^{1/2}$ 代入。

$\vec{V}_{\alpha\beta} = \vec{V}_\alpha - \vec{V}_\beta$ 因 α 类粒子相对于 β 类粒子的相对速度， $V_{\alpha\beta}^3$ 应该
对速度分布求平均，根据试粒子力学基本假设， α, β 类粒子
处于同一温度 T 的 Maxwell 分布， $\int_{-\infty}^{\infty} V_{\alpha\beta}^3 = |\vec{V}_\alpha - \vec{V}_\beta|^3$

$$\langle V_{\alpha\beta}^3 \rangle = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \left(\frac{m_\beta}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} V_{\alpha\beta}^3 \exp\left(-\frac{m_\alpha V_\alpha^2 + m_\beta V_\beta^2}{2k_B T}\right) d\vec{V}_\alpha d\vec{V}_\beta$$

$$d\vec{V}_\alpha d\vec{V}_\beta = dV_{\alpha x} dV_{\alpha y} dV_{\alpha z} dV_{\beta x} dV_{\beta y} dV_{\beta z}$$

$$\vec{V}_\alpha = \vec{V} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \vec{V}_{\alpha\beta}$$

通过质心速度及相对速度代换， $dV_{\alpha x} dV_{\alpha y} dV_{\alpha z}$

$$\vec{V}_\beta = \vec{V} - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \vec{V}_{\alpha\beta}$$

$$\langle V_{\alpha\beta}^3 \rangle = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{k_B T}{m_{\alpha\beta}}\right)^{3/2} \quad (\beta \neq \alpha) \quad (\text{计算得离了"高能物理学" (P.P.38-39)})$$

当 $\beta = \alpha$ 时，上述积分中，对 \vec{V}_α - \vec{V}_β 粒子所作的对称计数 = 1/2

$$\text{而且 } m_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha, \therefore \langle V_{\alpha\beta}^3 \rangle = \frac{16}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{k_B T}{m_\alpha}\right)^{3/2}$$

将 $\langle V_{\alpha\beta}^3 \rangle$ 代入 τ 的表达式

$$\tau = \frac{4\pi \epsilon_0^2 m_{\alpha\beta}^2 V_{\alpha\beta}^3}{n_\beta e^4 \ln \Lambda} = \frac{4\pi \epsilon_0^2 \cdot \frac{1}{4} m_\alpha^2 \cdot \frac{16}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{k_B T}{m_\alpha}\right)^{3/2}}{n_\beta e^4 \ln \Lambda} \quad (\alpha = \beta = e)$$

$$T_{ee} = \frac{16\sqrt{\pi} \epsilon_0 m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}{n_e e^4 \ln \Lambda}$$

$$T_{ei} = \frac{32\sqrt{2\pi} \epsilon_0 m_i^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}{e^4 n_i \ln \Lambda} \quad (n_i = n_e)$$

(i) ②

$$T_{ii} = \frac{16\sqrt{\pi} \epsilon_0 m_i^{1/2} (k_B T_i)^{3/2}}{n_i e^4 \ln \Lambda}$$

$$\frac{T_{ii}}{T_{ee}} = \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}, \quad \frac{T_{ei}}{T_{ee}} = 2\sqrt{2} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$$

$$T_{ei} \cdot 2^{-3/2} \left(\frac{m_i}{n_e}\right)^{1/2} = T_{ii}$$

[我们]而已得 T_{ei} : (由 P.15, 14) 的是其单位制) $T_{ei} = \frac{m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}{n_e \pi e^4 \ln \Lambda}$,

可见乘上 $\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}$, $T_{ei} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} = \frac{m_i^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}{n_i \pi e^4 \ln \Lambda} = T_{ii}$ ($T_e = T_i$, 由于 i 为温度 Maxwell 分布 P.38)]

以上求得 T_{ii} . 现在我们继续热传导的讨论. 太阳物理中, 大多数情况下碰撞时间内高已迴旋许多次, 也即符合绝热条件 ✓

$S_2; T_{ii} \gg 1$, Spitzer 公式

$$\frac{K_\perp}{K_\parallel} = 2 \times 10^{-31} \frac{n^2}{T^3 B^2}$$

B 为单位是 Tesla.

当磁场强度足够强, 使得 $K_\perp \ll K_\parallel$, 热传导主要沿着磁场方向. 这时有 $D \vec{g} = \vec{D} \cdot (K_\parallel \vec{V}_s T)$, 或者写成 $\vec{D}_s \cdot (K_\parallel \vec{V}_s T)$, s 为磁场方向.

$$\vec{D}_s \cdot (K_\parallel \vec{V}_s T) = \vec{D}_s \cdot (K_\parallel \frac{\partial T}{\partial s}) = \vec{s} \cdot \frac{\partial}{\partial s} (K_\parallel \frac{\partial T}{\partial s} \vec{s})$$

$$= \vec{s} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial s} K_\parallel \frac{\partial T}{\partial s} \right) + K_\parallel \frac{\partial T}{\partial s} \vec{s} \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial s}$$

其中 $\vec{s} = \frac{\vec{B}}{B}$ 为 B 方向单位矢量

$$\therefore K_\parallel \frac{\partial T}{\partial s} \vec{s} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\vec{B}}{B} \right) = K_\parallel \frac{\partial T}{\partial s} \vec{s} \cdot \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial s} - \frac{\vec{B}}{B^2} \frac{\partial B}{\partial s} \right)$$

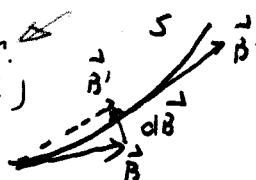
$\frac{\partial \vec{B}}{\partial s}$ 为曲线 s 的曲率方向平行. $\therefore \vec{s} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial s} = 0$.

$$\therefore \vec{D}_s \cdot (K_\parallel \vec{V}_s T) = \frac{\partial}{\partial s} (K_\parallel \frac{\partial T}{\partial s}) - K_\parallel \frac{\partial T}{\partial s} \cdot \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \quad (2.3.2-1)$$

对于热传导间种粒子的碰撞起主导作用, 因而
碰撞频率中动量传递系数 (质量相关的粒子与带电粒子)
为有效. D 在磁场方向, 电子运动速度 $K_\parallel^e = 3.16 \frac{n e k_B T_e}{m_e}$
 $\sim \frac{T^{1/2}}{\ln \Lambda}$ ② 横向高斯碰撞系数 $K_\perp^e = 2 \frac{n_e q_B T_e}{m_e \sqrt{2\pi} \ln \Lambda}$
 $\sim \frac{n^2 T^{1/2}}{B^2}$ ③ $\frac{K_\perp}{K_\parallel} \sim \frac{n^2}{T^3 B^2} \sim 10^{31}$. (见 P.59)

(2.3.2-1) 式左边第2项起因于 $\vec{B}_1 \wedge \vec{s}$ 方向有变化 (亦或太+ 或者单面)

也可用另一种方法表达



$$\nabla_s \cdot (K_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial s}) = \frac{1}{A} \frac{d}{ds} (K_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial s} A) \quad (2.3.2-2)$$

A: 磁通管的截面.

$$\text{证: 上式右边} = \frac{1}{A} \left[\frac{d}{ds} (K_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial s}) \cdot A + K_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial s} \frac{dA}{ds} \right] \\ = \frac{d}{ds} (K_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial s}) + \frac{K_{\parallel}}{A} \frac{\partial T}{\partial s} \frac{dA}{ds}$$

\vec{s} 方向磁通管的通量不为 $\frac{d}{ds}(BA) > 0$, $\therefore \frac{dA}{ds} = -\frac{A}{B} \frac{dB}{ds}$ 代入上式 (2.3.2-2)

$$\frac{1}{A} \frac{d}{ds} (K_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial s} A) = \frac{d}{ds} (K_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial s}) - \frac{K_{\parallel}}{B} \frac{dB}{ds} \frac{dT}{ds} \quad \text{与 (2.3.2-1) 左边相等.}$$

特别是在径向对称 (radial symmetry), $\frac{\partial}{\partial r} = 0$, 推导更简单为

$$\nabla \vec{g} = -K \nabla T = -\nabla_s \cdot (K_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial s}) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (K_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial r} r^2)$$

这时, s 为 \vec{r} 径向 r , $A = \pi r^2$

2.3.3 辐射

太阳内部通过辐射 (或对流) 输送能量, 而不是依靠粒子守恒
净辐射为 $L_r = \nabla \vec{g}_r \quad (2.3.5 \text{ a})$

$$\vec{g}_r: \text{-辐射通量}, \quad \vec{g}_r = -K_r \nabla T$$

$$K_r = 16 \sigma_s T^3 / (3k_p) \quad \text{辐射强度系数}$$

σ_s : Stefan-Boltzmann 常数

K : 不透明度或质量吸收系数

k_p : 吸收系数 $[\frac{1}{m}]$

当 K_r 是局域均匀, 辐射损失的表达形式变得简单

$$L_r = -K_r \nabla^2 T \quad (2.35b)$$

$$(L_r = \nabla \cdot \vec{q}_r = \nabla \cdot (-K_r \nabla T) = -K_r \nabla^2 T)$$

方便起见，引进热扩散率 (thermal diffusivity)

$$\kappa = \frac{K_r}{\rho C_p}$$

C_p : 定压比热

$$\text{热传导方程} (2.30a) \quad (\rho C_p \frac{\partial T}{\partial x}) = -\lambda \\ = K_r \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{K_r}{\rho C_p} \nabla^2 T \quad (2.30b)$$

在对流和发生波或反射性时，通常可以假定运动是绝热。然而在流域和边界中，辐射阻尼的影响必须考虑。这时有光辐射弛豫 (radiative relaxation time-scale) 时限 T_R 。因此当 $T_R > \tau$ 时等高物体近似绝热；当 $T_R < \tau$ ，则不再绝热。对于长波 $\lambda \gg (\tilde{K}\rho)^{-1}$ ，等高物体相对于运动，厚度 $[(\tilde{K}\rho)^{-1}]$ 着重吸收的特征长波， $\tau \ll (\tilde{K}\rho)^{-1}$ 吸收当量已发生作用]。 (2.35a) 或 (2.35b) 适用于光学厚度的特征。 (2.35a 或 2.35b 应用了下向辐射，光学厚度 τ)

对于 $\lambda \ll (\tilde{K}\rho)^{-1}$ ，等高物体光学薄。 Spiegel (1957) 表示

$$T_R = \frac{C_v}{16 \tilde{K} \tilde{\rho} l^3}, \quad \text{设 } l = \frac{1}{\tilde{K}\rho} \text{ 为特征长波, } T_R = \frac{C_v \tilde{\rho} \cdot l^2}{3 K_r}, \quad l^2 = \frac{3 K_r}{C_v \tilde{\rho}} T_R$$

$$\text{热传导方程} (2.28c) \quad \rho \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\rho}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = -L_r = +K_r \nabla^2 T \quad (\lambda = L_r)$$

平衡热物理量“ L_r ”用“0”标记，扰动量用“ τ ”标记为“1”

$$(P_0 + P_1) \frac{D(P_0 + P_1)}{Dt} - \frac{P_0 + P_1}{P_0 + P_1} \frac{D}{Dt}(P_0 + P_1) = K_r D^2 (T_0 + T_1)$$

平衡时, T_0 为常数, 考虑 $P_0 \approx P_1$

$$P_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{P_0}{P_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} = K_r D T_1 \approx K_r \frac{T_1}{l^2} = K_r \frac{C_V P_0 (1 + \frac{P_1}{P_0})}{3 K_r C_R}, T_1 \approx \frac{C_V P_0}{3 C_R} T_1$$

$$e = C_V T, P_0 = P_0 R T_0$$

$$P_0 C_V \frac{\partial T_1}{\partial x} - R T_0 \frac{\partial P_1}{\partial x} \approx - \frac{P_0 C_V}{3 C_R} T_1$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - (Y-1) \frac{T_0}{P_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} \approx - \frac{T_1}{C_R} \quad " ? "$$

因此在考虑变化时, 声速的变化遵循半经验公式: $\frac{\partial T_1}{\partial x} \propto e^{-T_1}$, $\frac{dT}{dx} = -K(T - T_0)$

色球和日冕中光学薄的大气部分, $T \geq 2 \times 10^4 K$, 辐射损失 L_r 不再与辐射场有联系 (辐射场由辐射转移方程来描述) 而是用下式表示

$$L_r = n_e n_H \Phi(T) \quad (2.35 \text{ c})$$

n_e : 电子密度, n_H : 一克原子或质子密度, 对于完全电离的等离子体 $n_H = n_e$, 式中 $\Phi(T)$ 和前 2.2 节同, accurate only to within a factor of 2 因此对于变化的辐射率不必太在意

最重要的特征是 $10^5 K$ 附近有最大值, $10^7 K$ 附近有最小值

近似的解析表达式为 $\Phi(T) = X T^\alpha \text{ W m}^{-3} \quad (2.35 \text{ d})$

$X = X(T)$, $\alpha = \alpha(T)$ 为分段常数, 见表 2.2 (日冕物理模型)

对于 $T = 2 \times 10^4 K$, 对于色球 Peres 等人建议, 可以取

当时 $X = 4.93 \times 10^{-62} \text{ W m}^{-3}$, $\alpha = 6.15$, $(8 \times 10^3 K < T < 2 \times 10^4 K)$

$(1800 \text{ km} \rightarrow 500 \text{ km})$

CHAPTER 2

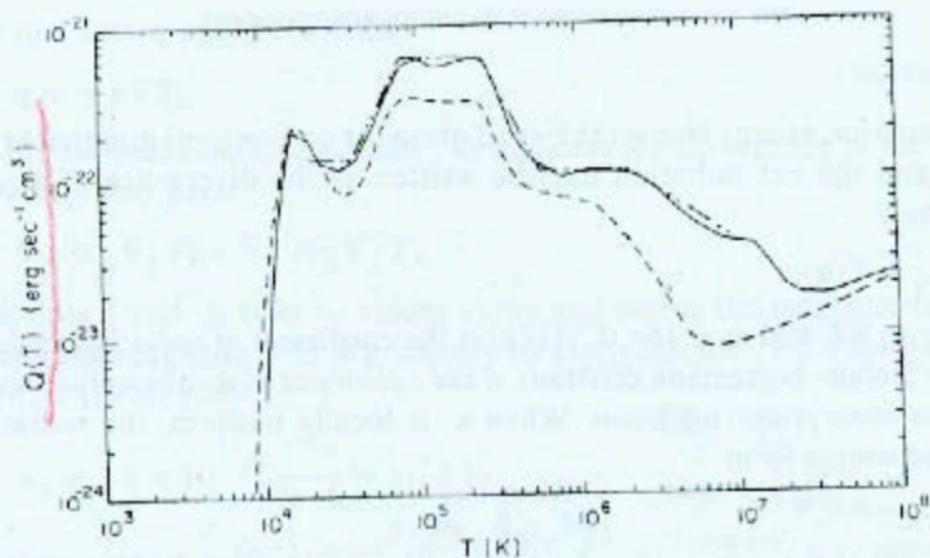


Fig. 2.2. The radiative loss function ($Q(T)$) derived by McWhirter *et al.* (1975) [---] and Raymond and Smith (1977) [—], together with an analytic fit of Rosner *et al.* (1978) [—·—].
 $(1 \text{ erg cm}^{-3} = 10^{-13} \text{ W m}^{-3})$

TABLE 2.2

The variation with temperature T (K) of α and χ (Equation (2.35d)) according to Rosner *et al.* (1978)

Range of T	α	χ
$10^{4.3} - 10^{4.6}$	0	$10^{-34.95}$
$10^{4.6} - 10^{4.9}$	2	10^{-44}
$10^{4.9} - 10^{5.4}$	0	$10^{-34.2}$
$10^{5.4} - 10^{5.75}$	-2	$10^{-23.4}$
$10^{5.75} - 10^{6.1}$	0	$10^{-34.94}$
$10^{6.3} - 10^7$	-2/3	$10^{-30.73}$

$$\alpha = 11.7 \quad \chi = 1.26 \times 10^{-83} \quad (4400K < T < 8000K) \\ 600km - 1800km$$

2. $T \leq 10^6 K$, $\bar{\chi}$ 为常数

$$\alpha = -0.5 \quad \chi = 1.0 \times 10^{-32} \quad (10^6 K < T < 10^{7.6} K)$$

$$\alpha = 0.5 \quad \chi = 2.5 \times 10^{-40} \quad (10^{7.6} K < T) \quad (\text{由初极辐射决定})$$

若对 $T \leq 10^6 K$, $\bar{\chi}$ 为常数，则 χ 为常数。

$$Q(T) = 10^{-34.44} Wm^3, \quad 2 \times 10^4 K < T < 2 \times 10^6 K$$

$$\text{或 } Q(T) = 10^{-32.09} T^{-\frac{1}{2}} Wm^3, \quad 2 \times 10^4 K < T < 10^7 K$$

$$\text{或 } Q(T) = 10^{-31.66} T^{-\frac{1}{2}} Wm^3, \quad 10^5 K < T < 10^7 K$$

这些形式式不同，其偏离常数为 factors of 1.7, 3.7 和 1.4.

倘若不可写成 $L_r \sim \rho^2 T^\alpha$ (由 $\bar{\chi}$ 决定), 常数记为 $\tilde{\chi}$, $L_r = \tilde{\chi} \rho^2 T^\alpha$

$$L_r = n \chi T^\alpha \quad L_r = \tilde{\chi} \rho^2 T^\alpha$$

$$\frac{\chi}{4m} = \tilde{\chi} \quad (m = m_p)$$

2.3.4. 加热

方程(2.32)中的加热项 H 可写成

$$H = \rho e + H_U + H_W$$

e : 太阳内部分单位质量的核能产生率

H_U : 热力学散率 (对于强流动重要)

H_W : 1/2 加热项 (对于引力不重要) (或其他)

$$A. \text{ 热力学散率 } H_U = \rho U \left(\frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v})^2 \right) \quad (2.36a)$$

$$\text{式中 } e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad - \text{ 变形速度修正}$$

为 i 实际分量下与 v

1. 理想流体的简单通量

在流体中选取某固定体积，我们研究体积内流体质量随时间的变化。

单位体积内流体的质量为 $\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho e$

其中 e 是单位质量流体的内能，第一次是动能

质量随时间变化为 $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho e \right)$

$$\text{式中 } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$\text{连续性方程 } \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla(P \vec{v}) = 0, \text{ 运动方程 } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \text{ 代入上式}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) = -\frac{1}{2} V^2 \nabla(P \vec{v}) - \vec{v} \cdot \nabla P - \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (2.3.4-1)$$

$$\text{其中 } \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho V_j V_i \frac{\partial}{\partial x_i} V_j = \frac{1}{2} \rho V_i \frac{\partial}{\partial x_i} V_j^2 = \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \nabla V^2 \quad (2.3.4-2)$$

$$\text{由热力学关系 } dS = \frac{dQ}{T} = \frac{d(e+PV)}{T}$$

$$de = TdS - PdV$$

$$\therefore H = e + PV$$

$$dH = d(e+PV) = de + PdV + Vdp = TdS + Vdp$$

$$\therefore Vdp = dH - TdS$$

$$dp = PdH - P_T dS$$

$$\nabla P = P \nabla H - P_T \nabla S$$

$$(2.3.4-3)$$

$$(2.3.4-2) (2.3.4-3) \text{ 代入 } (2.3.4-1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{v} \cdot \rho \nabla H + \vec{v} \cdot \rho T \cdot \nabla S - \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \nabla v^2 \\ &= -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla (H + \frac{1}{2} v^2) + \rho T \vec{v} \cdot \nabla S \quad (2.3.4-4)\end{aligned}$$

② 关于 $\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)$ 的形式和物理热力学关系

$$dQ = T dS = de + P dV$$

$$de = T dS - P dV = T dS + \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad (dV = d(\frac{1}{\rho}))$$

$$\therefore e + \frac{P}{\rho} = e + PV = H$$

$$\therefore d(\rho e) = e d\rho + P d\rho$$

$$\therefore e d\rho = H d\rho - \frac{P}{\rho} d\rho$$

$$\therefore de = T dS + \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad (= -P dV)$$

代入 $d(\rho e)$ 得

$$d(\rho e) = H d\rho + P T dS$$

$$\therefore \frac{\partial(\rho e)}{\partial x} = H \frac{\partial \rho}{\partial x} + P_T \frac{\partial S}{\partial x} = -H \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + P_T \frac{\partial S}{\partial x}$$

理想绝热过程 $\frac{ds}{dx} = 0$, $\therefore \frac{\partial S}{\partial x} = -\vec{v} \cdot \nabla S$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial x} = -H \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - P_T \vec{v} \cdot \nabla S \quad (2.3.4-5)$$

(2.3.4-4) 和 (2.3.4-5) 相加

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) &= -\rho \vec{v} \cdot \nabla (H + \frac{1}{2} v^2) - \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \\ &= -\nabla \cdot [\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right)] \quad (2.3.4-6)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) dx = - \oint \rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \cdot d\vec{s}$$

某体积内流体质量随单位时间而变化为单位时间内以该体积表面流去的质量 ($\vec{v} \cdot d\vec{s}$ 方向指向 \vec{s})

$\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right)$ 称为质量通量密度。

2. 粘性流体 (见讲稿 P.25)

$$\text{应力张量 } P_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \mu' \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

$$\text{切向应力张量 } \tau_{ij}' = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \mu' \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{v} \cdot \rho \nabla H + \vec{v} \cdot \rho T \cdot \nabla S - \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \nabla v^2 \\ = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla (H + \frac{1}{2} v^2) + \rho T \vec{v} \cdot \nabla S \quad (2.3.4-4)$$

② 关于 $\frac{\partial}{\partial t} (\rho e)$ 的形式利用热力学关系

$$dQ = T dS = dE + P dV$$

$$dE = T dS - P dV = T dS + \frac{P}{\rho^2} dP \quad (\alpha V = \delta(\frac{1}{\rho}))$$

$$\text{而 } E + \frac{P}{\rho} = E + PV = H$$

$$\therefore d(\rho e) = E dP + P dE$$

$$\therefore E dP = H dP - \frac{P}{\rho} dP$$

$$\text{则 } dE = T dS + \frac{P}{\rho^2} dP \quad (= -P dV)$$

代入 $d(\rho e)$ 得

$$d(\rho e) = H dP + P T dS$$

$$\therefore \frac{\partial(\rho e)}{\partial x} = H \frac{\partial P}{\partial x} + P_T \frac{\partial S}{\partial x} = -H \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + P_T \frac{\partial S}{\partial x}$$

$$\text{理想绝热过程 } \frac{dS}{dx} = 0, \quad \therefore \frac{\partial S}{\partial x} = -\vec{v} \cdot \nabla S$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial x} = -H \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - P_T \vec{v} \cdot \nabla S \quad (2.3.4-5)$$

(2.3.4-4) 与 (2.3.4-5) 相加

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) = -\rho \vec{v} \cdot \nabla (H + \frac{1}{2} v^2) - \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \\ = -\nabla \cdot [\rho \vec{v} (\frac{1}{2} v^2 + H)] \quad (2.3.4-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) dx = - \oint \rho \vec{v} (\frac{1}{2} v^2 + H) \cdot d\vec{s}$$

某体积内流体质量随单位时间而变化为单位时间内以该体积表面流去的质量 ($\vec{v} \cdot d\vec{s}$ 为向量 $\leq \frac{\pi}{2}$)

$\rho \vec{v} (\frac{1}{2} v^2 + H)$ 称为质量通量密度。

2. 粘性流体 (见讲稿 P.25)

$$\text{应力增量 } P_{ij} = -\gamma \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \mu' \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

$$\text{切向应力增量 } \tau_{ij}' = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \mu' \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

μ' : 附加粘性和系数
重力流体膨胀或压缩
引起的压力

$$\text{理想流体的运动方程 } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

加入偏应力，成为粘性流体运动方程

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu' \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \end{aligned}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{v} \cdot \vec{\sigma}' \quad (2.3.4-7)$$

3. 引入粘性系数耗散，形式为热

对于理想流体，我们已得 $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) = -\nabla \cdot [\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right)]$ ，如果流体内部 i. 有温度梯度，必须考虑热传导 $\vec{q} = -k \nabla T$
ii. 粘性，应加入偏应力部分的耗散 $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}'$ ，应力“垂直于向同性部分”

$$\rho \sigma_{ij} \text{ 和 } H \text{ 中已考虑过}。 \rho \vec{v} \left(e + \frac{P}{\rho} \right), \text{ 其中 } P \text{ 即 } \rho \delta_{ij}$$

$$(2.3.4-6) \text{ 变为 } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) = -\nabla \cdot [\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) - \vec{v} \cdot \vec{\sigma}' - k \nabla T] \quad (2.3.4-8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial P}{\partial t}$$

将连续性方程 (2.3.4-7) 代入上式， $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla P + \vec{v} \cdot \vec{\sigma}'$ ，也乘 \vec{v} 得 $\rho \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ 代入上式。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) &= -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{v} \cdot \nabla P + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{\sigma}' + \rho \frac{\partial e}{\partial t} - e \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \\ &\quad - \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \end{aligned} \quad (2.3.4-9)$$

$$\text{已知 } \frac{de}{dt} = T ds + \frac{P}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.4.5) \quad \therefore \text{已知 } \frac{ds}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{P}{\rho} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \end{aligned}$$

$$\text{已知 } H = e + \frac{P}{\rho} \text{ 代入 } \frac{\partial e}{\partial t} \text{ 代入 } (2.3.4-9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) = -\left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \vec{v} \cdot \nabla P + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{\sigma}'$$

$$\text{利用 } \nabla P = \rho \nabla H - \rho T \nabla s, \text{ 上式在 } \vec{v} \cdot \nabla \text{ 代入得 } -\rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) + \rho T \vec{v} \cdot \nabla s$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) = -\nabla \cdot [\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right)] + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{\sigma}' + \rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s \right]$$

$$\text{其中 } \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{\sigma}' = v_i \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}') - \sigma_{ij}' \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}') - \vec{\sigma}' \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + p_e \right] = -\nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + H \right) - \vec{v} \cdot \vec{\sigma}' \right] - \vec{\sigma}' : \nabla \vec{v} + p_T \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) S \right] \quad (2.3.4-10)$$

再回看 (2.3.4-8), (2.3.4-10) 式相等于 (2.3.4-8) 式的 S 项

$$-\nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + H \right) - \vec{v} \cdot \vec{\sigma}' \right] - \vec{\sigma}' : \nabla \vec{v} + p_T \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) S \right] = -\nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + H \right) - \vec{v} \cdot \vec{\sigma}' - K \nabla T \right]$$

$$-\vec{\sigma}' : \nabla \vec{v} + p_T \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) S \right] = \nabla \cdot (K \nabla T)$$

$$p_T \frac{\partial S}{\partial t} = \vec{\sigma}' : \nabla \vec{v} + \nabla \cdot (K \nabla T)$$

$$= \sum_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \nabla \cdot (K \nabla T)$$

可知 $\sigma_{ij}' \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ 为耗散的热量

$$\sigma_{ij}' = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \mu' \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij}' \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \mu \frac{2}{3} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \mu' \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_k}$$

$$= \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{v})^2 + \mu' (\nabla \cdot \vec{v})^2$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right]$$

$$= \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

忽略 μ' , 并令 $M = \rho v$ 代入 μ 为动力学粘性系数, ν 为运动粘性系数。
 μ' 为声学粘性系数

$$\text{耗散的热量 } \sigma_{ij}' \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho v \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v})^2 \right]$$

$$= \rho v \left[\frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v})^2 \right]$$

B. 温加系数和波数的倒数。常微分为均匀或非均匀流动时

$$H_w = \text{const.} \times n \quad (2.3.6b)$$

当考虑声速时, H_w 为加速度, 电流耗散加热。若以上假设成立
 $H_w \approx \frac{F}{\lambda}$, F 为波通量, 入射阻尼特征长度。Rosner & (1978)

$$\text{公式 } \lambda = \begin{cases} 7.5 P T^{-2} \text{ m} & \text{声波} \\ 1.4 \times 10^4 T^{1/2} \text{ m} & \text{声激波} \\ R_C & \end{cases}$$

半径为 R_C 的球内 Alfvén 波

$$H_W = \frac{\eta_3}{t L^3}$$

$$\lambda \sim \frac{R}{L}$$

$$F = \frac{R}{t \cdot L^2}$$

对许多应用的考虑. 其他等离子体和能量吸收形式也已在等离子方程 $P_T \frac{DS}{DT} = -\mathcal{L}$ (2.28) 的右边. 从 \perp 小尺度的全局性运动可以影响到大尺度日冕能量的平衡; 冷物质喷入日冕受到加热以及物质的回流. 对于低密度流, 行加的吸热因素, 对于色球则起了一种作用. Raadu 和 Kuperus (1973) 指出, 宇宙射线在小尺度上有连续的等离子体下落, 速度远比自由落体速度小, 因此在大尺度球面上引力场和辐射场有类似的作用.

2.3.5 Energistics (能量及其转换与物理过程)

我们已建立了许多方程, 表达了不同形式能量之间的关系, 如热、电、机械能

1. 能量方程 $P_T \frac{DS}{DT} = -\mathcal{L} = -\vec{E} \cdot \vec{j} - L_r + \vec{S} \cdot \vec{H} + H$

表示: 热增加由于热流(的能量)减去辐射, 加上热流 (吸收)耗散加热以及其它热(L_r , H)的贡献.

2. Poynting 能量 (能量流) $\vec{E} \times \vec{H}$ 可以写成 $\left(\vec{s} = \vec{E} \times \vec{H}, \int \vec{s} \cdot d\vec{s} = \int \vec{v} \cdot d\vec{v} \right)$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} + \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}$$

$$\therefore \vec{j} = \nabla \times \vec{B}/\mu, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

$$-\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = -\vec{E} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}^2}{\mu} \right)$$

$$\therefore \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}^2}{\mu} \right) \quad (2.37)$$

物理意义是: 电磁场 $\vec{E} \times \vec{H}$ 的流入产生等离子体中的电流 $\vec{E} \cdot \vec{j}$ 加上磁能的增加.

$$3. \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{V} \times \vec{B}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} - (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot \vec{j} = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} + \vec{V} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) \quad (2.38)$$

由以上方程和散电流的通量 $\vec{F} + \text{Lorentz} \rightarrow (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$ (产生电场)

$$4. (\#) \vec{V} \text{ 关系 } \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{f} \quad (2.21) \quad [\vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{V} \cdot (\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}]$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = -\vec{V} \cdot \nabla P + \vec{V} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) + \vec{V} \cdot \vec{f} \quad (2.39) \quad = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}^2 \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \nabla V^2 \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} V^2 \right)$$

这是物理和数学的方程

速度增加的原因： $-\nabla P, \vec{j} \times \vec{B}$ 及 \vec{f} 之和

$$5. \text{ 方程 (2.38), (2.39) 与 (2.20) } (\rho \frac{\partial e}{\partial t} + P \nabla \cdot \vec{V} = -\mathcal{L}) \text{ 结合. } \begin{cases} \text{左端} \\ \text{右端} \end{cases}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) = -\left(\mathcal{L} + \frac{\vec{j}^2}{\sigma} \right) + \vec{E} \cdot \vec{j} - \nabla \cdot (P \vec{V}) + \vec{V} \cdot \vec{f} \quad (2.40a)$$

或者利用连续方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$ 有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \vec{V} \right] = -\left(\mathcal{L} + \frac{\vec{j}^2}{\sigma} \right) + \vec{E} \cdot \vec{j} - \nabla \cdot (P \vec{V}) + \vec{V} \cdot \vec{f} \quad (2.40b)$$

$$\text{左边} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \vec{V} \cdot \nabla \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \rho \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \nabla \cdot \vec{V}$$

$$= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) + \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \nabla \cdot \vec{V}$$

(#) 连续方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}$ 代入

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) - \rho \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \nabla \cdot \vec{V} + \rho \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \nabla \cdot \vec{V}$$

$$= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \quad \# (2.40a) \text{ 左边相等.}$$

$$\text{式中 } -\left(\mathcal{L} + \frac{\vec{j}^2}{\sigma} \right) = -\left(\nabla \cdot \vec{g} + L_r - \frac{\vec{j}^2}{\sigma} - H + \frac{\vec{j}^2}{\sigma} \right) = -\nabla \cdot \vec{g} - L_r + H$$

方程 (2.40a) 和 (2.40b) 表示物理能量 (内能加动能) 的增加起因于热流, 辐射, 热带损耗, 热辐射加热 (H), 电能必须在压缩和压缩过程中压强 (和其他力) 的功.

物理力学

定理时, (2.40b) 变为

$$\nabla \cdot [(\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2) \vec{v}] = -(\ddot{\omega} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}) + \vec{E} \cdot \vec{j} - \nabla \cdot (\vec{P} \vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{f}$$

$$\nabla \cdot [(\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + P) \vec{v}] = -(\ddot{\omega} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}) + \vec{E} \cdot \vec{j} + \vec{v} \cdot \vec{f}$$

$$\rho e = \rho c_v T = \rho T \frac{1}{r-1} \frac{k_0}{m} \frac{P}{P-1} \quad (\text{单分子理想气体方程 } P = \frac{R}{M} \rho T, \text{ 且 } m = \frac{M}{N})$$

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{P}{r-1} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \vec{v} \right] = -(\ddot{\omega} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}) + \vec{E} \cdot \vec{j} + \vec{v} \cdot \vec{f}$$

如果加上重力 \vec{F}_D , 则 \vec{F}_D 为 $\vec{F}_D = -\nabla(PV) + \vec{v} \vec{f}_D$ 与 \vec{f}_D 方向相反

$$\text{写成 } -\frac{\partial}{\partial x_i} (P_{ij} V_i)$$

$$\because \vec{F}_D = \rho v \nabla^2 \vec{v} \sim \nabla^2 \vec{v} \sim \frac{\partial^2 \vec{V}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \vec{F}_D \cdot \vec{v} \sim \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} V_j; H_D \sim \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 \sim \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \sim \left(\frac{V^2}{x^2} \right);$$

$$\frac{\nabla \cdot (\rho \vec{v})}{2.4 \text{ 页}} \sim \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \cdot V_j \right) \sim \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i \partial x_j} V_j + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \sim \left(\frac{V^2}{x^2} \right). \quad P_{ij} \sim \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

磁流体力学基本方程组

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (2.13)$$

$$\frac{DP}{Dt} + \rho \vec{v} \cdot \vec{f} = 0 \quad (2.19)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{F} \quad (2.21)$$

$$[(2.21) \text{ 式中的 } \vec{j} = \nabla \times \vec{B} / \mu] \quad (2.15)$$

$$\frac{P^r}{r-1} \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho r} \right) = -\nabla \cdot \vec{g} - L_r + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H \quad (2.20')$$

$$P = \frac{k_0}{m} \rho T \quad (2.26)$$

2.13 理想条件 $\sigma \rightarrow \infty$, 绝热的完全气体, 则首方程简化为 $\vec{P} \vec{f} = \text{常数}$.

未知量为 $\vec{v}, \vec{B}, \rho, P, T$. 由 2.13 式得 $\vec{f} = \vec{F}_D + \vec{F}_E$

$$\vec{F}_D = -\rho g_r \vec{r}, \quad g_r \text{ 为已知}, \quad \vec{F}_E = \rho v \left(\nabla \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla (P \vec{v}) \right) \quad \text{可用 } T \text{ 表示}, \quad \vec{g} = -k \nabla T, \quad (2.17)$$

表高 H 为已知, $L_r = -\nabla \cdot (k_r \nabla T)$ 亦可用 T 表示. H_D 为 $\frac{\partial V_i}{\partial x_i}$ 的函数

求 $\vec{v}, \vec{B}, \vec{j}$ 后可求 $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \vec{f}$. 当此 \vec{B} 满足 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

2.4.1 假设

推导上述方程组时用的假设

1. 等离子体作为连续介质处理，只要物理量变化的特征长度大“超过等离子体内部的长度，此假设就成立”
2. 等离子体处于热力学平衡，分布函数接近于 Maxwell 分布，只要物理问题的特征时间大于碰撞时间，特征长度大于平均自由程，假设就成立。
3. 磁感应强度 B ，磁导率 μ 设为常数。大多数情况下，等离子体为各向同性，磁导率除例外，二者和垂直磁场方向有很大不同，普遍的理论预测采用修正形式，对于大多数场合是必要的。
4. 方程组用惯性系，由于参考系与太阳一起转动，从而产生额外项，对于大尺度过程可能是重要的。
5. 忽略相对论效应，因为光速，声速 Alfvén 速度都远小于光速
6. 大多数情况，利用简单形式的哎略定律 $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \frac{\partial}{\partial t}$
7. 等离子体按单流体模型处理
二流或三流模型，对太阳风最冷的部分或最稀薄的部分可能比较有用。

2.4.2 方程组简化形式

1. 声速方程的简化，只读成质量

2. 假定温度均匀，与时间无关，只读方程就足够

3. 假设密度差可以忽略 $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ ，连深压方程 $\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \partial \cdot \vec{v} = 0$ 变化为 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$
(v 可压缩)。磁流体力学中相应回流，并且造成兴趣于其他效应时，经常使用这一简化。

但该假设成立的条件是声速远大于等离子体的典型速度，因为等离子体速度常是 Alfvén 速度要么或远小于 Alfvén 速度，因此不可压缩条件变成

$$c_s \gg v_A \text{ 也即 } B = \frac{2mP}{B^2} \gg 1 . \quad c_s \text{ 很大可以认为 } \partial P \text{ 远似为零}.$$

若下述条件之一成立，则运动为不可压缩

i. $\frac{D\vec{P}}{Dt} = 0$

ii. $C_s \gg V_A \sim V$ 指流动速度

① 气体流速时，马赫数大，可认为不可压缩

② $\beta \gg 1$, 马赫数 $C_s \gg V_A$

③ $C_s \rightarrow \infty$, $C_s = \frac{dp}{dt} \rightarrow \infty$

④ 形成 $\gamma \rightarrow \infty$, $C_s^2 = \frac{V^2}{\rho} \rightarrow \infty$ ($\gamma = \frac{i+2}{i}$, $i \gg 0$, 即 $i \rightarrow \infty$, 没有单相流 = 不可压缩)

4. 运动学问题

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}$$

当磁场很弱时， $\beta \gg 1$ ，压强梯度作用超过 Lorentz 力时，考虑密度流体运动对磁场的影响，忽略磁场对运动流体的作用，这就是磁流体力学的运动学问题。

$$\int \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P \quad \text{忽略 Lorentz 力}$$

5. 其他简化方程的方法

i. 当流体速度 $V \ll V_A$, 又 $V \ll C_s$, (2.21) 式 $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{F}$ 简化
惯性项可忽略，从而有静力学平衡 $\rho \frac{V}{x} = -\frac{P}{L} + \frac{B^2}{2\rho}$; $\frac{V}{x} \sim \frac{P}{\rho} + \frac{B^2}{\rho}$
 $V^2 \sim C_s^2 + V_A^2$

ii. $\beta \ll 1$ 时，无电场，磁场由 $\vec{j} \times \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ 确定，特别至
 $\vec{j} = 0$, \vec{B} 是势场 $\vec{B} = -\nabla \phi$, $\vec{F} = -\nabla P + \vec{F}$ 确定 ($\because \vec{j} \times \vec{B} = 0$)

b. 当物理过程的特征尺度远大于流动尺度时，质量方程可用 $T = \text{const}$, $\frac{D\vec{V}}{Dt} = 0$
或者更一般地用多方过程近似 $\frac{D\vec{V}}{Dt} = \text{const}$, α 为常数。这种近似是
粗略地表达温度的变化，这可以质量方程 $\rho T \frac{D\vec{S}}{Dt} = -\vec{Q}$ 表示。条件

是只有热得守恒且又有重力，以热流 $K \nabla T$ 及 ∇P

$$K \nabla T \sim \nabla P \Rightarrow -K \nabla^2 T = -\epsilon \nabla \cdot \vec{P} \quad \epsilon: \text{比例系数}; \text{压强梯度作用}, \nabla P \cdot \vec{V} \sim \frac{\text{压力}}{L^3}$$

$$(2.28f) \frac{D\vec{T}}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{DP}{dx} = -(r-1)\alpha \approx \epsilon(r-1) \nabla \cdot \vec{V} \quad | \text{热得守恒}, \text{重力 } K = \frac{\text{重力}}{\text{重力}} = \frac{\text{重力}}{\text{重力}}$$

$$\nabla P - \frac{P}{\rho} \nabla P \approx \epsilon(r-1) \nabla P$$

$$K \nabla^2 T = \frac{P}{L \cdot \pi \cdot T} \cdot \frac{1}{L^2} = \frac{P}{T \cdot L^3} \sim \alpha = \rho \frac{dS}{dx}$$

$$\left[1 - \frac{\epsilon(r-1)}{r}\right] \frac{dP}{P} = \frac{dP}{P}$$

$$P = \text{const}, P^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\left(\text{s. 单纯重力场}\right) \sim \frac{P}{L^3 \cdot T} = \frac{P}{\rho \frac{dS}{dx}}$$

$$\alpha = \frac{P}{(r-1)P}, \frac{P}{\rho} = \text{const.}$$

第三章 小结

1. Maxwell 方程组

下述条件成立 ① 太阳等离子体中用真空中 μ_0, ϵ_0 未代入方程中的 μ, ϵ

- ② 等离子流体的特征速度 $v_0 \ll c$ (光速)
- ③ 传播电流 $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 忽略
- ④ 静电荷 \ll 磁化，忽略电场
- ⑤ 等离子体处于高度电中性

2. 广义 Ohm 定律及其简化形式

3. 截应收方程

4. (等离子) 流体力学方程组

① 质量守恒—连续性方程

② 运动方程

③ (完全气体) 状态方程

④ 能量方程 (方程形式，热传导，辐射，加热)

④ 磁感应方程

麦克斯韦方程组

J, B, P, E, T 9 个变量。

5. 边值问题的基本假设，方程的简化

$$\frac{d\vec{F}_{12}}{d\vec{l}_1} = \mu_0 \frac{\vec{I}_1 \cdot d\vec{l}_2 \times (\vec{dl}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \lambda} \hat{r}$$

电流元1施于电流元2之力。 \hat{r}_{12} 1指向
2的单位矢量。 I_1, dl_1 分别为两电流元

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \cdot d\vec{l}_2 \times \vec{dl}_1 \frac{\vec{I}_1 \cdot d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$= J_2 \vec{dl}_2 \times \vec{B}_1$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}_1 \frac{I_1 \cdot d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$k = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{B}_1 \vec{B}_2}{r_{12}^3} \hat{r}$$

$$= q \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \hat{r}$$

2. 磁化强度矢量

① 外磁场下未极化电流

② 外电场下未极化电流

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_i}{nV}$$

$$\text{极化强度矢量 } \vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{nV}$$

$\sum \vec{m}_i$ 体内所有磁化矢量和

$\sum \vec{m}_i \neq 0$ (有磁化场; $\sum \vec{m} = 0$ 无磁化场) $\sum \vec{p}_i \neq 0$ (有电场)

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum \vec{I}'$$

$$\vec{J} \times \vec{M} = \vec{J}_m \quad \text{磁化电流密矢}$$

$$\vec{J}' = \vec{M} \times \vec{n} \quad \vec{J}' \text{ 未极化电流密矢}$$

$$\vec{n}, -(\vec{s})$$

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{s} = - \sum q'$$

$$\vec{J} \cdot \vec{P} = -q' \quad (\text{对于 } \vec{J} + \vec{J}' \text{ 行使}) \quad \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \text{极化电流密矢}$$

$$\sigma_e' = \frac{\partial \vec{P}}{\partial S} = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n \quad \text{未极化电流密矢}$$

3. 磁化规律

$$\text{磁导率 } \mu = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \vec{H}}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\mu, \chi_m \text{ 与 } \vec{H} \text{ 无关}$$

3. 介电质的极化规律

$$\text{介电常数 } \varepsilon = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \vec{E}} \quad \vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\varepsilon, \chi_e \text{ 与 } \vec{E} \text{ 无关} \quad (\text{是介电材料的属性})$$

4. 奥斯特定律

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum I_0 + \mu_0 \sum I' \right)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} - \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$H = \frac{\vec{B}}{\mu} - \vec{M}$$

$$\oint H \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$\vec{B} = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (1 + \chi_m) H$$

$$\mu = 1 + \chi_m \Rightarrow \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\text{真空中 } \chi_m = 1$$

4. 高斯定理

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q_0 + q'$$

$$\oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{s} = \sum Q_0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum Q_0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

$$\varepsilon = 1 + \chi_e \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\text{真空中 } \varepsilon = 1, \text{ 且 } \varepsilon_0 \text{ 为真空介电常数}$$

在等离子体物理中，我们一般使用真空中 Maxwell 方程组。该组的场
密度和电流密度包括所有与电荷和电流（如束缚电荷，束缚电流），并不利用
矢量 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ，将束缚电荷和束缚电流包括在 \mathbf{J} 和 \mathbf{E} 中。在等离子体中，除等离子
子体的高 ω 和电子等价于束缚电荷和电流，但由运动的质点，不能简
单地引入 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 。

例如介电常数与磁化率都与外场无关，磁化率 μ_m 与外场无关。
对于等离子体，计算高 ω 的磁化率如下：

$$\begin{aligned} \mu &= I A, \text{ 等离子体高 } \omega, I \text{ 由电荷 } e \text{ 的运动耗散 } \frac{w_c}{2\pi} \text{ 产生}, \therefore I = \frac{dI}{dt} \\ (\text{单位时间通过任一截面的电量}) \quad I &= e \omega c / 2\pi, A = \pi r_0^2 = \pi V_0^2 / \omega^2 \\ \therefore \mu &= \frac{\pi V_0^2}{\omega^2} \cdot \frac{e \omega c}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 e}{\omega^2} = \frac{1}{2} \frac{m V_0^2}{B}. \end{aligned}$$

等离子体的磁化率与小球 B 的大小有关

我们再讨论等离子体的一个电容数。
等离子体物理中已证明随时间变化的磁场会产一个极化电流 $\vec{j}_p = \frac{\rho}{B^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 ρ 为总密度 $\rho = n(M+m)$ 。等离子体中的极化效应与介质中的
极化效应相似，等离子体的极化是相位为 $\pi/2$ 的电子和离子，但它们
的运动速度以保持中性。因此加入稳定磁场后，等离子体的极化
随时间而偏移不产生极化步，从而如果提高，由于高 ω 使极化
延迟就产生很高电流 \vec{j}_p 。

由连续性方程 $\frac{\partial \sigma_p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_p = 0, \quad \sigma_p, \text{ 极化率}$

$$12 \quad \sigma_p = -\nabla \cdot \vec{p} = 0 \quad (\text{对于等离子体})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_f + \vec{j}_p) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_f + \vec{j}_p + \frac{1}{c^2 \mu_0} \vec{E} \quad C = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$$

$$= \vec{j}_f + \vec{j}_p + \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\text{令 } \vec{j}_p + \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}, \quad \therefore \epsilon = \epsilon_0 + \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 + \frac{\rho}{B^2} \quad (\omega \ll \omega_c \text{ 适用})$$

与外场无关。

2.5. 磁场参数

1. 磁雷诺数 (magnetic Reynolds number)

$$) \text{ 磁感应方程 } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}$$

$$\text{雷诺数的扩展形式} \quad \frac{|\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})|}{|\eta \nabla^2 \vec{B}|} \approx \frac{l_0 V_0}{\eta}$$

$$\text{磁雷诺数 } R_m = \frac{l_0 V_0}{\eta} \quad (2.41)$$

l_0 : 特征长度, V_0 : 等离子体中典型速度

当 V_0 等于 Alfvén 速度时, 磁雷诺数 R_m 被称为 Lundquist 数.

② R_m 是流动和磁场间耦合强度的量度.

③ 实验室内 $R_m \ll 1$ (摩擦力为主), 磁场弱 (\vec{B} 不衰减, $\vec{v} \times \vec{B}$ 变小)
太阳大气中一般 $R_m \gg 1$, 磁场强. (流动过程中 $\vec{v} \times \vec{B}$ 持续增强)

2. 雷诺数

当粘性流体 (运动粘系数 $\nu \neq 0$) 不可压缩 ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$), 无压 (P. f. P.) , 无势外力 ($\vec{F} = -\nabla \tilde{P}$) 作用下, 流动满足 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{v}) + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.5-1)$$

$$\text{雷诺数的扩展形式} \quad \frac{|\nabla \times (\vec{v} \times \vec{v})|}{|\nu \nabla^2 \vec{v}|} \sim \frac{l_0 V_0}{\nu}$$

$$\text{雷诺数 } R_e = \frac{l_0 V_0}{\nu} \quad (2.42)$$

3. 马赫 (Mach) 数

$$M = \frac{V_0}{c_s} \quad (2.43)$$

流动速度与当地声速比

$$c_s = \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right)^{1/2}, P_0, \rho_0 \text{ 为平衡值.}$$

4. Alfvén Mach 數

$$M_A = \frac{V_0}{V_A} \quad (2.44)$$

(2) Alfvén 速度和來流流動速度

$$V_A = \frac{B_0}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}}$$

B_0 - 不變磁強度

ρ_0 - 等高條件參數

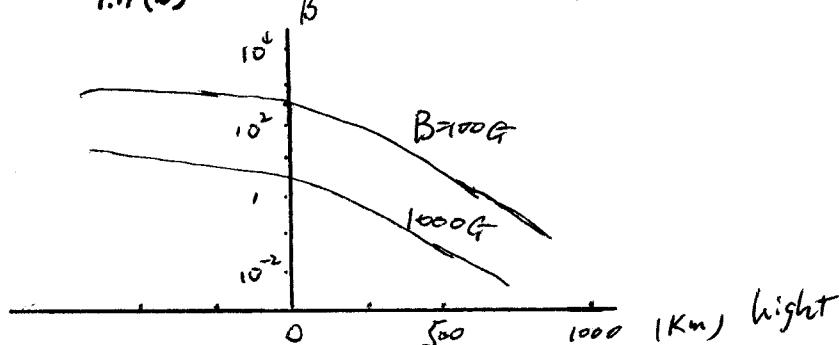
(等高條件及初值)

5. 等高條件和 β

$$\textcircled{1} \quad \beta = \frac{P_0}{\frac{1}{2} \mu_0 B_0^2} = \frac{\text{氣壓}}{\text{磁場}}$$

在地面上 $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 與 $B_0 = 1 \text{ G}$ 可取 $\beta_0 = 1.11 \times 10^{-10}$ (C) 可忽略不計。 P_0, B_0 和 1 m - 地表附近之值，則起碼為

約這數



等 $2.1, C$

$$\textcircled{2} \quad \langle \beta \rangle = \frac{\langle P \rangle}{\frac{1}{2} \mu_0 B_{\infty}^2}$$

$\langle P \rangle$ - 等高條件下的平均壓力。 B_{∞} - 等高條件下 z 軸上的真空導向磁場。

$\rightarrow \beta \ll \beta_{\infty}$ 。 這定義則在於 MHD 的研究

(Batchelor, G. "MHD Instability")

③ 等高條件的正強被磁壓降，因此對於強磁場有 $\beta \ll 1$ ，弱磁場 $\beta \gg 1$

(Priest, E. "Magnetic Reconnection", P. 18)

$$\textcircled{4} \quad \beta = \frac{P_0}{\frac{1}{2} \mu_0 B_0^2}$$

该式从静力学平衡 $\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} = 0$ 推出，也可以从微分方程推得。因此气压和磁压为同一量及其在区域内的值 (P_0, B_0 为同一下标)

令 L, V_0, γ_{V_0} 为特征长度，等离子体的典型速度为 c
上式可写成 $\frac{P_0}{L}, \frac{B_0^2}{\mu_0 L}, \frac{\rho_0 g}{\mu_0 L}$

$$\text{若 } \rho_0 g \ll \vec{j} \times \vec{B} \quad \text{且} \quad \rho_0 g \ll \frac{B_0^2}{\mu_0 L}, \quad L \ll \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0 g} \cdot \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{B_0^2}{\mu_0 P_0} \cdot H = \frac{\gamma H}{\beta}$$

$$3) \lambda \beta = \frac{P_0}{\frac{1}{2} \mu_0 B_0^2} \quad (H = \frac{P_0}{\rho_0 g} \text{ 不成立}) ; \quad \frac{P_0}{L} \ll \frac{B_0^2}{\mu_0 L} \quad \text{且} \quad \beta \ll 1. \quad \text{为无加力。}$$

(Kirk, J. S. "Plasma Astrophysics" p. 25)

5) 为了表示磁场约束等离子体的平衡条件，引进 β

$$\beta = \frac{\text{等离子体压强}}{\text{磁感应强度}} = \frac{P}{\frac{1}{2} \mu_0 B_0^2} = \frac{n k_B (T_e + T_i)}{\frac{1}{2} \mu_0 B_0^2} \approx \left(\frac{V_{th}}{V_A}\right)^2$$

B_0 ：等离子体中的磁场强度。 μ_0 ：真空中 (Permeability) 磁导率

磁流体静力学平衡，不计重力时

$$\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} = 0$$

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla P$$

$$\text{将 } \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \text{ 代入, } \nabla (P + \frac{1}{2} \mu_0 B^2) = (\vec{B} \cdot \nabla) \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\text{当磁力线为平行直线时, 表面为零 } (\vec{B} \cdot \nabla) \frac{\vec{B}}{\mu_0} = 0$$

$$\therefore \nabla (P + \frac{1}{2} \mu_0 B^2) = 0$$

$$P + \frac{1}{2} \mu_0 B^2 = \text{const.} = \frac{1}{2} \mu_0 B_e^2 \quad (2.5-2)$$

$$3) \lambda \beta = \frac{P}{\frac{1}{2} \mu_0 B_0^2}$$

由 (2.5-2) 式可知 β 为常数 $0 < \beta \leq 1$

β 越大，同种强度的磁场约束的等离子体压强越大

当 $\beta = 1$ ，内部磁场 $B = 0$ ，等离子体的压强最大 $P = \frac{1}{2} \mu_0 B_0^2$

(徐家高著“等离子物理学” p. 187)

⑥ 仍由(2.5-2)式，气压梯度和磁感应强度之和为一常数，若设地磁
压强为_内，则地磁的磁感应强度大，等高物体在该场的倾力是由抗磁性电
流引起，抗磁性效应的大小，由方程中二项的比值

表示 $\beta = \frac{\text{等高压强}}{\text{磁压强}} = \frac{n \sum k_i T_i}{\text{磁压强}}$

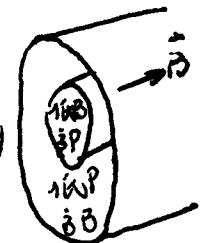
(*)

低 β 等高物体 $\beta: 10^{-3} - 10^{-6}$ (通常情况下, β 很大, 即抗磁性效应大, 同时
等高物体小)

之 β 等高物体 $\beta: \sim 1$

当 $\beta=1$ 时, 抗磁性电流产生的场与外部场大小相等, 方向相反
于外部场区域: 等高的等高物体和无等高物体的场已

(F. P. "等高物体物理学")



由此可见 β 定义为同一处及其附近之气压与磁压之比

与 D. R 相同。而 β 定义为最大粒子速度与最大磁压之比, 从这种意义上:

6. Rossby 数

$$R_o = \frac{V_o}{l_o \Omega}$$

$$\begin{aligned} P_{max} &= \frac{1}{4\pi} B_{max}^2 l_o^2 \\ B_o &= B_{max} \quad \sqrt{\beta > 1 \text{ 的时候的等高物体不可忽略}} \\ \frac{1}{4\pi} B_{max}^2 &= \frac{P_{max}}{l_o^2}, \text{ 如果 } \beta = \frac{4\pi^2}{B_{max}^2} < 1, \text{ 则 } \beta = \frac{1}{4\pi} (B_o^2 - \beta^2), \\ (2.46) & \text{ 在 } \beta > 1 \end{aligned}$$

惯性项 $(\frac{V_o}{l_o})$ 与 Coriolis 项 $i \omega$ $(2\Omega \times V \sim i \omega \frac{l_o}{l_o})$
(书中未提及应用)

7. 磁 Prandtl 数 (magnetic Prandtl number)

$$P_m = \frac{l_o m}{R_e} = \frac{U}{\eta} \quad (\text{流体粘滞系数})$$

7: 磁普朗特(粘滞)系数, U : 运动粘滞系数
(P>77, 有过度稳定性 over stability)

8. Ekman 数

$$E = \frac{R_o}{R_e} = \frac{U}{l_o^2 \Omega}$$

流体粘滞系数与 Coriolis 力之比 (书中未提及应用)

9. Taylor 数

$$T = \tau^{-2} \quad (\text{是转动程度的系数})$$

- 57 - 对流有关 (P>76)

$$T = 452 \alpha^4 / U^2 \quad (P>76)$$

a: 地球自转角速度

d: 流体深度

U: 运动粘滞系数

对流的研究中，下面这些量也很重要

10. Rayleigh 数

$$Ra = \frac{dg \Delta T d^3}{\kappa \nu}$$

↑ 热扩散系数的扩散
↓ 对流区的扩散

是浮力与热扩散系数的传递因素的比值，对流区 $\propto 1/d^3$
式中 κ : - 热传导系数, ν : - 运动粘滞系数

d : - 流体元移动距离 d : - 体积膨胀系数

g : - 重力加速度, ΔT : - 温度差 (Priest, P.P. 276, 281)

对流区稳定性的判别用到 Ra (参考第 8.1.1)

11. Chandrasekhar 数

$$Ha = H_a^2$$

H_a 是 Hartmann 数, $H_a = \frac{B_0 d}{(\mu \rho \eta \nu)^{1/2}}$
(η : - 磁导率系数)

磁感应力与粘滞扩散力之比

(the ratio of magnetic to viscous diffusion forces)

磁感应力: Lorentz 力 $\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \times \vec{B} \approx \frac{B^2}{\mu l}$

粘滞力 $\rho \nu \nabla^2 \vec{v}$ (P.81) $\sim \rho \nu \frac{\vec{v}}{l^2} = \rho \nu \frac{1}{l^2} \cdot \frac{l}{\lambda}$

粘滞磁感应力最大值 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B}$, $\frac{1}{T_0} = \eta \frac{1}{l^2}$, T_0 : 磁感应时间

$\frac{l}{T_0} = \frac{1}{\lambda}$ 可见 $\vec{v} \sim \frac{l}{T_0}$ 为磁感应力线平行于流动方向时最大速度

及, 或者说流体相对于磁感应力线的运动速度

$$\text{代入, 得} Ha = \frac{\frac{B^2}{\mu l}}{\rho \nu \frac{1}{l^2} \cdot \frac{1}{\lambda}} = \frac{B^2 l^2}{\mu \rho \eta \nu}, \text{令特征长度 } l=d \text{ (流体元}$$

的移动距离), 逆之 $Ha = \frac{B_0 d}{(\mu \rho \eta \nu)^{1/2}}$ 为对流的起动和过程提供有关

12. Prandtl 数

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

流体粘滞（由运动学粘滞系数表达）与热导数（由热扩散系数表达）之比。对于太阳 - 约为 $1 + \text{几}^2$ (或者说是 1 的量级 (order of unity))。取决于参数物理过程之分布 (或局域) 的值。 (P.P. 26-27) \Rightarrow 过稳定性 (overstability) 有关)

13. Nusselt 数

$$Nu = 1 + \frac{\bar{F}_C}{\kappa \Delta T / d}$$

\bar{F}_C : 对流之热流

$\kappa \Delta T / d$: 15 等之热流

是对流作用大小的量度。 (书中未提及名目)

太阳大鞘中 (平均质量密度 $\tilde{\rho} = 0.6$, 平均 $\gamma = \frac{5}{3}$)

$$R_m = 1.9 \times 10^{-8} \lambda_0 V_0 T_0^{3/2} / \mu \kappa$$

$$C_s = 15^2 T_0^{1/2} \text{ m s}^{-1}$$

$$V_A = 2.8 \times 10^{16} B_0 n_0^{-1/2} \text{ m s}^{-1}$$

$$\beta = 3.5 \times 10^{-29} n_0 T_0 B_0^{-2}$$

$\lambda_0, V_0, T_0, n_0, B_0$ 等 (MKS 单位制)

13. 对于太阳 $\lambda_0 \approx 10^7 \text{ m}, V_0 \approx 10^3 \text{ m s}^{-1}, T_0 \approx 10^4 \text{ K}, n_0 \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}, B_0 \approx 0.1 \text{ T}$ ($1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$) (忽略)

$$R_m \approx 3 \times 10^7$$

$$C_s = 2 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} \quad (M \approx 0.05)$$

$$V_A \approx 3 \times 10^5 \text{ m s}^{-1} \quad (M_A = 4 \times 10^{-3}) \quad (\text{忽略 } 10^4 \text{ m s}^{-1})$$

$$\beta \approx 3 \times 10^{-3}$$

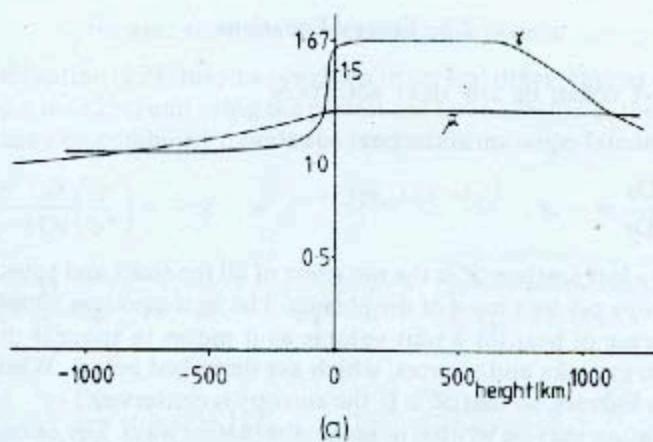
参数 $V \approx 10^2 \text{ m/s}^{-1}$, $\Omega \approx 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ (2.1)

$$Re \approx 10^{12}$$

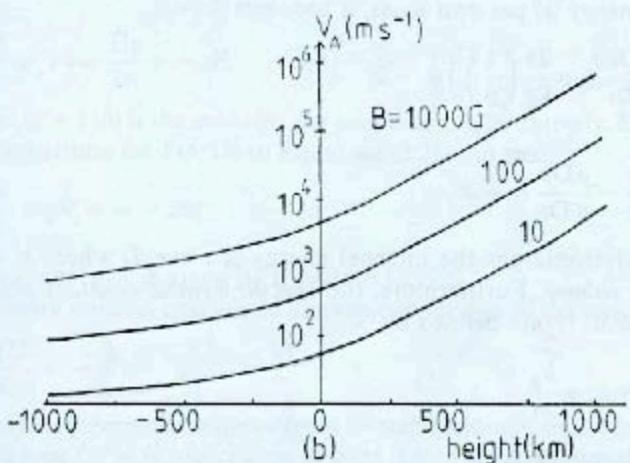
$$R_o \approx 10^0$$

随着速度的增加 β 必须减小 (2.16) V_A 增加 (2.16)

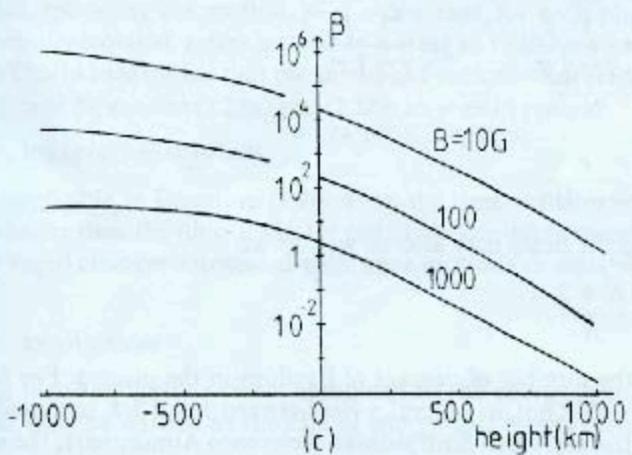
不饱和时 $\beta > 1$ 导高与耗尽于磁层, 代以式中 ($\beta < 1$) 2.17(a) 及



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.1. The variation with altitude from $\tau_{3000} = 1$ at $z = 0$ of: (a) the mean atomic weight ($\bar{\mu} = m/m_p$) and the ratio of specific heats (y); (b) the Alfvén speed (v_A); (c) the plasma beta (β). For $z > 0$ the values are taken from the Harvard-Smithsonian Reference Atmosphere (Gingerich *et al.*, 1971) and for $z < 0$, they come from Spruit's (1974) convection-zone model. Above 2000 km H is fully ionised and $y \approx 5/3$. (Courtesy of A. Webb and P. Cargill.)

2.6 戴维方程的求解

$$\text{戴维方程} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \vec{v}^2 \vec{B} \quad (2.13)$$

当 \vec{v} 已知，磁感应强度 \vec{B} 就可通过该方程而确定。磁感应强度又和磁感应速度 \vec{v} 相互关联。

利用矢量式

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) &= \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} \\ &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} \end{aligned}$$

已利用了不可压缩条件。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

(2.13) 式简化为

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} + \eta \nabla^2 \vec{B}$$

该式类似于高斯方程(2.5-1), (2.5-1) 式也可写成

$$\frac{D\vec{s}}{Dt} = (\vec{s} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{s}$$

(记得 $\vec{s} = \nabla \times \vec{v}$, $\nabla \cdot \vec{s} = 0$) 对于不可压缩流体, 流体中没有磁场.

这就是所谓高重和磁场相似的条件. 即磁力线与场线平行为相似. 磁力线一般而言是部分随流动迁移, 部分通过流体扩散. 磁力线可以延伸从而增加磁场强度. 然而注意的是这种相似性的成立需要流体不可压缩时成立. 而且这种相似性也不一定确切成立. 因为对于磁场来说有 $\vec{s} = \nabla \times \vec{v}$ 这样的关系.

2.6.1 磁散

假设 $R_m \ll 1$, 则方程(2.13) 可化为磁散方程

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (2.50)$$

场发生明显变化时磁散时间 $T_d = \frac{l_0}{\eta}$. l_0 为特征长度

对于完全电离的导体, 由(2.50) 式(2.18) 可得

$$T_d = 1.9 \times 10^{-8} l_0 T^{3/2} / \mu n \quad (s)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{me}{\mu n_0 e^2 \tau_{ei}} = \frac{1}{\mu \nu} \\ &= 5.2 \times 10^7 \text{ As} \cdot \text{m}^{-2} \text{A}^{-1} \text{m}^2 \text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

所以当 $T = 10^6 \text{ K}$, $n = 10^{15} \text{ m}^{-3}$, $l_0 = 10 \text{ Mm} (= 10^7 \text{ m})$, $T_d = 10^{14} \text{ s}$

当 $l_0 = 1 \text{ m}$, 则 $T_d = 1 \text{ s}$ 表现为磁散时间, 磁修整效应时间是 100 s 或 1000 s 因此特征长度似乎需要至少 100 m 或 1000 m .

为什么这样?

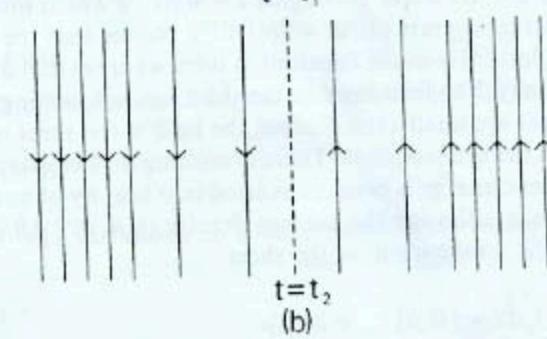
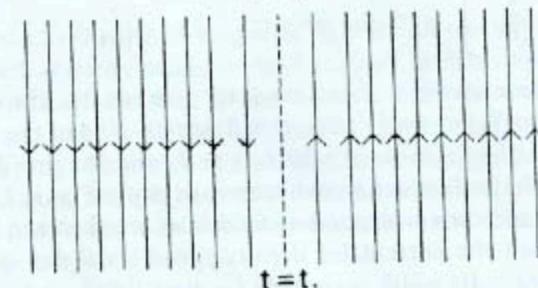
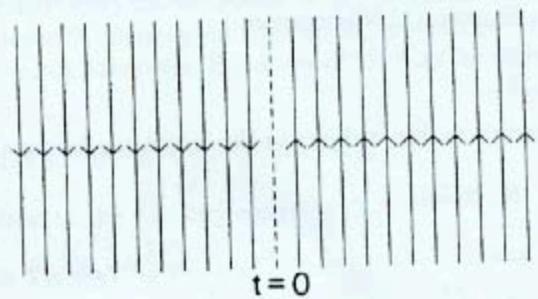
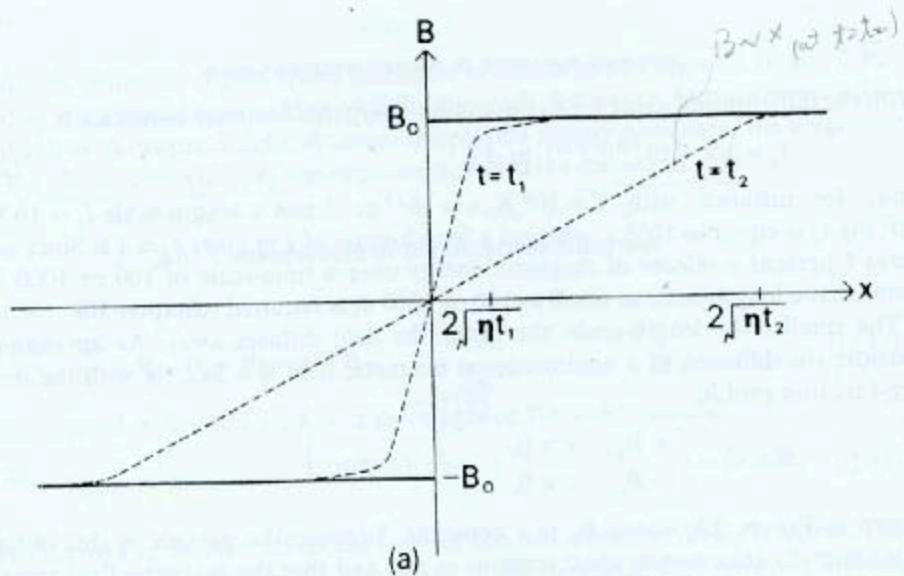


Fig. 23. A diffusing current sheet: (a) the variation with time of the magnetic field strength; (b) a sketch of the magnetic field lines at three times.

特征长度越长，磁场的传播速度越快。作为一个例子，考虑单向磁场的传播， $\vec{B} = B(x, t)\hat{x}$ ，初值问题为阶初值问题。

$$B(x, 0) = \begin{cases} +B_0, & x > 0 \\ -B_0, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{设 } t=0 \text{ 时})$$

根据(2.3)所写， B_0 为常数。假设导体中的运动忽略时，化简为无限长的电流产生保持静止，磁场保持单向。方程(2.5)简化为

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad (2.6.1-1)$$

求解该方程。

初值条件 $B|_{t=0} = f(x)$ (对称门的特别，实际上 $t=0$) (2.6.1-2)
 $x=0$ 时， $B=0$
 $x \neq 0$ 时， $f(x)=B| = \text{const.}$

考虑无源的情况，仅需满足初值条件即可

分离变量法 $B(x, t) = T(t)X(x)$

$$T'(t)X(x) = \eta T(t)X''(x)$$

$$\frac{T'(t)}{\eta T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

因此有 $T'(t) + \lambda^2 \eta T(t) = 0$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

得为: $T(t) = e^{-\lambda^2 \eta t}$ (常数因式设为1)

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x$$

常数 A_1, A_2 可能依赖于 λ

由于没有任何边界条件，所以 λ 至少是完全任意的（只有当一个以 λ 为参数的 T ， λ 可能取一独特值，称为本征值）

于是函数 $B(x,t)$ 可写成下述形式

$$\sum_{\lambda} e^{-\lambda^2 t} [A_1(\lambda) \cos \lambda x + A_2(\lambda) \sin \lambda x]$$

λ 为所有特征值的同号复数。

$t \in -\infty \cup +\infty$ 时存在积分， \therefore 代入 t 于 λ 的表达式

$$B(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} [A_1(\lambda) \cos \lambda x + A_2(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \quad (2.6.1-3)$$

应用化简积分式，得 $B(x,t)$ 上述表达式通过扩散方程解得。

初值条件可以表示 $(t=0)$ 代入 $(2.6.1-3)$ 式

$$B|_{t=0} = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1(\lambda) \cos \lambda x + A_2(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \quad (2.6.1-4)$$

由

$(2.6.1-4)$ 得初值条件

$$A_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi$$

$$A_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \quad (\text{即由初始条件决定 } A_1(\lambda), A_2(\lambda))$$

把 $A_1(\lambda), A_2(\lambda)$ 代入 t 代入 $(2.6.1-3)$ 式中

$$\begin{aligned}
 B(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 \eta t} [\cos \lambda \xi \cos \lambda x + \sin \lambda \xi \sin \lambda x] d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 \eta t} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 \eta t} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda
 \end{aligned}$$

(上式中已利用) $e^{-\lambda^2 \eta t} \cos \lambda (\xi - x)$ 是入射的主函数之积

$$\text{有式: } \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \lambda^2} \cos \beta \lambda d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

$$\therefore \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \eta t} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi \eta t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\eta t}}$$

$$\therefore B(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi \eta t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\eta t}} d\xi \quad (2.6.1-5)$$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\xi - x}{2\sqrt{\eta t}}, \quad du = \frac{d(\xi - x)}{2\sqrt{\eta t}} = \frac{d\xi}{2\sqrt{\eta t}}, \quad f(\xi) = f(2u\sqrt{\eta t} + x) \\
 &= \begin{cases} B_0, & x > 0 \\ -B_0, & x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 (-B_0) \frac{1}{2\sqrt{\eta t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\eta t}} d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B_0 \frac{1}{2\sqrt{\eta t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\eta t}} d\xi \\
 &= -\frac{B_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{\eta t}}} e^{-u^2} du + \frac{B_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\eta t}}}^{\infty} e^{-u^2} du
 \end{aligned}$$

在边界- $\frac{x}{2\sqrt{\eta t}}$ 变号变换，令 $u' = -u$ ，有

$$= \frac{B_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{\eta t}}} e^{-u'^2} du' + \frac{B_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\eta t}}}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{B_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{T}}}^{\frac{x}{2\sqrt{T}}} e^{-u^2} du \\
 &= \frac{B_0 \cdot 2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{T}}} e^{-u^2} du \\
 &= B_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{T}}\right) \quad (2.6.1-6)
 \end{aligned}$$

该表达式定义为 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$

$$\because \xi = \frac{x}{(4\eta T)^{1/2}} \quad \begin{cases} \xi \rightarrow \infty \\ \text{当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = (4\eta T)^{1/2} \operatorname{erf}(\xi) \\ \text{由 } 2.6.1-6, \text{ 有} \end{cases} \quad B(x, t) = B(x \rightarrow \infty, t) = B_0$$

当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, $x \rightarrow -\infty$ 且 u 的替换 $u = -u$, $B(x \rightarrow -\infty, t) = -B_0$
而 $B(x, t)$ 满足方程的解 (对于 $t > 0$ 的初值条件) 为
 $B(x, t) = B_0 \operatorname{erf}(\xi)$

讨论:

$$\begin{aligned}
 &\text{1. 当 } |x| \ll (4\eta T)^{1/2} \text{ 时, 由 } \xi \rightarrow 0, \quad B(x, t) = B_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-u^2} du = B_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^{1/2} u} \Big|_{u=0} \\
 &\approx B_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{(4\eta T)^{1/2}} = B_0 \times (\pi \eta T)^{-1/2}, \quad \text{对于相定的时刻 } t, \quad B(x, t) \text{ 在}
 \end{aligned}$$

轴部 ($B(x, t)$ 关于 x 的系数) 是 $t^{1/2}$ 的

$$\begin{aligned}
 &\text{2. 当 } |x| \gg (4\eta T)^{1/2} \text{ 时, 对于 } t \rightarrow \pm\infty, \quad \operatorname{erf}(\xi) \rightarrow \pm 1, \quad |B(x, t)| \approx B_0.
 \end{aligned}$$

$B(x, t)$ 在轴部称为渐移时的轴部。

t_1, t_2 = 时刻的 $B(x, t)$ 轴部见图 2.3.a, 磁力线分布见图 2.3.b)

3. 电流的宽度

表达式(2.6.1-5) 在某种意义上可理解为 x 足够大时的磁场
强度 B 的分布 $\frac{B_0}{2\sqrt{\pi\eta t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\eta t}}$ 的集合。设 $x=0$ ，则 B 为零，即在 $x=0$ 处 $B=0$ 。

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\eta t}}} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{\eta t}}} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-1}$$

也就是说 $x=(4\eta t)^{1/2}$ 时，函数 $\operatorname{erf}(z)$ 随 z 增大而值为 e^{-1} 。可见 x 越大，故 $\lambda_x = 2(\eta t)^{1/2}$ ，若宽度 $\lambda = 4(\eta t)^{1/2}$ 大此就是电流片的宽度。

由此可见当 λ 随 t 增加而增大，宽度随时间变化率 $\frac{d\lambda}{dt} = 2\left(\frac{1}{t}\right)^{1/2}$
随时间逐渐减少。(即宽度随时间增加而增大，但增加率逐渐减小)

4. 当 $x \gg (4\eta t)^{1/2}$ ，即高中心处远的地方，磁场强度几乎不变
(可以认为 $\operatorname{erf}(z) \rightarrow 1$)，高中心不遠处，则半圆减小。

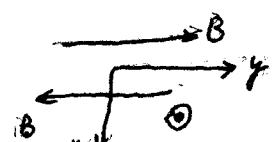
5. 由于远处的磁力线没有受到影响，可见电流片中的磁力线
没有向外运动，它们只在电流片中扩散，变大，磁场通过
既对耗散平行转换而成垂直。

6. 电流密度 $j_s = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx}$ ，在所有情况下都发生变化，但不变
的是电流片内的总电流，保持不变

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} j_s dx = \left[\frac{B}{\mu_0} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 2B_0/\mu_0$$

设 $\vec{B} = B(x)\hat{y}$
 $\vec{j} = j_s \hat{y} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} \hat{y}$
 电流方向
 与 (x, y) 平面成直角

$$(B(x,t) = B_0 \operatorname{erf}(z)) \text{, 当 } z \rightarrow \pm\infty, \quad B \rightarrow \pm B_0)$$



7. 实际上，简单的平行磁场扩散的地方需要修正计算。
 中性线附近磁场强度的减小，导致磁通量 Φ 变化，从而引起
 电流由中性线向中性线运动，再后者中性线向外运动。因此要

把感应方程中的时间项 $\partial(\vec{B}/\partial t)$ 忽略起来. 该次中出现速度 \vec{v} ,
需要由运动方程来耦合. 问题变得很复杂. 另外, 一维电流片可能因撕裂模 2. 稳定性而遭到破坏. 一维电流片能长期存在
是必须经受的挑战.

2.6.2 理想导电

当 $\kappa \gg 1$, 方程(2.13)可近似为

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.53a)$$

$$Ohm's 律简化为 \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (2.53b)$$

需要强调指出的是, 考虑着电场 (\vec{E}) 及因运动产生的电场 $(\vec{v} \times \vec{B})$ 根据(2.53b)式为零. 但电流 \vec{j} 可以不为零. 由(2.15)式可知
是 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. 我们还可以这样理解 $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
当 $\sigma \rightarrow \infty$, $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow 0$, 从而 \vec{j} 为有限值, 且不一定为零. 或者, 在
太阳物理中 特征长度很长, 从而有 \vec{v} 很小. 因此由(2.16)式
 $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{\sigma} \vec{j} \approx -\vec{v} \times \vec{B}$. 得到(2.53b). \vec{j} 是恒定而已.

在大 Reynolds 数的极限下, Alfvén 的磁通冻结理论认为:
理想导电的等离子体中, 磁力线随着流体一起运动. 这可与亥姆
兹典的 Helmholtz, Kelvin 位旋定理相类.

该方程(2.53a)可表示为以下三个定理:

1. 理想导电流体中, 通过和流体一起运动的任意曲面的磁通量
不随时间而改变

> 在麦克斯韦电磁学中，带电粒子在磁场中的运动轨迹“ s ”一直在磁力线上。

例 A: ① 表面 S 的边界为封闭曲线 C , 随

带电粒子一起运动。经过 Δt 时间, 曲

线 C 上的线元 $d\vec{l}$ 扫过的面积为

$\vec{v} \cdot \vec{a}t \times d\vec{l}$, 通过该面积的磁通量

量为 $\vec{B} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{a}t \times d\vec{l})$

通过面 S 的磁通量 $\vec{F} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$, 之变化率即为 \vec{F} 的随体

导数 $\frac{d\vec{F}}{dt}$

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{S'} \vec{B}(t+\Delta t) \cdot d\vec{s} - \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}}{\Delta t}$$

S' 即为虚线所包围的面, 计算公式叫为 ∇ .

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\iint_{S'} (\vec{B}(t+\Delta t) - \vec{B}(t)) \cdot d\vec{s} + \iint_{S'} \vec{B}(t+\Delta t) \cdot \vec{v} \cdot \vec{a}t \times d\vec{l}' \right. \\ &\quad \left. - \iint_S \vec{B}(t) \cdot \vec{v} \cdot \vec{a}t \times d\vec{l} \right] \end{aligned}$$

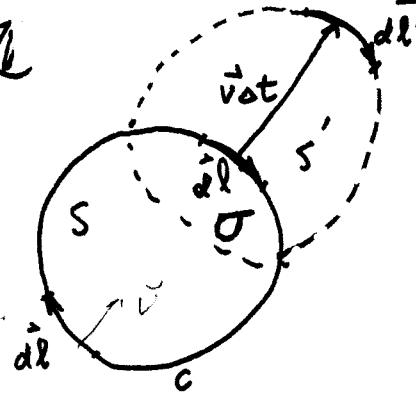
(1) 一区段
(2) \vec{B} 变化
同理可得
(3)

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\iint_S (\vec{B}(t+\Delta t) - \vec{B}(t)) \cdot d\vec{s} + \iint_C \vec{B}(t+\Delta t) \cdot \vec{v} \cdot \vec{a}t \times d\vec{l}' \right. \\ &\quad \left. + \iint_C \vec{B}(t) \cdot \vec{v} \cdot \vec{a}t \times d\vec{l}' \right] \end{aligned}$$

(1)
(2)
(3)

$$= \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_C \vec{B} \cdot \vec{v} \cdot \vec{a}t \times d\vec{l}'$$

$$= \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} - \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}'$$



$\vec{v} \times \vec{a}t$ 方向 (S) 侧
 $\vec{v} \times \vec{a}t$ 相反 (内侧)

可以把 σ 扩大到 S , 即扩大部分被移出麦克斯韦方程.

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{s}$$

根据(2.13a), 得到 $\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

结论: 通过可完全导电等高体一起运动的任何封闭曲线所围的表面的磁通量是守恒的. (核 P. 69')

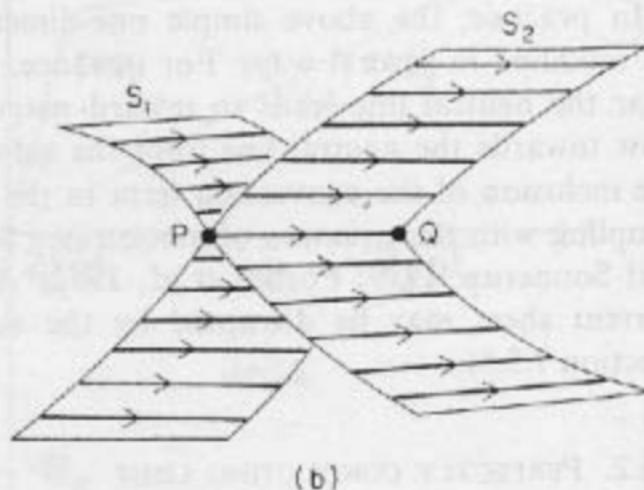
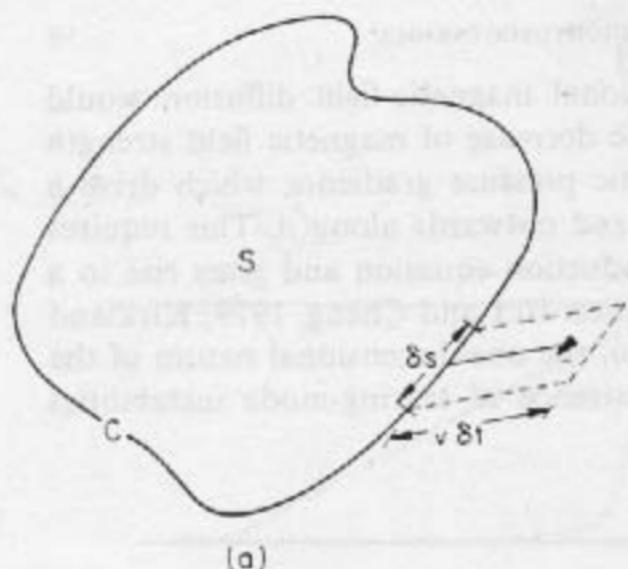


Fig. 2.4. (a) A surface S bounded by a curve C that moves with the plasma. (b) Parts of two magnetic flux surfaces S_1 and S_2 that intersect in the magnetic field line PQ .

该结论也可以这样引申：高斯流体质量 P, Q ，它们可位于同一根磁力线上。将永磁保持在该磁力线上。假设该磁力线是只通过 S_1 和 S_2 的直线（每单位面积磁力（率）恒定）光强 2.416 。是的通过两个面的通量为零。由于磁力线电流体通过任何封闭曲线所围面积的磁通量不随时间而变。所以当 S_1 和 S_2 随着高斯体运动时，通过 S_1 和 S_2 的通量保持为零。 S_1 和 S_2 作为通量的，它们的支点即通过 P, Q 的曲线必须保持在磁力线上。

(习题七·P.69)

Alfvén 的結果是：某一封定義上磁場的變化和磁力線跟
導高子体一起運動時的變化是一樣的。即磁力線源隨導高子
中，導高子體可以沿着磁力線自由運動，但若導高子體垂直于
磁力線運動時，則導高子體沿着磁力線一起運動，或是磁力線
推着導高子體一起運動。以下將進一步說明磁力線和導高子體的關係。

(2) 戴维宁方程可以改写成另一种形式

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$= \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{v})$$

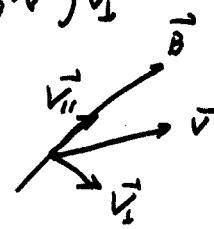
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{v}) \quad (2.6.2-1)$$

(2.6.2-1)式表示磁场随时间的变化 (由随体守数 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 表示)

是由于磁通量的延伸、剪切或扩展所致。(2.6.2-1)式在电场第一次可写成 $(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{B} \cdot \nabla (\vec{V}_e + \vec{V}_A)$ (平行于垂直均相切于磁力线)

可以看作沿磁力线方向的加速运动(延伸)(由 \vec{V}_e 沿 \vec{B} 方向的方
向守数 $(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V}_e$ 表示, 方向守数 \vec{V}_e 随 \vec{B} 而变, 则 \vec{V}_e 不是常数). 引起

磁场强度的增加，垂直于磁场方向的剪切运动($\vec{B} \cdot \vec{v}$)
由于 \vec{v} 的改变(使流动速度 \vec{v} 变化, \vec{B} 与 \vec{v} 方向成
角就有变化) 磁场方向发生变化.



(2.6.2-1) 在已知 \vec{v} 及 \vec{B} 时磁通量的形变. 因为
 $\vec{v} \cdot \vec{B}$ 表示相对体积膨胀率, $\nabla \cdot \vec{v} > 0$ 当磁场所强度减小.
反之则增加.

$$\text{由连续方程 } \frac{DP}{DX} = -P \nabla \cdot \vec{v}, \text{ 得 } \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{P} \frac{DP}{DX}$$

代入 (2.6.2-1) 式

$$\frac{D\vec{B}}{DX} = (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{v} + \frac{1}{P} \frac{DP}{DX}$$

$$\frac{D}{DX} \left(\frac{\vec{B}}{P} \right) = \left(\frac{\vec{B}}{P} \cdot \vec{v} \right) \vec{v} \quad (2.6.2-2)$$

我们研究某一流体质点, 考虑 $\overset{t=0}{\vec{r}_0}$ 时 P_0 ,
坐标为 \vec{r}_0 . 该流体质点随流线 \vec{r}_0 而运动.

若某时刻 t , 体质点 P_0 移动到 P
 P_0 行同一流线上, 则有

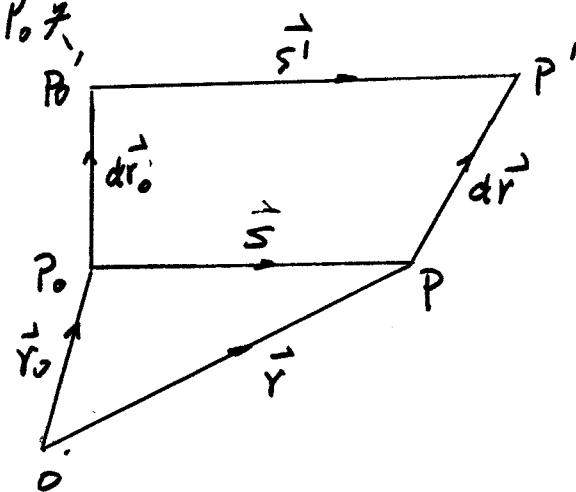
$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + \vec{s}'(\vec{r}_0 + d\vec{r}_0, t) - \vec{s}(\vec{r}_0, t)$$

$$\vec{s}'(\vec{r}_0 + d\vec{r}_0, t) = \vec{s}(\vec{r}_0, t) + (d\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0) \vec{s}$$

$$\therefore d\vec{r} = d\vec{r}_0 + (d\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0) \vec{s} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{对 } \vec{r} \text{ 求导数} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ r = r_0 \end{matrix}$$

$$\text{从 } (2.6.2-1) \text{ 可见 } \vec{r}_0 + \vec{s} = \vec{r}, \quad \vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d\vec{r}_0 + (d\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0) (\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= d\vec{r}_0 + (d\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0) \vec{r} - (d\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0) \vec{r}_0 \\ &= (d\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0) \vec{r} \quad "d\vec{r}_0" \end{aligned}$$



2.6.2-1

$$\frac{D}{Dt} d\vec{r} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{r} \quad (2.6.2-3)$$

上式表示流体质点的流体元满足的方向与 \vec{B}_0 满足的方向同 \vec{B} 方向，这表明如果该流体质点是平行的，则以后也将保持平行。若 $t=0$ 时， $d\vec{r}_0 \parallel \vec{B}_0$ 且 $d\vec{r}_0$ 在磁力线上，我们可写成

$$d\vec{r}_0 = \epsilon \frac{\vec{B}_0}{\rho_0} \quad \text{则 t 时刻 该流体质点平行于磁力线上。即 } d\vec{r} = \epsilon \frac{\vec{B}}{\rho}$$

由此理想导电流体质点初位于磁力线上的流体质点，以后一直位于该磁力线上，磁力线“冻结”在该点一起运动到流体质点上。如果 $|d\vec{r}| = |d\vec{r}_0|$ ，则该流体质点的运动轨迹上 $\frac{\vec{B}}{\rho}$ 保持不变，如果在运动过程中流体质点伸长 $|d\vec{r}| > |d\vec{r}_0|$ 则 $\frac{\vec{B}}{\rho} > \frac{\vec{B}_0}{\rho_0}$ ，对于不可压缩流体质点有 $\vec{B} > \vec{B}_0$ 。

磁雷诺数过大决定了磁场的行为，当 $R_m \ll 1$ ，磁场线可认为高电导中移动。当 $R_m \gg 1$ ，磁场线则冻结化等离子体。太阳大流中有许多物理现象的特征长度很大，例如电流片，宽达约 12 里且从 $R_m \sim 1$ 不过大流区情况 $R_m \gg 1$ 。例如典型的星子运动速度 $V_* = 10^3 \text{ m s}^{-1}$ ，特征长度 $\lambda_* \approx 10^7 \text{ m}$ 。当磁扩散系数 $\eta \approx 10^4 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ 时， $R_m \sim 10^6$ 磁场冻结化等离子体。磁扩散时间 $T_d = \frac{\lambda_*^2}{\eta}$ ，可以计算出对于完全电离时的 η ，代入 T_d 表达式，得到 $T_d = 1.9 \times 10^{-8} \lambda_*^2 T^{1/2} / \ln \Lambda^5$ ，利用 $\eta = 10^4 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ 和 $\ln \Lambda = 10$ ，则 $T_d \sim 1.6 \times 10^3 \text{ yrs}$ 。（在 300 yr $T_d \approx \eta$ ）实际情况则磁场山衰减只有几天一百多天。造成磁场的衰减可能起因于传统的欧姆耗散，或者需要增加湍流扩散系数使之降低到 10^3 倍。

2.7 Lorentz 力

1. 静止电荷受静电力的作用，力表达式

$$\vec{f} = \rho \vec{E}$$

称为库仑力

稳定电流受静磁场的作用，力表达式

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$$

Lorentz 把此公式推广到真空中运动的带电体的一般情况。运动的带电体因为电荷和电流同时存在，所以同时受到电场和磁场的作用力。Lorentz 假定不论带电体的运动状态如何，力表达式都由下式决定

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}$$

此即 Lorentz 力公式。需要注意的是式中 \vec{v} 和 \vec{B} 为该单位体积内的电荷和磁场。包括带电体自己所激发的范围内。实践证明该公式正确。

2. 电流密度 \vec{j} . 在磁场 \vec{B} 中受到的力密度

$$i) \vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}$$

：带有电荷运动 ($\vec{p} \neq 0$)，力 \vec{F} 等于零

ii) 从电子论的观点，电磁场中的力应归结为作用在电荷上的力

$$\vec{j} = ne\vec{u}, \quad \vec{F} = ne(\vec{u} \times \vec{B})$$

式中 \vec{u} 为 n 电子的平均速度。

作用在其中一电子上的力为 $\vec{F} = e \vec{v} \times \vec{B}$

或带电粒子的真实速度。如果电流为 0，则平均速度 $\vec{u} = 0$ ，电子没有任何运动状态

iii. 和带电流不等零，由于受到力的作用，动量相应增加，所以增加的动量和电子和导体原子（或离子）相碰时，将遵循守恒。设导体在磁场中发生运动。如果导体是固定的，则力将使导体在磁场中运动。作为宏观论点，不研究观察者的内部机构，这标志着守恒：受到有度的动力的作用。

iv. 带着已化为在电磁场中的总电力 $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

但是该式还不够。电场强度已的定义（场中单位正试探电荷所受的力）要附加条件：试探电荷运动 ($V \neq 0$)

v. Lorentz 力和机械能。

3. Lorentz 力的方向垂直磁场。因此沿着磁力线的任何运动或者相反地，需要借助于其他力和引力或毛庄张力

4. Lorentz 力可分解为磁吸力和张应力（磁应张系数）

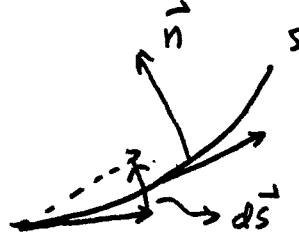
$$\begin{aligned} \vec{j} \times \vec{B} &= (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} / \mu \\ &= \vec{B} \cdot \nabla \frac{\vec{B}}{\mu} - \nabla \left(\frac{1}{\mu} B^2 \right) \end{aligned} \quad (2.5b)$$

假如 \vec{B} 沿着 \vec{B} 的方向有差吧, 则上式左边第一次不为零, 代表
大矢量 $\frac{1}{\mu} \vec{B}^2$, 平行于 \vec{B} 方向的牵引力。 $\vec{B} = B \vec{s}$, \vec{s} 为 1^n 半径
场方向的单位矢量, 牵引力次可以分解:

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot \nabla \frac{1}{\mu} \vec{B} &= \frac{1}{\mu} B \vec{s} \cdot \vec{s} \frac{d}{ds}(B \vec{s}) \\ &= \frac{1}{\mu} B \frac{d}{ds}(B \vec{s}) = \frac{1}{\mu} B \frac{d\theta}{ds} \vec{s} + \frac{1}{\mu} B^2 \frac{ds}{ds} \vec{s} \\ &= \frac{d}{ds} (\frac{1}{\mu} B^2) \vec{s} + \frac{1}{\mu} B^2 \frac{\vec{n}}{R_c} \quad (2.57)\end{aligned}$$

我们对 $\frac{d\vec{s}}{ds}$ 的方向作一些说明

牵引力的方向趋向于将曲线 S 扭直



合力的方向在 \vec{n} (切面所指)

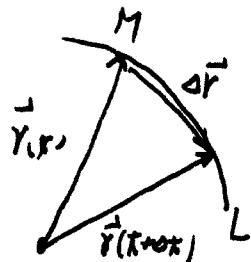
单位矢量 \vec{R} , 从曲率半径中心出发, 1^n 半径方向。 $\vec{R}^\circ = -\vec{n}$, 这样说
是 n 方向符合数学定义。 (2.57) 式中 \vec{n} 为主法线。 R_c 为曲率半径
是曲率(度)的方向

附:

① 曲线上一点 M , 由矢量 \vec{r} 表示. 大矢量

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \text{ 是矢量 } \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ 为}$$

方向是过 M 点的切线方向。



若取曲线 S 为参数 s 作为参量则

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{[\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)]}{\Delta s} \rightarrow 1, \frac{d\vec{r}}{ds} \text{ 为切线的单位矢量}.$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{x}$$

② 单位切线矢量 \vec{x} 对 s 的导数 $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{ds}$ 为曲率矢量, 这矢量的
大小(长度)和该矢量 \vec{x} 的方向改变的快慢, 叫做曲线的
曲率

$$\therefore \vec{t} \cdot \vec{n} = 1$$

求导: $\frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{n} + \vec{t} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} = 0$, 可见 $\frac{d\vec{t}}{ds} \perp \vec{n}$ 即曲率半径 \vec{N}

垂直于切线, 也即法线方向. 相应地

沿着 \vec{n} 方向, 指向曲线的凸侧.

\vec{N} 为曲率矢量, 其长度称为曲率. 曲率半径为

$$R = \frac{1}{|\vec{N}|}, \quad \vec{N} = \frac{1}{R} \vec{n}$$

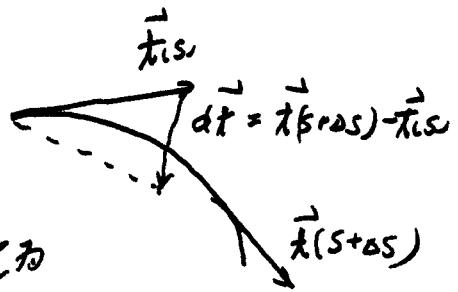
在 \vec{n} 方向取长度为 R , 其端点即为曲线 L 在 M 点的曲率中心.

③ 从上面的叙述可以看出来还没有定义曲率半径矢量. 物理上引入定义曲率半径矢量 \vec{R} , 从曲率中心. 11. 并平行于 \vec{s} 方向的磁感应强度 (等高线物理量, 律家第 J. P. 75)

从 (2.57) 式可以看出半径越小, 压力越大, 这是需要指出的是压力按 $(B \cdot \nabla) B_{\perp n}$ 分解成两次, 第一次是沿 \vec{s} 方向的磁感应强度, 同时减去 \vec{s} 方向的磁感应强度 (由 (2.56) 式第二项表示), 第二次才是净压力.

(2.56) 式的第三项表示高的总磁感应强度, (磁感应强度的梯度), 式中的磁感应强度, 在所有方向上都是一致, 也即磁感应强度各向同性. (可参考本讲第十七章 2. 磁场 (最后一部分)). 其中平行于磁场方向的磁感应强度 (即平行于 \vec{s}) 拥有了“压力”中相对的应力分量由 (2.57) 式右边第一项.

因此 Lorentz 力有二个作用, 一方面通过伸力作用使磁力线相互拉长, 另一方面通过压力使压强增高. Lorentz 力可分为垂直于 B 大小为 $\frac{1}{\mu_0} B^2$ 的压强和沿着 B 的伸张力, 大小也为 $\frac{1}{\mu_0} B^2$ (注意, 一部分伸力



已知均匀磁场 B_0 (由(2.57)式和第一次表示), 当磁力线弯曲时
这了拉伸力就含有一个合力.

5. 考虑几个简单例子.

① 均匀磁场 $B_0 \vec{y}$. \vec{B}_0 为直线, 且磁场强度大小相等, 电流为零. 则 Lorentz 力等于零, 等高体单元不受到, 因为 Lorentz 力为零.
也就是说有磁应力和磁吸力.

也可以这样理解 $\vec{j} \times \vec{B} = -\nabla \left(\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \right) \vec{s} + \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{\vec{n}}{R_c}$
(因为 B_0 是常数, 且在 \vec{y} 方向的延伸, $R_c \rightarrow \infty$). 上式右方三次项为零.
= 0 在情况下, 上式右方可写成 $- \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \right) \vec{x}^0 - \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \right) \vec{y}^0 + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \right) \vec{z}^0$
 $+ \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{\vec{n}}{R_c \approx 0} = 0$, 或 $- \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \right) \vec{x}^0 = 0$, 即在 \vec{x}^0 方向, 和 $-\vec{x}^0$ 方向, 磁
压强 $\frac{\vec{n}}{R_c}$ 为常数. 有拉伸力和压缩力.

(第2.5.a.)

$$② 该磁场 $\vec{B} = B_0 e^x \vec{y}^0 \quad (2.58)$$$

$$\text{相应的电流密度 } \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_0}{\partial x} \vec{y}^0 = \frac{1}{\mu_0} B_0 e^x \vec{y}^0$$

$$\text{Lorentz 力: } \vec{j} \times \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} B_0^2 e^{2x} \vec{x}^0$$

等高体单元在 $-\vec{x}^0$ 方向受到力的作用.

$$\text{或者, 有磁应力} = -\nabla \left(\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 e^{2x} \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 e^{2x} \right) \vec{x}^0$$

(其中 $\frac{d}{dy} = \frac{d}{dz} = 0$)

$$\text{磁应力} = -\frac{1}{\mu_0} B_0^2 e^{2x} \vec{x}^0$$

$$\text{磁吸力} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 e^{2x} \right) \vec{s}^0 + \frac{1}{\mu_0} B_0^2 e^{2x} \cdot \frac{\vec{n}}{R_c}$$

$$= \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 e^{2x} \right) \vec{y}^0 + \frac{1}{\mu_0} B_0^2 e^{2x} \frac{\vec{n}}{R_c \approx 0}$$

$$= 0$$

可见 Lorentz 力对等高体单元作用于等高体单元的磁应力
的方向.

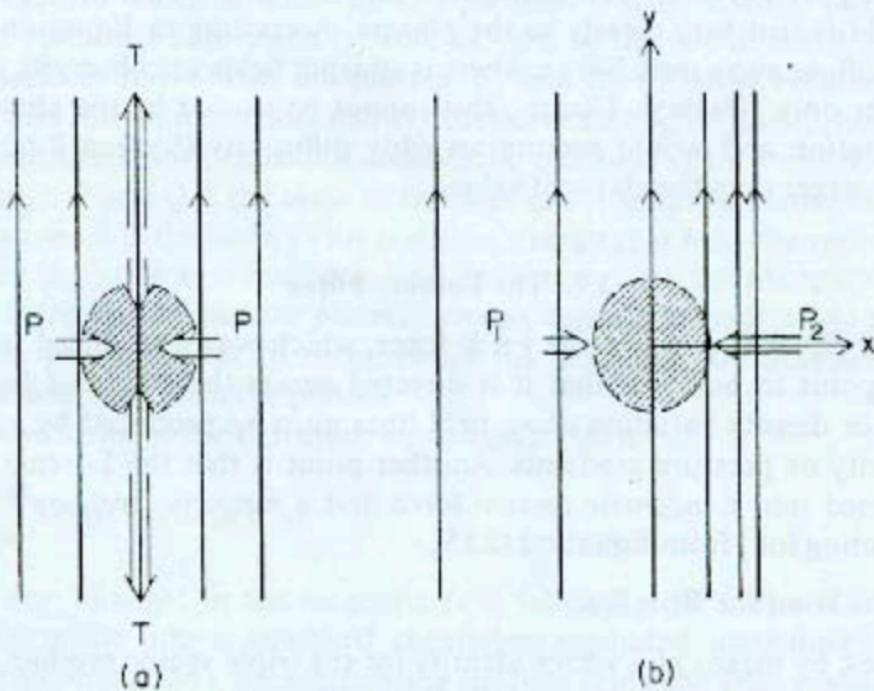


Fig. 2.5. The magnetic pressure (P) and tension (T) forces due to: (a) a uniform field; (b) a unidirectional field whose strength increases along the x -axis.

从 $\frac{d}{dx} \ln P_0 = -\frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{dx}$ 可知 P_0 为常数， $P_0 = e^{2x}$ 时有
 $-x^2$ 方向的力 $F(x)$ 。

$$3) \text{ 设磁感应强度 } \vec{B} = -y \vec{x} + \vec{y} \quad (2.59)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \text{ 通过磁感应的电流为 } \vec{j} = -\frac{d\vec{B}_x}{dy} \cdot \frac{1}{\mu_0} \vec{y} = \frac{1}{\mu_0} \vec{y}$$

$$\text{Lorentz 力: } \vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{y} \times (-y \vec{x} + \vec{y}) \\ = -\frac{1}{\mu_0} y \vec{x} - \frac{1}{\mu_0} \vec{x}$$

$$\vec{x} \text{ 方向的力 } (\vec{j} \times \vec{B})_x = -\frac{1}{\mu_0} \vec{x} \quad (2.60)$$

$$\text{ 运动方程 } \frac{dx}{dt} = \frac{\beta_x}{\beta_x} = -\frac{1}{y} \quad (d\vec{r} \times \vec{B} = 0)$$

$$x = -\frac{1}{2} y^2 + C \quad (\frac{y}{y_0} = 2.6) \quad (2.60')$$

$$\text{ 磁压力} = -\nabla \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = -\frac{1}{2\mu_0} \nabla (y^2 + 1) = -\frac{1}{\mu_0} y \vec{y}$$

且 $y=0$ 时, 磁压力为零, 由 Lorentz 力 $(\vec{j} \times \vec{B})_{y=0} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{x} \neq 0$.

纯由磁力所致. (即通过 Lorentz 力和磁力, 可知磁力大小为 $\frac{1}{\mu_0}$, 方向化 $-\vec{x}$)

现计算磁压力的大小. 由 (2.60') 得 $\vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{y}$, 由 $\vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{y}$ 得 $\vec{n} = \vec{R}_C$, 磁压力为 $\frac{B^2}{\mu_0} \vec{n}$, \vec{n} 指向凹侧.

$$\text{ 磁压力} = \frac{B^2}{\mu_0} \vec{n} = \frac{1}{\mu_0} (y^2 + 1) \frac{\vec{n}}{R_C} \quad (2.60'')$$

$$\frac{1}{R_C} = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right| \quad \text{ 式中 } y' = -\frac{1}{y}, \quad y'' = -\frac{1}{y^3} \quad [M.(2.60) \text{ 代入}]$$

$$= \left| \frac{1}{y^3 (1+\frac{1}{y^2})^{3/2}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{(1+y^2)^{5/2}} \right|$$

且 $y=0$ 时, $\frac{1}{R_0}=1$, 代入(2.60")式, 得

净磁力 = $\frac{1}{\mu} \vec{n}$, \vec{n} 指向凸侧



④ 设 $\vec{B}_0 = y \vec{x}^0 + x \vec{y}^0$ (2.61)

$\nabla \times \vec{B}_0 = 0$, $\therefore \vec{j} = 0$. Lorentz 力 = 0, 磁力线和高 2.7 所示, 且
关于为 X 型磁中性点

磁力线方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} = \frac{X}{y}$

$y^2 - x^2 = \text{const.}$ 双曲线 (双曲线的渐近线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 对于本例 $a=b$). 从(2.61)式可知磁场强度随高 h 增加而增
高增加而增大 ($|B| = \sqrt{y^2 + x^2}$), 对于不同的 const. 有二不同的双
曲线对应. 随高 h 增加而增加, 双曲线间越来越窄.

如高 2.7 所示. X 轴附近为等离体单壳, (高 2.7) 因磁力线向外弯曲, 有时力 F 作用其上, 修力由原壳向外, 被磁压力 P 平衡.
因为靠近原壳处磁场减弱, 磁压强也降低从原壳向外, 磁压强
则由外向内.

⑤ 设 $\vec{B}_1 = y \vec{x}^0 + \alpha \vec{x} \times \vec{y}^0$ (2.62)

这是 $\alpha^2 > 1$, 可得磁力线方程 $y^2 - \alpha^2 x^2 = \text{const.}$ 和高 2.8 所示
仍有 X 型磁中性点, 但是通过中性点的磁力线 $y = \pm \alpha x$ 不再以
平角夹角相交. 在 x 轴上, 磁力线在空间上 (与例④的高 2.7 相比较)
又靠前一些. 磁压强更弱. 但磁力线的曲率如高 2.7 所示, 因此
磁修力的增加和磁压强增加不等. 于是磁压强随高 h 增加, 产生
合力 R, 向着原壳方向. 在 z 轴上, 磁力线间的空间间隔如例④

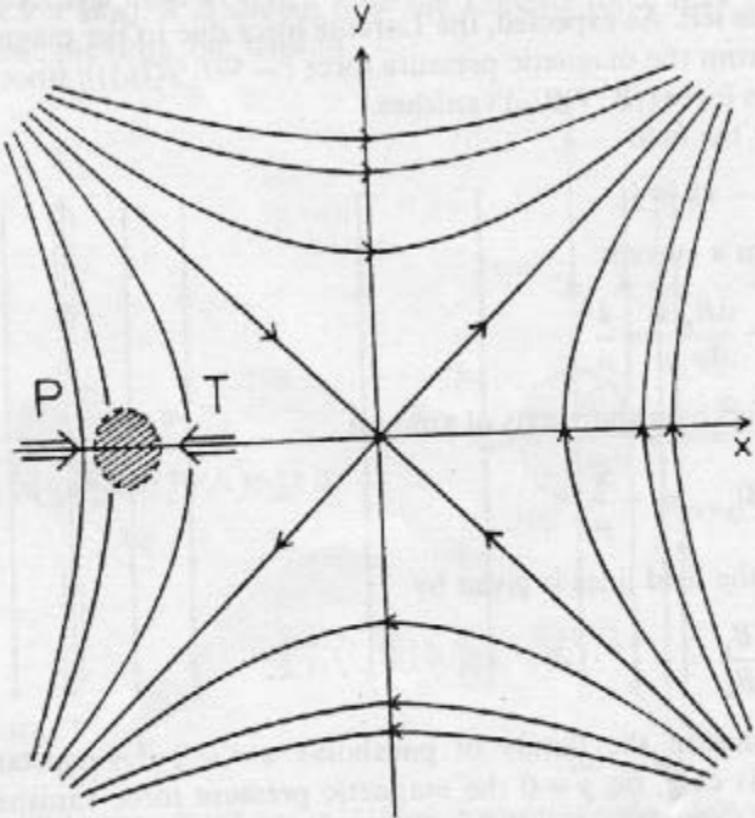


Fig. 2.7. The magnetic field lines near an X-type neutral point in equilibrium with no current.

(图2.7)一样,但是弯曲处,两个磁感应强度的倒数相同,而吸力有所增加.

合力F的作用方向向外(离开原点方向)

通过Lorentz力的计算可进一步证实这一类.

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B}_1 = \vec{j}_1, \quad j_{1x} = \frac{1}{\mu} (\alpha^2 - 1)$$

$$\text{Lorentz力: } \vec{j}_1 \times \vec{B}_1 = -\frac{1}{\mu} (\alpha^2 - 1) \alpha \vec{x} \times \vec{x} + \frac{1}{\mu} (\alpha^2 - 1) y \vec{y} \quad (2.62')$$

指向原点
指向右上方

Dungey (1953) 指出这种磁场位形,也即由(2.61)式表示的 \vec{B}_0 因扰动变成(2.62)式的 \vec{B}_1 时, 磁力的下侧是增加扰动. 例如图2.7中磁力(Lorentz力)等于零不适用(图). 本例中, 向扰动, y 方向的磁力由图中的 $X_1(\alpha^2=1)$ 变成 \vec{y} , 而 $\alpha > 1$. Lorentz力不为零. 它的 y 方向分量 $\frac{1}{\mu} (\alpha^2 - 1) y$ 会继续增加扰动, 表现为 α 不断增加. 所以图2.7的 X 型中性线是不稳定的. 随着不稳定性的发展, α 增加, 通过原点的磁力线将含不断靠近(这可以从图2.7一图的 $\alpha=1$, 图2.8— $\alpha>1$ 判断, α 增加, 磁力线靠近原点), 同时电流密度 j_{1x} 和吸力 $j_{1x} \frac{1}{\mu} \vec{x}^2$ 也不断增加.

Syrovatsky (1966) 在太阳风模型中已利用了这一类.

扰动 $(\alpha^2 \uparrow) \rightarrow j + \text{增加}$
 $\rightarrow L - \text{力增加} \rightarrow \text{运动}$
 $\rightarrow \text{力增加} \rightarrow \text{运动}$
 $\rightarrow \alpha \uparrow \uparrow$

Imshennik 和 Syrovatsky (1967) 提出了位形{球面的相似度}。从图2.8和2.9位形可获得很多定性知识, 可以看出每一类的磁力方向. 通过比较磁力线之间的空间距离, 可得到不同类的相对磁场强度. 通过磁场强度的空间变化和磁力线的曲率, 还可估计磁场强度及磁场方向和吸力的方向.

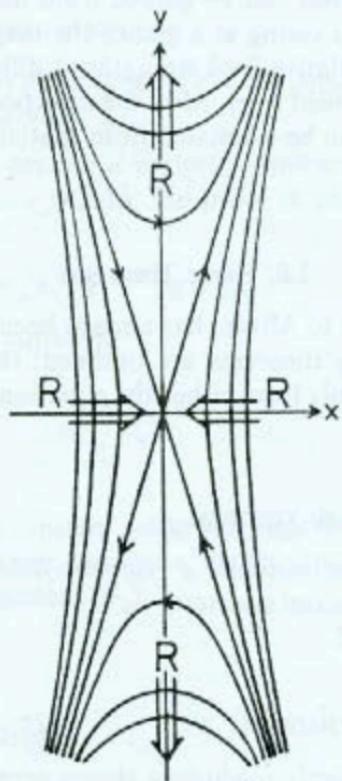


Fig. 2.8. The magnetic field lines near an X -type neutral point away from equilibrium with a uniform current.

2.8 老干定理

2.8.1 Cowling 和发电机定理 (Antidynamo theorem)

等离子体的稳定流动 2. 维持不规则于空间有限区域且
轴对称的磁场

Cowling (1934): 稳定的轴对称磁场 2. 维持 (参考 80)

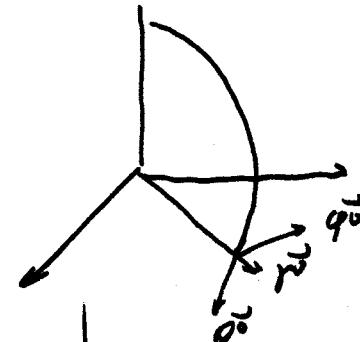
证明: 稳定轴对称磁场可以写成

$$\vec{B} = B_\varphi \vec{\varphi} + \vec{B}_p$$

其中 $B_\varphi \vec{\varphi}$ 称为环向场 (toroidal component), 磁力线沿
太阳自转轴, 大致与赤道圈平行. 磁场在子午面内. 磁场中
 \vec{B}_p 为极向场 (poloidal), 磁力线在子午面内. 在球坐标系中
有 \vec{B}_p , \vec{B}_φ 分量, 与光 \vec{n} 分量. (赤道面中即为平行 \vec{B}_φ 和垂直 \vec{B}_φ
分量之和; 球坐标中即共轭 \vec{r} 方向) $\vec{e}_r \sin\theta + \vec{e}_\theta \cos\theta = \vec{B}_p$

因为轴对称, 所有通过对称平面的子午面内的磁场分布都
一样, 且由封闭的磁力线构成. 子午面上必须还有一个 O 型
中性点 (N). 在这个中性点 $\vec{B}_p = 0$. “这样” 有
环向场 ($B_\varphi \neq 0$) (参 9.2)

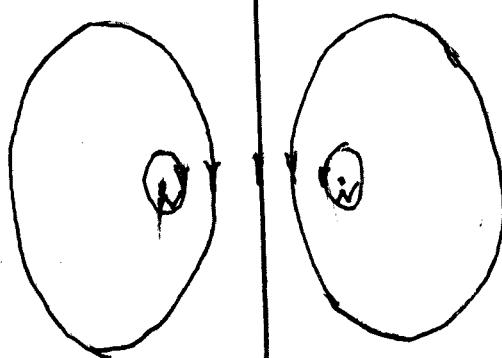
在 N 点, $\vec{B}_p = 0$. 只有垂直于纸面的环向场



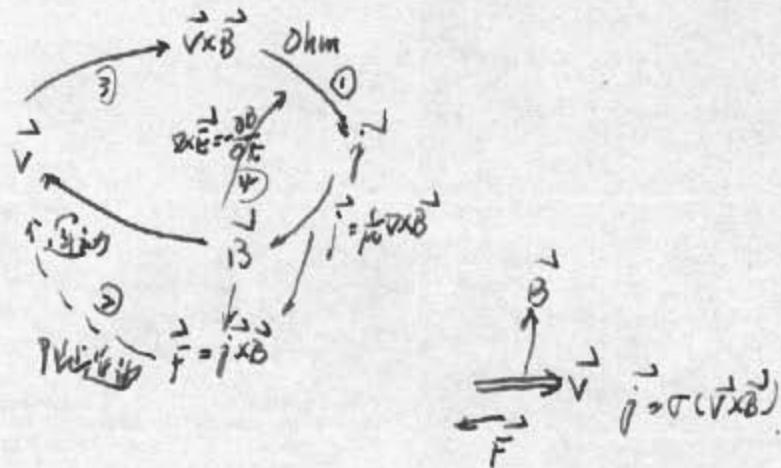
$$\text{Ohm's 定律 } \vec{j} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}$$

环流通过 N 点的封闭磁力线

积分



1. 发电机理论：磁场帮助电流而得以维持，电流则通过寄生体损耗破坏力线圈的运动，产生电动势反向而产生，动生电动势通过 Ohm 定律在导体中电流 $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ ，该电流通过 Ampere 定律 $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}$ 产生磁场，磁场通过 Faraday 定律产生电动势 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ，同时有 Lorentz 力 $\vec{j} \times \vec{B}$ ，抵制寄生体流动



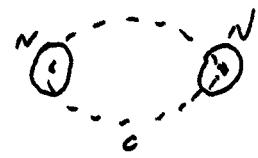
过程③, ④ 为产生减速电流

③ (动地势), ④ (减地势) 试看增加电流

2. 对于发电机 寄生 i 有运动 v, 小时候磁场 ii. 通过某些下同力维持运动 v

Ohm's Law in the form $\vec{i}_p = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ may be integrated around the closed line of force (c) through the neutral points (N) to give

$$\oint_c \vec{i}_p \cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_c \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$



$d\vec{l}$ 为 c 上的切线

$\vec{j} = q^0$ 分量 与 $d\vec{l}$ 平行, s 为 c 上的曲率半径.

$$\oint_c \vec{i}_p \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{v} \times \vec{E} \cdot ds + \oint_c \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

从 s 到 c 从 c 到 s 从 c 到 c

$$\vec{B}'' \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{B} \perp \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \oint_c \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

因为 $\vec{d}\vec{l} \perp \vec{v} \times \vec{B}$

根据高斯磁感应通量定理 $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$, 在 N 处 $B_p = 0$, \therefore 在 B 为 q^0 , 平行于 $d\vec{l}$ 为零
所以此式左边=0, 均为零. 但此 i_p 在 N 处不等于零. 即 $\oint \vec{i}_p \cdot d\vec{l} = 0$
不能满足. 所以此磁场不可逆且非对称的. 因此发电机不能正常
工作. 对于后方将有详细机.

2.8.2 Taylor-Proudman 定理

理想导电等离子体, 其中填充一个均匀的磁场 \vec{B}_0 , 沿壁的慢速流动必逆流而上且沿 \vec{B}_0 方向不会改变.

证: 因为理想导电流体 $\eta_m = 0$. 进一步对方程 $\nabla \times \vec{v} = 0$
 $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$ (2.63)

连续性方程变为

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.64)$$

考虑以均匀 (密度为 ρ_0). 及静止状态 ($\vec{v}_0 = 0$) \therefore 等离子体一小偏移

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

下不为零表示平衡速度, v_1 为扰动量. 代入方程(2.63), (2.64)

$$(2.64) \text{ 式 等于 } \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0 \quad (2.65)$$

$$(2.63) \text{ 式 等于 } \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) = 0$$

$$\nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) = \vec{V}_1 (\nabla \cdot \vec{B}_0) - \vec{B}_0 (\nabla \cdot \vec{V}_1) + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0$$

$\therefore P_0$ 为常数, 从(2.65) 式可得 $\nabla \cdot \vec{V}_1 = 0$, 即 \vec{B}_0 为均匀磁场. 于是有

$$\nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 = 0$$

可见 \vec{V}_1 与 \vec{B}_0 方向不会改变.

设 $\vec{V}_1 = \vec{V}_\perp + \vec{V}_\parallel$ (\perp, \parallel 分别垂直于 \vec{B}_0 方向), 则有

$$(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_\perp = 0, \quad (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_\parallel = 0 \quad \text{即 } \vec{V}_\perp, \vec{V}_\parallel \text{ 都与 } \vec{B}_0 \text{ 方向改变.}$$

\vec{V}_1 一并视为已改变.

2.8.3 Ferraro 定律

定理: 平面对称的磁场和流动, 流速场 (柱坐标中为 $\frac{V_\theta}{R}$) 和磁力线方向是常量.

对于理想导电的等离子体 $\eta = 0$, 因电子束缚运动 $\vec{V} = V_\phi(R, \theta) \hat{\theta}$ 为特例, 证明就很简单: 平面对称的磁场可表达为

$$\vec{B} = B_R(R, \theta) \hat{R} + B_\theta(R, \theta) \hat{\theta} \quad \text{(即由平面对称, } \vec{B} \text{ 与 } \hat{R} \text{ 垂直, } \vec{B} \text{ 分量为零)}$$

于是 $\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) = 0$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) &= \vec{V} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{V}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B} \\ &= - \vec{B} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} V_\phi(R, \theta) \right] + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V} - V_\phi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{B} \\ &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V} = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{V} = V_\phi \hat{\theta} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V} = (\vec{B} \cdot \nabla) (\vec{\omega} \times \vec{R}) = (B_R \frac{\partial}{\partial R} + B_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}) (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

$$= B_R \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial R} \times \vec{R} + B_R \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial R} + B_\theta \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \theta} \times \vec{R} + B_\theta \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta}$$

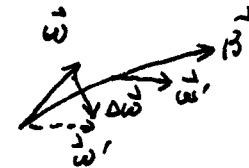
$$= [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{\omega}] \times \vec{R} + B_R \vec{\omega} \times \vec{R} = 0$$

左边第一次为 $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega}$ 方向的方向导数

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega}$$

运动单位矢量 $\hat{b} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} = \vec{B} \left(\cos \alpha \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z} \right)$$



$$d\vec{\omega} \rightarrow \text{方向不平行 } \vec{\omega}$$

-相反

$$\therefore [(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}] \times \vec{R} - \vec{R} \times (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} \neq 0$$

$$\therefore [(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}] \times \vec{R} = 0 \quad (\vec{B} \cdot \vec{\nabla} v = 2 \text{ 分别为零})$$

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - \vec{R} \times \vec{\omega} \neq 0$$

$$\therefore (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = 0$$

$$V_p = \omega R \quad \vec{\omega} = \frac{V_p}{R} \vec{r}$$

由上式可知角速度 $\vec{\omega}$ 与 \vec{B} 方向不共，即 $\frac{V_p}{R}$ 与 \vec{B} 方向不共。

2.8.4 维里(123)定理 (Virial theorem)

$$\text{运动方程 } \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g}$$

式中 \vec{j} 可以引为势和力 $\vec{g} = -\nabla \phi$.

运动方程和等高条件下均成立. 方程已表示 \vec{r} (不积)
 对等高体积积分. 描述力学机械能之间的关系.
 为了等高体积积分. 本节叙述 Virial 定理. 动量进行积分
 得到关系 \vec{r} , 从坐标系原点出发. 关系运动方程左边. 对体积积分

$$\begin{aligned} \int \rho \vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dV &= \int \rho \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{v}) dV - \int \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dV \\ &= \int \rho \frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}) dV - \int \rho V^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \int \rho \frac{d^2 r^2}{dt^2} dV - 2T \end{aligned} \quad (2.8.4-1)$$

$$\text{式中 } T = \frac{1}{2} \int \rho V^2 dV$$

$$\text{根据式} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho r^2 d\zeta = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \int \rho r^2 d\zeta \right] = \frac{d}{dt} \left[\int \frac{dP}{dt} r^2 d\zeta + \int P \cdot \vec{r} \cdot \frac{dr}{dt} d\zeta \right. \\ \left. + \int \rho r^2 \vec{r} \cdot \vec{v} d\zeta \right]$$

$$\text{式中 } \frac{d}{dt} (P d\zeta) = \vec{r} \cdot \vec{v} d\zeta$$

利用连续性方程 $\frac{dP}{dt} + P \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$. (上式中 $\frac{d}{dt}$ 对 $\frac{P}{dt}$) 上左两边界
- 三次为零

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho r^2 d\zeta = \frac{d}{dt} \int \rho \frac{dr^2}{dt} d\zeta = \int \frac{dP}{dt} \frac{dr^2}{dt} d\zeta + \int \rho \frac{d^2 r^2}{dt^2} d\zeta + \int \rho \frac{dr^2}{dt} \vec{r} \cdot \vec{v} d\zeta \\ = \int \rho \frac{d^2 r^2}{dt^2} d\zeta \quad (2.8.4-2)$$

(又一次利用了连续性方程)

将(2.8.4-2), (2.8.4-1)

$$\int \rho \vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} d\zeta = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho r^2 d\zeta - 2T$$

全质量守恒系, 有关的运动质量 $I = \int \rho r^2 d\zeta$

$$\int \rho \vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} d\zeta = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2T \quad (2.8.4-3)$$

运动方程在边界 - 一次可以写成

$$-\nabla P + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\nabla (P + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2) + \nabla \cdot (\frac{1}{\mu} \vec{B} \vec{B}) \quad (2.8.4-4)$$

质量守恒方程式在边界一次, 且 T 体积分部分

$$-\int \vec{r} \cdot \nabla (P + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2) d\zeta = -\int \nabla \cdot [\vec{r} (P + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2)] d\zeta + \int (P + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2) \nabla \cdot \vec{r} d\zeta \\ = -\int (P + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2) \vec{r} \cdot d\vec{s} + 3 \int P d\zeta + \frac{3}{2\mu} \int \vec{B} \vec{B} d\zeta \\ = -\int (P + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2) \vec{r} \cdot d\vec{s} + 3(Y-1) \int \frac{P}{Y-1} d\zeta + \frac{3}{2\mu} \int \vec{B} \vec{B} d\zeta \quad (2.8.4-5)$$

由(2.8.4-4)式在边界三次, 有关的平衡力和运动

$$\frac{1}{\mu} \int \vec{r} \cdot \nabla (\vec{B} \vec{B}) d\tau = \frac{1}{\mu} \int \nabla \cdot [\vec{B} (\vec{B})] \cdot \vec{r} d\tau - \frac{1}{\mu} \int \vec{B} \vec{B} : \nabla \vec{r} d\tau$$

$$\nabla \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} = \vec{I} \quad (\text{单位质量})$$

$$\text{上式} = \frac{1}{\mu} \int (\vec{B} \vec{B} \cdot \vec{r}) \cdot d\vec{s} - \frac{1}{\mu} \int \vec{B} \vec{B} : \vec{I} d\tau$$

$$\vec{B} \vec{B} : \vec{I} = \text{trace}(\vec{B} \vec{B}) = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = B^2$$

$$\text{上式} = \frac{1}{\mu} \int (\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{B} \cdot d\vec{s} - \frac{1}{\mu} \int B^2 d\tau \quad (2.8.4-6)$$

运动方程左边第3项写成 $\rho \vec{g} = -\rho \nabla \bar{p}$

$W = - \int \rho \vec{r} \cdot \nabla \bar{p} d\tau$ 称之为 玄劳修斯能 (virial of Clausius)
量纲是力乘距离 (J) 或 energy-like 量。因此可用系统总
势能表示。如果计算总势能时可忽略不计曲面 S (包围体
积, V 的面) 外的任何质量, W 就等于系统总动力能

$$W = - \sum_{j < k} m_j \vec{r}_j \cdot \sum_k \frac{G m_k (\vec{r}_j - \vec{r}_k)}{|(\vec{r}_j - \vec{r}_k)|^3}$$

下标 j 是对系统内所有质量求和, k 是对所有质量 m_j 引力作用的质量
求和, 在计算中, \vec{r}_j 相互作用被订正了次。
下标 j 和 k 互换时

$$\therefore W = -\frac{1}{2} \left[\sum_{j < k} m_j \vec{r}_j \cdot \sum_k \frac{G m_k (\vec{r}_j - \vec{r}_k)}{|(\vec{r}_j - \vec{r}_k)|^3} + \sum_{k < j} m_k \vec{r}_k \cdot \sum_j \frac{G m_j (\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|(\vec{r}_k - \vec{r}_j)|^3} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j < k} \frac{\sum G m_j m_k (\vec{r}_j - \vec{r}_k \cdot \vec{r}_k + \vec{r}_k - \vec{r}_j \cdot \vec{r}_j)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j < k} \sum G m_j m_k \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_k)^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j < k} \sum G m_j m_k$$

$$W = -\frac{1}{2} G \int \rho(\vec{r}) \int \frac{\rho(\vec{r}')}{{|\vec{r}-\vec{r}'|}} d\vec{r} d\vec{r}'$$

$$= -\frac{1}{2} G \iint \rho(\vec{r}, \rho(\vec{r})) |\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} d\vec{r}' d\vec{r} \quad (2.8.4-7)$$

整理得 (2.8.4-3) 与 (2.8.4-7) 相同

$$\frac{1}{2} \frac{D^2 I}{Dt^2} = 2T + 3(Y-1)U + M + W + S \quad (2.66)$$

$$\text{其中 } I = \int \rho \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad \text{转动惯量}$$

$$T = \int \frac{1}{2} \rho v^2 d\vec{r} \quad \text{动能}$$

$$U = \int \frac{P}{Y-1} d\vec{r} \quad \text{内能}$$

$$M = \int \frac{1}{\rho \mu} B^2 d\vec{r} \quad \text{磁能}$$

$$W = -\frac{1}{2} G \iint \rho(\vec{r}, \rho(\vec{r})) |\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} d\vec{r}' d\vec{r} \quad \text{引力能}$$

$$S = \frac{1}{\mu} \int_S (\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{B} \cdot d\vec{s} - \int_S (P + \frac{1}{\mu} B^2) \vec{r} \cdot d\vec{s} \quad \text{表面功热源}$$

(2.66) 式左边 W 必定为负, S 经常为负. 仅有三次, 即系统不可逆地处于平衡态 ($\frac{D^2 I}{Dt^2} = 0$), 或者处于减速状态 ($\frac{D^2 I}{Dt^2} < 0$)

当系统处于平衡态, 或者处于逆流, X 方程的时间平均值 (2.66) 也应该为零.

$$2\langle T \rangle + 3(Y-1)\langle U \rangle + \langle M \rangle + \langle W \rangle + \langle S \rangle = 0$$

在元胞中 (假设系统应用一维时间系综平均代替时间平均), 即“系统中的等价热力学” (ergodic). 对于由大量粒子组成的系统, 这种替代是合理的. 但是对于仅有几个组成部分的系统, 往往不准确.

2.9. 磁通量行为的总结

磁通量基本有三种：磁通量和电流片。为了研究它们的性质，常把它们看作孤立的实体。不过应该记得的是，实际上它们是互连的，而且周围磁场有密切的相互作用。

磁通量最重要的例子可能是太阳黑子，地球上的一大磁通量穿出太阳表面。另一个例子便是爆发的暗流，近年来才发现再次激发对磁通量性质的研究的兴趣。一是沿着越来越猛烈的边界强化磁场；二是充满太阳系外层的大气冕。

2.9.1 定义

磁力线即线上任一点的切线平行于 \vec{B} 的方向。因此在直角坐标系中磁力线就是下面方程的解，对于二维问题

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x}$$

2.9.2 三维问题

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$$

对于柱坐标和球坐标，磁力线方程分别为

$$\frac{dR}{B_R} = \frac{R d\phi}{B_\phi} = \frac{dz}{B_z} ; \quad \frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{r \sin \theta d\phi}{B_\phi}$$

磁通管是由磁力线束围成的体积，其截面是简单的封闭曲线

(图 2.9)

磁通管的强度 F 可定义为穿过

截面 S 的通量 $F = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ (2.67)

$d\vec{S}$ 取 \vec{B} 的方向，所以 F 常为正。

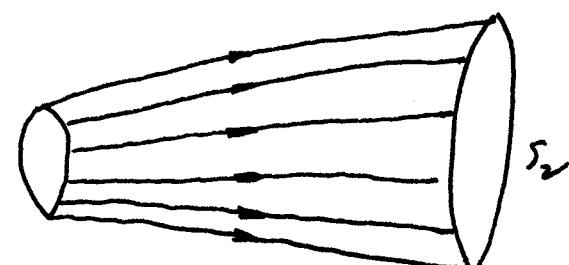


Fig. 2.9

2.9.2 - 磁通量.

1. 沿磁通管道的长度方向, 磁通量的强度(由(2.67)式定义)
保持不变.

参见图2.9. 对于包围体积 V 的封闭面 S , 由(2.67)式的积分

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

对侧面面积分, 因为 $\vec{B} \perp d\vec{s}$, 所以“ $=0$.

由 $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV$, 又 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

得 $\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s}$ (S_1 和 S_2 的法线方向相反)

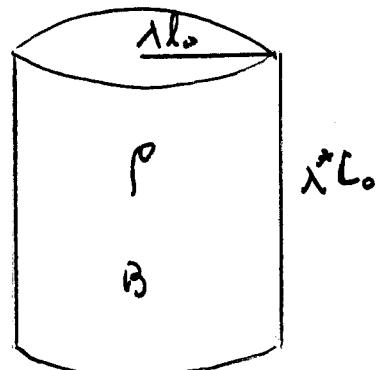
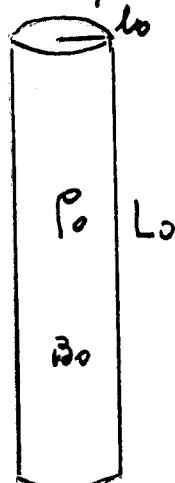
换言之, 磁通量强度 $F = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$ 沿长度方向保持不变.

2. 当磁通量增加时, 平均场强增加. 但不时均场强减小.

可以利用通过管子的平均场强来改写(2.67)式, $F = \bar{B}A$. A 是磁通管的截面积. 沿磁通管前进, 截面积 A 变小时, \bar{B} 增加. 反之亦然. 磁场强的区域磁场线密集成束, 弱的区域磁场线分散.

3. 磁通管的压缩, 使 ρ 和 λ 必须同时增加

考虑柱状磁通管, 只以 ρ_0 和 λ_0 变成 $\lambda^* \rho_0$ 和 $\lambda^* \lambda_0$ (由2.10)



由2.10
磁通管场强 $B_0 \rightarrow \bar{B}$
等高体密度 $\rho_0 \rightarrow \rho$
及压缩因子 λ_0, λ^*

初始密度和磁场强度为均匀 P_0, B_0 , 磁场中的运动如于流, 流状態因應重力有

$$\rho \pi (\lambda l_0)^2 (\lambda^* L_0) = P_0 \pi l_0^2 L_0$$

$$\text{发生变化后的密度 } \rho = \frac{P_0}{\lambda^2 \lambda^*} \quad (2.69)$$

$$\text{磁通量的密度 } B \pi (\lambda l_0)^2 = B_0 \pi l_0^2$$

$$\text{变化后的磁场强度 } B = \frac{B_0}{\lambda^2} \quad (2.70)$$

因此假设磁通管的长度保持不变, 即 $\lambda^* = 1$, 则有 $\frac{B}{P} (= \frac{B_0}{P_0}) = \text{const}$. 横向的压缩 ($\lambda < 1$) 令以同样比例增加 B 和 P . 横向的拉伸, B 和 P 均减小. 上述结论仅当等离子体的长度不变时成立. 因此该结论不适用于光球. 观测到的是磁场强度的增加. 这归因于纵的横向压缩. 因为等离子体可以从中通过, 是关流入或流出.

4. 没有压缩的情况下, 磁通管的伸长使磁场强度增强

假设等离子体不被压缩, 而且它的密度不变, 从 (2.69) 可知 $\lambda^2 \lambda^* = 1$ 代入 (2.70) 式, 得 $B = \lambda^* B_0$. 因而等离子体的伸长 ($\lambda^* > 1$) 磁场相应增强. 磁通管缩短 B 就减弱. 磁通管长度的增加, 在太阳中是会发生的. 例如对流层中的剪切运动或对流层旋转.

5. 当柱状磁通管处于磁流体静力学平衡时, 等离子体压强 $P(R)$ 和磁场强度分量 $B_{\phi}(R), B_z(R)$ 之间有关係

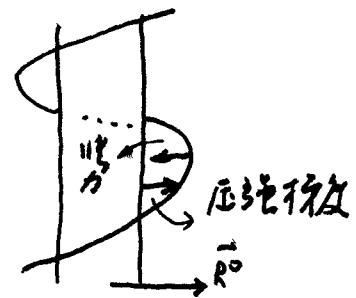
$$0 = -\nabla P + \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \times \vec{B} \quad \begin{aligned} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} &= (B_\phi \hat{\theta} + B_z \hat{\delta}) \cdot \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \hat{\theta} + \frac{2}{R^2} \hat{\delta} \right) \\ &= \frac{B_\phi^2}{R} (-R) \end{aligned}$$

$$P, B \propto R \text{ 的函数, (力的方向指向外法线方向), } \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} \text{ 有一部分斜 (有 } B_{\phi} \text{ 方向, 现代讨论是外法线 (即 } B_{\phi} \text{ 方向))}$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{\mu R} [\frac{1}{\mu} (B_\phi^2 + B_z^2)] + \frac{1}{\mu R} B_\phi^2 \quad \text{无磁场方向 (即 } B_{\phi} \text{ 方向)}$$

上式在已知三次通过下述逐步推导. $\vec{B} = (0, B_\phi(R), B_\theta(R))$

$$\begin{aligned}\text{柱坐标下: } (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} &= \left[(B_\phi \hat{\phi}^0 + B_\theta \hat{\theta}^0) \cdot \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}^0 + \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta}^0 \right) \right] (B_\phi \hat{\phi}^0 + B_\theta \hat{\theta}^0) \\ &= \left(\frac{B_\phi}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} + B_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (B_\phi \hat{\phi}^0 + B_\theta \hat{\theta}^0) \\ &= \frac{\vec{B}_\theta}{R} \frac{d\vec{B}}{d\phi} \\ &= \frac{\vec{B}_\theta}{R} (-\vec{R})\end{aligned}$$



左边第3项代表磁压力, 该项随 $\frac{1}{R} \vec{B}^2$ 随 R 增加而减小, 说明梯度方向向外向内, 从磁压力的作用方向向外. 第3项为张力, 方向为 $-\vec{R}$ 方向, 由磁力线绕转的侧面分量 B_θ 引起. 磁力线绕转以长为 L 的窄子-端至另一端的绕转为 $\bar{\pi}(R) = \frac{2L B_\theta(R)}{R B_\phi(R)}$

对 $\bar{\pi}(R)$ 作进一步说明.

$$\text{柱坐标下, 磁力线方程为 } \frac{R d\phi}{B_\phi} = \frac{d\theta}{B_\theta}$$

现把磁力线绕北半球表面, 所以 $dR = 0$, 一根磁力线绕窄子的半周 (长为 $2L$) 从一端至另一端. 绕转的总角数:

$$\bar{\pi} = \int d\phi = \int_0^{2L} \frac{1}{R} \frac{B_\phi}{B_\theta} d\theta$$

B_ϕ, B_θ 仅是 R 的函数. 与半径 R 无关

$$\bar{\pi}(R) = \frac{2L B_\phi(R)}{R B_\theta(R)}$$

$\frac{4\pi L}{\bar{\pi}}$ 即磁力线的匝数 (磁力线绕轴一圈). 称单匝平均匝数

$$\text{记螺旋升 h} = \frac{4\pi L}{\bar{\pi}} = \frac{4\pi L R B_\theta(R)}{2L B_\phi(R)} = 2\pi R \frac{B_\theta(R)}{B_\phi(R)}$$

* 实际上 $|B_\theta| = h \frac{\pi}{2\pi}$. 式中 h 为螺旋 (pitch), 中为平均 $|B_\theta|$ 为磁力线的平均长度

螺旋长 $l = \frac{2\pi B_2}{\phi}$, 相位差 $\Delta\phi = |B_\phi|$ $\phi = \frac{l}{R} |B_\phi|$, 代入上式得
由 \hookrightarrow 长度

$$正式 l = 2\pi R \frac{|B_2|}{|B_\phi|}$$

* (3) 假设 $l=2L$, $m = \frac{2L}{h}$ 即为螺距的圈数, 则有: $l=2L$, $m=1$
螺旋长 = (3) 相长, 2.1 变化 (卷 - 伸). 当 $l < 2L$, $m > 1$, 1.1 多于 - (卷).

$$m = \frac{2L}{h} = \frac{2L}{\frac{4\pi L}{\bar{\pi}}} = \frac{\bar{\pi}}{2\pi}, \text{ 当 } l=2L \text{ 时, } m=1, \text{ 即 } \bar{\pi}=2\pi,$$

$$l < 2L \text{ 时, } m > 1, \text{ 则 } \bar{\pi} > 2\pi.$$

至是螺距的范围, 及螺距的度量.

b. 两端自由的柱状磁通管，处于无场平衡。有恒定：
i. 杆状，设 $R = a$ 磁场 $B(a)$ 为圆通化， \vec{B} 方向 \vec{B}_ϕ 与 \vec{B} 的
方值 $\langle \vec{B}_\phi \rangle = B_\phi^2 a$ ，相对于 \vec{B} 而言，是一个不变量。

记：本讲稿 P. 89，已求得磁流体静力学平衡条件

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{\mu R} (\vec{B}_\phi^2 + \vec{B}_\theta^2) \right] + \frac{1}{\mu R} \vec{B}_\phi^2 \quad (\text{无场时 } \vec{B} \times \vec{B} = 0)$$

不计流体压力时，有无场平衡方程：

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{1}{\mu R} (\vec{B}_\phi^2 + \vec{B}_\theta^2) \right) + \frac{1}{\mu R} \vec{B}_\phi^2 = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{设 } \vec{B} = f(R), \quad (3.23) \quad \text{式中 } \vec{B} = \vec{B}_\phi + \vec{B}_\theta$$

[杆内压强 = 杆外压强，有平衡时
 $P + \frac{1}{\mu R} \vec{B}^2 = f'$ ，无场 $P = 0$. $\therefore \vec{B}^2 = f$
可以看成 f 的物理意义]

$$\text{代入上式，可得} \quad \vec{B}_\phi^2 = -\frac{1}{2} R \frac{df}{dR} \quad (3.24)$$

考虑有限半径 a ，扭转对无场的磁通管的影响 (Twist)

当扭转时，磁场保持杆状对称，

即 $\vec{B} = f(R)$ ，扭转 $2\pi/a$ 向轴向的 \vec{B}_θ 的方值 $\langle \vec{B}_\theta^2 \rangle$ 变。

$$\therefore \langle \vec{B}_\theta^2 \rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \vec{B}_\theta^2 \cdot 2\pi R dR$$

$$= \frac{2}{a^2} \int_0^a R \vec{B}_\theta^2 dR$$

$$= \frac{2}{\alpha^2} \int_0^a R (B_z^2 - B_\phi^2) dR$$

(3.23), (3.24) 式代入

$$\text{上式} = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^a (Rf + \frac{1}{2} R^2 \frac{df}{dR}) dR$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^a \frac{d}{dR} (R^2 f) dR$$

$$= f(a)$$

或根据(3.23)式 $\langle B_z^2 \rangle = B^2(a)$. 相对于流场而言是一个不变量
事实上平均场值 $\langle B_z^2 \rangle$ 在平均过程中, 其中有变化. 因为流场
平均后, 变化为零. (在管子壁通量上)

当磁通管扩小时, B_z 的平均值变大, 而且常大于 $B(a)$, 因为一
部分磁场转为 B_ϕ .

ii, 伸缩磁通管扩时, 轴向 (B_z) 和侧向 (B_ϕ) 磁通量保持不变.
管子的扭曲就越来越厉害. (圆数增加)

因为磁通管扩时, 与方向磁通量不变, 则 B_z 变大. $B^2 = B_z^2 + B_\phi^2$
总磁通不变. B_ϕ 增大. 由式 $\bar{B}_\phi = \frac{2L B_\phi(r)}{R B_z(R)}$. R 增大, 即流
管的圆数要增加.

首先考虑 中方向的轴向轴向的压力 (与 B_z 有关), 磁
通管不再类似于柱状形, 而是螺旋形. (假设不稳定性还没有开始)
iii. 设磁通管只有一端扩时, 轴向磁通量及侧向压力都保持固定.
流管的磁通就转移到扩端. 也就是说磁通管的其余
部分, 这部分 双线圈的磁通.

与方向磁通量保持不变, 因而扩时, B_ϕ 增大 (参考 ii. 的情况)
 R 增大.

7. 二端自由, 扭转的磁通管是螺旋扭折不稳定的 (7.5; 3章)

根据 Kruskal-Shafranov-Taylor 判据, 当轴向增长 $(-\frac{2\pi}{k})$

满足 $-k \leq \pi$ 时, 所有螺旋扭折扰动是不稳定的。即该理论只适用于一端固定的不稳定性。但是, 要使磁通管稳定, 增加扭转角 θ 时, 不稳定

螺旋的无扭转不稳定性。变成扭折不稳定的前, 扭转角度 $\theta > 2.6\pi$

但是磁通管两端固定在地球上, K-S 的分析将不再适用, 因为地球的半径远大于 2.6π 。

(requires a twist (θ) larger than 2.6π before it becomes kink unstable)

离轴越远等离子体压力越大, 也越不稳定。

8. 均匀等离子体中, 仅有各向同性模式, 当它们在磁通管中传播时, 由几何形状的影响而改变。

扭折 (torsional) \rightarrow Alfvén 速度传播 (4.3章)

磁声管波 (magnetoacoustic tube waves) 在很短的距离内,

慢 (慢模) 表面波速度大于管波速度 C_T (8.7.4章), C_T 比小于

声速也大于 Alfvén 速度 $C_A = \frac{C_s^2 V_A^2}{C_s^2 + V_A^2}$

慢 (扭折 kink) 表面波速为 V_A , 慢 (扭折和慢模) 表面波速为 C_T , 快 (压缩或表面波) 波速为音速。

对于斜平缓处, 有 Alfvén 或者会切关 (cusp) 现象, 波可能被吸收, 从而加热等离子体 (6.4.3章)

2.9.3 太阳大气中的磁通管。

1. 对流运动会撕扯 \rightarrow 对流的喷发的内部磁场, 使磁场集中, 形成纵向磁绳, 其中的磁场强度超过地球上。在喷发带均匀分布的磁场强度, 典型值为几百高斯 (8.1.3章)

Fig. 8.4

2. 处于净引力作用而分离的介稳态的水平磁通管，受到磁浮力的作用，有上升的趋势。像磁通管的尺寸固定，相隔距离大于或者等于（8.2.1节），则磁通管处于平衡态，立柱状。磁浮力也能使一个平衡态的磁场不稳定，如果磁场强度足够大，磁通管会很快地上升到上部（8.2.3节）。

3. 太阳黑子可能阶段论，因为对流层对阻止或促进磁浮力（overstable）或者因为是光球下面的下层气流。

4. 一个太阳黑子可能是由一个处于平衡态的单独的大磁通管构成，或者由一束小磁通管构成。这些小磁通管有助于磁浮力和下层气流汇集一起（8.4.1节）

5. 如果这个黑子模型，它的直径随深度增加而单调减小，只要它的磁通量过大（ 10^{19} wb (10^{19} Mx) 是磁流体力学稳定的。对于细磁通管，磁通量小于上述值，会失去平衡不稳定性（8.4.2节）

6. 黑子的形成可能是由于中等强度的磁场阻止了对流导致等离子冷却下沉，或者是因为个别磁通管借助于流体力学的吸引和气体运动的趋动而集合（8.6.1节）。黑子的衰减可以用与之相关的系数（8.6.2节）

7. 像几百毫升的静止光球磁通管处于不稳定性条件下，有可能形成强磁通管，因为不稳定性引起等离子体向下流动和磁场的聚合达到一个新的平衡态。典型的场强为 1-2 KG (8.7.2节)

8. 位于光球下，处于静力学和热平衡的细磁通管随深度增加而变粗（8.7.1节）。像磁通管的温度比周围环境低，超过了水滴后，管内物质被排空。（参考讲稿 P.115 在一年后修改）

9. 磁场的静力学平衡一般由下式表达

$$\vec{j} \times \vec{B} - \nabla P + \rho \vec{g} = 0$$

在流动区，磁场近似为无场， \vec{B} 满足 $\vec{j} \times \vec{B} = 0$ 。沿着每根磁力线的等高线传播不可忽略 $-\nabla P + \rho \vec{g} = 0$ 及修正方程得到 (6.5.1 部)

10. 引入压强差可驱动电流通量的运动，产生相反的相反流，向下和向上
的流动则有多种方法使之产生。(6.5.2 部)

2.10 电流片行为的等高

^{磁场的}
太阳在其大部分区域，^{平均}等长尺寸是相当大的，典型值为 $10000 \text{ km}^3 / 10000 \text{ km}^2$ 。
因此相应的电流密度 $j \approx \frac{B}{\mu L}$ (2.71)

^{但是}，我们相信可能有非电流片，厚度远小于 L ，相应的电流密度
远大于 (2.71) 公式值。电流片可能有一个暂稳过程，从中释放的
能量可能极大地加热以至 (6.4.4 部)。在暂稳过程中可能起重变作用
(第 10 章)，可能使等高形成的地方 (11.1.3 部)，另外它们可能存在于
磁通管 (扭子) 在必须进行封闭场和开放场边界上溢出流的
边缘 (12.4.1) (Fig. 12.6.b1)

电流片可定义为二个等高平面区域间的流动 (non-propagating) 电流。
磁场与边界相切，粗略地可看作切向间距 (5.4.2 部) 也有穿越间
断的流动。场的切向分量大小和方向均为任意，只要总压强连续。

$$P_2 + \frac{1}{2\mu} B_2^2 = P_1 + \frac{1}{2\mu} B_1^2 \quad (2.72)$$

下标“1”和“2”分别表示电流片的二边。

该式即使对于弯曲的电流片也成立，因为磁场力不会产生额外的项。

i) 流动区内磁场很弱，因此电流片之外的等高面压强 (P_1, P_2) 可以忽略。
(2.72) 式于走端方电流片两侧的磁场强度必不一様，但方向可以
相似。 (第 2.11.a)

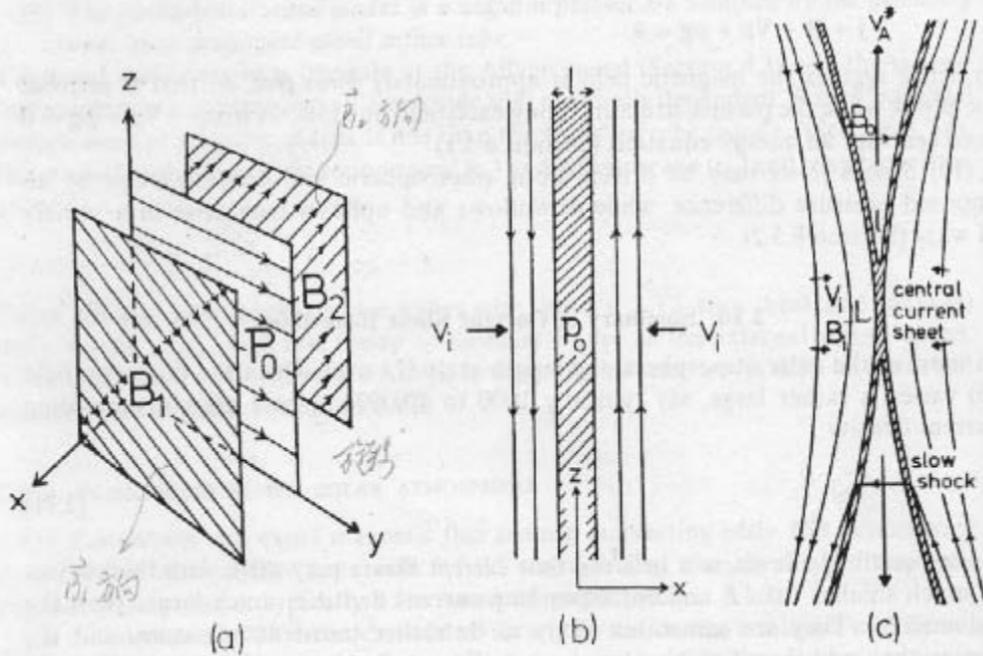
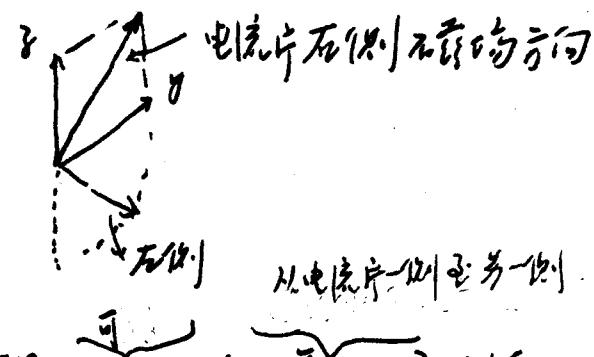
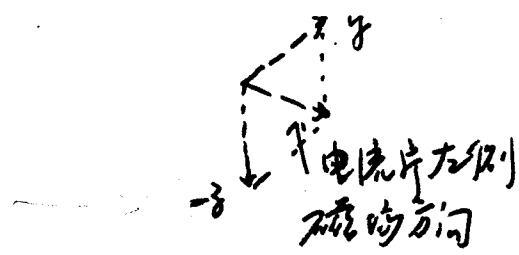


Fig. 2.11. (a) A current sheet in the yz plane across which the magnetic field rotates from B_1 to B_2 .
 (b) A section across a neutral current sheet, in the centre of which the magnetic field vanishes and the plasma pressure is p_0 . (c) The reconnection of magnetic field lines by their passage through a current sheet. The central sheet bifurcates into two pairs of slow shocks.

[half page]
 v. 13. 8. 2
 a. 27. 20

ii. 假定 x 轴垂直于电流片所在平面, y 轴把电流片二侧的磁场方向区间二大角分为二部分



电流片二侧磁场的 y 分量在区间内随 x 保持不变, B_y 反向.

电流片中心部分等高体压强增加, 未涉及磁场的耗散, 有一部分耗散换成热能. (电流片中心部分无磁场, B_{y1} (左- \rightarrow 方向倾斜) 应等于 B_{y2} (右- \rightarrow 方向倾斜))

$$P_0 = \frac{1}{2\mu} B_{y1}^2 = \frac{1}{2\mu} B_{y2}^2$$

特别是当 $B_y=0$ 时, 就是一个中性电流片. 中性片的中心部位, 磁场完全消失. 中性片二侧的磁场总反向的 (第 2.11 (b)) 研究很多的就是这种中性电流片

iii. 从间断面的角度看, 电流片很像激波, 间断面二侧理想磁流体力学方程组成立. 间断面的宽度及内部结构由扩散过程决定. 激波厚度的相似仅此而已. 电流片厚度像激波那样可以忽略, 它们倾向于扩散, 等高体则以 $A(t, x)$ 速度喷射出去.
从上端 (第 2.11 (c))

2.10.1 电流片的形成过程

有三种方法形成电流片

(1) X型中性夹附近区域的崩溃. (2.7 节) (例如第 2.8)

(2) 磁感应线部分高部分相互靠近, 它们之间的边界上将产生电流片. 如果一个复杂活动区磁场的演化或是磁场通量的突变可能会引发破裂 (10.2.1 节)

(3) 当静力学平衡差得不稳定时, 或者甚至不稳定性 (即非平衡态) 时. 电流片可能产生. 特别是在复杂的日冕运动场的流域是关

(包含太阳风的不稳定性)

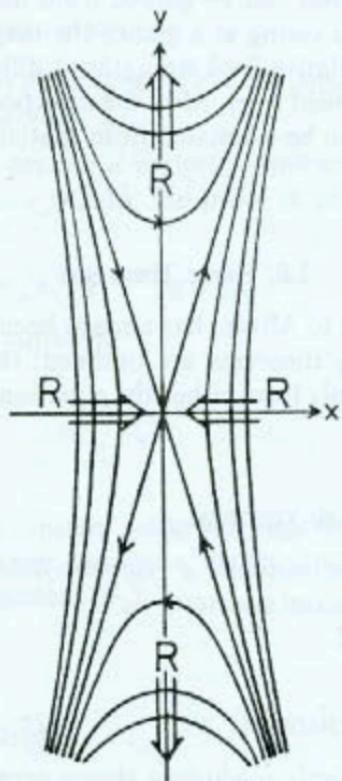


Fig. 2.8. The magnetic field lines near an X -type neutral point away from equilibrium with a uniform current.

移动时，日是磁场常数。随调节部运动的无力平衡，结果引起电流片迅速转向磁化，称为无极环耗散过程（6.4.4B节）
有磁生源发生

2.10.2 电流片的性质

- (1) 无流动时，电流片的扩散速度为 V_s ， η 是磁扩散率。磁场里没，磁能通过磁隙耗散转换成热能。（2.6.1节）
- (2) 电流片外面的区域是磁滞区。等离子体和磁通量一起以速度 V_s 向电流片运动，如果 $V_s < \eta$ ，电流片就冷却。如果 $V_s > \eta$ ，电流片就发热。 $V_s = \eta$ 就维持一个常数。
- (3) 电流片中心部位等离子体压力的增强是驱动物质流，以电流片端头的 Alfvén 速度 V_A 为界。Alfvén 速度由外磁场（电流片外）和内部物质密度（电流片内）决定。 $\frac{1}{\mu_0} B_{out}^2 = \frac{1}{2} \rho_{in} V_A^2$ ， $V_A^2 = B_{out}^2 / \mu_0 \rho_{in}$ ，电流片内产生磁重联（第 2.11.C），磁通量的物质，一定吸走。电流片中心是 X 型中性点。对于定界流动，跨过磁通量的速度保持不变（5.3 节）。即磁通量进入电流片的速度 $V_s B_i$ 等于离开的速度 V_A^* 。下标 “i” 分别表示输入和输出值。因此当流入速度大于 Alfvén 速度时，即 $V_s < V_A^*$ 外流的场强为

$$B_o = \frac{V_s}{V_A^*} B_i$$

外流场强 $B_o < B_i$ （流入电流片的场强）。电流片是一个重要的作用把磁能耗散为热能和流动能。

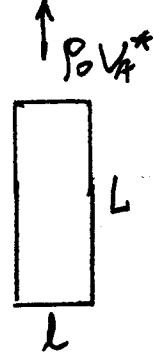
- (4) 增强流体力量通过从电流片端头向外传播
在定界流动中增强流速与定界流速相等。电流片的尺寸和形状

v_i : 逆流入速度, v_A^* : 逆高斯流速 (声速)

P_i : 流入等高线密度, P_0 为流线密度

$$\lambda = \frac{\eta}{v_i}, \quad L = \frac{P_0 v_A^*}{P_i v_i} \lambda \quad (\text{根据直角坐标系})$$

$P_i v_i$



在 $\frac{v_i}{v_A^*}$ 的范围内, 可以发生磁重联、电流片
以及 v_i 和 v_A^* 的交换。 v_i 有了一定大小, 介于 $0.01 V_{Ac}$ 和 $0.1 V_{Ac}$ 之间。
而且几乎不依赖于磁 Reynolds 数 (10^4 部)。 V_{Ac} 是高电流速
度外部的 Alfvén 速度。

(5) 考虑半实数的电流片, 单向磁滞 $B(x) \bar{g}^0$, 在 $x=0$ 处, 方向反转。

总压强 $P(x) + \frac{1}{2\rho} \vec{B} \cdot \vec{B} = \text{const.}$

这样的电流片可以发生撕裂模不稳定, 不稳定性时间常数 (增长率的倒数) 是 $(T_{A4})^{-1}$ 。 T_{A1} : 扩散时间, T_{A4} : Alfvén 波传播时间 (7.5.5 部)。在非线性增长中, 形状不规则的边界条件可以
发现准定解的磁重联, 或是生成 ~~撕裂~~ 的孔, 侵入时间引扩散。
形状不规则

第三章 磁流体静力学

3.1. 引言

$$\text{运动方程} \quad \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g}$$

左边的惯性项在下列条件下可忽略：流速远大于声速 $(\frac{\partial P}{\partial \rho})^{1/2}$ ，Alfvén速度 $(\frac{B_0}{\mu_0 \rho_0})^{1/2}$ 和自由落体速度 $(2gh_0)^{1/2}$ ，式中 h_0 为高度。

$$(h_0 \gg g t^2, \text{自由落体速度 } V = gt = g (\frac{2h_0}{g})^{1/2} = (2gh_0)^{1/2})$$

于是得到磁流体静力学平衡条件

$$0 = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (3.1)$$

本章将力求解取之方程化：

$$\left\{ \begin{array}{l} (3.1) \text{ 式} \\ \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \quad (3.2) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.3) \\ \rho = \frac{m_p}{k_B T} \quad (\text{状态方程}) \quad (3.4) \\ \text{质量方程} \end{array} \right.$$

假设引力在 $-\hat{z}$ 方向， s 为密度沿磁力线的距离，磁力线与 \vec{B} 方向夹角为 θ 。则 (3.1) 式，在 \vec{B} 方向的分量式为：

$$0 = -\frac{dp}{ds} - \rho g \cos \theta$$

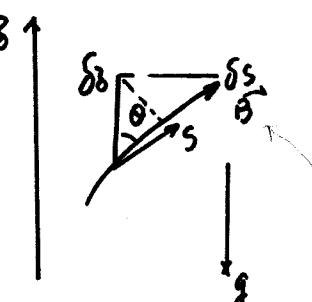
Lorentz 力为零 $\Rightarrow (\vec{j} \times \vec{B}) \perp \vec{B}$

$$\delta s \cos \theta = \delta z$$

$$0 = -\frac{dp}{dz} - \rho g \quad (3.5)$$

1. ρ 为一根磁力线上单位离子的密度

(3.4) 式中将 ρ 代入 (3.5)，积分



$$P = P_0 \exp\left(-\int_0^{\theta} \frac{1}{\lambda(\theta)} d\theta\right) \quad (3.6)$$

式中 P_0 为 $\theta=0$ 时的压强，即在磁力线上可以有 2010 的 P_0 值。

$$\lambda(\theta) = \frac{R_0 T(\theta)}{mg} \quad (= \frac{P}{P_0 g} = \frac{\tilde{R}}{\mu} \cdot \frac{T(\theta)}{g}) \quad (3.7)$$

$\lambda(\theta)$ 为常数。

$$\begin{aligned} & \text{(即 } \frac{\tilde{R}}{\mu} \text{ 为常数} \Rightarrow \text{ 式 3.1)} \\ & R = \frac{\tilde{R}}{\mu} \end{aligned}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{T_0}{T(\theta)} \exp\left(-\int_0^{\theta} \frac{1}{\lambda(\theta)} d\theta\right) \quad (3.8)$$

(状态方程 $P = P \frac{\tilde{R}}{\mu} T(\theta)$, $P_0 = P_0 \frac{\tilde{R}}{\mu} T_0$, 代入(3.6), 即可得(3.8)式)

(3.6)式表示磁力线向高处运动 (θ 变大), 压强减小, 压强减小的速率取决于密度均匀。密度均匀则由质量方程决定, 因此密度均匀的不均匀有关, 因为磁力线的不均匀有关, 从而对质量方程中的保守和加速度项都有影响。

密度的变化由(3.8)式表示, 当密度随高度增加, 密度的减小快于压强的减少。

$$P = \frac{P_0 T_0}{T(\theta)} \exp\left(-\int_0^{\theta} \frac{1}{\lambda(\theta)} d\theta\right) = P_0 \left(\frac{1}{\frac{\tilde{R}}{\mu} T(\theta)}\right) \exp\left(-\int_0^{\theta} \frac{1}{\lambda(\theta)} d\theta\right) = \frac{1}{\frac{\tilde{R}}{\mu} T(\theta)} P$$

相对于压强表达式, 分母多了一个随高度增加而增加的 $T(\theta)$, 但是当密度随高度增加而下降时, 密度的增减取决于 T^{-1} 的指数的比值。

当密度沿磁力线为均匀时, 入射声速, (3.6)式简化为

$$P = P_0 e^{-\frac{\theta}{\lambda}} \quad (3.9)$$

入射式中的 θ , 引力加速 g 高太高中性的距离而变, $g = g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$.

③ 平均速度的值。

$$g_0 \approx 74 \text{ m s}^{-2}, \xrightarrow{\text{从物理上讲, }} r_0 \approx 696 \text{ Mm} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}, \text{ 设 } \tilde{\mu} = 0.6 \text{ (平均分率)}$$

$$\text{平均速度 } m = \frac{\tilde{\mu}}{N}, \text{ 式中加权声速 } N = 6.023 \times 10^{23} \text{ (分子)}^{-1}$$

$$\text{可得不等式 } \Lambda = 50T \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 m$$

$$\text{则当 } T=10^4 \text{ K}, r \approx r_0, \Lambda \approx 500 \text{ km, 为 } T=10^6 \text{ K, } \Lambda = 5 \times 10^7 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 m.$$

(3.1) 式中首次, 考虑具体问题, 有两次可忽略, 13) 次:

i. 当速度《布了时, 与压强的梯度相匹. 31) 次可忽略

$$\because \text{速度} \ll \Lambda \text{ 时, 压强 } P = P_0 e^{-\frac{\lambda}{\Lambda}} \approx P_0 \text{ 近似为常数, } P_0 = \frac{P_0 k_B T}{m}$$

$$\Lambda \gg g, \frac{k_B T}{mg} \gg g, \frac{1}{g} \frac{k_B T}{m} \gg g \quad \text{即 } P_0 \gg \rho g$$

$$\text{ii. 当 } \beta = \frac{\gamma \mu P_0}{B_0} \ll 1 \text{ 时, } \because \text{ Lorentz 力远大于重力}. (3.1) \text{ 式简化为} \\ \vec{j} \times \vec{B} = 0 \quad (3.12)$$

这是无加场

iii. 当电流 $\vec{j} = 0$. 即为势场.

磁流体静力学又指出在长时间内的某种太阳风均匀地行进静止状态的平衡问题. 此法应用于太阳风子. 喷射的情况下, 太阳风是不稳定的. 但

\rightarrow (在 Alfvén 传播时间相匹. 该情况可作为近似处理.)

$$\sigma = -\frac{dp}{dz} - \rho g$$

(3.5)

3.2 磁场中的等高与等流线.

1, 当 $\beta \ll 1$, 磁场 ^{只对等高}_{影响} 为无场, 等高与等流线可通过求解方程 (3.5) 以及时变量方程 (包围区边和密度) 得到.

~~例如 Priest 和 Smith (1979) 提出的冕环 (Coronal arcade) 模型 (参见 3.8), 利用了无场时 (3.44).~~

对于等流过程, (速度为常数, 且每一根磁力线的远强为

$$P = P_0(x, z) e^{-\frac{z}{l}}$$

$(\because T = \text{const.}, l \text{ 可以积分})$

假设全局的远强 P_0 均匀 (即 x, z 均在无关), 我们处理的就是一个简单的平行流动问题. 磁场对于等高与等流线没有影响, 且对于持

定的磁場，若底面受到的應強，那麼沿著y軸的長度，應強會如何變化
呢？(第3.8題) $\beta < 0$)

2. $\beta > 1$ 或 $\beta < -1$. 磁場為垂直方向或水平方向

i. 純垂直磁場 $\vec{B} = B \hat{x}$ (無 y 元素)

(3.1) 式的 \hat{x} 分量，即為 (3.5) 式，但就為 (3.6) 式，底面應強 $P_0(x)$. 這裏
分別隨時間由磁力線而改變.

\hat{x} 分量：(3.1) 式中忽略 \vec{j} 力項

$$P = P_0 \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{\mu_0} dz\right)$$

$$P = P_0 \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{\mu_0} dz\right) \quad P = P_0(x)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} \\ &= -\nabla \left(P + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) + \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} \end{aligned}$$

$$\because \vec{B} = B \hat{x} \quad \therefore \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} = B \hat{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (B \hat{x}) = 0$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{1}{\mu_0} B^2\right)$$

$$P + \frac{1}{\mu_0} B^2 = f(x) \quad (3.13)$$

f(x) 表示對於呈一維的 x，應強隨深度 z 而變化.

(3.13) 式對 z 求導， $\frac{df}{dz} = \frac{df}{dx}$ (無 y 元素). 由 (3.5) 式

$$P = -\frac{1}{g} \frac{df}{dx} \quad g \text{ 只有 } x \text{ (即 } Y \text{) 有關.} \therefore P \text{ 也只與 } x \text{ 有關.}$$

而 P 是 x 的函數.

$$(\vec{B} = B \hat{x})$$

總結：對於 $\vec{B} = B \hat{x}$ ，考慮 P 也只與 x 有關. 由 (3) 磁場的 z 方向的變率 β ，
這個情況的 P 也只與 x 有關，即 - 次上是利用外應強不變 (8.4 頁)

另外，以 (3.13) 式可得， z 方向的應強，磁場較強處，應強反而降低
故此 (\because 磁場內外不同) (第 3.2)

ii. 純水平方向磁場 (無 y 元素) $\vec{B} = B \hat{y}$

$$\begin{aligned} (3.1) \text{ 式的 } \hat{x} \text{ 分量: } 0 &= (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \nabla \left(P + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) + \rho \vec{g} \\ &= B \hat{y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (B \hat{x}) - \nabla \left(P + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) + \rho \vec{g} \end{aligned}$$

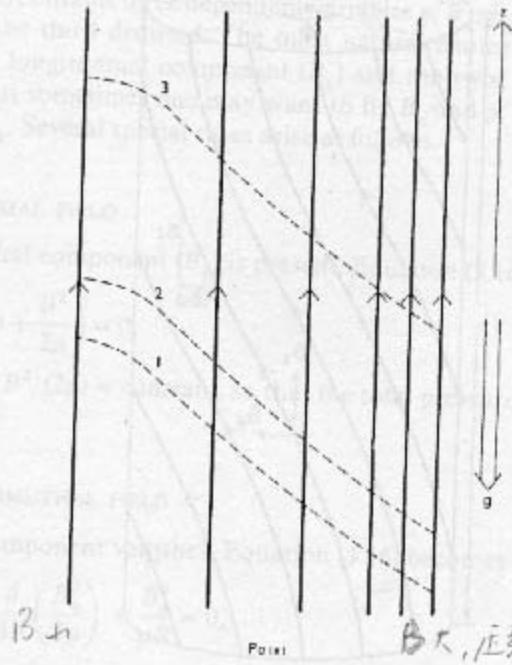


Fig. 3.2. For plasma situated in a vertical magnetic field, the isodensity contours are horizontal, while the constant-pressure contours (dashed) are inclined as shown, with the labels 1, 2, 3 indicating successively lower pressure values.

$$\hat{x} \text{ 分量: } 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ P = f(\beta) = P_0(x_0) e^{-\frac{\beta}{\lambda}} \quad (3.13-1)$$

压强 P 仅与 β 的函数

$$\hat{y} \text{ 分量: } 0 = -\frac{d}{d\beta} \left(P + \frac{1}{2\mu} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) - Pg \quad (3.13-2)$$

$\because (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} = 0$. 磁场力为零 \Rightarrow 垂直于 \vec{B} 方向的 Lorentz 力为零，即为磁感应强度 B 和温度 T 在 β 方向上为常数，从 $(3.13-1)$ 式可知 P 为 β 的函数，沿磁场线 (x) 方向为常数。

假设 B 和 T 为已知函数，利用 $P = \frac{P_m}{k_B T}$ 代入 $(3.13-2)$ 式积分。

求 P . 作为特例，设 T 为均匀，根据后一章定义 $(3.13-2)$ 式可得：

$$0 = -\frac{d}{d\beta} \left(P + \frac{1}{2\mu} B^2 \right) - \frac{P}{\lambda}$$

现在求 P .

$$\frac{dP}{d\beta} + \frac{1}{\lambda} P = -\frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{2\mu} B^2 \right)$$

$\because B$ 为已知函数，上式为一阶常微分方程，解之得：

$$y' + R(x)y = Q(x)$$

$$y' = \frac{dP}{d\beta}, \quad R(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad Q(x) = -\frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{2\mu} B^2 \right)$$

$$\text{解得: } y e^{\int R dx} = \int Q e^{\int R dx} dx + C$$

$$\therefore P e^{\int_0^\beta \frac{1}{\lambda} d\beta} = \int_0^\beta \left[-\frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{2\mu} B^2 \right) \right] e^{\int_0^\beta \frac{1}{\lambda} d\beta} d\beta + C$$

$$\lambda = \frac{k_B T(\beta)}{mg} \quad \text{已设 } T(\beta) \text{ 为常数.} \therefore \lambda \text{ 为常数}$$

$$P e^{\frac{\beta}{\lambda}} = \int_0^\beta \left[-\frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{2\mu} B^2 \right) \right] e^{\frac{\beta}{\lambda}} d\beta + C$$

当 $\beta=0$ 时, $P=P_0$

$$\therefore P = [P_0 - \int_0^z e^{\frac{3}{\lambda_B} \frac{d}{dz} (\frac{1}{\gamma \mu} B^2) dz}] e^{-\frac{3}{\lambda_B}}$$

反映了磁压随高度(z)变化, 对音速与气压强度的影响.

当声速和 Alfvén 速度均为均匀时, 平衡方程为:

$$0 = -\frac{d}{dz} (P + \frac{1}{\gamma \mu} B^2) - \rho g$$

$$\frac{d(P + \frac{1}{\gamma \mu} B^2)}{P + \frac{1}{\gamma \mu} B^2} = -\frac{\rho g}{P + \frac{1}{\gamma \mu} B^2} dz$$

$$c_s^2 = \frac{V_A^2}{P_0} = \frac{V_A^2}{\rho} , \quad V_A^2 = \frac{B^2}{\mu \rho} = \frac{B_0^2}{\mu P_0} \quad (\because \text{均匀})$$

$$\frac{d(P + \frac{1}{\gamma \mu} B^2)}{P + \frac{1}{\gamma \mu} B^2} = -\frac{\rho g}{P_0 + \frac{1}{\gamma \mu} B_0^2} dz \quad (\because -\frac{\rho g}{P + \frac{1}{\gamma \mu} B^2} = -\frac{g}{\frac{1}{\gamma} P + \frac{1}{\gamma} \frac{B^2}{\mu \rho}})$$

$$\text{设 } \lambda_B = \frac{P_0 + \frac{1}{\gamma \mu} B_0^2}{\rho_0 g} \quad \text{为有磁场时的标尺.}$$

$$= -\frac{g}{\frac{1}{\gamma} c_s^2 + \frac{1}{\gamma} V_A^2}$$

$$= -\frac{\rho g}{P_0 + \frac{1}{\gamma \mu} B_0^2}$$

$$\text{上式简化为 } \frac{d(P + \frac{1}{\gamma \mu} B^2)}{P + \frac{1}{\gamma \mu} B^2} = -\frac{1}{\lambda_B} dz$$

$$P + \frac{1}{\gamma \mu} B^2 = (P_0 + \frac{1}{\gamma \mu} B_0^2) e^{-\int \frac{dz}{\lambda_B}} = (P_0 + \frac{1}{\gamma \mu} B_0^2) e^{-\frac{3}{\lambda_B}}$$

$$\text{当 } \beta \ll \rho \quad (\beta > 1) \quad \text{有 } P = P_0 e^{-\frac{3}{\lambda_B}}, \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{3}{\lambda_B}} \quad (\text{这时成立})$$

$$\beta \gg \rho \quad (\beta < 1) \quad \text{有 } B = B_0 e^{-\frac{3}{\lambda_B}}$$

3.3 磁通量的法向(标对称)

考慮柱內的磁通量，柱坐標中的磁場分量為

$$(0, \beta_{\phi}(R), \beta_{\delta}(R)) \quad (3.14)$$

∴ 起尺的主数、磁力线、通电线圈形 $\left\{ \text{直于柱面} \right. \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \text{从} (3.2) \text{式} \right.$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \quad \text{可得电流分量}$$

$$(0, -\frac{1}{\mu} \frac{dB_3}{dR}, \frac{1}{\mu R} \frac{d}{dR}(RB_{\phi})) \quad (3.15)$$

忽略引力，力学方程简化为

$$\nabla P + \nabla \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 - \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} = 0$$

$$\text{式中 } \beta^2 = \beta_2^2 + \beta_8^2, \quad \beta_2 = 0.11(3.14)^{1/2}$$

$$\vec{B} \cdot \nabla \vec{B} = (\beta_4 \hat{\phi} + \beta_3 \hat{\delta}) \cdot \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\phi} + \frac{2}{\sigma_3} \hat{\delta} \right) (\beta_4 \hat{\phi} + \beta_3 \hat{\delta})$$

$$= \frac{B_\phi^2}{R} \hat{\frac{\partial \phi}{\partial \phi}} = - \frac{B_\phi^2}{R} \hat{R} . \quad (B_\phi, B_\theta \text{ 为 } \hat{x}, \hat{y} \text{ 的函数})$$

平衡方程的分支为

$$\frac{dP}{dR} + \frac{c}{\eta R} \left[\frac{1}{\eta_0} (\beta_p^2 + \beta_g^2) \right] + \frac{1}{\mu R} \beta_p^2 = 0 \quad (3.1b)$$

第三项为破壁力，第四项为破碎力，这两项破碎力或能互相补充，而能
互相分立。

磁力线方程为：

$$\frac{R d\phi}{B_\phi} = \frac{d\tau}{B_3}$$

$$d\phi = \frac{B_0}{KB_2} dy$$

一根磁力线从长为 $2L$ 的矩形—端产生另一端的总的流利则反为

$$\bar{\Phi} = \int d\phi = \int_0^{2L} \frac{B_\phi}{k_B T} d\phi$$

之得等 B_p, B_q 仅为尺寸系数

$$\therefore \bar{\beta}(R) = \frac{2L\beta_0(R)}{R\beta_1(R)} \quad (3.17)$$

该磁力线的螺距为 $\frac{2\pi}{\Phi}$, 磁场强度 B_z 即为磁力线密度, 则有

$$B_z = \frac{\Phi}{2\pi} \quad , \quad h = \frac{2\pi B_z}{\Phi} \quad , \quad R\phi = B_\phi \quad \Phi = \frac{B_\phi}{R}$$
$$\therefore h = 2\pi R \frac{B_z}{B_\phi}$$

从 (3.17) 式中 得

$$\frac{B_z}{B_\phi} = \frac{2L}{R\pi}$$
$$\therefore \text{螺距 } h = \frac{4\pi L}{\Phi}$$

记得 柱体的长度即为 $2L$.

方程 (3.16) 包含许多量 P, B_ϕ, B_z . 在实际应用中, 通常 B_ϕ 和 P (或 B_ϕ) 已定, 从而求 P . 有时也可以从理论上确定 B_z 和 P , 然后求出 B_ϕ .

3.3.1 纯轴向场 $\rightarrow \frac{dP}{dR} + \frac{d}{dR} \left(\frac{B_\phi^2 + B_\theta^2}{\mu R} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu R^2} = 0$
 又, 轴向分量 $B_\theta = 0$, (3.16) 式简化为

$$\frac{d}{dR} \left(P + \frac{1}{\mu R} B_\phi^2 \right) = 0$$

$$P + \frac{1}{\mu R} B_\phi^2 = \text{const.} \quad \text{总压强保持不变}$$

3.3.2 1/2 轴向场

$$B_\theta = 0, \quad (3.16) \text{ 式变为}$$

$$\frac{dP}{dR} + \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{\mu R} B_\phi^2 \right) + \frac{B_\phi^2}{\mu R^2} = 0 \quad (3.18a)$$

由长导管 (3.2) 式: $j_\phi = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B}$, $B_\phi \neq j_\phi$ 为零, 故 (3.15) 式仍成立:

$$j_\phi = \frac{1}{\mu R} \frac{d}{dR} (RB_\phi) \quad (3.18b)$$

假设半径为 a 的柱体内, 总电流 I 保持不变, 假设磁场有限, 连续。

(3.18b) 式积分, 有

$$d(RB_\phi) = \mu R j_\phi dR$$

$$= \mu \frac{I}{\pi a^2} R dR$$

$$RB_\phi = \frac{\mu I}{\pi a^2} \int_0^R R dR \quad (R < a)$$

$$B_\phi = \frac{\mu I}{2\pi a^2} R \quad (R < a)$$

当 $R > a$ 时,

$$\int d(RB_\phi) = \int_0^R \mu R j_\phi dR$$

$$RB_\phi = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^a j_\phi \cdot 2\pi R dR + \frac{\mu}{2\pi} \int_a^R j_\phi \cdot 2\pi R dR$$

$$j_\phi = 0, \quad \int_a^R = 0$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi}$$

$$B_\phi = \frac{\mu I}{2\pi R} \quad (R > a)$$

$$B_\phi = \begin{cases} \frac{\mu I R}{2\pi a^2} & (R < a) \\ \frac{\mu I}{2\pi R} & (R > a) \end{cases} \quad (3.19)$$

等高均匀的压强可通过方程(3.18a)求得。设水流轴外的压强为 P_∞

积分(3.18a):

$$dP = -\frac{1}{2\mu} dB_\phi^2 - \frac{1}{\mu R} B_\phi dR \quad (18 \rightarrow (3.19) \text{ 式})$$

i, 当 $R < a$ 时, $dP = -\frac{1}{2\mu} d\left(\frac{MI}{2\pi a^2}\right)^2 - \frac{1}{\mu R} \left(\frac{MI}{2\pi a^2}\right)^2 R^2 dR$

$$P = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{MI}{2\pi a^2}\right)^2 R^2 - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{MI}{2\pi a^2}\right)^2 R^2 + C$$

$$= -\frac{1}{\mu} \left(\frac{MI}{2\pi a^2}\right)^2 R^2 + C$$

利用边界条件 C :

$$\text{当 } R = a \text{ 时, } P = P_\infty$$

$$P_\infty = -\frac{M}{4} \left(\frac{I}{\pi a^2}\right)^2 a^2 + C$$

$$C = P_\infty + \frac{M}{4} \left(\frac{I}{\pi a^2}\right)^2 a^2$$

$$\therefore P = P_\infty + \frac{M}{4} \left(\frac{I}{\pi a^2}\right)^2 (a^2 - R^2) \quad (R < a)$$

ii, 当 $R > a$ 时, 已设 $P = P_\infty$

$$P = \begin{cases} P_\infty + \frac{M}{4} \left(\frac{I}{\pi a^2}\right)^2 (a^2 - R^2) & (R < a) \\ P_\infty & (R > a) \end{cases} \quad (3.19')$$

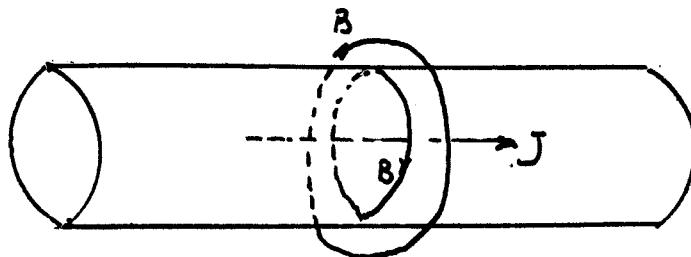
半径为 a 的柱体内, 从 (3.19) 式可知, B_ϕ 随 R 增加 (线性增加), 而液体压强随 R 增加减小 ($\frac{-\nabla P}{\mu}$)。由牛顿第二定律, 液体向内的摩擦力和外力平衡。若将磁压强和液体压强方向同向, 则此 Lorentz 力向内, 可以认为 Lorentz 力和压强梯度平衡。 $\therefore P$ 向外减小。 $\therefore -\nabla P = -\nabla \left(\frac{1}{\mu} B_\phi^2\right)$ (向外)

柱外的液体压强均匀, P_∞ , 压强梯度从而液体应力为零。在柱间中半径移了电流, 从 B_ϕ 可成为不均匀。 B_ϕ 随 R 增加而减小 (3.19) $\therefore -\nabla \left(\frac{1}{\mu} B_\phi^2\right)$ 方向指向柱外, 拉力方向指向柱中心。

二者正比于平行 (或者说：磁场，粒子的 Lorentz 力为零) \checkmark

线压缩：

电流平行轴向，磁场平行轴向，称为线压缩 (linear pinch)



$$I = \int_0^{R_0} j_z 2\pi R dR \quad , \quad R_0 \text{ 为半径} \quad (3.3.2-1)$$

$$\text{单位长度粒子数: } N = \int_0^{R_0} n 2\pi R dR , \quad n \text{ 为粒子数密度} \quad (3.3.2-2)$$

(3.18a) 式 \Rightarrow 变量 R^2 :

$$R^2 \frac{dP}{dR} + R^2 \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{\mu} B_\phi^2 \right) + R \cdot \frac{1}{\mu} B_\phi^2 = 0$$

$$R^2 \frac{dP}{dR} + \frac{1}{\mu} \frac{d}{dR} (RB_\phi)^2 = 0$$

$$\int_0^{R_0} R^2 dP = -\frac{1}{\mu} \int_0^{R_0} d(RB_\phi)^2$$

$\Rightarrow R = R_0$ 时, $P = 0$

$$\text{左边积分: } R^2 P \Big|_0^{R_0} - \int_0^{R_0} 2RP dR = -\frac{1}{\mu} (RB_\phi)^2 \Big|_0^{R_0}$$

$$\int_0^{R_0} 2RP dR = \frac{1}{\mu} (R_0 B_\phi)^2 \quad (3.3.2-3)$$

$P = n k_B T$, k_B : Boltzmann 常数, 该处将加上 T 为常数

即 T 为半径 R 的函数

$$\text{右边} = 2k_B T \int_0^{R_0} n R dR$$

$$(由 (3.18b)) : j_z = \frac{1}{\mu R} \frac{d}{dR} (RB_\phi)$$

$$\int_0^{R_0} n R j_z dR = \int_0^{R_0} d(RB_\phi) = R_0 B_\phi$$

将上式代入(3.3.2-3)的右边：

$$2k_B T \int_0^{R_0} NR dR = \frac{1}{2\mu} \left[\int_0^{R_0} \mu R j_3 dR \right]^2$$

(3.3.2-2)式关于单位长度粒子数 N 的乘式代入上式左边，(3.3.2-1)式代入上式右边得

$$\bar{j}^2 = \frac{8\pi}{\mu} k_B T N$$

此即 Bennett 关係，表示对于稳定的磁流情况，等离子体温度正比于放电电流的平方，反比于单位长度粒子数。

必须指出简单的线性流动（如兰莫所作）并不稳定。

3.3.3 磁力场

3.3.3A 1 维场 (磁力) 方程

气体压强可忽略不计，(3.16) 式简化为

$$\frac{d}{dR} \left[\frac{1}{2\mu} (B_\phi^2 + B_\theta^2) \right] + \frac{1}{\mu R} B_\phi^2 = 0 \quad (3.20)$$

若 B_ϕ, B_θ 中有一个为零，就可推出另一个。其中 B_ϕ, B_θ 为 R 的函数。

当气体压强及引力忽略不计，有 $\vec{j} \times \vec{B} = 0$ ，即 $\vec{j} \parallel \vec{B}$ 。 $\mu \vec{j} = \alpha \vec{B}$
 $\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B}$ ， $\alpha = \text{const}$ 。对于 1 维场磁力场，在牛顿下，考虑线性
无加速度分量的方程。 $\nabla \times \vec{B}$ 的非分量为 $\frac{\partial B_R}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial R} = - \frac{\partial B_\phi}{\partial R}$

$$\therefore - \frac{d B_\theta}{d R} = \alpha B_\phi \quad (3.21)$$

$$B_\phi = - \frac{1}{\alpha} \frac{d B_\theta}{d R} \quad \text{代入 (3.20) 式}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{d B_\theta}{d R} \right)^2 \right] + B_\theta \frac{d B_\theta}{d R} + \frac{1}{\alpha^2 R} \left(\frac{d B_\theta}{d R} \right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{d B_\theta}{d R} \cdot \frac{d^2 B_\theta}{d R^2} + \frac{1}{\alpha^2 R} \left(\frac{d B_\theta}{d R} \right)^2 + B_\theta \frac{d^2 B_\theta}{d R^2} = 0$$

$$\frac{d^2 B_\theta}{d(\alpha R)^2} + \frac{1}{\alpha R} \frac{d B_\theta}{d(\alpha R)} + B_\theta = 0 \quad (3.3.3A-1)$$

$$\text{Bessel 方程} \left\{ \text{满足 } x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - m^2) R = 0 \right.$$

可化方程 $(3.3.34-1)$ 为零的 Bessel 方程. ($m=0$)

当 $R=0$ 时. B_0 为常数. 令 $m=0$ 的 Bessel 方程为 $\frac{d^2 R}{dx^2} + x^2 R = 0$ (Bessel 方程
系数为 αR , $(R=0, B_0=B_0, J_0(\alpha R)=J_0(0)=1 \therefore A=B_0)$)

$$B_0 = B_0 J_0(\alpha R)$$

$$B_\phi = -\frac{1}{\alpha} \frac{d B_0}{d R} = -\frac{B_0}{\alpha} \frac{d}{d R} J_0(\alpha R)$$

$$= -B_0 J_0'(\alpha R)$$

补充方程

$$J_{\nu+1}(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J_\nu'(z)$$

ν 为 Bessel 函数的阶数. 则有 $\nu=0$.

$$\therefore J_0'(z) = -J_1(z)$$

$$\begin{cases} B_\phi = B_0 J_1(\alpha R) \\ B_0 = B_0 J_0(\alpha R) \end{cases} \quad (3.22)$$

由 (3.22) 知 J_1 为偶函数, 有一个零点. 希望有 $\alpha R > 0$. Bessel 函数
的零点分布情况. 在零点附近 J_0 变号衍变. 也即轴向磁场在零点
 $\alpha R > 0$ 附近变化.

$$B_0 = A J_0(\alpha R)$$

③ 轴内的边界条件

零场阶数为正的

Bessel 函数

另 \rightarrow 沿轴对称分布

在 $R=0$ 时. 变为无界大
(奇偶函数结合)



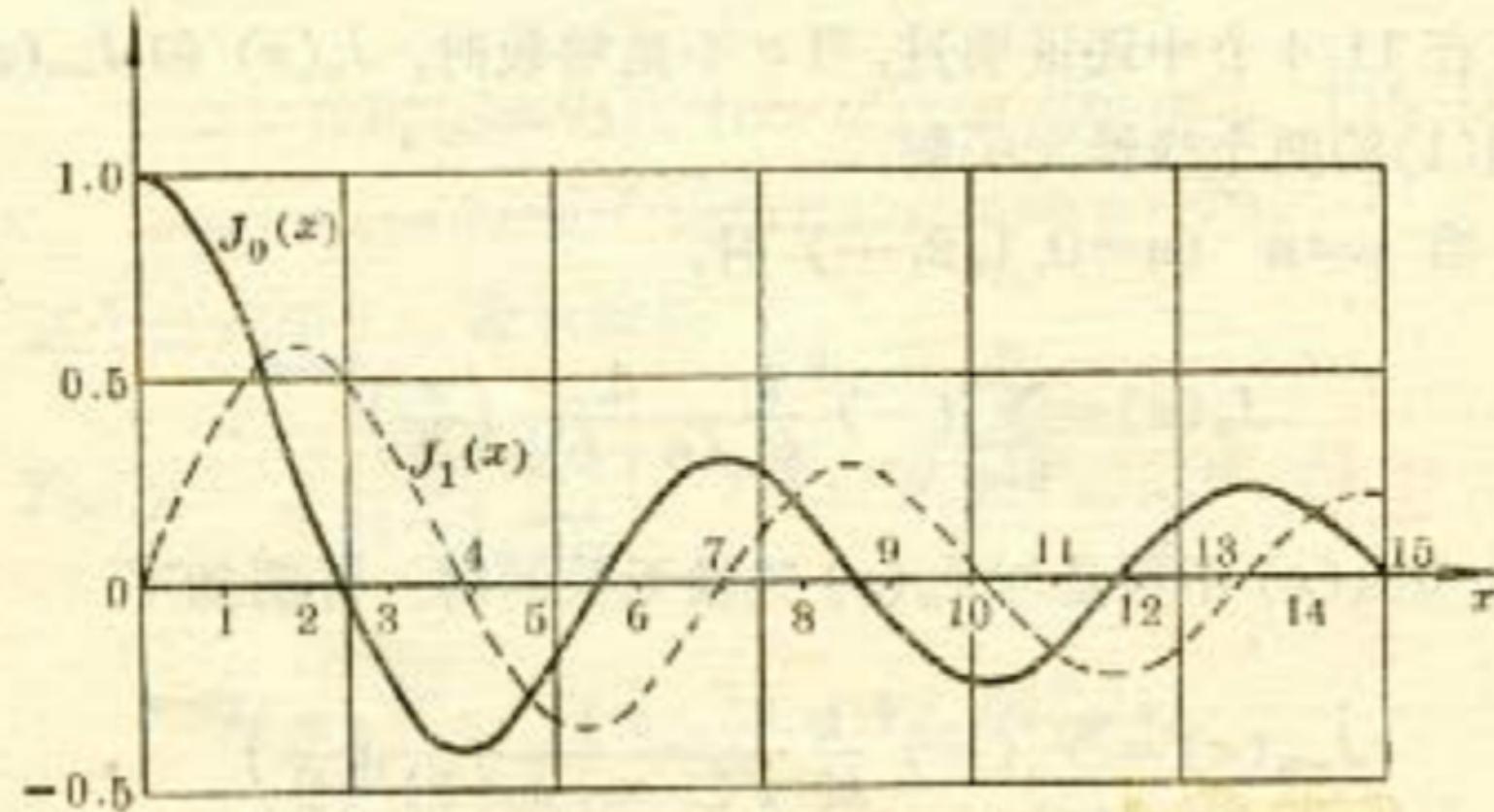


图 63

附录：磁感应势

① 在半磁场中某一区域 V , 其中没有传导电流, 而且对于 V 中任意封闭曲线都找不到一个以之为边界的曲面, 该曲面完全处于区域 V 中, 那么对于 V 中的任意 闭合曲线 有

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint D \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

由此可知, 对于区域中 (V) 有

$$\vec{B} = -\nabla \varphi_m \quad (x, y, z)$$

$$\varphi_m(x, y, z) = \varphi_0 - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

φ_0 为任意常数, φ_m 称为静磁感应势, 只涉及重的函数

② 需要注意的是, 由于静磁感应势的区域必须满足上述两个条件:

i, V 内无传导电流场

ii, 对于任意封闭曲线有 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

例如: 对于一个电流圈, 如果 V 指在其内部和外部的全部部分,

即挖除电流圈后所剩下的区域, 条件 i, ii 都已化为条件 ii

不满足. 封闭曲线包围其中一个挖除的区域 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$

φ_m 为路径有关, 为使条件 ii 成立, V 应取下列

形状



或其他类似的形式



讨论电流圈外方的磁场时, 通常取 (a), 讨论轴线附近取 (b)

③ 将 $\vec{B} = -\nabla \varphi_m$ 代入 $D \cdot \vec{B} = 0$ 有 $\nabla^2 \varphi_m = 0$

2. 静磁感应势的特例

当移了移过电流分布化区域 V , 静磁的磁场类似于电荷粒子在其中的电场

$$\nabla \cdot \vec{B} \approx -\nabla \varphi_m$$

$$\varphi_m = \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}_0}{R_0^3}$$

\vec{m} 为体质的磁偶极子.

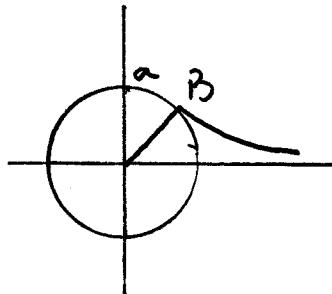
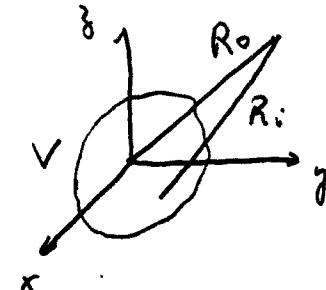
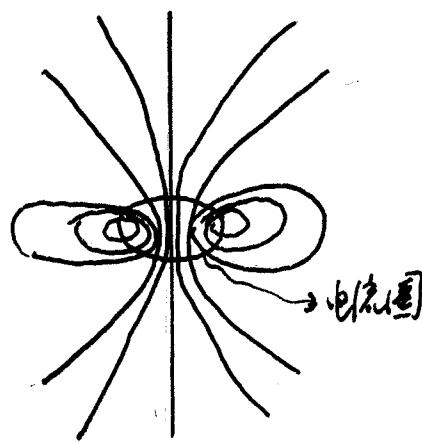
V 为半径. 从远处看 V . 电流构成回路.
总电流为零. 对远处磁场没有贡献. 贡献
主要来自磁偶极子 $\vec{m} = \frac{I\vec{S}}{c}$ (洛伦兹定律)

\vec{S} : 电流圈的面积矢量.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \vec{r} \cdot (\nabla \frac{1}{R}) + \dots$$

3. Priest p. 123

$$B_{\text{out}} = \begin{cases} \frac{\mu I R}{2\pi a^2} & R < a \\ \frac{\mu I}{2\pi R} & R > a \end{cases}$$



Outside the cylinder the pressure is uniform
and the magnetic field is potential, so that the
outwards magnetic pressure and inwards tension balance one another.

4. 磁流体

When the current density vanishes everywhere. E.g. $\vec{j} = \nabla \times \vec{B}/\mu$ gives $\nabla \times \vec{B} = 0$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} = 0$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{B} = 0$$

也可写成 $\vec{B} = \nabla \psi$, ψ 称为磁势, 1. 像 Laplace 方程

$$\nabla^2 \psi = 0$$

① 封闭体积内, 当边界面上 ψ 或者 $\frac{\partial \psi}{\partial n} = B_n$ 时, \vec{n} 为边界面法向
时 ψ 为常数.

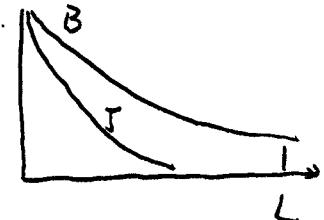
② 若 B_n 在一个面上是常数, 则磁场具有保守的性质 $W = \int \vec{B} \cdot d\vec{l}$

③ 若在边界上有同样 B_n , 但电流 I 不为零的磁偶, 所包含的储量必大于磁场
的能量

② i. 对于半无限区域，例如太阳大气，假设无限远处没有电流。在大尺度 L 的空间内，磁场的减弱快于 L^{-1} 。即 B 在此也适用。
This result is true for a semi-infinite region such as the solar atmosphere provided there are no sources at infinity, so that the magnetic field at large distances L falls off faster than L^{-1} .

(考虑无源区，无限远源，地球断续的区域空间内， B 减少 $B \propto \frac{1}{L}$ ，可以看作势场)

可得： $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}$ ， $\frac{B}{L} \sim J$ ，即 J 与 B 成正比于 $\frac{1}{L}$ 。
若 B 的减弱 $> \frac{1}{L}$ ，则 J 与 B 成 $\sim \frac{1}{L^2}$ 。也就是说 B 与 J 成反比。
 J 已给定，可以看作势场。



ii. 像物部分边界上， B_n 变形情况，但是 B 的切向分量为零，叫做无电流场

\therefore 切向边界条件 $\vec{n} \times (\vec{B}_o - \vec{B}_i) = \mu \vec{\sigma}$ ， $\vec{\sigma}$ 为面电流密度。
切向分量为零 ($\vec{\sigma} = 0$)，或者 $\vec{n} \times \vec{B}_o = \vec{n} \times \vec{B}_i$ ，即 $\vec{\sigma} = 0$

带了电流连同边界为无电流系统，叫做势场。

③ 可以说平行磁场和磁场作为边界条件，当满足此条件时，在足够长的时间内保持稳定 (stationary)。这是指静放能，回归能重叠的位形。
场可以看作势场。

例外的情况是：i. 活动区 (无场和磁场条件都破坏了可行性)
ii. 突流区 (可能有电流片)

3.3.3 B 形线磁场

1. 有一个方便的方程求解方程 (3.20)

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{B_\phi^2 + B_\theta^2}{\mu R} \right) + \frac{1}{\mu R} B_\theta^2 = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{令 } B^2 = f(R), \text{ 则 } B^2 = B_\theta^2 + B_\phi^2 \quad (3.23)$$

$$(3.20) \text{ 式改写为: } \frac{1}{\mu R} \frac{d}{dR} B^2 + \frac{1}{\mu R} B_\theta^2 = 0$$

$$\begin{aligned} B_\theta^2 &= -\frac{1}{\mu R} \frac{d}{dR} B^2 \\ &= -\frac{1}{\mu R} \frac{df}{dR} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$B_\theta^2 = B^2 - B_\phi^2 \quad (3.25)$$

B_θ^2, B_ϕ^2 为正, 表示着 $\frac{df}{dR} < 0$, 即 B^2 随 R 的减函数. 当 R 增加, B^2 减少.

$$\text{特别: 若 } f = \frac{1}{R}, \text{ 则, } \therefore B_\theta^2 = -\frac{1}{\mu R} \cdot (-) R^{-3} = \frac{1}{R^2}$$

$$\vec{B}_\phi = \frac{1}{R} \hat{\phi}, \quad B_\theta^2 = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} = 0. \quad \text{即为一个纯环向场.}$$

2. 无加速度圆锥-螺旋: 均匀扭转场 (uniform-twist) (待补充部分)

磁力线扭转时, 半径为 $R^{(0)}$. (圆磁力线扭转时半径为 a , $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ 才离开轴心距离)

磁力线扭转时, 扭转角 θ , 即 $R = a$. 生成函数 f

$$f(R) = B^{(0)}^2 \left(1 + \frac{a^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2} \right) / \left(1 + \frac{R^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2} \right) \quad (\text{from Parker: 1977 Ann. Rev. Astron. Astrophys. 15, 45})$$

$B^2 = f(R)$, R 为常数

$$B_\theta^2 = -\frac{1}{\mu R} \frac{df}{dR} = \frac{R^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2} B^{(0)}^2 \left(1 + \frac{a^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2} \right) / \left[1 + \frac{R^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2} \right]^2 = \frac{\frac{R^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2}}{\left[1 + \frac{R^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2} \right]} \cdot f$$

$$B_\theta^2 = B^2 - B_\phi^2 = f \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{R^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2} \right]}$$

$$B_\theta = \frac{B_0}{1 + \frac{R^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2}}, \quad B_\phi = \frac{B_0 \bar{\theta} R / (2L)}{1 + \frac{R^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2}} \quad (3.26)$$

$$\text{式中 } B_0 = B^{(0)} \left(1 + \frac{a^2 \bar{\theta}^2}{(2L)^2} \right)^{1/2}, \quad \text{若 } R = 0 \text{ 时} \quad (3.26) \quad \begin{cases} B_\theta = B_\theta^{(0)}, & \text{若 } R = 0 \\ B_\phi = 0, & \text{若 } R = 0 \end{cases}$$

磁力线化为圆柱形。柱壳上缠绕，扭距同方向，初奇3.5弧度
圆心角；磁通量与扭距同向增加。（5半径无关）

3.3.3c 磁通量随半径的分布。

Parker(1977) 考虑无场磁通管扭距的条件，该磁通管半径为有限值 a ，周围等高线函数 $=\frac{1}{2\pi}B_z(a)$ 。

假设磁通管扭转过程中，磁场保持在柱形，柱半径可以改变。
设初半径 $a^{(0)}$ ，即半径 a 为变量， a 的初值为 $a^{(0)}$ ，扭转过程中
轴向场的均方值不变 $\langle B_z^2 \rangle$ ，因为

$$\begin{aligned}\langle B_z^2 \rangle &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a B_z^2 \cdot 2\pi R dR = \frac{2}{a^2} \int_0^a B_z^2 R dR \\ &= \frac{2}{a^2} \int_0^a R (B^2 - B_\phi^2) dR = \frac{2}{a^2} \int_0^a (R f + \frac{1}{2} R^2 \frac{df}{dR}) dR \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a \frac{d}{dR} (R^2 f) dR \\ &= f(a)\end{aligned}$$

$$\therefore \langle B_z^2 \rangle = B_z^2(a) (= f(a))$$

对于均匀扭转场(3.26)，记承上。即 $R=0$ 处，有

$$B_z^{(0)} = B_0 = B(R=0) \quad (\text{参阅 } 3.3.3 B \text{ 页})$$

$$B_0 = B^{(0)} \left(1 + \frac{\vec{a}^2}{(2L)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$B^{(0)}$ 是沿轴无扭时柱形的平均场强 $[B_0 = B^{(0)} \downarrow B_0 = B_z^{(0)} \Rightarrow B(R=0) = B(R=a) = B^{(0)}]$

B_0 不同半径 (a) 的无扭化 $\lambda = 0$ 处 $\propto B$ 。(\because 扭转，使 a 偏离 $a^{(0)}$)

式乘后对于长轴附近的柱体 $(2L)$ ，柱 λ 的扭转问题重， B_0 起主要作用。

$$\text{设磁通管以 } R=a, B_z^{(a)} = \frac{B_0}{\left[1 + \frac{\vec{a}^2}{(2L)^2} \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{B^{(0)}}{\left[1 + \frac{\vec{a}^2}{(2L)^2} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$\vec{a}^2 = B_0^2 + B_\phi^2 + B_z^{(0)} \vec{a}^2$

$$B_p(a) = \frac{B^{(0)} \vec{a}^2 / (2L)}{\left[1 + \frac{\vec{a}^2}{(2L)^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{保持不变。}$$

因为扭转，磁通管半径的变化由下述条件决定：通过磁通管的纵切面总磁通守恒

CHAPTER 3



Fig. 3.5. Magnetic field lines at two radii for the uniform-twist field

$$2\pi \int_0^a R B_\delta dR = \pi a^{(0)} \cdot B^{(0)}$$

$$2\pi \int_0^a R \frac{B_0}{\left[1 + \frac{\bar{P}^2 R^2}{(2L)^2}\right]^{\frac{1}{2}}} dR = \frac{\pi B_0 (2L)^2}{\bar{P}^2} \ln\left(1 + \frac{\bar{P}^2 a^2}{(2L)^2}\right)$$

$$= \frac{\pi (2L)^2}{\bar{P}^2} B^{(0)} \left(1 + \frac{\bar{P}^2 a^2}{(2L)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left[1 + \frac{\bar{P}^2 a^2}{(2L)^2}\right] = \pi a^{(0)} B^{(0)}$$

$$\left[1 + \frac{\bar{P}^2 a^2}{(2L)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \ln\left[1 + \frac{\bar{P}^2 a^2}{(2L)^2}\right] = \frac{a^{(0)} \bar{P}^2}{(2L)^2}$$

以上式子可以看出， \bar{P} （传播的圆数） \uparrow ， $\bar{P}a \uparrow$ ，而且 $a \uparrow$
因为左边是 \bar{P} 的一次方，右边是 \bar{P} 的平方。∴ \bar{P} 是 a 的 $\frac{1}{2}$ 次方。而且从图中看出， \bar{P} 是 a 的 $\frac{1}{2}$ 次方成立。 $\therefore B_\delta^{(0)} = B_0 = B^{(0)} \left(1 + \frac{\bar{P}^2 a^2}{(2L)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ， $\bar{P} \uparrow$ $B_\delta^{(0)} \uparrow$
即和 a 成正比。 B_δ 也 \uparrow 。∴半径 R 与 \bar{P} 成正比，而 R 增大时 B_δ 减小。

$$B_\delta = \frac{B_0}{\left[1 + \frac{\bar{P}^2 a^2}{(2L)^2}\right]} \Rightarrow B_\delta(a) = \frac{B_0}{\left[1 + \frac{\bar{P}^2 a^2}{(2L)^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\bar{P} \uparrow, B_\delta(a) \downarrow} \frac{B_0}{\left[1 + \frac{\bar{P}^2 a^2}{(2L)^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \left[1 + \frac{\bar{P}^2 a^2}{(2L)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

3.3.3 D 磁通膨胀的条件

Parker (1974c) 认为磁通膨胀向膨胀，使得 $\frac{B_p}{B_g}$ 增加。

因为半径增大时，扭率 $\bar{\omega} = \frac{2LB_p}{RB_g}$ 保持常数，因此 $\frac{B_p}{B_g}$ 必须增加。
下面，进一步讨论：

柱体半径为 a ，磁场为 $(B_p(R), B_g(R))$ 。该作用于磁通管柱体表面和
压缩应力。结果引起磁通膨胀张量 $\bar{\alpha}$ ， R 变为 \bar{R} ，磁通管变
成 $(\bar{B}_p(\bar{R}), \bar{B}_g(\bar{R}))$

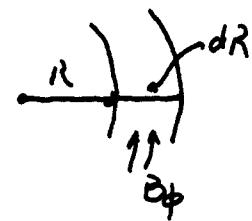
该等高面上应满足 $\bar{\alpha}_{rr} = 0$ (或 $\bar{\alpha}_{\theta\theta} = 0$)。该结果从等高面用生成函数
(generating function) f 和 \bar{f} 表示。($B^a = f(R)$)

纵向和横向磁通守恒，起初磁通穿过的柱为 $(R, R+dR), \dots, \bar{R}$

變為 $(\bar{R}, \bar{R} + d\bar{R})$.

$$\bar{B}_3 = \pi R dR = \bar{B}_3 = \pi \bar{R} d\bar{R} \quad (3.3.3D-1)$$

$$B_\phi(R) dR = \bar{B}_\phi(\bar{R}) d\bar{R} \quad (3.3.3D-2)$$



利用得出數學等式

$$\bar{B}_3^2 = \bar{B}^2 - \bar{B}_\phi^2 = \bar{f}(\bar{R}) + \frac{1}{2}\bar{R} \frac{df}{d\bar{R}}$$

$$\bar{B}_\phi^2 = -\frac{1}{2}\bar{R} \frac{df}{d\bar{R}}$$

$(3.3.3D-1)$ = 逆平方

$$\bar{R}^2 \left[f + \frac{1}{2}\bar{R} \frac{df}{d\bar{R}} \right] = \bar{R}^2 \left[\bar{f} + \frac{1}{2}\bar{R} \frac{d\bar{f}}{d\bar{R}} \right] \left| \frac{d\bar{R}}{dR} \right|^2 \quad (3.3.3D-3)$$

$(3.3.3D-2)$ = 逆平方

$$R \frac{df}{dR} = \bar{R} \frac{d\bar{f}}{d\bar{R}} \left(\frac{d\bar{R}}{dR} \right)^2 \quad (3.3.3D-4)$$

$(3.3.3D-3), (3.3.3D-4)$ 聯立，對 \bar{f} 得 $f(R)$. 可求得 $\bar{f}(\bar{R}), \bar{R}(R)$.

令 $u = \bar{R}^2$, $\bar{u} = \bar{R}^2$

$$\text{由 } (3.3.3D-4): \quad \frac{df}{f} = \frac{R}{\bar{R}} \frac{dR}{d\bar{R}} = \frac{dR^2}{d\bar{R}^2} = \frac{du}{d\bar{u}}$$

$$\frac{df}{f} \cdot \frac{du}{d\bar{u}} = \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2$$

$$\left(\frac{df}{d\bar{u}} \cdot \frac{du}{f} \right)^2 = \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2$$

$$\therefore \frac{df}{d\bar{u}} = \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \frac{df}{du} \quad (3.3.3D-5)$$

$$f + \frac{1}{2}R \frac{df}{dR} = f + \frac{1}{2}\bar{R}^2 \frac{df}{d\bar{R}} = f + u \frac{df}{du}$$

$$\bar{f} + \frac{1}{2}\bar{R} \frac{d\bar{f}}{d\bar{R}} = \bar{f} + \bar{u} \frac{d\bar{f}}{d\bar{u}}$$

$(3.3.3D-3)$ 式 可得解.

$$\bar{f} + \bar{u} \frac{df}{du} = \frac{R^2}{\bar{R}^2} \left(\frac{df}{dR} \right)^2 \left(f + u \frac{df}{du} \right) = \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \left(f + u \frac{df}{du} \right) \quad (3.3.3D-6)$$

(3.3.3D-5), (3.3.3D-6) ⇒ $\bar{f} + \bar{u} \frac{df}{du} = \frac{df}{d\bar{u}}$, 由之

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \left[f + u \frac{df}{du} \right] - \bar{u} \frac{df}{d\bar{u}} \\ &= \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \left[f + u \frac{df}{du} \right] - \bar{u} \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \frac{df}{du} \\ &= \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \left[f + (u - \bar{u}) \frac{df}{du} \right] \quad (3.3.3D-7) \end{aligned}$$

(3.3.3D-7) 代入上式，得 $\frac{du}{d\bar{u}} \left\{ \frac{d^2u}{d\bar{u}^2} \left[f + (u - \bar{u}) \frac{df}{du} \right] - \frac{df}{du} \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right) + \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \left[\frac{df}{du} + \frac{1}{2}(u - \bar{u}) \frac{d^2f}{du^2} \right] \right\} = 0$

$$0 = \frac{du}{d\bar{u}} \left\{ \frac{d^2u}{d\bar{u}^2} \left(\frac{d(fu)}{du} - \bar{u} \frac{df}{du} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \left[\frac{d^2(fu)}{du^2} - \bar{u} \frac{d^2f}{du^2} \right] - \frac{df}{du} \frac{du}{d\bar{u}} \right\} \quad (3.3.3D-8)$$

由之得 $\frac{d^2u}{d\bar{u}^2} \left(\frac{d(fu)}{du} - \bar{u} \frac{df}{du} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \left[\frac{d^2(fu)}{du^2} - \bar{u} \frac{d^2f}{du^2} \right] = 0$ (3.3.3D-8)

由之得 f 为常数，上述方程即为 $u = u(\bar{u})$ 。若 $R = R(\bar{R})$

则 $\frac{f(R)}{2\mu} = 1 - R^2$ ，令 $\alpha = \frac{1}{2}$ ， $0 \leq R^2 \leq \frac{1}{2}$ ，即 $u = u(\bar{R})$ 。

$$f = 2\mu(1 - R^2), \quad \frac{df}{dR} = -4\mu R$$

$$B_3^2 = f(R) + \frac{1}{2}R \frac{df}{dR} = 2\mu(1 - 2R^2)$$

$$B_4^2 = -\frac{1}{2}R \frac{df}{dR} = 2\mu R^2$$

$$\therefore \frac{B_3^2}{2\mu} = 1 - 2R^2, \quad \frac{B_4^2}{2\mu} = R^2$$

$$f = 2\mu(1 - R^2) = 2\mu(1 - u), \quad \frac{df}{du} = -2\mu, \quad \frac{d^2f}{du^2} = 0, \quad \text{代入 (3.3.3D-8)}$$

$$\frac{d^2u}{d\bar{u}^2} \left[2\mu(1 - u) + (u - \bar{u})(-2\mu) \right] + 2\mu \frac{du}{d\bar{u}} + \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 (-2\mu) = 0$$

$$\frac{d^2u}{d\bar{u}^2} \left[1 - 2u + \bar{u} \right] + \frac{du}{d\bar{u}} - \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 = 0 \quad (3.3.3D-9)$$

此为一常微分方程

$$\frac{1}{2} \varphi = 1 - 2u + \bar{u}, \quad \text{且} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = -2 \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} = -2 \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + 1, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{u}^2} = -2 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^2} \quad \text{由(3.3.3D-9)}$$

$$2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{u}^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} \right)^2 - 1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} \right)^2 = 1 + \frac{c}{\varphi} \quad (3.3.3D-10)$$

c 为积分常数， φ 为待确定的待定

$$\because u = R^2, \quad 0 \leq R \leq \frac{1}{2}, \quad \therefore 0 \leq u \leq \frac{1}{4}$$

$$\bar{u} = \bar{R}^2 \quad \bar{u} \geq 0$$

$$\varphi = 1 - 2u + \bar{u}, \quad \varphi > 0 \quad \text{且} \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} \right| > 1 \text{ 时, } c > 0$$

$$\text{且} \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} \right| < 1 \text{ 时, } c < 0$$

$c > 0$ 为外压强, $c < 0$ 为内压强, $c=0$ 为平衡.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} = 1 - 2 \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}$$

$$\text{设外压强, } u = R^2, \quad du = 2R dR$$

$$\bar{u} = \bar{R}^2 = (R - \delta)^2, \quad d\bar{u} = 2(R - \delta) dR \quad (\delta > 0)$$

$$\therefore \frac{du}{d\bar{u}} = \frac{R}{R - \delta} > 1$$

$$\text{因此} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} < -1 \quad \text{且} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} \right)^2 > 1 \quad \text{且} \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} \right| > 1, \quad \text{由(3.3.3D-10) 知} \quad c > 0,$$

$$\text{设内压强} \quad \bar{u} = \bar{R}^2 = (R + \delta)^2, \quad d\bar{u} = 2(R + \delta) dR$$

$$0 < \frac{du}{d\bar{u}} = \frac{R}{R + \delta} < 1$$

$$-1 < \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} < 1 \quad ; \quad c < 0$$

$$\text{例: 方程 } 2\bar{u} \frac{d^2\varphi}{d\bar{u}^2} + \left(\frac{d\varphi}{d\bar{u}}\right)^2 = 0 \text{ 且 } \varphi(0) = 0$$

该方程属于类型: $y'' + P(y)y' + Q(y) = 0$

$$y = \varphi, \quad x = \bar{u}, \quad P(y) = \frac{1}{2y}, \quad Q(y) = -\frac{1}{2y}$$

$$\text{解得 } x = \int e^{\int P dy} \left[2 \int Q e^{-\int P dy} dy + C_1 \right]^{-\frac{1}{2}} dy + C_2$$

$$\text{即 } \bar{u} = \int e^{\frac{1}{2} \ln \varphi} \left[2 \int \left(-\frac{1}{2}\varphi\right) e^{\ln \varphi} d\varphi + C_1 \right]^{-\frac{1}{2}} d\varphi + C_2$$

$$= \int \varphi^{\frac{1}{2}} \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \varphi d\varphi + C_1 \right]^{-\frac{1}{2}} d\varphi + C_2$$

$$= \int \varphi^{\frac{1}{2}} (-\varphi - C_1')^{-\frac{1}{2}} d\varphi + C_2$$

$$= \int \left(\frac{\varphi}{-\varphi - C_1'}\right)^{\frac{1}{2}} d\varphi + C_2$$

$$\therefore \frac{d\bar{u}}{d\varphi} = \left(\frac{\varphi}{-\varphi - C_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\bar{u}}\right)^2 = \frac{\varphi + C_1'}{\varphi} = 1 + \frac{C_1'}{\varphi}$$

1. 压缩: 由(3.3.D-10)式得: $\pm d\bar{u} = \frac{d\varphi}{(1 + \frac{C_1'}{\varphi})^{\frac{1}{2}}} \quad (C > 0)$

2. 膨胀: $\pm d\bar{u} = \frac{d\varphi}{(1 + \frac{C_1'}{\varphi})^{\frac{1}{2}}} \quad (C < 0)$

上述方程2.的解, 请参见参考书 Parker 1974 c. APJ. 191, 245

结论: B_θ 随 R 增加而增加, B_θ 和轴向均匀, 在平面 $R=a$ 处 $\frac{B_\theta}{B_z}$ 为零, 最后趋于零, 而 $\frac{B_\theta}{B_z}$ 向外增加 (绝大部分半径处满足 $1 < R < a$)

2. 沿轴向压缩, B_θ/B_z 增加 ($\because B_\theta$ 增加), 沿轴向方向压缩, 或者沿轴向伸长 B_θ/B_z 伸长 ($\because B_\theta$ 增加)

3. 膨胀时 三种场线发生改变. (轴向场, 轴对称场, 均匀磁场)

3.3.3 定常磁场-半径的磁通量

Parker (1974c) 考虑磁通量，它的半径随半径而增加而增大。这种情况称为管状的或近似管状的。

假设无电流的磁通量，长为 S ，其中一半径 R ， $S \gg R$ 。该部分的长部分半径为 a ，场为 $(B_\phi(R), B_\theta(R))$ ，合成出数 f 。膨胀部分相对地有 \bar{a} 。 $(\bar{B}_\phi(\bar{R}), \bar{B}_\theta(\bar{R}))$ 以 \bar{f} 表示。根据 3.3.1b 所示，以上即可以表示为 $u = R^2$ ，半径 $R = a$ 。 $\therefore u = a^2$ 。膨胀部分 $\bar{u} = \bar{R}^2$ 。 $\bar{u}_1 = \bar{a}^2$

有下列关系式：1. 方向磁通量守恒

$$B_\theta(R) R dR = \bar{B}_\theta(\bar{R}) \bar{R} d\bar{R} \quad (3.3.3E-1)$$

2. 生成电场矢量。上式 = 电场

$$R^2 \left(f + \frac{1}{2} R \frac{df}{dR} \right) = \bar{R}^2 \left(\bar{f} + \frac{1}{2} \bar{R} \frac{d\bar{f}}{d\bar{R}} \right) \left(\frac{d\bar{R}}{dR} \right)^2 \quad (3.3.3E-2)$$

2. 作用于单位面积 $(R, R+dR)$ 上的力矩 τ 磁通量 (通过这个

磁通量守恒，因该方向磁通量变化量为零)

力的表示：作用于单位面积和上的力。即为 Lorentz 力。 \vec{f}

作用于单位面积上的力为磁应力 $\vec{\tau}$

有关系： $\vec{f} = \vec{J} \cdot \vec{\tau}$

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla B^2 + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

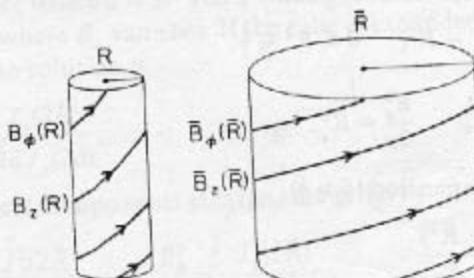
$$\therefore \nabla \cdot (\vec{B} \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\therefore \vec{f} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{B} \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \vec{I}$$

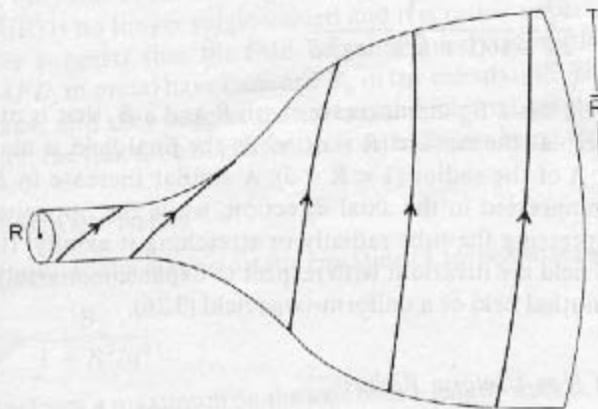
$$\text{令 } \vec{\tau} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{B}^2 \vec{I}) \quad \text{式中 } \vec{I} \text{ 为单位矩阵}$$

$\vec{\tau}$ 是磁应力。其中 $\frac{1}{2} \vec{B}^2 \vec{I}$ 是方向 \vec{B} 的磁应力，可归磁应力中已包含磁通量。

$$\vec{B} \vec{B} = \begin{pmatrix} B_\phi \\ B_\theta \end{pmatrix} (0, B_\phi, B_\theta) = \begin{pmatrix} 0 & B_\phi^2 & B_\phi B_\theta \\ 0 & B_\phi B_\theta & B_\theta^2 \end{pmatrix}$$



(a)

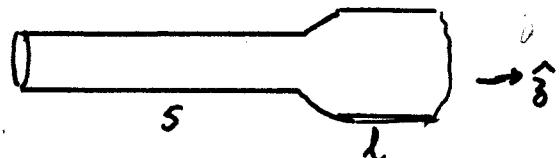


(b)

Fig. 3.6. (a) The radial expansion of a twisted flux tube from radius a to radius \bar{a} . (b) The concentration of azimuthal flux in the widest part of a flux tube.

对角为 B_p^2, B_g^2 的一半即为无极磁感应强度，另一半为 B_p, B_g (在轴向) 沿方向的
应力。利用以 B_p, B_g 为磁应力。现代科学需要判断膨胀系数和膨胀系数
之部分之间磁场的规律。由于不同向磁通量化磁通量的某些区域可能
会集中，双向磁通不再平衡。

$$\text{若 } I_s \omega_s = I_g \omega_g \quad \text{则有 } I_s \dot{\omega}_s = I_g \dot{\omega}_g$$



由上述条件得，要平衡在 S 上之力矩 \vec{L}_s

式中作用在 λ 上之力矩 \vec{L}_g 相等 $\vec{L}_s = \vec{L}_g$ (Parker 为 1.2.3.3 题范例 + 书)

$$\begin{aligned} \vec{L}_s \cdot \vec{R} \times (\vec{B} \cdot \vec{B} \cdot 2\pi R dR \hat{\gamma}) &= 2\pi R^2 \hat{\gamma} \times (\hat{q} \partial \vec{B} / \partial \hat{\gamma}) dR \\ &= 2\pi R^2 B_p B_g dR \hat{\gamma} \end{aligned}$$

$$[\hat{\gamma} \hat{\gamma} \times (\hat{q} \partial \vec{B} / \partial \hat{\gamma} \cdot 2\pi R dR \hat{\gamma}) = 0] \quad (\text{力矩平衡})$$

$$\vec{L}_g = 2\pi \bar{R}^2 \vec{B}_p \vec{B}_g d\bar{R} \hat{\gamma}$$

$$\therefore B_p B_g R^2 dR = \vec{B}_p \vec{B}_g \bar{R}^2 d\bar{R} \quad (3.3.3E-3)$$

上式：已除 $\cdots (3.3.3E-1)$ 得 $B_p R = \vec{B}_p \bar{R}$

两边平方，得 $B_p^2 = \frac{1}{2} R \frac{df}{dR}$ 将 \vec{B}_p 代入上式代入，得：

$$u^2 \frac{df}{du} = \bar{u}^2 \frac{df}{d\bar{u}} \quad (3.3.3E-4)$$

(3.3.3E-2) 式得

$$\bar{f} + \bar{u} \frac{df}{d\bar{u}} = \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 (f + u \frac{df}{du}) \quad (3.3.3E-5)$$

$$\text{即 } \bar{f} = \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \frac{df}{du} (fu) - \bar{u} \frac{df}{d\bar{u}} \quad (3.3.3E-6)$$

从 (3.3.3E-4) 式得

$$\frac{df}{du} = \frac{u^2}{\bar{u}^2} \frac{df}{d\bar{u}} \quad \text{代入 } (3.3.3E-6) \text{ 得}$$

$$\bar{f} = \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \frac{df}{du} (fu) - \frac{u^2}{\bar{u}^2} \frac{df}{d\bar{u}} \quad (3.3.3E-6')$$

二边值问题.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial u} (fu) \right] - \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left[\frac{u^2}{\bar{u}} \frac{\partial f}{\partial u} \right]$$

(3.3.3 E-4) 代入上式

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{\bar{u}} \frac{\partial f}{\partial u} &= 2 \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial}{\partial u} (fu) + \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} (fu) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} - \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left(\frac{u^2}{\bar{u}} \right) \frac{\partial f}{\partial u} \\ &\quad - \frac{u^2}{\bar{u}} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \end{aligned}$$

$$左边 = \frac{2u}{\bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{u^2}{\bar{u}^2} \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \rightarrow \text{左边次利用 } \bar{u} \text{ 可以消去}$$

$$0 = \left\{ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial}{\partial u} (fu) + \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} (fu) - \frac{1}{\bar{u}} \frac{\partial}{\partial u} \left(u^2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) \right\} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}$$

从这个式子看出 $\frac{\partial f}{\partial u} = 1 - R^2$, $0 \leq R \leq \frac{1}{2}$.

由 \bar{u}_1 (3) 题条件 $\alpha = \frac{1}{2} (= u_1)$, $u = R^2$, $\bar{u} = \bar{R}^2$, $\bar{\alpha} = \bar{u}_1$,

$$\frac{\partial}{\partial u} (uf) = 2\mu \frac{\partial}{\partial u} [u(1-u)] = 2\mu(1-2u)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} (uf) = -4\mu, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = -2\mu$$

$$0 = \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^2} (1-2u) - \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 + \frac{u}{\bar{u}} \right\} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \quad (3.3.3 E-7)$$

此方程为一阶常系数方程，其通解形式为 $C_1 e^{k_1 \bar{u}} + C_2 e^{-k_1 \bar{u}}$.

考虑膨胀后不通过奇点 $\bar{u} > \alpha$ (即 R 在奇点)，我们取自己选择的膨胀 $\bar{u} = \bar{R}^2$ 时 $\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} < 1$ (P.301. 讨论). 此方程的解近似为

$$\therefore u = R^2 \approx \frac{1}{2}.$$

$\therefore 1-u \approx 1$, 方程简化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^2} + \frac{u}{\bar{u}} = 0 \quad (3.3.3 E-8)$$

边界条件: $u(0) = 0$, (初值问题为 0)

$u(\bar{u}_1 = \bar{\alpha}) = u_1 (= \alpha^2)$ (不通过奇点的半径 = α)

考察方程 $\bar{J}^2 \frac{d^2 u}{d\bar{J}^2} + (-2\alpha) \bar{J} \frac{du}{d\bar{J}} + [\lambda^2 \beta^2 \bar{J}^{2\beta} + (\alpha^2 - \nu^2 \beta^2)] u = 0$
 由此可得 Bessel 方程的解 $\{u\}$. (即 $\bar{J} L = 0$: $\bar{J}^2 \frac{d^2 u}{d\bar{J}^2} + x \frac{du}{dx} + (x^2 - \nu^2) u = 0$)
 P.327)

$$\text{令 } 1 - 2\alpha = 0$$

$$\nu^2 \beta^2 = -1$$

$$\lambda^2 \beta^2 = 1$$

$$\alpha^2 - \nu^2 \beta^2 = 0$$

$$\left[\frac{d^2 u}{d\bar{J}^2} + \frac{u}{\bar{J}} = 0 \right] \quad (3.3.3E-8)$$

即可得到上述 (3.3.3E-8) 式.

$$\text{若 } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}, \lambda^2 = 4, \nu^2 = 1.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{U 为 Bessel 方程:} \\ x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0 \end{array} \right]$$

$$\text{Bessel 方程的解 } U(\bar{J}) = \bar{J}^\alpha J_\nu(\lambda \bar{J}^\beta)$$

J_ν 为 U 的 Bessel 方程解. 并且考虑的是圆柱函数, ($\nu = \pm \frac{1}{2}$, 仅用 $\nu > 0$ 考虑)

例如 $\nu = 1, \lambda = 2$ (圆柱内, \therefore 高度函数 \bar{J}_1 为 Bessel 函数)

$$U(\bar{J}) = \bar{J}^1 J_1(2\bar{J}^1) \quad \text{即 } (3.3.3E-7) \text{ 的解}$$

$$U = A \bar{J}_1^{\nu} \bar{J}_1(2\bar{J}_1^{\nu}) = A \bar{J}_1^{-\frac{1}{2}} \bar{J}_1(2\bar{J}_1^{\frac{1}{2}}) = A \bar{R} J_1(2\bar{R})$$

A: 待定常数 $U(\bar{J}_1) = u_1$, 令 $\bar{J}_1 = \bar{a}^\nu$, 则 $u_1 = a^\nu = \frac{1}{2}$
 $(\bar{R} = \bar{a} \text{ 时, } R = a = \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$A = \frac{a^\nu}{\bar{a} J_1(2\bar{a})} = \frac{1}{2\bar{a} J_1(2\bar{a})}. \quad \text{将待定常数 } A \text{ 代入 } U \text{ 的表达式. 得:}$$

$$\bar{R} = a^\nu \frac{\bar{R} J_1(2\bar{R})}{\bar{a} J_1(2\bar{a})} \quad \left(u = u_1 \frac{\bar{J}_1^{\frac{1}{2}} J_1(2\bar{J}_1^{\frac{1}{2}})}{\bar{J}_1^{-\frac{1}{2}} J_1(2\bar{J}_1^{-\frac{1}{2}})} \right) \quad \text{Parker 例 } (3.3.3E-9)$$

以上式可得

$$\frac{du}{d\bar{u}} = \frac{a^\nu}{\bar{a} J_1(2\bar{a})} \left[\frac{1}{2} \bar{u}^{-\frac{1}{2}} \bar{J}_1(2\bar{u}^{\frac{1}{2}}) + \bar{u}^{\frac{1}{2}} \bar{J}'_1(2\bar{u}^{\frac{1}{2}}) \cdot \bar{u}^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$J'_1 = \bar{J}_0 - \frac{1}{2\bar{u}^{\frac{1}{2}}} \bar{J}_1 \quad \left(\text{通解式 } \frac{d}{dx} [x^\nu Z_{\nu-1}(x)] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \nu \neq 0 \right)$$

$$\frac{du}{d\bar{u}} = \frac{a^\nu}{\bar{a} J_1(2\bar{a})} \bar{J}_0(2\bar{u}^{\frac{1}{2}}) \quad \left(= \frac{u_1}{\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{J}_0(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})}{\bar{J}_1(2\bar{u}_1^{-\frac{1}{2}})}, u_1 = a^\nu, \bar{u}_1 = \bar{a}^{-\nu} \right) \quad (3.3.3E-10)$$

以前我们已证明 $\frac{du}{d\bar{u}} < 1$, 要求 $\frac{du}{d\bar{u}} > 0$. $J_1 \rightarrow$ 定量 $2\bar{u}^{\frac{1}{2}} + J_1$
 第一零点 $\bar{u}_0 = 2.4048$, $\bar{u}_0 = 1.4458$, 超过该零点, $J_1 < 0$.

2. 符合 $\frac{du}{d\bar{u}} > 0$ 的条件. 如果 $\bar{u}_1 < \bar{u}_0$ (零点), 即膨胀后, 磁逆带的半径
 小于由 $\bar{u}_0 (= \bar{a}_0^2)$ 所代表的半径, (3.3.3E-9) 式作为方程的解是合适的.
 但从物理上讲矛盾, 磁逆带的膨胀量是限制的. 可以看 $\bar{u}_1 > \bar{u}_0$. Parker
 讨论问题时简化 (3.3.3E-7) 式的过程无关. 由 (3.3.3E-9) 式从零
 随 \bar{u} 增加, 达到极大, 随后再减小, 方程解化为 $\bar{u} \leq \bar{u}_0$ (第一零点)
 区间内成立. 超过 \bar{u}_0 则不符号物理意义.

但是我们用方程 (3.3.3E-7). $\frac{du}{d\bar{u}} = 0$ 也可使方程成立
 表示 $u = \text{const}$. 也即磁逆带膨胀 ($\bar{u} \neq \bar{u}_0$), 而膨胀部分半径不变
 令 u_1 为原来的半径 a , $\therefore u = u_1 (= a^2)$, 且 $\bar{u} > \bar{u}_0$ 时. $u = u_1$ (2.3.3E-10)
 同时膨胀速度也不变. 原来的条件是 $u (\bar{u}_0 = \bar{a}^2) = u_1 (= a^2)$

$$\text{则 } u (\bar{u}_0) = u_1 (= a^2)$$

方程 (3.3.3E-8) 的解的待定常数现变为 $A = \frac{u_1}{\bar{u}_0^{\frac{1}{2}} J_1 (2\bar{u}_0^{\frac{1}{2}})}$

$$\text{式中 } u_1 = a^2. \quad \bar{u}_0 = 1.4458.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_1 \frac{\bar{u}^{\frac{1}{2}} J_1 (2\bar{u}^{\frac{1}{2}})}{\bar{u}_0^{\frac{1}{2}} J_1 (2\bar{u}_0^{\frac{1}{2}})} \\ u = u_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (0 < \bar{u} < \bar{u}_0) \\ \uparrow \text{由 (3.3.3E-9) 式知 } \bar{u} \text{ 由 } \bar{u}_0 \text{ 增大} \end{array} \quad (3.3.3E-11)$$

到此我们有 \bar{B}_x 和 \bar{B}_y . 但是 $\bar{u}_1 < \bar{u}_0$ (零点)

生成函数 \bar{f} 由 (3.3.3E-6') 表示

$$\bar{f} = \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \frac{df}{du} (fu) - \frac{u^2}{\bar{u}} \frac{df}{du}$$

$$\text{而已求得 (1.3.25) } \frac{df}{du} (fu) = 2\mu (1 - 2u) \approx 2\mu$$

$$\frac{df}{du} = -2\mu$$

$$\therefore \bar{f} = \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 \cdot 2\mu + \frac{u^2}{\bar{u}} \cdot 2\mu$$

$$\text{由 } (3.3.3 \bar{E}^{-10}) \text{ 得: } \frac{du}{\bar{u}} = \frac{u_1}{\bar{u}_1} \frac{J_0(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})}{J_1(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})}$$

$$\text{由 } (3.3.3 \bar{E}^{-9}) \text{ 得: } u = u_1, \frac{\bar{u}^{\frac{1}{2}} J_1(2\bar{u}^{\frac{1}{2}})}{\bar{u}_1^{\frac{1}{2}} J_1(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})}, \text{ 为一常数.}$$

$$\frac{u^2}{\bar{u}} = \frac{u_1^2 J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})}{\bar{u}_1 J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})}$$

$$\text{由 } (3.3.3 \bar{E}^{-10}) \text{ 得: } \left(\frac{du}{\bar{u}} \right)^2 = \frac{u_1^2 J_0^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})}{\bar{u}_1 J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})}$$

$\frac{u^2}{\bar{u}}, \left(\frac{du}{\bar{u}} \right)^2$ 为常数
代入生成函数

$$\bar{f} = 2\mu u_1 \frac{J_0^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}) + J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})}{\bar{u}_1 J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})}$$

$$\bar{B}_q^2 = -\frac{1}{2} \bar{R} \frac{d\bar{f}}{d\bar{R}} = -\bar{u} \frac{df}{du} = -2\mu \bar{u} \cdot \frac{u_1^2}{\bar{u}_1 J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})} \cdot \bar{u}^{\frac{1}{2}} [-J_0(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}) J_1(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}) + J_1(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}) J_0'(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})]$$

利用 [1] 关係式 $J_0' = -J_1$

$$\frac{\bar{B}_q^2}{2\mu} = -\frac{2\bar{u} u_1^2 \bar{u}^{-\frac{1}{2}}}{\bar{u}_1 J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})} \cdot J_1(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}) [-J_0(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}) + J_1'(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})]$$

$$\text{利用 } J_1'(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}) = J_0(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}} J_1(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})$$

$$\frac{\bar{B}_q^2}{2\mu} = \frac{u_1^2}{\bar{u}_1 J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})} J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{Parker (45)})$$

$$\bar{u}_1 = \bar{a}^2, \quad u_1^2 = a^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left[\frac{\bar{B}_q^2}{2\mu} = \frac{J_1^2(2\bar{a})}{4\bar{a}^2 J_1^2(2\bar{a})} \right] \quad (\text{Priest})$$

$$\bar{B}_g^2 = \bar{B}^2 - \bar{B}_\phi^2 \\ = \bar{f} - 2\mu \frac{u_1^2}{\bar{u}_1 J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})} \cdot J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})$$

$$\therefore \frac{\bar{B}_g^2}{2\mu} = \frac{u_1^2}{\bar{u}_1 J_1^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}})} \cdot J_0^2(2\bar{u}_1^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{Parker (44)})$$

1. 有 $\bar{u} < \bar{u}_0$, (第一类情况) 则 $\bar{f} < \bar{f}_0$. $\bar{B}_\phi > 0$

即 $0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_0$ 内, 有

$$\bar{f}(\bar{u}) = 2\mu u_1^2 \frac{J_0^2(2\bar{u}^{1/2}) + J_1^2(2\bar{u}^{1/2})}{\bar{u}_0 J_1^2(2\bar{u}_0^{1/2})}$$

$$\frac{\bar{B}_\phi^2}{2\mu} = u_1^2 \frac{J_1^2(2\bar{u}^{1/2})}{\bar{u}_0 J_1^2(2\bar{u}_0^{1/2})}$$

$$\frac{\bar{B}_\theta^2}{2\mu} = u_1^2 \frac{J_0^2(2\bar{u}^{1/2})}{\bar{u}_0 J_1^2(2\bar{u}_0^{1/2})}$$

2. 有 $\bar{u} > \bar{u}_0$, 则 定理 (3.3.3-11) 等价 (3.3.3-9) ①, 即 $\bar{f} < 0$ 时 $\bar{u} \leq \bar{u}_0$

的情况 变成

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{B}_\phi^2}{2\mu} = u_1^2 \frac{J_1^2(2\bar{u}^{1/2})}{\bar{u}_0 J_1^2(2\bar{u}_0^{1/2})} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{B}_\theta^2}{2\mu} = u_1^2 \frac{J_0^2(2\bar{u}^{1/2})}{\bar{u}_0 J_1^2(2\bar{u}_0^{1/2})} \end{array} \right.$$

J_0 为第一类根 \downarrow $\frac{\bar{B}_\theta^2}{2\mu} = u_1^2 \frac{J_0^2(2\bar{u}^{1/2})}{\bar{u}_0 J_1^2(2\bar{u}_0^{1/2})}$

且 $\bar{u} = \bar{u}_0$ 时, $\bar{B}_\theta^2 = 0$ ($\because J_0(2\bar{u}_0) = 0$)

② 有 $\bar{u} > \bar{u}_0$, $T_A u = u_1$, 生成函数 $\bar{f} = 2\mu \frac{u_1^2}{\bar{u}}$ ($\because u = u_1, \therefore (\frac{du}{d\bar{u}})^2 d\mu = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{B}_\phi^2}{2\mu} = \frac{u_1^2}{\bar{u}} \quad (= -\frac{1}{2}\bar{R} \frac{df}{d\bar{u}} = -\frac{1}{2}\bar{R} \frac{d\bar{f}}{d\bar{u}}) \quad (\text{P.308 } \bar{B}_\phi^2 = -\bar{u} \frac{df}{d\bar{u}} = 2\mu \frac{u_1^2}{\bar{u}}) \quad \frac{df}{d\bar{u}} = -2\mu \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{B}_\theta^2 = \bar{f} - 2\mu \frac{u_1^2}{\bar{u}} = 0 \end{array} \right.$$

在 \bar{u} 间 $\bar{u}_0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_1$ ($\overbrace{\text{在第一类根和第二类根之间, 由图可得 } \bar{u} \text{ 为根}}$)

仅 T_A 间 $\bar{B}_\phi^2 = \frac{\mu}{2\bar{R}^2}$ 中间有线电流.

上述情况下 1. 有 $\bar{a}^2 = \bar{u}_1$ 小于第一类根值. 在 $0 \leq \bar{R}^2 \leq \bar{a}^2$ 时,

\bar{B}_ϕ 随 \bar{R} 增加而增加 (J_1 的零值比第一类根值大)

\bar{B}_θ 随 \bar{R} 增加而减小 (J_0 的零值比之)

2. 有 $\bar{u} > \bar{u}_0$. 仅 T_A 间 $\bar{B}_\theta^2 = 0$.

Priest 认为上述 1, 2 两种仅在 $\bar{R} \leq \bar{R}_{\text{stability}}$. 即 $\bar{R} < 1.2$, 超过此范围, $\bar{R} = \bar{R}(R)$ 不再单值. 德国物理学家 Parker 和 Browning 变成纯双曲形. Browning and Priest 在计算中加入了 B_R 分量. 他们认为 内部气压强度超过外部气压时, 碰撞带破裂, 外层剥落.

3.3.4 静力学解法

$$\text{方程(3.16): } \frac{dP}{dR} + \frac{1}{2\mu} (\beta_\phi^2 + \beta_\theta^2) + \frac{1}{\mu R} B_\phi^2 = 0$$

1. 有向平衡，选为 $B_\theta = \frac{B_0}{1 + \bar{R}^2/a^2}$

在轴上 ($R=0$) 有极大，随 R 增大而衰减，有特征长度 a 。

$$\because \bar{R} = \frac{2L}{R\beta_\theta} \therefore \text{沿向平衡为 } B_\phi = \frac{\bar{R}RB_\theta}{2L}, \text{ 全程影响系数均一} (= \text{常数})$$

$$(\text{以致均匀扭转，应力分布为 if } B_\theta = \frac{B_0}{1 + \bar{R}^2/a^2}) \quad (3.26)$$

±3 的扭平衡的气体压强，可以求出 $B_\phi = \frac{B_0 \bar{R}^2/2L}{1 + \bar{R}^2/a^2}$

$$\begin{aligned} P + \frac{1}{2\mu} (\beta_\phi^2 + \beta_\theta^2) &= -\frac{1}{\mu} \int \frac{B_\phi^2}{R} dR + C \\ &= -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\bar{R}}{2L} \right)^2 \int RB_\theta^2 dR + C \\ &= \frac{\bar{R}^2 a^2 B_0^2}{8\mu L^2} \cdot \frac{1}{1 + \bar{R}^2/a^2} + C \end{aligned}$$

$$\text{左边 } \frac{1}{2\mu} (\beta_\phi^2 + \beta_\theta^2) = \frac{1}{2\mu} \left[1 + \left(\frac{\bar{R}R}{2L} \right)^2 \right] \frac{B_0^2}{(1 + \bar{R}^2/a^2)^2}$$

$$P = \frac{1}{2\mu} \frac{B_0^2}{(1 + \bar{R}^2/a^2)^2} \left[\frac{\bar{R}^2 a^2}{4L^2} - 1 \right] + C$$

$$\text{当 } R \rightarrow \infty, P \rightarrow P_\infty \therefore C = P_\infty$$

$$P = P_\infty + \frac{\left(\frac{\bar{R}^2 a^2}{4L^2} - 1 \right) B_0^2}{2\mu (1 + \bar{R}^2/a^2)^2} \quad (\text{式中 } 2L \text{ 为轴通径长。})$$

对于无扭平衡的轴通径， $\bar{R}=0$ ，在 $R=0$ 处（轴心） P 有极小

$$P_{\min} = P_\infty - \frac{B_0^2}{2\mu}$$

当扭平衡增加，即 \bar{R} 增大， P 也逐渐增大，至 $\bar{R} > \frac{2L}{a}$ 时，全轴都很大。

2. 第二向平衡

$$\text{轴向平衡均一。令 } B_\theta = B_0, \text{ 扭转角 } \bar{\theta}(R) = \frac{2L B_\phi}{R B_\theta} = \frac{2L B_\phi}{R B_0} = \frac{\bar{\theta}_0}{1 + \bar{R}^2/a^2} \quad (3.26-1)$$

扭平衡轴上 ($R=0$) 有极大值，随 R 增大，扭平衡减小。

$$\text{由此得 } B_\phi = \frac{\bar{B} R}{2L} \cdot \frac{B_0}{1 + \frac{R^2}{a^2}}$$

重写 1. 中的推导，得到

$$P + \frac{1}{2\mu} (B_x^2 + B_y^2) = \frac{\bar{B}^2 B_0^2 a^2}{8\mu L^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R^2}{a^2}} + c'$$

$$\frac{1}{2\mu} (B_x^2 + B_y^2) = \frac{1}{2\mu} [B_0^2 + B_0^2 (\frac{\bar{B} R}{2L})^2 \cdot \frac{1}{(1 + \frac{R^2}{a^2})^2}]$$

$$P = \frac{B_0^2}{8\mu L^2} \cdot \frac{\bar{B}^2 a^2}{(1 + \frac{R^2}{a^2})^2} - \frac{B_0^2}{2\mu} + c'$$

$$= \frac{B_0^2 a^2}{8\mu L^2} \bar{\Psi}(R) + c' \quad [(3.3.4-1) \text{ 式代入}]$$

$$\text{当 } R \rightarrow \infty, \bar{\Psi}(R) \rightarrow 0, \text{ 则 } P = P_\infty$$

$$\therefore P = P_\infty + \frac{\bar{\Psi}(R) B_0^2 a^2}{8\mu L^2}$$

柱形空间为零 ($\bar{\Psi} = 0$), P 均匀 (= 常数), P 在极小化半径 ($R=0$) 处最大.

因为 $\bar{\Psi}(R)$ 越大, 极小化的数值随距离 (R 大于半径) 而改变.

将所有必要研究 柱截面变化的弯曲磁通带的影响.

3.4. 光速磁场

任何恒定电流密度为零时有 $\nabla \times \vec{B} = 0$, $\vec{B} = \nabla \psi$, 磁场是一个势场. 4 称为标量磁势 (scalar magnetic potential), 4 满足 Laplace 方程

$$(3.29')$$

$$\nabla^2 \psi = 0$$

在一封闭体积内, 边界上或 $\frac{\partial \psi}{\partial n} = B_n$ 时 \vec{n} (即方向垂直于 \vec{n})

则 ψ 是唯一的.

假如界面上的 B_n 已知, 那么相应的势场 ψ 由下面公式决定: $\psi = \psi_{\min} - \int \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 dV$. 因此电流不为零的磁场, 尽管界面上 B_n 不同, 但 ψ 一定大于势场所能有的能量. 上述结论对于太阳大气这样的半无限空间也正确, 因为光速远大于光速 (光速), 而磁场的衰减快于 $\frac{1}{L}$.

像极一部分边界由以 B_0 为法向 \vec{B} 的切向分量等于零. 上述结论: 带电
区域最底. 例如圆形. 圆的边界面上的 \vec{B} 切向分量为: $\vec{n} \times (\vec{B}_0 - \vec{B}_1) = \mu \vec{\sigma}$,
 $\vec{\sigma}$ 为面电流密度. 若 \vec{B} 的切向分量连续时, 在 $\vec{r} = 0$. 则带电系统连同带
电粒子无电流密度. 之磁场.

利用分离变量法可得 (3.29) 的解.

① 对于球坐标系 (r, θ, φ) . 有

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-(l+1)}) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{[m]}(x), \quad \text{associated Legendre polynomial.}$$

中等频率, 磁场由 ψ 定

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

$P_l(x)$ 是 Legendre 多项式

② 对柱坐标系 (R, θ, z) . 有

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_n J_n(R) + d_n Y_n(R)] e^{in\theta \pm kz}$$

Y_n, J_n 为 Bessel 函数. 其中 Y_n 为 Neumann 函数.

* 当 R 为子元时. 分离变量 $\psi = D(R) \bar{\psi}(\varphi)$

代入 Laplace 方程 得得

$$\bar{\psi}(\varphi) = A_1 \sin m\varphi + A_2 \cos m\varphi$$

设 $D = D(R)$, 且 R 有波动方程为

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \frac{dD}{dR}) - \frac{m^2}{R^2} D = 0$$

$$R^2 D'' + R D' - m^2 D = 0$$

此为 跃变型 方程, 作变量代换 $t = \ln R$, 方程化为

(部教化, 教育出版社, P.236)

$$\frac{d^2 D}{dt^2} - m^2 D = 0$$

当 m 为整数时. 方程的解是:

$$D_0 = A_0 + B_0 t = A_0 + B_0 \ln R \quad (m=0)$$

$$D_m = A_m e^{imt} + B_m e^{-imt} = A_m R^m + B_m R^{-m} \quad (m \geq 1)$$

$\therefore \psi$ は E の解である

$$\psi = (k_n R + \sum_{n=0}^{\infty} (C_n R^n + D_n R^{-n})) e^{int}$$

上式が解の定義より明らかに $\psi(p)$ は

3.5. 磁场

在方程 $\mathbf{0} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g}$ 中，如果 Lorentz 力占支配地位，即等高物体的 $\beta \ll 1$ ，以重力只及 $H \ll \frac{1}{\beta}$ ，就有磁场 $\vec{j} \times \vec{B} = 0$ (3.30)

式中 Λ 为常数。 $\Lambda = \frac{P}{\rho g}$, $\beta = \frac{2\mu P}{B^2}$, $\therefore \frac{\Lambda}{\beta} = \frac{1}{\rho g} \cdot \frac{B^2}{2\mu}$ 要使 Λ 变成 $H \ll \frac{1}{\beta}$ 必须引为次，可以忽略。在运动电荷上，这些条件可以满足。不带电的磁压不超过气压，是有磁场区域。上层日冕，气体密度很大，磁场也很强，也是有磁场区域。地球和恒星日冕则为无磁场区域。

根据 (3.30) 式, $\therefore \vec{j} \parallel \vec{B}$, 這一式可写成

$$\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B} \quad (3.31)$$

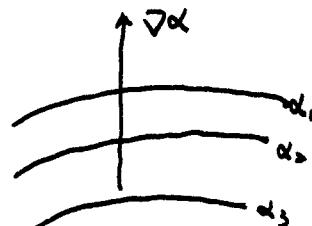
α 是常数的系数， α 和各根磁力线平行常数，以下述的进路可以着手。对 (3.31) 取散度，左边为空

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \alpha = 0 \quad (3.32)$$

该式表示沿 \vec{B} 方向， α 为常数，或者 \vec{B} 与 α 等于常数的面上。因为常数即为梯度在该方向上的投影。

由 (3.32) $\vec{B} \perp \nabla \alpha \therefore \vec{B}$ 和 α 为常数的面上。

$\therefore \vec{j} \parallel \vec{B} \therefore j$ 也平行 α 为常数的面上。



当每一根磁力线上 α 都相等时，就是线性或者称为零次磁场 (3.31) = 0 取之及 $\nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} = \alpha \nabla \times \vec{B} = \alpha^2 \vec{B}$

$$\therefore (\nabla^2 + \alpha^2) \vec{B} = 0 \quad (3.33)$$

这是线性方程。但一般情况下， α 不是常数，方程是非线性的。

3.5.1 一般原理

由(3.30)式给出的方程，在考虑非线性时，这个高斯定律很好。假如有一个体积为 V ，其边界为 S 的封闭系统，则要求边界面上的 B_n 归零。

为保证电流流孤立，要求 $\vec{E} = 0$ ，从而感应电压 $\nabla \cdot \vec{E} = \vec{E} \times \vec{B} = 0$ (这是单位)

和外场无明显变化。(引入矢势 \vec{A} 后， $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ， $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ (对于
导体)是等价的 $\therefore \vec{E} = 0$ ，即 $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$)。体积 V 中，磁场强度有以下
办法， \vec{A} 为无场的，或者对于一个封闭系统，磁场极化的话，必是
 $A = \text{常数}$ 的(净电空)无场的。但是反过来，若 $\vec{A} = 0$ ，无场就必须
满足 $\vec{B} = 0$ 这不加证明。

1. 事实上成立的无场强度不强。下面就来讨论这一类，计算 Lorentz
力与 \vec{r} (位矢)关系的积分。在 Virial 定理的推导过程中已用到过。
位矢 \vec{r} 从坐标系原点出发。

$$\begin{aligned} \int \vec{r} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) dV &= \int \vec{r} \cdot \left[-\nabla \frac{1}{2\mu} B^2 + \nabla \cdot \vec{B} \frac{\vec{B}}{\mu} \right] dV \\ &= \int \left[-\nabla \cdot \left(\vec{r} \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \right) + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \nabla \cdot \vec{r} \right] dV + \frac{1}{\mu} \int \nabla \cdot [(\vec{B} \vec{B}) \cdot \vec{r}] dV - \frac{1}{\mu} \int \vec{B} \vec{B} : \nabla \vec{r} dV \end{aligned}$$

利用公式 $\nabla \cdot (\varphi \vec{a}) = p \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \varphi \cdot \vec{a}$ φ 为标量
 $\nabla \cdot (\vec{A} \cdot \vec{a}) = (\nabla \cdot \vec{A}) \cdot \vec{a} + \vec{A} : (\nabla \vec{a})$

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \int -\frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \vec{r} \cdot d\vec{s} + \frac{3}{2\mu} \int \vec{B}^2 dV + \frac{1}{\mu} \int (\vec{B} \vec{B} \cdot \vec{r}) \cdot d\vec{s} - \frac{1}{\mu} \int \vec{B} \vec{B} : \vec{I} dV \end{aligned}$$

$$= \int -\frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \vec{r} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{2\mu} \int \vec{B}^2 dV + \frac{1}{\mu} \int (\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

\therefore 无场的，上式应为零

$$\therefore \int \vec{B}^2 dV = \int \vec{B}^2 \vec{r} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \int (\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

当区域边界无限大时，上式应为零，因此体系 V 中的
高斯·法拉第定律，即无场的区域不能由内部电流系统维持 ($\because \vec{B}$
高斯·法拉第定律，即无场的区域不能由内部电流系统维持 ($\because \vec{B}$

又因为是，而 \vec{B} 是（依非电流产生的），因此必须有加速度场，无加速度电
流的加速度电流相矛盾。元力场是可积存在的，但必须在界面上某一个
地方而有力场连接，也就是说 $\vec{j} \times \vec{B} = 0$ 在体积 V ，及其界面 S 上都
成立时，则 $\vec{j} \times \vec{B} = 0$ 即高斯定理，而 S 上不能全成立，有些位置
应该不等于零。因此试看从一立体系内完全闭合的电流来构造元力场
注定要失败。

元力场的有力场支撑，元力场的边界上满足封闭系统的情况，即在
元力场区域内的内部空间可以有封闭体系。

2. 还有一类类似的定理：具有有限质量的磁体不可归结为元力。

因为像物质场以 $\frac{1}{r^2}$ 随距离衰减（或者以 $\frac{1}{r^3}$ 衰减更快），质量

$$W = \int \frac{1}{\mu_0} B^2 dV$$

$$\text{可转换成 } W = \int \vec{r} \cdot \vec{j} \times \vec{B} dV$$

在 $R \gg r$ 上已归结为平行元力场，式为零，即归结为零，因此对于有
有限质量的磁体，必须有奇点，也即不可归结为元力。

3. 轴对称：元力场的轴对称，电流必等于零

轴向场 $\vec{B} = B_R \hat{R} + B_\theta \hat{\theta}$ ，元力场分量（和对称轴平行的
元力）

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} D \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_R}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial R} \right) \hat{\phi}$$

$$\vec{j} \times \vec{B} = j (\beta_\theta \hat{R} - \beta_R \hat{\theta})$$

如果这是元力场 $\vec{j} \times \vec{B} = 0$ ，则必得 $j = 0$ 。

4. Wolter (1958) 讨论 封闭体系内 (V_0)，理想导电率高时，磁媒质是不变量

$$\int_{V_0} \vec{A} \cdot \vec{B} dV = K_0 \quad (3.34)$$

体系中磁能密度的表达式是 - 线性无加权。即 $\alpha = \frac{1}{2}$ 。

说明：① 理想导电率高时的磁感应方程

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

利用磁矢势 \vec{A} ， $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (不含以场部分 $\nabla \times \vec{v} = 0$) 代入上式，有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV = \int \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV + \int \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B} dV \quad (3.35)$$

$$= \int \vec{A} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} dV + \int \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \nabla \times \vec{A} dV$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}, \quad (4-1) \quad \vec{a} = \vec{A}, \quad \vec{b} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{上式} = \int \left[-\nabla \cdot (\vec{A} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + 2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \nabla \times \vec{A} \right] dV$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \nabla \times \vec{A} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{上式} = \int_{V_0} -\nabla \cdot (\vec{A} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) dV$$

$$= - \int \vec{A} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot dS \quad \xrightarrow{\text{积分}}$$

3.5.1 节中已指出 对于封闭体系， $\vec{E} = 0$ ，即 $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ 。

$$\text{则得} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV = 0$$

$$\int \vec{A} \cdot \vec{B} dV = K_0$$

$$② 体系 V_0 内的磁能 $W = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{V_0} B^2 dV$$$

对 \vec{A} 和 \vec{B} 做小扰动之， $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \delta \vec{A}$ ， $\vec{B} \rightarrow \vec{B} + \delta \vec{B}$

(并) 说明 \vec{A} 和 \vec{B} 为常数, 体积 V_0 内 $\delta A \rightarrow 0$ 为零)

和磁通的极化, 但必须微偏心 (3.34) 式, 利用 Lagrangian 等于 (3)

$$\text{乘 } \alpha_0, \quad \Rightarrow \mu \delta W = \int [2\vec{B} \cdot \vec{\delta B} - \alpha_0 \delta(\vec{A} \cdot \vec{B})] dV \\ = \int [2\vec{B} \cdot \vec{\delta B} - \alpha_0 (\vec{\delta A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{\delta B})] dV$$

1-3-11(4-1)式

$$①: 2\vec{B} \cdot \vec{\delta B} = 2\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{\delta A} = 2 \nabla \cdot (\vec{\delta A} \times \vec{B}) + 2(\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{\delta A}$$

$$②: \vec{A} \cdot \vec{\delta B} = \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{\delta A} = \nabla \cdot (\vec{\delta A} \times \vec{A}) + (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{\delta A}$$

$$\Rightarrow \mu \delta W = \int [2\nabla \cdot (\vec{\delta A} \times \vec{B}) - \alpha_0 \nabla \cdot (\vec{\delta A} \times \vec{A}) + 2(\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{\delta A} - \alpha_0 (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{\delta A}] dV$$

$$= \left\{ \nabla \cdot [-2\vec{B} \times \vec{\delta A} + \alpha_0 \vec{A} \times \vec{\delta A}] + 2[(\nabla \times \vec{B} - \alpha_0 \vec{B}) \cdot \vec{\delta A}] \right\} dV$$

$$= \int_{S_0} (-2\vec{B} + \alpha_0 \vec{A}) \times \vec{\delta A} \cdot d\vec{S} + 2 \int (\nabla \times \vec{B} - \alpha_0 \vec{B}) \cdot \vec{\delta A} dV$$

封闭系统 $\nabla \cdot \vec{A} = \text{const. } \delta \vec{A} = 0$

磁通是恒定元力场 $\nabla \times \vec{B} = \alpha_0 \vec{B}$ $\nabla \cdot \delta \vec{A} = 0$ (3.40)

理想导电体
不封闭, 只受
 B_0 作用, 电场
为零. $\therefore \vec{E} = 0, \therefore \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ 为零, 磁通是极化值。

$\delta W = 0$ 表示磁通有极化 (未必为极化). 若非磁性物质, 无论
如何不能进磁场, 实对引作用, 磁化 Lorentz 力为零, 产生功力为零

$$\text{电流密度} h_c = \vec{j} \cdot \vec{B} = \nabla \times \vec{B} / \mu \cdot \vec{B} = \frac{1}{\mu} \alpha B^2$$

$$\alpha = \frac{\mu h_c}{B^2}$$

$$h_m = \frac{h_c}{\alpha^2} \quad (\text{元力场})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \alpha \vec{B} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \nabla \nabla \times \vec{A} \\ \therefore \nabla \times \vec{A} &= \alpha \vec{A} + \nabla \times \vec{B} \\ h_c &= \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{B} = \alpha B^2 \\ h_m &= \vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{B}}{\alpha} \\ &= B^2 - \nabla^2 B \end{aligned}$$

如果找到电流密度与磁感应强度关系, 就有 K_0 和 α 的关系

3.5.2 简单的 $\alpha = \text{const.}$ 例

1. 简单几何形状为 $\vec{B} = (0, B_y(x), B_z(x))$

对称和
 $h_m = \frac{B^2}{\alpha}$
(4) 为常数
等效为常数)

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \times \vec{B} = -\frac{1}{2\mu} \nabla B^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} = 0,$$

$$\vec{B} \cdot \nabla \vec{B} = B_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \vec{B}(x) = 0. \quad \because B_x = 0. \quad \vec{B} \text{ 与 } x \text{ 垂直}$$

$$\frac{d}{dx} (B_y^2 + B_z^2) = 0$$

$$\text{积分得: } B_y^2 + B_z^2 = B_0^2. \quad \text{即}$$

$$\vec{B} = (0, B_0, (B_0^2 - B_y^2)^{1/2}) \quad B_0 \text{ 不变}$$

对于 $\alpha = \frac{\partial}{\partial x} \vec{B}$ 为常数， $\vec{B} = \vec{B}_0 + \alpha \vec{x}$ 分布：

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \alpha (B_0^2 - B_y^2)^{1/2} \quad (B_x = 0)$$

$$\text{积分得 } \sin^{-1} \frac{B_y}{B_0} = \alpha x$$

$$\therefore B_y = B_0 \sin \alpha x, \quad B_z = B_0 \cos \alpha x.$$

2. = 例 2A. 旋转模型

i. 在直角坐标中，设

$$B_x = A_1 \cos kx e^{-kz}$$

$$B_y = A_2 \cos kx e^{-kz}$$

$$B_z = B_0 \sin kx e^{-kz}$$

已知 $\vec{j} \times \vec{B} = 0$ 代入 \vec{B}

(3.4*) + (3.5)

$$x \text{ 分量: } \frac{d}{dx} B^2 = e^{-2kz} \left[-(A_1^2 + A_2^2) k \sin 2kx + B_0^2 k \sin 2kx \right] = 0$$

$$B_0 = A_1 + A_2$$

$$\vec{B} \cdot \vec{B} = 0 \text{ 时: } \frac{d B_x}{d x} + \frac{d B_z}{d z} = 0 \quad (\because \vec{B} \text{ 与 } (x, z) \text{ 的直角轴 } \therefore \frac{d}{dy} = 0)$$

$$-A_1 k \sin kx - B_0 k \sin kx = 0$$

$$A_1 = -\frac{k}{k} B_0, \quad \text{代入 (3.5) 式, 有}$$

$$A_2 = \pm B_0 \left(1 - \frac{k^2}{k^2}\right)^{1/2} \quad \text{由 } 2 B_0 < 0, \quad A_2 = -\left(1 - \frac{k^2}{k^2}\right)^{1/2} B_0.$$

$$\text{磁力线对 } x \text{ 轴的交点为 } t_g, Y = \frac{B_2}{B_x} = \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{k^2}{l^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Y = t_g^{-1} \left(\frac{k^2}{l^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ 当 } l=k, Y=0$$

以上结果可构造一个简单的势场模型 (图 3.8)

(x, y) 平面上, 磁力线形状:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_2}{B_x} = \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{k^2}{l^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \left(\frac{k^2}{l^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} x + C,$$

$$\text{斜率 } t_g = \left(\frac{k^2}{l^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

(x, z) 平面上:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{B_2}{B_x} = -\frac{k}{l} t_g R x$$

$$z = \frac{1}{k} \ln \cos(kx) + C_2$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq kx \leq \frac{\pi}{2},$$

ii. 当 $l=k$, 有 $Y=0$, 为一势场

$$B_x = -\frac{l}{k} B_0 \cos kx e^{-lk} = -B_0 \cos kx e^{-lk}$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = B_0 \sin kx e^{-lk} \quad \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\text{代入 } \nabla \times \vec{B} = \vec{j} \left(B_0 k \cos kx e^{-lk} - B_0 k \sin kx e^{-lk} \right) = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = 0, \therefore \text{为势场}$$

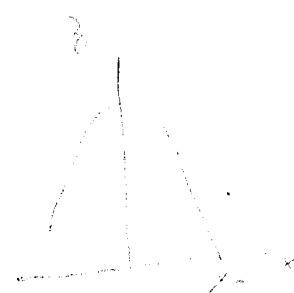
当 $l \neq k$ 时, 则为零. 且必须从零增加到 $\frac{\pi}{2}$.

iii. 当 $l \neq k$,

$$B_x = -\frac{l}{k} B_0 \cos kx e^{-lk}$$

$$B_y = -\left(1 - \frac{l^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} B_0 \cos kx e^{-lk}$$

$$B_z = B_0 \sin kx e^{-lk}$$



$$\text{当 } x=x_0, \theta=0$$

$$0 = \frac{1}{k} \ln \cos kx_0 + C_2$$

$$C_2 = -\frac{1}{k} \ln \cos kx_0$$

$$0 = \frac{1}{k} \ln \frac{\cos kx}{\cos kx_0}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{B} &= -k \left(1 - \frac{l^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} B_0 \cos kx e^{-lk} \vec{i} - k \left(1 - \frac{l^2}{k^2}\right) B_0 \cos kx e^{-lk} \vec{j} \\
 &\quad + k \left(1 - \frac{l^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} B_0 \sin kx e^{-lk} \vec{k} \\
 &= k \left(1 - \frac{l^2}{k^2}\right) B_x \vec{i} + k \left(1 - \frac{l^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} B_y \vec{j} + k \left(1 - \frac{l^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} B_z \vec{k}
 \end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B} = \alpha (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$\mu_0 = \text{式} \quad \alpha = (k^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}$$

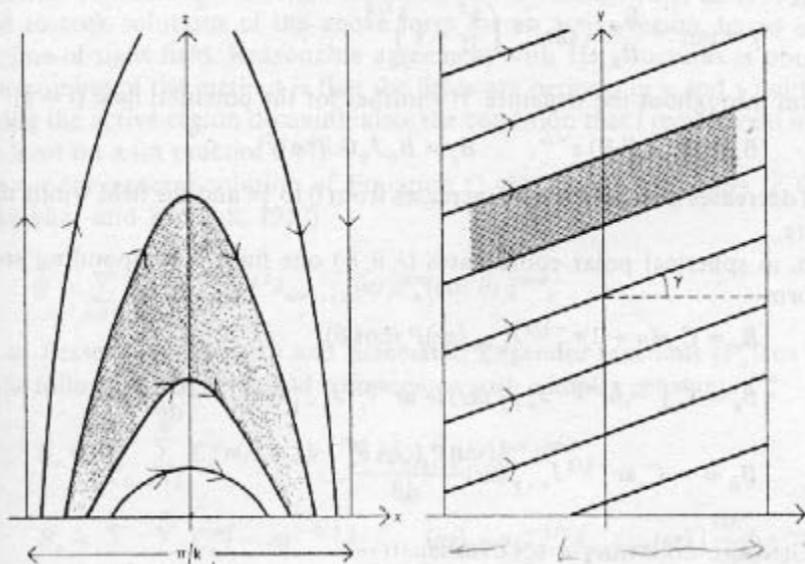


Fig. 3.8. Vertical and horizontal sections through a magnetic configuration described by Equation (3.44) with $B_0 < 0$. It may be used to model a coronal arcade. The shaded loop possesses a pressure that is enhanced at the base and therefore also at all heights (Section 3.2).

3. 材料场 (R, ϕ, θ) 下的非 简谐 模型.

在 3.3.3 节中, 对于线性无加速度得 $B_\phi = B_0 J_1(kR)$, $B_\theta = B_0 \bar{J}_0(kR)$
类似于 (3.44) 式, 材料场中有
(见 §3.3.3 + $\bar{B}_R = 0$)

$$B_R = \frac{\lambda}{k} B_0 J_1(kR) e^{-k\theta} \quad (3.45)$$

$$B_\phi = \left(1 - \frac{\lambda^2}{k^2}\right)^k B_0 J_1(kR) e^{-k\theta}$$

为 R 增加时 $B_\theta = B_0 \bar{J}_0(kR) e^{-k\theta}$
为避免磁场方向相反, Bessel 函数的零阶限于第一类美式
(J_0 和第一类零阶修正 J_1 , 1 阶逆向的修正为 \bar{J}_0 反相)

根据上述表达式, 可以得到无进光和让的简单模型.

$$\frac{d\bar{z}}{dR} = \frac{B_z}{B_R} = \frac{B_0 \bar{J}_0(kR) e^{-k\theta}}{\frac{\lambda}{k} B_0 J_1(kR) e^{-k\theta}} = \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{\bar{J}_0(kR)}{J_1(kR)}$$

利用差分式 $Z_u = \frac{u+1}{x} Z_{u+1} + Z'_{u+1}, u=0, \therefore \bar{J}_0 = \frac{1}{kR} \bar{J}_1 + \bar{J}'_1$

$$\begin{aligned} d\bar{z} &= \frac{k}{\lambda} \left[\frac{1}{kR} \bar{J}_1 + \bar{J}'_1 \right] \cdot \frac{1}{\bar{J}_1} dR \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{kR} + \frac{\bar{J}'_1}{\bar{J}_1} \right] d(kR) \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{kR} d(kR) + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\bar{J}_1} d\bar{J}_1(kR) \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{1}{\lambda} \ln(kR) + \frac{1}{\lambda} \ln \bar{J}_1(kR) + C_3$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\lambda} \ln [(\kappa R) J_1(RR)] + C_2$$

可得第 3.9.

$$\text{第 3.9. } Y = \frac{1}{\lambda} \frac{\beta_R}{B_R} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{R^2}{l^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

当 $l=R$ 时, 有

$$B_R = B_0 J_0(RR) e^{-k\frac{R}{l}} \quad \beta_R = B_0 J_0(RR) e^{-k\frac{R}{l}}$$

$$\text{代入 } \nabla \times \vec{B} = \left(\frac{\partial \vec{B}_R}{\partial z} - \frac{\partial \vec{B}_\theta}{\partial R} \right) \hat{\phi} \quad (\hat{R}, \hat{\theta}, \hat{z} \text{ 为直角坐标系})$$

$$= -k B_R - B_0 J_0' k e^{-k\frac{R}{l}} = -k B_R + k B_0 J_0 e^{-k\frac{R}{l}}$$

利用 $J_0' = -J_1$, 代入。

$$\begin{aligned} \text{上式} &= -k B_R + B_0 k J_1 e^{-k\frac{R}{l}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

可见 $l=R$ 时, 磁场成为势场

当 l 从 R 减少至零, 则 Y 从零增加到 $\frac{\pi}{2}$, 磁场线 (螺线管) 变大。

3.5.3 带电粒子场的散射

1. 求解方程 $(\nabla^2 + \alpha^2) \vec{B} = 0$, 安培定理 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ \vec{B} 为可写成

$\vec{B} = \vec{B}_T + \vec{B}_P$, \vec{B}_T, \vec{B}_P 分别为驻向场和反向场。一般

$$\vec{B}_T = \nabla \times (\vec{r} T(\vec{r})) \quad \vec{B}_P = \nabla \times \nabla \times (\vec{r} P(\vec{r}))$$

\vec{r} 为径向矢量, $T(\vec{r})$ 为驻向势, 有 $\nabla \cdot (\vec{r} T(\vec{r})) = 0$, $\nabla \cdot (\vec{r} P(\vec{r})) = 0$

反向场的强度是驻向场, 反之亦然。下面来证明这一点。取 $\vec{B}_P = \vec{r}$ 为

反向场, 则最后成为 $\vec{B}_T = \vec{r} T(\vec{r})$ 。这样计算一下得证。

$$\nabla \times \vec{B}_P = \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\vec{r} P(\vec{r})) = \nabla \times [\nabla \times \nabla \times (\vec{r} P(\vec{r}))]$$

$$= \nabla \times [\nabla \cdot (\vec{r} P(\vec{r})) - \nabla^2 (\vec{r} P(\vec{r}))]$$

$$= -\nabla \times \nabla^2 (\vec{r} P(\vec{r}))$$

根据 $\nabla \cdot \nabla A = 0$

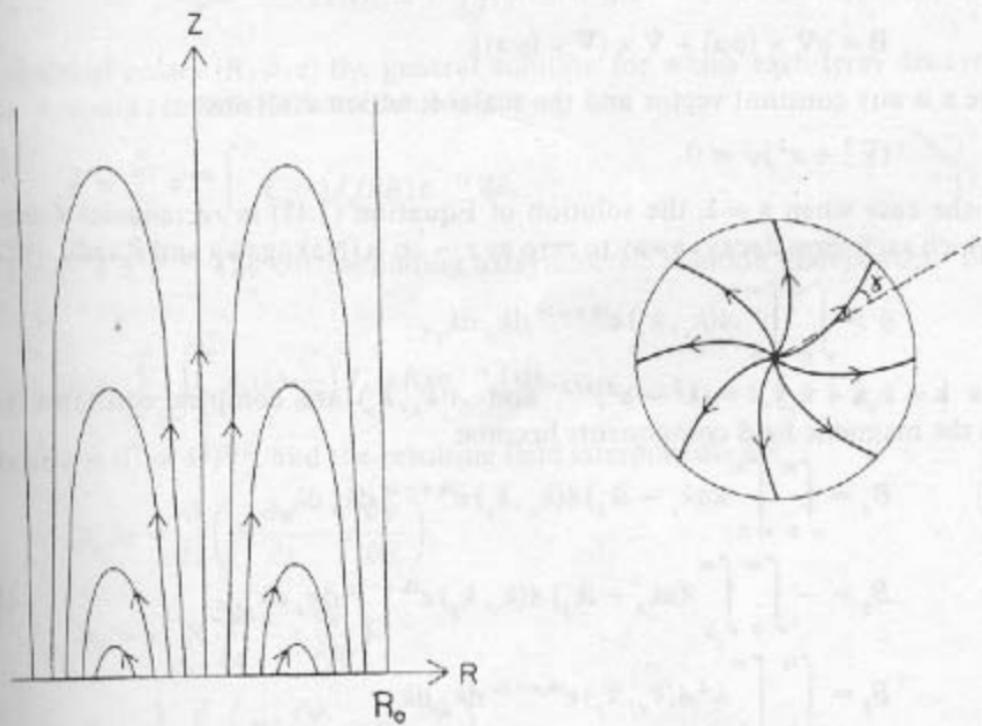


Fig. 3.9. Vertical and horizontal sections through a magnetic structure described by Equation (3.45). It may model the field above a sunspot.

$$\vec{r} \cdot \nabla (\vec{P} \cdot \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{P} \cdot \vec{r}) \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \vec{P}}{\partial x_i} \cdot \vec{r} + \vec{P} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \right]$$

$$= \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial x_i^2} \vec{r} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} + \vec{P} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial y_i}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial z_i}{\partial x} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \vec{I}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{P} + 2 \nabla P \cdot \vec{I} = \vec{r} \cdot \vec{P} + 2 \nabla P$$

$$\nabla \times \vec{B}_p = -\nabla \times [\vec{r} \nabla^2 P + 2 \nabla P] = -\nabla \times (\vec{r} \nabla^2 P) \quad (1-1)$$

$\nabla^2 P$ 为标量函数, $\therefore \nabla \times \vec{B}_p$ 为 $\nabla \times \{ \vec{r} \cdot \vec{I} \} = 5 \vec{B}_T$ - 无关 #

和第 37 页 (ii) 之 i) $\vec{B}_p = \frac{1}{\alpha} \nabla \times \vec{B}_T$

$$\vec{B}_T = \nabla \times (4 \vec{a}) \quad , \quad \vec{B}_p = \frac{1}{\alpha} \nabla \times \nabla \times (4 \vec{a})$$

\vec{a} 为常矢量, 且 $\vec{B} = \nabla \times (4 \vec{a}) + \frac{1}{\alpha} \nabla \times \nabla \times (4 \vec{a})$
由明标量函数及 4 级数;
 $\therefore (\nabla^2 + \alpha^2) \vec{B} = 0 \quad (3.47)$

(3.47)
(注: 由中 P. 47 式知
 α 为常数且非零)

① 为正确结论, 可用之标量函数 P, T 表示

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{P} (\vec{P} \cdot \vec{r}) + \nabla \times (\vec{T} \cdot \vec{r}) \quad (2-1)$$

由上式得 $\vec{B}_p = \vec{B}_T$, 其次 \vec{B}_T . \vec{r} 为单位矢量, $\vec{P} \cdot \vec{r}, \vec{T} \cdot \vec{r}$ 为标量数 A .

所以 $\vec{B}_p = A \vec{r} - \vec{r} \vec{P}$; $P + \Phi, T + \Theta$ 也可表达为 $-A$

$$\therefore \nabla \times \nabla (\Phi \vec{r}) + \nabla \times (\Theta \vec{r}) = 0 \quad (2-2)$$

2) 由 $\vec{B}_p = \frac{1}{\alpha} \nabla \times \vec{B}_T$

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\vec{B}_p + \vec{B}_T) = \alpha (\vec{B}_p + \vec{B}_T) \quad (\text{无加法条件})$$

$$\nabla \times \vec{B}_p + \nabla \times \vec{B}_T = \alpha \vec{B}_p + \alpha \vec{B}_T$$

$$\nabla \times \vec{B}_p = \alpha \vec{B}_T$$

(\because 由 $\nabla \times \vec{B}_p = \alpha \vec{B}_p$)

3) (2-1) 式 = 正确结论

而已知 $\nabla \times \vec{B}_p = -\nabla \times (\vec{r} \nabla^2 P)$

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla (\vec{T} \cdot \vec{r}) + \nabla \times (-\nabla^2 P \vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{B}_T$$

$$\nabla \times \vec{B}_p$$

$$\nabla \times \nabla \times (T \hat{r}) - \nabla \times \vec{B}_T = 0 \quad (\because \vec{B}_T = \nabla \times (Tr^2))$$

$$\nabla \times \nabla \times (T \hat{r}) - \alpha \vec{B}_P = 0 \Rightarrow (\because \vec{B}_P = \frac{1}{\alpha} \nabla \times \vec{B}_T) \quad \text{if } \vec{B}_P = \nabla \times \nabla \times (P \hat{r}) \text{ 代入. 有}$$

$$\nabla \times \nabla \times (T \hat{r}) - \alpha \nabla \times \nabla \times (P \hat{r}) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times [(T - \alpha P) \hat{r}] = 0 \quad (2-3)$$

由(2-3)得 $\nabla \times (-\hat{r} \nabla^2 P) - \nabla \times \vec{B}_P = 0$ if (1-1)式, $\nabla \times \vec{B}_P = \alpha \vec{B}_T = \alpha \nabla \times (Tr^2)$, 且 λ 无式, 有:

$$\nabla \times [(-\nabla^2 P - \alpha T) \hat{r}] = 0 \quad (2-4) \quad (2-3) + (2-4) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times [(T - \alpha P) \hat{r}] + \nabla \times [(-\nabla^2 P - \alpha T) \hat{r}] = 0$$

由(2-2)得 ϕ

$$T - \alpha P = \phi$$

$$-\alpha T - \nabla^2 P = 0$$

$$\because \phi \neq 0. \quad \therefore T = \alpha P$$

$$\nabla^2 P + \alpha T = 0$$

$$\nabla^2 P + \alpha^2 P = 0$$

$$(\nabla^2 + \alpha^2) P = 0. \quad (Nakagawa (1972))$$

$$波动方程 \left(\nabla^2 + \alpha^2 \right) \psi = 0$$

$$\text{分离变量, 令 } \psi = X Y Z, \text{ 得 } \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\alpha^2$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2$$

$$X = C_1 e^{ik_x x} + C_2 e^{-ik_x x}$$

$$\text{同理 } Y = D_1 e^{ik_y y} + D_2 e^{-ik_y y}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = (k_z^2 - \alpha^2) Z. \quad \text{设 } k_z^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \text{令 } k = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$$

$$Z = E_1 e^{kz} + E_2 e^{-kz}, \quad \text{当 } z \rightarrow \infty, \psi \rightarrow 0, \quad \therefore Z = E_2 e^{-kz}$$

从以上求解可知, $X Y \sim e^{i(k_x x + k_y y)}$, 因此仅有 k_x, k_y 与 α 加入矩阵. 令 $A = X Y$, 写成积分式

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dk_x dk_y$$

$$\psi = A e^{-kz}$$

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - kz} dk_x dk_y$$

$$\vec{B} = \nabla \times (\psi \hat{r}) + \frac{1}{2} \nabla \times \nabla \times (\psi \hat{r}) \quad (3.47)$$

$$\text{令 } \hat{r} = \hat{z}, \quad \hat{z} \text{ 为单位矢量}$$

$$\nabla \times (\psi \hat{z}) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{j}, \quad \psi \hat{z} \text{ 在 } z \text{ 有分量为零.}$$

$$\nabla \times \nabla \times (\psi \hat{z}) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \hat{i} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \hat{j} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \hat{k}$$

$$B_x = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$B_y = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$B_z = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$

再求 ψ 的 \vec{k} 的偏导数

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) i k_y e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - kz} dk_x dk_y$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \int_0^\infty \int_0^\infty A(k_x, k_y) i k_x e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - l \delta} dk_x dk_y$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \int_0^\infty \int_0^\infty A(k_x, k_y) (-i k_x l) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - l \delta} dk_x dk_y$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} = \int_0^\infty \int_0^\infty A(k_x, k_y) (-i k_y l) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - l \delta} dk_x dk_y$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty A(k_x, k_y) (-k_x^2) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - l \delta} dk_x dk_y$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty A(k_x, k_y) (-k_y^2) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - l \delta} dk_x dk_y$$

$$B_x = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(-i \frac{1}{\alpha} k_x l + i k_y \right) A e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - l \delta} dk_x dk_y$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty i \left(k_y - \frac{1}{\alpha} k_x l \right) A(k_x, k_y) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - l \delta} dk_x dk_y$$

$$B_y = - \int_0^\infty \int_0^\infty i \left(k_x + \frac{1}{\alpha} k_y l \right) A(k_x, k_y) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - l \delta} dk_x dk_y \quad (3.49)$$

$$B_z = \int_0^\infty \int_0^\infty k^2 A(k_x, k_y) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - l \delta} dk_x dk_y.$$

$$k_y = 0 \text{ 时, } \text{式可由 (3.44) } \quad B \sim \begin{cases} \cos k_x \\ \sin k_x \end{cases} e^{-l \delta}$$

上述结果与 Huygen 法一致. 既然光场在 x 方向上为纯周期性. 另外, l 为实数, 表示 k 有形 P/K [k = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}] 取正虚部, 来自于方向. 且设方程类似, 2. 再由式 Green 函数和 B 的前与空间有关系数.

3.5.4 α 不为常数 ($\alpha = \alpha(x)$) 时

α 不为常数, 则 $\vec{j} \times \vec{B} = 0$. 即要寻找的 \vec{B} 在场中无一元函数, 也即常数项因数将消失.

1. 直角坐标系, \vec{B} 的 y 元素

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$B_x = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

即 $A = -A_y$ 时有 B_x, B_y 为通量密度 (参见 P.368)

$$\vec{B}_x = \frac{\partial A}{\partial z}, \quad B_y, \quad B_z = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad \text{即} \vec{B} \cdot \vec{B} = 0.$$

$\vec{j} \times \vec{B} = 0$ 为分量式

$$\begin{aligned} \hat{x}: \quad j_y B_z - j_z B_y &= \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) B_z - \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) B_y \\ &= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) \left(-\frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial B_y}{\partial x} \cdot B_y \\ &= -\nabla^2 A \cdot \frac{\partial A}{\partial x} - B_y \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 A \frac{\partial A}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}: \quad j_z B_x - j_x B_z &= \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) B_x - \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) B_z = 0 \\ &\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad (3.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{z}: \quad j_x B_y - j_y B_x &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) B_y - \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) B_x \\ &= -\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} B_y - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 A \cdot \frac{\partial A}{\partial z} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \quad (3.54)$$

由 (3.53) 式, 有 $\frac{\partial B_y}{\partial z} \Big|_x \cdot \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \Big|_x$

$$\frac{\partial A}{\partial x} dB_y = \frac{\partial B_y}{\partial x} dA$$

$$\frac{dB_y}{dA} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad \text{即 } B_y = B_y(A)$$

B_y 为通量密度 A 的函数, B_y 与 A 为常数的向上、向下的力学量。

$$(3.52) \text{ 乘 } \frac{dx}{dA} : \quad \nabla^2 A + \frac{d}{dA} \left(\frac{1}{2} B_y^2 \right) = 0 \quad (3.55)$$

[(3.54) 乘 $\frac{dx}{dA}$ 也可得此式]

当参数 $B_y(A)$ 已定时，可以 (3.55) 式得 A ，进而可确定 B_x, B_z .

当 $B_y = \text{常数}$ ， $\nabla^2 A = 0$ ，令为一势场。当 $B_y = C \cdot A$ ， C 为常数，则有

$$\nabla^2 A + \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{2} C^2 A^2 \right) = \nabla^2 A + C^2 A = (\nabla^2 C) A. \quad \text{若 } \nabla^2 C \text{ 为常数}.$$

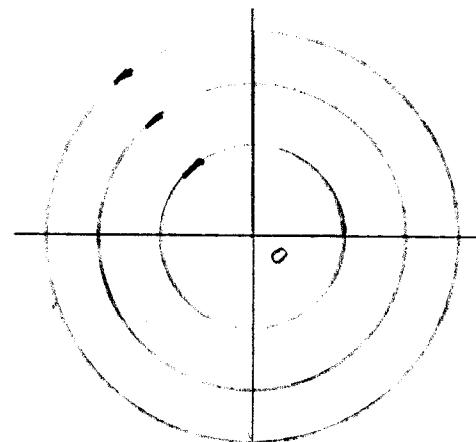
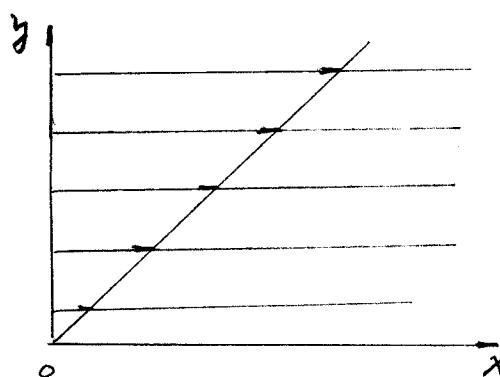
从 $\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B}$ 式，对于常数势场 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ，得 $\nabla^2 \vec{A} = -\alpha \vec{B}$ ，对于 \vec{B} 分量

$$\nabla^2 A_y = -\alpha B_y \quad \text{即} \quad \nabla^2 A = \alpha B_y$$

$$\text{从 (3.55) 可得} \quad \nabla^2 A = -B_y \frac{\partial B_y}{\partial A}, \quad -\frac{\partial B_y}{\partial A} \text{ 为常数，且为 } A \text{ 的函数}$$

从而 (3.55) 为一个非线性方程，可将之为以 A 为未知数

$$y^2 \text{ 为常数. 对于所有的 } A, \text{ 有} \quad \frac{\partial^2}{\partial A^2} \left(\frac{1}{2} B_y^2 \right) \leq 0$$



1. 剪切流动，速度场为

$$u = a y, v = w = 0$$

(u, v, w 为速度沿 x, y, z 轴上的分量)

2. 离心运动，速度场为

$$V_r = 0, V_\theta = \frac{b}{r}$$

其中 b 是常数 (流线是 r 的原点为中心的同心圆)。

试问这三种流动有旋或无旋？

1. 剪切流动 $(\nabla \times \vec{v})_z = (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = -a \neq 0$ 故有旋

2. 离心运动 当 $r \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \hat{z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \hat{z} \\ &= 0 \end{aligned}$$

i. 流体质点的自转有旋，不考虑是否绕圆心转动

ii. 圆心有旋 (如上右图)，则质点有旋，是为刚体

iii. 对于流体质点，其转动不一定有旋。对于流体微指明“哪一类或哪几种已形成旋”。

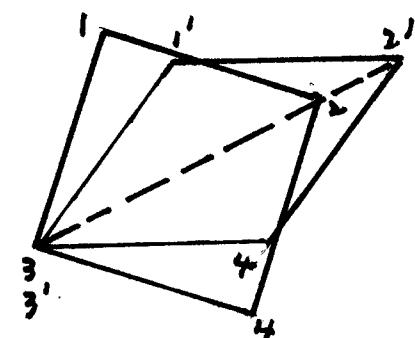
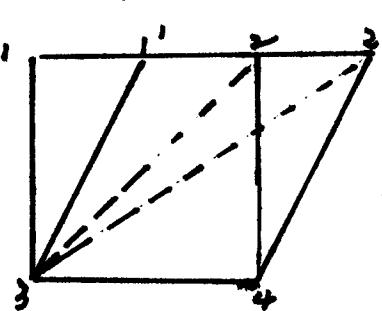
• 切线运动: $u = a \cdot y$, $v = 0$, $w = 0$, a 为常数

在流体中取立方体 1'2'3'4'

过一定时间后, 变成 1'2'3'4'

为菱形, 可以看成三种运动

初速度合成 同步运动

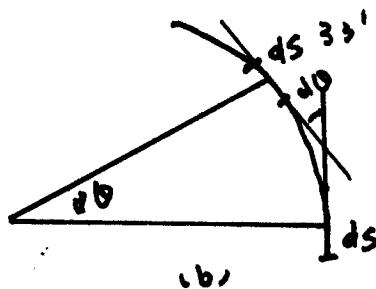
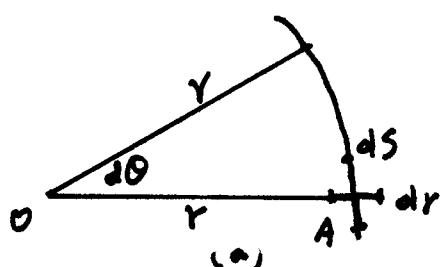


1234 向右平移 34 速度等于 12 , 3 为 $3'$, 4 为 $4'$ 合成.

② 平动 正方形 1234 绕轴 3 转动 12 23 为 2'3' 合成

③ 变形, 切线 1234, 1'2'3'4' 长为 2'3' 合成

• 约当流动



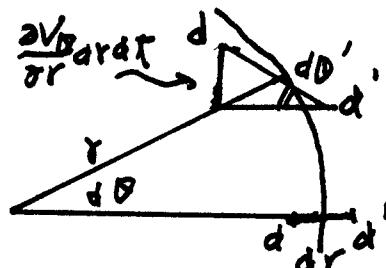
轨迹圆半径 r 为 r 之, 弧长 $ds = 1$ 元半径之 dr , ds (图 a) 经过 $d\theta$ 后, ds 因圆周运动而计算得 $d\theta = \frac{dR}{r} = \frac{V_\theta dt}{r} = \frac{b}{r^2} dt$ (图 b)

对于 dr , $\because V_\theta = \frac{b}{r}$, $d\theta$ 远大于 $d\theta'$

dt 时间内, $d\theta$ 变了 $\frac{\partial V_\theta}{\partial r} dr \cdot dt$

于是 dr 在 dt 时行方向有了 (r) 变

$$d\theta' = \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \cdot dt \quad (\text{多走的弧高 } \frac{\partial V_\theta}{\partial r} dr \cdot dt = d\theta' \cdot dr) \\ = -\frac{b}{r^2} dt$$



从 $d\theta$ 得 $d\theta'$ 时, 可见 dr, ds 为等引线不变, 即没有平行.

2. 指針場 \$(R, \phi, \theta)\$, 磁場 \$\vec{B}\$ 滿足 \$(\frac{\partial}{\partial \phi} = 0)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{R} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \hat{R} + \left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial R} \right) \hat{\theta} + \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RA_\phi) - \frac{1}{R} \frac{\partial A_R}{\partial \phi} \right] \hat{\phi} \\ &= - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \hat{R} + \left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial R} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RA_\phi) \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\text{又 } A = RA_\phi$$

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial \theta}, \quad B_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R}, \quad \therefore B_\phi = \frac{b_\phi}{R} \quad \text{而 } b_\phi \neq 0 \Rightarrow A \neq \text{常數}.$$

$$\text{又 } \vec{j} \times \vec{B} = 0, \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} \times \vec{B} = 0$$

$$\hat{R} \text{ 分量: } \left(\frac{\partial B_R}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial R} \right) B_\theta - \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (B_\phi R) \right] B_\phi = 0$$

$$-\frac{1}{R^2} \frac{\partial A}{\partial R} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} \right) - \frac{1}{R^2} b_\phi \frac{\partial b_\phi}{\partial R} = 0$$

$$\therefore \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3.56b)$$

$$\frac{\partial A}{\partial R} \cdot \Delta_1 A + b_\phi \frac{\partial b_\phi}{\partial R} = 0$$

$$\Delta_1 A + \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{2} b_\phi^2 \right) = 0 \quad (3.56a)$$

(从 \$\hat{\theta}\$ 分量式, 由 \$(3.56a)\$ 得到 \$(3.56b)\$)

$$\hat{\theta} \text{ 分量式: } \frac{\partial b_\phi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial A}{\partial R} - \frac{\partial b_\phi}{\partial R} \frac{\partial A}{\partial \theta} = 0, \quad \text{即 } (3.53) \quad \text{而 } \vec{J} \parallel \vec{B} \quad b_\phi = b_\phi(R)$$

3.5.5 扩散

磁感应强度随时间变化的元力场，通过电阻而扩散，由下列方程描述。

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (3.57)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B} \quad (3.58)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\vec{B} \cdot \nabla) \alpha = 0 \quad (3.59)$$

假设一个扁平凹面， $\vec{v} = 0$ ，并假设 $\alpha = \text{const}$ 。则初始时刻的元力场的扩散仅保持无量度。

若：(3.58) 取旋度，得 $\nabla^2 \vec{B} = -\alpha^2 \vec{B}$ ，(3.57) 式可以写成

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\eta \alpha^2 \vec{B}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\eta \alpha^2 t} \quad \text{磁场无量度不变，化简表达式。}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} = \frac{\alpha}{\mu} \vec{B} = \frac{\alpha}{\mu} \vec{B}_0 e^{-\eta \alpha^2 t} = \vec{j}_0 e^{-\eta \alpha^2 t} \quad (\vec{j}_0 = \frac{\alpha}{\mu} \vec{B}_0)$$

因此当初始磁场 \vec{B}_0 和初始电流密度 \vec{j}_0 既不平行且不垂直时，扩散过程中磁场和电流总保持平行。对于静止平面，反亦然；即扩散时，均保持无量度，且 α 必为常数。

Low (1973, 1974) 找到 α 的常数解的解。然后由(3.57) 确定等离子体的速度。他考虑一维 EBT [类似于(3.43)]: $B_y = B_0 \sin \alpha x$, $B_z = B_0 \cos \alpha x$

$$B_y = B_0 \cos \varphi, \quad B_z = B_0 \sin \varphi \quad (B_x \text{ 为常数})$$

$$\therefore \nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B}$$

$$\vec{j} \text{ 为: } \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial x} = \alpha B_y$$

$$\text{设 } B_x = 0, \quad -B_0 \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha B_0 \cos \varphi$$

$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

利用 \hat{x} 分量，同样可得上式。

问题是：在(3.57) 中，等离子体速度 \vec{v} ，一个问题，若 $\vec{v} = V_x(x, t) \hat{x}$

$$(3.57) \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \\ = -\vec{B} \nabla \cdot \vec{v} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} + \eta \nabla^2 \vec{B}$$

$$\vec{B} = (0, B_y, B_z) = (0, B_0 \cos \varphi, B_0 \sin \varphi)$$

$$\varphi = \varphi(x, t), \vec{v} = V_x(x, t) \hat{x}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{B} \frac{\partial V_x}{\partial x} + (B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z}) V_x \hat{x} - V_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \eta \nabla^2 \vec{B}, \quad B, \varphi \text{ 为随 } (x, t) \text{ 变化的函数}$$

$$= -\vec{B} \frac{\partial V_x}{\partial x} - V_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow -B_0 \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \hat{x} = \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}, \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial x} = -B_0 \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x})$$

计算： $B_y = B_0 \cos \varphi$ 代入，得 $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = C_f \varphi \left[\frac{\partial V_x}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]$

分离变量： $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -C_f \varphi \left[\frac{\partial V_x}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.5.5-2)$

式左右相等：

$$C_f \varphi \left[\frac{\partial V_x}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] = -C_f \varphi \left[\frac{\partial V_x}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

- 特征 $C_f \varphi \neq -C_f \varphi$ 且 $C_f \varphi \neq -1$

$$\therefore \frac{\partial V_x}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{对于随 } B(x, t) \text{ 变化的 } V_x(x, t)$$

这里非线性方程有解是好的，但是线性化方法的。也可求得最简单的非线性 $(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \neq 0)$ 的自相似解。

Low (1973) 中，有以下几点值得注意。

1. 磁场随时间变化，但电场不散时，场的分布不会改变。

2. 稀薄河流湍流中，磁场的扩散，是非线性过程。

3. 磁场在短时间内演化慢，后面突变幅度增加，进入大湍流相
(大湍流阶段)

3.6. 不稳定性和加速度

$$\text{力平衡方程} \quad 0 = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} - \rho g \hat{z} \quad (3.1)$$

沿磁力线方向： $(\vec{j} \times \vec{B}) \perp \vec{B}$ ，故不必考虑该次。可以写为

$$P(\vec{A}, \vec{s}) = P_0(\vec{A}) \exp \left[- \int_s^t \frac{1}{\lambda(s)} ds \right] \quad (3.6)$$

磁场由矢势 \vec{A} 表示，多垂直方向的尺度大于相干尺度时，指数部分近似为 1。

引力可以不计，因此沿着一根特定的磁力线，应该有常数，只与磁场 (\vec{A})
 $\propto \gg \vec{s}$, $\eta \propto P \gg \rho g$ (参考第 3.2 节)

$$\text{有效 } P = P(\vec{A})$$

$$(3.1) \text{ 式} \overline{\text{简化}}: \quad \mathcal{O} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} \quad (3.61)$$

$$\text{考虑轴下式成立} \quad \vec{B} \cdot \nabla P = \vec{j} \cdot \nabla P = 0 \quad (3.62)$$

说明磁场和电流均平行于等压面上，换而言之，压强 P 与磁场 \vec{B} 和电流 \vec{j} 均垂直。
(即水平或垂直方向)

3.2节、3.3节 分别处理指向一极和指向另一极时的磁感应强度。通过元加速度方程可方便地扩展，从而已知压强梯度时，轴对称时的磁场和电流分布中的任意量可写成

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad B_\varphi = \frac{b\varphi}{R}, \quad B_z = \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}, \quad \text{写出电流分量}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \left[\frac{1}{R} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right] \hat{R} + \left(\frac{\partial B_R}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial R} \right) \hat{\varphi} + \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RB_\varphi) - \frac{1}{R} \frac{\partial B_\varphi}{\partial R} \right] \hat{z} \right\}$$

$$j_R = -\frac{1}{\mu_0 R} \frac{\partial b\varphi}{\partial z}, \quad j_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial A}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} \right] = -\frac{1}{\mu_0 R} \Delta A$$

$$j_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial b\varphi}{\partial R}$$

$$\text{轴对称时} \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.61) \text{ 式中} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \text{ 分量: } \frac{\partial b\varphi}{\partial R} \frac{\partial A}{\partial \varphi} - \frac{\partial b\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial A}{\partial R} = 0$$

$$(参见本讲第 P.328) 表示 b\varphi = b\varphi(A)$$

$$\vec{B} \cdot \nabla P = 0, \text{ 于是} \quad \nabla P = \frac{\partial P}{\partial R} \hat{R} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{z}, \quad \text{将上面对} B_R, B_z \text{ 代入}$$

$$\vec{B} \cdot \nabla P = -\frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial R} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial R} = 0$$

$$\text{得} \quad b\varphi = \text{常数}, \quad \text{可得} \quad P = P(A). \quad P \text{ 是} A \text{ 的函数.}$$

$$\text{元加速度方程.} \quad \text{考虑轴下式} \quad \hat{R} \text{ 分量而已.} \quad \frac{\partial A}{\partial R} \Delta A + b\varphi \frac{\partial b\varphi}{\partial R} = 0$$

$$\text{简化得} \quad \Delta A + \frac{1}{\mu_0 R^2} b\varphi \frac{\partial b\varphi}{\partial R} = -\frac{\partial P}{\partial R} \quad (\text{参见 P.328})$$

$$\frac{\partial A}{\partial R} \Delta A + b\varphi \frac{\partial b\varphi}{\partial R} = -\mu_0 \frac{\partial P}{\partial R}$$

$$\Delta A + \frac{d}{dA} \left(\frac{1}{2} b\varphi \right) = -\mu_0 \frac{dP}{dA} \quad (3.63)$$

现在考虑 P , 不考虑元加速度. P 以后没有. 一般地讲, 式 (3.63) 是完全正确的.

当 T 为常数时， $A = A(\lambda) = \frac{k_B T H}{\lambda}$
 则方程 (3.65) 变为 $\nabla^2 A + \frac{\partial}{\partial A} (\frac{1}{2} B_y^2(A)) = -\mu \frac{\partial}{\partial A} P(A, \lambda)$ 。
 然而 $B_y(A) = 0$ ，故 $\lambda = \text{const.}$ 。无剪切时 $P(A, \lambda) = P_0(A)$ 。
 (Zweibel & Hundhausen 1982)

$$\text{方程 } \nabla^2 A + \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{2} B_y^2(A) \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial A} P(A, \lambda) \quad (3.65)$$

$$\text{无剪切, } B_y(A) = 0, \therefore \nabla^2 A = -\mu \frac{\partial}{\partial A} P(A, \lambda)$$

$$\text{特例: } \frac{1}{2} \mu P(A, \lambda) = \frac{1}{2} \alpha^2 A^2 e^{-\frac{3}{2}\lambda} + \text{const.} \quad \text{代入 (3.65)} \\ \nabla^2 A = -\alpha^2 A e^{-\frac{3}{2}\lambda}$$

$$\text{分离变量, } w = e^{-\frac{3}{2}\lambda}, A \text{ 仅与 } (x, z) \text{ 有关}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\alpha^2 A w^2 \quad (3.65-1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial w} \left(-\frac{1}{2\lambda} \right) w, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial A}{\partial w} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial w} \left(w \frac{\partial A}{\partial w} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2\lambda} w \right) \\ = \frac{1}{4\lambda^2} w \frac{\partial}{\partial w} \left(w \frac{\partial A}{\partial w} \right)$$

$$\text{代入 (3.65-1):}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{w^2}{4\lambda^2} \frac{\partial}{\partial w} \left(w \frac{\partial A}{\partial w} \right) + \alpha^2 w^2 A = 0 \quad (3.65-2)$$

$$\text{分离变量 } A = W(w) X(x)$$

$$\frac{1}{8} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{w^2}{4\lambda^2} \frac{1}{W} \frac{d}{dw} \left(w \frac{dW}{dw} \right) - \alpha^2 w^2 = -k^2$$

$$k^2 \text{ 为分离常数, 考虑 } x \text{ 方向为周期性, } k^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0 \quad (3.65-3)$$

$$w^2 \frac{\partial^2 W}{\partial w^2} + w \frac{dW}{dw} + 4\lambda^2 (\alpha^2 w^2 - k^2) W = 0$$

$$\frac{d^2 W}{d w^2} + \frac{1}{w} \frac{dW}{dw} + 4\lambda^2 \alpha^2 \left(1 - \frac{k^2}{(\alpha w)^2} \right) W = 0 \quad (3.65-4)$$

$$\text{设 } \xi = 2\lambda \alpha w, \text{ 代入得:}$$

$$\frac{d^2 W}{d \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dW}{d\xi} + \left(1 - \frac{4\lambda^2 k^2}{\xi^2} \right) W = 0 \quad (3.65-5')$$

$$(3.65-5') \text{ 为 } k \text{ 的 Bessel 方程. } \text{ 设 } k' = 2\lambda \alpha, \text{ 则 } \frac{d^2 W}{d \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dW}{d\xi} + \left(1 - \frac{k'^2}{\xi^2} \right) W = 0 \quad (3.65-5)$$

$$\text{其解为: } \exists \alpha^2 > 0, W(w) = J_{k'}(2\lambda \alpha w)$$

$$\exists \alpha^2 < 0 \quad (3.65-4) \text{ 的解为: } w^2 \frac{d^2 W}{d w^2} + \frac{1}{w} \frac{dW}{dw} - 4\lambda^2 |\alpha^2| \left(w^2 + \frac{k'^2}{4\lambda^2} \right) W = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial W}{\partial z} - \left(1 + \frac{k'^2}{z^2}\right) W = 0$$

这是虚系数 Bessel 方程.

若令 $W(w) = K_k'(2\alpha z/w)$ (\because 本例中 k' 视为参数, 可选定
为某虚系数 Bessel 函数, $w \rightarrow \infty, K_k \neq 0$)
(3.65-3) 式的解为 $X = C \cos kx$

方程 (3.65-2) 式 安排满足条件: $\exists z \rightarrow 0$ 时, $A(x, z)$ 有限, 因此
 $w \rightarrow \infty$ 时, $W(w)$ 有限. (我们) 考虑到已知 (虚数方向) 在虚大半圆
(即内侧) (3.65-2) 式解的后有限 (即 $\exists z \rightarrow 0$ 时, $A(x, z)$ 有限).

$$A(x, z) = A_0 \cos kx Z_k'(2\alpha z/w), \quad (3.65-6)$$

A_0 为常数, Z_k' 由 α 的符号判别为 Bessel 立函数或为虚系数 Bessel
立函数.

$$\text{取边界的解 } B_0(x, z) = B_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2})$$

$$B_0(x, 0) = -\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{z=0} = k A_0 \sin \frac{\pi x}{L} Z_k'(2\alpha z/w) \quad (3.65-7)$$

令 $k = \frac{\pi}{L}$. 利用此一条件, 定 $A(x, z)$ 中的常数 A_0 .

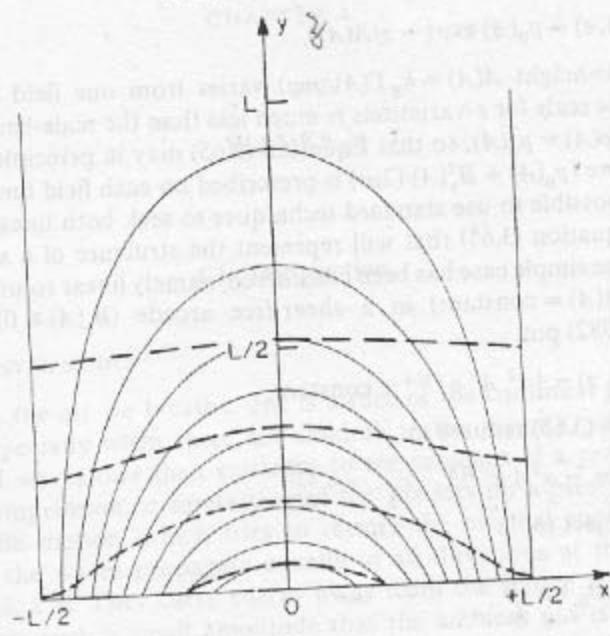
$$B_0 \sin \frac{\pi x}{L} = \frac{\pi}{L} A_0 \sin \frac{\pi x}{L} Z_k'(2\alpha z/w)$$

$$A_0 = \frac{L B_0}{\pi Z_k'(2\alpha z/w)}, \quad \text{从而得 } B_x (= \frac{\partial A}{\partial x}), B_y (= -\frac{\partial A}{\partial z}).$$

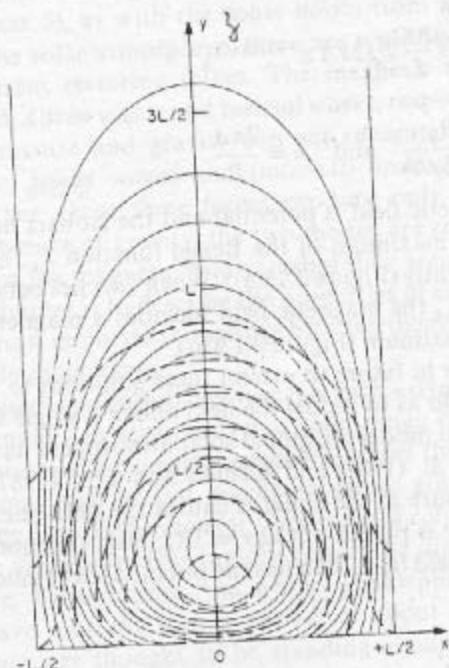
Zweibel 等得到:

$\alpha = 0$ 时, 磁场的势场, 离正极点越近, $B = 2\alpha z/w$ Bessel 函数 \approx 第一极大, 不仅直线和等位线均为向上膨胀, Fig. 3.13.a). $B = 2\alpha z/w$ Bessel 函数 第一极大和第一零点之间, 不仅有中性区, 且有负值, 压缩极区, Fig. 3.13.b).

将湍流模型下扩展到极光带, 得一更上方的模型. 该模型下, 太阳风的模型已经有人提出, 并通过卫星测量证实, 引起磁力线向外部伸展.



(a)



(b)

Fig. 3.13. Magnetohydrostatic arcade models showing magnetic field lines (solid) and isobars (dashed) (a) $2\alpha A = 3$ and (b) $2\alpha A = 5.5$. In each case the arcade width is $L = (2\pi/3)A$, where A is the scale-height (after Zweibel and Hundhausen, 1982).

第四章 波

4.1 引言

4.1.1 基本模式

1. 声波是以压力作为恢复力，气体因向却压缩或稀疏对立压强梯度。于是就运动的作用，试着使气体恢复到原来的平衡状态。
2. 假如气体均匀，声波在所有方向上的传播速度相同，把能量带走，但振幅很大，也即对周围气体的扰动很大。如果振幅足够大，波就可以蔓延，形成激波。
3. 等离子体，如太阳大气，各种模式的波，只有恢复力的单独作用或是几种恢复力耦合的作用

波

1. Alfvén 波

2. 惯性 (inertial) 波

3. 压缩 (compressional) Alfvén 波

4. 声波

5. 重力波

6. 三种磁声重力波

7. 磁声波

8. 声重力波

自动力

磁恢复力

Coriolis 力

磁压力

等离子体压力

重力

磁压力

等离子体压力 } 一类波

重力

磁压力

等离子体压力 } 二类波

等离子体压力 } 三类波

重力

4. 太阳大气中的波

- ① 移动半影波 (running penumbral waves), 从本影向外传播.
很可能是快磁声波加波
- ② 大耀斑发生后, Moreton (or flare-induced coronal) 波常从
放电位置发射, 快速越过日面, 可能是快磁声波.
- ③ 磁子光球和色球, 乃至外向有小尺度运动, 周期均 ≈ 300 秒
(5分钟振荡), 被认为是声驻波.
- ④ 波的传播可能产生的主要影响是外层太阳磁场的波加热.
- ⑤ 由未耗散的, 5分钟振荡和超未耗散的, 可以和光球之外
于连深的运动优势, 因此有速度去, 向上传播, 向色球或日冕
传播速度, 便恒定于光球温度
- ⑥ 认为短周期的声速加热到低层色球, 在色球或磁耗散可以
加热较后的色球和日冕

5. 数学处理

- ① 对平衡解用小扰动作用, 考察最终的扰动是否以波的形式
传播
- ② 基本方程作为扰动线性化处理, 该扰动表示为 $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$
当地特征速度为 $\omega = \omega_0(k)$

4.1.2 基本方程

- ① 先讨论波的基本方程是连续性方程, 动量方程, 能量方程以及
电流方程

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} + \rho \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}/\mu - \rho g \vec{z}^{\circ} - 2\rho \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (4.2)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{\rho r} \right) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \quad (4.4)$$

$$\vec{V} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.5)$$

电流和密度由下式[4.3]决定

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{B}/\mu \quad , \quad T = \frac{mP}{k_B \rho}$$

上述方程组是相对于惯性系的，随太阳一起转动的参考系中
运动的速度 $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{v}'$ 。物体绝对速度 $= |\vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{v}'| \ll$ 等效
Maxwell 方程组中忽略的转动效应。因为转动所以有 Coriolis 力
 $-2\rho \vec{\omega} \times \vec{v}'$ ，但是因为在转动参考系中，将该次作为惯性力处理。化
半径 r 连续形式上进深运用，惯性力 $\omega^2 r \vec{r}$ 可忽略，该次
可归结为重力场内 $[\text{等效重力 } -\rho \nabla | \vec{r} \times \vec{\omega} |^2] = \frac{1}{2} \rho \nabla V^2 = \rho v \frac{dv}{dr} \vec{r}^{\circ}$
 $= \rho \omega r \omega \vec{r}^{\circ} = \rho \omega^2 r \vec{r}^{\circ}]$ 。重力 $-\rho g \vec{z}^{\circ}$ ， g 为常数。子午圈
随太阳表面向向外，简单起见，设等高时半径不随高度而变，等高
时 $\rho \vec{P}^r = \text{const}$ 。要使等高成立，则要求 $T \ll \frac{P}{L}$ ， L 为周期。

L 为质量损失系数，至圆周力 (单位体积)

$$(\text{根据 (2.28d) }) \quad \frac{P^r}{r-1} \frac{D}{Dt} (\rho \vec{P}^r) = -L \quad \text{即} \quad \rho^r \frac{P^r \vec{P}^{r-r}}{\tau} = -L$$

$\therefore \tau L \ll P$ 和 L 周期内的等高的耗散远小于运动能

L 可以包括热传导，对流加热，辐射冷却以及小尺度范围的 对流加热。
 例： $\frac{L}{L_r}$ 表示层流时间常数，湍流时间常数 τ_{turb} 对于特征长度 $14m$ ($10^6 m$)，由热传导得到的 $\frac{L}{L_r}$ 为 17500 [这简化可以忽略期间的
梯度，而决定取捨]

设磁场 B_0 平衡地均匀，充满垂直方向分量的等离子体内，等离子体温度均为 T_0 ，密度为 ρ_0

$$P_0(\vec{r}) = \text{const} \times e^{-\frac{B_0}{B_0 + B_1}} \quad (4.6)$$

压强 $P_0(\vec{r}) = \text{const} \times e^{-\frac{B_0}{B_0 + B_1}}$ $\because T = T_0$
 这里 $\lambda = \frac{P_0}{\rho_0 g}$ 为不小于 (定数子的函数) 光速 c 的典型值为 150 公里，
 日冕中 10 万公里 ($10^8 m$)

$$\text{平衡态 } P_0, P_1 \text{ 为 } \rho = -\frac{\partial P_0}{\partial \vec{r}} - P_0 g$$

考虑偏高平衡 V_0 和运动

$$P = P_0 + P_1, \quad \vec{V} = \vec{V}_1 \quad (\vec{V}_0 = 0), \quad \vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{P}_1, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

线性化方程 (4.1)-4.5)，忽略 $P_1 V_0$ 和 P_1^2

$$(4.1) \text{ 式为 } \frac{\partial P}{\partial \vec{r}} + \vec{V} \cdot \nabla P + P \vec{V} \cdot \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \vec{r}} + \vec{V}_1 \cdot \nabla P_0 + P_0 \nabla \cdot \vec{V}_1 = 0 \quad (4.8)$$

$$(4.2) \text{ 式左端} = P \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}} = (P_0 + P_1) \left[\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial \vec{r}} + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{V}_1 \right] \\ = P_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial \vec{r}}$$

$$P_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial \vec{r}} = -\nabla P_1 + (\vec{V}_1 \cdot \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 / \mu - P_1 g \vec{z}^0 - 2P_0 \vec{B}_0 \times \vec{V}_1 \quad (4.9)$$

\vec{z}^0 为 z 方向单位矢量

$$(4.3) \text{ 式: } \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho r} \right) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{P}{\rho r} \right) + \vec{V} \cdot \nabla \left(\frac{P}{\rho r} \right) \\ = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \vec{r}} - \gamma P \vec{P}^{k-1} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{r}} + \vec{V} \cdot \left(\frac{1}{\rho r} \nabla P - \gamma P \vec{P}^{k-1} \nabla P \right)$$

$P = P_0 + P_1$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$ 代入, 由 P_0, ρ_0 为常数, v_1 为未知数

$$\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 - C_s^2 \left(\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 \right) = 0 \quad (4.10)$$

$$\text{式中 } C_s^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} = \frac{\gamma k_B T_0}{m} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial t} \Rightarrow \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \quad (4.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (4.12)$$

方程(4.8-4.12) 可以合併为一个方程。

(4.9) 式对 t 求导数。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = -\nabla \frac{\partial \vec{P}_1}{\partial t} + (\nabla \times \frac{\partial \vec{P}_1}{\partial t}) \times \vec{B}_0 / \mu - g \frac{\partial \vec{P}_1}{\partial t} \vec{z}^0 - 2 \vec{\rho}_0 \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$$

分别用(4.8), (4.10), (4.11)代入。其中(4.10)代入 $\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial t}$ 时用(4.8)代入 \vec{v}_1

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} &= -\nabla \left\{ -(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{P}_0 + C_s^2 [-\vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 - \vec{\rho}_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{P}_0] \right\} + \nabla \times [\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)] \times \vec{B}_0 / \mu \\ &\quad - 2 \vec{\rho}_0 \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + g (\vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 + \vec{\rho}_0 \nabla \cdot \vec{v}_1) \vec{z}^0 \\ &= \nabla [(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{P}_0] + C_s^2 \nabla (\vec{\rho}_0 \nabla \cdot \vec{v}_1) + g [(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{P}_0 + \vec{\rho}_0 \nabla \cdot \vec{v}_1] \vec{z}^0 \\ &\quad + \nabla \times [\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)] \times \vec{B}_0 / \mu - 2 \vec{\rho}_0 \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \quad (4.14-1) \end{aligned}$$

记得 $\vec{P}_0, \vec{\rho}_0 \therefore$ 为常数 可以略去

$$\begin{aligned} \nabla [(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{P}_0] &= \nabla [V_{13} \frac{\partial}{\partial z} \vec{P}_0] \\ &= -g \vec{\rho}_0 \nabla V_{13} - g (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{\rho}_0 \vec{z}^0 \end{aligned}$$

$$C_s^2 \nabla (\vec{\rho}_0 \nabla \cdot \vec{v}_1) = -\gamma \vec{\rho}_0 g \nabla \cdot \vec{v}_1 \vec{z}^0 + C_s^2 \vec{\rho}_0 \nabla (\nabla \cdot \vec{v}_1)$$

代入(4.14-1)式, 得到关于运动速度 \vec{v}_1 的方程:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = C_s^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{v}_1) - (\gamma - 1) g (\nabla \cdot \vec{v}_1) \vec{z}^0 - g \nabla V_{13} - 2 \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla \times [\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)] \times \vec{B}_0 / \mu \rho_0 \quad (4.14)$$

$$\text{设 } \vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

因此可有替代, $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$, $\nabla \rightarrow i\vec{k}$

对于 $B_0 = 0$ 的情况, (4.14) 式简化为

$$\omega^2 \vec{v}_1 = C_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i(Y-1) g(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{g}_0 + ig v_g \vec{k} - 2i\omega \vec{\omega} \times \vec{v}_1 \quad (4.15)$$

当 $B_0 \neq 0$ 时, 则 (4.14) 式最后一项, 因为分子中含 B_0 , 是含有参数 $e^{i\vec{k} \cdot \vec{B}_0}$
的附加振动项且 $\lambda (= \frac{2\pi}{\lambda}) < \lambda$ (振动), $\lambda = \frac{P_0}{\rho_0 g} = \frac{C_s}{Y g}$. 该振动引起
的子波变化量 \vec{v}_1 , P_0 可看作向却常数 (决定波长 λ), 这样 (4.14) 式
在 $B_0 \neq 0$ 时, 变成

$$\omega^2 \vec{v}_1 = C_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i(Y-1) g(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{g}_0 + ig v_g \vec{k} - 2i\omega \vec{\omega} \times \vec{v}_1 + \left\{ \vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)] \right\} \times \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad (4.16)$$

方程 (4.15) (4.16) 是本章讨论波模式的基础. 它要解决就是寻找色
散关系 $\omega = \omega(\vec{k})$. 故本作为色散关系的力学以及重力方向和磁场方向
共同的影响. 方程 (4.15) (4.16) 中因为 \vec{v}_1 有三个分量, 因此可得到三个方程.
令系数行列式为零即可找 原式上 列色散关系.

通过色散关系可以得到

i. 相速度 $v_p = \frac{\omega}{k}$, 在 \hat{k} (单位矢) 方向传播

ii. 群速度 $\vec{V}_g = \frac{d\omega}{dk}$, 且由传播下 $V_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}$, $V_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y}$, $V_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z}$
由一般波速构成的色散速度称为群速度.

群速度是能量传输的速度, 一般在大小和方向上与相速度不同.

相速度随波长而变, 称为色散. 当 ω 线性正比于 k 时, 为非色散.
这时相速度等于群速度. 波在方向上各个质点传播, 相速度随传播
方向的不同而不同. 有三个方向值得注意: 不磁场, 重力和转动, 从而使
问题变得复杂.

4.2 声波

当 $g = B_0 = \Omega = 0$, 仅有压强梯度作为恢复力, 用扰动速度 \vec{u} 和压强

(4.15) 式两边为

$$\omega^2 \vec{v}_l = c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_l)$$

(4.18)

设柱束 \vec{k} , 且假定 $\vec{k} \cdot \vec{v}_l \neq 0$, 则有

$$\omega = k c_s$$

这就是声波的色散关系, 柱形波动的往返是此声波是非色散的.

$$\omega = k c_s$$

(4.19)

声波在所有方向上以同一相速度传播. 相速度 $v_p = \frac{\omega}{k} = c_s$.

群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c_s$. 沿 \vec{k} 方向传播

声速 $c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}$. 一个大概值

$$\gamma = \frac{5}{3}, m = 0.5 m_p \quad (\mu = 0.5, \mu_p \text{ 为太阳的平均质量}, \text{以 } m_p \text{ 为单位})$$

$$c_s \approx 166 T_0 \frac{m}{K} s^{-1}$$

从光球层日冕, 声速从 10 km s^{-1} 增至约 200 km s^{-1} 可近似看作声波.

$\vec{k} \cdot \vec{v}_l \neq 0$ 时, 有 $\nabla \vec{v}_l \neq 0$. 即等离子体可压缩, 而通过纵波根据(4.18)式, 速度扰动 \vec{v}_l 也沿 \vec{k} 方向.

4.3 磁波

Lorentz 力可以表示由单位面积的磁通量 B_0 (即磁感应强度) 和磁应力 $\frac{1}{\mu_0} B_0^2$ 所产生的. 因此当因为产生功耗, 所以可以产生横波. 根据胡克定律: 位移 x 与力 F 成正比, $F = kx$, 其中 k 为劲度系数. 于是可以写成 $F = -kx$. 由于 $F = f_x$ (在胡克定律), $f_x = -kx$. 由 $F = -f_x$ 可得 $k = f_x/x$. 令 n 为一切变数, 引入常数 $P_x = \frac{f_x}{x}$, 切变模量 $N = \frac{1}{n}$. 有 $\psi = \frac{1}{N} P_x$. 横波传播速度与切变模量有关 $C_s = \frac{N}{\rho_0}$, ρ_0 为媒质密度.

1) 通过类比, 磁场力也会产生沿磁场方向的横波, 波速是 $\left(\frac{\mu_0}{\rho_0}\right)^{1/2}$

这就是 Alfvén 波

$$V_A = \frac{B_0}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} = 2.8 \times 10^{16} \frac{B_0}{\rho_0^{1/2}} \text{ m s}^{-1}$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}, \rho_0 = mn = 0.6 \text{ m}_p n_0, B_0 \text{ 单位 tesla} = 10^4 \text{ G}.$$



流动区上面的区域 $B_0 \approx 10^3 G$, $n_0 = 10^{16} m^{-3}$, $V_A \approx 300 km s^{-1}$
壳层内部 $B_0 \approx 10^3 G$, $n_0 \approx 10^{23} m^{-3}$, $V_A \approx 10 km s^{-1}$

② 4.2 部分，气体压强服从泡利定律 $Pp = \text{const.}$ 。产生声波，声速为 $(\frac{V_A}{B_0})^{1/2}$ 。
是纵波，通过类比，磁压强 $P_m = \frac{1}{4\pi} B_0^2$ 会随纵波传播而变化磁场
传播 (看 4.1 节)

若磁场冻结在等离子体上，场强和等离子体
密度之间有关系 $\frac{B}{P} = \text{const.}$

因此有 $\frac{B^2}{P^2} = \text{const.}$ ① 磁压强表示 B^2 ，则有 $\frac{P_m}{P^2} = \text{const.}$ 看 4.1 节

由绝热定律相比较 $\frac{P_m}{P^2} - \frac{P}{P_f}$ ，可推出 $\gamma = 2$.

$$\frac{P}{P_f} \Rightarrow \frac{V_A^2}{P_0} = C_s^2; \quad \frac{P_m}{P_0} \Rightarrow \frac{P_m}{P_0} = V_A^2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{4\pi} B_0^2}{P_0} = \frac{B_0^2}{4\pi P_0}.$$

结论：纵磁波的速度也是 Alfvén 速度。

可以期望磁波是行进的，驱动力是 $\vec{j} \times \vec{B}$ (声波的驱动力是
液体或固体的压力)，因此这也可以是横波。

③ 通过能量分析也可支持上述直觉理由。考虑磁波是行进的，可以
沿磁场方向，可以穿越磁场，必须在磁场形成一个闭合(环形)传播。

当处于中性层时，磁场起主导作用时，即我们可令 P_0 (压强) 和 C_s
且 $j = 0$ 为零，方程 (4.16) 可化为

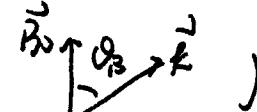
$$\omega^2 \vec{v}_1 = \{ \vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \hat{B}_0)] \} \times \hat{B}_0 V_A^2 \quad (4.20)$$

式中 $\hat{B}_0 = \frac{\vec{B}_0}{B_0}$ 为 \vec{B}_0 方向单位矢量。 $V_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi P_0}$

利用矢量通量公式展开 (4.20) 得到

$$\omega^2 \vec{v}_1 = (\vec{k} \cdot \hat{B}_0)^2 \vec{v}_1 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) \hat{B}_0 + [(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) (\hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1)] \vec{k} \quad (4.21')$$

引入 θ_B (传播方向与平衡总磁场 \vec{B}_0 的夹角)



$$\omega^2 \frac{\vec{v}_1}{v_1^2} = k^2 \cos^2 \theta_B \vec{v}_1 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) k \cos \theta_B \hat{B}_0 + [(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) k \cos \theta_B (\hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1)] \vec{k} \quad (4.21)$$

波动具有以下特点：

1. 从(4.20)式： $\vec{v} \cdot \vec{B}_1 = 0$ (\vec{B}_1 为扰动量) 可推出 $\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0$. [由此可知扰动垂直于波的传播方向]

2. 方程(4.21') 来乘 \hat{B}_0

$$\frac{\omega^2}{v_1^2} (\vec{v}_1 \cdot \hat{B}_0) = (\vec{k} \cdot \hat{B}_0)^2 (\vec{v}_1 \cdot \hat{B}_0) - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) + (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) - (\vec{k} \cdot \hat{B}_0)^2 (\hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1)$$

$$= 0$$

$$\therefore \hat{B}_0 \vec{v}_1 = 0 \quad (4.22)$$

扰动速度 \vec{v}_1 垂直于磁感线 \vec{B}_0 . $\vec{j}_1 \sim n e \vec{v}$, [由 Lorentz 力 $\vec{j} \times \vec{B} \neq 0$, 可以认为该运动为漂移运动].

3. (4.21') 来乘 \vec{k}

$$\frac{\omega^2}{v_1^2} (\vec{v}_1 \cdot \vec{k}) = (\vec{k} \cdot \hat{B}_0)^2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{k}) - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) + k^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - k^2 (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) (\hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1)$$

利用(4.22)式

$$(\omega^2 - k^2 v_1^2) \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0. \quad (4.23)$$

根据(4.23)式 可得 $v_1 = \sqrt{n e B_0 / m}$. 我们在后面的章节中讨论

4.3.1 剪切 Alfvén 波

1. 传播和运动是不可压缩的, $\nabla \vec{v} = 0$, 于是有

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.24)$$

同时利用条件(4.22)式, 和(4.21)式可以简化. 取 k 轴后有

$$\omega = k V_A \cos \theta_B \quad (4.25)$$

这种 Alfvén 波常称为剪切 Alfvén 波 (shear Alfvén waves), 它在代
表波的磁场方向传播. 若取 k 轴则速度传播方向与磁场方向相反.

剪切 Alfvén 波的速度为 $V_A \cos \theta_B$, θ_B 是传播方向与磁场方向的
夹角. 当沿磁场方向传播时, $\theta_B = 0$. 正切 Alfvén 波速. 相速度随
 θ_B 的变化可用极坐标图 (polar diagram) 表示上表方

以沿磁场方向最快

2. 取 z 轴沿 \vec{B}_0 方向, (4.25) 式改写为

$$\omega = k_z V_A$$

群速度 $\vec{v}_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{若 } k_x, k_y \text{ 无关})$

ω 是 k_z, V_A 的函数, 由 k 确定 (4.17)

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \hat{B}_0 = V_A \hat{B}_0 \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = 0 \right)$$

群速度 v_g 在 \hat{B}_0 方向. (x, y 方向为零) 第 4.2 实践课为 Alfvén 波
虚线为压缩 Alfvén 波
尽管 v_g 可以沿磁场方向成任意角 (除 $\frac{\pi}{2}$ 除外) 传播

但当 V_A 速度沿磁场方向传播.

(4.24) 式说明 Alfvén 波是横波, (即) 为运动垂直于传播方向
注意: 不可压缩流体 [4.24) 式成立条件下] 没有声波, 但可以有
Alfvén 波.

如果 P_0, P_0 在空间均匀 (即不随位置变化), 从(4.8) 和(4.10) 式, 可以看出

CHAPTER 4

160

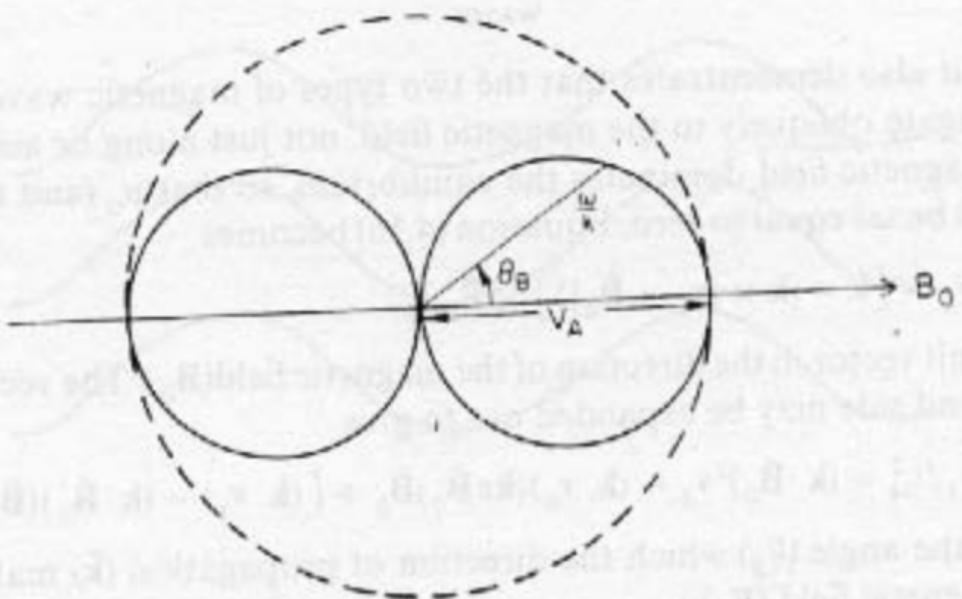


Fig. 4.2. A polar diagram for Alfvén waves (solid curve) and compressional Alfvén waves (dashed curve). The length of the radius vector at an angle of inclination θ_B to the equilibrium magnetic field (B_0) is equal to the phase speed (ω/k) for waves propagating in that direction.

$$\vec{r}_z = k \cos \theta$$

(4.25) may be written

WAVES

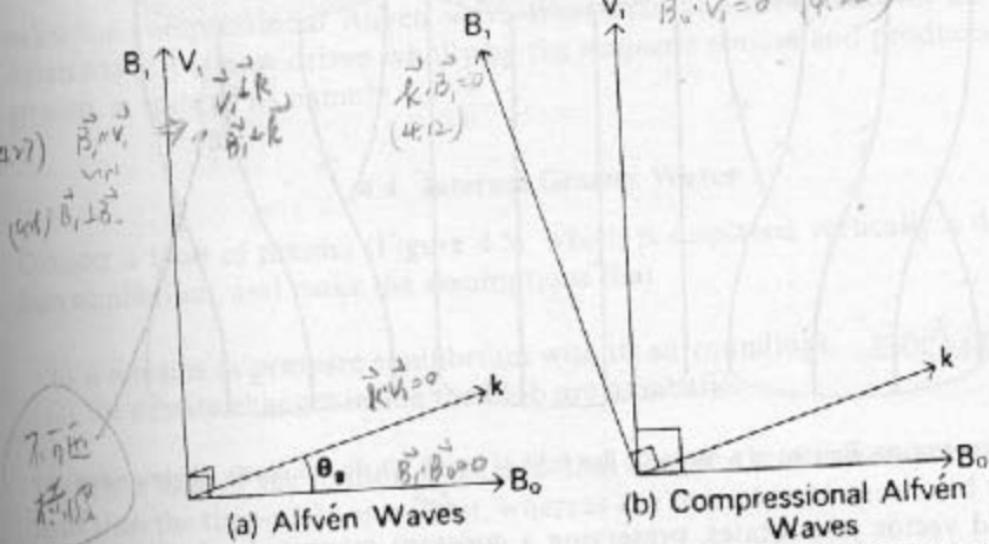


Fig. 4.3. The directions of the perturbed velocity (v_1) and magnetic field (B_1) relative to the equilibrium magnetic field (B_0) and the wave propagation direction (k). For (a) the vectors v_1 and B_1 are both normal to the plane of k and B_0 , whereas for (b) v_1 and B_1 lie in the same plane as k and B_0 .

$$(4.29)$$

$$\begin{aligned}
 (4.21) \rightarrow & v_1 \parallel (\vec{k} - \vec{B}_0) \text{ 方向} \\
 & -\vec{B}_0 \perp v_1 \text{ 平面} \\
 (4.22) \rightarrow & \vec{k} \perp v_1, \vec{B}_0 \perp v_1 \\
 & \vec{k} \perp \vec{B}_0 \\
 & \vec{v}_1 \perp (\vec{k}, \vec{B}_0)
 \end{aligned}$$

当 $\vec{B}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$ 时，有 $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ ，即有 Alfvén 波时，不引起密度和压强的变化，仅有 \vec{v}_1 和 \vec{B}_1

3. 根据(4.24)式 $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$ ， $\vec{v}_1 \perp \vec{k}$ ，由(4.12)式 $\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0$ ， $\vec{B}_1 \perp \vec{k}$ 12. \vec{v}_1 和 \vec{B}_1 之间无关系，高2.1节。根据运动方程有： $P_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla(P_1 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1) + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \nabla \vec{B}_1$

从(4.11)式 $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)$ 可得 $-\omega \vec{B}_1 = \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)$ (4.26)
 $-\omega \vec{B}_1 = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{v}_1 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0$
 $\therefore \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad \therefore \vec{v}_1 = -\frac{\omega}{k_B} \vec{B}_1$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{B}_1$ (扰动量) 平行于 前向声速内，平行 方向

(12-5) 通过 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = k_B B_0 \cos \theta_B$ ，由(4.15) $k \cos \theta_B = \frac{\omega}{v_A} = \frac{\omega}{(\mu P_0)^{1/2}}$
 $\therefore \vec{v}_1 = -\frac{\omega \vec{B}_1}{B_0 \cdot \omega / (\mu P_0)^{1/2}} = -\frac{\vec{B}_1}{(\mu P_0)^{1/2}}$ 表达了 \vec{v}_1 与 \vec{B}_1 的关系，在此为 Alfvén 速度 (4.27)

12. 相反方向传播的波则有 $\vec{v}_1 = \frac{\vec{B}_1}{(\mu P_0)^{1/2}}$ (由 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = -k_B B_0 \cos \theta_B$) 可见 \vec{v}_1 与 \vec{B}_1 方向同相。

(4.22) 式若改写为 $\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1 = 0$ ，利用(4.27)可推得 $\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1 = 0$ 。 (4.28)

即 磁场扰动 \vec{B}_1 垂直于 \vec{B}_0 。

小结：

剪切 Alfvén 波

① $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$ (4.24) 来自不可压缩条件 $\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$ 。
 $\vec{v}_1 \perp \vec{k}$

② $\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0$ 由 $\vec{B}_1 \perp \vec{k}$

③ $\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1 = 0$ (4.22)

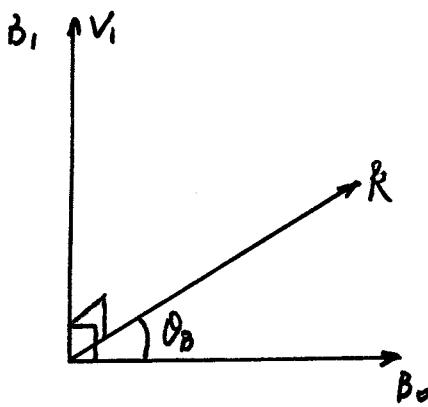
$\vec{B}_0 \perp \vec{v}_1$

④ 破成应力方程 12.1 节 的线性化处理

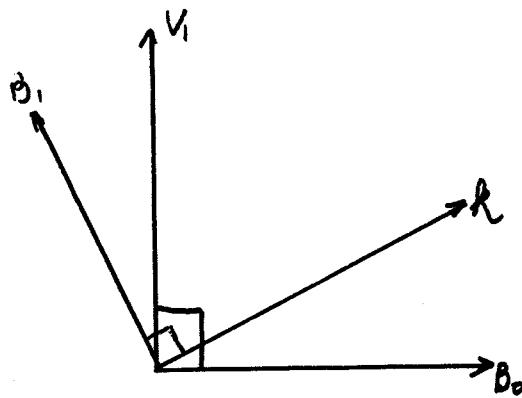
$$\left. \begin{array}{l} \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 \parallel \vec{B}_1 \\ \vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad \vec{B}_0 \perp \vec{B}_1$$

⑤ 扰动量方向的条件，看 4.3

扰动速度 \vec{v}_1 和磁场 \vec{B}_1 相对于平衡磁场 \vec{B}_0 和传播方向 \vec{k} 波



(a) Alfvén 液 (不可压缩流体)
 $\vec{V}_1 \perp (\vec{k}, \vec{B}_0)$ 平面
 $\vec{B}_1 \perp (\vec{k}, \vec{B}_0)$ 平面, $\vec{V}_1 \parallel \vec{B}_1$



(b) 可压缩 Alfvén 液
 $\vec{V}_1 \parallel (\vec{k}, \vec{B}_0)$ 且 (4.29) 式成立
 $\therefore \vec{V}_1 \perp (\vec{k}, \vec{B}_0)$ 平面内
 $\vec{B}_1 \perp (\vec{k}, \vec{B}_0)$ 平面内

4. 磁场与 Lorentz 力表达式的分解

$$\begin{aligned} \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 &= (\vec{k} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 / \mu \\ &= (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_1 / \mu - (\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1) \vec{k} / \mu \end{aligned} \quad (4.29)$$

利用(4.28)式 $\vec{j}_1 \times \vec{B}_0 = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_1 / \mu$

(4.29) 在此第一次利用磁导率, 第二次则为磁压力. 因此以上式可得
 Alfvén 速度与运动力仅为磁压力. (因为不可压缩, 不会有声速).

5. 利用(4.27)式, 可推得 Alfvén 速度式.

$$\frac{\frac{1}{\mu} \vec{B}_1}{\frac{1}{\rho_0} \vec{V}_1^2} = 1 \quad (\text{运动力 } \rightarrow \infty)$$

Alfvén 速度考虑能量分配, 运动力由磁能和动能均分.

6. 振荡, 和对称, 不对称和轴向 B_0 . (假设仅有轴向分量 (而已使得 $\vec{B}_1 \perp \vec{B}_0$ (4.28)) $\vec{B}_1 \sim \hat{\phi} \cos k(V_A t + \phi)$) 称为扭转 Alfvén 波 (torsional Alfvén waves).

正反方向传播的波速 $\hat{\phi} \cos k(V_A t + \phi) + \hat{\phi} \cos k(V_A t - \phi)$

$$-110- = \hat{\phi} \cos k(V_A t + \phi) \cos k(V_A t - \phi) \quad (\text{利用数学表达})$$

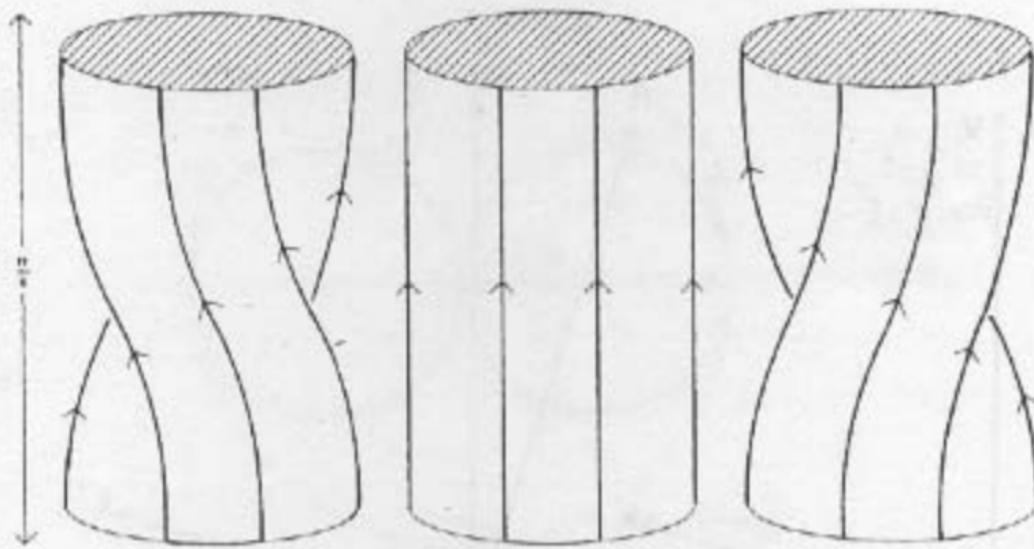


Fig. 4.4. Torsional oscillations of a magnetic flux tube of length π/k due to purely Alfvénic waves.

待到磁通量的扭转提高，可以说逆扰动量 \vec{B} 在一个方向扭转的量就变大。

7. 通常都是小扰动情况下，待到逆波速与扰动振幅的传播，振幅不发生变化的情况下，大多数的扰动传播不能保持原形不变，最典型的就是 Alfvén 波¹。寻常，即使在大振幅，Alfvén 波仍然保持波形不变。
不是小扰动的情况下，也可得到 Alfvén 波。

逆化平面波扰动下，平面波 定义：

在给定的 t , x, y 无关，只与传播方向有关。逆化平面波沿 x 方向传播，又 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 从而有 $B_3 = \text{const} = B_{03}$ ($\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$)
但逆流体不可压缩 $\nabla \cdot \vec{U} = 0$ 则 $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = 0$, 有 $U_3 = \text{const} = 0$ (不然一耗散)
动量方程分量，记得 $U_3 = 0$, $B_{03} = \text{const}$.

$$\text{质量: } \rho_0 \frac{\partial U_3}{\partial x} + \rho_0 U_3 \frac{\partial U_3}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} (P + \frac{1}{2\mu} B^2) + \frac{1}{\mu} B_{03} \frac{\partial B_{03}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (P + \frac{1}{2\mu} B^2) = 0$$

$$P + \frac{1}{2\mu} B^2 = \text{const.} \quad (\text{这个分量的结果, 逆传播方向没有变})$$

平面波沿 x 方向传播， xy 平面上有 \vec{U}_c, \vec{B}_c (垂直于传播方向的平面上)

$$\vec{B} = \vec{B}_{03} + \vec{B}_c, \quad \vec{U} = \vec{U}_3 + \vec{U}_c = \vec{U}_c$$

动量方程分量

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{U}_c}{\partial x} + \rho_0 \vec{U}_c \cdot \nabla \vec{U}_c = \vec{B} \cdot \nabla B / \mu \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$$

(压强 P 不变 (x, y) 从而不 \vec{U}_c 为常数)

$$\therefore \vec{B} \cdot \nabla = (B_{03} \hat{x} + B_c \hat{z}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial t} \hat{z} \right)$$

$$= B_{03} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore \vec{U}_c \cdot \nabla \vec{U}_c = 0 \quad \because \text{左式} = U_c \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}_c, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \right)$$

$$\therefore \rho_0 \frac{\partial \vec{U}_c}{\partial x} = \frac{1}{\mu} B_{03} \frac{\partial B_c}{\partial y} = 0 \quad (\text{其中已利用 } \frac{\partial B_{03}}{\partial y} = 0) \quad (4.3.1-1)$$

由磁感应方程，化不可压缩流体为

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{U} - (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{B}$$

分量： $\frac{\partial \vec{B}_c}{\partial t} = B_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{U}_c - U_c \frac{\partial}{\partial z} \vec{B}_c$

$$\frac{\partial \vec{B}_c}{\partial t} = B_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{U}_c \quad (4.3.1-2)$$

(4.3.1-1) 式对大扰动 ($B_{0z} = \text{const}$)，並將 (4.3.1-2) 代入

$$\frac{\partial^2 \vec{U}_c}{\partial z^2} = \frac{B_{0z}}{\mu_0} \frac{\partial^2 \vec{U}_c}{\partial t^2}, \text{ 关于 } \vec{B}_c \text{ 也可推得同样形式的运动方程}.$$

以上两个 \vec{U} (纵向 \vec{U}_c), \vec{B} (纵向 \vec{B}_{0z} , \vec{B}_c) 均为扰动量

说明沿 \vec{U} 方向有横波传播，速度为 Alfvén 速度，有此传播的速度。

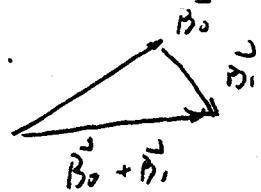
波形保持不变，这是 Alfvén 波的特点，此波的传播速度小，也不衰减。

8. 对于不可压缩流体有 $B_0 \cdot \vec{B}_1 = 0$ (4.8)， $\nabla \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) = 0$ ， $|\vec{B}_0 + \vec{B}_1| = \text{const}$.

又即 $|\vec{B}_0 + \vec{B}_1| = (\vec{B}_0 + \vec{B}_1 + 2\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1)^{1/2} = (\vec{B}_0^2 + \vec{B}_1^2)^{1/2} = \text{const}$.

因为 \vec{B}_1 为扰动，所以波传播过程中 $|\vec{B}_0 + \vec{B}_1|$ 不变，但可以旋转。

$\vec{B}_1 \sim e^{i\omega t}$ Alfvén 波是一种弱偏振波



9. 波长为 λ 的 Alfvén 波，因既妨碍扩散而衰减，衰减时间即扩散时间为

$$\frac{\lambda^2}{\eta} (= \frac{\lambda^2}{\eta}) \text{。大多数有很大阻尼的波衰减要快得多，因为它们差速}$$

从而传播速度 $\ll c$ ，非线性相互作用能把 Alfvén 波的能量耗散为声波能量，然后迅速耗散 (6.3.2 节)

上述等离子体性质，在等离子体压力为零时，且压力为绝热变化时

保持不变

10. Alfvén 波特殊性的 4 条：

- i. 把单 Alfvén 波及双阿波离。
 - ii. XY 平面上横向磁场为 0，横向速度 \vec{U} 以有限球半径的波的形式传播于平行于 \vec{B}_0 方向传播，速度为 Alfvén 速度。
 - iii. 有限幅值扰动，保持以 \vec{B}_0 不变，不衰减，耗散少，保持 Alfvén 速度。
 - iv. 传播过程中，磁场量减弱，而物理量

4.3.2 压缩 Alfvén 波 (compressional Alfvén waves)

$$(4.23) \text{ 式的第 } 2 \text{ 个解} \quad \omega = kV_A \quad (4.30)$$

\vec{v}_1 可以表示为 \vec{k} - 方向 - 速度 v_1 与 \vec{B}_0 垂直。

(4.30) 式表示的是压缩 Alfvén 波，不论传播方向如何，相速都为 V_A (和前 4.2 节线所书)，群速度 $\vec{v}_g = V_A \hat{k}$ (\hat{k} 为单位向量)，能量的传播方向相同。

1. 从(4.21')式可推得 \vec{v}_1 位于 (\vec{k}, \vec{B}_0) 平面内。因为(4.21')式可以写成 $A \vec{v}_1 = B \vec{k} - C \vec{B}_0$ 的矢量形式。

$$\text{从(4.22)式可得 } \vec{v}_1 \perp \vec{B}_0. \quad (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1 = 0, (4.22))$$



\vec{v}_1 在 (\vec{k}, \vec{B}_0) 平面内且垂直 \vec{B}_0 ，所以 \vec{v}_1 一般具有沿 \vec{k} 方向的分量和垂直 \vec{k} 的分量，也就是既有纵波和横波分量。引起密度和压力的变化。

$$2. \text{ 从 Lorentz 力表达式: } \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 = (\vec{k} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 / \mu \quad (4.29')$$

由 $\vec{j}_1 = -\omega \vec{B}_1 = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{v}_1 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0$, 与 1. 中的方程一样, 可判定 \vec{B}_1 位于 (\vec{v}_1, \vec{B}_0) 平面, 再根据振荡律 P.107, 磁波特性 1, $\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0$, $\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0$
 $\therefore \vec{B}_1$ 垂直 \vec{k} (参考前 4.3 (b))

因此可以将 Lorentz 力化 \vec{v}_1 方向, Lorentz 力包括磁感应力和磁场压力的贡献 (见(4.29)式)。

1) 当 垂直磁场传播 $\theta_B = \frac{\pi}{2}$, 方程(4.21)变成 $\frac{\omega^2}{k^2} \vec{v}_1 = (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{k}$ 可见 $\vec{v}_1 \parallel \vec{k}$, 流体的运动速度化 \vec{k} 方向传播, 是纵波, 由磁感应力驱动。

2) 沿磁场方向传播 $\theta_B = 0$, 因此 $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$, 且 $\vec{v}_1 \perp \vec{B}_0 \therefore \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$ (驱动 \vec{v}_1 上下, 与 \vec{B}_0 垂直) 为横波

横波磁波特性 2. $\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1 = 0$ 通过 $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$ - 式代入(4.21)式

得到 $\omega = kV_A$. 压缩 Alfvén 波成为横波等向传播 Alfvén 波.

$$\delta P_i = \frac{\partial P_i}{\partial \rho} \delta \rho$$

$$= -\rho_0 \delta \gamma$$

$z + \delta z$

$\rho_0 + \delta \rho$

$\rho_0 + \delta \rho_0$

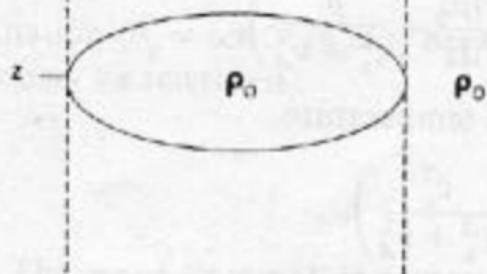


Fig. 4.5 An element of plasma moves vertically from a height z , where the external density is ρ_0 , to a height $z + \delta z$, where the external density is $\rho_0 + \delta \rho_0$.

完全由重力驱动，无压流（尽管有压流时仍满足质量守恒）。

4.4 内重力波 (internal gravity waves)

考虑一固定等高面 (图4.5). 从平衡位置垂直移动 δ_z , 下列假设

i. 这固定等高面与周围环境保持压力平衡

ii. 内部的密度变化是绝热过程。

为使假设i. 成立，则要求运动速度慢以至声波传播速度远小于运动速度。声速是扰动的传播速度，声速快表明运动很快在系统中传播，运动过程可看作准静态过程。

为使假设ii. 成立，则要求运动过程足够快，以便密度保持不变。
(热量交换时间远大于运动时间)

i. $t = \frac{L}{c_s} \ll T$. L : 系统特征长度, T : 特征时间

ii. $T \ll \bar{T}_\theta$ \bar{T}_θ : 系统与外界热交换时间. T : 运动(扰动)过程时间

位于 δ_z 处的等高面上单元内的压强和密度与单元外的值相等，外界的压强记为 P_0 ，密度 ρ_0 。

$$\frac{dP_0}{dz} = -\rho_0 g \quad (4.31)$$

压强梯度的重力平衡。

在 $\delta_z + \delta_\theta$ 处，外界压强为 $P_0 + \delta P_0$ ，密度为 $\rho_0 + \delta\rho_0$ 。根据(4.31)式

$$\delta P_0 = \frac{dP_0}{dz} \delta_z = -\rho_0 g \delta_z$$

$$\delta P_0 = \frac{dP_0}{dz} \delta_z \quad (4.32)$$

$\delta_z + \delta_\theta$ 处等高面上单元内的压强为 $P_0 + \delta P$ ，其中 δP 为内部压强的改变 (外界压强即为内部压强)，内部的密度为 $\rho_0 + \delta\rho$

根据假设i. $\delta P = \delta P_0 = -\rho_0 g \delta_z \quad (4.33)$

假设ii. 表示当等高面上单元上升时压强和密度服从准静态绝热过程的近似式 $P\rho^\gamma = \text{const}$. 可以开路 $\delta P = c_s^2 \delta\rho$ ， c_s 为声速

δP ② (4.33) 式代入, 得

$$\delta P = - \frac{P_0 g \delta \gamma}{C_s^2} \quad (4.34)$$

化简得 $\delta P + \delta \gamma$, 单元内的总压 $P_0 + \delta P$ 和密度 C_s^2 不同, 如果外界
的密度 γ_0 内部密度 γ 有浮力产生. 也即 $(P_0 + \delta P) - (P_0 + \delta \gamma) = \delta P - \delta \gamma$
(外压差) (内部密度)

(已知 $P_0 = P$, (4.31) 式), $\therefore \delta \gamma = g(\delta P - \delta \gamma)$

将 (4.32) 式 $\rightarrow \delta P$ 和式, 又 (4.34) $\rightarrow \delta P$ 表达式代入上式

$$\begin{aligned} \delta P_0 - \delta \gamma &= \left(\frac{d P_0}{d \gamma} + \frac{P_0 g}{C_s^2} \right) \delta \gamma \\ &= \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d P_0}{d \gamma} + \frac{g}{C_s^2} \right) \rho_0 \delta \gamma \end{aligned}$$

定义 $N^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d P_0}{d \gamma} + \frac{g}{C_s^2} \right)$ Brunt-Väisälä 频率 (4.36)

$$2.1 \text{ 浮力 } g(\delta P_0 - \delta \gamma) = -N^2 \rho_0 \delta \gamma \quad (4.35)$$

Brunt 频率是重力场中稳定的气流垂直方向运动而偏高半径随
分层的自然振荡频率.

Brunwt 等式中的一种表示法。

$$利用 \frac{dP_0}{dg} = -P_0 g \quad (4.31)$$

$$理想方程 P_0 = P_0 R T_0$$

(流体无粘性和不可压缩，常压下不考虑)

$$\frac{dP_0}{dg} = R T_0 \frac{dP_0}{dg} + P_0 R \frac{dT_0}{dg}, \quad (4.31) \text{代入左边}$$

$$-P_0 g = R T_0 \frac{dP_0}{dg} + P_0 R \frac{dT_0}{dg}$$

$$从而 \frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{dg} = -\frac{g}{R T_0} - \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dg} \quad \text{代入}(4.36)$$

$$N^2 = -g \left(-\frac{g}{R T_0} - \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dg} + \frac{g}{C_s^2} \right)$$

$$= \frac{g}{T_0} \left(\frac{dT_0}{dg} + \frac{g}{R} - \frac{g T_0}{C_s^2} \right)$$

$$C_s^2 = \gamma R T_0, \quad R = \frac{g^2}{\gamma T_0}$$

$$N = \frac{q}{T_0} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \delta} + \frac{\gamma q T_0}{C_s^2} - \frac{q T_0}{C_s^2} \right) \\ = \frac{q}{T_0} \left[\frac{\partial T_0}{\partial \delta} + (\gamma - 1) \frac{T_0 q}{C_s^2} \right] \quad (4.4-1)$$

绝热过程有关表达式 $P_0 P_0^{-r} = \text{const.}$, P_0 为初状态方程代入, 有

$$T_0 P_0^{-r+1} = \frac{1}{R} \cdot C$$

$$dT_0 P_0^{-r+1} + T_0 (-r+1) P_0^{-r} dP_0 = 0$$

$$dT_0 \cdot P_0 + (1-\gamma) T_0 dP_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial \delta} \right)_{ad} = (\gamma - 1) \frac{T_0}{P_0} \frac{dP_0}{d\delta} \quad (4.4-2)$$

$$\frac{dP_0}{d\delta} = C_s^2, \quad \frac{dP_0}{d\delta} = -P_0 g \quad \text{由上二式可得:}$$

$$dP_0 = \frac{dT_0}{C_s^2} = -\frac{P_0 g}{C_s^2} d\delta$$

$$\frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{d\delta} = -\frac{g}{C_s^2} \quad \text{代入 (4.4-2)}$$

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial \delta} \right)_{ad} = -(\gamma - 1) \frac{T_0 g}{C_s^2} \quad \text{再代入 (4.4-1)}$$

$$N = \frac{q}{T_0} \left[\frac{\partial T_0}{\partial \delta} - \left(\frac{\partial T_0}{\partial \delta} \right)_{ad} \right] \quad (4.37)$$

$\left(\frac{\partial T_0}{\partial \delta} \right)_{ad}$ 是绝热过程中的应变模量, (3) 利用了 $P_0 P_0^{-r} = c$.

通常 N 随应变而变化. 但在平衡温度 T_0 时, (4.37) 式变为

$$N = \frac{(\gamma - 1) g^2}{C_s^2} \quad (4.39)$$

现在考虑有水平方向的应变存在. 离子液体单元内的应变差为 $\delta\bar{P} + \delta\bar{P}_m$, 离子压强 $\bar{P}_m = \frac{1}{\mu} B^2$, 在平衡时, 有 $\frac{\bar{P}}{\bar{P}_m} = \text{const.}$ 且 $B^2 = CP^2$ C 为常数, $\bar{P}_m = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{C}{2\mu} \bar{P}^2$

$$\delta\bar{P}_m = \frac{CP}{\mu} \delta\bar{P} = \frac{B^2}{\bar{P}^2} \cdot \frac{\bar{P}}{\mu} \delta\bar{P} = \sqrt{\lambda} \delta\bar{P}$$

$$\delta\bar{P} = C_s^2 \delta\bar{P}$$

$$\text{流体内部总压强改变 } \delta P_{\text{内}} = \delta P + \delta P_m = (C_s^2 + V_A^2) \delta P$$

$$\text{流动热力学式 } \delta P = \frac{\delta P_{\text{内}}}{C_s^2 + V_A^2}, \quad \text{内外压强差 (19页)}$$

$$\frac{dP_0}{dz} = \frac{dP_m}{dz} = \frac{d(P + P_m)}{dz} = -\rho_0 g$$

$$\therefore \delta P_{\text{内}} = -\rho_0 g \delta z$$

$$\delta P = -\frac{\rho_0 g}{C_s^2 + V_A^2} \delta z, \quad \text{流速小} \quad \delta P = \frac{\partial P_0}{\partial z} \delta z$$

$$\therefore \delta N = g (\delta P_0 - \delta P)$$

$$= g \left(\frac{\partial P_0}{\partial z} + \frac{\rho_0 g}{C_s^2 + V_A^2} \right) \delta z$$

$$= g P_0 \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial z} + \frac{g}{C_s^2 + V_A^2} \right) \delta z$$

垂直方向有速度时的 Brunt-Väistö 数: $N^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial z} + \frac{g}{C_s^2 + V_A^2} \right) \quad (4.39')$

$$\therefore \delta N = g (\delta P_0 - \delta P) = -N^2 P_0 \delta z$$

再加注温效应的条件:

$$P_0 = \rho_0 R T_0, \quad \text{且 } T_0 = \text{const.} \quad dP_0 = R T_0 dP_0$$

$$\frac{dP_0}{dz} = -\rho_0 g \Rightarrow R T_0 \frac{dP_0}{dz} = -\rho_0 g \Rightarrow \frac{dP_0}{dz} = -\frac{\rho_0 g}{R T_0}$$

$$N^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dz} + \frac{g}{C_s^2 + V_A^2} \right)$$

$$= \frac{g^2}{C_s^2} \left(-\frac{C_s^2}{g P_0} \frac{dP_0}{dz} + \frac{C_s^2}{C_s^2 + V_A^2} \right)$$

$$= \frac{g^2}{C_s^2} \left(-\frac{\gamma P_0}{g P_0^2} \left(-\frac{\rho_0 g}{R T_0} \right) + \frac{C_s^2}{C_s^2 + V_A^2} \right)$$

$$= \frac{\gamma^2}{C_s^2} \left(\gamma + \frac{C_s^2}{C_s^2 + V_A^2} \right)$$

{ 温度均匀的 Brunt-Väistö 数
水中有温差时 }

Brown 简单小结：

1. 没有本假设

$$2. N^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dg} + \frac{g}{C_s^2} \right) \quad C_s \rightarrow \text{引入利用绝热系数}$$

$$N^2 = \frac{g}{T_0} \left[\frac{dT_0}{dg} - \left(\frac{dT_0}{dg} \right)_{ad} \right] \quad \because \text{利用 } P\rho^{\gamma} = \text{const} \therefore \left(\frac{dT_0}{dg} \right)_{ad} \text{ 是绝热过程的温度梯度.}$$

3. (速度场) WT.

$$N^2 = \frac{(\gamma-1)}{C_s^2} g^2$$

4. 水平方向有风速

$$N^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dg} + \frac{g}{C_s^2 + V_H^2} \right)$$

5. 水平方向有风速，温度均匀

$$N^2 = \frac{g^2}{C_s^2} \left(\gamma + \frac{C_s^2}{C_s^2 + V_H^2} \right)$$

6. 浮力

$$g(\delta P_0 - \delta P) = -N^2 P_0 \delta z$$

分层空气中偏高半径层的运动会受到浮力的作用。浮力的反作用力可看成重力。

假定在圆柱等高半径单元上的合力化为浮力，其运动方程成为

$$\int_0^t \frac{d^2}{dt^2} (\delta z) = -N^2 P_0 \delta z \quad (4.40)$$

该流体之水平向运动，频率为 $\omega = N$ (4.41)

因为 (4.40) 式即为 $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $\delta z \sim e^{i\omega t}$

$$\text{假定 } N^2 > 0 \quad (4.42)$$

$$\text{由 } (4.37) \text{ 式可知 } \frac{dT_0}{dg} > \left(\frac{dT_0}{dg} \right)_{ad} \quad \therefore -\frac{dT_0}{dg} < -\left(\frac{dT_0}{dg} \right)_{ad}.$$

(温度随高度而变化快，绝热过程慢。

(4.42) 式称为对流稳定性，Schwarzchild 不稳定。当温度随高度减小而绝热过程快，那就 (4.42) 式就不再成立。方程 (4.40) 有指数增长部分

$$\delta\delta \sim e^{Nt} + e^{-Nt} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{Nt} \quad \text{声波对流层稳定性.}$$

$N^2 > 0$ 时, 等高面上随时间 t 增加 N 逐渐提高, 因此可期望重力波的增长.

从基本方程 (4.15) (该式已令 $\bar{P}_0 = 0$), 加上条件 $\bar{\omega} = 0$, 可求得重力波的色散关系. 因为 $\bar{\omega} = 0$, 方程 (4.15) 变化为

$$\omega^2 \bar{v}_1 = C_s^2 \bar{k} (\bar{k} \cdot \bar{v}_1) + i(\gamma - 1) g \hat{\delta} (\bar{k} \cdot \bar{v}_1) + i g \bar{k} v_{13} \quad (4.15')$$

式中 $\hat{\delta}$ 为 \bar{v}_1 方向单位向量.

用 \bar{k} 表示 (4.15')

$$i g \bar{k} v_{13} = [\omega^2 - C_s^2 \bar{k}^2 - i(\gamma - 1) g \bar{k}_3] (\bar{k} \cdot \bar{v}_1) \quad (4.43)$$

再用单位向量 $\hat{\delta}$ 表示 (4.15')

$$(\omega^2 - i g \bar{k}_3) v_{13} = [C_s^2 \bar{k}_3 + i(\gamma - 1) g] (\bar{k} \cdot \bar{v}_1) \quad (4.44)$$

令 $v_{13}, (\bar{k} \cdot \bar{v}_1)$ 的系数行列式为零

$$(\omega^2 - i g \bar{k}_3) [\omega^2 - C_s^2 \bar{k}^2 - i(\gamma - 1) g \bar{k}_3] = i g \bar{k}^2 [C_s^2 \bar{k}_3 + i(\gamma - 1) g]$$

$$\omega^2 (\omega^2 - C_s^2 \bar{k}^2) - i g \bar{k}_3 \omega^2 = -(\gamma - 1) g^2 (\bar{k}^2 \bar{k}_3^2) \quad (4.45')$$

我们寻找的波是低频波, 故有 Brunt 频率 N , 相速远低于声速. 当等温温度 T_0 均匀时, $N^2 = \frac{(\gamma - 1)}{C_s^2} g^2$ (4.39) $\sim \frac{g^2}{C_s^2}$. 待求波的频率

$$\omega \approx \frac{g}{C_s}, \quad \text{因为相速 } \frac{\omega}{k} \ll C_s \quad \text{即 } \omega \ll k C_s \quad \therefore \frac{g}{C_s} \ll k C_s \quad (4.45'')$$

$$\text{记待求高} = \frac{P}{\rho g} = \frac{\gamma P}{\rho} \cdot \frac{1}{\gamma g} = \frac{C_s^2}{\gamma g} \approx \frac{C_s^2}{g}$$

从 (4.45'') 式可知 $k \gg \frac{g}{C_s}$ (大是待求波的波数)

$$\therefore \lambda \ll \frac{C_s}{g} \approx \text{常数} \quad (\text{短波近似})$$

展開 (4.45') 式, 因为是低频波, 忽略 ω^4 , 得到

$$\omega^2 C_s^2 + \frac{i g \bar{k}_3 \omega^2}{\bar{k}^2} = (\gamma - 1) g^2 \left(1 - \frac{\bar{k}_3^2}{\bar{k}^2}\right)$$

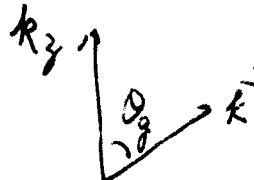
$$\text{实部相等} \quad \omega^2 C_s^2 \approx (\gamma - 1) g^2 \left(1 - \frac{\bar{k}_3^2}{\bar{k}^2}\right)$$

$$\theta_g = \cos^{-1} \frac{k_3}{k} \text{ 代入上式}$$

$$\omega^2 = \frac{Y-1}{C_s^2} g^2 \sin^2 \theta_g$$

$$N^2 = \frac{Y-1}{C_s^2} g^2 \quad (4.39) \quad \cdots [(\text{逆风}) \text{ 条件下成立}]$$

$$\therefore \omega = N \sin \theta_g \quad (4.45)$$



这即是内重力波的色散关系，冠以“内 internal”，为区别表面重力波（表面重力波化二种传播方向传播）

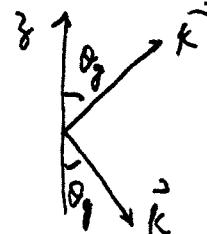
内重力波的性质：

1. N^{-1} 的典型值是 50 秒。与其他模式的波相比（除惯性波 inertial waves），重力波属于相对慢的波。
2. 重力波化垂直方向不传播 ($\theta_g = 0$)。因为分层介质中浮力没有水平分量，即没有水平方向的驱动力（类比水平方向传播的水流，驱动力是垂直方向的重力）
3. (4.45) 式告诉我们 $\omega \leq N$ ，因此波不会以 Brunt-Väistö 传播的速度传播得更快（传播速度相同）
4. 对于给定的 ω 和 N ，重力波具有平行方向传播，即向右传播。

$$\theta_g = \sin^{-1} \frac{\omega}{N}$$

$$\text{向上传播的波 } \omega = N \left(1 - \frac{k_3^2}{k^2}\right)^{1/2}$$

$$\text{群速及 z 方向分量 } V_{g3} = \frac{\partial \omega}{\partial k_3} = - \frac{\omega k_3}{k^2}$$



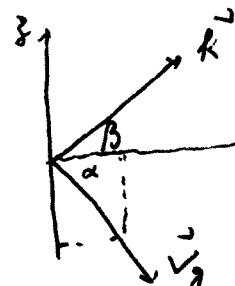
是 -1 角度。

重力波的不寻常性质：向上传播的重力波，群速朝下方传播，反向也

$$5. \text{ 设 } k^2 = k_x^2 + k_3^2, \text{ x 方向群速度 } V_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{1}{2k_x} \left[N \left(1 - \frac{k_3^2}{k_x^2 + k_3^2}\right)^{1/2} \right]$$

$$= \frac{\omega}{\left(1 - \frac{k_3^2}{k^2}\right)} \cdot \frac{k_3^2 k_x}{k^4} = \frac{\omega}{k^2} \frac{k_3^2}{k_x}$$

$$\tan \alpha = \frac{V_{g3}}{V_{gx}} = - \frac{k_x}{k_3} = - \frac{1}{\tan \beta} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$



速度的方向垂直于流动方向，速度是垂直于相速度。

6. 重力波-惯性波，质点运动轨迹呈椭圆型（类文端）

4.5 惯性波 (inertial waves)

1. 现在考虑 Coriolis 力的影响，线性化的运动方程 (4.9) 式简化为

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = -2 \bar{\Omega} \times \vec{v}_i$$

取转动轴为 z 轴， $\bar{\Omega} = \Omega \hat{z}$ (\hat{z} 为 z 方向的单位矢量)，分离式：

$$\frac{\partial v_{ix}}{\partial t} = 2 \Omega v_{ig}, \quad \frac{\partial v_{iy}}{\partial t} = -2 \Omega v_{ix}$$

$$\frac{\partial^2 v_{ix}}{\partial t^2} = 2 \Omega \frac{\partial v_{iy}}{\partial t} = -4 \Omega^2 v_{ix}$$

设初值 \vec{v}_i^0

$$v_{ix} = A \cos(k_3 - 2\Omega t) \quad (4.5-1)$$

$$v_{iy} = A \sin(k_3 - 2\Omega t) \quad (4.5-2)$$

再积分一次，有

$$x = A \int \cos(k_3 - 2\Omega t) dt$$

$$= \frac{A}{-2\Omega} \sin(k_3 - 2\Omega t) + x_0$$

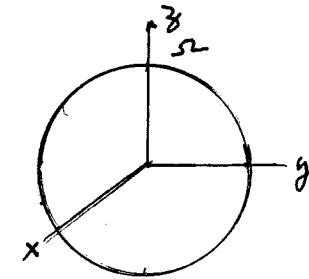
$$y = \frac{A}{2\Omega} \cos(k_3 - 2\Omega t) + y_0$$

取坐标原点为 x_0, y_0, z_0 ， $x^2 + y^2 = \frac{A^2}{4\Omega^2}$ ，这是圆的方程。在 Coriolis 力的作用下，在 xy 平面上，等高子流体层作圆周运动。

惯性波频率为 2Ω ，若转动轴方向倒置，Coriolis 力垂直运动方向 ($\pm \vec{v}_i$)，使等高子流体层在 xy 平面上作圆周运动。

Coriolis 力驱动的波也可以随等高子流体向别的方向传播。当 $\theta = 30^\circ$ 时，基本方程式 (4.5) 变成

$$\omega^2 \vec{v}_i = c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_i) - 2 i \omega \bar{\Omega} \times \vec{v}_i \quad (4.46)$$



由式(4.46)两边同乘 \vec{v}_1 , 得 $\omega \vec{k} \times \vec{v}_1 = -2i(\vec{k} \cdot \vec{\omega})\vec{v}_1$

$$\omega \vec{k} \times \vec{v}_1 = -2i(\vec{k} \cdot \vec{\omega})\vec{v}_1$$

利用 $\nabla \times (\vec{k} \times \vec{v}_1) = 0$, \vec{v}_1 为运动量, 得 $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$

$$\omega \vec{k} \times \vec{v}_1 = 2i(\vec{k} \cdot \vec{\omega})\vec{v}_1 \quad (4.47)$$

记 $\vec{k} = k \hat{k}$, $\vec{v}_1 = v_1 \hat{v}_1$, \hat{k}, \hat{v}_1 为单位矢量 代入(4.47)

$$\omega k v_1 (\hat{k} \times \hat{v}_1) = 2i(k \cdot \vec{\omega}) v_1 \hat{v}_1 \quad (\because \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0, \therefore \hat{k} \perp \hat{v}_1, |\hat{k} \times \hat{v}_1| = 1)$$

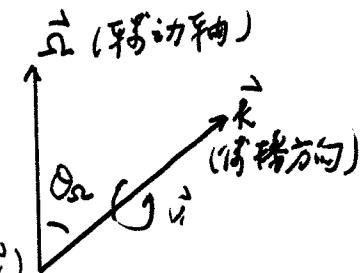
上式两边同模相等, 即 $\omega^2 = \frac{4}{k^2} (\vec{k} \cdot \vec{\omega})^2$

$$\omega = \pm \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{\omega})}{k} \quad (4.48)$$

这就是横波的色散关系.

引入转动轴与传播方向间夹角 θ_{SL} , 求出波的频率:

$$\omega = \pm 2\omega \cos \theta_{SL}$$



波的传播过程中, 速度矢量 \vec{v}_1 围绕传播方向 \vec{k} 旋转 ($\vec{k} \times \vec{v}_1$)
而已经证明, 质点的速度在 \vec{k} 的平面内作圆周运动. 当质点速度本身
与速度 \vec{v}_1 围绕转动轴转动 (第4.6)

横波是圆偏振的横波. (波即转动着的传播方向, 而且上某一点处作圆周运动
 \therefore 是圆偏振横波)

横波有一些不寻常的特性:

① $\nabla \times \vec{v}_1$ 平行或反平行 \vec{v}_1

~~尚缺~~ $\nabla \times \vec{v}_1 = i \vec{k} \times \vec{v}_1$, 从(4.47)得 $\vec{k} \times \vec{v}_1 = 2i(\frac{\vec{k} \cdot \vec{\omega}}{\omega})\vec{v}_1$ 代入左式

$$\nabla \times \vec{v}_1 = i \cdot 2i(\frac{\vec{k} \cdot \vec{\omega}}{\omega})\vec{v}_1 = -2(\frac{\vec{k} \cdot \vec{\omega}}{\omega})\vec{v}_1$$

$(\vec{k} \cdot \vec{\omega})$ 可有取向).

② $\vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \cdot [-2(\frac{\vec{k} \cdot \vec{\omega}}{\omega})] \vec{v}_1$

由(4.48)得 $\vec{k} \cdot \vec{\omega}$ 代入上式得

$$\vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{v}_1 = \mp k \vec{v}_1^2, \text{ 此为螺旋.}$$

2. 波速

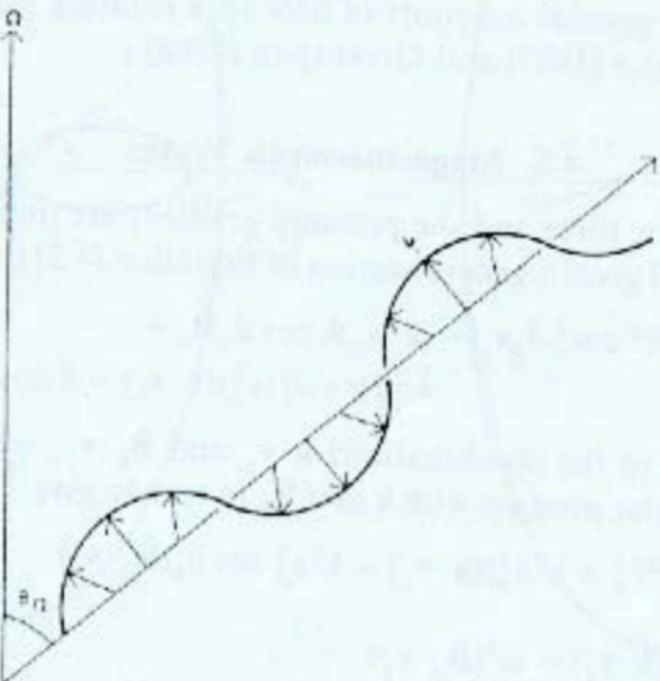


Fig. 46. The directions of the velocity vector (v_1) at various locations in an inertial wave propagating along the direction k with frequency $2\Omega \cos \theta_n$. The vector v_1 is normal to k at each point, while, relative to an inertial frame, the k -vector itself rotates with angular speed Ω about the rotation axis.

① 取正北子方向, (4.48) 式可写成

$$\omega = \pm 2 \frac{\vec{k} \cdot \vec{s}_2}{k}$$

$$= \pm 2 \frac{k_2 s_2}{k}$$

$$k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$$

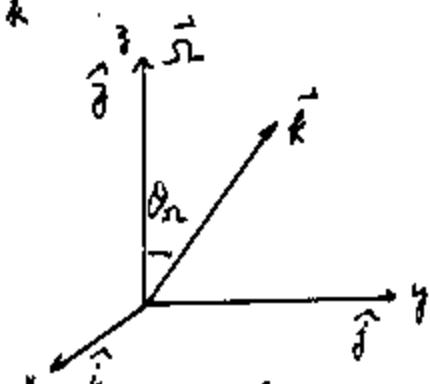
$$\text{根据(4.17)式 } V_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \mp \frac{2k_2 s_2}{k^3} \frac{\partial k}{\partial k_x} = \mp \frac{2k_2 s_2}{k^3} k_x$$

$$V_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = \mp \frac{2k_2 s_2}{k^3} k_y$$

$$V_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \pm \frac{2s_2}{k} \mp \frac{2k_2 s_2}{k^3} k_z$$

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ (这里 $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ 与前图不同
情况)

$$\begin{aligned} \vec{V_g} &= V_{gx} \hat{x} + V_{gy} \hat{y} + V_{gz} \hat{z} \\ &= \mp \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{s}_2)}{k^3} \hat{x} \pm \frac{2s_2}{k} \\ &\quad \pm \frac{\vec{k} \times (2\vec{s}_2 \times \vec{k})}{k^3} \end{aligned}$$



注意: (4.5-1), (4.5-2) 式中, \vec{x} 北子方向, \vec{y} 东子方向, \vec{z} 南子方向, 上面所写

② 群速度的模

记得 $k = (2\vec{s}_2 \times \vec{k})$

$$V_g = |\vec{V_g}| = \frac{2s_2 \sin \theta_k}{k}$$

③ 相速度, 同色散关系(4.48)有关:

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \pm \frac{2k_2 s_2}{k} = \pm \frac{2s_2}{k} \cos \theta_k$$

$$\begin{aligned} k_2 &\uparrow \\ \vec{k} &\rightarrow \\ \cos \theta_k &= \frac{k_2}{k} \end{aligned}$$

$$(V_g^2 + V_p^2)^{1/2} = \frac{2s_2}{k}, \text{ 与 } \theta_k \text{ 无关.}$$

④ 群速度 $\vec{V_g}$ 上 \vec{k} , 相速度相速之 $\vec{V_p}$ 上 \vec{k} (Priest, p.156)

所以群速度垂直于相速反的方向上传播

相速度的定义：波向（同相位的美的集合）的传播速度，方向垂直于

$$\text{波向}, \vec{V}_p = \frac{\omega}{k} \hat{k}$$

群速度的定义： $\vec{V}_g = \nabla_k \omega(\vec{k}) (= \frac{\partial \omega}{\partial k})$, 可见 \vec{V}_g 垂直于 $\omega(k) = c$ 的曲面
如果媒质是各向同性的，群速平行于长，指向集性体现化群速的
7)度 & 中 (球对称) 的依赖。一般群速和波速不化同一方向
群速 = 波速 (《电高层物理》，P.55)

3. Coriolis 力对 Alfvén 波的影响

令 $g=0$, 不可压缩 $\vec{k} \cdot \vec{v}_i = 0$. 在本方程 (4.16) 后加为

$$\omega^2 \vec{v}_i = -2i\omega \vec{s}_2 \times \vec{v}_i + \{\vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{v}_i \times \vec{B})]\} \times \hat{B} \vec{v}_A^* \quad (4.5-2)$$

式中 \hat{B} 为 \vec{B} 的单位矢量

$$\text{先将以上式化简. 令 } \vec{A} = \vec{k} \times (\vec{v}_i \times \vec{B}) = \vec{v}_i (\vec{k} \cdot \vec{B}) - \hat{B} (\vec{k} \cdot \vec{v}_i) = \vec{v}_i (\vec{k} \cdot \hat{B})$$

$$\vec{D} = \vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{v}_i \times \vec{B})] = \vec{k} \times \vec{A} = \vec{k} \times \vec{v}_i (\vec{k} \cdot \hat{B})$$

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \{\vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{v}_i \times \vec{B})]\} \times \hat{B} \vec{v}_A^* = \vec{D} \times \hat{B} \vec{v}_A^* \\ &= [\vec{k} \times \vec{v}_i (\vec{k} \cdot \hat{B})] \times \hat{B} \vec{v}_A^* \end{aligned}$$

$$= -\vec{k} \vec{v}_A^* (\hat{B} \cdot \vec{v}_i) (\vec{k} \cdot \hat{B}) + \vec{v}_i \vec{v}_A^* (\vec{k} \cdot \hat{B})^2$$

(4.5-3) 式 = 边来 \vec{k}

$$\begin{aligned} \omega^2 \vec{v}_i \times \vec{k} &= -2i\omega (\vec{s}_2 \times \vec{v}_i) \times \vec{k} + \vec{C} \times \vec{k} \\ &= 2i\omega [\vec{s}_2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_i) - \vec{v}_i (\vec{k} \cdot \vec{s}_2)] - \vec{k} \times \vec{k} \vec{v}_A^* (\hat{B} \cdot \vec{v}_i) (\vec{k} \cdot \hat{B}) \\ &\quad + \vec{v}_i \times \vec{k} \vec{v}_A^* (\vec{k} \cdot \hat{B})^2 \end{aligned}$$

$$= -2i\omega (\vec{k} \cdot \vec{s}_2) \vec{v}_i + \vec{v}_A^* (\vec{k} \cdot \hat{B})^2 \vec{v}_i \times \vec{k}$$

用单位矢量表示 \vec{v}_i, \vec{k} , $\vec{v}_i = v_i \hat{v}_i$, $\vec{k} = k \hat{k}$, 则上式写成：

$$\omega^2 \vec{v}_i \cdot (\hat{v}_i \times \hat{k}) = -2i\omega (\vec{k} \cdot \vec{s}_2) v_i \hat{v}_i + \vec{v}_A^* (\vec{k} \cdot \hat{B})^2 v_i k (\hat{v}_i \times \hat{k})$$

$$[\omega^2 - \vec{v}_A^* (\vec{k} \cdot \hat{B})^2] (\hat{v}_i \times \hat{k}) = -2i\omega \frac{(\vec{k} \cdot \vec{s}_2)}{k} \vec{v}_i$$

~ 这样的平方相等 $|左边|^2 = |右边| \cdot |左边|^2 = |右边| \cdot |右边|^2 = |右边|^2$

$$[\omega^2 = \frac{1}{4} \vec{k}^2 (\vec{k} \cdot \vec{B})^2] \cdot [\vec{v}_A \times \vec{k}]^2 = 4 \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} (\vec{k} \cdot \vec{\Omega})^2 \quad (\because \vec{k} \cdot \vec{v}_A = 0, \therefore \vec{k} \perp \vec{v}_A \Rightarrow |\vec{v}_A \times \vec{k}|^2 = 1)$$

$$\omega^2 - (\vec{k} \cdot \vec{B})^2 \frac{1}{4} \vec{k}^2 = \pm \frac{2\omega}{\vec{k}} (\vec{k} \cdot \vec{\Omega})$$

$$\therefore \omega_I = \pm \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{\Omega})}{\vec{k}}, \quad \omega_A = (\vec{k} \cdot \vec{B}) V_A$$

$$\omega^2 - \omega_A^2 = \pm \omega_I \omega$$

$$\omega^2 + \omega_I^2 - \omega_A^2 = 0 \quad (4.49)$$

由 (4.48) 可见, ω_I 是纯横波速度

$$(4.48) \Rightarrow \omega = \pm \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{\Omega})}{\vec{k}}$$

$$\omega_A = (\vec{k} \cdot \vec{B}) V_A = k \cos \theta V_A$$

ω_A : Alfvén 波速度

当 $\vec{k}, \vec{\Omega}$ 和 \vec{B} 近似平行时, 有

$$\frac{\omega_A}{\omega_I} \approx \frac{k V_A}{2 \Omega}$$

① 太阳上 $\frac{\omega_A}{\omega_I}$ 通常较大, 典型值为 $10-10^3$

$$\text{将方程 (4.49)} \quad \omega = \pm \frac{\omega_I \pm (\omega_I^2 + 4\omega_A^2)^{1/2}}{2} \quad (4.5-4)$$

$$\approx \frac{1}{2} (\omega_I \pm 2\omega_A) \quad (\text{只取正根})$$

$$= \omega_A \left(1 \pm \frac{\omega_I}{2\omega_A} \right)$$

$$\omega^2 \approx \omega_A^2 \left(1 \pm \frac{\omega_I}{2\omega_A} \right)^2 \approx \omega_A^2 \left(1 \pm \frac{\omega_I}{\omega_A} \right)$$

Coriolis 力对 Alfvén 波的频率 ω_A 产生一个附加项

② 当 $\frac{\omega_A}{\omega_I} \ll 1$ 时

考虑着 (4.5-4) 左边第一项 > 0 , 有 $\omega^2 \approx \omega_I^2 \quad (4.5-5) \dots$ 横波速

ii. 左边第二项取 “-”, 第二项取 “+”

$$\omega = -\omega_I + \omega_I \left(1 + \frac{4\omega_A^2}{\omega_I^2} \right)^{1/2} \approx \frac{\omega_A^2}{\omega_I^2}$$

$$\omega^2 \approx \frac{\omega_A^4}{\omega_I^2}$$

(4.5-6) ... 磁流体横波速

-125- Alfvén 波慢得多

4.6. 磁声波 (magnetacoustic waves)

当磁场和气体压强梯度起主导作用，子流可以视为空。我们将
考虑近似，即扰动波长小于标尺，从而密度可看作常数。得到方程
(14.16) 式，进一步有下列表达式

$$\omega^2 \frac{\vec{v}_y}{\vec{v}_A} = k^2 \cos^2 \theta_B \vec{v}_1 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) k \cos \theta_B \hat{\vec{B}} + \left[(1 + \frac{c_s^2}{k_A^2}) (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - k \cos \theta_B (\hat{\vec{B}} \cdot \vec{v}_1) \right] \vec{k}$$

(4.6-1) 式通过下述步骤进行：

$$(4.16) \vec{B}_1 : \omega \vec{v}_1 = C_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i(\gamma - 1) g \hat{\vec{g}} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + ig \vec{k} V_{13} - 2i\omega \vec{n} \times \vec{v}_1 + \left\{ \vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)] \right\}$$

$$= C_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + \left\{ \vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)] \right\} \times \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

$$\vec{A}' = \vec{k} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v} (\vec{k} \cdot \hat{\vec{B}}) - \hat{\vec{B}} (\vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{E}_1 = \vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{V}_1 \times \vec{B})] = \vec{k} \times [\vec{V}_1 (\vec{k} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{k} \cdot \vec{V}_1)]$$

$$= (\vec{k} \times \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \hat{B}) - \vec{k} \times \hat{B} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1)$$

$$\vec{C} = \vec{E} \times \hat{\vec{B}} V_A = (\vec{k} \times \vec{v}_i) \times \hat{\vec{B}} (\vec{k} \cdot \hat{\vec{B}}) V_A - (\vec{k} \times \vec{B}) \times \hat{\vec{B}} (\vec{k} \cdot \vec{v}_i) V_A$$

$$= -\vec{R}(\hat{B} \cdot \vec{v}_1) V_A^2 (\vec{k} \cdot \hat{B}) + \vec{v}_1 (\vec{k} \cdot \hat{B})^2 V_A^2 + \vec{R}(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) V_A^2 - \hat{B}(\vec{k} \cdot \hat{B})(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) V_A^2$$

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = R \cos \theta_B , \quad \text{Fig. 4.1b}$$

$$\omega^2 \vec{v}_1 = c_s^2 \vec{R} (\vec{R} \cdot \vec{v}_1) - \vec{R} R \cos \theta_B (\hat{B} \cdot \vec{v}_1) V_A^2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{V}_A^2 \vec{R}^2 \cos^2 \theta_B + R (\vec{R} \cdot \vec{v}_1) V_A - \beta R \cos \theta_B (R \cdot \vec{v}_1) V_A$$

$$\frac{\omega^2 \vec{v}_y}{\sqrt{A}} = \left[\left(1 + \frac{C_B^2}{\sqrt{A}} \chi \vec{R} \cdot \vec{v}_i \right) - k \cos \theta_B (\hat{\vec{B}} \cdot \vec{v}_i) \right] \vec{R} + k^2 \cos^2 \theta_B \vec{v}_i - (\vec{R} \cdot \vec{v}_i) \vec{R} \cos \theta_B \hat{\vec{B}}$$

(4.6-1) 式 = 边用大括乘，得

$$(-\omega^2 + R^2 C_s^2 + R^2 V_A^{-2}) (\vec{k} \cdot \vec{v}_i) = k^2 V_A^{-2} \cos \theta_3 (\hat{\beta} \cdot \vec{v}_i)$$

再向右移乘(4.6-1) = 5

$$k \cos \theta_B C_s^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_i) = \omega (\vec{k} \cdot \vec{v}_i)$$

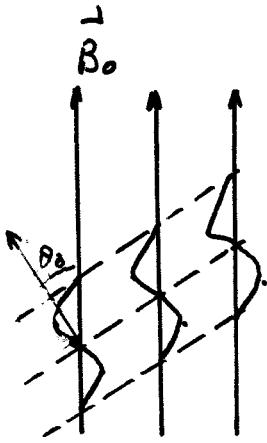
1. 假設 $\vec{r} \cdot \vec{v}_1 = 0$, 即 v_1 可應消, 則由(4.6-1) 式可得

$$\frac{\omega^2}{r^2} \vec{v}_i = k^2 \cos^2 \theta_B \vec{v}_i - k \cos \theta_B (\hat{B} \cdot \vec{n}) \vec{k}$$

二边相乘后，利用条件 $\vec{k} \cdot \vec{v}_i = 0$ ，有

$$\omega = k V_A \cos \theta_B \quad (4.50')$$

此即(4.25)式，是平行 Alfvén 波 (parallel Alfvén wave)。



2. 磁声波的色散关系

(4.50) 的二式相除，消去 $(\vec{k} \cdot \vec{v}_i)$ 及 $(\vec{B} \cdot \vec{v}_i)$

$$\frac{k \cos \theta_B c_s^2}{-\omega^2 + k^2 c_s^2 + k^2 v_A^2} = \frac{\omega^2}{k^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B}$$

$$\omega^4 - \omega^2 (c_s^2 + V_A^2) + c_s^2 V_A^2 k^4 \cos^2 \theta_B = 0 \quad (4.51')$$

这便是磁声波的色散关系。

$$\omega^2 = k^2 \cdot \frac{(c_s^2 + V_A^2) \pm \left[(c_s^2 + V_A^2)^2 - 4 c_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B \right]^{1/2}}{2} \quad (4.51'')$$

对于 $\frac{\omega}{k} > 0$ ，有

$$\frac{\omega}{k} = \left\{ \frac{1}{2} (c_s^2 + V_A^2) \pm \frac{1}{2} \left[(c_s^2 + V_A^2)^2 - 4 c_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (4.51''')$$

式中 ω/k 称为 快磁声波 (fast magnetacoustic wave)

低频波即为 慢磁声波 (slow magnetacoustic wave)。

Alfvén 波 [(4.50') 式] 的相速及介于二者之间，常称中间模 (intermediate mode)；从 (4.51'') 式可得

$$V_p^2 = \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = \frac{1}{2} (c_s^2 + V_A^2) \left[1 \pm \left\{ 1 - \frac{4 c_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B}{(c_s^2 + V_A^2)^2} \right\}^{1/2} \right]^2 \quad (4.6-2)$$

平行 Alfvén 波模式的声速无关。根据条件 $\vec{k} \cdot \vec{v}_i = 0$ 可知 $\vec{v}_i \perp \vec{k}$ 是横波 (4.6-2) 式确定的；模式 1 与纵速无关，但需考虑密度高体压缩，一般情况下既不是纯纵波，也不是纯横波。

当 $\cos \theta_B \ll 1$ ，或者 $c_s \ll V_A$ ，或者 $V_A \ll c_s$ 时， $\frac{c_s V_A \cos \theta_B}{c_s^2 + V_A^2} \ll 1$

$$V_p^2 = \frac{1}{2} (c_s^2 + V_A^2) \left[1 \pm \left(1 - \frac{2 c_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B}{(c_s^2 + V_A^2)^2} \right) \right]$$

i. $\vec{B}_0'' + \vec{\beta}$

$$V_{p+}^2 = \frac{1}{2} (C_s^2 + V_A^2) \cdot 2 = C_s^2 + V_A^2 \quad \text{快波}$$

ii. $\vec{B}_0'' - \vec{\beta}$

$$V_{p-}^2 = \frac{C_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B}{C_s^2 + V_A^2} \quad \text{慢波}$$

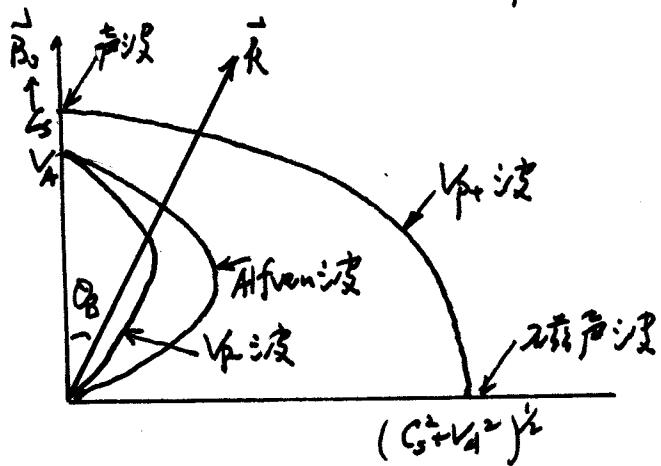
iii. 若取 $\vec{B}_0'' \parallel \vec{k}$ 得 (4.50') 式

$$\omega = k V_A \cos \theta_B$$

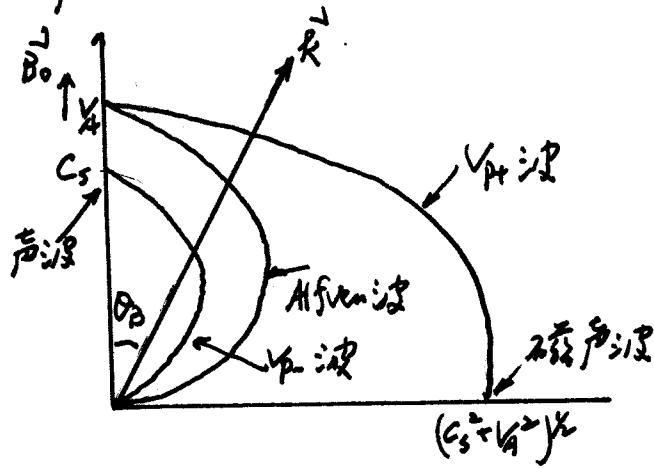
$$V_{PA} = \frac{\omega}{k} = V_A \cos \theta_B$$

条件 Alfvén 波

三种模式的波均为渐近波散 (Boyd J. P. > 4)



$$(a) C_s > V_A$$



$$(b) C_s < V_A$$

磁流体力学波的相速度与 θ_B 的关系

上述关系与 Fig. 4.7(a) 对应.

3. 特例

i. 平行磁场方向传播的波, $\theta_B = 0$

$$\text{由 (4.6-2) 式得 } V_{p\pm}^2 = \frac{1}{2} (C_s^2 + V_A^2) \left[1 \pm \frac{C_s^2 - V_A^2}{C_s^2 + V_A^2} \right]$$

$V_{p+} = \max(C_s, V_A)$, 1 份 $V_{p+} = V_A$ 则为 横波

$V_{p-} = \min(C_s, V_A)$, 1 份 $V_{p-} = C_s$ 则为 纵波

$V_{p+} = V_A$ 横波

ii. 若 $\theta_B = \frac{1}{2}\pi$

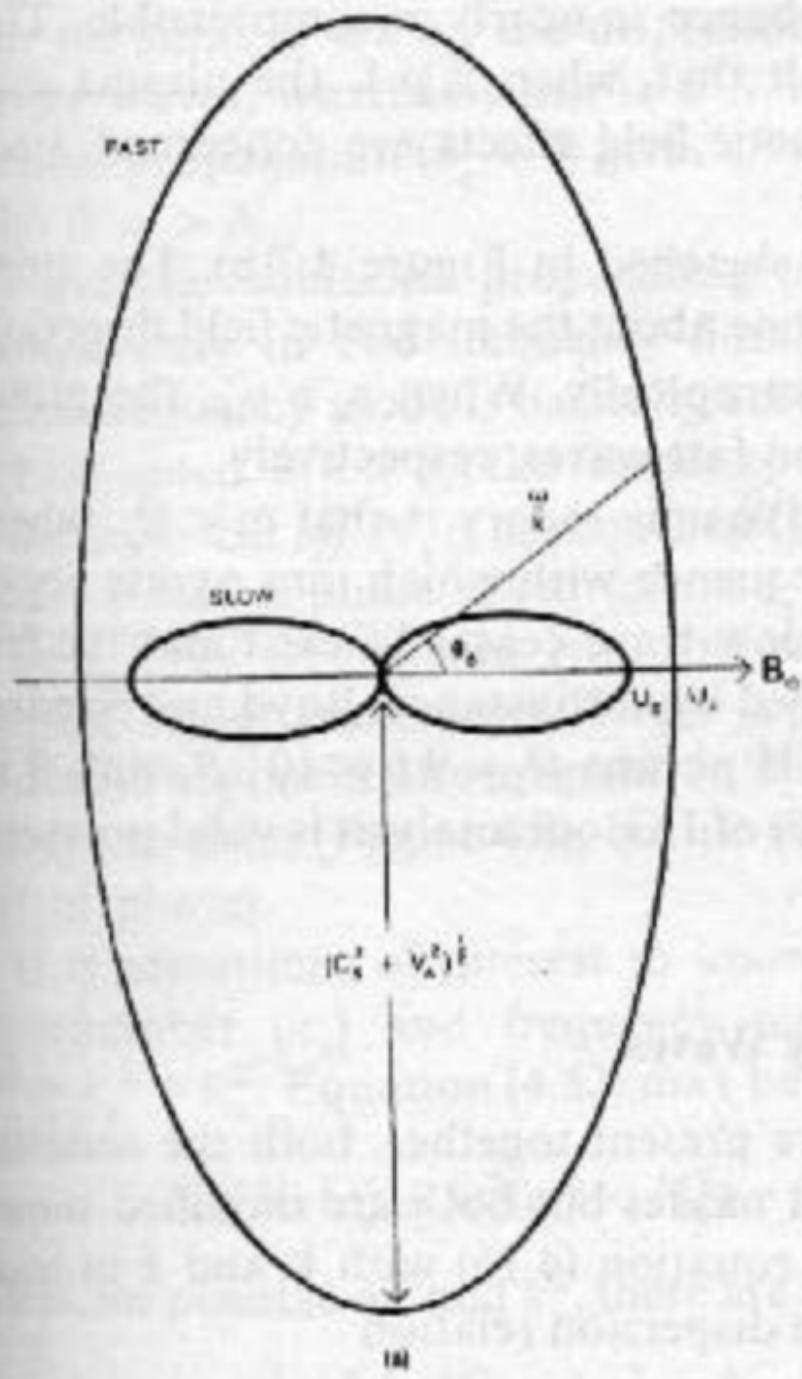


Fig. 4.7. Polar diagrams for fast and slow magnetosonic waves. The speeds u_s and u_f are the Alfvén speed (v_A) and sound speed (c_s). (a) shows the

$$V_{PA} = V_{P-} = 0$$

$$V_{P+}^2 = C_s^2 + V_A^2 = V_M^2$$

因为 $\theta_B = \frac{1}{2}\pi$, 所以这种波是垂直于磁场方向传播的纵波

向右传播的纵波称为磁声波。当 $B_0 \rightarrow 0$ 时, 该波为普通声波, 且仍有 $V_M > C_s$ (因为磁声波等效于垂直于磁场方向的弹性力)。

4. 对于斜 Alfvén 波 $\omega = k V_A \cos \theta_B$

$$V_A = \frac{\omega}{k \cos \theta_B}, \text{ 该 } k_B \text{ 为 } 1^\circ \text{ 磁场方向传播的波的波矢, } k_B = k \cos \theta_B$$

$$(V_A =) \frac{\omega}{k_B} = \frac{\omega}{k \cos \theta_B} \Rightarrow \frac{\omega}{k} = V_A \cos \theta_B = \frac{\omega}{k_B} \cos \theta_B \xrightarrow{\theta_B \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0$$

$$\text{慢磁声波 } \frac{\omega}{k} = V_{P-} = \frac{C_s V_A \cos \theta_B}{(C_s^2 + V_A^2)^{1/2}} \xrightarrow{\theta_B \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0$$

$$C_T = \frac{C_s V_A}{(C_s^2 + V_A^2)^{1/2}} \Rightarrow \frac{\omega}{k_B} \text{ 相等. (即 } V_A)$$

$C_T, V_A (\frac{\omega}{k_B})$ 为 1° 磁场方向的相速。 1° 磁场方向传播的波 (V_A 和 C_T) 波长等于 1° 垂直磁场方向传播的波的波长。 $\lambda_B \gg \lambda, k_B \ll k$

C_T 代表慢波的群速度 (群速度沿传播方向, 即 $\theta_B = 0$) (第 4.7.6)

5. 尽管波可以斜向传播 (θ_B)。上述的速度均为相速度, 群速度仍沿磁场方向传播

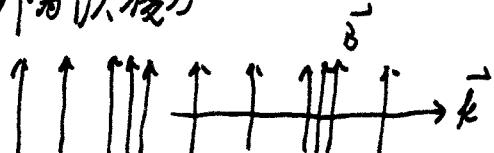
$$\text{斜 Alfvén 波 } \omega = k V_A \cos \theta_B = V_A (\vec{k} \cdot \hat{\vec{B}})$$

$$\text{群速度} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \text{ 说明只有 } \frac{\partial \omega}{\partial k_B} = V_A \quad (1^\circ \hat{\vec{B}} \text{ 方向})$$

$$\text{慢波 } V_{P-} = C_T k \cos \theta_B = C_T (\vec{k} \cdot \hat{\vec{B}}), \text{ 群速度} = \frac{\partial \omega}{\partial k_B} = C_T \quad (\hat{\vec{B}} \text{ 方向})$$

6. 快、慢两种磁声波可以看作逆磁场传播的声波, 也可看作压缩的 Alfvén 波, 达到等离子体压缩的程度。压缩的最明显的是速度是传播方向偏离垂直磁场方向。

7. 垂直于磁力线方向传播的磁声波, 引起磁力线的疏密变化, 除了压缩引起的压力外, 还有磁压缩作为恢复力



平行于 \vec{B} 方向传播的Alfvén波，引起磁力线的横向振荡
类似于弹性介质中的横波。当流体质点相对平衡位置有
位移时，由于冻结效应，引起磁力线弯曲，从而产生张力，形
成垂直磁力线方向的恢复力，因此有流体质点相对平衡位置
的振荡。



$$(2) \text{ 根磁力线单位长度的张力为 } \frac{P}{B}. \text{ 横波速度 } V_A = \sqrt{\frac{B\mu_0}{B\rho}} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0\rho}} \quad (\text{第3章, 第一节}) \\ P.181$$

8. 一旦磁场消失， $V_A=0$ ，慢波也消失，快波成为声波。

若光速 C_s 远强消失， $C_s=0$ ，慢波消失，快波成为压缩 Alfvén 波 (Priest, p.170)

$$9. \beta = \frac{\gamma \mu_0 P}{B^2} \quad (\text{光速/磁感应}) \gg 1, \text{ 则有 } \frac{C_s}{V_A^2} \gg 1$$

色散关系：快波 $\frac{\omega}{k} \approx C_s$

$$\text{慢波 } \frac{\omega}{k} \approx V_A \cos \theta_B \quad (C_s \gg V_A)$$

$$\text{对(4.50)式中 } k \cos \theta_B C_s^2 (\hat{k} \cdot \vec{v}_i) = \omega^2 (\hat{B} \cdot \vec{v}_i)$$

$$\hat{k} \cdot \vec{v}_i = \frac{\omega^2}{k^2 C_s^2 \cos^2 \theta_B} (\hat{B} \cdot \vec{v}_i) \quad (\hat{k} \text{ 为单位矢量})$$

$$= \frac{V_A^2}{C_s^2} (\hat{B} \cdot \vec{v}_i) \cos^2 \theta_B \ll 1 \quad \left(\frac{\omega}{k} = V_A \cos \theta_B \right)$$

因此 $\hat{B} \cdot \vec{v}_i \approx 0$ ，近似不可压缩。

一般，当 $\beta \gg 1$ 时，等离子体可看作不可压缩，声速很大，磁场变化有大梯度。

声速等于横向扰动速度

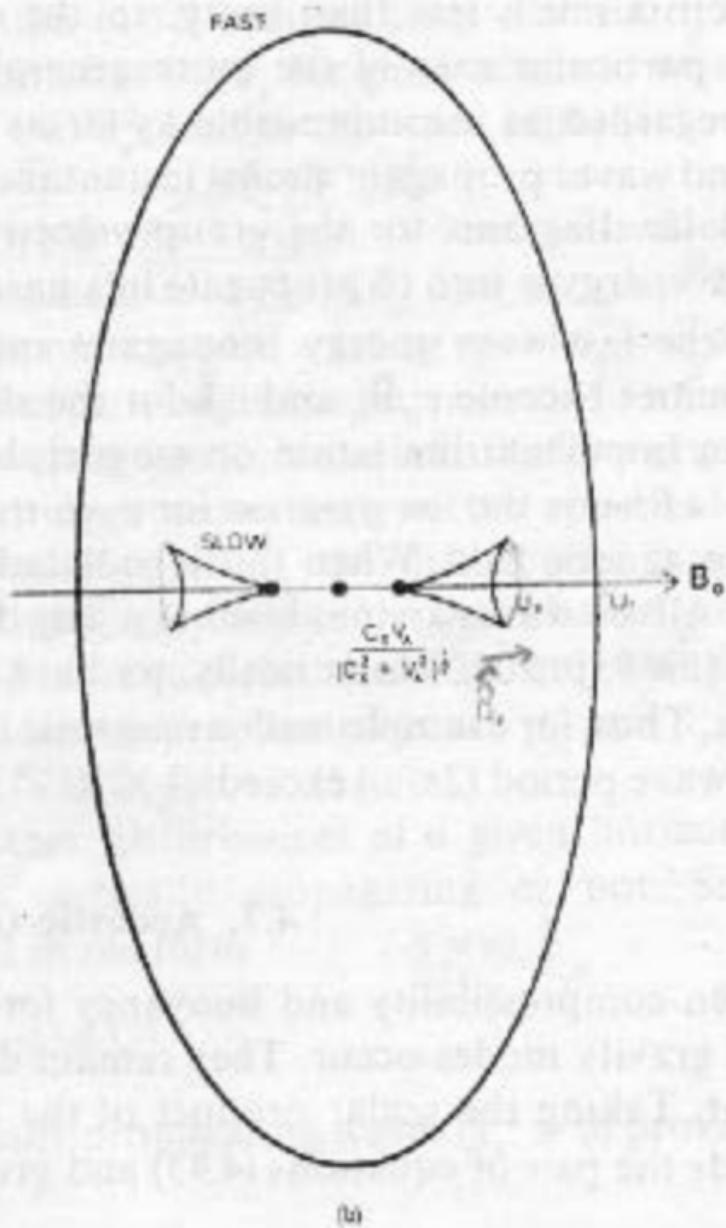
→ 10. 当 $c_s \gg V_A$ 为群速大的极低带. 快波的传播方向与磁流场方向狭窄的
锥体内部传播(即有 $\cos \theta_B \approx 0, \cos \theta_B \rightarrow 1$). 快波频率的传播速度
和方向同性.

当 $c_s \gg V_A$ 时.

$$\text{a, 慢波 } V_g = \frac{\omega}{k} = \frac{c_s V_A \cos \theta_B}{(c_s^2 + V_A^2)^{1/2}} \Rightarrow \omega = V_A k \cos \theta_B = V_A k_2$$

$$\vec{V}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_2} \hat{B} = V_A \hat{B}$$

(在 \hat{B} 方向的小锥体内是 c. 的情形)



(b)

magnetosonic waves propagating at an angle θ_B to the B_0 direction are the slower and faster, respectively, of the Alfvén waves. The phase velocities and (b) the group velocities.

$$b) 快波 \quad V_p = (C_s^2 + V_A^2)^{1/2} \approx C_s \quad (\approx \frac{V_A}{k})$$

$$\vec{V}_p = \frac{\partial \omega}{\partial k} = C_s \hat{k}, \quad \text{即快波的相速度}.$$

c. Friedrichs 波 (图 4.7(b))

磁流体波的色散关系表明这些波的相速度与波矢量 \vec{k} 的大小无关, 但与 \vec{k} 的方向有关。即 $V_p = V_p(\vec{k})$, 其中 \vec{k} 为 \vec{k} 方向的单位矢量, 相应的色散关系可写成 $\omega = k V_p(\vec{k})$, 从而可知群速度: $\vec{V}_p = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \hat{k} = \hat{k} \frac{\partial k}{\partial k} V_p(\vec{k}) + k \frac{\partial V_p}{\partial k} = \hat{k} V_p(\vec{k}) + k \nabla_{\vec{k}} V_p$

在方程中第一次代表方向在 \hat{k} , 大小为相速度, 第二次垂直于 \hat{k} 的方向上, 第三次可写成

$$k \left(\frac{\partial V_p}{\partial k_x} \hat{i} + \frac{\partial V_p}{\partial k_y} \hat{j} + \frac{\partial V_p}{\partial k_z} \hat{k} \right) \approx k \frac{\partial V_p}{\partial k_z} \hat{k} = k \frac{C_s V_A}{(C_s^2 + V_A^2)^{1/2}} \quad (\text{慢波})$$

(i) 任何方向的群速度 = 零。

“磁流体波的相速度为零”, i. 快波

= 快矢量相加, 第一次的大小近似于 C_s , 第二次相速度的大小

即 $V_p(\vec{k})$ 的长短, 过支垂线或取 $k \nabla_{\vec{k}} V_p$ (\approx 守恒), 则得:

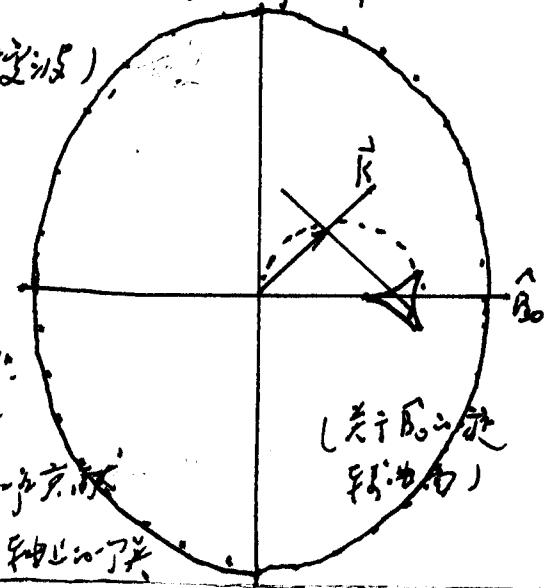
得到对应于 \vec{k} 方向的群速度为零, 对于这种类型的慢速波称为慢波。

即慢波, 其中 $k \nabla_{\vec{k}} V_p$ 为守恒的平行轴, 其值, 相速度零, 由 $\frac{C_s V_A}{(C_s^2 + V_A^2)^{1/2}}$ 得到。

ii. 中速波

$\vec{V}_p \approx C_s \hat{k}$. (见图)

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_z} = V_A$$



② $\vec{k} \parallel \vec{B}$: Alfvén 波

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{c^2}{V_A^2}$$

c: 光速

式中 $\omega \ll \Omega$; (高斯方程 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$) 在 B 方向传播的横波色散关系,

又称为: 剪切 Alfvén 波或慢 Alfvén 波等 (Boyd J., P.178)

③ $\vec{k} \perp \vec{B}$ 压缩 Alfvén 波

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{c^2}{V_A^2}$$

传播方向发生压缩方向, 不压缩大气运动方向, 类似于声源, 波也最具有对称性 (Boyd, P.182)

3) 3. $\omega \rightarrow \Omega_i$ 时

- i, 剪切 Alfvén 波退化成高音速压缩波
- ii, 快声 (压缩 Alfvén) 速度发生根本变化
 $\omega \leq \Omega_i$ 时, 高音速压缩波的色散关系

$$\frac{\omega^2 c^2}{\omega^2} = \frac{2 u_{pi}^2}{\Omega_i^2 - \omega^2}$$

$$\Omega_i = \frac{eB}{m_i}, u_{pi} : \text{高音速压缩波}$$

2. 热等离子体中的磁流体力学波

① 三种模式:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = C_s^2 + V_A^2$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = V_A \cos \theta_3$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{C_s^2 V_A^2}{C_s^2 + V_A^2} \cos^2 \theta_3$$

② 近于 Ω_i 时的行为

- i, 剪切 Alfvén 波完全消失, 代之以高音速压缩波 (Boyd, 1926)
- ii, 快声波速度受限制

12. 本章中, 我们从磁流体力学方程化导出色散关系有一个重要的限制, 即

$$\omega < \Omega_i, (\Omega_i = \frac{eB}{m_i})$$

事实上方程组中的源项方程为该条件所限.

由麦克斯韦方程 (第 1 章附录 P.5)

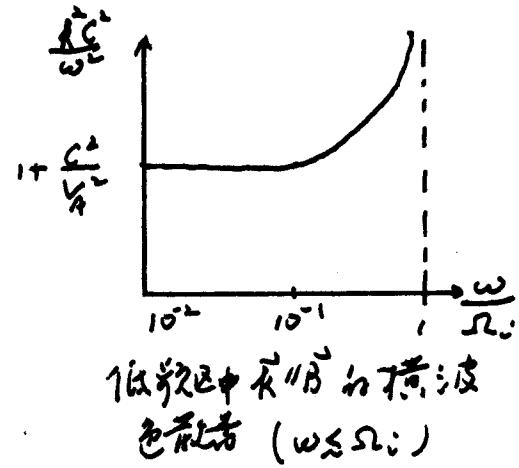
$$\frac{mc}{ne^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{1}{ne} \nabla p + \vec{E} + \left(\vec{U} - \frac{\vec{j}}{ne} \right) \times \vec{B} - \frac{mc}{ne^2} \nu_{ei} \vec{j} \quad (2.1.2-4)$$

① $\sigma = \frac{ne^2}{me \nu_{ei}}$ \because 液体, $\sigma \rightarrow \infty$, 上式前后一致可忽略

$$② \left| \frac{\frac{mc}{ne^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}}{\vec{E}} \right| \sim \frac{\frac{1}{\omega_{pe}} \cdot \frac{1}{\epsilon} \frac{B}{M} \omega}{\omega BL} \sim \frac{1}{\omega_{pe}} \cdot \frac{c}{L} \sim \left(\frac{\omega}{\omega_{pe}} \right)^2 \cdot \left(\frac{c}{L} \right)^2$$

$$\left[\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, |\vec{E}| \sim \omega BL, U \sim \omega L \right]$$

当 $\frac{\omega}{\omega_{pe}} \ll 1$, 该次可忽略, 故即等离子体色散关系.



低频区中“B”的传播
色散关系 ($\omega \leq \Omega_i$)

$$③ \left| \frac{\frac{1}{2}ne\vec{v}_p}{\vec{E}} \right| \sim \frac{p}{\omega_B L^2 n e} \sim \frac{p}{\rho} \cdot nm \cdot \frac{\omega}{ne \omega_L} \sim \left(\frac{C_s}{U} \right)^2 \frac{\omega}{\omega_L}$$

要忽略远场效应，要求 $\frac{\omega}{\omega_L} \ll \frac{U}{C_s}$

$$④ \text{Hall 项 } \left| \frac{\vec{j}_n \times \vec{B}}{I_E} \right| \sim \frac{\frac{1}{ne} \vec{v}_p \cdot \vec{B}}{\omega_B L} = \frac{\vec{B}}{ne \mu \omega_L} = \frac{m_i \epsilon}{ne^2 \epsilon m_i} \frac{\omega}{\omega_L} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{\omega \omega_L}{\omega_{p_i}} \left(\frac{U}{C_s} \right)^2$$

若 $\omega \ll \omega_L$, 即 $\omega = \delta \omega_L$ ($\delta \ll 1$), 上式成为 $\delta \frac{\omega_L^2}{\omega_{p_i}^2} \left(\frac{U}{C_s} \right)^2 \ll 1$, 1 为高阶项
而之, Hall 项可忽略。一推得 $\frac{\omega \omega_L}{\omega_{p_i}} \ll \left(\frac{U}{C_s} \right)^2 \ll 1$, \therefore Hall 项可忽略。

⑤ 极限情况下的理论方程 (Priest, p. 95)

$$B = 10^3 G, U = 10^3 m/s, n \approx 10^{20} m^{-3}$$

$$\omega_L = \frac{eB}{m_i} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 0.1}{1.7 \times 10^{-27}} \approx 10^7 s^{-1}$$

$$\omega_{p_i} = \frac{ne^2}{\epsilon m_i} = \frac{10^{20} \cdot (1.6 \times 10^{-19})^2}{8.85 \times 10^{-12} \cdot 1.7 \times 10^{-27}} \approx 4 \times 10^{20} s^{-1}$$

$$\delta \left(\frac{\omega_L}{\omega_{p_i}} \right) = \delta \frac{10^{14}}{(4 \times 10^{20})} \approx 2.5 \times 10^{-7} \delta$$

$$\left(\frac{U}{C_s} \right) = \left(\frac{10^3}{3 \times 10^8} \right) = (3 \times 10^{-6}) \approx 10^{-11}$$

$$2.5 \times 10^{-7} \delta \ll 10^{-11}$$

$$\therefore \delta \ll 4 \times 10^{-5}$$

$$\text{此时 } \omega \leq 4 \times 10^7 \quad (\omega = \delta \omega_L), \Rightarrow \omega \ll \omega_L$$

⑥ 结论：假设远场 $\omega \ll \omega_L$ 相当于什么？ \rightarrow Ohm 法律中忽略远场
效应和 Hall 项。因为只有 $\omega \ll \omega_L$, 通常有 $\frac{\omega}{\omega_{p_i}} \ll \frac{U}{C_s}$, 电子惯性力不可
忽略。故由 Ohm 法律简化成 $\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B} = 0$ 。这表示着 $\sigma \rightarrow \infty$, 于是得到麦克斯韦方程
简化为涡旋方程。

4.7 声—重力波 (acoustic-gravity waves)

1. 当可压缩性及浮力同时存在，发现声波和重力波，两者均受制停。

基本方程 (4.15) (该式的获得已设 $\vec{B}_0 = 0$)

$$\omega^2 \vec{v}_1 = C_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i(r-1) g \hat{\delta} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i g \vec{k} V_{13} - 2i \omega \vec{k} \times \vec{v}_1 \quad (4.15)$$

令 $\vec{k} \perp \vec{z}$ 。再用 \vec{k} 不乘之得

$$i g \vec{k}^2 V_{13} = [\omega^2 - C_s^2 k^2 - i(r-1) g k_3] (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \quad (4.43)$$

再用单位质量不依赖 (4.15) 得

$$(\omega^2 - i g k_3) V_{13} = [C_s^2 k_3 + i(r-1) g] (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \quad (4.44)$$

从 (4.43) 与 (4.44) 式可求得

$$\omega^2 (\omega^2 - C_s^2 k^2) + (r-1) g^2 (k^2 - k_3^2) = i r g k_3 \omega^2 \quad (4.45')$$

以上各式在 4.4 节 内重力波的讨论中已给出推导。对 (4.45') = 选取模数。

$$\omega^2 (\omega^2 - C_s^2 k^2) + (r-1) g^2 (k^2 - k_3^2) = r g k_3 \omega^2$$

$$\omega^4 - (C_s^2 k^2 + r g k_3) \omega^2 = -(r-1) g^2 (k^2 - k_3^2) \quad (4.7-1)$$

式中的 $k_3 = \frac{r g}{2 C_s^2} \omega$ ，这可以下面引进 \vec{k}' 而省去

2. 引进 \vec{k}'

$$\vec{k}' = \vec{k} + i \frac{r g}{2 C_s^2} \hat{\delta}$$

原来的运动为 $\vec{v}_1 (\vec{r}, t) = \vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$$\vec{k} = \vec{k}' - i \frac{r g}{2 C_s^2} \hat{\delta} \text{ 代入运动表达式}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 (\vec{r}, t) &= \vec{v}_1 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - i \frac{r g}{2 C_s^2} \hat{\delta} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \vec{v}_1 e^{\frac{r g}{2 C_s^2} \hat{\delta}} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\text{可以认为 } k_3 = \frac{r g}{2 C_s^2} \omega$$

3. 方中 \vec{k}' , \vec{v}_1 等的引入，若无特殊特别的理由，可以仅仅色散关系的表达而省去。

$$\omega^2(\omega^2 - N_s^2) = (\omega^2 - N^2 \sin^2 \theta_g') k'^2 c_s^2 \quad (4.52)$$

$$\text{或} N_s = \frac{\gamma g}{2c_s} \left(\equiv \frac{c_s}{2\lambda}, \lambda = \frac{P}{\rho g} = \frac{c_s^2}{\gamma g} \right)$$

$$N = \frac{(\gamma-1)g}{c_s}$$

Braunt frequency (勃朗特頻率)



$$\sin^2 \theta_g' = 1 - \frac{k_3'^2}{k'^2}$$

$$\vec{k}' = \vec{k} + i \frac{\gamma g}{2c_s} \hat{z} \quad \vec{R}' = \vec{R} + \frac{\gamma \vec{g}}{4c_s^4} \quad (R'^2 = R^2 - \text{模的平方})$$

$$k'_3 = k_3 + i \frac{\gamma g}{2c_s^2} \quad (k'_3 = \vec{k}' \cdot \hat{z}), \quad k'_3^2 = k_3^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^4}$$

$$\sin^2 \theta_g' = 1 - \frac{k_3^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^4}}{k^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^4}} = \frac{4c_s^4(k^2 - k_3^2)}{4c_s^4 k^2 + \gamma^2 g^2} \quad (4.7-2)$$

由上表式代入(4.52)式，至處得

$$\begin{aligned} \omega^2(\omega^2 - \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^4}) &= \left[\omega^2 - \frac{(\gamma-1)g^2}{c_s^2} \cdot \frac{4c_s^4(k^2 - k_3^2)}{4c_s^4 k^2 + \gamma^2 g^2} \right] \left(k + \frac{\gamma \vec{g}}{4c_s^4} \right) c_s^2 \\ &= \omega^2 \cdot \frac{4c_s^4 k^2 + \gamma^2 g^2}{4c_s^4} - (\gamma-1)g^2(k^2 - k_3^2) \end{aligned}$$

整理後得

$$\omega^2 \left(c_s^2 k^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{2c_s^2} \right) \omega^2 = -(\gamma-1)g^2(k^2 - k_3^2) \quad (4.52')$$

由(4.7-1)式，若用(4.52) = (4.7-1)

4. N 就是 Braunt 頻率。數值上 $N_s \approx N$ ，當 $\gamma=2$ 時， $N_s=N$ 。通常二者差別相當小。如 $\gamma=\frac{5}{3}$ ， $N_s=1.02N$

5. i.T 論

i. 當 $\omega \ll k c_s$ 時，(4.52) 處化為 $\omega = N \sin \theta_g$ — 重力波

$$\begin{aligned} (4.52') \text{處化} &= \omega^2 \left[\omega^2 - \left(c_s^2 k^2 + \gamma g k_3 \right) \right] \\ &= \omega^4 - \omega^2 c_s^2 k^2 \left(1 + \frac{\gamma g}{c_s^2} \frac{k_3}{k} \right) \end{aligned}$$

$$= \omega^2 - \omega^2 C_s^2 R^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda} \frac{k_3^2}{R^2}\right)$$

以上推导中已利用 $k_3 = \frac{rg}{2C_s}$.

$k_3 < R^2$, $\frac{1}{\lambda} \ll 1$. 根据设立的限制条件 $\omega \ll k' C_s$, 可推得

$$\omega^2 \ll \left(R^2 + \frac{rg^2}{4C_s^2}\right) C_s^2 = C_s^2 R^2 + \frac{rg^2}{4C_s^2} = C_s^2 R^2 + \frac{rg}{2} k_3$$

$$\therefore \omega^4 \ll \omega^2 (C_s^2 R^2 + \frac{rg}{2} k_3) \ll \omega^2 (k'^2 R^2 + \frac{rg}{2} k_3) \ll \omega^4.$$

$$(4.52') \text{ 式} = -\omega^2 C_s^2 R^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda} \frac{k_3^2}{R^2}\right) \approx -\omega^2 C_s^2 R^2 \approx -(r-1) g^2 (R^2 - R_p^2) = (4.52') \text{ 式}$$

$$\omega^2 \approx N^2 \left(1 - \frac{k_3^2}{R^2}\right)$$

$$= N^2 \sin^2 \theta_g \quad \cdots \text{重力波}$$

$$\text{或 } N = \frac{(r-1)^{1/2} g}{C_s}, \quad \sin \theta_g = 1 - \frac{k_3^2}{R^2} \quad (1 \pm \frac{1}{\lambda} \theta_g + \theta_g')$$

ii, 若 $\omega \gg N$, 有 $\omega = k' C_s$. 得到声波

因为 3.135 \approx 4. 已说明 $N_s \approx N$, 因此 (4.52) 式简化为

$$\omega^4 \approx \omega^2 k'^2 C_s^2$$

$$\omega \approx k' C_s$$

iii, 重直方向传播 $\theta_g = 0$.

$$\theta_g = \cos^{-1} \frac{k_3}{R}, \quad \theta_g = 0 \text{ 时} \quad k_3 = R, \quad \text{代入 (4.7-2) 式}, \quad \text{有} \quad \theta_g' = 0$$

$$(4.52) \text{ 式} \text{ 简化为} \quad \omega^2 (\omega^2 - N_s^2) = \omega^2 k'^2 C_s^2$$

$$\omega^2 = N_s^2 + k'^2 C_s^2$$

因此要求有波传播 (即 $\omega^2 > 0$). 必须 $\omega > N_s$

IV. 不在重直方向传播的波动解. 其之许 \Rightarrow 单纯范围.

① $\omega < N_s \sin \theta_g$ 纯单波. 基本上是重力波

对于重力波 $\omega \approx \frac{g}{C_s} \ll R C_s$ (Priest, P. 165, 未详细讨论 (4.45'))

相速 $\frac{\omega}{k} \ll C_s$

i. $\omega \ll k' C_s \rightarrow \omega^2 = N^2 \sin^2 \theta_g$
重力波
ii. $\omega \gg N \rightarrow \omega = k' C_s$
声波

$\because \sin \theta_g \neq 0$ (2. 在垂直方向传播, 即不沿 \hat{z} 方向传播, $\theta_g \neq 0$)

$\nexists \omega < N \sin \theta_g$. $\therefore N \sin \theta_g$ 可认为是 ω 的上限, 称为上截止频率
(upper cut-off) 若 $\omega = N \sin \theta_g = \frac{(T-1)k_0}{c_s} \sin \theta_g$ 时 -> 可能是

但 $c_s \rightarrow \infty$, 则 $\omega \rightarrow 0$. $\therefore \frac{\omega}{k} \rightarrow 0$

* 重力波的相速 $v_g < c_s$, 无法满足?

对称
波向右

2) $\omega > N_s$ 不产生声波 $\therefore \frac{\omega}{k} \rightarrow \infty$

a. 相速度 $\frac{\omega}{k} > c_s$

既: $\because N_s \geq N$, $\therefore \omega > N_s > N$

$$(4.52) \text{ 由 } \omega^2 = k^2 c_s^2 \quad \omega^2 (\omega^2 - N_s^2) = \omega^2 k^2 c_s^2$$

$$\omega^2 - N_s^2 = k^2 c_s^2$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{N_s^2}{k^2} + \frac{k^2}{k^2} c_s^2$$

$$k'^2 = k^2 + \frac{Yg^2}{4c_s^4} > k^2 \quad \therefore \frac{\omega}{k} > c_s$$

b. 群速度 $v_g < c_s$

既: 由 $\omega^2 = k^2 c_s^2$ 且 $\omega > N_s$, (4.52) 式简化得 $\omega^2 \approx k'^2 c_s^2 = [k^2 + \left(\frac{Yg}{2c_s}\right)^2] c_s^2$

$$v_g = \frac{dk}{d\omega} = \frac{k}{\omega} c_s^2 = \frac{c_s}{v_p} \cdot c_s$$

又 已知 k' 相速 $v_p > c_s$, $\therefore v_g < c_s$

不垂直于方向传播的情况			
低频 $\omega < N \sin \theta_g$	重力波	$\frac{\omega}{k} \ll c_s$	重力波 $N \sin \theta_g$ ($c_s \rightarrow \infty$) $(\frac{\omega}{k} \rightarrow 0)$
高 $\omega > N_s$	声波	$\frac{\omega}{k} > c_s$ $v_g < c_s$	重力波 N_s ($v_g \rightarrow 0$) $(v_p = \frac{\omega}{k} \rightarrow \infty)$

当 $N \sin^2 \theta_g < \omega < N_s$, 扰动为介稳

$$\text{从 (4.7-2) 式 } \sin^2 \theta_g' = 1 - \frac{k_s^2 + \frac{r^2 g^2}{4c_s^4}}{k^2 + \frac{r^2 g^2}{4c_s^4}} = 1 - \frac{k_s^2 + \frac{1}{(2\lambda)^2}}{k^2 + \frac{1}{(2\lambda)^2}} \approx 1 - \frac{k_s^2}{k^2} = \sin^2 \theta_g$$

$$\left(\frac{1}{2\lambda} \ll 1 \right)$$

$$(4.52) \Rightarrow \omega^2 (\omega^2 - N_s^2) \approx (\omega^2 - N^2 \sin^2 \theta_g) k'^2 c_s^2$$

令 $-A = \omega^2 - N_s^2 < 0$. 因 $\omega^2 - N^2 \sin^2 \theta_g > 0$. $\therefore k'$ 为纯虚数

$$\text{记 } k' = i \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \tilde{k}' = i \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}'$$

$$\text{扰动 } \tilde{V}_1(\vec{r}, \tau) = \tilde{V}_1 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}' \cdot \vec{r}} e^{i (\hat{k}' \cdot \vec{n} - \omega \tau)}$$

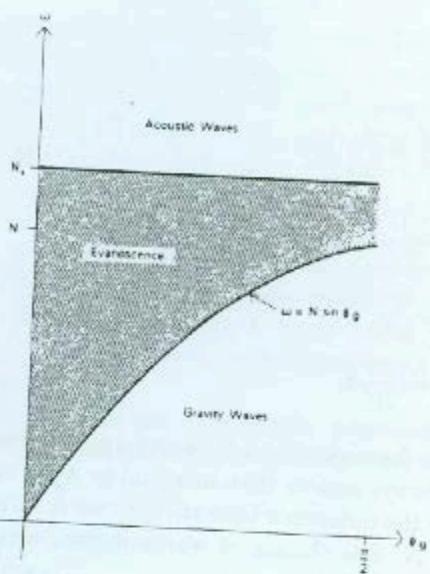


Fig. 4.8. The allowable domains for the propagation of acoustic-gravity waves of frequency ω at an angle θ_y to the vertical. In the shaded region, disturbances cannot propagate.

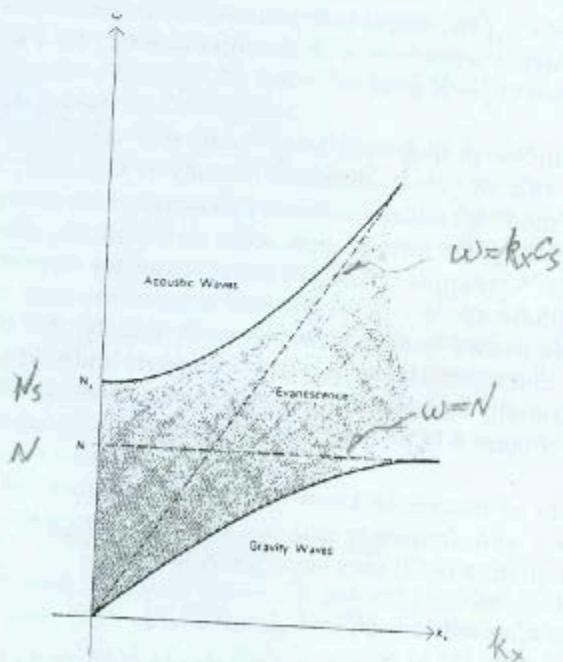


Fig. 4.9. A diagnostic diagram indicating the allowable regions for the vertical propagation of waves of frequency ω and horizontal wavenumber k_x . Disturbances in the shaded region are non-propagating (evanescent). The asymptotes $\omega = N$ and $\omega = k_x c_s$ are indicated by dashed lines.

将它代入运动表达式

$$\tilde{V}_1(\vec{r}, t) = \tilde{V}_1 e^{\frac{i}{\hbar} \gamma g \frac{\vec{r}}{c_s}} \cdot e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ = \tilde{V}_1 e^{\frac{\gamma g}{2c_s} \vec{r}} \cdot e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$n = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x n \quad (\text{是空间频率})$$

由上式可知，那怕是入射波数，传播速度，确定的波长，有 $\omega(t)$ ， \vec{k} 和 \vec{r} 中
这光波的表达式有驻波可能。122.13.椭圆波。 (第4.8)

vi. 在水平方向波数 k_x ，欲求 ω 的运动，是否沿垂直方向传播？

$$\text{这时应计入 } k_x, \quad k' = k_y^2 + k_x^2, \quad \therefore k_y = \frac{\gamma g}{2c_s}$$

$$k_y^2 = k_y^2 + \frac{\gamma g^2}{4c_s^2} \quad (\text{见前页 P.135}) \quad \therefore k_y^2 = 2k_y^2, \quad \text{又有 } k' = k^2 + k_y^2 \quad (\text{P.135})$$

$$k^2 + k_y^2 = k_y^2 + k_x^2 = 2k_y^2 + k_x^2 \Rightarrow k^2 = k_y^2 + k_x^2$$

$$(4.7-1) 式: \quad \omega^4 - (c_s^2 k^2 + \gamma g k_y) \omega^2 = -(Y-1) g^2 (k^2 - k_y^2)$$

将 $k^2 = k_y^2 + k_x^2$ 代入上式。得

$$\omega^4 - \omega^2 c_s^2 k_y^2 - (c_s^2 k_x^2 + \gamma g k_y) \omega^2 = -(Y-1) g^2 k_x^2$$

$$\omega^4 - \omega^2 c_s^2 k_y^2 - [\omega^2 c_s^2 - (Y-1) g^2] k_x^2 - \gamma g k_y \omega^2 = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2 c_s^2 k_y^2 - \left[\omega^2 - \frac{Y-1}{c_s^2} g^2 \right] c_s^2 k_x^2 - \left(\frac{\gamma g}{2c_s} \right)^2 \cdot \frac{\gamma g}{2c_s} \omega^2 = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2 c_s^2 k_y^2 - (\omega^2 - N_s^2) c_s^2 k_x^2 - 2N_s^2 \omega^2 = 0$$

$$\omega^2 c_s^2 k_y^2 + N_s^2 \omega^2 = \omega^2 (\omega^2 - N_s^2) - (\omega^2 - N_s^2) c_s^2 k_x^2$$

$$N_s^2 = \left(\frac{\gamma g}{2c_s} \right)^2 = \left(\frac{\gamma g}{2c_s^2} \cdot c_s \right)^2 = k_y^2 c_s^2$$

$$\text{上式左边} = 2\omega^2 c_s^2 k_y^2$$

$$\therefore k_y^2 = 2k_y^2$$

$$\therefore k_y^2 \omega^2 c_s^2 = \omega^2 (\omega^2 - N_s^2) - (\omega^2 - N_s^2) c_s^2 k_x^2$$

若 $\omega, k_x \neq 0$ ， \therefore 使 $\omega^2 (\omega^2 - N_s^2) > (\omega^2 - N_s^2) k_x^2 c_s^2$ 。就有 $k_y^2 > 0$
垂直方向就有波传播。

根据这个条件可以把 $\omega - k_x$ 平面分成三个区域，如图 9 所示。称为诊断面。

$$\omega^2(\omega^2 - N_s^2) > (\omega^2 - N^2) k_x^2 c_s^2$$

① k_x 很小，近似有 $\omega^2(\omega^2 - N_s^2) > 0$ ，即 $\omega > N_s$ 有声波 (P.137)

N_s 是声波的低频截止。

或者 $\omega \ll N$ 时，碰撞引起的波传播的条件便成立。

$$\omega^2(\omega^2 - N_s^2) > (\omega^2 - N^2) k_x^2 c_s^2$$

$\because N_s \approx N$ 简略地写成 ω^2 ，上述不等式变为

$$-\omega^2 N_s^2 > -N^2 k_x^2 c_s^2$$

$$\omega < \frac{N}{N_s} k_x c_s$$

i. $\omega < \frac{N}{N_s} k_x c_s$ 退向附近 $\omega < k_x c_s$ (重力波) ii.

这个重力波

$\omega > N_s$ 声波

(N_s 为声波限，即无重力波)

因此有结论：对于 i. 有 $\omega < N_s$ 时，声波被重力波抑制； ii. $\omega > N_s$ 时，重力波被声波抑制 (N_s 是声波与重力波的下限)

② k_x 大

i. $\omega > N$ ，不等式中忽略 N_s, N ，有 $\omega > k_x c_s$ (声波)

ii. $\omega < N$

$$\omega^2(\omega^2 - N_s^2) > (\omega^2 - N^2) k_x^2 c_s^2$$

$$-\omega^2 |(\omega^2 - N_s^2)| > -|(\omega^2 - N^2)| k_x^2 c_s^2$$

$$\omega^2 \frac{|\omega^2 - N_s^2|}{|\omega^2 - N^2|} < k_x^2 c_s^2 \quad \therefore \omega < N \text{ : 重力波}$$

由此可见 $\omega^2 < k_x^2 c_s^2$ ，该式表示声波不存在。

b. 声重力波的特点是：压缩效应使重力波在低频截止。声重力（重力波的恢复力）效应使声波出现低频截止。

声波的低频截止是由声波分压系数决定的，声波系数等于气体的可压缩性。
 声波系数由密度和声速决定，声速太低时声中的阻尼会很大。

7. 考虑磁场对声重力波的影响。夜间情况为复杂，因为引进了
新的恢复力，而且除了重力方向外，又引入了另一平行的方向，Alfvén
波的传播不变。但磁场会紊乱声重力波（或者说重力扰动
磁声波），产生快和慢的磁声-重力波模式。详细情况可参
考 Spruit, H. C. 1981. Space Sci. Rev. 29, 422

4.8 磁声-重力波 (慢)

在 Coriolis 力，且无风的情况下，由于温度梯度 $\sim e^{-\frac{3}{\gamma}}$ ，等离子体的垂直运动方程有解

$$\omega^2 = k^2 V_A^2 \cos \theta_p \quad (\text{Alfvén 波})$$

以及二支磁声-重力波

当磁场正常化时，(4.15) 式给出声-重力波两种模式的色散关系
从(4.15) 式得到 (4.52) 式，即

$$\omega^2 (\omega^2 - N_s^2) = (\omega^2 - N^2 \sin^2 \theta_q') k'^2 c_s^2$$

进一步展开得

$$\omega^4 - \omega^2 (N_s^2 + k'^2 c_s^2) + N^2 \sin^2 \theta_q' k'^2 c_s^2 = 0 \quad (4.54)$$

$$\text{或} \quad N_s^2 = \frac{\gamma N}{2(\gamma-1)^{1/2}} \quad (= \frac{\gamma g}{2c_s})$$

$$N = (\gamma-1)^{1/2} \frac{g}{c_s}$$

$$\sin^2 \theta_q' = 1 - \frac{k'_q}{k'_s}$$

$$k'_s = k_s + \frac{i}{2\Lambda} \quad (= k_s + i \frac{\gamma g}{2c_s^2}, \quad \Lambda = \frac{c_s^2}{\gamma g} = \frac{\rho}{\rho g})$$

$$k'^2 = k^2 + k'_s^2 - k'_q^2 (= k^2 + k_s^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^4} - k_q^2 = k^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^4})$$

$$\Lambda = \frac{c_s}{2N_s} \quad (= \frac{c_s^2}{\gamma g})$$

1. 当 $\omega \gg N$ ($\approx N_s$) 时, 重力的系数项可以忽略 ($\because N \gg N_s$), 得到方程 $\omega^2 = k^2 c_s^2 + k^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B$. (4.54) 式左边第三项可以忽略. 第二项中的 N_s 可以忽略, 而有 $\approx k^2$. (4.54) 式简化为

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 \quad (4.55)$$

2. 当 $\omega \ll k c_s$ 和 $N_s \ll k c_s$ (即 $k\lambda \gg 1$, $\lambda \ll \lambda_0$, 波速近似) 时. 是一种低频波 (频率低于声速), 浮力起主要作用. 有

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta_B \quad (\text{内重力波}) \quad (4.56)$$

3. 当有磁流, 且 $(k\lambda)^{-1} \ll 1$, 即 $\frac{r_0}{k c_s} \ll 1$. 也就是说 $q \rightarrow 0$. 这是 4.6 节的条件, 磁力和压强梯度为主 (忽略 q, Ω_L), 有磁声波色散关系式 (4.51)

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (c_s^2 + V_A^2) + c_s^2 V_A^2 k^4 \cos^2 \theta_B = 0 \quad (4.57)$$

根据 $(k\lambda)^{-1} \ll 1$, 有 $\frac{N_s}{k c_s} \ll 1$. 从 $k\lambda \gg 1$ 并且 $\lambda \ll \lambda_0$ 波长远大于半径 (波速近似). 在附近, 相当于 $r \approx r_0$.

$$\text{相位 } \lambda = 50 \pi (r/r_0)^2 \text{ m} \quad (4.10)$$

假设 $T = 1 \times 10^4 \text{ K}$, $r = r_0$ (太阳附近), $\lambda \sim 500 \text{ km}$, $\lambda \ll \lambda_0$ 的条件一定能满足. \therefore 这是一个严格的限制

4. 磁声-重力波的色散关系

色散关系为

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (c_s^2 + V_A^2) + k^2 c_s^2 N^2 \sin^2 \theta_B + k^4 c_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B = 0 \quad (4.58)$$

式中 θ_B : 一 \vec{k} 和磁场 \vec{B}_0 的夹角. $\theta_B = \cos^{-1} \frac{k_z}{k}$; $N = (Y-1) \frac{r_0 q}{c_s}$

讨论: i) 当 N 和 V_A 为零时, 声波的色散关系再次出现.

ii) 当 $V_A = 0$, $\omega \ll k c_s$, 成内重力波

iii) 只有 $V_A = 0$ 时, 声重力波的色散关系 (4.54) 才有可能重现. 因为声波

和重力波之间尚未区分。于是(4.55)式简化为声速的非弹性散射方程。(4.55)式中
 $N_s \frac{c_s^2}{k^2}$ 重力二倍态与重力无关， $N_s \ll R C_s$ 表示两者相对于声波、重力波
 可忽略，即它们之间的耦合被排除。

iv. 当 $N = C_s = 0$ 时。

$$\omega^2 = k^2 V_A^2 \quad (\text{无风 Alfvén 波})$$

v. 当 $N = 0$ 时。

$$(4.56) \text{ 式 简化为 } \omega^4 - \omega^2 k^2 (C_s^2 + V_A^2) + k^4 C_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B = 0 \quad (\text{无风声波})$$

[注意：在推导磁声波色散关系时，利用了粘滞层近似（见本节 P.101）]

从(4.56)式可归结为磁声波色散关系，其中(4.56)式叫作零次色散方程。它适用于
 声波速度。

vi. 假设 $C_s^2 \leq V_A^2$, $N_s \ll R C_s$. 此时(4.56)式第3, 四项，可以
 把零三次忽略，也即磁声波色散关系，因为 N_s 在零次
 散射中占主导地位。这时(4.56)式简化为

vii. $C_s \rightarrow 0$ 的条件下，认为气体压强对重力波没有贡献，只有压强
 Alfvén 波存在。

5. 现推导磁声-重力波的色散关系

与磁声波的色散关系相似，仅多了一项 $R^2 C_s^2 N_s^2 \sin^2 \theta_B$. 现把
 θ_B, N 表达式代入(4.56)

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (C_s^2 + V_A^2) + R^2 C_s^2 \frac{(Y-1) g^2}{C_s^2} \left(1 - \frac{k^2}{R^2}\right) + R^4 C_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (C_s^2 + V_A^2) + (Y-1) g^2 (R^2 - k^2) + R^4 C_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B = 0$$

记：令 $\hat{\beta}_0 = \frac{\vec{B}_0}{B_0}$ 为单位矢量， $\hat{\gamma}$ 为 $\vec{\gamma}$ 方向单位矢量

不计 Coriolis 力即 $\vec{\omega} = 0$. 即(4.16)式简化为

$$\begin{aligned} \omega^2 \vec{v}_1 &= C_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i(Y-1) g \hat{\beta} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i g \vec{k} V_{13} + \left\{ \vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)] \right\} \times \vec{B}_0 V_A^2 \\ &= C_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i(Y-1) g \hat{\beta} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i g \vec{k} V_{13} + V_A^2 (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{v}_1 - V_A^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 \\ &\quad + [(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1)] \vec{k} V_A^2 \end{aligned} \quad (4.8-1)$$

設諸向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{k} \cdot \vec{v}_1, \hat{\vec{g}} \cdot \vec{v}_1, \hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1$ 的形式為 $\vec{v}_1 = \vec{v}_1^0 + \vec{v}_1^1$, $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = k \cdot \vec{v}_1^0 + k \cdot \vec{v}_1^1$, $\hat{\vec{g}} \cdot \vec{v}_1 = g \cdot \vec{v}_1^0 + g \cdot \vec{v}_1^1$, $\hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1 = B_0 \cdot \vec{v}_1^0 + B_0 \cdot \vec{v}_1^1$. 由(4.8-1)式分別得來 $\hat{\vec{g}}, \hat{B}_0, \vec{k}$ 得到與主的齊次方程. 公係數行列式等於零, 求得色散關係.

(i) $(4.8-1) \cdot \hat{\vec{g}}$: (不含 $\hat{\vec{g}}$)

$$\omega(\vec{v}_1 \cdot \hat{\vec{g}}) = C_s^2 k_g (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i(Y-1) g (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + ig k_g (\vec{v}_1 \cdot \hat{\vec{g}}) + (\vec{k} \cdot \hat{B}_0)^2 V_A^2 (\vec{v}_1 \cdot \hat{\vec{g}}) - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{g}}) V_A^2 + [(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) (\hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1)] V_A^2 k_g$$

$$\text{式中 } k_g = \vec{k} \cdot \hat{\vec{g}}, \quad V_A = (\vec{v}_1 \cdot \hat{\vec{g}})$$

$$[\omega^2 - ig k_g - (\vec{k} \cdot \hat{B}_0)^2 V_A^2] (\vec{v}_1 \cdot \hat{\vec{g}}) - [C_s^2 k_g + i(Y-1) g - (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{g}}) V_A^2 + k_g V_A^2] (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) k_g V_A^2 (\hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1) = 0$$

(ii) $(4.8-1) \cdot \vec{k}$: (不含 \vec{k})

$$-ig \vec{k} \cdot (\vec{v}_1 \cdot \hat{\vec{g}}) + [\omega^2 C_s^2 k^2 - i(Y-1) g k_g - k^2 V_A^2] (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - k^2 V_A^2 \cos \theta_B (\hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{k} \cos \theta_B = (\vec{k} \cdot \hat{B}_0)$$

(iii) $(4.8-1) \cdot \hat{B}_0$ (不含 \hat{B}_0)

$$ig (\vec{k} \cdot \hat{B}_0) (\vec{v}_1 \cdot \hat{\vec{g}}) + [C_s^2 k \cos \theta_B + i(Y-1) g (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{g}})] (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - \omega^2 (\hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1) = 0$$

令 $(\vec{v}_1 \cdot \hat{\vec{g}}), (\vec{k} \cdot \vec{v}_1), (\hat{B}_0 \cdot \vec{v}_1)$ 為 1 色散方程式為零

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - ig k_g - k^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B & -[C_s^2 k_g + i(Y-1) g - k V_A^2 \cos \theta_B (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{g}}) + k_g V_A^2 - k k_g V_A^2 \cos \theta_B] & 0 \\ -ig k^2 & [\omega^2 C_s^2 k^2 - i(Y-1) g k_g - k^2 V_A^2] & -k^3 V_A^2 \cos \theta_B \\ ig k \cos \theta_B & C_s^2 k \cos \theta_B + i(Y-1) g (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{g}}) & -\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解之得 \vec{v}_1 :

①

$$(\omega^2 - ig k_g - k^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B) [\omega^2 C_s^2 k^2 - i(Y-1) g k_g - k^2 V_A^2] (-\omega^2) +$$

$$+ ig k^2 [C_s^2 k \cos \theta_B + i(Y-1) g (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{g}})] k k_g V_A^2 \cos \theta_B +$$

$$+ ig k^4 V_A^2 \cos^2 \theta_B [C_s^2 k_g + i(Y-1) g - k V_A^2 \cos \theta_B (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{g}}) + k_g V_A^2] +$$

$$+ ig k^2 k_g V_A^2 \cos^2 \theta_B [\omega^2 C_s^2 k^2 - i(Y-1) g k_g - k^2 V_A^2] +$$

$$+ R^3 V_A^2 \cos \theta_B [C_s^2 R \cos \theta_B + i(Y-1) g(\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{s}})] (\omega^2 - g k_3 - R^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B) + \\ + i g R \omega^2 [C_s^2 R_3 + i(Y-1) g - R V_A^2 \cos \theta_B (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{s}}) + k_3 V_A^2] = 0$$

其一

$$\textcircled{1} = -\omega^6 + \omega^4 [R^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B + R^2 (C_s^2 + V_A^2)] - \omega^2 [(C_s^2 + V_A^2) R^4 V_A^2 \cos^2 \theta_B - \\ - (Y-1) g^2 R_3^2] + i [rg k_3 \omega^4 - \{(Y-1) g k_3 R^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B + g R_3^2 (C_s^2 + V_A^2)\} \omega^2]$$

$$\textcircled{2} = i g R^4 k_3 C_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B - (Y-1) g^2 R^3 (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{s}}) k_3 V_A^2 \cos^2 \theta_B$$

$$\textcircled{3} = -(Y-1) g^2 R^4 V_A^2 \cos^2 \theta_B + i g R^4 R_3 C_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B - i g R^5 V_A^4 \cos^3 \theta_B (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{s}}) + \\ + i g R^4 R_3 V_A^4 \cos^2 \theta_B$$

$$\textcircled{4} = (Y-1) g^2 R^2 k_3^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B + i g R^2 R_3 V_A^2 \cos^2 \theta_B (\omega^2 - C_s^2 R^2 - R^2 V_A^2)$$

$$\textcircled{5} = \omega^2 C_s^2 V_A^2 R^4 \cos^2 \theta_B - R^6 C_s^2 V_A^6 \cos^4 \theta_B + (Y-1) g^2 R^3 R_3 V_A^2 (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{s}}) \cos \theta_B - \\ - i g R^4 k_3 V_A^2 C_s^2 \cos^3 \theta_B - i(Y-1) g R^5 V_A^4 \cos^3 \theta_B (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{s}}) + i(Y-1) g (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{s}}) R^3 V_A^2 \cos \theta_B \omega^2$$

$$\textcircled{6} = -\omega^3 (Y-1) g^2 R^2 + i g R^2 \omega^2 [C_s^2 R_3 - R V_A^2 \cos \theta_B (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{s}}) + R_3 V_A^2]$$

令上式除以 ω^2 得到的实部为零

$$-\omega^6 + \omega^4 [R^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B + R^2 (C_s^2 + V_A^2)] - \underline{\omega^2 [(C_s^2 + V_A^2) R^4 V_A^2 \cos^2 \theta_B - (Y-1) g^2 R_3^2]} + \\ + \underline{\omega^2 C_s^2 V_A^2 R^4 \cos^2 \theta_B} - \underline{\omega^2 (Y-1) g^2 R^2} - \underline{(Y-1) g^2 R^3 R_3 V_A^2 (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{s}}) \cos \theta_B} - \\ - \underline{(Y-1) g^2 R^4 V_A^2 \cos^2 \theta_B} + \underline{(Y-1) g^2 R^2 R_3 V_A^2 \cos^2 \theta_B} - \underline{R^6 C_s^2 V_A^6 \cos^4 \theta_B} + \\ + \underline{(Y-1) g^2 R^3 R_3 V_A^2 (\hat{B}_0 \cdot \hat{\vec{s}}) \cos \theta_B} = 0$$

下划线部分，即为等效方程

$$A = -\omega^2 [(C_s^2 + V_A^2) R^4 V_A^2 \cos^2 \theta_B - C_s^2 V_A^2 R^4 \cos^2 \theta_B + \frac{1}{\omega^2} R^6 C_s^2 V_A^6 \cos^4 \theta_B]$$

有关参数 (Priest, PWS-158)

$$V_A = \begin{cases} 10 \text{ km s}^{-1} & \text{photosphere} \\ 300 \text{ km s}^{-1} & \text{corona} \end{cases} \quad C_s = \begin{cases} 10 \text{ km s}^{-1} \\ 200 \text{ km s}^{-1} \end{cases}$$

因此近似有 $C_s \approx V_A$, 中等情况下 $\frac{1}{\omega^2} R C_s^2 V_A^4 \cos^2 \theta_B$
和 (1) $\omega = RC_s$ 代入有 $R^4 V_A^4 \cos^2 \theta_B \ll \frac{1}{\omega^2}$. $\therefore \cos^2 \theta_B \ll \cos^2 \theta_B$

$$\therefore A \approx -\omega^2 C_s^2 R^4 V_A^2 \cos^2 \theta_B$$

虚线所表示之和为 13

$$B = \omega^2 (Y-1) g^2 k_g^2 - \omega^2 (Y-1) g^2 R^2 - (Y-1) g^2 k^2 k_g V_A^2 (\hat{\beta}_0 \cdot \hat{\gamma}) \cos \theta_B - (Y-1) g^2 R^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B \\ + (Y-1) g^2 k^2 k_g^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B + (Y-1) g^2 k^2 k_g V_A^2 (\hat{\beta}_0 \cdot \hat{\gamma}) \cos \theta_B$$

$$\text{利用 } \frac{\omega}{R} = C_s \approx V_A$$

$$B = -\omega^2 (Y-1) g^2 (R^2 - k_g^2) - \omega^2 (Y-1) g^2 \frac{k k_g}{\frac{\omega^2}{R^2}} \cdot V_A^2 (\hat{\beta}_0 \cdot \hat{\gamma}) \cos \theta_B - \omega^2 (Y-1) g^2 \frac{k^2}{\frac{\omega^2}{R^2}} V_A^2 \cos^2 \theta_B \\ + \omega^2 (Y-1) g^2 \frac{k_g^2}{\frac{\omega^2}{R^2}} \cdot V_A^2 \cos^2 \theta_B + \omega^2 (Y-1) g^2 \frac{k k_g}{\frac{\omega^2}{R^2}} V_A^2 (\hat{\beta}_0 \cdot \hat{\gamma}) \cos \theta_B$$

$$(\hat{\beta}_0 \cdot \hat{\gamma}) \cdot \cos \theta_B, \quad \cos^2 \theta_B \gg \cos \theta_B \cdot \cos \theta_B \ll 1$$

$$13 \approx -\omega^2 (Y-1) g^2 (R^2 - k_g^2)$$

$$(\cos^2 \theta_B \approx \frac{1}{Y-1} \text{ 为常数}) \Rightarrow \omega^2 g^2 k^2$$

$$\frac{A}{\omega^2 (Y-1) g^2 k^2 \cos^2 \theta_B} \approx \frac{C_s^2 R^4 V_A^2}{(Y-1) g^2 k^2} \gg 1 \quad \therefore N_s = \frac{Yg}{2C_s} \ll RC_s$$

综上所述， $\therefore \cos^2 \theta_B, \cos \theta_B \cos \theta_B \approx 1$

故而实数次之和为

$$-\omega^4 + \omega^4 k^2 (C_s^2 + V_A^2) - \omega^2 C_s^2 R^4 V_A^2 \cos^2 \theta_B - \omega^2 (Y-1) g^2 (R^2 - k_g^2) = 0$$

$$\omega^4 - \omega^4 k^2 (C_s^2 + V_A^2) + (Y-1) g^2 k^2 \left(1 - \frac{k_g^2}{k^2}\right) + R^4 C_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B = 0$$

$$\omega^4 - \omega^4 k^2 (C_s^2 + V_A^2) + R^2 C_s^2 N^2 \sin^2 \theta_B + k^4 C_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B = 0 \quad (4.56)$$

$$(N = (Y-1) \frac{g^2}{C_s} \text{ 为半径, 速度, 频率 (m/s) 与频率 (Hz) 的关系})$$

结论 4. 由丁

VIII. 1. 由 $C_s^2 \gg V_A^2$, 由以上重要力滤色瓶关系 (4.56) 可得 $\omega^2 \approx Y^2 R^2$

$$\omega^2 = \frac{k^2 C_s^2 \pm [k^4 C_s^4 - 4(k^2 C_s^2 N^2 \sin^2 \theta_B + k^4 C_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B)]}{2}$$

$$\approx \frac{k^2 C_s^2 \pm k^2 C_s^2 [1 - 2(\frac{N^2}{k^2 C_s^2} \sin^2 \theta_B + \frac{V_A^2}{C_s^2} \cos^2 \theta_B)]}{2}$$

$$\omega_+^2 \approx k^2 C_s^2 [2 - 2(\frac{N^2}{k^2 C_s^2} \sin^2 \theta_B + \frac{V_A^2}{C_s^2} \cos^2 \theta_B)] \cdot \frac{1}{2}$$

$$N \ll k C_s, V_A \ll C_s$$

(R < 1)

$$\omega_+^2 \approx k^2 C_s^2 \quad (\text{声波})$$

$$\omega_-^2 \approx k^2 C_s^2 [\frac{N^2}{k^2 C_s^2} \sin^2 \theta_B + \frac{V_A^2}{C_s^2} \cos^2 \theta_B]$$

$$= N^2 \sin^2 \theta_B + k^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B \quad (\text{磁重力波 magneto-gravity wave})$$

ω_-^2 模式的波^① 在低频情况下, 若 $k V_A \ll N$, 则简化为内重力波

$$\omega_-^2 = N^2 \sin^2 \theta_B \quad (\text{内重力波})$$

② 在高频情况下, 若 $k V_A \gg N$ 有

$$\omega_-^2 \approx k^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B$$

之谓慢磁声波, 相速为 $V_{p-}^2 = \frac{C_s^2 V_A^2 \cos^2 \theta_B}{C_s^2 + V_A^2}$, 本节讨论开流时有假设 $C_s^2 \gg V_A^2$ ∴ $V_{p-}^2 \approx V_A^2 \cos^2 \theta_B = \frac{\omega_-^2}{k^2}$

因此在条件: $C_s^2 \gg V_A^2$ 及 $k A \gg N$ 下, ω_-^2 成为慢磁声波

IX. 本节条件 $N_s \ll k C_s$ (4.5), 在慢磁声重力波中, 磁场没有与重力耦合, 除非加入条件 $C_s^2 \gg V_A^2$, 才有磁重力波模式
(重力波相对声波被忽略, 磁场占主导地位. 在 $C_s^2 \gg V_A^2$ 时
磁场已不占主导地位, 重力可以忽略)

Chen & Lykoudis (1972) 考虑另一种方法: 水平方向 磁场趋于
零渐近, $B \sim \exp(-\frac{1}{2} \alpha h)$, 而 Alfvén 速度均匀 ($\propto \sqrt{\mu_0 \sigma_0}$)
 $\sim e^{-\frac{1}{2} h}$), 因此带电粒子速度按指数衰减.

Nye 和 Thomas (1974) 例 1) 这种方法是 running penumbral 波模型
另外，在磁场和重力耦合的情况下，不会出现任何垂直传播的平面波
 $(\sin \theta_g = 0)$
解。

x. 寻找形如 $V_{1,0} \exp i(k_x x + k_y y - \omega t)$ 的解，水平方向传播变化，垂
直方向没有这种 ~~类型~~ 方程 (4.14) 一般变成 $V_{1,0}$ 的四阶常微分方程。无相
关边界条件下求解。

Roberts 和 Webb (1978) 探讨这种方法，考虑和起来粒泡：已有一个
近似光球的强磁场。

Nye 和 Thomas (1976a) 在均匀水平磁场中，通过由光球层注出的
日冕波 (flare-induced coronal waves) 模型 (角光)

上述特例中， $V_{1,0}$ 的方程是 $\omega^2 = P_1^2$ 。

4.9. 5分钟振荡

1. Leighton (1960) 发现“宁静太阳表面（光球和低层色球）区域，有上下（up and down）振荡，周期约5分钟。这些区域明显不同于米粒组织，是由云簇或色斑组成。典型的情况，在4-5个周期（有时可达9个周期），波色被振荡层（低声带）隔开（图4.10）。值得注意的是振荡带相对地持续时间长，平均而言，波色的持续期为23分钟，偶尔可长达50分钟。相连接的波色似乎不相关的。
2. 振荡区域均匀分布于日面，大约日面上有区域，任何时候都会出现振荡。速度振幅约在 $0.1 - 1.6 \text{ km s}^{-1}$ 之间。典型值为 0.4 km s^{-1} (光球)。随高度慢慢增加，但速度却减少。接近日面边缘时，速度振幅减少。表明振荡主要垂直方向。光球上运动在周期只有15秒的光球周期振荡。速度振幅为 $0.1 \pm 0.2 \text{ km s}^{-1}$ 。
(功率)
3. 振荡的频率范围有一个大，从 150 秒到 400 秒。1 分钟的频率位于 300 秒左右。

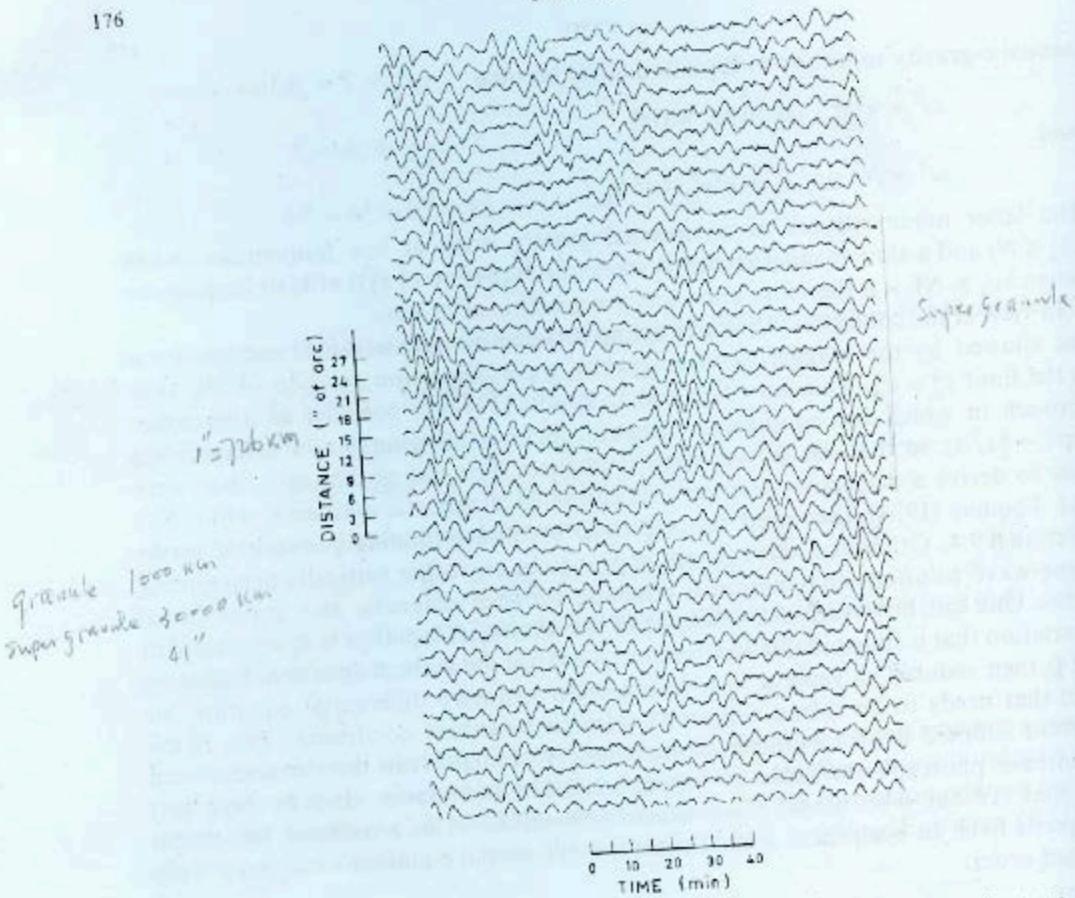


Fig. 4.10. The observed vertical velocity as a function of time at many photospheric locations, each separated by 3 arc sec (about 2200 km). The velocity scale is such that the distance between adjacent curves corresponds to 0.4 km s^{-1} (from Musman and Rust, 1970).

A wide range of frequencies is present in the oscillations (from 150 to 400 s), but the spectrum peaks at about 300 s. The higher frequencies down to 150 s are observable in the chromosphere and increase in importance with height. Lower frequencies (non-periodic) dominate in the photosphere and have been identified with photospheric granulation; their relative importance decreases with height.

The horizontal wavelength is typically 5000 to 10 000 km, which is distinctly larger than the width of a granule. It can clearly be seen in Figure 4.10 that many oscillations are in phase: an area the size of a supergranule cell appears to oscillate coherently with a superimposed amplitude modulation. The horizontal scale for amplitude coherence is between 5000 km and 10 000 km, whereas that for phase coherence is as much as 30 000 km.

Vertical phase speeds of 30 to 100 km s^{-1} (upwards) have been observed, as have horizontal phase speeds of the same magnitude. Oscillations in brightness (and so temperature) are observed; the brightness maxima lead the maxima in upward velocity by a phase of $\frac{1}{2}\pi$, which argues against the presence of progressive waves.

较小的频率 (~ 150 秒) 可引起球带中约 1% 的反射, 随速度而 (频率) 增加, (非同期的) 频率降低; 频率在色球中的主导地位, 等同于光球不稳定性, 随速度增加, 低频的重要性相对减弱.

4. 典型的水平方向波长为 5000 ± 10000 公里, 延长大于一个赤纬的宽度从赤道到 $\pm 40^{\circ}$ 可清楚看到许多振荡的相位是相同的, 也即一个起来半径大的区域一起振荡 (to oscillate coherently), 而振幅受制于相干性 (coherence) 在水平尺度在 $5000 \pm 10,000$ 公里之间, 而相位相差只达 $30,000$ 公里.

5. 观测到的垂直方向 (向上) 的相速达 $30 \pm 100 \text{ km s}^{-1}$, 水平方向的相速及大小与此相同. 观测到亮度 (从而强度) 很高, 亮度的极大导致向上运动的速度很大, 在一个 $\frac{\pi}{2}$ 相位 (by a phase of $\frac{\pi}{2}$), 以此作为行进波 (progressive wave) 2. 不存在理由. 由于色球上, 2. 同时度上的速度很高没有相位差, 这意味着皮卡尼定理, 而不平行进. 不仅如此, 功率谱分析显示了行进波的特征.

6. Athay (1981a) 研究了色球行进速度区的振荡周期. 色球上, 太阳表面的 $2. (3)$ 区域 振荡周期 ~ 1 分钟. 振荡周期有一个大的范围, 小于 30 秒到大于 400 秒. 12 月半球平均 300 秒附近. 声扰光球的 $53''$ 行进振荡明显是行进的, 但色球上 $\leq 53''$ 行进振荡者未必以声速传播. 行进速度已有 $2 \pm 3 \text{ km s}^{-1}$ 的声誉. 没有确定的周期. 不过脉冲时间的平均时间为 $53''$ 强. 这可能表示振荡强度或振幅. 12 月半球平均的色球中的行进倍数, 该特性已遭到质疑.

7. 除了太阳的行进振荡, 也有 $53''$ 行进振荡, 但尚未被引入球函数 $\tilde{Y}_l^{(m)}(\theta, \phi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \begin{cases} \sin^m \phi \\ \cos^m \phi \end{cases}, \begin{matrix} l=0, 1, 2, \dots \\ m=0, 1, 2, \dots \end{matrix}$

$P_l^{(m)}$ associated Legendre polynomials

全由球面上 $53''$ 行进振荡 l 在 0 和 4 之间.

4.9.2 模型

4.9.2A 无球的响声

Schmidt 和 Zürker (1963) 等认为 5 分鐘根高是毛细波下面未粒状的等离子体圆柱体在毛细波的根高“环”(ringing)。根高大于或等于截上频率 N_s 的声波是不能传播的，因此当 ω 趋近于 N_s 时，声速趋近于零。因为粒状碰撞向度的声速 $\omega > N_s$ ，超越了频率为 N_s 的声速。

Denbner (1973) 用肉眼测到由亮末粒崩发的闪光 (200 秒) 识别响声传播的困难之一是很难辨别有音调未粒与根高的同时出现。

- 另外，“5 分鐘根高可持续 30~45 分鐘，未粒化过程寿命为 8 分鐘”
ii. 根高的特征长度 ~ 6000 公里，未粒化过程尺度 ~ 1000 公里
iii. 无球和低层色球的 N_s 太大，相应的周期仅为 180 到 220 秒。
(< 300 秒)

4.9.2B 波的捕获

5 分鐘根高之可能是捕获在共根腔内的波 (Schatzman, 1956)。这种空腔是太阳大气中的一层，在该层内波可以传播，层的上下边界由不传播波的大气层所限定。空腔的上下边界将波反射出共根腔内，生成驻波。

从诊断者对于一定的温度，频率 (ω, ν_x) 的波能传播。较高的太阳大气的适度活动生成了可能的空腔。空腔的 ω, ν_x 的范围由第 4.11 节的阴极区域表示。Ia, IIa 内有捕获声波，IIg 则有捕获重力波。Ia IIg 位于极地温度 ($4200K$) 附近的区域 (反旋层)，IIa IIg 相邻的温度约 $10^5 K$ 的区域 (对流区顶部或色球)。
温度较高的区域
色球

最初，期望 5 分鐘根高的波长等于半径 R_1 的大小， ~ 1800 公里。(以及可能被限制为与之相似的波长)。于是 Uchida (1965) 和 Thomas 等 (1971) 认

gravity waves (Thomas *et al.*, 1971) have too small a wavelength to be

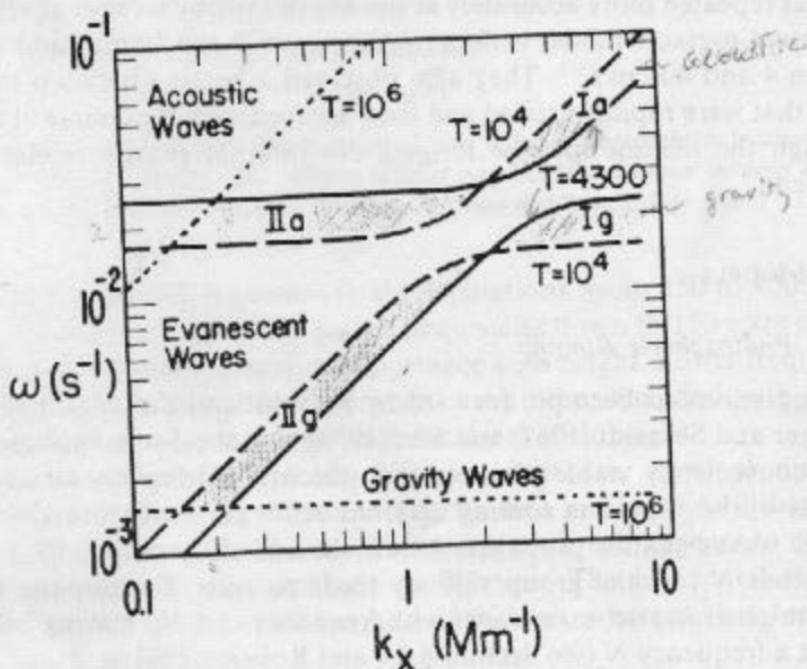
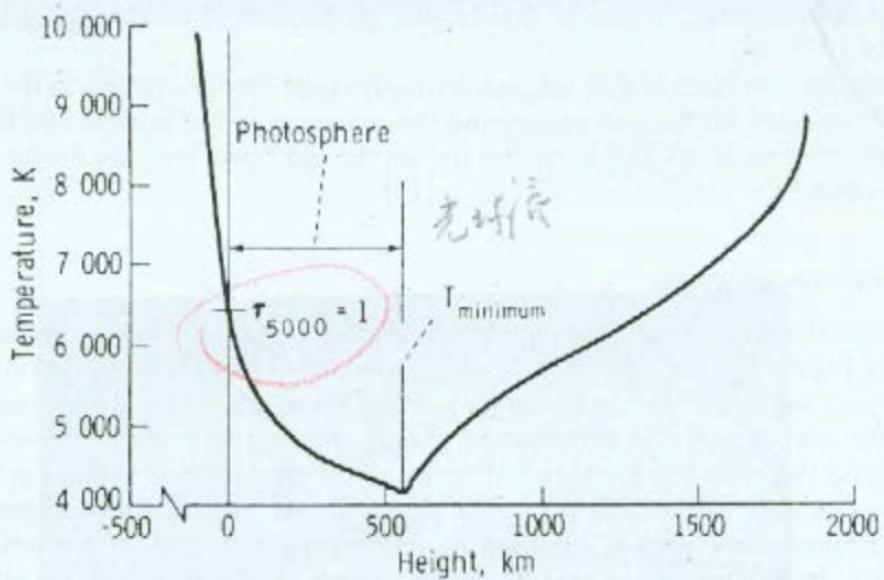


Fig. 4.11. Diagnostic diagrams for acoustic-gravity waves at the temperatures 4300 K (solid), 10^4 K (dashed) and 10^6 K (dotted). The shaded regions indicate ranges of frequency ω and horizontal wave number k_x for which the waves are trapped in the solar atmosphere (after Stein and Leibacher, 1974).

A DESCRIPTION OF THE SUN

25



(a)

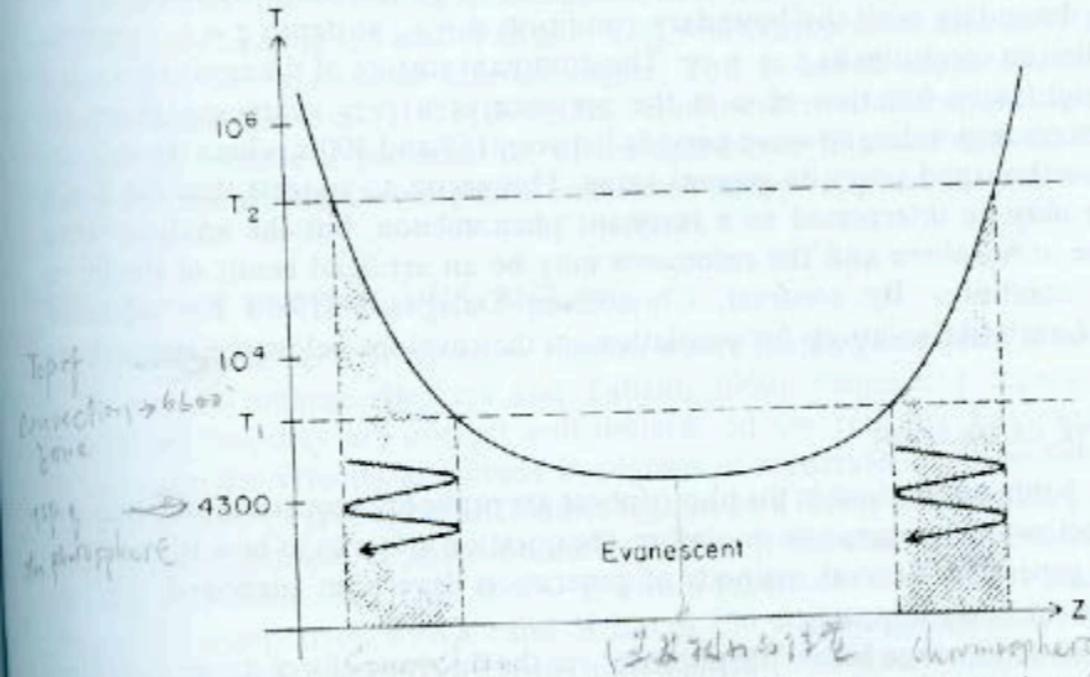


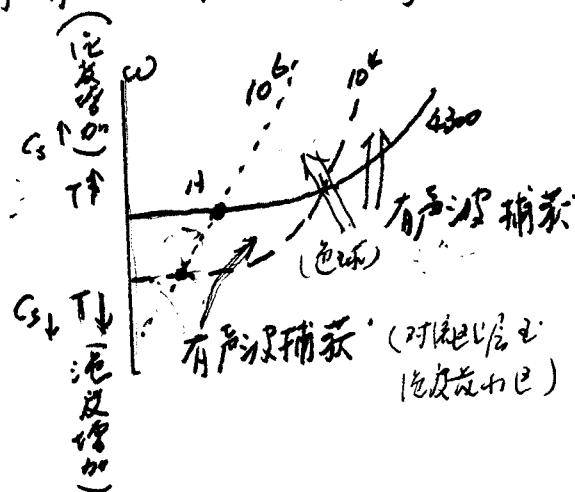
Fig. 4.12. A sketch of the temperature as a function of height in the solar atmosphere, indicating the location of two cavities (shaded), one in the chromosphere and the other in or below the photosphere. Acoustic waves may propagate within a cavity but not below or above it, where they become evanescent (non-propagating). Similar cavities exist which can trap gravity waves.

为在空腔上捕获了重力波，后来发现水平波长 $\frac{2\pi}{k_x} \approx 1.75 \text{ m}$ 约 $(k_x = 1.2 \text{ m}^{-1})$ 。虽然 (2.2.1) 式中 $\omega \approx 0.025^{-1}$ ，水平波长 $k_x \approx 1 \text{ m}^{-1}$ ，但这是 I_a 。1 岁波粒对区域 (I_a)，捕获的声波的频率太高。在 I_a 中捕获的重力波波长太短，而在 I_b 中的重力波频率太低。

因为 I_a 位于柱形线 (10^4 K) 之上，而 ω 表明 频率为 ω ，波数为 k_x 的声波在温度 10^4 K 附近可以传播。但在 I_a 在实线 (4300 K) 和虚线 (10^6 K) 之间，
波 (ω, k_x) 到达 4300 K 或 10^6 K 的区域时，就不传播了。太热中有许多区域可以捕获 I_a 型的空腔，或者在对流区上部 (位于 $T - T_f$ 附近，温度从 T_f 向上
到 4300 K 逐渐增加)，或者在色球，位于 T_f 附近的区域 (第 4.12)

部分位于光球以下，从色球到

在对流区上部的空腔中，声波被某 T 通过 T_f 以上 (10^6 K)
以下 (对流区下部) 所反射。色球中的空腔上部的反射由下界逆，下反射由 T_f 逆。
光球上观察到的 5 分钟振荡与对流区上部的空腔有关，当频率为 N_s
时，由温度为 T_f 的区域反射。 N_s 相对应的周期在 220 和 420 秒之间



✓

上述的空腔上方，扰动不传播或者说随波传播衰减。声波 (II) 从
冠 (色球附近) (4300 K 附近) 进入色球中的空腔，同耗散 (指数衰减) 可能加
速色球和日冕。不过代价的这种加速是重要的，加速后色球湍流周期
较短。

4.9.3 波动层

和半分钟振幅声波的捕获，那空间热流声波怎样产生？

1. 最有可能的是光球下的对流区，浮力驱动湍流运动，声速驱动扰动传播即声波（Lighthill 机制）
2. 对流穿透（penetrative convection），光球尚未耗散出，对流区不仅有对流元不花，这些对流元穿透进入热层光球层，耗散运动量和热量，产生的波动，但是较少耗散和热层之间没有关系，对该不利。
3. 对流区上方的过稳定性（Thermal over stability），发生在对流区上方，用以解释半分钟振幅的驱动机制。代表地模型表示为 $\alpha \propto 1 - \frac{1}{\lambda}$ ，过稳定性要有一个驱动的稳定性力、恢复力和耗散过程。半分钟振幅过稳定性要有一个驱动的稳定性力、从而恢复力随振幅增加而减小，耗散减小了驱动的稳定性力，从而恢复力随振幅增加而减小，对于热的过稳定性，浮力仅等高物体不稳定，恢复力是正反馈，耗散是耗散过程。
4. 振荡过程中，~~从透明度上~~在太陽某些层中有驱动不稳定性的效应，当物质密度降低时（ β 透明）获得热量，膨胀时（透明）失去热量，称为K机制以此描述半分钟振幅的稳定性。不过考虑了流速（convective flux）的扰动再进行讨论，对K机制有可疑之处。

目前 Lighthill 机制对声波为可行的。

4.9.4 强磁场区

强磁场区，如太阳黑子的本底，谱线和超米粒组织的边界已识别到振荡，但理论过高，但很物理的一些振荡，例如我们在前面曾经提到的中等强度强场（大于 $80 G$ ）区域，速度振幅比宁静区小约 25% 。② 老年层中的声波周期长

(摘自 P. 151 的 7.)

① 把声波的发射处理为多极振子的辐射过程，辐射功率 P_0 的表达式为

$$P_0 \approx \rho_0 v_i^2 d^3 \left(\frac{v_i}{c_s}\right) \left(\frac{v_i}{\alpha}\right)$$

d：声源尺寸，等于所分析的传播路径的半径。 v_i ：流动速度；

c_s ：声速。 $\frac{v_i}{c_s}$ 转换成声速的效率； $\frac{\alpha}{v_i} = T$ ，流动的持续时间。

② 两个大小相等方向相反的单极源构成偶极源，偶极源的声压为单极源的 $\frac{1}{2}$ 倍。 $\lambda = c_s T = \left(\frac{c_s}{v_i}\right) \cdot d$

$$\text{辐射功率 } P_0 \approx \rho_0 v_i^2 d^3 \left(\frac{v_i}{c_s}\right)^3 \frac{v_i}{\alpha}$$

③ 美心地面对偶极源 $P_0 \approx \rho_0 v_i^2 d^3 \left(\frac{v_i}{c_s}\right)^5 \frac{v_i}{\alpha}$ ， m 极源则 $P_m \approx \rho_0 v_i^2 d^3 \left(\frac{v_i}{c_s}\right)^{2m+1} \frac{v_i}{\alpha}$

④ 孤立的高流速 (5 流速) 会使无序度从零迅速增加，对辐射没有贡献。

⑤ 偶极源还作了作用力。高流速 \vec{F} 受外力作用时，没有流动量输出。偶极源对辐射的贡献也为空。

⑥ 因此主要由四极源或四阶矩对辐射作出贡献。相当于对流速中的无序度贡献形成四极源，高流动矩阵转换成声速的效率为 $\left(\frac{v_i}{c_s}\right)^5$

⑦ Lighthill 认为声速 v_i 与流动持续长度 L 相当时，辐射强度最大。

$$\text{即 } c_s = 20 \text{ km/s}, \text{ 流动持续长度 } L = 6000 \text{ km. 则有 } \frac{L}{c_s} = 300 \text{ 秒.}$$

不复杂的色球带中部分集中于 100-400 秒，对于暗斑（1 色球层）极大值在 330 秒左右，而宁静太阳风带集中于 200-400 秒，极大值位于 300 秒。③ 黑子本影中暗斑^(深红)是三分之二很高，是垂直运动，相变甚^(深红)小，2"-3" (1500-2100 秒)，同期在 150 和 200 秒之间，半影中又因增加 300 秒左右。④ 同期 110 到 120 秒和 300 到 470 秒的本影（光球层）很高已有报告。在暗带色球上，很高同期差为 145 和 185 秒。半影很高可能代表捕获的快（磁声重力波）模式，或者捕获管（爬升）模式。^(浅红)

⑤ 黑子中其他类波现象包括慢的半影波 (running penumbral waves) 在许多日食电影中可看到规则的向右的波纹，同期在 150 秒和 290 秒之间。水平方向波长 2300 秒到 2800 秒，水平相速度 102 弧秒/秒到 202 弧秒/秒之间。波速是上下运动，很可能是由短同期的半影很高所激发。在大型结构稳定的黑子中似乎有此。但似乎与现代复杂的运动黑子中。Nye 和 Thomas (1974, 1976 b) 提出过转动半影波的模型：波速度修正过的磁声重力波（磁声重力波），在色球中被捕获，而在色球中消失。捕获的原因是：该区域（色球）下声速增加，让 Alfvén 速度增加（？）^{同时}衰减。半影中有时发现色球的半影闪光 (umbrial flash)。^{一些}是向上运动的半影，仅持续 50 秒，重复出现，但与光球的很高不同。

Antia 和 Chitre (1979) 设想通过稳定的磁声波。他们研究了多方程的大气 (polytropic stratified atmosphere)，(其中有垂直方向的匀速与不匀速) 的磁声重力波，得到扰动重力波微分方程，在有关的条件下，得出复杂半影半球。

4.9.5 将来

1. 最令人感兴趣的射线源：日冕。

利用总应力和重力探测太阳内部，确定对流区的深度，随深度而变的射动，测定速度的分化和大尺度磁场。

2. 局域磁场变化的测量

3. 针对磁场有重要作用的区域，进一步发展有很高的理论价值。

4.10 不均匀介质中的波

本章大部分的分析基于源化的均匀介质中的传播的假设。当波长入射大于特征长度时，这种假设是合理的。将均匀介质处理为力学上的优势是波动方程的偏微分方程化（从 (4.10) 式至 (4.12) 式）^{对于传播来说}可简化为代数方程 $[(4.15)]$ 或 (4.16) 式。但是当入射波、介质的不均匀性决定了波动的性质，就不再可能将传播看作是均匀的。介质的不均匀性决定了波动的性质，就不再可能将传播看作是均匀的。例如，介质粒子方向有振动，波动方程简化为自变量 x 的常微分方程。这时也考虑伴下的群速度 v_g ） x 方向传播变化的色散关系 $\omega = \omega(k_x k_y)$ ，也确定了扰动粒子方向的振动。进而有更为复杂的情况出现，即除了分立谱外，还出现连续谱的模式。当微分方程在所考察的空间出现奇异时，就会在理论上更加复杂。不均匀的太阳不带电中的长波运动的研究，刚刚起步，但十分重要，将来很可能受到重视。

在不均匀引起不均匀性的主要因素是重力和磁场，重力仅指向太阳中心的压力增加，磁场及相关的Lorentz力使等离子体垂直于磁场的方向上受到附加力，指向磁通量变化的方向。分立引入几个新的效应：

- i. 放大—传播过程中波幅可能增大（或减小）
 - ii. 脉冲—时间振荡型的运动，在一个区域内可能会有类似脉冲特性。有空间振荡，而在一个区域可以无脉冲性，振幅衰减。
 - iii. 表面波模式—基带的不连续性可以引起附加的表面波，该波以介电系数 ϵ' 高而衰减，而均匀介质中传播¹⁸²，则将介电系数 ϵ' 降低。
- 书中列出许多详细供读者品味，“不均匀”一节将向读者介绍不均匀。
3. 均匀磁场中的平面平行波。
- 我们已对磁场作了一些讨论

4.10.1 不稳定性的表面波

1. 我们的兴趣在于磁场如何对理想气体中传播的波动的影响。忽略重力，考虑完全气体的基恩有磁场 $B_0(x)$ ，取直角坐标系，磁场依赖于 x , $P(x)$, $\rho(x)$ 和基恩的压强、密度均与 x 有关（参见 P_0 和 ρ_0 ）

下面公式和推导引自 Roberts (1981a) 的文

压力平衡： $\frac{d}{dx}(P_0 + \frac{1}{\mu} B_0^2) = 0$

$P_0 = P_0(x)$, $\vec{B}_0 = B_0(x) \hat{z}$

当磁场是均匀的、垂直于运动速度时，运动速度和无磁场情况一样。

1.9.1(4.59) 式。

基恩的 B_0 , P_0 , ρ_0 均为 x 的函数。运动量是坐标 (x, y, z) 和时间 t 的函数。

由基恩方程组可推得小扰动的线性化方程 (4.59) 式 (Priest)

$$\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{P}_0 \vec{V}_1) = 0 \quad (6a)$$

$$\vec{P}_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial x} = -\nabla(P_1 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \vec{b}_1) + \frac{1}{\mu} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{b}_1 + \frac{1}{\mu} (\vec{b}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \quad (6b)$$

$$\frac{\partial \vec{b}_1}{\partial x} = \nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0), \quad \frac{\partial \vec{P}_1}{\partial x} + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 = C_0^2 \left(\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial x} + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 \right) \quad (7a, b)$$

(7b) 式从质量方程 (2.28f - Priest)

$$\frac{DP}{DX} - \frac{\gamma P}{\rho} \frac{DP}{DX} = 0 \quad (2.28f) \quad 得到, 已利用了等熵条件, 即分子数$$

不变数 $\delta = 0$. 对质量方程利用小扰动线性化的方法：

$$\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial x} + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 - \frac{\gamma \vec{P}_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{\vec{P}_1}{\vec{P}_0} \right) \left(1 - \frac{\vec{P}_1}{\vec{P}_0} \right) \left(\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial x} + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 \right) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial x} + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 = C_0^2 \left(\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial x} + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 \right)$$

$$C_0(x)^2 = \frac{\gamma P_0^2}{\rho_0} \quad \text{声速}$$

$$\text{引入变量 } \Delta = \nabla \cdot \vec{V}_1, \quad \vec{l} = \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial x}, \quad \vec{P}_T = \vec{P}_1 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \vec{b}_1 \quad (8)$$

$$\text{这里 } \vec{V}_1 = (V_x, V_y, V_z), \quad \vec{b}_1 = (b_x, b_y, b_z)$$

$$(6a) \Rightarrow \frac{\partial \vec{P}_1}{\partial x} + \vec{P}_0 \cdot \vec{V}_1 + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 = \frac{\partial \vec{P}_1}{\partial x} + \vec{P}_0 \Delta + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 = 0$$

$$\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial x} + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{P}_0 = -\vec{P}_0 \Delta \quad \text{代入 (7b) 的左边}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -C_0^2 \rho_0 \Delta - V_x \frac{dP_0 w}{dx} \quad (9-1)$$

$$\begin{aligned} (9-1) \Rightarrow \frac{\partial b_1}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) = \vec{V}_1 \cdot \nabla \cdot \vec{B}_0 - \vec{B}_0 \cdot \nabla \cdot \vec{V}_1 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \\ &= -\vec{B}_0 \cdot \nabla \cdot \vec{V}_1 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \\ &= -\vec{B}_0 \Delta + B_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial x} - V_x \frac{d \vec{B}_0}{dx} \end{aligned}$$

写成分量式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_x}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial V_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial b_y}{\partial t} = B_0 \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial b_z}{\partial t} = -B_0 \Delta + B_0 \frac{\partial V_x}{\partial x} - V_x \frac{d B_0}{dx} \\ &= B_0 (\Gamma - \Delta) - \frac{d B_0}{dx} V_x \quad (10) \end{aligned}$$

δ 式：边界对大流偏导数

$$\frac{\partial P_T}{\partial x} = \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial b_z}{\partial x}$$

(9-1), (10) 式代入上式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_T}{\partial x} &= -C_0^2 \rho_0 \Delta - V_x \frac{d P_0 w}{dx} + \frac{1}{\mu} B_0 \left[B_0 (\Gamma - \Delta) - \frac{d B_0}{dx} V_x \right] \\ &= -\rho_0 C_0^2 \Delta + \frac{1}{\mu} B_0 [B_0 (\Gamma - \Delta)] - V_x \left[\frac{d P_0 w}{dx} + \frac{1}{\mu} \frac{d B_0^2}{dx} \right] \\ &= \rho_0 [V_A^2 \Gamma - (C_0^2 + V_A^2) \Delta] \quad (\text{利用了 } 5 \text{ 式}) \end{aligned}$$

$$V_A \hat{x} = \frac{B_0}{\mu \rho_0}$$

(6-6) 式与 \times 分量：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(P_1 + \frac{1}{\mu} B_0 b_z \right) + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial}{\partial x} b_z \quad (\vec{B}_0 = B_0 \hat{x} \times \hat{z})$$

对大流 \hat{x}

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P_T}{\partial x} + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial b_z}{\partial x} \quad (\text{利用了 } 8 \text{ 式}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_0 V_A^2 \Gamma - \rho_0 (C_0^2 + V_A^2) \Delta \right] + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(B_0 \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) \quad (\text{利用了 } 10 \text{ 式}) \end{aligned}$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_A^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) V_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_0 (C_0^2 + V_A^2) \Delta - \rho_0 V_A^2 \Gamma \right] \quad (11a)$$

注意： ρ_0, C_0, V_A 与 x 的函数， Δ, Γ 是 (x, t) 的函数

同理有 y 分量式

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) V_y = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_0 (C_0^2 + V_A^2) \Delta - \rho_0 V_A^2 \Gamma \right] \quad (11b)$$

y 分量：

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial P_I}{\partial x} + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial b_x}{\partial x} \frac{\partial B_0}{\partial x} \\ &= -\rho_0 \left[V_A^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial y} - V_A^2 \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right] + \rho_0 C_0^2 \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \rho_0 \left(V_A^2 \frac{\partial \Delta}{\partial y} - V_A^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right) \\ &= \rho_0 C_0^2 \frac{\partial \Delta}{\partial y} \end{aligned} \quad (11c)$$

扰动量 $\vec{V}_1 = (V_x, V_y, V_z)$, $\vec{b}_1 = (b_x, b_y, b_z)$, P_I 及 Δ, Γ 为下述 = 循环周期的
振幅为 x 的函数。

$$V_x = \hat{V}_x(x) e^{i(wt + ly + kz)}, \quad P_I = \hat{P}_I(x) e^{i(wt + ly + kz)}$$

$\hat{V}_x(x)$, $\hat{P}_I(x)$ 为扰动振幅。振幅是 x 的函数。

$$\begin{aligned} \Delta &= \vec{V} \cdot \vec{V}_1 = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \left[\frac{d \hat{V}_x(x)}{dx} + i l \hat{V}_y(x) + i k \hat{V}_z(x) \right] e^{i(wt + ly + kz)} \\ \Gamma &= \frac{\partial V_z}{\partial y} = i k \hat{V}_z(x) e^{i(wt + ly + kz)} \end{aligned}$$

代入 $(11a)$,

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + k^2 V_A^2) \rho_0 \hat{V}_x(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_0 (C_0^2 + V_A^2) \left(\frac{d \hat{V}_x(x)}{dx} + i l \hat{V}_y(x) + i k \hat{V}_z(x) \right) - \rho_0 V_A^2 i k \hat{V}_z(x) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_0 (C_0^2 + V_A^2) \left(\frac{d \hat{V}_x(x)}{dx} + i l \hat{V}_y(x) \right) + i k \rho_0 C_0^2 \hat{V}_z(x) \right] \quad (11a') \end{aligned}$$

扰动量代入 $(11b)$

$$(k^2 V_A^2 - \omega^2) \hat{V}_y(x) = (C_0^2 + V_A^2) \left(i l \frac{d \hat{V}_x(x)}{dx} - l^2 \hat{V}_y(x) \right) - C_0^2 k l \hat{V}_z(x) \quad (11b')$$

扰动量代入 $(11c)$

$$-\omega^2 \hat{V}_z(x) = C_0^2 \left[i k \frac{d \hat{V}_x(x)}{dx} - l k \hat{V}_y(x) - k^2 \hat{V}_z(x) \right] \quad (11c')$$

$$\text{从 } (11c') \text{ 得 } \hat{V}_z(x) = \frac{C_0^2 \left[i R \frac{d \hat{V}_x(x)}{dx} - l k \hat{V}_y(x) \right]}{C_0^2 k^2 - \omega^2} \quad (11c'')$$

将 $(11c'')$ 代入 $(11b')$

$$\left[R^2 V_A^2 - \omega^2 + \lambda^2 (C_0^2 + V_A^2) - \frac{C_0^4 \lambda^2 R^2}{C_0^2 R^2 - \omega^2} \right] \hat{V}_y(x) = \left[i\lambda (C_0^2 + V_A^2) - \frac{i\lambda R^2 C_0^4}{C_0^2 R^2 - \omega^2} \right] \frac{d\hat{V}_x(x)}{dx}$$

$$\text{设 } \hat{V}_y(x) = \frac{i\lambda [V_A^2 C_0^2 R^2 - (C_0^2 + V_A^2) \omega^2]}{(R^2 V_A^2 \omega^2)(R^2 C_0^2 \omega^2) + \lambda^2 [V_A^2 C_0^2 R^2 - (C_0^2 + V_A^2) \omega^2]} \frac{d\hat{V}_x(x)}{dx}$$

$$\therefore C_T(x) = \frac{C_0^2(x) V_A^2(x)}{C_0^2(x) + V_A^2(x)}$$

$$\therefore \ddot{\lambda} = \frac{i\lambda (C_0^2 + V_A^2) (R^2 C_T^2 - \omega^2)}{(R^2 V_A^2 \omega^2)(R^2 C_0^2 \omega^2) + \lambda^2 (C_0^2 + V_A^2) (R^2 C_T^2 - \omega^2)} \frac{d\hat{V}_x(x)}{dx}$$

$$\therefore m_0^2 = \frac{(R^2 C_0^2 \omega^2 - \omega^2)(R^2 V_A^2 \omega^2 - \omega^2)}{(C_0^2 + V_A^2)(R^2 C_T^2 \omega^2 - \omega^2)}$$

$$\therefore \hat{V}_y(x) = \frac{i\lambda}{m_0^2 + \lambda^2} \frac{d\hat{V}_x(x)}{dx}$$

代入 $\lambda(IIc'')$:

$$\hat{V}_y(x) = \frac{i\lambda C_0^2}{R^2 C_0^2 - \omega^2} \frac{m_0^2}{m_0^2 + \lambda^2} \frac{d\hat{V}_x(x)}{dx}$$

将 $\hat{V}_y(x)$, $\hat{V}_x(x)$ 代入 $\lambda(IIa')$:

$$(R^2 V_A^2 - \omega^2) \rho_0 \hat{V}_x(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_0 (C_0^2 + V_A^2) \left(\frac{d\hat{V}_x(x)}{dx} + i\lambda \frac{i\lambda}{m_0^2 + \lambda^2} \frac{d\hat{V}_y(x)}{dx} \right) + i\lambda \rho_0 C_0^2 \frac{i\lambda C_0^2}{R^2 C_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0^2}{m_0^2 + \lambda^2} \frac{d\hat{V}_x(x)}{dx} \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\rho_0 \frac{R^2 V_A^2 - \omega^2}{m_0^2 + \lambda^2} \frac{d\hat{V}_x(x)}{dx} \right]$$

$$\text{其利得 } m_0^2 (C_0^2 + V_A^2) (R^2 C_T^2 - \omega^2) = (R^2 C_0^2 - \omega^2) (R^2 V_A^2 - \omega^2)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\rho_0(x) (R^2 V_A^2 \omega^2 - \omega^2)}{m_0^2 + \lambda^2} \cdot \frac{d\hat{V}_x(x)}{dx} \right] - \rho_0(x) (R^2 V_A^2 \omega^2 - \omega^2) \hat{V}_x(x) = 0 \quad (12)$$

(此式为 Priest 的方程)

由 Priest (P.P. 183-184) 及 $m_0^2 = 1$: $\lambda = R_y$, $R = R_y$. 且 $\rho_0(x) (\omega^2 - R^2 V_A^2 \omega^2) = \varepsilon(x)$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\varepsilon(x)}{R_y^2 + m_0^2(x)} \frac{d\hat{V}_x(x)}{dx} \right] = \varepsilon(x) V_{1x}(x) \quad (4.59)$$

$\hat{V}_x(x) = V_{1x}$

Priest (4.59') 为 (4.59) 的一种表示法。

磁流体动力学，即磁流体力学，这门学科研究运动速度 V 不再是 x 的函数类函数，运动规律满足 (4.59) 式。函数 $m_0^2(x)$ 可正可负，同

Priest is (4.59) 式の 1 番最初の式 (4.59'):

そこで計算を進める。

$$\frac{\dot{E}(x)}{k_g + m_0(x)} = \frac{P_0(\omega^2 - k_g^2 V_A^2)}{(k_g^2 C_{S0}^2 - \omega^2)(k_g^2 V_A^2 - \omega^2)} + k_g^2 \left[\frac{(k_g^2 C_{S0}^2 - \omega^2)(k_g^2 V_A^2 - \omega^2)}{(C_{S0}^2 + V_A^2)(k_g^2 C_T^2 - \omega^2)} + k_g^2 \right]$$

$$= \frac{P_0(k_g^2 V_A^2 - \omega^2)(k_g^2 C_T^2 - \omega^2)(C_{S0}^2 + V_A^2)}{(k_g^2 C_{S0}^2 - \omega^2)(k_g^2 V_A^2 - \omega^2) + k_g^2(C_{S0}^2 + V_A^2)(k_g^2 C_T^2 - \omega^2)}$$

$$\text{左辺: } k_g^4 C_{S0}^2 V_A^2 - k_g^2(V_A^2 + C_{S0}^2)\omega^2 + \omega^4 + k_g^2 k_g^2 C_{S0}^2 V_A^2 - k_g^2 \omega^2(C_{S0}^2 + V_A^2)$$

$$= \omega^4 - (k_g^2 + k_B^2)(V_A^2 + C_{S0}^2)\omega^2 + k_g^2(k_g^2 + k_B^2)C_{S0}^2 V_A^2$$

$$\therefore k_B = 0, \quad k^2 = k_g^2 + k_B^2, \quad \cos \Theta_B = \frac{k_B}{k} \quad k_B = k \cos \Theta_B$$

$$\text{左辺} = \omega^4 - k^2(V_A^2 + C_{S0}^2)\omega^2 + k^4 C_{S0}^2 V_A^2 \cos^2 \Theta_B \quad \text{より (4.51) 式}$$

今 $\omega_A = k_g V_A$, $\omega_T = k_g C_T$, ω_+, ω_- は (4.51) 式の右辺の項である。

$$\therefore T_A = \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_T^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} (C_{S0}^2 + V_A^2) \cdot P_0$$

$$\therefore T_A \frac{d}{dx} \left[\frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_T^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} (C_{S0}^2 + V_A^2) P_0 \frac{dV_A}{dx} \right] = - (\omega^2 - \omega_A^2) P_0 V_A \quad (4.59')$$

$\frac{\omega}{k}$ ($= \frac{\omega}{k_y} - \text{Priest}$) 在 C_0 , V_A 或 C_T 附近, 可以使 m_o^2 趋近, C_T 代表沿磁
场方向的垂直速度的相速 ($\Omega_B = 0$)

2. 向心方程 $\omega = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$

i) 均匀场均匀, E 和 m_o 为常数, 可重写为常数 (§4.3.1, §4.6)

$$i: E=0, \text{ 且 } P_0(x)(\omega^2 - k_y^2 V_A^2) = 0 \quad \text{由 (4.17) Priest 行程}$$

$$P_0(x)(\omega^2 - k_y^2 V_A^2) = 0,$$

$$\omega^2 = k_y^2 V_A^2 = k^2 V_A^2 \cos^2 \Omega_B \quad (\text{由 4.3.1 节中 (4.45) 式})$$

ii, 振动量 V_{ix} (Roberts 行程 $\propto V_x$) 之振幅部分 $V_{ix(x)} \sim e^{ik_x x}$ (由 $k^2 - V_{ix(x)}$)

$$\text{代入 (4.59): } \frac{d^2 V_{ix(x)}}{dx^2} = (k_y^2 + m_o^2) V_{ix(x)} \quad (\text{由 } E, m_o \text{ 为常数})$$

$$-k_x^2 = k_y^2 + m_o^2$$

$$k_x^2 + k_y^2 + m_o^2 = 0$$

这正好是石墨波的色散关系 (4.51) 式, 由 (4.19) 得下:

$$(4.51) \text{ 式为 } \omega^4 - \omega^2 k^2 (C_s^2 + V_A^2) + C_s^2 V_A^2 k^4 \cos^2 \Omega_B = 0 \\ (C_s \text{ 由 } k \rightarrow C_s)$$

Ω_B : B_0 方向与传播方向 k 之间夹角, $k \cos \Omega_B = k_y$ (Roberts 行程 $k = k_y$ (Priest))

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (C_s^2 + V_A^2) + C_s^2 V_A^2 k^2 k_y^2 = 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 - k_y^2 = -m_o^2$$

$$m_o^2 = \frac{(k_y^2 C_s^2 - \omega^2)(k_y^2 V_A^2 - \omega^2)}{(C_s^2 + V_A^2)(k_y^2 C_T^2 - \omega^2)} \quad (= \text{常数})$$

$$(k^2 - k_y^2)(C_s^2 + V_A^2)(k_y^2 \frac{C_s^2 V_A^2}{C_s^2 + V_A^2} - \omega^2) + (k_y^2 C_s^2 - \omega^2)(k_y^2 V_A^2 - \omega^2) = 0$$

$$k^2 k_y^2 C_s^2 V_A^2 - k^2 (C_s^2 + V_A^2) \omega^2 + \omega^4 = 0$$

$$\omega^4 - k^2 (C_s^2 + V_A^2) \omega^2 + C_s^2 V_A^2 k^4 \cos^2 \Omega_B = 0 \quad (= (4.51) \text{ 式})$$

2) 横波, ω^2 不是无限大 $k_y^2 C_T^2$ ($\approx 1/m_o^2 \rightarrow \infty$), 由 (4.59) 式左边 ω ,

接近零. 且 Alfvén 波速 $V_A \gg C_s$, $T_H C_T \sim C_s$, $m_o^2 \approx k_y^2 - \frac{\omega^2}{V_A^2} \ll k_y^2$

\therefore 横波 $k_y \gg k_y$, $\therefore k_y \gg m_o$

方程(4.59)简化为

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\epsilon(x)}{k_f^2} \frac{dV_{ix}(x)}{dx} \right] = \epsilon(x) V_{ix}(x)$$

若 $C_s \gg V_A^2$ (忽略电场的贡献), $k_f^2 + k_g^2 - \frac{k_s^2}{C_s^2} \approx k_g^2$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\epsilon(x)}{k_g^2} \frac{dV_{ix}(x)}{dx} \right] = \epsilon(x) V_{ix}(x)$$

简化为

3. 考虑一个简单的模型, 假设 $x=0$ 处分隔两个介质。

$$B_0(x) = \begin{cases} B_0, & x < 0 \\ B_\infty, & x > 0 \end{cases}$$

B_0, B_∞ 为常数, 假设 $k_f^2 = 0$. 则方程(4.59)简化为

① $\epsilon(x) = 0$ (忽略高阶(4.59)式)

或者 (忽略高阶项) C_0, V_A 在 $x < 0$, 和 $x > 0$ 区域内分别为常数, ϵ, m_e^2 为 x 的函数

$$\text{在 } \frac{\epsilon}{m_0^2} \frac{d^2 V_{ix}(x)}{dx^2} = \epsilon V_{ix}(x)$$

$$\frac{d^2 V_{ix}(x)}{dx^2} = m_0^2 V_{ix}(x) \quad (x < 0) \quad (4.61)$$

$$\frac{d^2 V_{ix}(x)}{dx^2} = m_\infty^2 V_{ix}(x) \quad (x > 0)$$

m_0^2 与 m_∞^2 相同且 $m_0^2 > 0$. (假设 $C_0 \rightarrow \delta_{se}, V_A \rightarrow V_{he}, C_\infty \rightarrow C_{re}$)

在 $x < 0$ 区域, 方程(4.61)有三类基本解

(i) 空载状态

波从负无穷速射过来, (传播方向被反射和吸收) 当 $m_0^2 < 0$ 时,

$$\text{有波 } V_{ix} \sim \exp i(-m_0^2)^{1/2} x \quad (x < 0)$$

没有反射, 就是均匀介质中的传播(通常叫皮)

(ii) 负载状态

在 $-\infty$ 处衰减为零, 假设 $m_0^2 > 0$, 有 $V_{ix} \sim e^{m_0^2 x}$, 这是衰减波, 没有界而就没有表面波.

当 $m_0^2 > 0, m_\infty^2 > 0$, 有此分高能存储, 并且以模态. 二个

$$V_{ix} \sim \begin{cases} e^{m_0 x} & x < 0 \\ e^{-m_0 x} & x > 0 \end{cases}$$

边界条件： V_{ix} 在 $x=0$ 处连续，由此可得 $m_0 = k_y$ 。
4. $\because x < 0$ 区域为均匀介质， $\therefore P_0, C_0, V_{ix}, C_T$ 均为常数， $(k_y^2 V_A^2 - \omega^2)$ 成为

$$(k_y^2 V_A^2 - \omega^2) \left[\frac{d^2 V_{ix}}{dx^2} - (m_0^2 + k_y^2) V_{ix} \right] = 0 \quad (14)$$

由此得 $\omega^2 = k_y^2 V_A^2$ ， V_{ix} 可取任意值。

Alfvén 波可在 $x < 0$ 区域中传播，除 Alfvén 波外，还有磁声波，由下式描述

$$\frac{d^2 V_{ix}(x)}{dx^2} - (m_0^2 + k_y^2) V_{ix}(x) = 0 \quad (22)$$

式中 m_0^2 可正亦可负。对于 $x > 0$ ，可设 m_0^2 ，由下解此式得：

表因数的绝对值由 $B_0(x)$ 的 z 速度决定， \therefore $(k_y^2 + m_0^2)$ 和 $(k_y^2 + m_0^2)$ 均为正。由 (22) 式 ($x < 0$) 与 $x > 0$ 的相应方程：

$$V_{ix}(x) = \begin{cases} \alpha_0 e^{-(m_0^2 + k_y^2)^{1/2} x} & x > 0 \\ \alpha_0 e^{+(m_0^2 + k_y^2)^{1/2} x} & x < 0 \end{cases} \quad (23)$$

$(m_0^2 + k_y^2)^{1/2} > 0$ ， $(m_0^2 + k_y^2)^{1/2} > 0$ ，(23) 式中已利用了 $x \rightarrow -\infty \quad V_{ix}(x) \rightarrow 0$ 。

④ 先解 $x \rightarrow -\infty$ 时 V_{ix} 的表达式。在 $x \rightarrow -\infty$ 时有 $V_{ix} \rightarrow 0$ ， $P_T \rightarrow 0$ 。
跨过 $x=0$ 时 V_{ix} 和 $\hat{P}_T(x)$ 必须连续。 $(P_T(x) = \hat{P}_T(x) e^{i(\omega x + k_y \hat{x} + k_z \hat{z})})$

从而有 $\alpha_0 = \alpha_c$

$$\text{而已求得 } P_T = P_1 + \frac{\beta_0}{\mu} b_3 \quad (\text{P.154 与 S.(8) 式})$$

$$\frac{\partial \hat{P}_T}{\partial x} = \rho_0 [V_A^2 \hat{T} - (C_0^2 + V_A^2) \Delta] \quad (\text{本讲稿 P.155})$$

$$\frac{\partial \hat{P}_T}{\partial x} = i\omega \hat{P}_T(x), \hat{T} = \frac{\partial \hat{V}_x}{\partial \hat{x}} = i k_y \hat{V}_y(x), \Delta = \left(\frac{d \hat{V}_x}{dx} + i k_y \hat{V}_y + i k_z \hat{V}_z \right)$$

$$\begin{aligned} i\omega \hat{P}_T &= \rho_0 [i k_y \hat{V}_y \hat{V}_z(x) - (C_0^2 + V_A^2) \left(\frac{d \hat{V}_x}{dx} + i k_y \hat{V}_y + i k_z \hat{V}_z \right)] \\ &= \rho_0 [- (C_0^2 + V_A^2) \left(\frac{d \hat{V}_x}{dx} + i k_y \hat{V}_y \right) - i k_y C_0^2 \hat{V}_z] \end{aligned}$$

$$\text{将 } \hat{V}_y = \frac{i k_y}{m_0^2 + k_y^2} \frac{d \hat{V}_{xu}}{dx} \quad , \quad \hat{V}_\delta = \frac{i k_y C_0^2}{k_y^2 C_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0^2}{m_0^2 + k_y^2} \frac{d \hat{V}_{xu}}{dx} \quad (\text{参见第} 157 \text{页})$$

代入上式：

$$i\omega \hat{P}_T = P_0 \left[-(C_0^2 + V_A^2) \left(\frac{d \hat{V}_x}{dx} + i k_y \frac{i k_y}{m_0^2 + k_y^2} \frac{d \hat{V}_x}{dx} \right) - i k_y C_0^2 \frac{i k_y C_0^2}{k_y^2 C_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0^2}{m_0^2 + k_y^2} \frac{d \hat{V}_x}{dx} \right]$$

$$= P_0 \frac{m_0^2}{m_0^2 + k_y^2} \cdot \frac{(C_0^2 + V_A^2)(\omega^2 - k_y^2 C_0^2)}{k_y^2 C_0^2 - \omega^2} \frac{d \hat{V}_x}{dx}$$

$$\hat{P}_T(x) = \frac{i P_0}{\omega} \frac{m_0^2}{m_0^2 + k_y^2} (C_0^2 + V_A^2) \frac{k_y^2 C_0^2 - \omega^2}{k_y^2 C_0^2 - \omega^2} \frac{d \hat{V}_x}{dx}$$

当 $x=0$ 时， $\hat{P}_T(x)$ 不等于零 (k_y 为常数， $V_{ixu} = \hat{V}_x$)。 (23) 式对 x 和 y 成立

讨论 P_0 ：

$$\frac{i P_0}{\omega} \cdot \frac{m_0^2}{m_0^2 + k_y^2} (C_0^2 + V_A^2) \frac{k_y^2 C_0^2 - \omega^2}{k_y^2 C_0^2 - \omega^2} (m_0^2 + k_y^2)^{1/2} = - \frac{i P_0}{\omega} \frac{m_0^2}{m_0^2 + k_y^2} (C_0^2 + V_A^2) \frac{k_y^2 C_0^2 - \omega^2}{k_y^2 C_0^2 - \omega^2} (m_0^2 + k_y^2)^{1/2}$$

即 $i k_y m_0^2 \omega$ 项正比于 $\sqrt{\omega}$ ： $m_0^2 (C_0^2 + V_A^2) (k_y^2 C_0^2 - \omega^2) = (k_y^2 C_0^2 - \omega^2) (k_y^2 V_A^2 - \omega^2)$
 m_0^2 也有类似表达式。于是代入上式得

$$P_0 \frac{k_y^2 V_A^2 - \omega^2}{(m_0^2 + k_y^2)^{1/2}} = - P_0 \frac{k_y^2 V_{Ae}^2 - \omega^2}{(m_0^2 + k_y^2)^{1/2}}$$

$$P_0 (k_y^2 V_A^2 - \omega^2) (m_0^2 + k_y^2)^{1/2} = - P_0 (k_y^2 V_{Ae}^2 - \omega^2) (m_0^2 + k_y^2)^{1/2} \quad (24)$$

$$C_e = \left(\frac{\delta P_0}{P_0} \right)^{1/2}, \quad V_{Ae} = \left(\frac{B_e}{\mu P_0} \right)^{1/2}$$

(24) 式与 \bar{V}_x 的关系：

$$\frac{\omega^2}{k_y^2} = V_A^2 - \frac{R}{R+1} (V_A^2 - V_{Ae}^2) = V_{Ae}^2 + \frac{1}{R+1} (V_A^2 - V_{Ae}^2) \quad (24')$$

$$\text{其中 } R = \frac{P_0}{P_0} \left(\frac{m_0^2 + k_y^2}{m_0^2 + k_y^2} \right)^{1/2}$$

当 $k_y = 0$ 时，(23) 式 \bar{V}_x 为

(y 方向速度为零，故 \bar{V}_x 为零)

$$V_{ixu} = \begin{cases} \alpha e^{-m_0 x} & x > 0 \\ \alpha e^{m_0 x} & x < 0 \end{cases}$$

(24') 式成为

$$R = \frac{\rho_e}{\rho_0} \frac{m_e}{m_i}$$

$$\frac{\omega^2}{k_y^2} = V_A^2 - \frac{\frac{\rho_e m_i}{\rho_0 m_e}}{\frac{\rho_e m_i}{\rho_0 m_e} + 1} (V_A^2 - V_{Ae}^2) = V_A^2 - \frac{\rho_e m_i}{\rho_e m_i + \rho_0 m_e} (V_A^2 - V_{Ae}^2) \quad (4.62)$$

这时的垂直速度在 $x-y$ 平面上， x 方向的特征值为 $\frac{1}{m_i}$ 和 $\frac{1}{m_e}$ 。

讨论：a) 由(24')式，可求得相速度 表列成

$$V_p^2 = \frac{\omega^2}{k_y^2} = V_A^2 - \frac{R}{R+1} (V_A^2 - V_{Ae}^2) = V_{Ae}^2 + \frac{1}{R+1} (V_A^2 - V_{Ae}^2)$$

当 $V_A > V_{Ae}$ 时，有 $V_p < V_A$ 及 $V_p > V_{Ae}$ 。∴ $V_{Ae} < V_p < V_A$ 。

当 $V_A < V_{Ae}$ 时，有 $V_p > V_A$ ，及 $V_p < V_{Ae}$ 。∴ $V_A < V_p < V_{Ae}$

相速度表达 Alfvén 速度 V_A , V_{Ae} 之间

b, 当 $x > x_{in}$ 且 $B_0 = 0$ 时，(4.62) 式简化为

$$\frac{\omega^2}{k_y^2} = \frac{\rho_0 m_e}{\rho_0 m_e + \rho_e m_i} V_A \quad (4.63)$$

$$\text{这时, } V_{Ae} = 0, \quad n_{i0}^2 = \frac{(k_y^2 C_e^2 - \omega^2)(k_y^2 V_{Ae}^2 - \omega^2)}{(C_e^2 + V_{Ae}^2)(k_y^2 C_e^2 - \omega^2)} = k_y^2 - \frac{\omega^2}{C_e^2}$$

$$C_{Te}^2 = \frac{C_e^2 V_{Ae}^2}{C_e^2 + V_{Ae}^2} = 0$$

c, 相速度 V_A 和 V_{Ae} 之间光速平方(24')式得出，产生量为 $\pm c$ ，此一种模式，在特定条件下，传播方向会变快，慢两种模式的传播速 (和前面的讨论中会相似)

5. 色散關係(ω). (ω') 的特例

① 从(ω') 式出发, 考慮剪切波, 主要沿 x 軸上 y 軸佈播, 因此 $k_y^2 \gg k_x^2$ (Roberts 所得為 $k^2 \gg k_x^2$). 假設 $k_y^2 \gg m_0^2, m_e^2$. 設 $\omega^2 \neq k_y^2 C_T^2$ (如果 $\omega^2 \approx k_y^2 C_T^2$, 則 m_0^2 分母趨於零, $m_0^2 \rightarrow \infty$), $R \approx \frac{\rho_e}{\rho_0}$, 色散關係简化為

$$\frac{\omega^2}{k_y^2} \approx \frac{\rho_0 V_T^2 + \rho_e V_{Ae}^2}{\rho_0 + \rho_e} \quad (25)$$

以上推导中，若无用到不可压缩条件 ($\Delta = D \cdot V^2 \neq 0$)，(25) 式可简述为
可压缩不可膨胀液体。

(25) 式也是不可压缩流体 ($\gamma \rightarrow \infty$) 极限下，(24) 式简化。这可以下面的推导看出。 $\because \gamma \rightarrow \infty, C_0 = C_\infty \rightarrow \infty$

$$m_0^2 = \frac{(k_j^2 C_0^2 - \omega^2)(k_j^2 V_A^2 - \omega^2)}{(C_0^2 + V_A^2)(k_j^2 C_T^2 - \omega^2)}, \text{ 式中 } C_T^2 = \frac{C_0^2 V_A^2}{C_0^2 + V_A^2} \rightarrow V_A^2 (\text{且 } C_0 \rightarrow \infty)$$

$$= \frac{k_j^2 C_0^2 - \omega^2}{C_0^2} \approx k_j^2$$

由 $m_0^2 \approx k_j^2$, 将 m_0^2, m_e^2 代入 (24) 式

$$\rho_0 (k_j^2 V_A^2 - \omega^2) (k_j^2 + k_g^2)^2 = -\rho_e (k_j^2 V_{Ae}^2 - \omega^2) (k_g^2 + k_j^2)^2$$

$$\frac{\omega^2}{k_j^2} = \frac{\rho_0 V_A^2 + \rho_e V_{Ae}^2}{\rho_0 + \rho_e}$$

因此在运动学上满足不可压缩 Alfvén 波的条件

- i, 若 $k_g \gg k_j$ 时， $k_g \gg m_0, m_e$ 得到可压缩不可膨胀液体
ii, 不可压缩流体 ($\gamma \rightarrow \infty$)，得到不可压缩 Alfvén 波的条件

两者类似，有 $k_g \gg k_j$ ，从而有

② 当 $\beta_0 = 1$ 时， $\beta_0 \rightarrow 0$ 时， $k_j^2 > m_0^2, m_e^2$ ，由 (24) 式 得到

$$\frac{\omega^2}{k_j^2} = \frac{\rho_0 V_A^2 + \rho_e V_{Ae}^2}{\rho_0 + \rho_e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{条件是: } k_j^2 > m_0^2, m_e^2, \text{ 高于利特罗波速} \\ \text{即 } k_j^2 \gg m_0^2, m_e^2 \end{array} \right.$$

又加上庄强平衡： $\rho_0 + \frac{1}{2\mu} \beta_0 = \rho_e + \frac{1}{2\mu} \beta_e$ $\therefore \beta_0 = \beta_e \therefore \rho_0 V_A^2 = \rho_e V_{Ae}^2$

$$\frac{\omega^2}{k_j^2} = \frac{2\rho_0 V_A^2}{\rho_0 + \rho_e}$$

当 $\beta_0 = 0$ 时， $V_A \gg C_0, V_{Ae} \gg C_0$

$$m_0^2 = \frac{(k_j^2 C_0^2 - \omega^2)(k_j^2 V_A^2 - \omega^2)}{(C_0^2 + V_A^2)(k_j^2 C_T^2 - \omega^2)} \approx k_j^2 - \frac{\omega^2}{V_A^2}$$

$$m_e^2 \approx k_j^2 - \frac{\omega^2}{V_{Ae}^2}$$

从 P.162 可知 C_0 中已表示出波的相速度 V_A 和 V_{Ae} 之间，可以推得
 ω^2 位于 $k_j^2 V_{Ae}^2$ 及 $k_j^2 V_A^2$ 之间时， m_0^2, m_e^2 不同时为零，因此不会二项
都有表面波 (参考 E3) 式， $k_g = 0$ 时)

i.e. 令 $k_y^2 V_A^2 < \omega^2 < k_y^2 V_{Ae}^2$

$$\text{由 } m_0^2 = k_y^2 - \frac{\omega^2}{V_A^2} \quad \text{得} \quad m_0^2 V_A^2 = k_y^2 V_A^2 - \omega^2 < 0$$

$$m_0^2 = k_y^2 - \frac{\omega^2}{V_A^2} \quad m_0^2 V_{Ae}^2 = k_y^2 V_{Ae}^2 - \omega^2 > 0$$

V_A^2, V_{Ae}^2 均大于零. 可见 $m_0^2 < 0, m_e^2 > 0$. 故此为向右的波.

(4) 由 (24) 式, 当 $k_y=0$ 时, 有

$$P_0(k_y^2 V_A^2 - \omega^2)(m_e^2)^{\frac{1}{2}} = -P_0(k_y^2 V_{Ae}^2 - \omega^2), m_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

假定 $m_0^2 < 0, m_e^2 > 0$. 则上式左边为虚数, 右边为实数. 上式也均为零.

因当 $x > 0$ 时, 有 Alfvén 波 $\omega = k_y V_{Ae}$, 向右有表面波, 因为 k_y 有衰减形式 $\sim e^{-m_e x}$.

对于 $x < 0$ 时, 因而 m_0 为虚数, $e^{m_0 x}$ 成为波的空间周期部分, 也即 x 方向有波传播, 不仅在 $x=0$ 附近内传播, 而且表及波.

结论: i. 两侧均为低 β 导高时, 当 ω 位于 V_{Ae}, V_A 之间时, $m_0^2, m_e^2 > 0$.
故此为向右的波. ω 由 $= 12.1 \text{ rad/s}$ 时有表面波.

ii. 仅当 $x=0$ 为低 β 时. 无论 i. ii 均成立

i.e. 令 $x < 0$ 为低 β , 则有 $m_0^2 = k_y^2 - \frac{\omega^2}{V_A^2}, m_0^2 V_A^2 = k_y^2 V_A^2 - \omega^2$

$$m_e^2 = \frac{(k_y^2 C_e^2 - \omega^2)(k_y^2 V_{Ae}^2 - \omega^2)}{(C_e^2 + V_{Ae}^2)(k_y^2 C_{Te}^2 - \omega^2)}, \quad C_{Te}^2 = \frac{C_e^2 V_{Ae}^2}{C_e^2 + V_{Ae}^2}$$

现取 $C_e > V_{Ae}$ (此条件当 $x > 0$ 时为低 β 才成立)

设 $V_{Ae} < C_e, C_{Te} \rightarrow V_{Ae}, m_e^2 = k_y^2 - \frac{\omega^2}{C_e^2}, m_e^2 C_e^2 = k_y^2 C_e^2 - \omega^2$

只要 $k_y^2 C_e^2 > \omega^2$, 及 $k_y^2 V_{Ae}^2 > \omega^2$ (i) 时满足, m_0^2, m_e^2 为向右的. 两侧均有表面波.

iii) 若 $x > 0$ 已域无场, 即 $B_0 = 0$, $\therefore V_{AE} = 0$

设 $k_y = 0$, (24) 式简化为

$$\rho_0 (k_y^2 V_A^2 - \omega^2) m_e = \rho_e \omega^2 m_0$$

$$(k_y^2 V_A^2 - \omega^2) m_e = \frac{\rho_e}{\rho_0} \omega^2 m_0 \quad (27)$$

$\therefore V_{AE} = 0$, $\therefore C_{Te} = 0$

$$m_e^2 = k_y^2 - \frac{\omega^2}{C_0^2}$$

已知 m_s, m_0 为正, 则 m_e^2 也都有正负值

a. 对于 $\beta < 1$ ($x < 0$), 无场 ($x > 0$)

$$C_0 < V_A, C_T \rightarrow C_0, m_e^2 = k_y^2 - \frac{\omega^2}{V_A^2} \quad \text{当 } k_y^2 V_A^2 > \omega^2 \text{ 时, 有 } m_e^2 > 0$$

$$\text{无场区已域已域 } m_e^2 = k_y^2 - \frac{\omega^2}{C_0^2} \quad k_y^2 C_0^2 > \omega^2 \text{ 时, 有 } m_e^2 > 0$$

因此 $\beta < 1$, 以及也有表面波的条件是 $\begin{cases} k_y^2 C_0^2 > \omega^2 \\ k_y^2 V_A^2 > \omega^2 \end{cases}$

为正. 该简化条件不再成立时即为低 β .

b. $\beta > 1$ ($x < 0$), 无场 ($x > 0$)

$$C_0 > V_A, C_T \rightarrow V_A, m_e^2 = k_y^2 - \frac{\omega^2}{C_0^2}, \therefore \text{要 } k_y^2 C_0^2 > \omega^2, \text{ 即 } m_e^2 > 0.$$

无场区仍只要 $k_y^2 C_0^2 > \omega^2$, 即 $m_e^2 > 0$

也有表面波的条件是: $\begin{cases} k_y^2 C_0^2 > \omega^2 \\ k_y^2 V_A^2 > \omega^2 \end{cases}$

⑤ 现在我们来讨论 $x > 0$ 已域, 无场 ($B_0 = 0$), 相速等于 C_T .

设 $k_y = 0$, (24) 式简化为 $(V_{AE} = 0, C_{Te} = 0)$

$$\rho_0 (k_y^2 V_A^2 - \omega^2) m_e = \rho_e \omega^2 m_0$$

$$(k_y^2 V_A^2 - \omega^2) m_e^2 = (\frac{\rho_e}{\rho_0}) \omega^2 m_0^2 \quad (27')$$

$$\text{式中 } m_e^2 = \frac{k_8^2 C_0^2 - \omega^2}{C_0^2}, \quad M_0^2 = \frac{(k_8^2 C_0^2 - \omega^2)(k_8^2 V_A^2 - \omega^2)}{(C_0^2 + V_A^2)(k_8^2 C_0^2 - \omega^2)}$$

$$\text{代入}(27'): \frac{k_8^2 C_0^2 - \omega^2}{C_0^2} (k_8^2 V_A^2 - \omega^2)^2 = \left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right)^2 \omega^4 \frac{(k_8^2 C_0^2 - \omega^2)(k_8^2 V_A^2 - \omega^2)}{(C_0^2 + V_A^2)(k_8^2 C_0^2 - \omega^2)}$$

$$(k_8^2 C_0^2 - \omega^2)(k_8^2 V_A^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)(k_8^2 C_0^2 - \omega^2) = \left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right)^2 C_0^2 \omega^4 (k_8^2 C_0^2 - \omega^2) \quad (28)$$

考虑界面：速度相等， $C_0 = C_0'$

$$(k_8^2 V_A^2 - \omega^2)(k_8^2 C_0^2 - \omega^2) = \left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right)^2 \frac{C_0^2}{C_0^2 + V_A^2} \omega^4$$

$$k_8^2 V_A^4 C_0^2 - k_8^2 (2C_0^2 V_A^2 + V_A^4) \omega^2 + [C_0^2 + V_A^2 - \left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right)^2 C_0^2] \omega^4 = 0$$

$$C_0^2 [C_0^2 + V_A^2 - \left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right)^2 C_0^2] \left(\frac{\omega}{k_8 C_0}\right)^4 - (2C_0^2 V_A^2 + V_A^4) \left(\frac{\omega}{k_8 C_0}\right)^2 + V_A^4 = 0$$

$$\left(\frac{\omega}{k_8 C_0}\right)^2 = \frac{(2C_0^2 V_A^2 + V_A^4) \pm \left\{ (2C_0^2 V_A^2 + V_A^4)^2 - 4V_A^4 C_0^2 [C_0^2 + V_A^2 - \left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right)^2 C_0^2] \right\}^{1/2}}{2C_0^2 [C_0^2 + V_A^2 - \left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right)^2 C_0^2]} \quad (28')$$

边界条件： $P_0 + \frac{1}{2\rho_0} D_0^2 = P_e$

$$P_0 = \frac{1}{\gamma} \rho_0 C_0^2, \quad P_e = \frac{1}{\gamma} \rho_e C_e^2$$

$$\frac{1}{\gamma} \rho_0 C_0^2 + \frac{1}{2\rho_0} D_0^2 = \frac{1}{\gamma} \rho_e C_e^2$$

$$\frac{1}{\gamma} C_0^2 + \frac{1}{2} V_A^2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right) C_e^2$$

$$\frac{\rho_e}{\rho_0} = 1 + \frac{\gamma}{2} \frac{V_A^2}{C_0^2} \quad (\text{利用速度相等的条件})$$

$\frac{\rho_e}{\rho_0}$ 代入(28')式

$$\left(\frac{\omega}{k_8 C_0}\right)^2 = - \frac{(2C_0^2 + V_A^2) \mp \left[(2C_0^2 + V_A^2)^2 + \gamma^2 V_A^4 + 4(\gamma-1) C_0^2 V_A^2 \right]^{1/2}}{\frac{1}{2} \gamma^2 V_A^2 + 2(\gamma-1) C_0^2}$$

$$i_2 \propto \frac{V_A}{\gamma}$$

1) $V_A \gg C_0$,

$$\left(\frac{\omega}{k_B C_0}\right)^2 = \frac{\left[\left(2C_0^2 + V_A^2\right)^2 + \gamma^2 V_A^4 + 4(\gamma-1)C_0^2 V_A^2\right]^{\frac{1}{2}} - (2C_0^2 + V_A^2)}{\frac{1}{2}\gamma^2 V_A^2 + 2(\gamma-1)C_0^2}$$

$$\approx \frac{(V_A^4 + \gamma^2 V_A^2)^{\frac{1}{2}} - V_A^2}{\frac{1}{2}\gamma^2 V_A^2} = \frac{(1+\gamma^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{2}\gamma^2} = 0.679$$

$$\frac{\omega}{k_B} = 0.824 C_0 \quad C_T \approx C_0 \quad \frac{\omega}{k_B} < C_0 \approx C_T$$

$$2) V_A = C_0$$

$$\left(\frac{\omega}{k_B C_0}\right)^2 = \frac{\left[\left(3C_0^2\right)^2 + \gamma^2 C_0^4 + 4(\gamma-1)C_0^4\right]^{\frac{1}{2}} - 3C_0^2}{\left(\frac{1}{2}\gamma^2 + 2\gamma - 2\right)C_0^2}$$

$$= \frac{(\gamma^2 + 4\gamma + 1)^{\frac{1}{2}} - 3}{\frac{1}{2}\gamma^2 + 2\gamma - 2} = 0.294$$

$$\frac{\omega}{k_B} = 0.542 C_0 \quad C_T = \frac{1}{\sqrt{2}} C_0 = 0.707 C_0 \quad \frac{\omega}{k_B} < C_T$$

$$3) V_A \ll C_0$$

$$i_2 \propto C_0 = KV_A, \quad K \gg 1$$

$$\left(\frac{\omega}{k_B C_0}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{k_B V_A}\right)^2 \cdot \frac{1}{K^2}$$

$$\left(\frac{\omega}{k_8 V_A}\right)^2 = K^2 \frac{[(2K^2 V_A^2 + V_A^2) + Y^2 V_A^4 + 4K^2(Y-1)V_A^4]^{1/2} - (2K^2 + 1)V_A^2}{\frac{1}{2}Y^2 V_A^2 + 2K^2(Y-1)V_A^2}$$

$$= K^2 \frac{[(2K^2 + 1)^2 + Y^4 + 4K^2(Y-1)]^{1/2} - (2K^2 + 1)}{\frac{1}{2}Y^2 + 2K^2(Y-1)}$$

分子中 $\frac{1}{2}Y^2$ 与 $(1+Y^2)$, 分母中 $\frac{1}{2}Y^2$ 与 Y^2

$$\left(\frac{\omega}{k_8 V_A}\right)^2 \approx \frac{2K^2 + Y - 2K^2 - 1}{2(Y-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\omega}{k_8 V_A} \approx 0.707 \quad \frac{\omega}{k_8} \approx 0.707 V_A, \quad V_A \ll C_0, C_T \approx V_A.$$

$$\frac{\omega}{k_8} < V_A \approx C_T.$$

从以上三式可知可看到相速 $V_{ph} = \frac{\omega}{k_8} < C_T$.

b. 快慢表面波 (纵波) 稳定性分析: 支持和反对传播

① -12.1 光速场时, 表面波相速度 $\min(C_F, C_e)$ — 慢表面波

$$\text{若: 光速场 } (\text{即 } \lambda > 0 \text{ 时}) \quad m_e^2 = k_8^2 - \frac{\omega^2}{C_e^2} \quad (\text{P.165 上式})$$

$$V_{ph}^2 = \frac{\omega^2}{k_8^2} = C_e^2 \left(1 - \frac{m_e^2}{k_8^2}\right) < C_e^2 \quad (m_e^2 > 0, \text{ 则 } V_{ph} < C_e)$$

$$\text{在 } 5-3 \text{ 中, 已得 } V_h = \frac{\omega}{k_8} < C_T$$

若表面波相速度小于 $\min(C_F, C_e)$ 的为慢表面波 $\rightarrow C_F, C_e \neq V_A$ 时

② 光速场 $(x < 0 \text{ 时})$ 有 $C_F > C_0$, 且 $V_A > C_0$ $\Rightarrow C_0 < V_{ph} < \min(C_F, V_A)$ 称为

快表面波

-12.1 光速时 由①已得 $V_{ph} < C_e$ ($\beta < 1$ 时 $\beta = 1 - \frac{V_A}{c}$)

$$\text{由 } V_A > C_0 \text{ 即 } \beta < 1, \text{ 且 } m_e^2 = k_8^2 - \frac{\omega^2}{V_A^2}, \quad V_{ph}^2 = V_A^2 \left(1 - \frac{m_e^2}{V_A^2}\right) < V_A^2$$

$$V_{ph} < \min(C_e, V_A)$$

第五章 激波

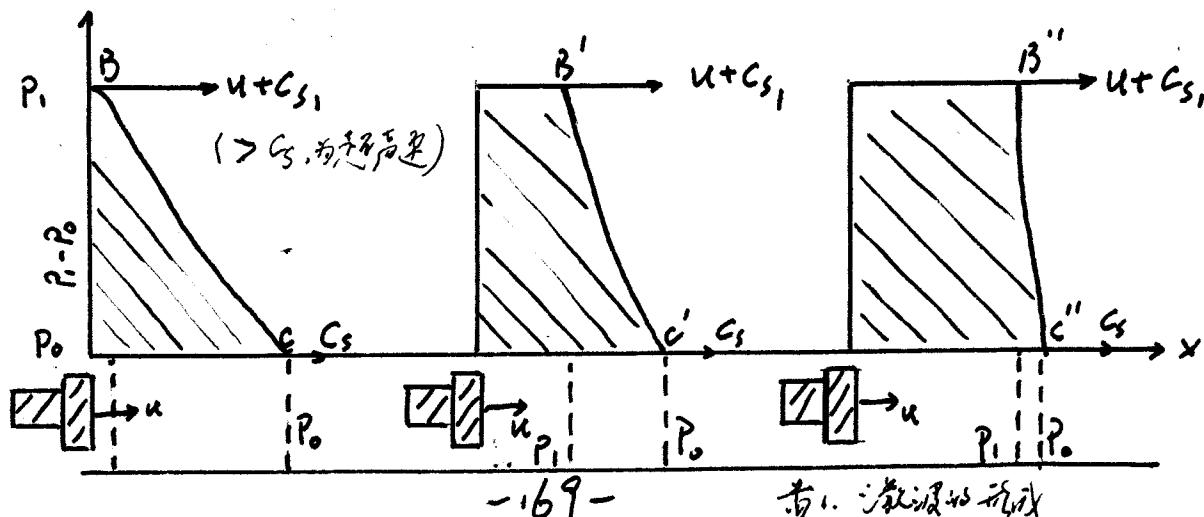
5.1 引言

不同的磁系统相互挤压，很可能连实地发生磁重联，产生磁激波。宁静的区域与爆发区向箭猪波，通过巨型射电暴或者剧烈的太阳风产生的激波。从大的尺度上，日震(surge)，针状物以及太阳表面连续的未耗运动也可能形成激波。本章讨论流体力学和磁流体力学激波的基本理论。

5.1.1 流体力学激波的形成

1. 小扰动以声速形式传播，传播过程中波形保持不变，如果波具有有限振幅，方程中的非线项(如运动方程中，随体守恒的速度部分)变得重要。波峰和波谷的前缘和尾部运动得更快，逐渐赶上它们。当半波周期逐渐变短，压缩，密度，速度和速度导数差值的幅度变得很大，以此流体的粘滞性，随体守恒不满足，最后达到定性的波形称为激波。非线性的过流次的衰减效应耗散直到平衡，激波的速度超过声速。

设气流有活塞的管道中(比如)，便物推静止的活塞以速度 u 行进运动。这个运动不能使管内静止的气体立刻运动，为了克服活塞前面气体的阻力，对活塞施加的压力应该由 P_0 (未受扰气体压强)



增加到 P_1 , 这时上游便沿著前面邻近的气体密度增加, 达到压强 P_1 和速度 u . 因为起了扰动, 有声波在管中传播, 在未受扰动气体中的声速为 C_s , B 处气体的热效应是压缩, 从未受扰动时的泡品增加到 P_1 , $P_1 > P_0$, 因此 B 处的声速为 $C_{s1} > C_s$. 再加上流速 u , B 处的速度是大于 C 处的速度, B 将追上 C 波阵面 BC 的倾斜程度将随扰动的移动而逐渐变陡, u, P, P 对 x 的微分商越大, 立即无穷大, 形成液体复杂的间断面. 由于耗散效应的猝死, 流速变差的程度不可估量大, 例如温度梯度, 随液体变陡而增大, 耗散率也随其增大, 直到达到正常状态, 耗散越少, 流速越趋于间断面. 牛顿流体中, 只有通过碰撞才能达到新的平衡态. 因此流体力学教科书的含意约为粒子平均自由程的函数.

磁流体力学激波一般比流体力学激波复杂. 我们知道磁声波有快、中间、慢三种模式. 中间模式是把横波, 不会变陡, 形成激波, 快和慢模式既有横向速度和纵向速度, 故分类是正确的. 可以形成激波. 另外, 磁流体力学激波的结构也比流体力学激波复杂, 电阻引起的阻尼和平坦提供了-种转动的耗散机制, 尤其是等离子体中仔在碰撞阻尼, 形成无碰撞激波, 这种激波的强度大于粒子的平均自由程.

2. 小幅高声波

a. 条件: 等熵, 完全流体 (理想流体指总无耗性)

因为等熵 $s = \text{const}$, 有关係 $P_0^r = \text{const}$. 可以将压数 P 写成 $P = P(P_0, s)$

$s = C_v \ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$, 原来静止的流体 P_0, s_0 , 变到小扰动 P_1 , 在泡塑运动下, 進行 s 不变, 在 P_0, s_0 附近将压数 P 展开成 Taylor 级数, 得 $\frac{\partial P}{\partial P_0} \approx \frac{1}{s}$

$$\therefore \text{上式} \quad P = P_0 + \left[\left(\frac{\partial P}{\partial P_0} \right)_{s_0} \right]_0 (P - P_0) + \dots$$

$$\text{亦即} \quad P_1 = P - P_0 = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial P_0} \right)_{s_0} \right]_0 P_1, \quad P_1 = P - P_0$$

$\left[\frac{\partial P}{\partial \rho}\right]_s$ 是其渐近形式方程 $\frac{d}{dt}(\frac{P}{\rho})r = 0$, 或从 s 点处正向和反向不定.

$$\text{记 } a_{so}^2 = \left[\frac{\partial P}{\partial \rho}\right]_s = \frac{P_0}{\rho_0}$$

a_{so} 常数由流体处于静止时的物理量 P_0, ρ_0 决定.

$P_1 = a_{so}^2 \rho_1, \quad a_{so}^2 = \frac{P_1}{\rho_1}$ 当流动时, 流速 v 由声速决定.

$$\text{因为 } P = P(P, s), \text{ 我们也可得到 } \frac{\partial P}{\partial t} = \left[\frac{\partial P}{\partial \rho}\right]_s \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{F. sh. "gas dynamics"})$$

$$= a_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.1.1-1)$$

由上式几乎等价, 应该有 $a_s \approx a_{so}$. 该式通过 a_{so} 的取值和 a_s 的表达式等价. 不过在静力学中通过展开函数而得. (利用导数对 s 不变)

$$b. \quad a_s = a_{so} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{r-1}} \quad (5.1.1-2)$$

普通流体 $P \rho^{-r} = P_0 \rho_0^{-r}$.

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^r$$

由状态方程 $P = \rho R T$, 可得 $\frac{P}{P_0} = \frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$. 因此 $\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^r = \frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$.

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{r-1} = \frac{T}{T_0}$$

$$\text{声速 } a_s^2 = \frac{\gamma k_B}{m} T, \quad \therefore \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{r-1} = \left(\frac{a_s}{a_{so}}\right)^2. \quad \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \left(\frac{a_s}{a_{so}}\right)^{\frac{2}{r-1}}$$

$$a_s = a_{so} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{2}{r-1}}$$

ρ_0, a_{so} 为静止流体的密度和声速. 从此可知, 相关声速 a_s 与 ρ 无关. 但 a_s 不一定相等. a_s 应该是当地声速, 也可认为 a_s 是相对于当地 (该点的声速为 a_{so} , 密度为 ρ_0 , 流速为零) 的当地声速

c. 传播元 P_1 与局部运动

- 连续化的方法

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + P_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (\text{连续化方法}) \quad (5.1.1-3)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -a_{so}^2 \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (\text{运动方程}) \quad (5.1.1-4)$$

$$[\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P, \quad \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} = -a_{so}^2 P (\rho_0 + P_1) = -a_{so}^2 \frac{\partial P_1}{\partial x}]$$

$$(5.1.1-3) \text{ 对 } x \text{ 不变} \quad \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} = 0$$

$$(5.1.1-4) \text{ 对 } x \text{ 和 } t \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2 \partial x} = -a_{so}^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - a_{so}^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{解得 } P_1 = f(x - a_{so}t) + g(x + a_{so}t)$$

i) 可推得运动速度 $u_1 = [f(x - a_{so}t) + g(x + a_{so}t)]$

运动以波的形式传播，传播速度为 a_{so} ，波形保持不变。

c. i. 运动方程为线性，波形保持不变，流体力学方程本质上是非线性的，我们已采取了非运动线性化的方法。

ii. 有限振幅的声波，记忆行不行，若要蔓延（例如超声波），成为非线性。

iii. 几乎所有非线性波有衰减的方向

iv. 非线性蔓延方向被分散方向（不同的 Fourier 分量随时间逐渐分离，有孤立子解，且仍保持孤立子的形状）改变

v. 声波在非线性蔓延方向的耗散率降低。

3. 等熵流体一维非定常流动

1. 由运动方程，求解非线性方程。

$$\text{连续性方程: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.1.1-5)$$

$$\text{运动方程: } \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla P$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a_s^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{已利用 (5.1.1-1) 式}) \quad (5.1.1-6)$$

对 (5.1.1-2) 式两边求微分，其中 a_{so}, ρ_0 为常量。

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\partial u}{u} \quad (\text{若 } \rho = \sqrt{\gamma} u) \quad (5.1.1-7)$$

(5.1.1-7) 分别除以 $\partial t, \partial x$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{2}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{2}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

上式代入 (5.1.1-5) 及 (5.1.1-6) 中, 得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\gamma-1} u \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\gamma-1} u \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\gamma-1} u \right) = 0$$

二式相加:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(u + \frac{2}{\gamma-1} u \right) = 0 \quad (5.1.1-8)$$

二式相减:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(u - \frac{2}{\gamma-1} u \right) = 0 \quad (5.1.1-9)$$

方程 $\frac{\partial D}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial R} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$, 和其偏导数 $\frac{\partial D}{\partial w}, \frac{\partial D}{\partial R}$ 与 w 相关, $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}$. 故该方程对 w 是非线性的. 但对 w 的一阶导数是线性的, 称为
准线性方程. 可由一般常微分方程求解.

$$\frac{dt}{\frac{\partial D}{\partial w}} = - \frac{dx}{\frac{\partial D}{\partial R}} = \frac{dw}{0}$$

即 $\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} = 0$, 即此是 Riemann 等量 w 的特征, 即 $\frac{dx}{dt} = - \frac{\partial D}{\partial R}$ 为定值.

$$w = \text{const.}$$

$$\therefore Q = u + \frac{2}{\gamma-1} u, R = u - \frac{2}{\gamma-1} u$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u+a} = \frac{dQ}{0}$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u-a} = \frac{dR}{0}$$

即特征线 $\frac{dx}{dt} = u \pm a$, Riemann 差量 $Q = u + \frac{\gamma}{\gamma-1} a = \text{const.}$

即特征线 $\frac{dx}{dt} = u - a$, Riemann 差量 $R = u - \frac{\gamma}{\gamma-1} a = \text{const.}$

式中 $a = a_s$ 为当地声速.

特征速度 $\frac{dx}{dt} = u \pm a$, 相对于以速度 u 运动的流体, (非弹性) 扰动以速度 a 向右或向左传播.

当扰动分析法适用时, 我们不但设 $u \ll a$, 以致忽略 u , 也不假设 a 近似等于 a_{s0} . (因为当扰动时 $a_s = a_{s0} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \approx a_{s0} \left(1 + \frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \approx a_{s0}$)
对于有限幅值的情况, 扰动以特征速度传播过程中, 保持不变的是物理的过程, 而不是 Riemann 差量 Q, R .

有限幅高波和小扰动波相对传播以下二点已知

1. 小扰动波相对于流体的传播速度是未受扰动流体中的声速 a_{s0} .

是一常数. 有限幅高波相对于流体的传播速度是当地声速 a_s

$$a_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = a_{s0}^2 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (\text{相对于声速}), \quad a_{s0}^2 = \left[\left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s \right],$$

当地声速是一个变数 (随位置而变), 依赖于扰动强度.

2. 在小扰动波的传播过程中, u, P, ρ, a_{s0} 都是变化的, 有限幅高波的传播过程中, u, P, ρ, a_s 可以改变, 但必须保持 Riemann 差量为常数.

4. 简单波的传播和反射

a. 考虑一个简单波，它的向左传播的所有特征线上为同一常数(R =常数，在所有特征线上成立)，向右传播的特征线上， Q 也不同的特征线上，有不同的常数。即

$$R = u - \frac{2}{\gamma-1} a = \text{常数} \quad (\text{左行时空})$$

$$Q = u + \frac{2}{\gamma-1} a = \gamma(\text{右行特征线上有相同的常数})$$

(u : 流体速度, a 和 a_s 当地声速)

一个有限根隔声后波，即使初扰时为正弦形，在均匀未流动介质中传播，其波形也可避免地蔓延。

b. 由于 R 在整个时空中保持常数，就必须画出，因为特征线发自静止点，并且垂直，因此可确定这个时空中的常数。因为静止，所以 $u=0$ 。

$$R = u - \frac{2}{\gamma-1} a = -\frac{2}{\gamma-1} a_{so} \quad (S.1.1-10) \quad a_{so} \text{ 为未流动静止介质中的声速。}$$

c. $u=0$ ，有一有限根隔声的正弦形扰动，A、B、C 三处 $\rho=\rho_0$ ， ρ_0 为未流动运动区域的密度 (见 S.1.1)，从这三处发出的特征线必定以声速 a_{so} 传播， $\frac{dx}{dt} = u + a = a_{so}$ (\because 静止流体 $u=0$)。如果三不平行线表示

d. 考虑密度同扰初状态的部分 α ，根据 (S.1.1-2) 式， $a_s > a_{so}$ ($\because \rho > \rho_0$) 因此由 α 发出的特征线，速度之大 (斜度大)，特征线的速度比中还有一次 u ，根据 (S.1.1-10) 式，该式中的 a 即为当地声速 a_s 可得到 $u = 2(a_s - a_{so})/\gamma-1$ ， $\because a_s > a_{so} \therefore u > 0$ 。 α 之大速度不真实是看得出 A、B、C 处的特征线的速度大。

$$u + \frac{2}{\gamma-1} a > a$$

因为 $a < a_s$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u + a_s \\ &= 2 \left(a_s - a_{so} \right) / \gamma-1 + a_s \end{aligned}$$

e. 考虑密度差疏的区域 B，由 (S.1.1-2) 式， $a_s < a_{so}$ ， $u = 2(a_s - a_{so})/\gamma-1 < 0$ 因此 B 处发出的特征线，速度小

f. 波来波去赶上之后，波蔓延，有限根隔声运动 (本例中为正弦形) 在传播过程中不能保持扰动形状不变。

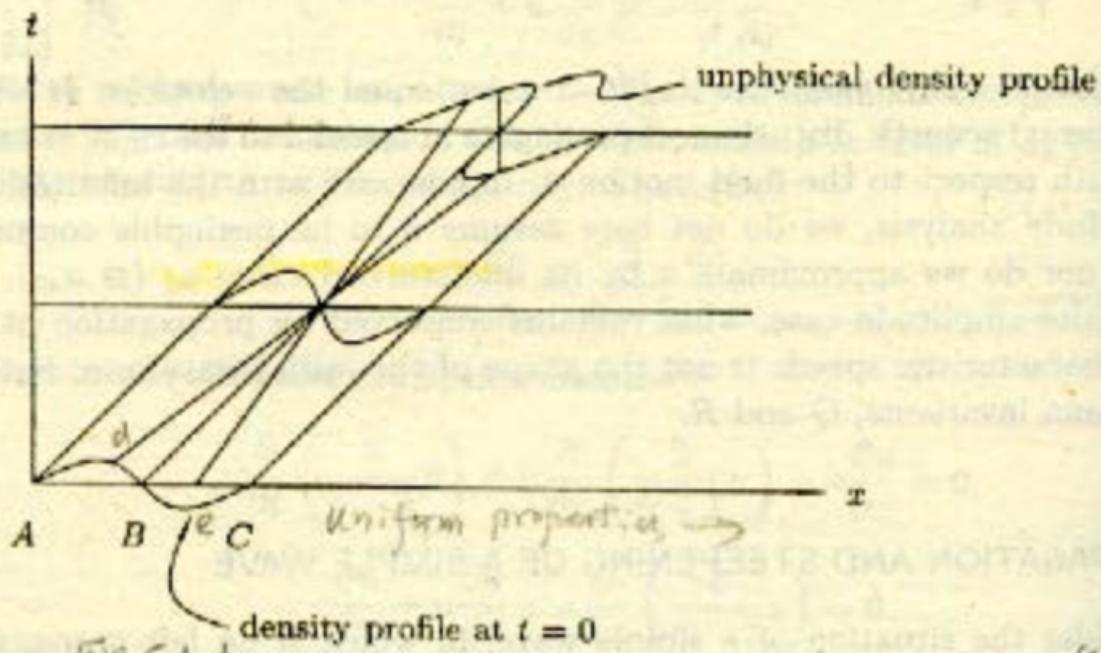


Fig 5.1.1

FIGURE 15.3

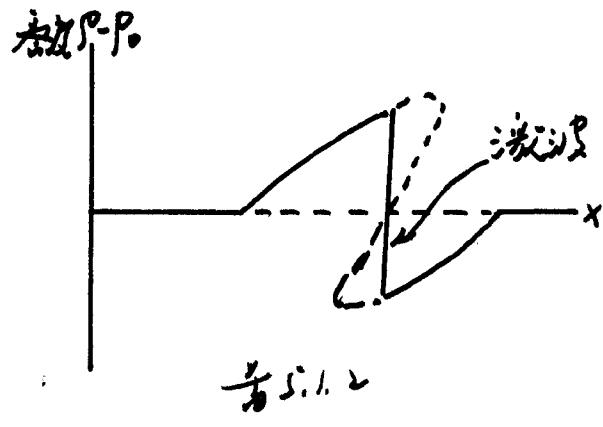
An acoustic wave of finite amplitude, even if it starts with a perfect sinusoidal shape and propagates in an undisturbed medium of exactly uniform properties, would inevitably steepen in its waveform.

对于 α_0 运动 $a_s = a_{s0}$, $n=0$. 则从任一出发点 x_0 特征线均平行于从 A 到 C 该发出的特征线. 波形保持不变.

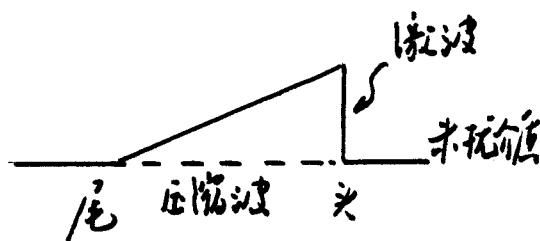
8. 波形蔓延, 将导致流体的物理量和密度、速度有多重值, 但通过粘滞就逐渐消除. 由于温度梯度的增大, 温度梯度也增大 ($(\frac{T}{T_0})^{x-1} = \frac{1}{T_0}$), 热传导就相对增大 ($\sim kDT$), 热能将重新分配, 温度蔓延的倾向得到抑制, 多值问题就不会产生. (参 5.1.2)

9. 激波形成. 特征线分析方法开始失效, 因为物理量的变化与物理量的半数(半边)有关.

10. 紧跟激波后的区域, 该区域必须连续流动波前, 其它的速度等于未扰的声速 a_{s0} , 结果激波的波前完全越过波谷, 以超音速在未扰介质中传播. 同时波的尾部(尾部末端以未扰区声速 a_{s0} 传播)同样滞后于波前, 波形拉长 (参 5.1.3)



参 5.1.2



参 5.1.3

11. 温度逐渐分布到流体的其余部分. 未扰向断面的波(即波强度)随时间逐渐减弱, 最后因耗散成为一根高声速波.

12. 上述分析基于只有开始的一了扰动. 当粘滞和热传导作用时, 不可避免地要衰减. 移走激波的形状将有一个不变的动量和能量损失.

5. 嵐波の習文

何れも主事の耗散有り制已前、又、1巻の嵐波の習文可通正書以假行而得矣。
此れが本傳耗散之主事の制也。牛頓次第（宋游日本）若許、神川）切向社力

和剪切变形速度成正比，即压强修正的切向分量与剪切变形速度之间有关係 $P_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$ ，其中 $u = u(y)$ 表示剪切运动的速度， μ 是动力学粘性系数 $\mu = \rho \nu$ ， ρ 密度， ν 运动学粘性系数 (kinematic viscosity) 在 δt 时间内耗散的能量为 δE

$$\frac{\delta E}{\delta t} \sim \frac{\delta}{\delta t} P_{xy}$$

随体导数中， $- \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}$ 项及 $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ 项不相同。 $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \sim \delta u \cdot \frac{d}{dx} \delta u$

$$\frac{\delta}{\delta t} P \sim \delta v \cdot \frac{d}{dx} P = \delta v \frac{d}{dx} \mu \left(\frac{\delta v}{\delta x} \right) = \rho \nu \delta v \frac{\delta v}{(\delta x)^2} = \rho \nu \left(\frac{\delta v}{\delta x} \right)^2 \sim \frac{\delta E}{\delta t} \quad (5.4)$$

$$\delta t = \frac{\delta x}{v}, \quad \frac{\delta E}{\delta t} = \frac{v}{\delta x} \delta E = \rho \nu \left(\frac{\delta v}{\delta x} \right)^2$$

湍流波浪可在 δt 时间内前进 δx ，令 $\delta v = v_1 - v_2$ ，由上式可得出

$$S_x \approx \frac{\rho \nu (v_1 - v_2)}{v_1 \delta E} \quad (5.6)$$

此平均流速 S_x 为 δt 的能量，可得 $\delta E \approx \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2$ ，对于强激波 $\delta E \approx \frac{1}{2} \rho v_1^2$ ，湍流强度：

$$S_x \approx \frac{\rho \nu v_1^2}{v_1 \delta E} \approx \frac{v}{v_1} \quad (5.7)$$

Reynolds 数定义为 $\frac{L v}{\nu}$ 是压强的平均值与 v 的乘积。在湍流层内 Reynolds 数的量阶为 1， $\therefore L = \delta x, v = v_1, \therefore R = \frac{\delta x v}{\nu}$

$$= \frac{v_1 \cdot v_1}{\nu} = 1.$$

5.1.2 磁场对流的影响

1. 在电流传导中，磁场与流体有强的相互作用，磁流体力学湍流理论更为复杂，不过基本原理与非导电流体湍流一样，可以概况。
考虑转动和重力时，磁声波有三种模式，其中的中间模式为 Alfvén 波，即使速度很高，在传播过程中也 不会衰耗，因为 Alfvén 波是无耗波。

而快慢磁声波合速度，分别形成快慢磁声激波。当波的传播方向垂直磁场时， $\cos \theta_0 = 0$ 。慢磁声波消失，只有快模式，速率为 $(c_s^2 + V_{A_1}^2)^{1/2}$ ，这是快激波或称为垂直激波，在其他方向上，快慢激波都有，称为斜激波，速度与平行于速度和快波速度（激波速度等于光速）慢激波通过时会削弱慢磁声速度，至使磁场和慢激波向平行方向流动；而快激波则相反。特别当激波前磁场为斜向穿入，而激波后磁场为平行方向，则激波后磁场在激波前无切向分量，称为消去激波 (switch-off shock) 若激波前磁场为平行方向，进入激波阵面的速度为 Alfvén 速度，激波后方无切向分量，称为产生激波 (switch-on shock)

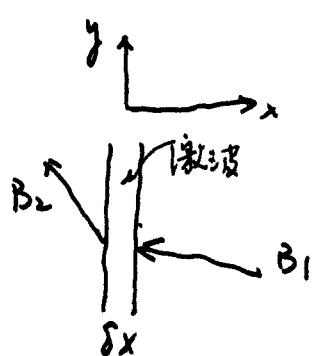


2. 磁电流体的另一个作用是多一耗散机制，因为有限电导率产生的加热，使激波的结构变得复杂。停机激波（即停止耗散以后的碰撞耗散）而引起磁耗散可以忽略，那末对于 γ 因向封闭而跳跃的物理量之间的关系没有影响。

停机碰撞加热在停机过程中起主要作用，激波厚度 δx 可如下估计。
耗散耗散率是： $\frac{\delta E}{\delta x} \approx \frac{i^2}{\sigma}$ (5.8)

根据 Ampere 定律，激波电流 $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}$

$$j \approx \frac{B_{1y} - B_{2y}}{\mu \delta x}$$



上式中引出交叉激波前后横向(分量)分量表达式， δE 由(5.7)式表示，即
 $\delta E = \frac{\delta x}{v_1}$ ，代入(5.8)：

$$\frac{\delta E \cdot v_1}{\delta x} \approx \frac{(B_{1y} - B_{2y})^2}{\mu^2 (\delta x)^2 \sigma}$$

$$\delta x \approx \frac{(B_{1y} - B_{2y})^2}{\mu^2 \sigma v_1 \delta E}$$

式中 δE 可由激波平面作为切割面，物理量跳跃跃变而得。例如垂直于磁场方向传播的磁激波 $\delta E \approx \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2$ ， $B_{2y} \approx 4B_{1y} = 4B_1$ 。

$$\delta x \approx \frac{16 B_1^2}{(\mu \sigma v_1)(\mu \rho_1 v_1^2)} \quad (5.9)$$

磁 Reynolds 数定义： $R_m = \frac{L v \cdot 4 \pi \sigma}{c^2}$ (这里 L 为特征长度，即激波厚度内的 R_m)

$$R_m = \mu \sigma v_1 \delta x$$

定义 Alfvén Mach 数： $M_A = \frac{v_1}{v_{A1}} = v_1 \left(\frac{\mu \rho_1 v_1^2}{B_1} \right)^{\frac{1}{2}}$

(5.9) 式变形

$$1 \approx \frac{18}{(\mu \sigma v_1 \delta x) \left(\frac{\mu \rho_1 v_1^2}{B_1^2} \right)} = \frac{18}{R_m \cdot M_A^2}$$

$$R_m \approx \frac{18}{M_A^2}$$

3. 电离气体中的激波厚度与碰撞的平均自由程小得多，是一种无碰撞激波，(1) MHD 理论描述不恰当。有序化量转换成无规则运动非由于粒子的碰撞，而是通过等离子体根高(随速度衰减)，或是通过等离子体的微泡云稳定性，进入湍动状态。(在根高状态下，受激波作用的等离子体处于根高中，而非处于均匀态。) 无碰撞激波厚度的典型值为等离子体特征长度的量级，例如离子迴旋半径，或

者是高时电子迴旋半径的几何平均.

5.2 流体力学激波

1. 激波模型

- i. 作为数学上的一维问题，忽略激波厚度，通过问题，物理量发生跳跃。
- ii. 问题两边，即激波前后， λ 物理量（无粘滞），绝热，完全气体（可写状态方程 $PV = RT$ 的气体）， γ 为常数（激波两侧物理相同）附录：动力学的气体模型：
 1. 气体是不可压缩的分子集合。
 2. 分子无规则运动
 3. 除了碰撞壁除外，分子间的作用力，可以忽略。
 4. 弹性碰撞，碰撞后，动能不变。
- iii. 激波前后的流动满足基本物理规律，即质量、动量、能量守恒。状态方程及热力学第一定律。

2. 参考系

激波前的扰动，物理量用下标“1”表示，激波后的“2”。
静止参考系中，激波速度为 U ，受激波作用后的气体速度为 U_2 ($< U$) (第 5.3)。选取随激波运动的参考系，因此扰动气体以速度 $V=U$ 进入激波，受激波作用过的气体以 $V_2=U-U_2$ 离开激波。
显然 $V_2 < V$ ，多没有激波时相等。

3. 平面激波以常速 V 稳定地侵入非导电的理想气体，密度为 ρ_1 ，压强 P_1 ，参考系与激波一起运动，受激波作用过的气体，速度变为 V_2 ，压强 P_2 ，通过质量、动量和能量守恒方程，利用 ρ_1, V, P_1, T_1 (设为已知) 确定受激波作用后的物理量 ρ_2, V_2, P_2, T_2 。

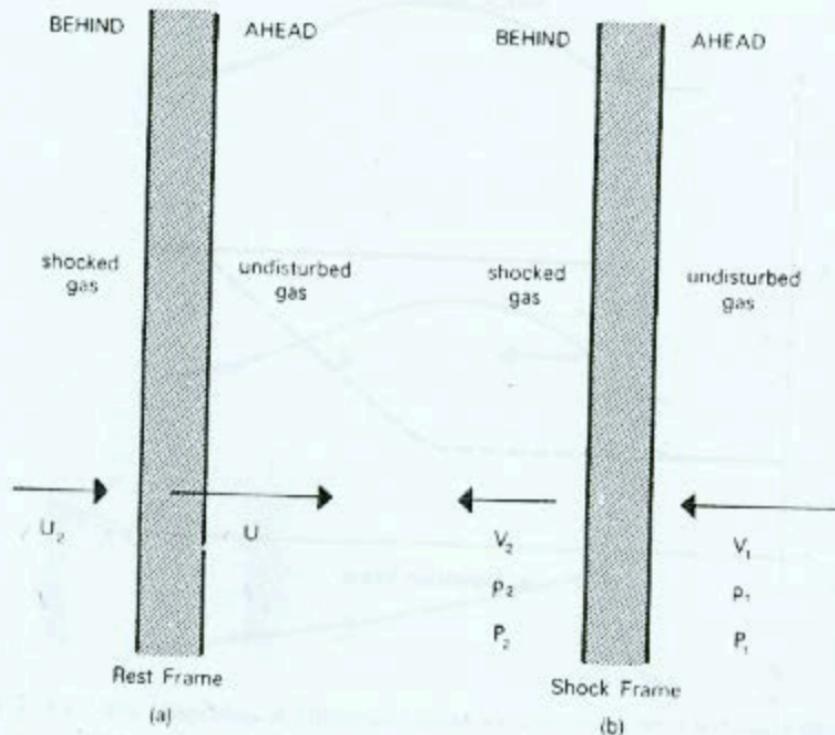


Fig. 5.3. The notation for a plane hydrodynamic shock wave moving to the right with speed u into a gas at rest. Properties ahead of the shock are denoted by 1 and those behind by 2.

4. 由于沿空间断面，我们只选择用积分形式的流体力学基本方程，坐标取在激波上。因激波是或静止，如果激波前后整个区域流动状态都走均匀的，则 V_1, P_1, ρ_1, T_1 及 V_2, P_2, ρ_2, T_2 分别代表激波前后整个区域内的物理量，如果走均匀，不妨“ ρ_1 ”和“ ρ_2 ”的物理量分别代表激波两侧“某处”激波的密度。激波前后的流动可以走常数，也可以走不常数。

跨越间断面取小平行元 dC ，厚度 $d \rightarrow 0$ ，底面积为有限，因此体积也相对于底面积而为零。写出积分形式的跨越流体力学方程组

$$\text{连续性方程 } \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\int_C \frac{\partial \rho}{\partial x} dC + \int_T \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dC = \int_C \frac{\partial \rho}{\partial x} dC + \int_S \rho \vec{v} \cdot dS$$

$$\int_C \frac{\partial \rho}{\partial x} dC + \int_S \rho V_n dS = 0 \quad (5.2-1)$$

$$\text{运动方程 } \rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = -\nabla P$$

先推导一个公式，利用质量守恒定律

$$\frac{D}{Dt} \int_C \rho \varphi dC = \frac{D}{Dt} \int_C \varphi dm \quad dm = \rho dC$$

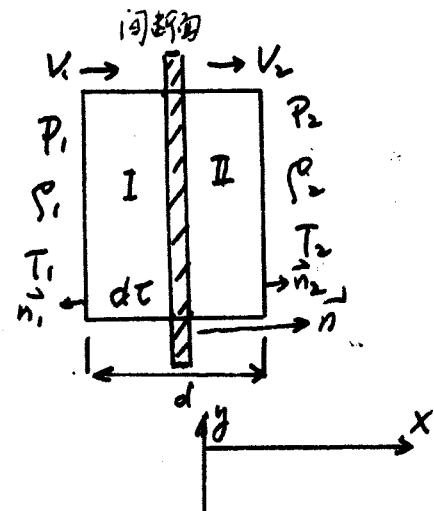
$$= \int_C \frac{D \varphi}{Dt} dm + \int_C \varphi \frac{D}{Dt} dm \quad \text{注意守恒: } \frac{D}{Dt} dm = 0$$

$$= \int_C \frac{D \varphi}{Dt} \rho dC$$

可得质量守恒

$$\frac{D}{Dt} \int_C \rho \vec{a} dC = \int_C \rho \frac{D \vec{a}}{Dt} dC$$

$$\int_C \rho \frac{D \vec{v}}{Dt} dC = \frac{D}{Dt} \int_C \rho \vec{v} dC = \int_C \left[\frac{D}{Dt} (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \right] dC$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_C \left[\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \nabla \cdot \vec{v} \right] dC \\
 &= \int_C \left[\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) \right] dC \\
 &= - \int_S \rho P dS
 \end{aligned}$$

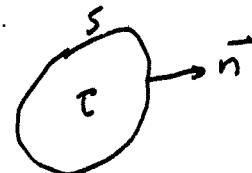
最后，运动方程的积分形式

$$\int_C \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dC + \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \int_S P \vec{n} dS \quad (5.2-2)$$

能量方程

- 运动方程的能量方程的推导

任取一闭合曲面 S 的流体体积 Γ , \vec{n} 为包围 Γ 的外法线单位矢量。质量守恒定律是：体积 Γ 内流体的动能和内能之和为 $\rho(E + \frac{1}{2}V^2)$, 归一化(流体在 Γ 上的)外力(重力, 阻力等)等于 $\rho \vec{a}$, 归一化外加的应力(压强) P_n , P_n 是法线方向单位面积上所受的力(指向外的方向有负号的 P_n)。注意理想流体(其密度表示为 $\eta = 0$)对于切向变化没有抗拒能力, 因此归一化在 S 上的应力只有法向分量 $P_{nn} = -P$, 切向分量等于零, P 称为理想流体的压强。



Γ 内的质量变化率等于单位时间内外力所作的功加上单位时间内通过表面 S 传入或传出 Γ 的热量(热传导及辐射)

$$\frac{D}{Dt} \int_C \rho(E + \frac{1}{2}V^2) dC = \int_C \rho \vec{a} \cdot \vec{v} dC + \int_S \vec{P}_n \cdot \vec{v} dS + \int_S \kappa \frac{\partial T}{\partial n} dS + \int_S Q dS$$

式中 κ 为热导系数, $-\vec{Q}$ 为 S 上热量, 对于各向同性流体(空气, 水等) κ 为常数, Q 为辐射或其他原因而单位时间内传入 Γ 的单位质量的热量。

$$Q = \int_C Q dC$$

对上式的积分形式进一步延拓

$$dC = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho(E + \frac{1}{2}V^2)] + \vec{v} \cdot \nabla [\rho(E + \frac{1}{2}V^2)] + \rho(E + \frac{1}{2}V^2) \nabla \cdot \vec{v} \right\} dC$$

$$= \int_C \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho (\varepsilon + \frac{1}{2} V^2)] + \nabla \cdot [\vec{V} \rho (\varepsilon + \frac{1}{2} V^2)] \right\} d\tau$$

$$= \int_C \frac{\partial}{\partial t} [\rho (\varepsilon + \frac{1}{2} V^2)] d\tau + \int_S \rho (\varepsilon + \frac{1}{2} V^2) V_n ds$$

当不考虑外力作用时，体系处于绝热状态（忽略外界热量的传入）。

则 $\dot{E} = C_V T$, 带入上式

$$\text{左端} = \int_C \frac{\partial}{\partial t} [\rho (C_V T + \frac{1}{2} V^2)] d\tau + \int_S \rho (C_V T + \frac{1}{2} V^2) V_n ds$$

$$\text{右端} = \int_S \vec{P}_n \cdot \vec{V} ds = \int_S (\vec{n} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{V} ds = - \int_S P (\vec{n} \cdot \vec{I}) \cdot \vec{V} ds = - \int_S P \vec{n} \cdot \vec{V} ds = - \int_S PV_n ds$$

得方程的两个分式为：

$$\int_C \frac{\partial}{\partial t} [\rho (C_V T + \frac{1}{2} V^2)] d\tau + \int_S \rho (C_V T + \frac{1}{2} V^2) V_n ds = - \int_S PV_n ds \quad (S:2-3)$$

备注：

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_S \rho V_n ds = 0 \quad (S:2-1)$$

$$\int \frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} d\tau + \int_S \rho \vec{V} V_n ds = - \int_S P \vec{n} ds \quad (S:2-2)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial t} [\rho (C_V T + \frac{1}{2} V^2)] d\tau + \int_S \rho (C_V T + \frac{1}{2} V^2) V_n ds = - \int_S PV_n ds \quad (S:2-3)$$

当物体速度及 $d \rightarrow 0$, $d\tau \rightarrow 0$, 底面视为有限, 上式中体积分为空。

当物体X轴取流动方向断面(流向平行于流动方向, 和前所言, I箭头指向 \vec{n} 且 \vec{n} 的方向和 \vec{V} 方向相反) 时 $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$, $\vec{n}_3 = \vec{n}$

$$P_1 \vec{V}_1 \cdot (-\vec{n}) + P_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{n} = 0$$

$$P_1 V_{1x} = P_2 V_{2x} \quad (S:10)$$

$$P_1 \vec{V}_1 V_{n1} + P_2 \vec{V}_2 V_{n2} = -P_1 \vec{n}_1 - P_2 \vec{n}_2$$

$$-P_1 V_1^2 \vec{n} + P_2 V_2^2 \vec{n} = P_1 \vec{n} - P_2 \vec{n}$$

$$P_1 + P_1 V_{1x} = P_2 + P_2 V_{2x} \quad (S:11)$$

$$P_1 V_{1x} + \rho_1 V_{1x} (C_v T_1 + \frac{1}{2} V_1^2) = P_2 V_{2x} + \rho_2 V_{2x} (C_v T_2 + \frac{1}{2} V_2^2)$$

$$P_1 V_{1x} + \rho_1 V_{1x} \varepsilon + \frac{1}{2} \rho_1 V_{1x} V_1^2 = P_2 V_{2x} + \rho_2 V_{2x} \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \rho_2 V_{2x} V_2^2 \quad (5.12)$$

式中内能 $\varepsilon = C_v T$

$$\text{利用 } C_v T + \frac{P}{\rho} = C_p T + R T = C_p T$$

$$(5.12) \text{ 式 还 可 写 成 } \rho_1 V_{1x} (C_p T_1 + \frac{1}{2} V_1^2) = \rho_2 V_{2x} (C_p T_2 + \frac{1}{2} V_2^2) \quad (5.12')$$

(5.10 - 5.12) 表达式即是 Priest 所谓的表达式.

$$kT \varepsilon = C_v T = \frac{P}{(r-1)\rho} \text{ 代入 (5.12)}$$

$$P_1 V_{1x} + \rho_1 V_{1x} \cdot \frac{P_1}{(r-1)\rho_1} + \frac{1}{2} \rho_1 V_{1x} V_1^2 = P_2 V_{2x} + \rho_2 V_{2x} \cdot \frac{P_2}{(r-1)\rho_2} + \frac{1}{2} \rho_2 V_{2x} V_2^2$$

利用 (5.10) 式, 上式可化简为

$$\frac{rP_1}{(r-1)\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{rP_2}{(r-1)\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 \quad (5.13)$$

(5.10 - 5.13) 称为准飞流条件.

若以 利用状态方程 可得

$$P_2 - P_1 = R (P_2 T_2 - P_1 T_1) \quad (5.2-4)$$

(5.10) 式中的 PV 表示单位时间内通过单位面积的总质量 - 应量流. (5.11) 式中的 $(PV)_V$ 表示单位时间内通过单位面积的动量. P 是作用在单位面积上的压力. (5.12) 式中 $(P_0 + \frac{1}{2} \rho V^2) V$ 代表单位时间跨过内壁的动量流 (推流). PV 是气体压强和单位时间内做的功.

同方程 5 和物理量之间有以下的表达

$$[PV_x] = \rho_2 V_{2x} - \rho_1 V_{1x}$$

上述的准飞流条件可以写成

$$[PV_x] = 0 \quad (5.2-5)$$

$$[P + \frac{1}{2} \rho V^2] = 0 \quad (5.2-6)$$

$$[PV_x (\frac{V^2}{2} + C_p T)] = 0 \quad (5.2-7)$$

$$[P] = [R \rho T] \quad (5.2-8)$$

(5.2-6) 为 x 方向的动量流动方程，还可求得 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 的表达式

从(5.2-2)式，令 $dc \rightarrow 0$ ，有

$$\int_S (\rho v_n \vec{v} + p \vec{n}) ds = \int \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} ds + \int p \vec{n} ds = 0$$

$$\int_1 \rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + p_1 \vec{n}_1 + \int_2 \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 + p_2 \vec{n}_2 = 0$$

x 方向： $\int_1 \rho_1 v_{1x} (-v_{1x}) - p_1 + \int_2 v_{2x} v_{2x} + p_2 = 0$

$$p_1 + \rho_1 v_{1x}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2x}^2$$

$$[p + \rho v_x^2] = 0$$

y 方向： $\int_1 \rho_1 v_{1y} (-v_{1x}) + \int_2 v_{2y} v_{2x} = 0$

$$[\rho v_x v_y] = 0 \quad (5.2-9)$$

z 方向： $[\rho v_x v_z] = 0 \quad (5.2-10)$

5. 现化分：种情形进行讨论 (Landa 连续介质力学 第二册 §81)

1. 1层流切向间断面 (切向间断)

也即 $P_1 V_{1x} = P_2 V_{2x} = 0$. 由于 P_1, P_2 不等于零, 故有 $V_{1x} = V_{2x} = 0$. (5.2-7) (5.2-9)

(5.2-10) 自动满足. (5.2-6) 式给出 $P_1 = P_2$, 1层流切向间断面的法向

速度连续 $V_{1x} = V_{2x} = 0$. 应该连读 $[P] = 0$, $P_1 = P_2$.

但速度沿切向分量 (即 y, z 分量), 从 (5.2-9), (5.2-10) 可知, V_y, V_z 以及
密度, 既包括除压强外的其余热力学量可以任意改变 (按 (5.2-7) 式可知
 T 可以任意改变). 这种间断面称为切向间断面. 切向间断面不称然.

2. 物质流以及与之相伴的 V_{1x}, V_{2x} 都是零

由 (5.2-5) $P_1 V_{1x} = P_2 V_{2x}$

$$(5.2-9) \quad P_1 V_{1x} V_{1y} = P_2 V_{2x} V_{2y}$$

$$(5.2-10) \quad P_1 V_{1x} V_{1z} = P_2 V_{2x} V_{2z}$$

$$\therefore [V_y] = 0, \quad [V_z] = 0$$

即切向速度在断面上是连续的，但密度、压强和其他热力学量从1指向2时都有改变，该差值可由[(5.2-5) — (5.2-8)]定。

$$\therefore \rho_1 V_{1x} = \rho_2 V_{2x}, \quad V_{1y} = V_{2y}, \quad V_{1z} = V_{2z}$$

$\therefore (5.2-7)$ 中的 V^2 可写成

$$V_1^2 = V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2, \quad V_2^2 = V_{2x}^2 + V_{2y}^2 + V_{2z}^2$$

代入 $(5.2-7)$ 中。

$$\frac{1}{2} V_{1x}^2 + C_p T_1 = \frac{1}{2} V_{2x}^2 + C_p T_2$$

$$\left[\frac{1}{2} V_x^2 + C_p T \right] = 0$$

所以断面上必须满足的条件为

$$[\rho V_x] = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} V_x^2 + C_p T \right] = 0$$

$$[P + \rho V_x^2] = 0$$

$$[P] = [R \rho T]$$

6 Mach 数

引进无量纲量 $M = \frac{V}{a_s}$, 式中 V : 气体质点的速度, a_s : 当地声速. M 称为 Mach 数, 是可压缩流体中最主要的相似参数之一. 表征可压缩流动的特性.

① Mach 数标志气体的压缩程度

a. 当气体作为理想 ($\gamma=0$), 静止 ($P=P_0$), 外力零时, 对于定常运动 则以运动方程可得到 Bernoulli 方程:

$$\frac{V^2}{2} + \tilde{V} + \Pi = C(\gamma)$$

加速度 $\vec{a} = -\nabla \tilde{V}$, \tilde{V} 为外力势. $\Pi = \int \frac{dp}{\rho_0 P_0}$, Π 为压力指数

(同一流线上取同一常数值. 不同流线上常数值不同, C 是流线号码的系数. 对于理想绝热可压缩流体, 压强和密度有关系.

$$P \rho^{-\gamma} = K(\gamma), \text{ 与流线号 } \gamma$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{K(\gamma)}{P^\gamma}$$

$$\text{压力指数 } \Pi = \int \frac{dp}{\rho_0 P_0} = \int \frac{K(\gamma)}{P^\gamma} dp = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}$$

$$\frac{V^2}{2} + \tilde{V} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = C(\gamma)$$

$$\text{若外力可忽略, 则有 } \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = C(\gamma)$$

[附: 压力指数 Π . \because 运动方程中有一次 $\frac{1}{\rho} \nabla P$, 希望之有 $\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla \Pi$.

$$\text{若 } \Pi = \int \frac{dp}{\rho_0 P_0}, \therefore P = P_0 \rho, \therefore d\Pi = \frac{dp}{\rho} \Rightarrow \nabla \Pi = \frac{1}{\rho} \nabla P]$$

b. 气体的压力和它的流速的关系

当气体的流速不太大时, 可以忽略密度变化, 压力即密度的变化很小. 因此对于低速流体可近似看作不可压缩.

利用理想绝热完全气体作定常运动时的 Bernoulli 方程. 附录方程及状态方程求出密度 ρ 和速度 V 的关系.

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = C(\gamma)$$

$$P \rho^{-\gamma} = K^\gamma$$

$$\rho = P R T$$

在一条流线上取两点(速度为零)处的 P_0, ρ_0, T_0 为参考值，有

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^r, \quad \frac{P}{P_0} = \frac{PT}{P_0T_0} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{r-1}}$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^r = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{r}{r-1}}$$

这是热力学数 P, ρ, T 之间的关系式

$$当地声速 $a_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho} = \gamma RT$ (已利用状态方程)$$

Bernoulli 积分常数为 C_0 ，当 $V=0$ 时， T_1

$$\frac{V^2}{2} + \frac{f}{\gamma-1} RT = \frac{f}{\gamma-1} RT_0, \text{ 式中 } T_0 \text{ 为 } V=0 \text{ 时的温度。热力学常数。}$$

用 $\frac{a_s^2}{\gamma-1}$ 除上式左边第 - 次， $\frac{f}{\gamma-1} RT (= \frac{a_s^2}{\gamma-1})$ 除左边第 - 次和右边的 - 次

$$\frac{r-1}{2} \left(\frac{V}{a_s}\right)^2 + 1 = \frac{T_0}{T}$$

$$\text{引进 Mach 数 } M = \frac{V}{a_s}, \quad \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{r-1}{2} M^2\right)^{-1}$$

因此 $\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^r = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{r}{r-1}} = \left(1 + \frac{r-1}{2} M^2\right)^{-\frac{r}{r-1}} \dots$ 热力学数与 Mach 数之间的关系。

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{r-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{r-1}}$$

利用参考管上上述关系式。当 $\gamma = \frac{5}{3}$ 时， $\frac{P}{P_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{r-1}{2} M^2\right)^{5/2}}$

可见 M 越大， P 越小， $M=0, P=P_0$ 。运动中的气体密度 P 变小。

当 M 很小时，对 M 表示成以下数

$$\frac{P}{P_0} = 1 - \frac{1}{2} M^2 + \frac{r}{8} M^4 - \dots$$

密度改变率 $- \frac{P}{P_0} = \frac{1}{2} M^2$

$$M = 0.141, \quad \frac{1}{2} M^2 = 0.01 = 1 - \frac{P}{P_0} \quad \text{密度改变率 } 1\%, \text{ 不可压缩}$$

$$M = 0.8 \quad \frac{1}{2} M^2 = 0.32 \quad \text{密度改变率 } 32\% \text{ 可压缩}$$

Mach 数标志气体的压缩程度， M 数大，气体运动引起的密度改变

很大，可将不可压缩流体处理。

② Mach 数代表气体的动压和内能之比

$$\frac{\text{动压}}{\text{内能}} = \frac{\frac{1}{2}V^2}{C_v T} = \frac{\frac{1}{2}V^2}{\frac{R}{k-1} \frac{P}{T}} = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} M^2$$

注意： C_v 的值因 γ 而异，且气体常数 γ 也不同

$$T=0^\circ\text{C} \quad \text{且} \quad T=273^\circ\text{K}, \quad P=1 \text{ 大气压}, \quad 1 \text{ 分子体积 } V_0 = 22.44 \text{ 立方分米}, \quad R \approx 2 \frac{\text{焦耳}}{\text{摩尔}\cdot\text{开}}$$

$$C_v = \frac{3}{2} \text{ K} \quad (\text{当自由度为 3}) \approx 3$$

M 数说明相对于内能，动压很大，速度的变化不会引起温度显著变化。因此在不可压缩流体中，一般认为速度是常数。2. 必考虑质量方程，如果 M 数很大，动压相对于内能很大，小的速度变化都可以引起，但是压缩，导致等温的显著变化，必须计及热力学定律及质量方程。

7. 激波与物理量的关系

借助 Mach 数来表示完全气体。1. 激波前后的物理量之间的关系，现从考虑速度的平方差着手。即 $V_1^2 - V_2^2$ 。
令 $\Delta V = V_1 - V_2$, $\Delta P = P_2 - P_1$, $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta T = T_2 - T_1$ (5.2-1)

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \rho_2 - \rho_1 = \rho_1 (V_1 - V_2) / V_2$$

$$\Delta \rho = \frac{\rho_1 \Delta V}{V_2} = \frac{\rho_1 \Delta V}{V_1 - \Delta V}$$

由 (5.11): $P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$ 可得

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2$$

$$= \rho_1 V_1 (V_1 - V_2)$$

$$\Delta P = \rho_1 V_1 \Delta V$$

(5.12') 式可写成

$$C_p T_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = C_p T_2 + \frac{1}{2} V_2^2$$

$$C_p (T_2 - T_1) = \frac{1}{2} V_1^2 - \frac{1}{2} V_2^2 = \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \Delta V$$

$$\Delta T = \frac{C_p}{\rho_1} (V_1 - \frac{1}{2} \Delta V)$$

$$(S.2-4) \text{ 得 } P_2 - P_1 = R (P_2 T_1 - P_1 T_2), \quad \text{由此得} \quad (T_1 P_1, T_2 P_2, T_1 P_2, T_2 P_1)$$

$$\text{而由式 } \Delta P = R (T_1 \Delta P + P_1 \Delta T + \Delta P_0 T)$$

$$\text{易得: } \left\{ \begin{array}{l} \Delta P = \frac{P_1 \Delta V}{V_1 - \Delta V} \\ \Delta P = P_1 V_1 \Delta V \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta T = \frac{\Delta V}{C_p} (V_1 - \frac{1}{2} \Delta V) \\ \Delta P = R (T_1 \Delta P + P_1 \Delta T + \Delta P_0 T) \end{array} \right.$$

(S.2-9)

(S.2-9) 由上式得 $\Delta P = R (T_1 \Delta P + P_1 \Delta T + \Delta P_0 T)$

$$\Delta V \left[\frac{R}{2C_p} - 1 \right] V_1 = R T_1 - \frac{1}{2} V_1^2$$

$$\Delta V = \frac{R T_1 - \frac{1}{2} V_1^2}{\left(\frac{R}{2C_p} - 1 \right) V_1}$$

$$a_{s1}^2 = \gamma R T_1, \quad M_1 = \frac{V_1}{a_{s1}}$$

$$\Delta V = \frac{2 a_{s1}^2 (M_1^2 - 1)}{(\gamma + 1) V_1}$$

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{2 a_{s1}^2}{V_1} \cdot \frac{M_1^2 - 1}{\gamma + 1} = \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{1}{M_1^2} (M_1^2 - 1)$$

ΔV 代入 (S.2-9) 式得

$$\frac{\Delta P}{P_1} = \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}$$

$$\frac{\Delta P}{P_1} = \frac{2}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1)$$

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \cdot \frac{1}{M_1^2} (M_1^2 - 1) (\gamma M_1^2 + 1)$$

上述各式中 $\Delta V, \Delta P, \Delta P_0, \Delta T$ 由 (S.2-11) 式替代

$$\frac{\Delta V}{V_1} = 1 - \frac{V_2}{V_1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{\gamma+1} \cdot \frac{1}{M_1^2} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)$$

状态熵的表达式

$$\begin{aligned}\Delta S &= S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{P_2}{P_1 T} - C_V \ln \frac{P_1}{P_2 T} \\ &= C_V \ln \left[\frac{P_2}{P_1} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{-r} \right] \\ &= C_V \ln \left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{-r} \right]\end{aligned}$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma-1}$$

$$(P_2, T_2) \Delta S = R \ln \left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{-\frac{r}{\gamma-1}} \right]$$

根据热力学第一定律，分子运动的无序性减少

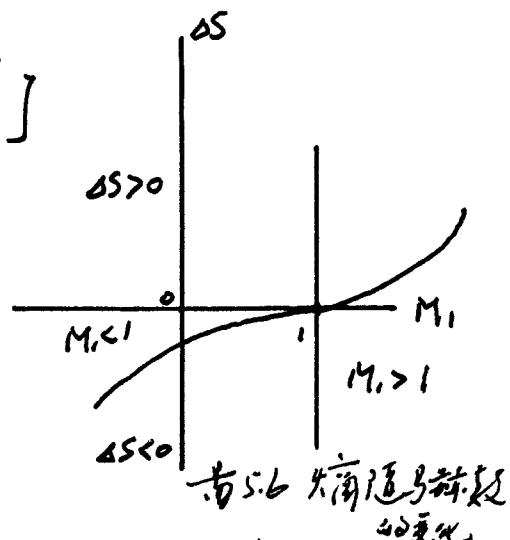
$$S_2 \geq S_1 \quad (5.17)$$

当流速与物理条件相同时，等号成立。

8. 普朗特公式

$$定常速度系数 \lambda = \frac{V}{a}$$

当声速等于流速时 $\lambda = 1$; $a = V$ 为



8. 普朗特公式

定义速度系数 $\lambda = \frac{V}{a_s}$, 当声速等于流速时, 即 $a_s = V_s$, 称为临界声速及临界流速, 此时有 $V = V_s$. 且, 有 $\lambda = 1$. a_s 为临界流速 V_s . 由 $\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{V_s^2}{2} + \frac{a_s^2}{\gamma-1} = C(t)$ 为常数外力时, 定常的可压缩流体的 Bernoulli 方程可写成

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{V_s^2}{2} + \frac{a_s^2}{\gamma-1} = C(t)$$

$$a_s = V = a_{s0} \cdot t, \text{ 有 } \frac{V^2}{2} + \frac{a_s^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_{s0}^2$$

$$a_s^2 = \frac{\gamma(\gamma-1)}{\gamma+1} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{a_{s0}^2}{\gamma-1} \right)$$

$$\lambda^2 = \frac{V^2}{a_s^2} = \frac{V^2}{\frac{\gamma(\gamma-1)}{\gamma+1} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{a_{s0}^2}{\gamma-1} \right)} = \frac{M^2}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^2 + \frac{2}{\gamma+1}} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} M^2}{1 + \frac{2}{\gamma+1} M^2}$$

as < 1

声速 < 流速
不可压缩

声速 > 流速

相同密度均匀流体, 等温流动

1) - 1E.

激波前速度系数 $\lambda_1 = \frac{V_1}{a_{\infty}}$, 激波后 $\lambda_2 = \frac{V_2}{a_{\infty}}$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} = \lambda_1^2$$

因此有 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$

这就是音速比公式.

还可以得到 $\lambda_2^2 = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$, $\lambda_2^2 = \frac{1}{\lambda_1^2}$ 从而可得

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

9. 后激波的结果

i. 激波速度 V 大于激波前的速度 a_1 . 因此有 $M_1 > 1$

ii. 从普朗特公式可知 ① 激波前是超声速流动, 激波后就成为亚声速流, 同时压强, 密度, 温度通过激波后都增加, 称为增密跳跃. ② 激波前是亚声速流, 激波后成为超声速流, 压强, 密度, 温度通过激波后都减少, 称为减密跳跃.

由于激波通过机械能的损耗而增加激波后的压强, 热效和温度, 激波速度应该减小. 从超声速降为亚声速符合物理现实. 增密跳跃是实际情况发生的. 再根据热力学第二定律判断, 第二定律告诉我们, 孤立系大熵减, $\Delta S \geq 0$. 从 ΔS 的表达式得知的 ΔS 和 M_1 的关系量可见, 如果激波前是亚声速, $M_1 < 1$, 则 $\Delta S < 0$, 大熵减. 不符合热力学第二定律. 减密跳跃不可能发生; 如果激波前为超声速 $M_1 > 1$, 由量可见 $\Delta S > 0$, 符合热力学第二定律.

激波一旦产生, 大熵一定增加, 不可能保持不变, $\Delta S = 0$ 只有当 $M_1 = 1$ 即在左逆间断时才不成立.

iii. 因为只有增密跳跃符合实际, 物理意义更深刻, 下表所示 (正常机理的运用)

V	M	λ	P	ρ	T	a	i	U	S
\searrow	\searrow	\searrow	\nearrow						

运动学量下降, 热力学量上升

IV. 理想气体

$$\text{当 } M_1 = 10, \gamma = 1.4$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 5.714, \quad \frac{T_2}{T_1} = 20.39, \quad \frac{P_2}{P_1} = 116.5, \quad M_2 = 0.3876$$

$$\text{当 } M_1 \rightarrow \infty, \gamma = \frac{5}{3}$$

$$M_2 \rightarrow \sqrt{\frac{r-1}{2r}} = 0.447$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \rightarrow \infty$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 4$$

$$\frac{T_2}{T_1} \rightarrow \infty$$

文后注：对于压缩和膨胀还有下表表示：

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{V_1^2}{a_{s_1}^2} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{P_1 V_1^2}{\gamma P_1}$$

$$P_2 \rightarrow \frac{3}{4} P_1 V_1^2 \quad (\text{当 } M_1 \rightarrow \infty \text{ 时, 若 } V_1 \rightarrow \infty, \therefore P_2 \rightarrow \infty)$$

$$\frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} M_1^2 = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \cdot \frac{V_1^2}{\gamma T_1}, \quad a_{s_1}^2 = \gamma R T_1$$

$$T_2 \rightarrow \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{V_1^2}{R} \quad (\text{当 } M_1 \rightarrow \infty \text{ 时, 若 } V_1 \rightarrow \infty, \text{ 则 } T_2 \rightarrow \infty)$$

$$k_B = \frac{R}{N}, \quad k_B: \text{Boltzmann 常数. } \left(\frac{\text{尔格}}{\text{度}} \right)$$

$$R: \text{气体常数 } \left(\frac{\text{尔格}}{\text{度}\cdot\text{摩尔}} \right)$$

$$N: \text{阿伏伽德罗常数 } \left(\frac{1}{\text{摩尔}} \right)$$

$$\mu: -\frac{1}{2} \text{ 气体分子的内能. } \left(\text{因为分子的平均数为 } 1 \right)$$

$$k_B T_2 \rightarrow \frac{3}{16} \mu V_1^2$$

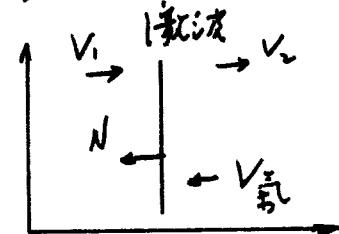
当 $M_1 \rightarrow \infty$ 时, 已知

$$\Delta S = R \ln \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} + R \ln \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{1}{\gamma-1} \ln(M_1^2)$$

$$\frac{\partial S}{R} \rightarrow \frac{2}{T_1} \ln M_1 \rightarrow \infty$$

可见当 $M_1 \rightarrow \infty$ 时, $\frac{P_2}{P_1}, \frac{T_2}{T_1}, \dots, M_1^2$ 的值趋于 ∞ . $\frac{P_2}{P_1}, \frac{V_2}{V_1}, M_2$ 为有限值.

V. 上述正激波理论的坐标系取在激波上, 即激波不动, 和未取一静止坐标系, 激波相对此坐标系以速度 N 向左运动. (参见图), 则激波前后的气流相对静止系的速度分别为 $V_1 - N$ 和 $V_2 - N$. V_1, V_2 是相对于激波的速度. (参见图)



激波前后热力学量: γ, k, η

因坐标位置而改变. 当 $N = V_1$ 时, 表示静止坐标系中, 激波前的气流速度为零. 激波后的气流速度, 相对于静止系为 $V_2 - N = V_2 - V_1 < 0$ 表示激波后的气体跟随激波向左运动 ($V_2 < V_1$, 可以上述激波前后的速度式中得知)

激波以超声速 N 即 V_1 相对于气流中向左运动 (假设 $N = V_1$), 激波相过后的气流则以原来的静止态, 变成以 $V_2 - V_1$ 的速度运动, 或以 $V_1 - V_2$ 的速度向右运动. 激波相对于激波后的气流是以超声速运动. 由已知, 激波的速度 $N = 0 - V_1 = V_1$ (参见激波前气流静止), 激波后的速度 $V_2 + (-V_1) = V_2 - V_1$ (相对于静止系), 则激波相对于 (激波后气流) $-V_1 - (V_2 - V_1) = -V_2$, V_2 为超声速向左运动.

V_2 为超声速 \Rightarrow 马赫判别式判定.

如果激波前气流相对于激波并不静止, 即 $V_1 (=N) \rightarrow V_1' = V_1 + \frac{1}{\gamma-1} \frac{V_1^2}{2}$

VI. 激波强度趋于零时的情况

设激波前气流和静止坐标系中速度为零, 即 $-N + V_1 = 0$, 激波后气流速度为 $-V_2$ (随激波向左运动), V_2 为相对于激波速度(向左)

$$-V_2 = V_2 + (-N) = V_2 - N, \quad V_2' = N - V_2 = V_1 - V_2$$

$$V_1 - N = V_{\text{激波}} \quad \therefore V_2 = V_{\text{激波}} - V_2'$$

$$\therefore V_1 = P_1 V_1, \text{ 式中 } V_1, V_2 \text{ 为相对于激波速度}$$

$$P_1 V_{\text{激}} = P_2 (V_{\text{激}} - V_{\text{气}}) \quad (\text{静止系中}) \quad (5.2-10)$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (\text{流波参考系})$$

$$P_2 - P_1 = \rho_1 V_{\text{激}}^2 - P_2 (V_{\text{激}} - V_{\text{气}})^2$$

$$= \rho_1 V_{\text{激}}^2 - P_2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} V_{\text{激}} \right)^2$$

$$= \rho_1^2 V_{\text{激}}^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$$

$$= \frac{\rho_1 V_{\text{激}}^2}{\rho_2} (P_2 - P_1)$$

$$V_{\text{激}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{P_2 - P_1}{P_2 - P_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

激波强度可以由 $(M_1^2 - 1)$ 表示，也可用 $\frac{P_2}{P_1}$ 表示。当激波强度趋于零时， $P_2 \rightarrow P_1$, $\rho_2 \rightarrow \rho_1$

$$V_{\text{激}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} \quad \text{成为声速} \quad (5.2-11)$$

由 (5.2-10)

$$\frac{V_{\text{激}} - V_{\text{气}}}{V_{\text{激}}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \therefore -\frac{V_{\text{气}}}{V_{\text{激}}} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2}$$

$$\frac{V_{\text{气}}}{V_{\text{激}}} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$$

当激波强度趋于零时, $V_{\text{激}} \rightarrow c_s$ (声速)

$$P_2 - P_1 \rightarrow \rho' \cdot \rho_2 \rightarrow \rho_1, \quad \therefore \frac{V_{\text{气}}}{c_s} = \frac{\rho'}{\rho_1}$$

$\rho' \ll \rho_1$, 即以流体质量的运动速度远大于声速, 远大于扰动时的情况, 说明当激波强度趋于零时, 激波退化成扰动源, 声波可以看作强度无限小的激波。

VII. 我们已知有限振幅的压缩波一定是激波, 激波传播后将如何速度奇进而以激波和扰动能量的变化。

$$P.191 \text{ 上已列} \frac{P_2}{P_1} = \frac{\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \text{ 可求出}$$

$$M_1^2 = \frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P_2}{P_1}$$

$$\text{1. 马赫波速度 } V_{1\text{气}} = V_1 = M_1 a_s = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{2}} a_s,$$

$$\text{已知} \frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}$$

$$V_2 = V_{1\text{气}} - V_{\text{气}}, \quad V_1 = V_{1\text{气}}$$

$$\frac{V_{1\text{气}} - V_{\text{气}}}{V_{1\text{气}}} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}$$

$$V_{\text{气}} = \left[\frac{2}{\gamma+1} - \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} \right] V_{1\text{气}} = \frac{2}{\gamma+1} \left[1 - \frac{1}{M_1^2} \right] M_1 a_s,$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\gamma} \left[\frac{\frac{P_2}{P_1} - 1}{(\gamma-1) + (\gamma+1) \frac{P_2}{P_1}} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot a_s}, \quad (V_{\text{气}} > a_s)$$

知道 M_1 后, 马赫波速度及其它物理量 P_2, T_2 等也可求出。

下表列出不同 $\frac{\Delta P}{P_1}$ 时的 $M_1, V_{1\text{气}}, V_{\text{气}}, \frac{\Delta P}{P_1}, \Delta T$ 的数据
 $(\Delta P = P_2 - P_1, \Delta P = P_2 - P_1, \Delta T = T_2 - T_1)$

该表对空气 $\gamma = 1.4, P_1 = 1 \text{ 大气压}, T_1 = 288^\circ K$

VIII 为了维持马赫波以不变的速度向右传播 (见图)

活塞必须以 $V_{\text{气}}$ 的速度向右移动, 这样活塞与

相接触的气体具有完全相同的速度, 对马赫波后的气体不产生任何扰动, 可使马赫波以不变速度和等强度继续向右传播。从活塞的观察者, 活塞以 $V_{\text{气}}$ 速度向右运动, 马赫波以 $V_{\text{气}}$ 速度向右运动, 对气体作了功, 增加了被压缩波和过压缩的能量

$$\begin{aligned}
 V_{\text{气}} &\text{ 相对于马赫波后速度} \\
 &\rightarrow a_{s2} \\
 T_2 &= 88 + 288 = 375 \\
 a_{s2} &= 368 \text{ m/s} > V_{\text{气}} = 244 \\
 T_2 &= 7250 + 288 \\
 &= 8.038 \times 10^3 \\
 a_{s2} &= 1.4 \times 8.038 \times 10^3 = 10.28 \times 10^3 \\
 &= 1.8 \times 10^4 \\
 &= 1800 \text{ m/s} \\
 &= 1800 \text{ m/s} > 1800 \\
 T &= \frac{V_{\text{气}}^2}{M} \quad V_{\text{气}} = 33 \text{ m/s} > 1800 \\
 R &= 8.31 \times 10^{-7} \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}
 \end{aligned}$$

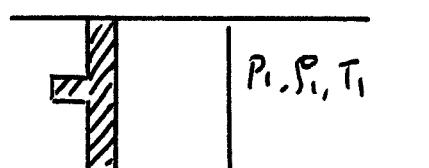


图 5.7 活塞以 $V_{\text{气}}$ 速度

表3

M_1	$\Delta p/p_1$	$\Delta \rho/\rho_1$	ΔT °C	$v_{\text{微}} (\text{米}/\text{秒})$	$v_{\text{气}} (\text{米}/\text{秒})$
1	0	0	0	340	0
1.47	1.39	0.31	87	500	224
2.94	9.20	2.77	465	1000	734
5.90	40.3	4.20	1926	2000	1511
8.80	92.3	4.58	5940	3000	2380
11.80	185	4.72	7750	4000	3300

为了维持激波以不变的强度向右传播，流速必须以 $v_{\text{气}}$ 的速度

IX. 若流塞 c 大于 $V_{\text{气}}$ 的速度向右推动, 则被激波扫过的气体将不断受到压缩. 压缩波相对于激波后运动的流体而言以声速传播. 由于激波前的亚声速相对于激波后的气体传播, 压缩波的速度大于激波前的速度. 压缩波将会追上激波, 从而加强激波强度, 激波将以更快的速度向右方冲击气体中传播.

X. 如果流塞 c 小于 $V_{\text{气}}$ 的速度运动, 则激波后的气体不断受到膨胀(疏松), 膨胀波相对于激波后的气体也是声速传播. 因此它要赶上激波, 从而削弱激波强度, 使激波向右方冲击气体中的传播速度减慢. 所以如果流塞由 $V_{\text{气}}$ 减速直至停止, 那么一系列膨胀波便依次减弱并渐弱, 最后完全消失.

10. 热力学第二定律：绝热系统熵减少。完全气体 $S = C_V \ln(\frac{P}{P_0}) + \text{const.}$
前面已求得 $S_2 > S_1$ 。
 \rightarrow (5.26)

激波有以下特点：

- i. 激波速度 V_1 必大于激波前气体的声速 a_{s1} , 因此 $M_1 \geq 1$ (5.18)
- ii. 激波后气体的速度 $V_2 \leq a_{s2}$. 因此在激波多普勒. 激波前无超声速流动. 激波后是亚声速流
- iii. 激波是有压作用

$$P_2 \geq P_1 \quad \rightarrow \text{(5.28)}$$

$$\rho_2 \geq \rho_1 \quad \rightarrow \text{(5.29)}$$

$$\text{因为 } P_1 V_1 = P_2 V_2, \text{ 则 } V_2 \leq V_1$$

前面已求得 $T_2 > T_1$, 激波使流过的气体减压. 也有加热作用. 也就是说
通过激波的作用把流动转换成热能

$$\text{IV. } S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{P_2}{P_1} - Y C_V \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

S_1, P_1, ρ_1 视作确定的常数 (由状态方程, T_1 从而也确定, 声速 a_{s1} 也确定)
 P_2, ρ_2 通过 Mach 数 M_1 确定 (即 $P_2 \propto V_1^2$)

2. 比式微分 (化简下标以加重常量)

$$dS_2 = C_V \frac{dP_2}{P_2} - \frac{\gamma C_V}{P_2} dP_2$$

或由 $S_2 - S_1 = C_V \ln \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right] - \gamma C_V \ln \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}$ 可得

$$\frac{dS_2}{dM_1} = \frac{4\gamma(\gamma-1)(M_1^2-1)^2 C_V}{M_1 [2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)] [2 + (\gamma-1) M_1^2]} \quad (S.22)$$

考察 $\frac{dS_2}{dM_1} \approx 0$ 且 $\gamma \geq 1$, $\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \geq 1$

有 $2\gamma M_1^2 - (\gamma-1) \geq 0$

$$\therefore \frac{dS_2}{dM_1} \geq 0 \quad (S.23) \quad (S.30)$$

随 M_1 增加, S_2 也随之增加

当 $M_1 = 1$ 时 有 $P_2 = P_1, P_0 = P_1, S_2 = S_1$

由 (S.22) 式, $S_2 \geq S_1, S_2 - S_1 \geq 0 \quad \therefore dS_2 \geq 0$ 从 (S.23) 可知 $dM_1 \geq 0$

积分该式得 $S_2 \geq S_1$, 且 $M_1 \geq 1$

(iv. 中的内容为 Priest 所示内容)

5.3. 磁流体力学流波

1. 间断条件

在流体力学的基础上加入磁场

$$\text{质量守恒: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\int_C \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad *$$

$$\text{动量守恒: } \rho \frac{D \vec{v}}{Dx} = -\nabla (P + \frac{1}{2} \mu \vec{B}^2) + \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\vec{B} \vec{B})$$

$$\text{左边} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

连续性方程: 巴肃 \vec{v} 且 $\vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \vec{v} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$, 与动量方程相加

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \vec{v} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -\nabla (P + \frac{1}{2} \mu \vec{B}^2) + \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\vec{B} \vec{B})$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial x} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla (P + \frac{1}{2} \mu \vec{B}^2) + \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\vec{B} \vec{B})$$

$$\int_C \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial x} dx + \int_S ((\rho \vec{v} \vec{v} + P \vec{I} + \frac{1}{2} \mu \vec{B}^2 \vec{I} - \frac{1}{\mu} \vec{B} \vec{B}) \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad *$$

能量守恒:

$$\text{我们以前已得到过能量方程 } \rho \frac{D e}{Dx} + P \vec{v} \cdot \vec{v} = -\mathcal{L} \quad (2.28 h)$$

e : 内能, P : 压强, \mathcal{L} : 阻耗系数

$$\mathcal{L} = \vec{v} \cdot \vec{g} + L_r - \vec{j} \cdot \vec{A} - H$$

\vec{g} : 重力矢量, L_r : 产耗热(热源), H : 其他热源项和损失。

(设为零) $[H = P\varepsilon + H_0 + H_w, \varepsilon: \text{核能}, H_0: \text{辐射耗散}, H_w: \text{潜加热}]$

$$\therefore \mathcal{L} = \vec{v} \cdot \vec{g} - \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot \vec{A}, \quad \vec{j}: \text{电流密度, 换耗只在微波区 } \approx 10^4 \text{ to } 10^6 \text{ G} \rightarrow \infty$$

$$\text{运动方程 } \rho \frac{D \vec{v}}{Dx} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{F}$$

式中 $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_L$, \vec{F}_g : 重力, \vec{F}_L : 阻耗力, 且认为 $\vec{j} \cdot \vec{F} = 0$

运动方程=巴肃乘 \vec{v}

$$\rho \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2} \vec{v}^2) = -\vec{v} \cdot \nabla P + \vec{v} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) \quad (2.39)$$

(2.28h) + (2.39)

$$\rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{1}{2} V^2) = -\mathcal{E} + \vec{V} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) - \nabla \cdot (\rho \vec{V})$$

Ohm 定律: $\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{\delta}$ (对于高斯介质, $\vec{\delta} \propto \text{ohm 逆} \propto \text{电流密度}$)

$$\begin{aligned} \text{; 也是乘 } \vec{j}. \vec{E} \cdot \vec{j} &= -(\vec{V} \times \vec{B}) \cdot \vec{j} \\ &= \vec{V} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

能量守恒化成:

$$\rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{1}{2} V^2) = -\mathcal{L} + \vec{E} \cdot \vec{j} - \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = -\nabla \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} - \nabla \cdot (\rho \vec{V})$$

该式的获得已作假设为: 不计材料常数而将 P 视为标量; 不计辐射和其它热源的能量; 不计重力. 激波视作理想气体.

$$\begin{aligned} \text{式中: } \vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu} [-\nabla (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E})] \\ &= -\nabla \cdot \vec{S} + \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \\ &= -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} \\ &= -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\eta}{\rho t} W \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{Poynting 矢量})$$

$$W = \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \quad (\text{热能密度})$$

改写能量方程左边:

$$\rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{1}{2} V^2) = \rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{1}{2} V^2) - \rho (e + \frac{1}{2} V^2) \nabla \cdot \vec{V} + \rho (e + \frac{1}{2} V^2) \nabla \cdot \vec{V}$$

利用连续性方程 $\frac{DP}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}$, 代入后可得

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{1}{2} V^2) &= \frac{D}{Dt} [\rho (e + \frac{1}{2} V^2)] + \rho (e + \frac{1}{2} V^2) \nabla \cdot \vec{V} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\rho (e + \frac{1}{2} V^2)] + \vec{V} \cdot \nabla [\rho (e + \frac{1}{2} V^2)] + \rho (e + \frac{1}{2} V^2) \nabla \cdot \vec{V} \\ &= \frac{1}{\rho t} [\rho (e + \frac{1}{2} V^2)] + \nabla \cdot [\rho (e + \frac{1}{2} V^2) \vec{V}] \\ &\quad = -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{\eta}{\rho t} W - \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \end{aligned}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{S} = 0.$$

利用 $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$, 消去方程中的 \vec{E} .

$$\frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} (-\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} [-(\vec{V} \cdot \vec{B}) \vec{B} + \vec{B}^2 \vec{V}]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(e + \frac{1}{2}V^2) + w] + \nabla \cdot [\rho(e + \frac{1}{2}V^2) \vec{V} - \frac{1}{\mu}(\vec{V} \cdot \vec{B}) \vec{B} + \frac{1}{\mu} B^2 V + P \vec{V}] = 0$$

质量守恒的积分形式式

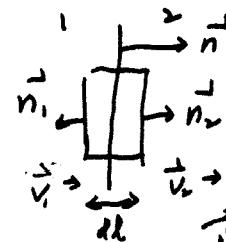
$$\int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(e + \frac{1}{2}V^2) + w] d\tau + \int_S [\rho(e + \frac{1}{2}V^2) \vec{V} - \frac{1}{\mu}(\vec{V} \cdot \vec{B}) \vec{B} + \frac{1}{\mu} B^2 V + P \vec{V}] \cdot \vec{n} ds = 0$$

跨过间断面的体积元 $d\tau = dl d\sigma$, dl 为长, $d\sigma$ 为有限底面积, $\vec{B} dl \rightarrow 0$
有 $d\tau \rightarrow 0$, 体积分项为零, 面积分项为 $\frac{1}{2} B^2 dl$, 跨过间断面的
守恒定律变为:

$$质量守恒: [\rho \vec{V} \cdot \vec{n}] = (\rho_+ \vec{V}_+ - \rho_- \vec{V}_-) \cdot \vec{n} = 0$$

$$动量守恒: [\rho \vec{V} \vec{V} \cdot \vec{n} + (P + \frac{1}{\mu} B^2) \vec{n} - \frac{1}{\mu} \vec{B} \vec{B} \cdot \vec{n}] = 0$$

$$能量守恒: [\{\rho(e + \frac{1}{2}V^2) \vec{V} + \frac{1}{\mu} B^2 V - \frac{1}{\mu}(\vec{V} \cdot \vec{B}) \vec{B} + P \vec{V}\} \cdot \vec{n}] = 0$$



(5.19)
横流
5.19

再加些电磁场的边界条件: 磁场的法向分量连续, 电场的切向分量
连续

$$[\vec{B}_n] = 0$$

$$[\vec{E}_t] = 0$$

$$\vec{E}_t = \vec{n} \times \vec{E}, \quad \vec{n} \text{ 为间断面的法向}$$

上述守恒定律可改写为

$$[\rho V_n] = 0$$

$$(5.31) \text{ 法向动量守恒定律: } [\rho V_n + P + \frac{1}{\mu} B^2 - \frac{1}{\mu} B_n^2] = 0 \quad (5.31)$$

$$(5.32) \text{ 切向动量守恒定律: } [\rho V_n V_t - \frac{1}{\mu} B_n B_t] = 0 \quad (5.32)$$

$$(5.33) \text{ 式 包含 } \Rightarrow \text{ 分量式 } \vec{v} = \hat{x} \hat{i} + \hat{y} \hat{j}$$

$$质量守恒: [\rho V_n (e + \frac{1}{2}V^2) + P V_n + \frac{1}{\mu} B^2 V_n - \frac{1}{\mu} (\vec{V} \cdot \vec{B}) B_n] = 0 \quad (5.34)$$

$$(5.34) \text{ 且 } B = B_n + B_t, \quad \vec{V} \cdot \vec{B} = (\vec{V}_n + \vec{V}_t) \cdot (\vec{B}_n + \vec{B}_t) = \vec{V}_t \cdot \vec{B}_n + \vec{V}_n \cdot \vec{B}_t \\ (\vec{V}_t \cdot \vec{B}_n = \vec{V}_n \cdot \vec{B}_t = 0)$$

同上 (5.34) 可得:

$$[\rho V_n (e + \frac{1}{2}V^2) + P V_n + \frac{1}{\mu} V_n B_t^2 + \frac{1}{\mu} V_n B_n^2 - \frac{1}{\mu} B_n (\vec{V}_t \cdot \vec{B}_t) - \frac{1}{\mu} B_n (\vec{V}_n \cdot \vec{B}_n)] = 0 \quad (5.35)$$

$$\vec{V}_n \parallel \vec{B}_n, \text{ 且式 } \frac{1}{\mu} \vec{V}_n \cdot \vec{B}_n - \rho = \frac{1}{\mu} V_n B_n$$

$$[\rho V_n (e + \frac{1}{2} V^2) + P V_n + \frac{1}{\mu} V_n B_n^2 - \frac{1}{\mu} B_n (\vec{V}_n \cdot \vec{B}_n)] = 0 \quad (5.36)$$

$$[B_n] = 0 \quad (5.37)$$

由理想流体的条件 $\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B}$

$$[\vec{E}_t] = [\vec{n} \times \vec{E}] = -[\vec{n} \times (\vec{V} \times \vec{B})] = 0$$

矢量式: $\vec{n} \times (\vec{V} \times \vec{B}) = \vec{V}(\vec{n} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{V} \cdot \vec{n}) = \vec{V} B_n - \vec{B} V_n$

$$[\vec{V} B_n - \vec{B} V_n] = 0$$

法向分量 $[V_n B_n - B_n V_n] = 0$

也即圆柱面上 $B_n = V_n$ (法向分量为零, 这是显然的). 因而 \vec{B}_n 本身是切向分量
切向分量 $[\vec{V}_t B_n - \vec{B}_n V_n] = 0 \quad (5.38)$

现在共有 8 个方程, (5.31), (5.32), (5.33) [色金子方程], (5.36)

(5.37), (5.38) [色金子方程] 和 $V_{n2}, B_{n2}, P_2, P_1, \vec{V}_{c2}$ ($A=7$ 个)

\vec{B}_{c2} ($=7$ 个) 共 8 个未知数 [内侧已从 (5.36) 中出现, 可忽略]
若后由 P, P 的表达式 (可得色金子方程) 和 $e = \frac{1}{r_1} \frac{P}{P_1}$ 代入, 即得

下面的连带试看减少未知数, 减少方程数.

令 $j = \rho V_n$, 利用 (5.31): $\int_1^2 V_{n1} = \int_2 V_{n2}$, $j_1 = j_2 = j$ 是一个已知量.

$$(\because j_1 = \rho_1 V_{n1}, \rho_1 \neq 0)$$

由 (5.37) 得 $B_{n1} = B_{n2}$ 也为已知. (因此 \vec{B}_n 为常量). 于是: $\vec{V}_{c2}, \vec{B}_{c2}, P_2, P_1$
由量. 于是 $V = \frac{1}{\rho}$, (5.32) 式可得

$$[\rho V_n^2 + P + \frac{1}{2\mu} B_n^2 - \frac{1}{\mu} B_n] = [j^2 V + P + \frac{1}{2\mu} B_n^2 - \frac{1}{\mu} B_n] \\ = j^2 [V] + [P] + [\frac{1}{2\mu} B_n^2] = 0 \quad (5.39)$$

其中利用了 $B = B_c + B_n$, $[B_n] = B_{n2} - B_{n1} = 0$. (5.39) 式为 (5.33) 式的等价形式.

切向动量守恒. 从 (5.33) 式: $j[\vec{V}_t] - \frac{1}{\mu} B_n [\vec{B}_c] = 0 \quad (5.40)$

\vec{E}_t 为连读. 从 (5.38) 式: $B_n [\vec{V}_t] - j[V \vec{B}_c] = 0 \quad (5.41)$

利用 $PV_n = PV_n \frac{e}{\rho} + jN P$, (5.36) 式可写成

$$j[e + \frac{1}{2}V^2 + PV] + [\frac{1}{\mu}V_n \vec{B}_c^2] - \frac{1}{\mu}B_n[\vec{V}_c \cdot \vec{B}_c] = 0$$

$$V^2 = V_c^2 + V_n^2 \quad \text{代入上式}$$

$$j[e + PV + \frac{1}{2}V_c^2 + \frac{1}{2}V_n^2] + [\frac{1}{\mu}V_n \vec{B}_c^2] - jB_n[\frac{1}{\mu j} \vec{V}_c \cdot \vec{B}_c] = 0$$

$$j[e + PV + \frac{1}{2}V_n^2 \frac{e^2}{\rho^2}] + [\frac{1}{\mu} \vec{B}_c^2 V_n \frac{e^2}{\rho^2}] + \frac{1}{2}j[V_c^2] - jB_n[\frac{1}{\mu j} \vec{V}_c \cdot \vec{B}_c] = 0$$

$$j[e + PV + \frac{1}{2}j^2 N^2] + j[\frac{1}{\mu} \vec{B}_c^2 N] + \frac{1}{2}j[(\vec{V}_c - \frac{1}{\mu j} B_n \vec{B}_c)] - [\frac{\vec{B}_n^2}{2\mu j} \cdot \vec{B}_c^2] = 0 \quad (5.42)$$

(5.40) 式可改写成

$$j[\vec{V}_c - \frac{1}{\mu j} B_n \vec{B}_c] = 0, \quad \text{代入 (5.42). 1 行}$$

$$j[e + PV + \frac{1}{2}j^2 N^2] + j[\frac{1}{\mu} \vec{B}_c^2 N] - \frac{\vec{B}_n^2}{2\mu j} \cdot \vec{B}_c^2 = 0 \quad (5.43)$$

(5.39), (5.40), (5.41), (5.43) 为 6 个方程, 可解出 $\vec{V}_c, \vec{B}_c, P_2, P_2$ 内 N, e 的表达式, 得到与上面对应的方程组如上.

现将问题归结为: 运动学关系已知下, 适用于一般情况, 即可用电描述斜微波.

$$\text{质量守恒} \quad j = PV_n, \quad N = \frac{1}{\rho}, \quad B = B_n$$

$$\text{动量的横向分量守恒: } j[N] + [P] + \frac{1}{\mu} B_n \vec{B}_c^2 = 0 \quad (5.39)$$

$$\text{动量的纵向分量守恒: } j[\vec{V}_c] - \frac{1}{\mu} B_n [\vec{B}_c] = 0 \quad (5.40)$$

$$\vec{E}_c \text{ 连续: } B_n [\vec{V}_c] - j[N \vec{B}_c] = 0 \quad (5.41)$$

$$\text{能量守恒: } j[e + PV + \frac{1}{2}j^2 N^2] + j[\frac{1}{\mu} \vec{B}_c^2 N] - \frac{\vec{B}_n^2}{2\mu j} \cdot \vec{B}_c^2 = 0 \quad (5.43)$$

2. 穿射问题

$j=0$, 表示没有物质穿射问题, $B_n \neq 0$

$$\text{由 (5.40) 式得: } [\vec{B}_c] = 0 \quad (5.44)$$

$$(5.41) \text{ 式得: } (\vec{V}_c) = 0$$

$$\text{由 (5.39) 及 (5.44) 得: } [P] = 0$$

以上各式表示切向 $\vec{B}_{C_1} = \vec{B}_{C_2}$, $\vec{V}_{C_1} = \vec{V}_{C_2}$, $P_1 = P_2$, 而密度 ρ 可以改变
 $\because \rho_1 V_{n_1} = \rho_2 V_{n_2} = 0$, ^{这有物理意义} 且 $V_{n_1} = V_{n_2} = 0$, ρ_1, ρ_2 可以任意值, 相对于间断面 $= 120^\circ$ 的一个原因.

3. 动向间断

$$j=0, B_n=0$$

$$\text{由 (5.39) 式推得: } [P + \frac{1}{2\rho} \vec{B}_C^2] = 0$$

与流体力学的动向间断相等, 从 (5.40) 式可得. 没有磁场时, $j[\vec{V}_C] = 0$.
 $\therefore j=0$, 边的 \vec{V}_C 可以任意值. (可参见流体力学教科书动向间断的讨论).

磁流体力学的动向间断也和动向间断面 $= 120^\circ$ 可以有相对流动. 但总压强相等. 因为从 (5.40) 式可直接得出 $j[\vec{V}_C] = 0$, ($B_n = 0$).

5.3.4. 計算問題

$$j \neq 0, [V] = 0$$

$\therefore [V] = 0$. 即 $\left[\frac{1}{\rho} \right] = 0$. 表示著垂直速度不外於. 沒有垂直速度.

由 (5.44) 式: $B_n [\vec{V}_c] - j [V \vec{B}_c] = 0$ 可得 $B_n [\vec{V}_c] - j [V \vec{B}_c] = 0$, $j \neq 0$

$[\vec{V}_c]$ 代入 (5.44) : $j [\vec{V}_c] - \frac{1}{\mu \rho} B_n [\vec{B}_c] = 0$, 得

$$j^2 = \frac{B_n}{\mu V}$$

$(5.3-14)$ (5.42)

$$\text{此即 } P_1 V_{n1}^2 = \frac{B_{n1}^2}{\mu \frac{1}{\rho_1}}$$

$$V_{n1}^2 = \frac{B_{n1}^2}{(\mu \rho_1)} = V_{A1}^2$$

因此問題即 $[V] = 0$, 即 $P_1 = P_2$. $\because B_{n1} = B_{n2}, j \neq 0$. $\therefore V_{A1} = V_{A2}$.

問題即 $P + \frac{1}{\rho} B_c^2$ 通過 \vec{V} . 且沒有垂直速度.

通過 $[V] = 0$, 由 $(5.3-9)$ 式. 可推得

$$\left(P + \frac{1}{\rho} B_c^2 \right) = 0 \quad (5.3-15)$$

(5.43) \vec{V} 為

$$[e] + V \left[P + \frac{1}{\rho} B_c^2 \right] + V \left[\frac{1}{\rho} B_c^2 \right] - \frac{B_n^2}{2 \mu j^2} [B_c^2] = 0 \quad (5.44)$$

$(5.3-16)$

其中已利用 $\left[\frac{1}{\rho} j^2 V^2 \right] = \frac{1}{\rho} j^2 [V^2] = 0$.

$(5.42), (5.3-15)$ 代入 $(5.3-16)$ 中. 得

$$[e] = 0$$

(5.45)
 $(5.3-17)$

$$\text{因此 } e = \frac{P}{(\gamma - 1) \rho} \quad \therefore [e] = \frac{1}{\gamma - 1} [PV] = \frac{1}{\gamma - 1} V [P] = 0$$

因此 $[P] = 0$

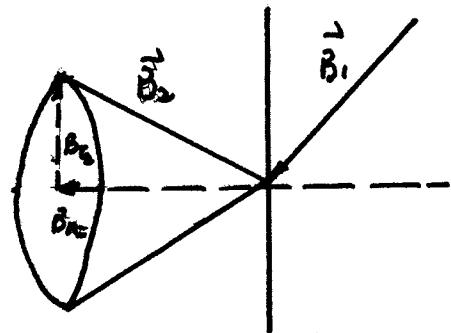
$\therefore [V] = 0, [P] = 0$. 由 $(5.3-9)$ 式可得 $[B_c^2] = 0$ (5.46)

$(5.3-18)$ 式表示. \vec{B}_c 可以改變方向. 但大小不變.

而已指出磁場的垂直分量是實 $[B_n] = 0$. \vec{B}_c 的方向可變. 大小不變. $\therefore \vec{B}_c = \vec{B}_{n2} + \vec{B}_{c2}$, $|\vec{B}_{n2}| = |\vec{B}_{c2}|$

\vec{B}_2 為次進行螺旋面上。

\vec{B}_T 的变化即为转动，平行于剪断面，剪断面以 $Af_{\text{剪}}^{\text{转}}$ 速度转动（至无数据），转动的结果就体现在剪断面后碎块的转动。（图5.9）



5.355. 濟瀆

$j=0$, $[V]=0$, 这时就有激励, 其特征是有无
位通过间断面, 并有密放改变.

第5.9 旋转矩阵

：碰撞衝擊波兩半尼奧(Hugoniot)關係

$$\begin{aligned} & \text{(5.461)} \\ & \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \vec{B}_n [V_0] - i [W \vec{B}_0] = 0 \end{aligned}$$

$$B_n[\vec{V}_c] = j[N\vec{B}_c]$$

$$(5.40) \quad j[\vec{V}_c] - \frac{1}{\mu} B_n[\vec{B}_c] = 0$$

$$j[\vec{V}_c] = \frac{i}{\mu} B_n [\vec{B}_c]$$

$$\text{如果 } \vec{B}_c = \frac{1}{\mu_0 j} \vec{B}_n \quad [\vec{V}\vec{B}_c] = [\vec{V}\vec{B}_n] \quad (5.4)$$

$$\text{即 } \left(\frac{1}{\mu_2 j^2} B_n^2 - W_2 \right) \vec{B}_{T_2} = \left(\frac{1}{\mu_1 j^2} B_n^2 - W_1 \right) \vec{B}_{T_1}$$

$$\therefore \vec{B}_{C_2} = \vec{B}_{C_1}$$

問評述， \vec{B} 的切向分量平行。($\text{第} 310$)

$$\text{第8}: \begin{array}{l} (5.40) \\ (5.320) \end{array} \text{ 式: } j[\vec{V}_c] - \frac{1}{\mu} B_n [\vec{B}_c] = 0$$

可以看作 $[V_i]$ 和 $[B_i]$

从 (5.47) 式可看出无论 $B_n=0$ 或是 $B_n\neq 0$,切向分量 τ_n 的值都应为 0 .

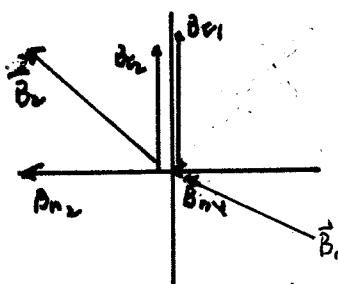
$$\text{d}(\vec{B}_n) \vec{v}_t : j[\vec{v}_t] - \frac{i}{\mu} B_n [\vec{B}_t] = 0$$

$$(i.41) \quad (i.341) \text{ 证: } B_n[\vec{V}_t] - j[\nabla \vec{B}_t] = 0$$

$$\text{消去 } [\vec{V}_c] \text{ 得: } j^2 [N \vec{B}_c] = \frac{1}{\mu_0} \partial_n^2 [\vec{B}_n]$$

因为 $\tilde{B}_{G_1} \cap \tilde{B}_{G_2}$, 可以去掉单点记号

$$\tilde{j}[\nabla B_0] = \frac{1}{\mu} \tilde{B}_0[B_0]$$



第5.10 激波前后的磁场分量

$$B_n^2 = \mu j^2 \frac{[V B_C]}{[B_C]} \quad (5.49)$$

从动量的横向分量方程 (5.3-9) 式可以得出

$$j^2 = - \frac{[P] + [\frac{1}{2\mu} B_C^2]}{[V]} \quad (5.50)$$

而已求得 (5.3-13) 式, 得

$$[e + PV + \frac{1}{2} j^2 V^2] + [\frac{1}{\mu} B_C^2 V] - \frac{B_n^2}{2\mu j^2} [B_C^2] = 0$$

将 (5.49) 代入上式 $\frac{B_n^2}{2\mu j^2} \rightarrow 0$. (5.50) 代入 第一次. 93 页

$$[e + PV] - \frac{[P] + [\frac{1}{2\mu} B_C^2]}{[V]} [V^2] + [\frac{1}{\mu} B_C^2 V] - \frac{1}{2\mu} \frac{[B_C^2][VB_C]}{[B_C]} = 0$$

$$[V^2] = V_2^2 - V_1^2 = (V_2 + V_1)[V]$$

$$[e + PV] - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \left\{ [P] + [\frac{1}{2\mu} B_C^2] \right\} + [\frac{1}{\mu} B_C^2 V] - \frac{1}{2\mu} \frac{[B_C^2][VB_C]}{[B_C]} = 0 \quad (5.51)$$

$$\text{或} [PV] - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) [P] = P_2 V_2 - P_1 V_1 - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) (P_2 - P_1) \\ = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) [V]$$

$$(5.51) \text{ 或} : - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \left[\frac{1}{2\mu} B_C^2 \right] + [\frac{1}{\mu} B_C^2 V] - \frac{1}{2\mu} \frac{[B_C^2][VB_C]}{[B_C]}$$

$$= - \frac{1}{4\mu} (V_1 + V_2) (B_{C_2}^2 - B_{C_1}^2) + \frac{1}{\mu} (B_{C_2}^2 V_2 - B_{C_1}^2 V_1) - \frac{1}{2\mu} \frac{(B_{C_2}^2 - B_{C_1}^2)(V_2 B_C - V_1 B_C)}{(B_{C_2} - B_{C_1})}$$

$$= \frac{1}{4\mu} [B_C]^2 [V]$$

最后得方程 (5.3-13) 式变成:

$$[e] + \frac{1}{2} \left\{ P_1 + P_2 + \frac{1}{2\mu} [B_C]^2 \right\} [V] = 0 \quad (5.52)$$

或者写成

$$(e_2 - e_1) + \frac{1}{2} (P_1 + P_2) (V_2 - V_1) + \frac{1}{4\mu} (B_{C_2} - B_{C_1})^2 (V_2 - V_1) = 0$$

这就是磁流体力学的西半尼奥夫律, 当磁场为零或者 B_1, B_2 都平行于波传播方向时 ($B_{C_0} = B_{C_1} = 0$), 就回到流体力学的西半尼奥夫律

$$(e_2 - e_1) + \frac{1}{2} (P_1 + P_2) (V_2 - V_1) = 0$$

由牛顿奥莫定律可知对于 $\eta=1$ 的压缩机来说，它的作用功理为流体($\eta=0$)绝热变化时的 $P_0^{\gamma-1} = \text{const}$ 。所起的作用相同。只是对于液体而言，当进行了耗散过程， $P_0^{\gamma-1} = \text{const}$ 不再成立。

ii. 磁流体力学激波的压缩性质

以磁流体力学的绝热定律(牛顿奥莫定律)和熵增定律来推导激波的压缩性质。即 $P_2 > P_1$, $V_2 > V_1$

对于完全气体 $e = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}$ 代入 (5.52) 式，有

$$\frac{1}{\gamma-1} (P_2 V_2 - P_1 V_1) + \frac{1}{2} (P_1 + P_2 + P_1 b^2) (V_2 - V_1) = 0 \quad (5.53)$$

式中 $P_1 b^2 = \frac{1}{2\mu} [\vec{B}_0]^2 = \frac{1}{2\mu} (\vec{B}_{0x} - \vec{B}_{0y})^2$ (因为已取得 $\vec{B}_{0x}, \vec{B}_{0y}$ ，且仅关心 b^2 不影响结果。又 $B_{0x} = B_{0y}$ ，即 $\vec{B}_{0x} = \vec{B}_{0y}$)，加入上式中得

$$P_1 b^2 = \frac{1}{2\mu} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)^2$$

$$b^2 = \frac{1}{2\mu P_1} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)^2$$

令 $R = \frac{P_2}{P_1}$ (激波强度)， $X = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_1}{V_2}$ (激波的压缩比)

将 P_1, V_2 换为 R, X 。

$$\frac{1}{\gamma-1} (R - X) + \frac{1}{2} (1 + R + b^2) (1 - X) = 0$$

$$R = \frac{(\gamma+1)X - (\gamma-1) + (\gamma-1)(X-1)b^2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)X}$$

令 $a = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$ 代入

$$R = \frac{ax - 1 + (x-1)b^2}{a-x} = \frac{(a+b^2)x - (1+b^2)}{a-x} = (a+b^2) \frac{x - \frac{1+b^2}{a+b^2}}{a-x} > 0 \quad (5.54)$$

$R = \frac{P_2}{P_1} > 0$ 则 $R > 0$ 时式成立

为使上述 $R > 0$ 式成立，必须 $\frac{1+b^2}{a+b^2} < x < a$ (x 为上述条件下的压缩比， $x > 1$ 需要证明 $x > 1$)

记得 $a > 1$ ， $\therefore \frac{1+b^2}{a+b^2} < 1$ 。再利用熵增加原理。

熵 $S = C_V \ln \frac{P_2}{P_1}$ (今常数为零)

$$\begin{aligned} \text{增加温度后熵增加量, 令 } \frac{P_2}{P_1} - \frac{P_1}{P_2} > 0 \\ \frac{P_1}{P_2} (R - x^r) > 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$x = \frac{P_1}{P_2} \quad \text{若 } f_1(x) = x^r \text{ 曲线}$$

$$R = \frac{P_2}{P_1} \quad \text{若 } f_2(x) = (a+b)^{\frac{x}{a-x}} \quad (\text{图5.11})$$

$\exists x=1$ 时, $R=x^r=1$, (5.3-24) 式等价.

$$\text{对于气体动力学 } b=0, R = \frac{ax-1}{a-x}$$

我们来证明若 $x>1$ 时有 $\frac{ax-1}{a-x} - x^r > 0$,

$$x<1 \text{ 时 } \frac{ax-1}{a-x} - x^r < 0, \quad (5.56)$$

大于零的情况即熵增加, $x>1$ 表示系统是压缩的.

小于零的情况为熵减少, $x<1$ 即表示系统变稀疏, 是由于反应热力学第二定律 (5.3-24) 式表示热力学 $x>1$ 或 $x<1$ 的情况)

$$\text{证: } \exists x>1, \text{ 令 } \frac{ax-1}{a-x} - x^r = \frac{ax-1 - x^r(a-x)}{a-x} > 0,$$

$$\because x<a \quad \therefore a-x>0, \quad \therefore ax-1 - x^r(a-x) > 0 \quad \text{即 } x<1 \text{ 时, } ?>0.$$

$$\text{设 } F(x) = ax-1 - x^r(a-x)$$

$$\exists x=1 \quad F(x)=0$$

$$F'(x) = a - arx^{r-1} + (r+1)x^r$$

$$F'(1) = a - ar + r + 1 = 0 \quad (a = \frac{r+1}{r-1} \text{ 代入})$$

$$F''(x) = -ar(r-1)x^{r-2} + (r+1)rx^{r-1}$$

$$= rx^{r-2}[-a(r-1) + (r+1)x]$$

$$= rx^{r-2}[-(1+r) + (r+1)x]$$

$\exists x>1$, 可见 $F''(x)>0$, 因此 $F'(x)$ 是增函数

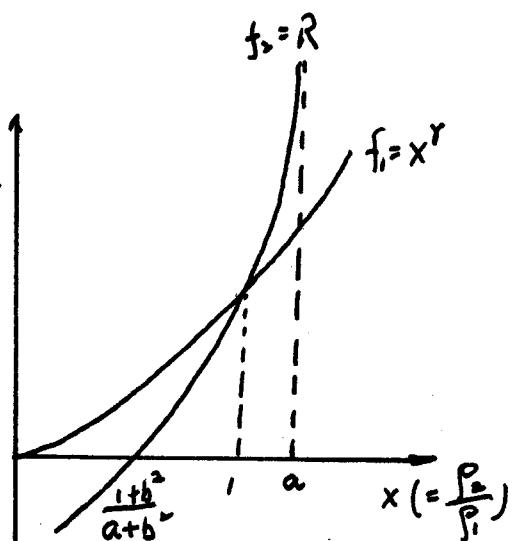


图5.11 热流体膨胀后, 熵增加

$\because F'(1)=0$, 既若 $F'(x)$ 为增函数, 则 $x>1$ 时, $F'(x)>0$, 因此可得
到结论: $x>1$ 时, $F(x)$ 为增函数

$\because F(1)=0$, $F(x)$ 为增函数 $\therefore F(x)=ax-1-x^r(a-x)>0 \quad (x>1 \text{ 时成立})$
因为 $F(x)$ 为增函数 $\therefore x<1$ 时, $F(x)<F(1)$

$$\frac{ax-1}{a-x} - x^r > 0 \quad \text{当 } x>1 \text{ 时.}$$

$$\frac{ax-1}{a-x} - x^r < 0 \quad \text{当 } x<1 \text{ 时}$$

实际上我们需求的是 $R-x^r>0$, $R=(a+b^2) \frac{x-\frac{1+b^2}{a+b^2}}{a-x} = \frac{ax-1+b^2(x-1)}{a-x}$
 $\frac{(5.5b)}{\text{且 }} R>x^r$ 时, 多一次 $\frac{b^2(x-1)}{a-x}$, 当 $x>1$ 时, 该次大于零. $x<1$ 时, 该次小于零.
因此我们有结论:

$$R-x^r = (a+b^2) \frac{x-\frac{1+b^2}{a+b^2}}{a-x} - x^r$$

相加的结果

1. 当 $x=1$ 时, 上式 = 0. 且商不变, $\frac{P_2}{P_1}=1$, 没有微波

2. 对 $x>1$ 时, $R>x^r$. 且商增加, $1 < x < a$. 有微波, 有压缩, $x=\frac{P_2}{P_1}>1$.

3. 对 $x<1$ 时, $R<x^r$. 且商减少, $\frac{P_2}{P_1}<1$. 违反热力学第二定律.

事实上从图上的函数图上就可得出上述结论. 以上的证明只运用分析的方法进一分析.

5.3.6 磁场与波和慢波

我们下面要推导的方程式：

$$[\nabla \vec{B}_c] = \frac{\partial^2}{\mu j} [\vec{B}_c] \quad \text{磁场切向分量的方程式,} \quad (5.3-8) (5.47)$$

$$[\vec{V}_c] = \frac{\partial n}{\mu j} [\vec{B}_c] \quad \text{动量切向分量守恒} \quad (5.3-10) (5.48)$$

$$j^2 [V] + [P] + \left[\frac{1}{2\mu} B_c^2 \right] = 0 \quad \text{动量切向分量守恒} \quad (5.3-9) (5.49)$$

$$[e + PV] + j^2 \left[\frac{1}{2} V^2 \right] + \left[\frac{1}{\mu} B_c^2 V \right] - \frac{[\nabla B_c][B_c]}{2\mu[B_c]} = 0 \quad \begin{matrix} \text{(利用5.49式)} \\ \text{能量守恒} \end{matrix} \quad (5.53) \quad (5.3-23)$$

$$[e] + \frac{1}{2} \left\{ P_1 + P_2 + \frac{1}{2\mu} [B_c]^2 \right\} [V] = 0 \quad \text{西格尼奥关系} \quad (5.3-22)$$

~~(5.3-23) 式的推导:~~

~~已知 (5.3-20) 式为 $j^2 [\nabla B_c] = \frac{1}{\mu} B_n^2 [B_c]$, 将 B_n^2 代入 能量守恒表达式:~~

$$j[e + PV + \frac{1}{2} j^2 V^2] + j \left[\frac{1}{\mu} B_n^2 V \right] - \frac{B_n^2}{2\mu j} [B_c] = 0 \quad \text{约去 } \frac{1}{\mu} B_n^2 \text{ 一次, 得到}$$

$$j[e + PV + \frac{1}{2} j^2 V^2] + j \left[\frac{1}{\mu} B_c^2 V \right] - \frac{1}{2\mu} j \frac{[\nabla B_c][B_c]}{[B_c]} = 0.$$

$$[e + PV] + j^2 \left[\frac{1}{2} V^2 \right] + \left[\frac{1}{\mu} B_c^2 V \right] - \frac{[\nabla B_c][B_c]}{2\mu[B_c]} = 0 \quad \text{即为 (5.3-23) 式.}$$

沿向速度 V_{n1}, V_{n2}

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

$$j \cup \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = x$$

慢波沿向速度 V_{n1} 大, 快波沿向速度 $V_{n2} < V_{n1}$.

$$\begin{aligned} [\nabla B_c] &= V_{n2} B_{c2} - V_{n1} B_{c1} + N_2 B_{c1} - N_1 B_{c2}, \\ &= V_{n2} (B_{c2} - B_{c1}) + B_{c1} (N_2 - N_1) \\ &= V_{n2} [B_c] + B_{c1} [V] \end{aligned}$$

所以 $[\nabla B_c]$ 也可这样写

$$\begin{aligned} [\nabla B_c] &= V_{n1} B_{c2} - V_{n2} B_{c1} + N_1 B_{c2} - N_2 B_{c1} \\ &= V_{n1} [B_c] + B_{c2} [V] \end{aligned}$$

二式相加得式 2

$$[V B_C] = \frac{V_1 + V_2}{2} [B_C] + \frac{B_{C1} + B_{C2}}{2} [V]$$

$$= \tilde{V} [B_C] + \tilde{B}_C [V]$$

式中 $\tilde{V} = \frac{1}{2} (V_1 + V_2)$, $\tilde{B}_C = \frac{1}{2} (B_{C1} + B_{C2})$

代入(5.37)式: $[V B_C] = \frac{\tilde{B}_C^2}{\mu j^2} [\tilde{B}_C]$, 而已知之间断面过 $\tilde{B}_C \neq 0$
且. 失重记号可省略.

$$\tilde{V} [B_C] + \tilde{B}_C [V] = \frac{\tilde{B}_C^2}{\mu j^2} [B_C]$$

$$\tilde{B}_C [V] = \left(\frac{\tilde{B}_C^2}{\mu j^2} - \tilde{V} \right) [B_C] \quad (5.57)$$

动量法向分量守恒(5.39)式可以写为

$$\left(\frac{[P]}{[V]} + j^2 \right) [V] = - \frac{1}{\mu j^2} [B_C^2]$$

式中 $[B_C^2] = B_{C2}^2 - B_{C1}^2 = 2 \tilde{B}_C [B_C]$

$$\therefore \left(\frac{[P]}{[V]} + j^2 \right) [V] = - \frac{1}{\mu j^2} \tilde{B}_C [B_C]$$

由来 \tilde{B}_C : $\left(\frac{[P]}{[V]} + j^2 \right) \tilde{B}_C [V] + \frac{1}{\mu j^2} \tilde{B}_C^2 [B_C] = 0$

上式中由 $\tilde{B}_C [V]$ 由(5.57)式代入, 同时除以 $[B_C]$ 得到

$$\left(\frac{[P]}{[V]} + j^2 \right) \left(\frac{\tilde{B}_C^2}{\mu j^2} - \tilde{V} \right) + \frac{1}{\mu j^2} \tilde{B}_C^2 = 0$$

利用 $\tilde{B}^2 = \tilde{B}_n^2 + \tilde{B}_C^2 = B_n^2 + B_C^2$

上式化为

$$-\left(\frac{[P]}{[V]} + j^2 \right) \tilde{V} + \frac{1}{\mu j^2} \tilde{B}^2 + \frac{[P]}{[V]} \frac{B_n^2}{\mu j^2} = 0$$

由来 $\frac{j^2}{V}$: $j^2 - j^2 \left(\frac{\tilde{B}^2}{\mu V} - \frac{[P]}{[V]} \right) - \frac{[P]}{[V]} \frac{B_n^2}{\mu V} = 0$

$$j^2 \left(j^2 - \frac{\tilde{B}^2}{\mu V} \right) = \frac{[P]}{[V]} \left(\frac{B_n^2}{\mu V} - j^2 \right) \quad (5.58)$$

通过假设 $[P] = P_2 - P_1 > 0$, $[V] = V_2 - V_1 = \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} < 0$

$$\therefore \frac{[P]}{[V]} < 0$$

要求(5.58)式成立，必须等式左边符号与右边相反，即

$(j^z - \frac{\tilde{B}^z}{\mu V})$ 及 $(\frac{B_n^z}{\mu V} - j^z)$ 符号，这两种可能性

$$① j^z > \frac{\tilde{B}^z}{\mu V} > \frac{B_n^z}{\mu V}$$

$$② j^z < \frac{B_n^z}{\mu V} < \frac{\tilde{B}^z}{\mu V}$$

对于例①：

$$\because j = \rho V_{n1} = \frac{V_{n1}}{V_1}, \quad j^z = \frac{V_{n1}^2}{V_1^2}$$

$$j^z > \frac{B_n^z}{\mu V} \Rightarrow \frac{V_{n1}^2}{V_1^2} > \frac{B_n^z}{\mu V}$$

$$V_{n1}^2 > \frac{B_n^z}{\mu V} V_1^2 > \frac{B_n^z}{\mu} V_1 = \frac{B_n^2}{\mu \rho} = V_{A1n}^2$$

$$j^z > \frac{\tilde{B}^z}{\mu V} = \frac{B_n^2 + \tilde{B}_c^2}{\mu V} \Rightarrow \frac{V_{n1}^2}{V_1^2} > \frac{B_n^2 + \tilde{B}_c^2}{\mu V}$$

$$V_{n1}^2 > \frac{B_n^2 + \tilde{B}_c^2}{\mu V} V_1^2 > \frac{B_n^2 + \tilde{B}_c^2}{\mu} V_1 = \frac{B_n^2 + \tilde{B}_c^2}{\mu \rho} = V_{A1c}^2$$

说明光速波前的速度大于光速，称为快波

例③ 为慢波

此根据(5.57)式： $\tilde{B}_c[V] = (\frac{B_n^z}{\mu j^z} - \tilde{V})[B_c]$

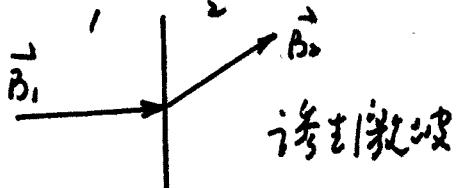
$$① \because [V] < 0, 若 [B_c] > 0, 则 (\frac{B_n^z}{\mu j^z} - \tilde{V}) < 0, 即 \frac{B_n^z}{\mu \rho_j V_{n1}^2} < \tilde{V}$$

$$\frac{B_n^z}{\mu \rho_j} < \rho_j V_{n1}^2 \tilde{V} < V_{n1}^2$$

因此 $[B_c] > 0$ 对应快波

② 若 $[B_c] < 0$ ，是慢波

磁场的切向分量 B_n 连续，所以切向磁场 B_c 的变化会带极化场
场方向的变化。如果慢波前磁场没有切向分量，通过慢波后
产生切向磁场分量，称为透射 (switch-on) 波， $[B_c] = B_{c2} - B_{c1} > 0$
对应快波



激波前有切向分量磁场，通过激波后变成无切向分量，称为消去

(switch-off) 激波 $\{B_C\} = B_{C_0} - B_{C_1} < 0$. 对于慢速激波

因迎面激波 B_2 平向激波方向的传播方向, $B_{2x} < B_{C_1}$

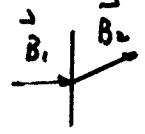
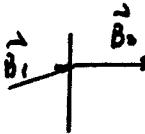
所以总的磁场强度减小。快速激波, B_2 平行的方向

偏高激波方向的方向, $B_{2x} > B_{C_1}$, 磁场强度增加. B_1

故, 通过激波面磁场的切向分量发生了变化

快激波 $V_{n1} > V_{A1}$, 磁场平行激波平行. 因为磁场的切向分量为零.

而此流体的激波面上一极有西电流 (边界条件守恒连续方程 $\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$, ω 为面源, 磁场切向分量不为零, 可见 $\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) \neq 0$)

快激波	$V_{n1} > V_{A1}$	$\{B_C\} > 0$		消去激波	$B_2 > B_1$, B_2 偏高激波方向
慢激波	$V_{n1} < V_{A1}$	$\{B_C\} < 0$		消去激波	$B_2 < B_1$, B_2 平行激波方向

5.4 斜激波

5.4.1 状态关系

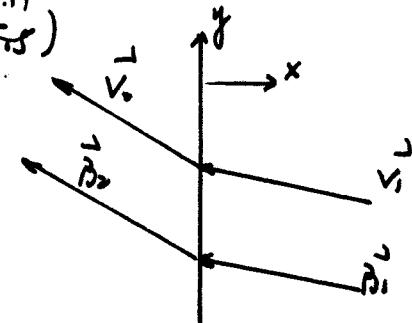
磁场既平行又有垂直于激波方向的分量, (状态 5.11)

速度矢量和磁场矢量平行于平面 (这里 x 不同)

于平面中 n , y 垂直于 x 方向) 守恒方程如下:

$$P_0 V_{nx} = P_1 V_{x1}$$

(5.36)



$$P_0 + \frac{1}{\mu} B_0^2 - \frac{1}{\mu} B_{0x}^2 + P_0 V_{nx}^2 = P_1 + \frac{1}{\mu} B_1^2 - \frac{1}{\mu} B_{1x}^2 + P_1 V_{x1}^2 \quad (5.37) \quad \text{由 } 5.36 \text{ 斜激波}$$

(动量切向分量守恒)

$$P_0 V_{nx} V_{ny} - B_{0y} B_{0x} / \mu = P_1 V_{x1} V_{y1} - B_{1x} B_{1y} / \mu \quad (5.38) \quad (5.37)$$

(动量切向分量守恒)

$$(P_0 + B_0^2 / \mu) V_{nx} - B_{0x} (\vec{B}_0 \cdot \vec{V}_0) / \mu + (P_0 e_0 + \frac{1}{2} P_0 V_{nx}^2 + B_0^2 / \mu) V_{nx}$$

$$= (P_1 + B_1^2 / \mu) V_{x1} - B_{1x} (\vec{B}_1 \cdot \vec{V}_1) / \mu + (P_1 e_1 + \frac{1}{2} P_1 V_{x1}^2 + B_1^2 / \mu) V_{x1} \quad (5.39) \quad (5.37)$$

$$\beta_{xx} = \beta_{yy}$$

$$V_{xy}B_{xy} - V_{yx}B_{yx} = V_{xx}B_{yy} - V_{yy}B_{xx} \quad (5.62)$$

方程 $(5.56-5.63) \Rightarrow$ 我们前面已列出的方程 $(5.59+5.63)$ 是等价的。

$$\text{内能 } e = \frac{P}{(r-1)\rho}$$

(5.59) 式中 $\frac{1}{\mu} B_x$ 代表磁力 $B_x B_y / \mu$ 的 x 分量, 该磁力作用在 $x = \text{const.}$ 上。
 $B_x B_y / \mu$ 为磁力的 y 分量。

$PV_x V_y$ 为跨越激波阵面, 单位面积上, y 分量动量 PV_y 的迁移率
 $(x$ 方向的迁移率)

(5.61) 中的 $B_x (\vec{B} \cdot \vec{v}) / \mu$ 为磁力单位时间所做的功。

$(P + \frac{1}{\mu} B^2) V_x$ 为单位时间所做的功

$(Pe + \frac{1}{2} P V^2 + \frac{1}{\mu} B^2) V_x$ 代表质量 (内能, 动能, 磁能) 跨越激波阵面
 $(x$ 方向的迁移率。 (质量))

(5.61) 中场的切向分量连续, 电场 $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}$ (对于理想导体, 或空间只流)

改变物理量之间的关系在下述条件下可以简化

y 方向激波阵面上速度

$$V_{xy} = V_{xx} \frac{B_{xy}}{B_{xx}} \quad (5.64)$$

因此从 (5.61) 可知 $V_{xy} = V_{xx} \frac{B_{xy}}{B_{xx}}$, (5.61) 式: 也均成立, 选择这样的条件表明高流体的速度化 (激波强度) 与平行于磁场, 电场 \vec{E} 及 Poynting 矢量 $\vec{E} \times \vec{H}$ 均为零。 $(\because \vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B}, \vec{V} \parallel \vec{B})$ 也就和跨越激波阵面的速率相等。 (5.61) 式: 也由磁场有无变化而得 $\vec{E} \times \vec{H}$ 与速率无关。

选择速率平行于磁场, (5.61) 式就可简化成流体力学的形式

$$\frac{Y P_2}{(r-1)\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 = \frac{Y P_1}{(r-1)\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2$$

(可逆等温流动 P. 200-201)

现取 1/2 截面 $x = \frac{P_2}{P_1}$, 声速 $C_{S1} = (\frac{P_1}{\rho_1})^{1/2}$ 和 Aifven 速度 $V_{A1} = \frac{B_1}{(\mu \rho_1)^{1/2}}$ 由
粘滞方程 ($\frac{5.59}{5.36} - \frac{5.64}{5.44}$)

$$1. \frac{V_{2x}}{V_{1x}} = x^{-1} \quad (5.65) \quad (5.44)$$

$$\rho_2 V_{1x} = \rho_1 V_{2x}, \quad \frac{V_{2x}}{V_{1x}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{x}$$

$$2. \frac{V_{2y}}{V_{1y}} = \frac{V_1^2 - V_{A1}^2}{V_1^2 - x V_{A1}^2} \quad (5.66) \quad (5.44)$$

$$3. \frac{B_{2x}}{B_{1x}} = 1, \quad \text{即 } B_{2x} = B_{1x} \quad (1 \text{ 为恒定}) \quad (5.67) \quad (5.45)$$

$$4. \frac{B_{2y}}{B_{1y}} = \frac{(V_1^2 - V_{A1}^2)x}{V_1^2 - x V_{A1}^2} \quad (5.68) \quad (5.46)$$

(5.66) 与 (5.68) 式为求解 V_1 :

$$\text{从 (5.38) 式: } \rho_2 V_{2x} V_{2y} - \rho_1 V_{1x} V_{1y} = B_{2x} B_{2y}/\mu - B_{1x} B_{1y}/\mu$$

$$V_{2y} - V_{1y} = \frac{1}{\mu} \frac{B_{1x}}{\rho_1 V_{1x}} (B_{2y} - B_{1y})$$

$$\frac{V_{2y}}{V_{1y}} - 1 = \frac{1}{\mu} \frac{B_{1x}}{\rho_1 V_{1x}} \cdot \frac{1}{V_{1y}} (B_{2y} - B_{1y})$$

$$\therefore V_{1y} = V_{1x} \frac{B_{1y}}{B_{1x}} \quad (5.69) \quad \text{代入上式}$$

$$\frac{V_{2y}}{V_{1y}} - 1 = \frac{1}{\mu} \frac{B_{1x}^2}{\rho_1 V_{1x}^2} \left(\frac{B_{2y}}{B_{1y}} - 1 \right)$$

$$V_1^2 = V_{1x}^2 + V_{1y}^2 = V_{1x}^2 + V_{1x}^2 \left(\frac{B_{1y}}{B_{1x}} \right)^2$$

$$= V_{1x}^2 \frac{B_1^2}{B_{1x}^2}, \quad (B_1^2 = B_{1x}^2 + B_{1y}^2)$$

$$\therefore B_{1x}^2 = \frac{B_1^2 V_{1x}^2}{V_1^2}, \quad \text{代入 } \left(\frac{V_{2y}}{V_{1y}} - 1 \right) \text{ 表达式}$$

$$\frac{V_{2y}}{V_{1y}} - 1 = \frac{1}{\mu} \frac{B_1^2}{\rho_1 V_1^2} \left(\frac{B_{2y}}{B_{1y}} - 1 \right) = \frac{V_{A1}^2}{V_1^2} \left(\frac{B_{2y}}{B_{1y}} - 1 \right),$$

根據 E 切向分量連線的表達式^(5.63) (5.41), 有

$$B_{ix}(V_{xy} - V_{iy}) = V_{ix}B_{xy} - V_{ix}B_{iy}$$
$$= V_{ix}(\frac{1}{x}B_{xy} - B_{iy})$$

$$\frac{V_{xy}}{V_{iy}} - 1 = \frac{V_{ix}}{B_{ix}V_{iy}} (\frac{1}{x}B_{xy} - B_{iy})$$

V_{iy} ^(5.64) _(5.42) 代入

$$\frac{V_{xy}}{V_{iy}} - 1 = \frac{1}{x} \frac{B_{xy}}{B_{iy}} - 1$$

已求得 $\frac{V_{xy}}{V_{iy}} - 1 = \frac{V_{A_i}^2}{V_i^2} (\frac{B_{xy}}{B_{iy}} - 1)$

$$\therefore \frac{V_{A_i}^2}{V_i^2} (\frac{B_{xy}}{B_{iy}} - 1) = \frac{1}{x} \frac{B_{xy}}{B_{iy}} - 1$$

$$(\frac{1}{x} - \frac{V_{A_i}^2}{V_i^2}) \frac{B_{xy}}{B_{iy}} = 1 - \frac{V_{A_i}^2}{V_i^2}$$

$$\frac{B_{xy}}{B_{iy}} = \frac{(V_i^2 - V_{A_i}^2)x}{V_i^2 - xV_{A_i}^2}$$

$$\frac{V_{xy}}{V_{iy}} = \frac{1}{x} \frac{B_{xy}}{B_{iy}}$$
$$= \frac{V_i^2 - V_{A_i}^2}{V_i^2 - xV_{A_i}^2}$$

$$5. \frac{P_2}{P_1} = x + \frac{(Y-1) \times V_1^2}{2C_S^2} \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2}\right) \quad (5.69)$$

由題意知： $\frac{5.61}{5.69}$ 設立方程：

$$\begin{aligned} \text{左邊} &= P_2 V_{2x} + \frac{1}{\mu} B_2 V_{2x} - B_{2x} (B_{2x} V_{2x} + B_{2y} V_{2y}) \cdot \frac{1}{\mu} + P_2 e_2 V_{2x} + \frac{1}{2} P_2 V_2^2 V_{2x} + \frac{1}{2} B_2^2 V_{2x} \\ &= P_2 V_{2x} + \frac{1}{\mu} B_2 V_{2x} - \frac{1}{\mu} B_{2x} V_{2x} - \frac{1}{\mu} B_{2x} B_{2y} V_{2y} + P_2 e_2 V_{2x} + \frac{1}{2} P_2 V_2^2 V_{2x} \\ &= \text{右邊} \end{aligned}$$

$$= P_2 V_{2x} + \frac{1}{\mu} B_2 V_{2x} - \frac{1}{\mu} B_{2x} V_{2x} - \frac{1}{\mu} B_{2x} B_{2y} V_{2y} + P_2 e_2 V_{2x} + \frac{1}{2} P_2 V_2^2 V_{2x}$$

左邊第 2 次約去右邊第 2 次，得：

$$P_2 V_{2x} - P_1 V_{1x} = V_{2x} (P_2 - \frac{V_{2x}}{V_{2x}} P_1) = V_{2x} (P_2 - P_{1x}) \quad (\text{已約去 } \frac{V_{2x}}{V_{2x}}) \quad (5.61-1)$$

左邊第 1 次約去右邊第 1 次，得：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu} B_{2y}^2 V_{2x} - \frac{1}{\mu} B_{1y} V_{1x} - \frac{1}{\mu} B_{2x} B_{2y} V_{2y} + \frac{1}{\mu} B_{1x} B_{1y} V_{1y} + \frac{P_2}{\gamma-1} V_{2x} - \frac{P_1}{\gamma-1} V_{1x} \\ &+ \frac{1}{2} P_2 V_2^2 V_{2x} - \frac{1}{2} P_1 V_1^2 V_{1x} \\ &= \frac{1}{\mu} V_{2x} B_{1y} \left(\frac{B_{2y}^2}{B_{1y}} - x \right) - \frac{1}{\mu} B_{1x} (B_{2y} V_{2y} - B_{1y} V_{1y}) + \frac{V_{2x}}{\gamma-1} (P_2 - P_{1x}) + \frac{1}{2} V_{2x} (P_2 V_2^2 - P_1 V_1^2) \\ &\quad (\text{已約去 } \frac{V_{2x}}{V_{2x}}) \quad (5.61-2) \quad (\text{已約去 } \frac{V_{1x}}{V_{1x}}) \quad (5.61-3) \\ &= \frac{1}{\mu} V_{2x} B_{1y} \left[\left(\frac{V_{2y}}{V_{1y}} \right)^2 x^2 - x \right] - \frac{1}{\mu} B_{1x} B_{1y} V_{1y} \left(\frac{B_{2y}^2}{B_{1y}} \cdot \frac{V_{2y}}{V_{1y}} - 1 \right) + \frac{V_{2x}}{\gamma-1} (P_2 - P_{1x}) + \frac{1}{2} V_{2x} (P_2 V_2^2 - P_1 V_1^2) \\ &= \frac{1}{\mu} V_{1x} B_{1y} \left[\left(\frac{V_{2y}}{V_{1y}} \right)^2 x^2 - 1 \right] - \frac{1}{\mu} V_{1x} B_{1y} \left[\left(\frac{V_{2y}}{V_{1y}} \right)^2 x - 1 \right] + \frac{V_{2x}}{\gamma-1} (P_2 - P_{1x}) + \frac{1}{2} V_{2x} (P_2 V_2^2 - P_1 V_1^2) \\ &= \frac{V_{2x}}{\gamma-1} (P_2 - P_{1x}) + \frac{1}{2} V_{2x} (P_2 V_2^2 - P_1 V_1^2) \end{aligned} \quad (5.61-2) \quad (5.61-3)$$

$(5.61-1)$ 與 $(5.61-2)$ 之和為零

$$\begin{aligned} &V_{2x} (P_2 - P_{1x}) + \frac{V_{2x}}{\gamma-1} (P_2 - P_{1x}) + \frac{1}{2} V_{2x} (P_2 V_2^2 - P_1 V_1^2) \\ &= \frac{V_{2x}}{\gamma-1} (P_2 - P_{1x}) V_{2x} + \frac{1}{2} V_{2x} P_2 V_2^2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{V_{2x}}{\gamma-1} \left(P_2 - \frac{P_1}{\gamma-1} - x \right) = \frac{1}{2} P_2 V_2^2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2}\right)$$

$$\text{由 } \frac{P_2}{P_1} = x + \frac{V_{2x}}{2C_S^2} V_1^2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2}\right) \text{ 得}$$

实际上, 在均匀流速下: $\vec{V}_1 \parallel \vec{B}_1$, 已有能量方程形式

$$\frac{Y^2}{(r-1)P_2} + \frac{1}{2} V_2^2 = \frac{Y^2 P_1}{(r-1)P_1} + \frac{1}{2} V_1^2$$

(S.5.4.1)

从上式可得

$$\frac{Y}{r-1} \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{P_2}{P_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \frac{1}{2} (V_1^2 - V_2^2)$$

$$\frac{P_2}{P_1} - x = \frac{Y-1}{2Y} V_1^2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right) \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = x + \frac{Y-1}{2Y} \frac{\rho_1}{P_1} \times V_1^2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right)$$

$$= x + \frac{Y-1}{2C_s^2} \times V_1^2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right)$$

压强的 X 方程

$$(V_1^2 - x V_1^2)^2 \left\{ x C_s^2 + \frac{1}{2} V_1^2 \cos^2 \theta [x(r-1) - (r+1)] \right\} + \frac{1}{2} V_{1n}^2 V_1^2 \sin^2 \theta \times \left\{ [r+x(2-r)] V_1^2 - x V_1^2 [(r+1) - x(r-1)] \right\} = 0$$

(S.5.6.9)

由此可知, 式中 θ 必上满足两个条件 (1) 它必须为直角, 以保证流体沿流动方向的平行; (2) 它必须为锐角, 以便于流体向右流动.

$$V_{1x} = V_1 \cos \theta$$

(S.6.9) 式有了两个限制条件, 即左支波和右支波, 中间 (Aifven) 波. 和快慢波

(S.5.12) (S.5.4.8) 为两个条件

在前两个条件下, 式 (S.5.8) 才成为方程, 是 (S.5.27)

$$j'' - j'' \left(\frac{\tilde{B}^2}{\mu \tilde{V}} - \frac{[P]}{[V]} \right) - \frac{[P]}{[V]} \frac{\tilde{B}_{in}^2}{\kappa \tilde{V}} = 0 \quad (S.5.8) \quad (S.5.27)$$

对于弱激波, 若 $x > 1$, $\tilde{V} = \frac{1}{2} (V_1 + V_2) = \frac{1}{2} (\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}) \approx \frac{1}{\rho_1}$

$$\tilde{B}^2 = B_1^2 + B_2^2 = B_n^2 + \frac{1}{4} (B_{in} + B_{ex})^2 \approx B_n^2 + B_{in}^2 = B_1^2$$

$$j = \rho_1 V_{1n} = \rho_1 V_{1x}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho_1 \rho_2} = - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \approx - \frac{1}{\rho^2} d\rho$$

代入 (S.3-27) 式

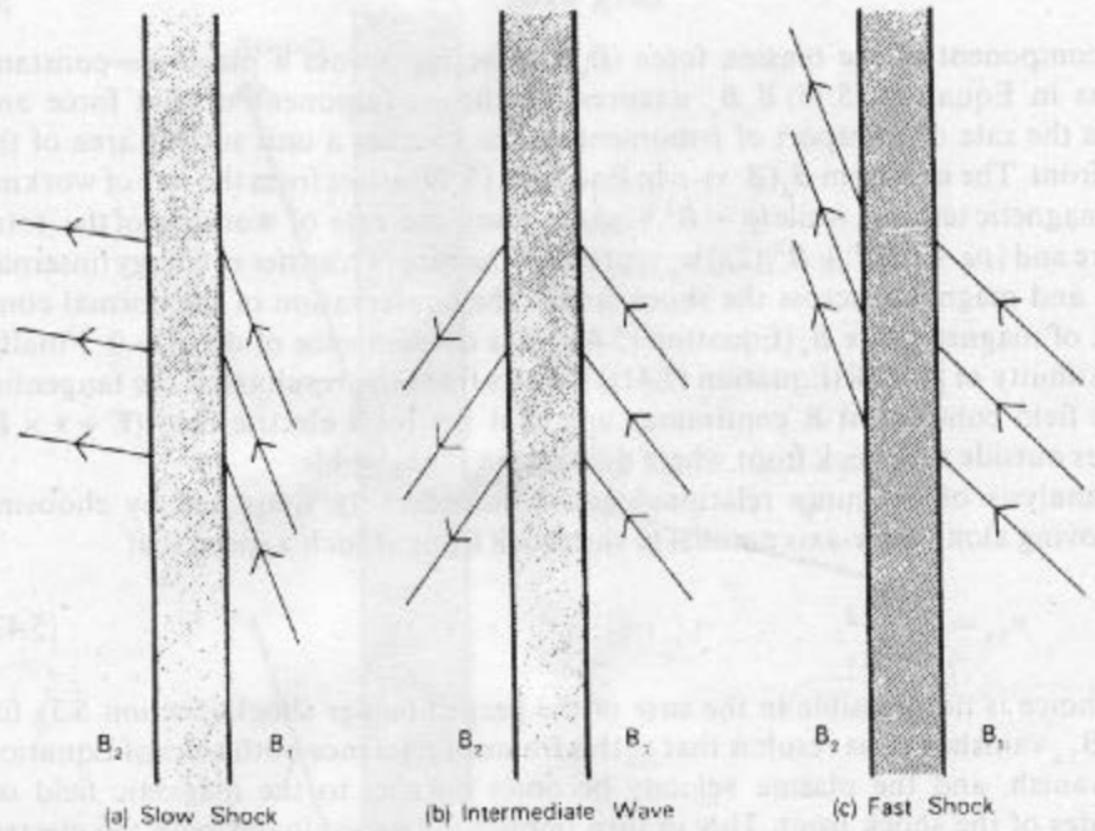


Fig. 5.6. The changes in magnetic field direction that are caused by the three types of oblique wave.

Here X is a solution of

$$\rho_1^4 V_{ix}^4 - \rho_1^2 V_{ix}^2 \left(\frac{B_1^2}{\mu \cdot \rho_1} - \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}} \right) - \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}} \cdot \frac{B_n^2}{\mu \cdot \rho_1} = 0$$

$$V_{ix}^4 - V_{ix}^2 \left(\frac{B_1^2}{\mu \rho_1} + \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{dP}{d\rho} \frac{B_n^2}{\mu \rho_1} = 0$$

对于弱激波 传播速度与声速增加量是平行的。因此对于弱激波 可看作等熵过程 (Landau & Lifshitz, 1959 Fluid Mechanics)

$$\frac{dP}{d\rho} \approx \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s = C_s^2$$

$$V_{ix}^4 - V_{ix}^2 (V_{s1}^2 + C_s^2) + V_{s1}^2 C_s^2 \cos^2 \theta = 0$$

已利用 $B_n = B_1 \cos \theta$

该式为弱声波的速度差值 $(4.6-5)$ 式不同，可见弱激波 ($x \rightarrow 1$)，此过程为 等熵过程。 V_{ix} 即传播中的 V_{n1} ，当 V_{n1} 大于或等于 V_{s1} 分别为 快和慢声波。

5.4.2 快慢激波小结

总结：快慢激波有以下性质：

i. 压缩性 $x > 1, P_2 > P_1$

ii. B_y 的符号不变，即 $\frac{B_{xy}}{B_{yz}} > 0$

从前面 $5.1.2$ 可以看出，对于慢和快激波 $B_{xy} \neq B_{yz}$ (从 5.6 式 (5.46))
看至 2.5.2)

iii. 对于慢激波 $B_2 < B_1, \vec{B}$ 并向高密度波的方向，激波后 B 的强度减弱。

iv. 对于快激波， $B_2 > B_1, \vec{B}$ 并向低密度高速度波的方向，激波后 B 的强度增大。

v. 激波前的流速大于某流速 (破声速)，激波后的流速小于该流速。

也即对于慢激波要超过慢声速，对于快激波要超过快声速，激波前的流速 V_{2x} 必大于慢声速，激波后的流速 V_{1x} 必小于快声速 ($x > 1, \text{且 } \frac{V_{2x}}{V_{1x}} = x^{-1}$ 可看出激波的作用使流速减慢 $|V_{2x} < V_{1x}|$)。切向的流动 (y 方向) 对于慢激波则减慢 ($V_{2y} < V_{1y}$)，对于快激波则加快，(从 (5.66) 和 (5.68) 式可得知)

粗略判断 $\frac{B_{xy}}{B_{yz}} = \frac{V_{2y}}{V_{1y}} x$

vi. 当磁场平行分量趋于零 ($B_{1x} \rightarrow 0$), 磁场变成纯切向场, 快激波变成垂直激波 (perpendicular shock) (§5.13)

对于快激波, 流速要超过快磁声速

$$V_{p+}^2 = \frac{1}{2} (C_{s1}^2 + V_{A1}^2) \left[1 + \left(1 - \frac{2C_{s1}^2 V_{A1} \cos^2 \theta_0}{(C_{s1}^2 + V_{A1}^2)^2} \right) \right] \approx C_{s1}^2 + V_{A1}^2 \quad \text{§5.13 垂直激波}$$

(参见 §5.108) $\theta_0: \vec{k} \text{ 与 } \vec{B} \text{ 之夹角.}$

$$\therefore V_{ix} > V_{p+} \quad (\text{快激波的条件}) \quad \therefore \vec{V}_{ix} \perp \vec{B} \quad (\vec{B} \text{ 的方向})$$

称为 perpendicular 激波

当 $B_{1x} \rightarrow 0$ 时, 快激波退化成切向间断. [流速和磁场均无间断]

而上. (从 $V_{iy} = V_{ix} \frac{B_{1y}}{B_{1x}}$, $V_{iy} \neq 0, B_{1y} \neq 0, B_{1x} \rightarrow 0 \therefore V_{ix} \rightarrow 0$. 造成时

perpendicular shock 参看 §5.101, 书后 P. 201)

$$V_{ix} = V_{oy} = B_{oy} = B_{ox} = 0$$

因此: 密度 $P_2 + \frac{1}{2\mu} B_2^2 = P_1 + \frac{1}{2\mu} B_1^2$ (参看 §5.101). V_y, B_y 可以变化

vii. 考虑 $B_{ox} = B_{1x} \neq 0, V_{oy} = V_{ix} = 0$

磁场线穿过间断面, 但没有物质流动, 可以得到 $[B_z] = 0, [V_z] = 0$.

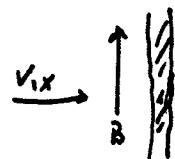
$[P] = 0$ (参看 §5.3.2). 但密度和速度可不连续, 称为

磁场间断

$$B_{1x} = B_{2x} = 0, \text{ 且有切向场}$$

我们讨论的慢和快激波是压缩波, $x > 1_{\text{慢}} (\text{慢})$ 式可知, $P_2 > P_1$

切向磁场分量的符号保持不变, $\frac{B_{1y}}{B_{2y}}$ 由 (见 ii.) 方程 (§5.106) 在已分子和分母都取成负数.



§5.13 垂直激波

$$V_{A1}^2 \cos^2 \theta_0 = \frac{B_{1y}^2}{\mu_1^2} + \frac{B_{1x}^2}{\mu_1^2} \xrightarrow[B_{1x} \neq 0]{\text{慢}} \tan \theta_0 = 0, V_{ix} < V_{p+} = 0$$

$$\vec{B} \perp \vec{n}$$

$$V_{ix} = 0$$

$$1301.1. V_i^2 \leq V_{A1}^2 (< x V_{A1}^2) \quad (V_i, V_{A1} \text{ 为 } x, y \text{ 3 量的合成})$$

从 (5.66) 式 可知 $B_{2y} < B_{1y}$ 即 $[B_2] < 0$. 是消声激波, 磁场方向相反
 $B_2 < B_1$ ($\because B_{1x} = B_{2x}$). 不考虑折向激波情况. (由 $V_i^2 = \frac{1}{\alpha} V_{A1}^2$, $\alpha \geq 1$, 由 (5.68) 式得)

$$1301.2. V_i^2 \geq x V_{A1}^2 (> V_{A1}^2)$$

有 $[B_2] > 0$, 即 $[B_2] > 0$ 是诱导激波, 磁场折向偏高指向, $B_2 > B_1$

5.4.3 中间波 (intermediate wave)

$$\text{从 (5.64) 式: } V_{2y} = V_{1x} \frac{B_{2y}}{B_{1x}} \quad \text{从 (5.61) 式: } V_{2x} B_{2y} - V_{2y} B_{2x} = V_{1x} B_{1y} - V_{1y} B_{1x}$$

$$\text{可得 } V_{2y} = V_{2x} \frac{B_{2y}}{B_{2x}}$$

当激波速度 $A1$ 逆风而进时, 有 $V_i = V_{A1}$ (参见图 5.3.6. $V_{1x} = V_{n1}$ 为
 风向速度, V_{A1} 为 $A1$ 速度. 假设 $V_{n1} = V_{A1}$. 即 速率 $\frac{P_0}{\mu V} W_i = V_{A1}$
 必然 $\tilde{W} = \frac{1}{2} (W_i + V_{n1}) = \frac{1}{2} (\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}) = \frac{1}{\rho_1}$. 有 $P_1 = P_2$) 有 $x=1$, 从而有

$$P_1 = P_2, \quad V_{1x} = V_{2x}, \quad \text{进而得 } \frac{V_{2y}}{V_{1y}} = \frac{B_{2y}}{B_{1y}}.$$

$$\therefore x=1, \text{ 从 (5.66) 式: } \frac{V_{2y}}{V_{1y}} = \frac{V_i^2 - V_{A1}^2}{V_i^2 - x V_{A1}^2} = 1 \quad \therefore V_i^2 = V_{2y}^2$$

$$\text{因此, 从 (5.67) 式 可得 } P_1 = P_2$$

$$\text{不从 } \frac{1}{\mu} (5.53) \text{ 式. 利用 } B_{1x} = B_{2x}, T_1$$

$$P_2 + \frac{1}{\mu} B_{2y}^2 + P_2 V_{2x}^2 = P_1 + \frac{1}{\mu} B_{1y}^2 + P_1 V_{1x}^2$$

$$\text{直接得 } B_{2y} = B_{1y}$$

因此除重叠部分 $\vec{B}_2 = \vec{B}_1$, 且. 还有 $B_{2y} = -B_{1y}$, $B_{2x} = B_{1x}$

$$\therefore P_1 V_{1x} = P_2 V_{2x} \quad \therefore V_{1x} = V_{2x} \quad (P_1 = P_2)$$

且此结果 $V_{2y} = V_{1y}$. 由 (5.63) 式 有

$$V_{1x} (B_{2y} - B_{1y}) = (V_{2y} - V_{1y}) B_{1x}$$

$$\text{又 (5.67) 式 } P_1 V_{1x} = P_2 V_{2x}, \quad B_{1x} = B_{2x} \quad \text{从 (5.68) 式} \quad 9.4$$

$$P_1 V_{1x} (V_{2y} - V_{1y}) = \frac{1}{\mu} B_{1x} (B_{2y} - B_{1y})$$

$$\text{综合上述三式, 有 } P_1 V_{1x} (V_{2y} - V_{1y}) = \frac{1}{\mu} B_{1x} (V_{2y} - V_{1y}) \frac{B_{1x}}{V_{1x}}$$

$$P_1 V_{1x}^2 = \frac{1}{\mu} B_{1x}^2, \quad P_2 V_{2x}^2 = \frac{1}{\mu} B_{2x}^2 \quad (\because P_1 = P_2, V_{1x} = V_{2x}, B_{1x} = B_{2x})$$

$$\therefore V_{1x} = V_{1y} \frac{B_{1x}}{B_{2y}} \quad (V_{1y} = V_{1x} \frac{B_{1x}}{B_{2x}})$$

$$P_1 V_{1x}^2 = P_1 V_{1y}^2 \frac{B_{1x}^2}{B_{2y}^2} = \frac{1}{\mu} B_{1x}^2$$

$$P_1 V_{1y}^2 = \frac{1}{\mu} B_{1y}^2 \quad P_2 V_{2y}^2 = \frac{1}{\mu} B_{2y}^2 \quad (\text{由于 } V_{1y} = V_{2y}, B_{2y}^2 = B_{1y}^2)$$

(1) 此除了 $B_{2y} = B_{1y}$ 对应有 $V_{2y} = V_{1y}$ 外,

还有 $\begin{cases} B_{2y} = -B_{1y} & \text{对应有 } V_{2y} = -V_{1y} \\ B_{2x} = B_{1x} & V_{2x} = V_{1x} \end{cases}$

这就是中间波或称旋涡间断 (即为差没有张角)。 其运动向分量反平行, 从而导致互差速度场 (即 $S_{12,13}$)。若的中高速大和低速小差, 这必定有限限幅的 Alfvén 波, 我们再回憶一下 Alfvén 波之不同尋常之处:

i. 中高大 (有限) 时, 传播时速度几乎保持不变

ii. Alfvén 波的驱动力量强度为: Alfvén 波对密度或压强的变化

iii. Alfvén 波传播过程中, 不驱动无量场, 而是下度改变 (即物理)

iv. (即) Alfvén 波可以走有限限幅。

(Priest P.P. 161-162)

由于没有压强和密度的差, 这不是 Alfvén 波, 是一种中间断。(由于没有速度的差, 但 B_{1x} 和 B_{2x} 的方向不同, 且 $B_{1x} \neq 0, [V] \neq 0$)。由于既没有密度, 中间断是空的; 所以必须小于改叫来叫它叫什么, 才可以叫它叫什么。

快激波	$V_{1y} = B_{1x} = 0$	$V_{1x} + B_{1y}$	$V_{1x} \rightarrow B_{1y}$	(perpendicular shock) 垂直激波
慢激波	$B_{1x} \rightarrow 0$	$V_{1x} = V_{2x} = 0$ $B_{1x} = B_{2x} = 0$	$V_{1y} \rightarrow B_{1y}$	(contact discontinuity) 接触间断
中间波	$V_1 = V_{41}$	$B_{1y} = -B_{2y}, B_{1x} = B_{2x}$ $V_{2y} = -V_{1y}, V_{2x} = V_{1x}, B_{1y}$	B_{2y}	(rotational discontinuity) 旋转间断

5.5. 平行于磁场方向的激波传播

当流动方向的磁场平行时, 因为等高线与流体质点沿磁场方向运动速度对质点运动不起作用, 则因归一化速度为零, 故 ρ_1 即已译出讨论过。

5.6 垂直于磁场方向的激波传播

称为垂直激波 (perpendicular shock)

1. 激波的运动方向和等高线流动方向均垂直于磁场, 不妨碍方向平行于激波的流体面 ($\rho_1 \neq \rho_2$)

从激波守恒方程组可知

$$\rho_2 V_2 = \rho_1 V_1 \quad (\text{速度的方向分量为零}) \quad (5.4-1)$$

(法向动量守恒, (5.3-7) 式)

$$P_2 + \frac{1}{\mu} B_2^2 + \rho_2 V_2^2 = P_1 + \frac{1}{\mu} B_1^2 + \rho_1 V_1^2 \quad (B_n = B_x = 0) \quad (5.4-2)$$

能量守恒 ($5.3-6$) (计算 P_{∞})

$$[\rho_2 V_2 (e + \frac{1}{2} V^2) + P_2 + \frac{1}{\mu} V_2 B_2^2 - \frac{1}{\mu} B_2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{B}_2)] = 0 \quad (5.4-3)$$

$$B_1 = B_{C1}, \quad B_2 = B_{C2}, \quad V_{n1} = V_1, \quad V_{n2} = V_2, \quad B_n = 0$$

由 $P_2 V_2 (= \rho_2 V_1)$ ($5.3-6$) 可得:

$$e_2 + \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{B_2^2}{\mu \rho_2} = e_1 + \frac{1}{2} V_1^2 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{B_1^2}{\mu \rho_1} \quad (5.4-4) \quad (5.6-1)$$

\vec{E} 的切向连续: $B_n [\vec{V}_2] - \delta [\vec{V}_1 \cdot \vec{B}_1] = 0, \therefore [\vec{V}_2] = 0$

$$\therefore [\vec{V}_2] = 0. \quad \text{可得} \quad \frac{B_1}{\rho_1} = \frac{B_2}{\rho_2}. \quad \text{利用} (5.4-4) \text{ 式, 有} \quad (5.4-1)$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$B_1 V_1 = B_2 V_2 \quad (5.6-1) \quad (5.6-2)$$

2. 以下将讨论垂直激波的条件

理想气体的能流表达式 $e = \frac{P}{(r-1)\rho}$, 把此 (5.6-2) 式可改写为:

(5.6-1)

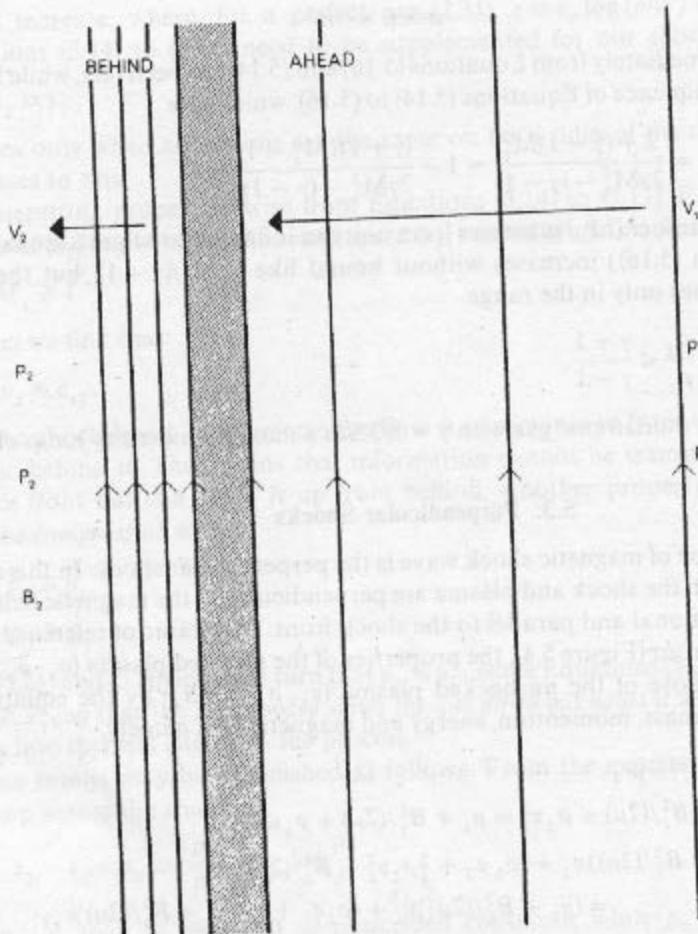


Fig. 5.18

Fig. 5.4. The notation for a plane perpendicular shock wave in the shock frame of reference. The magnetic field is parallel to the wave front and perpendicular to the flow velocity.

$$\frac{\gamma P_1}{(\gamma-1)P_1} + \frac{1}{2} V_1^2 + \frac{B_1^2}{\mu \rho_1} = \frac{\gamma P_2}{(\gamma-1)P_2} + \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{B_2^2}{\mu \rho_2} \quad (5.6-2) \quad (5.6-3)$$

$$\text{设 } R = \frac{P_2}{P_1}, \quad x = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{B_2}{B_1}, \quad N^2 = YM_1^2 = \frac{\gamma V_1^2}{C_{s1}^2}, \quad \beta' = \frac{B_1^2}{2\mu \rho_1}$$

式中 M_1 为激波前 Mach 数, C_{s1} 为激波前声速, β' 为不考虑粘滞时的 β
($5.5-4$ 式与之相比 β' 有相反.)

(5.4-2) (5.4-5) 式 = 激波后 P_1 , 重利用上述各式

$$\frac{P_2}{P_1} + \frac{1}{2} \frac{B_2^2}{\mu \rho_1} + \frac{P_2 V_2^2}{P_1} = R + \frac{1}{2} \frac{B_2^2}{\mu \rho_1} + \frac{P_1 V_1^2}{P_1 \cdot x} = R + \beta' x^2 + N^2 \frac{1}{x}$$

$$(5.4-2) \text{ 式的右边} = 1 + \beta' + N^2$$

$$\text{左边} = \text{右边} \quad (R-1) + \beta'(x^2-1) + N^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = 0 \quad (5.6-4)$$

$$N^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = (R-1) + \beta'(x^2-1) \quad (5.6-3)$$

(5.6-3) 式 = 激波乘 $\frac{P_1}{P_2}$ 有

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2} V_1^2 \frac{P_1}{P_2} + \frac{B_1^2}{\mu \rho_2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2 P_1}{P_1 P_2} + \frac{1}{2} V_2^2 \frac{P_1}{P_1} + \frac{B_2^2}{\mu \rho_2} \cdot \frac{1}{x} \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2} N^2 + 2\beta' = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{x} + \frac{1}{2} N^2 \frac{1}{x^2} + 2\beta' x \quad (5.6-5)$$

$$N^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{R}{x} - 1 \right) + 4\beta' (x-1) \quad (5.6-4)$$

$$\text{从 } (5.6-3) \text{ 得 } R = N^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) - \beta' (x^2-1) + 1$$

代入 (5.6-4) 式

$$N^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[N^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) - \beta' \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x} - 1 \right] + 4\beta' (x-1)$$

$$N^2 (x^2-1) = \frac{2\gamma}{\gamma-1} [N^2(x-1) + \beta' x(1-x^2) + x(1-x)] + 4\beta' x^2(x-1)$$

消去 $(x-1)$, $[x=1, \text{ 对应于 } P_2=P_1, 表示没有激波, 因此消去}(x-1)\text{次, 并且有}$
共存物 x^2 的根] 整理后有

$$\beta' (2-\gamma) x^2 + [\gamma(\beta'+1) + \frac{1}{2}(\gamma-1) N^2] x - \frac{1}{2} (\gamma+1) N^2 = 0 \quad (5.6-5)$$

若 x_1, x_2 为方程 $(5.6-5)$ 的两个根, 则有

$$x_1 x_2 = - \frac{(\gamma+1) N^2}{\beta' (2-\gamma)}$$

通常 $\gamma < 2$, 二根乘积为 β' , 必有一个负根. 负根没有物理意义. 和半正根对应于激波解. 我们已证明激波是压缩波, 又 $\gamma > 1$ 且 $x = \frac{P_2}{P_1} > 1$
 $(5.6-6)$ 式改写为

$$\beta'(2-\gamma)x^2 + [\gamma(\beta'+1) + \frac{1}{2}(\gamma-1)N^2]x - \frac{1}{2}(\gamma+1)N^2 = 0$$

$$\because x > 1$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\gamma+1)N^2 > \beta'(2-\gamma) + \gamma(\beta'+1) + \frac{1}{2}(\gamma-1)N^2$$

$$N^2 > 2\beta' + \gamma$$

$$\text{把 } N^2, \beta' \text{ 表达式代入: } V_1^2 > \frac{\beta_1^2}{\mu_1 P_1} + C_{S_1}^2 = V_{A_1}^2 + C_{S_1}^2 = V_M^2$$

V_{A_1} 为激波前的 Alfvén 速度

当磁场垂直于等离子流体的速度和激波速度时. 磁场对激波的影响
 压缩波的速度是 V_M , 而不是 C_{S_1} . 流速 V_1 必须大于 V_M 才有激波.

3. 讨论垂直磁场对激波后物理量的影响

① 假设磁场为零 $B=0$, 则 $\beta'=0$, $(5.6-6)$ 式简化为

$$[\gamma + \frac{1}{2}(\gamma-1)N^2]x_n - \frac{1}{2}(\gamma+1)N^2 = 0 \quad (5.6-7)$$

x_n 读为 $(5.6-7)$ 式的根

改写 $(5.6-6)$ 式为下面的形式:

$$\beta'(2-\gamma)x^2 + \gamma\beta'x + [\gamma + \frac{1}{2}(\gamma-1)N^2]x - \frac{1}{2}(\gamma+1)N^2 = 0$$

$$[\gamma + \frac{1}{2}(\gamma-1)N^2]x - \frac{1}{2}(\gamma+1)N^2 = -\beta' \times [(2-\gamma)x + \gamma] \quad (5.6-8)$$

$(5.6-8)$ 式减去 $(5.6-7)$ 式

$$[\gamma + \frac{1}{2}(\gamma-1)N^2](x - x_n) = -\beta' \times [(2-\gamma)x + \gamma] \quad (5.6-9)$$

$$\therefore \gamma < 2, x > 0, \therefore (5.6-9) \text{ 式左边小于零. } \therefore x < x_n$$

x_n 为无磁场时的 N 值 $\frac{P_2}{P_1}$, $x < x_n$ 说明有磁场时, 压缩波压缩比没有磁场时要大 (即有磁场)

② 从 $(5.6-3)$ 式可得 $R = \frac{P_2}{P_1} = N^2(1 - \frac{1}{x}) - \beta'(x^2 - 1) + 1$, 方程 $(5.6-8)$
 在 $x > 0$ 时无意义, 仅当根才有意义. 令为 x_0 代入 $\frac{P_2}{P_1}$ 表达式

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + N^2 \left(1 - \frac{1}{x_0}\right) - \beta' (x_0^2 - 1) \quad (5:6-10)$$

$$\because \beta' > 0, \quad x_0 > 1, \quad \text{无磁场所时} \quad \frac{P_2}{P_1} = 1 + N^2 \left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \quad (5:6-11)$$

$$\text{通过}(5:6-8) \text{式已知} \quad x < x_n, \quad \text{即} \quad x_0 < x_n, \quad \text{因此} \quad (5:6-10) > (5:6-11)$$

有磁场所时，激波引起的压强增加小于无磁场所激波的作用。

这是因为流动能量的一部分转化成磁场能（假设流动速度 V_2 的耗散 $B_2 > B_1$ ）。

④ 当 Mach 数很大， β' 相对固定时， $(5:6-10)$ 式近似为

$$\beta'(2-\gamma)x^2 + \frac{1}{2}(\gamma-1)N^2x - \frac{1}{2}(\gamma+1)N^2 \approx 0$$

$$x_0 = \frac{-\frac{1}{2}(\gamma-1)N^2 + [\frac{1}{4}(\gamma-1)N^4 + 2\beta'(2-\gamma)(\gamma+1)N^2]^{1/2}}{2\beta'(2-\gamma)}$$

$$\approx \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$x_0 = \frac{P_0}{P_1} = \frac{B_0}{B_1} = \frac{V_1}{V_2} \approx \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (5:6-12)$$

x_0 代入 $(5:6-10)$ 式，求出压强比

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + N^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) - \beta' \left(\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^2 - 1\right)$$

$$\approx 2N^2 = 2\gamma M_1^2$$

当 Mach 数很大， β' 相对固定时，密度、磁场、等压缩比都远大于无磁场所的压缩比。压缩的压缩也远大于无磁场所的压缩 ($M \rightarrow \infty$, 无磁场所的 $\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2$)

4. -1.1 情

流动重在于磁场所时：

1. 横越磁场的压缩波的速度为 V_M ，若流速 $V_1 > V_M$ 时有激波。

2. $x < x_n$ ，密度的压缩比无磁场所的激波压缩小

3. 有磁场时, 因激波的作用, 压强的增加量小于无磁场时(激波的作用).
4. Mach 数为 ∞ 时. $\frac{P_2}{P_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{V_1}{V_2} \approx \frac{Y+1}{Y-1}$. 磁场和密度的增加是有限的.
压强的增加也远小于无磁场时的情况.
5. 流速 $>$ 惯性声速 $= (V_{A1}^2 + c_s^2)^{\frac{1}{2}} = V_M$
 $B_2 > B_1$, 即 $[B_c] > 0$. 可以为快激波.

第六章 太阳层流不稳定的加热

6.1. 引言

总括

- 本章内容：
1. 通过随时间变化的层流不稳定性加热模型
 2. 讨论可能的加热过程
 3. 总括地是就“需要热源”、“中微子辐射”以及“加热机制”等概念来减少湍流扩散之必要性
 4. 总量方面，高分辨率加热过程怎样跟了理论改善，加热机制的其中一部分是公众说明。

1. 问题的提出

光子(1.11(a))

2. 加热机制

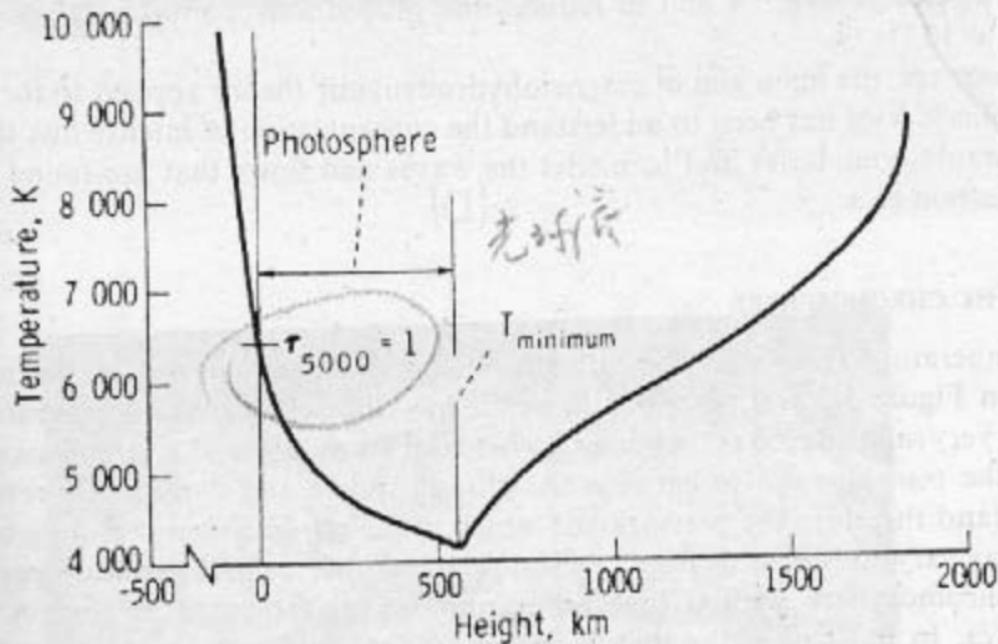
① Biermann (1946) 和 Schwarzschild (1948) 首先指出声波加热上层大气 (色球和日冕)，声波通过对流区中的湍动产生，向上传播过程中变陡，形成激波，通过激波加热气体。不久前还普遍相信这种现象，但是现在认为声波加热仅对低色球部分起重要作用。

② 很可能外层日冕的加热机制是光子碰撞加热 (只在初步范围内讨论)。

根据 Withbroe 和 Noyes (1977) 的研究，色球中对于宁静区或冕区，
① 平衡辐射的强度约为 $4 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$ ，对于运动区约为 $2 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$
($1 \text{ W m}^{-2} = 10^3 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ，可将辐射强度乘以速度 = 为流)

② 冕中宁静区所辐射入的强度降低为 $3 \times 10^2 \text{ W m}^{-2}$ ，运动区为 $5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$

区域	平衡辐射损失、需要输入的强度 (W m^{-2})
色球宁静区, 运动区	4×10^3
色球运动区	2×10^4
日冕宁静区	3×10^2
日冕运动区	5×10^3



(a)

相当亮的和相当大的波辐射 (wave flux, $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}}$), $\pm 10^4 - 10^6 \text{ Wm}^{-2}$.
但是不清楚有多少钱辐射上去。

③ 声波加热的间接观测支持谱线头部, 非热速度使谱线头部
增宽, 非热速度随高度而增加. 低色球处: 几公里 (a few), 过渡区:
25-30 公里/秒; 日冕: 10-30 公里/秒. 非热增宽可能是因波引起.
这些波向上传播, 未见形成驻波. 事实上已在色球, 也就在过渡区
观测到周期为 300 秒或周期更高的振荡. 但过渡区上也有周期.

④ Deubner (1976) 的工作认为 波不仅在附近 (色球), 仍流密度为
 $10^5 - 10^6 \text{ Wm}^{-2}$, 起自周期为 10-300 秒的湍流带. 即使该波在色球上
固有辐射阻尼, 仅有小部分向上传播, 也已提供足够的能量加热色
球和日冕.

⑤ 近来从 OSO8 得到直接证据. 只有低色球可能由声波加热 (Athay
and White, 1977). Mein 等人 (1980), Mein and Schmieder (1981) 也对
其他的机制作了努力.

在色度极区, 观测到 5 分钟长的波列, 其中可能起声波加热. 低色球.
但是波列到达与色球时, 波强度已减弱, 波列被破坏 (its coherence
destroyed)

⑥ 上层色球和日冕加热的本质很可能是不同的. 在波列的困难是当
Alfvén 速度随高度增加时, 它们既因不均匀性被散射, 也受被抑制
但是, 例如有发射的波列还以高 δT 为周期 (~ 10 秒) Alfvén 波对于
大多数冕环看来是一种可行的加热机制. 冕环中碰撞场大于 20 速率.
但磁场较强时已无. 磁场必须耗散. 和 X-ray 无关, 因运动已减慢.

⑦ 强场区中的加热机制: 电流片或线条 (filaments, Section 6.4.4) 中的磁耗
散. 这些线条转移冷日冕通过缓慢的运动, 以至可以认为磁耗经历了
一系列准静态的过程. 在日冕中线既吸热又放热. (常用的符号是耗散
过程). 通常为微小耀斑 (mini-flares) 作为日冕加热普遍手段, 已被否.
但详细的过程分析还未研究.

6.2. 大气结构模型

6.2.1 基本模型

1. 从赤道向北通过狭窄的过渡区，到极地，温度显著增加（图 6.2-1）
赤道附近风速较小，此后逐渐增加，在过渡区达到最大值。北极附近
到极大的区域附近，温度不仅降低，风速也减弱。在极地附近行进
速度极大的位置，典型情况位于过渡区底部附近（ $\approx 2 \times 10^4 \text{ K}$, $\sim 2400 \text{ km}$ ）。
速度轮廓： $T^{1/2} - \log r$ ，拐点温度约为 10^6 K ，热流也不大。

2. 动-热量守恒平衡成立

$$C = H - R \quad (6.1)$$

H : 加热速率 R : 辐射损失 ; C : 传导系数。

$$(\text{向下}) \text{ 的热流密度 } \vec{F}_c = -k_0 T^{1/2} \nabla T$$

$$\text{(比第(2.33)式, } \vec{g} = -k \nabla T, k \sim 10^{-11} T^{1/2} \text{)}, C = D \cdot \vec{F}_c \quad (\text{第(2.32)式中 } -\partial \vec{g})$$

从图 6.1 可以看出，温度小于 T_c ($\approx 10^6 \text{ K}$)， C 为负，表示保守损失为负。

即为热量耗散（辐射超过加热， $R > H$ ），温度大于 T_c 时， C 为正。
 $0 > C = R$

这时 $H > R$ ，加热起主导作用。

3. 当(6.1)式成立时（稳定结构）由 R, H, C 来描述热量平衡而确定。

在赤道中， R, H 二者均比较大，而 C 小。因此温度随纬度变化

而改变慢 ($C \sim D \cdot \nabla T \rightarrow$ 温度随纬度的变化)，当温度上升，辐射

(R) 增加极大 (在 $10^4 - 10^5 \text{ K}$ 之间，参见图 2-2)，辐射 R 大，超过

加热 H ，这就迫使温度梯度和低过渡区增大。因此低过渡被来自上方的热量所加热，通过辐射而冷却 (图 6.1 $R > H$ 部分)。

大约到了 10^5 K 时，辐射显著下降，辐射等于加热相等，此后，整个上

过渡区热流密度 \vec{F}_c ($C = D \cdot \nabla T$ 大，但相对而言不发生变化 (图 6.1 $R \approx H$ 部分))

$$(\because R \approx H, \vec{F}_c \sim \text{const}, \therefore C \approx 0)$$

低日冕区 R, H 相对很大时，加热速度通过何等， $C \sim 0$ 表明着 (温度
梯度随纬度变化慢)。温度由于开始磁场区域的不太高时，即通过

A DESCRIPTION OF THE SUN

7

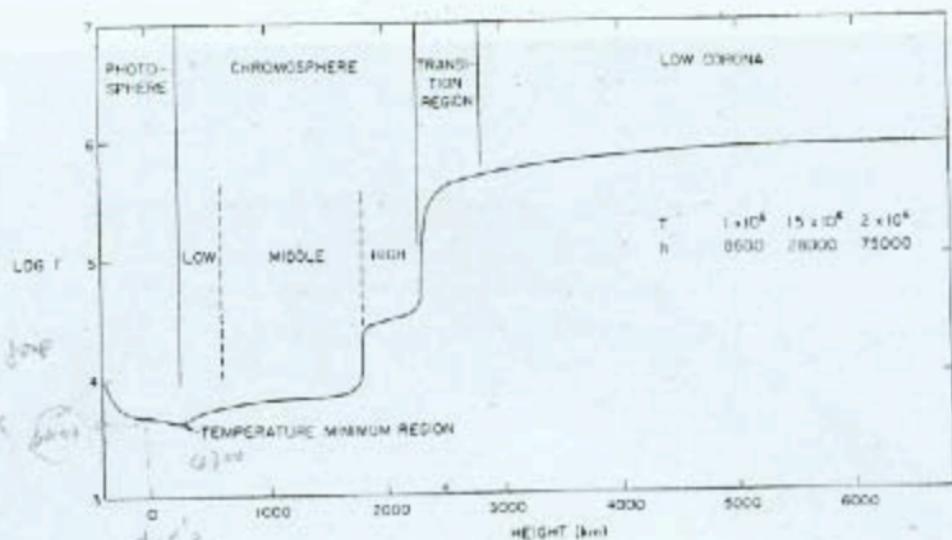


Fig. 1.2. An illustrative model for the variation of the temperature with height in the solar atmosphere (Athay, 1976).

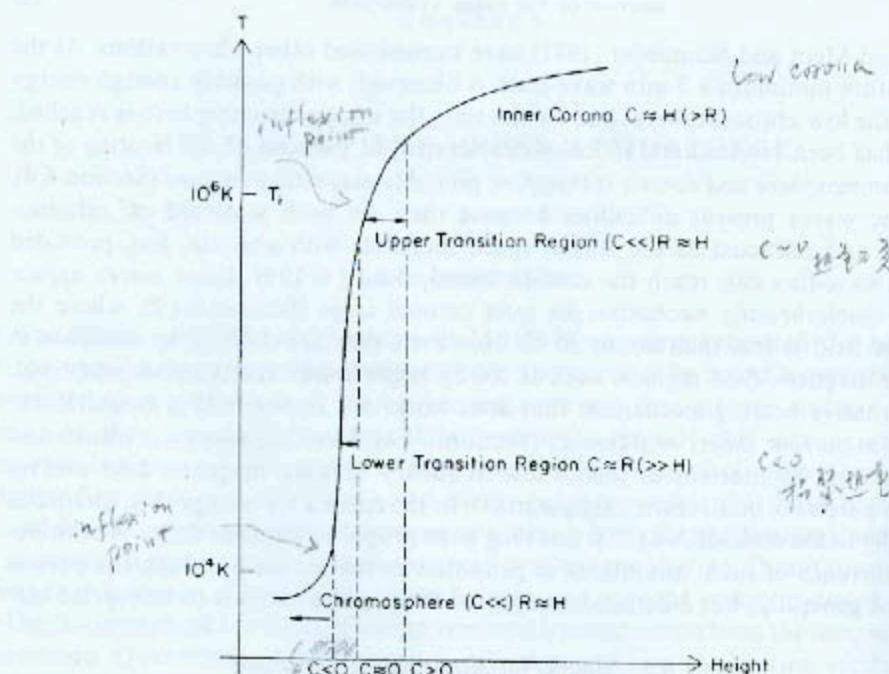


Fig. 6.1. A sketch of the temperature structure in the upper solar atmosphere, indicating the relative roles of conduction (C), radiation (R) and heating (H).

is therefore being heated by conduction from above and cooled by radiation). Above

CHAPTER 2

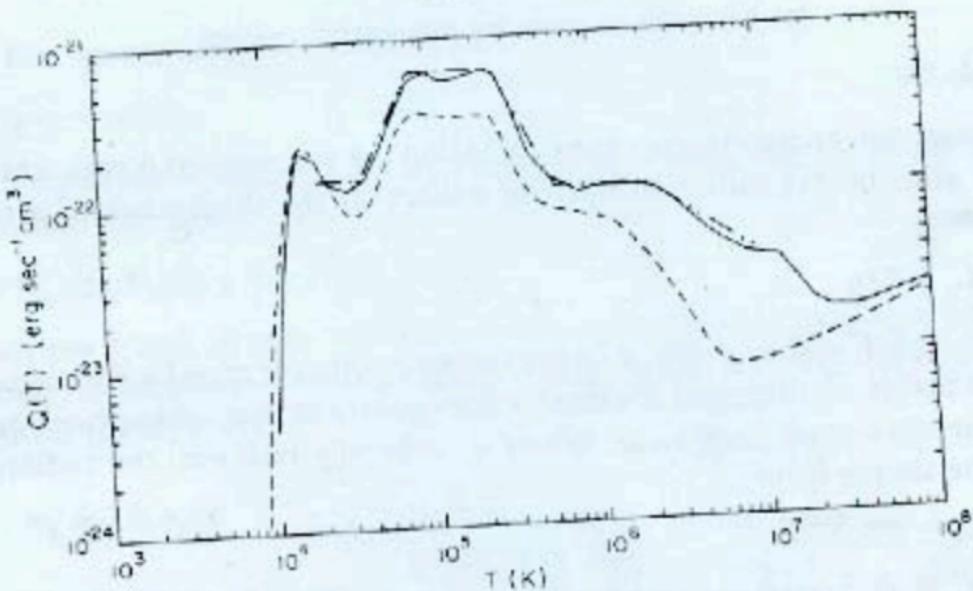


Fig. 2.2. The radiative loss function ($Q(T)$) derived by McWhirter *et al.* (1975) [---] and Raymond and Smith (1977) [—], together with an analytic fit of Rosner *et al.* (1978) [···].
 $(1 \text{ erg cm}^{-3} = 10^{-13} \text{ W m}^{-3})$

太阳风传播速度越慢，越靠近太阳风带越热。

4. 可以看出，越过波包之后上升极陡的原因是，温度 10^4 - 10^5 K附近，辐射很大（为 2.2 ），不能辐射和增加热量使得膨胀，必须通过辐射从上方获得能量，这样在 $\frac{d\ln T}{dt}$ 附近，温度大于 10^5 K，辐射减少，膨胀加快，必须从上方快速向内（指向太阳核心）向外（离开太阳）传递热量。

5. 表6.1 列出了日冕温度、过渡区压强的典型值（过渡区和中层 upper chromosphere 上/高色球和不标记），数据来自 Withbroe and Noyes (1977)。色球上/高色球中不同层次单位面积辐射率损失和辐射损失的估计值。所谓辐射型能量(H)可通过辐射损失部分的不可加而得到(CC和R)。加热日冕所辐射的能量，典型值认为辐射向下传入色球的能量的百分之几(a few percent)，一个全面的太阳加热模型必须处理整个区域的能量损失，传播和耗散，达到过渡区的精确。从表6.1 也可看出冕洞区域比太阳静区更冷之稀的程度，而活动区则又热又稠密。

6. (6.1)式是上层区域的简单数学模型，对式中首次项考虑后，可以用来计算。Wragg & Priest (1981b) 改进了 McWhirter Jr (1975) 半期模型，改写如下

$$\frac{d}{dz} \left(K_0 T^{5/2} \frac{dT}{dz} \right) = X n_e^2 T^\alpha - H \quad (6.2)$$

对(6.1)式不取关系

$$C = \nabla \cdot \vec{q}^1, \quad \vec{q}^1 = -K_0 T \vec{v} \quad (2.33), \quad K_{11} = 1.80 \times 10^{-10} \frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda} \quad (2.34)$$
$$\Rightarrow K_0 T^{5/2}, \quad C = H - R, \quad R \text{ 为 } X n_e^2 T^\alpha, \quad \nabla T = \frac{dT}{dz}$$

$$\text{辐射损失 } R = L_r = n_e n_H Q_{iT} \quad (2.35c)$$

$$Q_{iT} = X T^\alpha \text{ Wm}^3 \quad (2.35d)$$

X 和 α 的数值列于表2.2

$$H = \rho E + H_V + H_W$$

辐射 热带 波力热
耗散

TABLE 6.1.

Energy losses from the upper atmosphere ($1 \text{ W m}^{-2} = 10^3 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$)

	Conduction (W m ⁻²)	Radiation (W m ⁻²)	Temperature (K)	Pressure (N m ⁻²)
Quiet region:				
Lower and middle chromosphere		4×10^3		
Upper chromosphere		3×10^2		2×10^{-2}
Corona	2×10^2	10^2	$1.1 - 1.6 \times 10^6$	
Coronal hole:				
Lower and middle chromosphere		4×10^3		
Upper chromosphere		3×10^2		7×10^{-3}
Corona	6×10	10	10^6	
Active region:				
Lower and middle chromosphere		2×10^4		
Upper chromosphere		2×10^3		2×10^{-1}
Corona	$10^2 - 10^4$	5×10^3	2.5×10^6	

(treat the generation, propagation and dissipation of energy through the whole region)

(6.2) 式中的加速度 H 为河岸起先假设为均匀，式中的电荷密度亦为未知。再附加 亂完全电离的静力学平衡方程

$$\frac{dP}{dx} = -m_p n_e g \quad (6.3)$$

此即重力与压强梯度之平衡， $P = 2n_e k_B T$ 。求解(6.2), (6.3) 得到三个边界条件，即底部速度，(底部) 速度梯度和电荷密度。最终的结果是，依赖于一个参数 H [看 b.2(a)]。从中可看到 1. 速度随 H 变化而变化以及随 H 的变化。

假如这些模型作为一个湿润模型，则速度不仅在 H 快速下降，变成平缓下降，看 b.2(b) 水流通过限制而开始变慢；看 b.2(c) 是水流的转向。

b.2.2. 磁场的作用。

从日食或不完全日食中可清楚看出日冕的流动是由磁场决定的。磁场是时间变化的，它的运动时间常数。磁场对日冕等离子体的影响有三方面：

i. 力的作用。力 $\vec{F} = \vec{B} \times \vec{J}$ 作用向内作用，增加了压力，从而也增加等离子体和太阳风密度，冕环和喷射区

ii. 质量守恒。对于在磁场中的质量 (每单位体积： $\frac{1}{4\pi} B^2$) 可以作为热源。

既可以通过流动模式的耗散，也可以直接通过吸收耗散来获得质量 (后者)。这就会有强电流出现。

iii. 引导磁通。沿磁场方向的导磁系数 $K_{||}$ 比垂直于磁场方向的 K_{\perp} 大得多。所以磁场将有效地将等离子体向地心拖拽而形成“压缩”。热量主要由磁场流动，在过渡区和日冕，保守是主要的輸送途径和平流。过渡区和日冕的密度和速度受磁场结构的影响很大。这就是为什么日食和 X 射线带中的日冕活动很可能和磁场的相互作用的理由。

2. Gabriel (1976) 的天体模型。

宇宙已越来越大 (典型的直径为 30,000 光年) 上方，光球上，通过河流和不稳定性，磁场通量集中于太阳辐射层附近 (可参阅 8.7 节)。再向以巴城中。

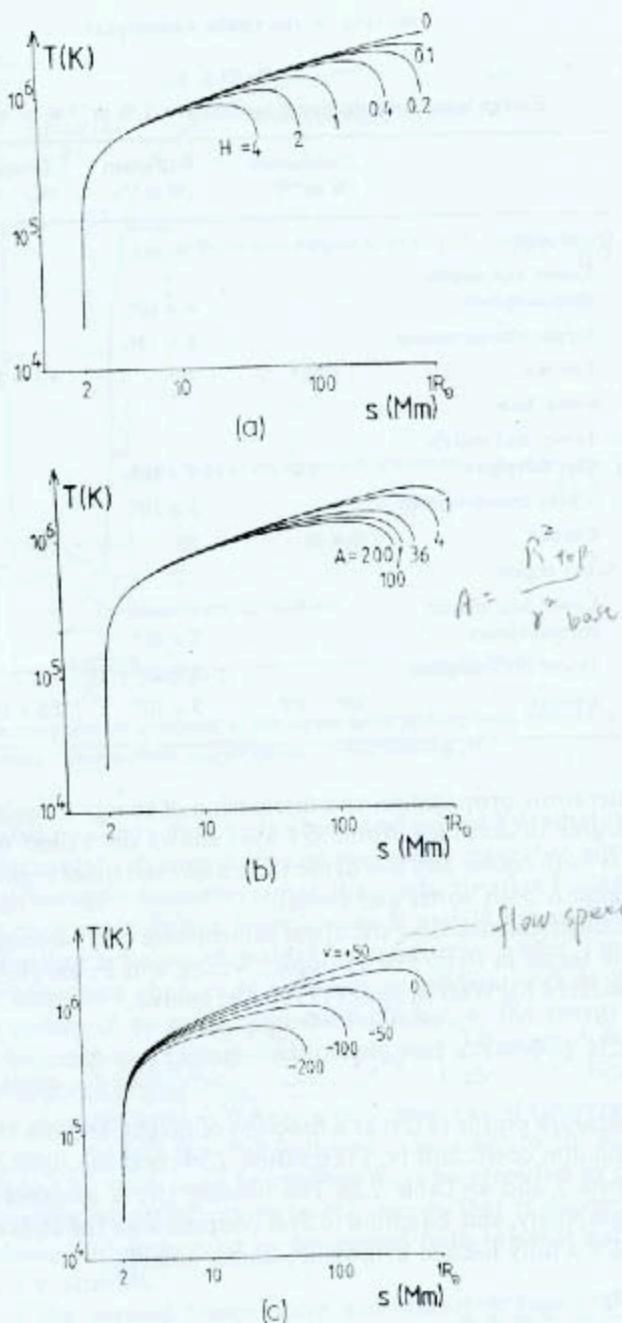


Fig. 6.2. The temperature (T) of a model coronal atmosphere as a function of height s ($1 \text{ Mm} = 10^6 \text{ m}$), showing the effect of varying: (a) the heating strength H , (b) the flux tube divergence for $H = 0.2$, (c) the flow for $H = 0.2$. The heating H is measured in units of the radiation at a temperature of 10^6 K and a density of $5 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$. A is the ratio of the loop area at the summit to that at the base. v is the flow speed in m s^{-1} (+ represents an upflow and - a downflow) (from Wragg and Priest, 1981b).

$$\frac{\text{loop } TV}{\text{base } TV} = A$$

磁场强度时，直到日冕中变得比较均匀（节 6.3）。因此过度区磁力线的首要特征是越球柱而来的延伸。越球柱边缘上方的磁场强度是越球柱理论，中心上方磁场 10^{-3} 奈以太。然而在日冕，磁力线变得均匀，越球柱泡孔的磁场往往消失。Gabriel 为简单起见，设 $\nabla \times B = 0$ ，磁场是势场再假设等离子体处于热平衡。二、考虑保守和辐射间的平衡

$$\frac{d}{ds} \left(K_{\parallel} A(s) \frac{dT}{ds} \right) = \chi n_e^2 T^4 A(s), \quad s \text{ 为磁力线方向.}$$

A. 磁通量的截面积。忽略向都加热。上式左边的详细计算可参见讨论第 2 章 P.40。假定热量被聚于半径的地方。1^o 即一根磁力线有一这样的方程，连同方程 (6.3)一起解得。边界条件是：温度 30000 度又，日冕中每一根磁力线上的密度，温度和热流都是不同的。日冕的热流密度是 360 W m^{-2} (与热流密度相同) ($\vec{q} = -K_{\parallel} \nabla T \rightarrow \nabla T \rightarrow \text{等温线}$) 该数值的由此推得的 T 值是及所规划值很接近。由 6.3 之列有等温线。

而平行平面层模型相比，它却磁通量的发散。(通过磁通量截面 $A(s)$ 的变化，在方程中得到体现) 增加了过渡区的温度梯度。因此降低了达到日冕温度的速度。

3. 光学薄透镜模型的规则可用半守恒微分发射量 (differential emission measure) $n_e^2 T \frac{dh}{dT}$ h 为温度的函数。

(温度 $10^{5.2} - 10^{6.2}$ 度). 所得出的发射量与 Gabriel 模型二阶公程及 McWhirter 等人 (1975) 的辐射模型几乎没有差异。

4. Gabriel 模型近期由 Athay (1981b) 加以扩展。加入了引力能和热能，且没有包括机械能。他得到一个向下的流动，在 $3 \times 10^5 \text{ K} \leq T \leq 10^6 \text{ K}$ ，的流动符合甚好。他的结论是机械能热量不需关心。

5. 将来有必要计算一个包括范围的模型，慎重选择和磁场体都

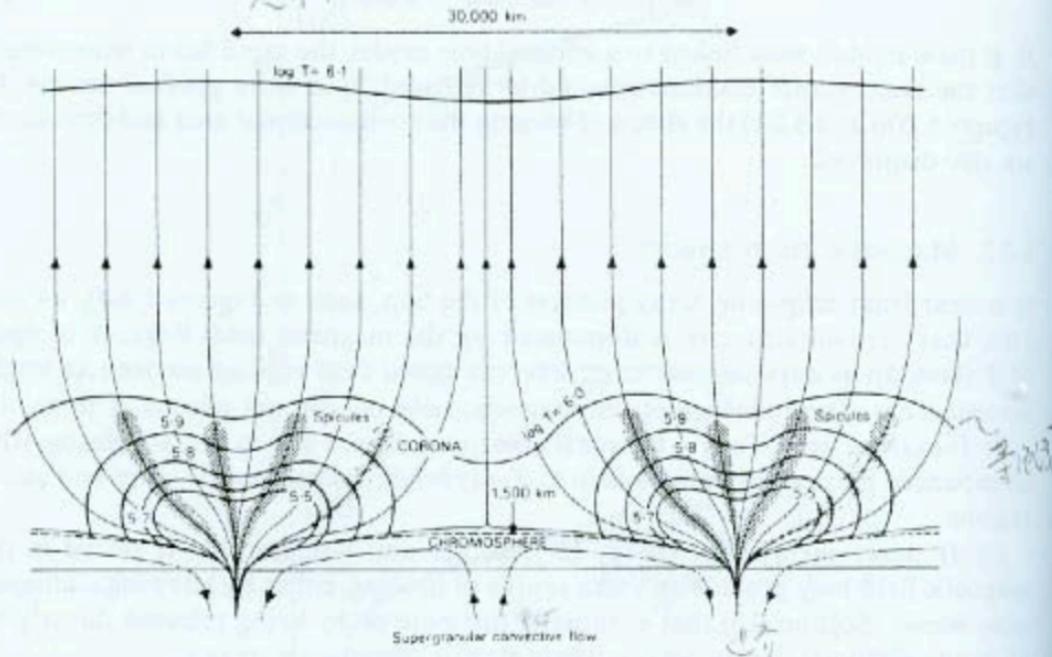


Fig. 6.3. Magnetic field lines and temperature contours for the atmosphere above a supergranule cell in a quiet region (after Gabriel, 1976)

力学平衡相结合，因为等高物体的风速必须可逆達到1。

6.2.3 阿加的圖書

有些因素可能严重改变太陽上层大气的稳定性平衡，但通常化模型中是忽略的。例如：由下向上传播的波，加热大气，产生一个运动压强 $\langle PV^2 \rangle$ 这样将运动速度 PV^2 作为一个周期的时间平均，波压强将可能超过等高物体压强，因此不计流体静力学平衡时需要考虑，波压强甚至可能克服引力，导致等高物体向外流动。

大部分热力学平衡模型假定等高物体处于静止，认为过渡区厚度仅为 10 公里左右，实际上过渡区很可能走动悬的，等高厚度 (a few) 几十公里。例如：起木粒阻滞边界上，物质从色球不断向上喷射，这就是针状体观测到化，起木粒边界上，星子和喷射让有热的等高物体以 $5-100 \text{ km/s}$ 速度上升下降。甚至有可逆针状体不仅位于静止等高物体上方，这可能是过渡区的所有辐射来自针状体周围的热贮存，多冷的针状体与物质向上运动时，受到加热，以取周围贮存中的热量，然后携带著 热 回落。速度 10^5 km/s 起木粒阻滞边界上方，密度为 $5 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ (国际) 达及 10 km s^{-1} ，典型的情况下速度流量为 $5 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (密度 $\text{m}^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}})$

Penneman 和 Kopp (1978) 估计这种下落运动频率和热贮存超过过过渡区等高处的热贮存，因此他们假定向下热流和辐射平衡，构造了他们的过渡区模型。当 6.2(c) 可看到下行的流动。对 Wragg + Priest (1981b) 模型的影响。该模型中方程 (6.2) 在也加上一次 $\frac{d}{dt} (5RTg)$ ，式中 $g = neVA$ ， n_e : 电子密度， V : 等高物体速度， A : 热贮存截面 R : Boltzmann 常数

向下流动速度增加，但没会降低 (看 6.2(c)) (Wragg + Priest 1981b)

6.3 声波加速度

声波在岸边附近产生，在几秒（a few）之后就会变慢，成为漫波，继续向上传播，此后（根据某些模型）可能耗散掉部分能量以产生色球辐射。这些模型认为周期为几秒（a few）的声波对底层色球加速度起作用。有了时期认为300秒周期的波可能产生色球加速度，不过现在认为300秒波产生的流速太低了。而且色球稳定性大，因为声波理论不再有效，在过渡区有不大的反射和吸收。

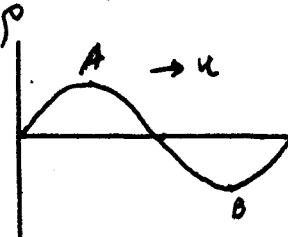
6.3.1 复习

我们第二章已经讨论过声波速度或声速。现在简要地表述声波传播速度的量度

1' 该速度受到水流的干扰，称作速度差数。

流速为 u ，则对于 A 的声速，根据公式

$$C_s = C_{s0} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{大于各处 } B \text{ 的声速}$$



（即 $\rho_0 > \rho$ ），峰处 A 的速度为 $(C_s + u)_A > (C_s + u)_B$ ，峰处会超过 B 处声速而形成激波

2' 均匀介质中声波速度是因该波形的每一部分运动速度相同。假设周围环境的速度为 C_s ，速度扰动的振幅为 V_1

波峰（A）的速度为 $C_s + V_1$ ，波谷（B）的速度

为 $C_s - V_1$ 。波峰对于波谷的相对速度为 $2V_1$
最终会追上波谷。波谷遇到波峰时速度为

波峰追上波谷的时间是 $\lambda/4V_1$ 。这时声波行进的距离为

$$d = \frac{\lambda C_s}{4V_1} \quad (6.4)$$

或者用波的周期表示 $T = \lambda/C_s$

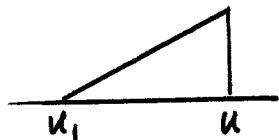
$$d = \frac{T C_s^2}{4V_1} \quad (6.5)$$

可先在周期比较长的波（如几秒）的波形中许多的波高内就已形成。
激波。这比认为认为大周期波（如几十秒）可加强底层色球

长期持续 (~ 300 秒) 加热高层大气。

对于垂直分层的大气 (不均匀介质), 形成激波的距离大为缩短, 因为波阻抗 (速度乘密度) 随高度增加而递增得快。理由是, 假设大气为等温, 大气密度随高度而减小 (\because 分层) $\rho_{1,0} \sim e^{-\delta h}$, h 为高度。不考虑耗散时, 波速 $V_1 \sim \sqrt{\frac{1}{\rho} PV^2}$, 向上传播过程中保持不变 (因为没有耗散, 也没有梯度修正)。所以波阻抗增加, $V_{1,0} \sim e^{\delta/2h}$ 。假定: 高度 100 公里, 假设从底层到顶层的声速为 C_s , 物质阻抗高处有 0.2 kg m^{-1} , 在 100 公里 $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $V_1 = 2.4 \text{ km s}^{-1}$ (100 公里 $\delta = 500 \text{ km}$, $0.2 = K e^{500/200}$, $K = 0.016$, $\delta = 1000 \text{ km}$, $V_1 = 2.44 \text{ km s}^{-1}$, 中间为 2.5 km s^{-1} , ?)。分层介质中, 形成激波的距离变成 $d = 2h \ln \left(1 + \frac{C_s^2}{2(\gamma+1)\lambda V_1} \right)$

讨论: 声波陡降, 由球形运动变成斜坡波
流体没有惯性运动, 速度为 u , 声速为 C_s , 相对于静止系
的相速为 $u + C_s(u)$, 倾斜波速度设为 u' 。



相速大于 u , 展开成 Taylor 级数

$$\begin{aligned} u + C_s(u) &= u_1 + (u - u_1) + C_s(u_1) + \left(\frac{\partial C_s}{\partial u} \right)_{u_1} (u - u_1) \\ &= u_1 + (u - u_1) + C_s(u_1) + \left(\frac{\partial C_s}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \right)_{u_1} (u - u_1) \end{aligned}$$

C_s 为当地声速, 为有惯性运动的声速, 少一个质量, u, ρ, p 均可归结为

$$C_s = C_{s0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{r-1}{2}}, \quad C_{s0} \text{ 为静息流体的声速}$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial \rho} = C_{s0} \left(\frac{1}{\rho_0} \right)^{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{r-1}{2} \rho^{\frac{r-1}{2}} \cdot \rho^{-1} = \frac{r-1}{2} C_{s0} \cdot \frac{1}{\rho^2}$$

由连续性方程, 以及定常 $\rho u = \text{const.}$ $\frac{\partial \rho}{\partial u} = -\frac{\rho}{u}$

$$\begin{aligned} u + C_s(u) &= u_1 + (u - u_1) + C_s(u_1) + \left[\frac{r-1}{2} C_{s0} \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\rho}{u} \right) \right] (u - u_1) \\ &\quad \text{即 } \frac{u'}{u} \sim 1 \quad (\rightarrow \text{强激波}) \end{aligned}$$

$$\therefore u + C_s(u) = u_1 + (u - u_1) - \frac{r-1}{2} (u - u_1) + C_s(u_1)$$

取坐标零点在激波锋面上, $u = 0$, 锋后速度变为 $-u_1$,
速度 (即激波速度) 速记为 $c(u) u_1 - u_1 + \frac{r-1}{2} u_1 = \frac{r+1}{2} u_1 - u_1 + C_s(u_1)$

波谷的速度为 $-u_1 + c_s(u_1)$

波峰减波谷的速度即相对速度为 $\frac{\gamma+1}{2} u_1 - u_1 + c_s(u_1) - (-u_1 + c_s(u_1)) = \frac{\gamma+1}{2} u_1$

正弦运动时，波谷起源于波峰

$$\therefore \frac{\lambda}{2} = \int_{0}^{\gamma+1} u_1 dt$$

式中 t 为大尺度运动的时间， $\therefore c_{s0} = \frac{du}{dt}$

$$\frac{\lambda}{2} = \int_{0}^{\gamma+1} u_1 \frac{du}{c_{s0}}$$

$$u_1 = u_0 e^{\frac{3}{2}\lambda} \quad \text{代入上式}$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\gamma+1}{2c_{s0}} u_0 \cdot 2\lambda e^{\frac{3}{2}\lambda} \Big|_0^L \quad (\lambda=0 \text{ 时}, u_1=u_0)$$

$$= \frac{\gamma+1}{c_{s0}} \cdot u_0 \lambda (e^{\frac{3}{2}\lambda} - 1)$$

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\gamma+1}{c_{s0}} u_0 \lambda = \frac{\gamma+1}{c_{s0}} u_0 \lambda e^{\frac{3}{2}\lambda}$$

$$L = 2\lambda \ln \left(\frac{\gamma c_{s0}}{2(\gamma+1) u_0} + 1 \right)$$

$$\text{周期 } T = \frac{\lambda}{c_{s0}}$$

$$L = 2\lambda \left(1 + \frac{T c_{s0}}{2(\gamma+1) \lambda u_0} \right)$$

(参考 Stein, R 等 1972, AJ, 77, 807) 用 Stein 之半经验式

Priest 提出 V_1 应该为 $V_1 = V_{10} e^{\frac{3}{2}\lambda}$ 中的 V_{10} 由上式得 u_0 ,

其中的 c_s 应该是 c_{s0} 的 γ 倍， c_{s0} 是小量， c_s 是可忽略。

对于均匀介质， $P=3$ ，假设 $u_1=u_0$ ， $\frac{\lambda}{2} = \int_0^L \frac{u_0}{c_{s0}} dz$ ， $L = \frac{\lambda c_{s0}}{(\gamma+1) u_0}$
此即 Stein 之半经验式。

计算举例：

设 $\gamma = \frac{5}{3}$ ， $c_{s0} = 6 \text{ km s}^{-1}$ ， $\lambda = 130 \text{ km}$ ，设初相位 $u_0 = 0.6 \text{ km s}^{-1}$

(色散底部) 位于 500 km ，周期 10 秒 时

$$L = 2 \cdot 130 \cdot \ln \left(1 + \frac{10 \cdot 6^2}{2 \left(\frac{5}{3} + 1 \right) \cdot 30 \cdot 0.6} \right)$$

$$= 162.1 \text{ km} \quad (\text{从色散底部})$$

(书中为 500 km ?)

在之后 162.1 km 处发展成为脉冲

周期 $T = 30$ 秒

$$L = 2 \cdot 130 \text{ km} \left(1 + \frac{30 \cdot 6^2}{2 \left(\frac{5}{3} + 1 \right) 130 \cdot 0.6} \right) = 332.8 \text{ km}$$

即 832.8 km 长度的波长为 1 整波 (即 800 km , 可认为相同)
[最初形成波加速度慢, 长周期波加速度小]

生成激波的波实际上由激波到凹尾的过程所控制。(为什么产生
波的波, 初期很慢, 波的周期也很长), 波速逐渐快, 激波辐射
能量未消耗殆尽。激波辐射耗尽时 (约 1000 秒左右 (老师原意是)) 能为
常量 (Osterbrock 1961). Ulmschneider (1971) 估计辐射耗尽的时间,
 $t_h = 0$ (老师原意), 30 秒, $\pm 2 \cdot t_h = 400$ 秒, 750 秒, t_h 后化 $t_h = 1000$ 秒, 辐
射 ± 300 秒, 其他 ± 100 秒 (老师原意是 t_h 时) 时 100 秒的声波将进入色球, 而且
在 1000 秒左右后, 故波成为激波, 后来 Ulmschneider 和 Kalkofen (1977)
发现辐射耗尽的时间与生成激波的高 δT 及波的周期无关。

6.3.2 传播的耗散

相当激波在均匀大气中的传播耗散理论

1. 几何声学. 假设激波传播保持不变

(声波不是平面波, 但任何空间中可有平面波, 即波的振幅和传播
方向在沿波长相同的距离上近似不变, 因此可引入射线, 其切线即切线
方向等同于波的传播方向, 该为声沿射线传播, 这就是几何声学问
题, 也可以几何声学研究的 $\lambda \rightarrow 0$ 的极限情况).

由几何光学原理, $\Delta P \propto \frac{1}{\lambda}$, $P = h k \sim \frac{1}{\lambda}$, $\Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \cdot \Delta x \geq \Delta$
 $\lambda \rightarrow 0$, $\Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$, 走直线)

2. Chishell - Witham 方程.

(2) - 系列均匀大气 / 声速与均匀大气, 当激波通过介质时, 由于支
持物的反射波均匀分布于界面, 而且也只包括耗散效应对激波强
度的影响)

3. 周期性激波的形成

常用的耗散声学理论, 下面作大概介绍.

i, 考慮到聲波，由於串連的「彈性壓縮」，因此相連微段時間的時間間隔為 Δt ，在這段子時間內由聲波發射的能流量 (flux of energy) 等於壓強作用力。
以下內容取自 Ulmschneider (1970)

考慮聲波的彈性聲波，即聲波強度 $\bar{\eta} = (\rho_2 - \rho_1)/\rho \ll 1$ ，則械能流為

$$\pi \bar{F}_{\text{mech}} = \Delta t \int_0^T (\rho_2 - \rho_1) u dt = \frac{1}{3} P_{\infty} u_{\infty}$$

式中 $T = \frac{1}{\bar{\eta}}$ ， P_2 - 氣體壓強； P_0 - 大氣平衡態壓強 $P_0 \gg P$ 。

$$2P_{\infty} = P_2 - P_1 \quad \text{壓強差。} \quad (\text{下不為 } 1, 2 \text{ 分別指聲波前、後})$$

$$2u_{\infty} \quad \text{聲波前后的速度差} (u_2 - u_1)$$

根據聲波前后的物理量關係 (Landau & Lifshitz 1959) p.331

$$P = P_0 + P_{\infty} - \frac{2P_{\infty}}{T} \cdot t \quad u = u_{\infty} - \frac{2u_{\infty}}{T} \cdot t$$

對於等溫聲波有 $2P_{\infty} = \gamma P_0 \bar{\eta}$ ， $2u_{\infty} = C_s \bar{\eta}$ ，代入 $\pi \bar{F}_{\text{mech}}$ 得

$$\pi \bar{F}_{\text{mech}} = \frac{1}{2} \gamma P_0 C_s \bar{\eta}^2 \quad (= \frac{1}{2} \rho C_s^3 \bar{\eta}^2, (b.8)) \quad \text{其中 } \gamma = \frac{C_s}{u_{\infty}}, \text{ 且 } T = \frac{P_0}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \text{對音速可以寫成} \quad \frac{d \pi \bar{F}_{\text{mech}}}{d \bar{\eta}} &= -(\gamma + 1) \frac{\bar{\eta} u}{C_s} \pi \bar{F}_{\text{mech}} \\ &= -(\gamma + 1) \frac{\bar{\eta} u}{C_s} \cdot \frac{1}{2} \gamma P_0 C_s \bar{\eta}^2 \\ &= -\frac{1}{2} \gamma (\gamma + 1) P_0 \bar{\eta}^3 \end{aligned} \quad (b.9)$$

隨耗散而減慢，所以聲波的耗散與聲速之比。

ii 噴流阻尼長度：一噴流耗散的距離。 $d \approx \frac{\bar{F}}{\frac{d \bar{F}}{d \bar{\eta}}} \approx \frac{\gamma P_0 C_s \bar{\eta}^2}{\gamma (\gamma + 1) P_0 \bar{\eta}^3}$

$\frac{1}{2}$ ：相連微段時間的時間間隔，同特點時間相長。如 Δt 以形狀存天。如 $\sim C_s$ ， C_s 是聲波衝擊的寬度

$$d \approx \frac{C_s \Delta t}{\bar{\eta}} \quad (b.10)$$

iii, 為了使用普通的質量方程 $\rho C_p \frac{dT}{dx} = -L \quad (2.30a)$

需要加入加熱次，如果是由聲波產生的，就可用 (b.9) 式。
如果知道 Mach 數 $M_1, \bar{\eta}$ ，(M_1 為音速的函數)，加熱次數可

$$\text{写成 } H = \frac{2}{3} \nu \gamma (r+1) P_1 (M_1 - 1)^3 \quad (6.11)$$

机率 M_1 为常数，则 H 与 ρ 等高时压强，这与静压模型不同。静压模型中加速度是均匀的或者与高度成正比。（参见 2.36b） $H_w = \text{const.} \times n$ ）
IV. 与机率 M_1 通常有确定的关系，激波前后的物理量可以表达成激波前 Mach 数 M_1 的函数。

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} M_1^2$$

$$\text{体积逸失 } \bar{\eta} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} - 1 = \frac{M_1^2 - 1}{\gamma + 1}$$

弱激波 $M_1 \sim 1$

$$\therefore \bar{\eta} \approx \frac{(M_1 - 1)(M_1 + 1)}{\gamma + 1} = \frac{4(M_1 - 1)}{\gamma + 1}$$

有时用 M_1 定义激波强度，也有用 $(M_1^2 - 1)$ 表示强度标志。Osterbrock (1961) 利用相对压缩 $\bar{\eta}$ 定义激波强度。

V. 按照上述理论，期望在初期激波在包络附近以几 (a few) 倍光速范围内发展成弱激波，加热低温区域。通过数值计算该加热机制有了较为坚实的基础。最初激波在 200 微秒之内形成，辐射可视化程度较低。当被加热程度增加，发展成为强激波 ($\bar{\eta} > 1$)，位于上游区域。实际上加热度不高，激波可以很弱，“弱”激波理论无效，只是定性的描述而已。

OSO8 望远镜则提供有力证明：300 微秒的激波强度不足加热上游区域。因为包络不均匀且机率不均，小纤维的加热，或声速快速增加区域中的加热 (6.4.1 节) 使 300 微秒的加热无效。

过渡区底层，温度 $10^5 K$ ，观测到的激波主要是非热辐射，激波非常弱，峰值流仅为 $10 W m^{-2}$ 。因此希望在初期声波激波将引起地加热低/高温但对上游区域和弱加热可以需要求助于某种形式的辅助加热。即共振吸收或耗散模不稳定。 (过渡区底层行弱加热，激波强度太小，对加热效果不大)

6.4. 磁加热

1. 磁加热日益受重视的原因：

i. 起球越来越严重，是研究聚变线宽美的一个最重要的强有力场的发现，和叫磁场加热这些区域起主导作用

ii. 到达边缘的热和日冕的高能流密度可能是不同的，因此提高磁加热是必要的机制。这对于宁静区是困难的。磁通量从起球来边界面向上散射，宁静区和运动区均由同一机制加热。运动区磁通量更为集中，提供更多的热量。

2. 磁加热二种可能的方式：

i. 磁波

ii. 直接的磁耗散

这两种方式的加热其起因是不同的，即一次放区域的既非电
粉带耗散，也不是通过加热区域的方式不同，一种是行进中电流片
(也即磁波之源)，另一种是区域不移动。

3. 磁场拖动起因于行进区域的磁力线尾部的运动。例如：起球粒子
沿边界面附近的强磁场，不断受到未转化的冲撞，周期约为5分钟。
尺度约1000公里(未转化的尺度)。尾部移动的幅度为起球半径的移动
时长，约许多小时。

4. 粒子运动产生几种类型的波，很快，慢磁声波，Alfvén波，^有可能向
上传播。磁声波衰减成为慢波，类似于声波-高地衰减，也有额外
的耗散，即通过碰撞加热。Alfvén波和慢波耗散，需通过非线性
相互作用产生磁声波，然后再释放能量。

5. 需要进一步研究的领域：

磁场对波幅衰减的影响

不同运动模式的渐近性耗散。

不稳定性如何与个别的传播

- b. 磁场扰动的传播，即波通过均匀介质或恒定速度的介质，可用线性化的方程表达。但对下面四种情况
- i. 磁场扰动很大，非线性效应变得重要， ω 忽略不计
 - ii. 扰动传播时间相比相干长度 λ 很长， $\omega \tau_A \ll 1$ 成波列。
 - iii. 扰动很快， ω 波长远大于 λ ， $\lambda > \tau_A$ 为常数， ω 不随传播变化
 - iv. 磁力线几乎静止 ω Alfvén 传播时间 (travel time) τ_A 过慢

$$\tau > \tau_A = \frac{L}{V_A} \quad (6.12)$$

或者，波长大于传播的速度 L

$$\lambda > L \quad (6.13)$$

在例 iv 中，磁化形变但是可以通过一系列技术而实现。串联螺线管可以包围电流片，电流片中就有既磁场耗散，消耗能量，过材料也可有磁场重联，磁场转换为热和动能。据此事件称太阳风耗散。但若在日冕中，磁场重联化较少，没有上述的发生，称为诧异。

6.4.1 磁波的传播和耗散

1. Osterbrock, D.E. (1961, *Astrophys. J.*, 134, 347) 的论文被视作经典论文。分析了磁场对波的产生，传播和耗散的影响，以及加热了色球和日冕。文中的分析限于小振幅的波，波长远大于布洛，宁静区的磁场平均值约 $2G$ 。向上传播的声音频率上越来越高得是磁流体波，即阿尔芬波。上方的密度下降，Alfvén 波的速度就增加。当在 2000 里以上，Alfvén 速度 (V_A) 超过声速 (C_s)，于是平均场强度为 $50G$ ，磁场的作用对加热已起明显，可能增强加热作用。越来越快的阿尔芬波的传播速度与太阳风速度相当，对温度有直接影响。
2. 一个传播快的声波可以沿任何方向传播 (见图 P.130)，相速度可以以沿着磁场方向的 Max (C_s, V_A) 改变为穿越磁场的 $(C_s^2 + V_A^2)^{1/2}$ 在相对论下，慢波模式仅沿平行于磁场方向传播，传播速度

小于 C_s 和 V_A 。第三种类型的波就是 Alfvén 波，群速度为 V_A ，沿磁场方向，既不改变密度也不改变远强。

3. Osterbrock 指当磁场强度大于均分值几百 (a few) 时的区域，即河流区，内有向同性扰动产生的 (波) 将大部分是快波模式，产生相当多的 Alfvén 波的流量要小得多。他认为快波模式的能量是电磁的主要加热机制。

补充 Osterbrock 的观点，快波的传播和耗散与普通声波相同，从定量的角度上考虑有 7 点 (1)

i. 分层大气中，沿向上传播，波的折射。

ii. 声速随高度增加，从地球处的 10 km s^{-1} 增至日冕处的 200 km s^{-1} 。声波向上传播过程中，传播方向偏离垂直方向，就像光从水到空气中传播，偏离垂直方向。等高处密度在远处低于太阳表面值等于 Alfvén 速度的差值是使 Alfvén 速度随高度增加更快。从地球处的典型值 10 km s^{-1} 增至日冕中的 10^3 km s^{-1} (比较 Priest, P. 158 日冕中 Alfvén 速度为 300 km s^{-1}) 向上传播时快波模式的折射比声波更为明显，到达日冕的能量之少。

$$(\text{折射定律 } \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1}{V_2})$$

$$V_2 > V_1 \therefore i_2 > i_1$$

iii. Osterbrock 引入垂直分层等离子体中的光线 (ray path)。群速度 $V_p(h)$ 随高度增加 (波的频率保持不变)，波长增加。Snell 定律 (折射定律) 的推导过程中要求各分层的水平分量保持不变。因此传播方向与垂直方向的夹角 $\theta(h)$ ，随高度变化而发生变化

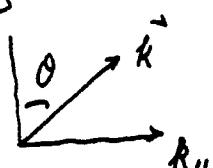
$$\text{群速度 } \vec{V}_p = \frac{\omega}{k_z} \vec{x} + \frac{\omega}{k_\perp} \vec{z}, \quad \omega, k_\perp \text{ 均保持不变.}$$

$$\frac{\omega}{k_z} = \text{const.} \quad k_z = k \sin \theta \quad \therefore \frac{\omega}{k \sin \theta} = \frac{\omega}{k \sin \theta} = \frac{k V_p}{k \sin \theta} = \text{const.}$$

$$\therefore \frac{\sin \theta(h)}{V_p(h)} = \text{const.} \quad h \uparrow V_p \uparrow k \downarrow \theta \uparrow \text{ (群速度群定律)}$$

声波的光线 (ray path) 用此表示，可求得 $\frac{dh}{dx} = (\frac{\omega}{V_p(h)})^2$

$V_p(h)$ 为速度的函数 $T(h)$ ，若为已知，则利用 $\frac{dh}{V_p(h)} = \text{const}$ 可求得 h ，几何声学的声线 (射)



IV. 激波形成前，向上传播的磁流体衰减也可称为声波时间，磁流体衰减除耗散外，还有吸收耗散，在速度极快区域附近，还有双扩散。对于波长沿入射波，吸收耗散的时标为 $T_d = \frac{\lambda^2}{\eta}$ (磁流体衰减半衰期时间 $t = \sim \frac{1}{T_d}$) η 为磁流体扩散系数。Alfvén 波的衰减长度

$$L_d = V_A T_d = \frac{V_A \lambda^2}{\eta}$$

用波长表示相当。可改写成 $L_d \sim \lambda^3 / (\eta w)$ (利用 $V_A = \lambda w$)，可见频率越高，磁流体衰减越强 (从而 Alfvén 速度越大)，耗散越快 (衰减长度大表征耗散快)。

Osterbrock 在纯宁静太空中，磁流体弱，仅为 $2G$ 。Alfvén 波或中性波的频率 $\omega = 1.2 \times 10^{-3} Hz$ ，此尾很大在低色温，而快波模式尾可忽略。因为耗散小，快波在向上声波，有利带耗散，此吸收耗散的作用小得多。普通磁流体强度超过 $50G$ ，Alfvén 波通过色温，向上传播，理论可忽略。如果不存在有效的耗散机制，对 (色温上层，即色温) 加热就可作出贡献。

V. 有几因素使快磁声波或声波交界面成为激波的过程更慢。

① 当 $V_A \gg C_s$ 快波在均匀介质中成为光速时声波传播速度高为 $c = T V_A / (4 V_1)$ (类同于 (6.5) 式)，大于声速的相应值 ($\because V_A > C_s$)

② 在分子离子空气中，密度减少指数 $\rho \sim e^{-\beta n}$ ：密度流速 $v_i = (\frac{1}{2} \rho V_1^2) V_A$ ， V_A 是声速，单位体积中的波传播率为 $\frac{1}{2} \rho V_1^2$ ，同为向上传播 $(\frac{1}{2} \rho V_1^2) V_A$ ， V_A 是声速，单位体积中的波传播率为 $\frac{1}{2} \rho V_1^2 \cdot C_s$ ，同为向上传播过程中，波传播保持不变， $V_A \sim \rho^{-1/2}$ 。 $\therefore \frac{1}{2} \rho V_1^2 V_A = \text{const.} \sim \rho \cdot \rho^{1/2} \cdot V_1^2$

$\therefore V_i \sim \rho^{1/2}$ 。 $\therefore \rho \sim e^{-\beta n} \quad \therefore V_i \sim \rho^{1/2} n$ 由 (6.6) 式可得： $V_i \sim e^{-\beta n}$

（条件：光波向上传播过程中，声速保持不变）声速传播率为 $\frac{1}{2} \rho V_1^2 \cdot C_s$ ，传播过程中声速也保持不变。 \therefore 声速 $12.5 (\frac{1}{\mu})$ 万英里/秒，声速无关。

$$\therefore \frac{1}{2} \rho V_1^2 \sim \rho V_1^2 \quad \therefore V_i \sim \rho^{-1/2} \sim e^{\beta/2n}$$

快磁声波的速度很高 $\sim \rho^{1/2} n$ 或声波速度很高 $\sim e^{\beta/2n}$ ，即增加十倍得多。

vi. Osterbrock 扩展了 Brinkley-Kirkwood 分析磁声波速度的方法。通过分析快激波模式，磁场的引入，使电流表达式 $\bar{n}\bar{F}_{\text{mech}} = \bar{n} \int_0^T (\bar{P} - \bar{P}_0) dt$ 变得更一般，因为磁压力和磁压强也有工作。因此快激波的阻尼长度可写成 $d \approx V_f t_{\eta}$ ，类似于 (b.10) 式 ($d \approx \frac{C_s t_0}{\eta}$)， \therefore 通过快激波模式的速度 V_f 替代了 (b.10) 式中的声速 C_s 。

Osterbrock 发现磁场强度为 $2G$ 时，耗散的率在 1000 到 2000 秒之间，对于低层色球的压力走是弱的。而日冕流时，快模态波的耗流量太大，通过耗散向高层与高层也不少。Habbar 认为上层色球的压力依赖慢模态的理论，慢模态限制通过快模态波的耗散作用。

vii. Habbar 等 (1979) 认为是由于之数 ($\approx 3 s^{-1}$) 快磁声波加热。快磁声波传播越磁场传播，特别是在 Alfvén 速度大的区域，假如 B 大于 0.1 ，而在该区域中你就受到光吸收的阻尼作用。加热是 92.40 流化日冕底部大约需要 $100 W m^{-2}$ (高半球侧向)，但这将长至于 Alfvén 速度发生变化的特征长度，问你可得到何声学起始。

无耗时，假设速度势写成 $\psi = ae^{i\omega t}$ ，根据 a 随时间的慢变化、中速波的相，近似线性 (空间波中 $\psi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha$, \vec{k}, ω 为常量)。在小尺度的空间和长的时间内， ψ 可以展开成级数

$$\psi = \psi_0 + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial r} r \quad (\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r})$$

在此小空间，长时间内，认为有波矢量 $\vec{k} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$ ，频率 $\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$ (\vec{k} 平面波相类比)。 ψ 称为驻波。

在理论力学中的哈密顿-雅可比方程表示， ψ 按下进行计算 $S = \int L dt$, L : Lagrangian 表达式, ($L = T - V$), 动量 $\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{v}}$, $H = -\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}$ Hamilton-Jacobi 方程与 Hamilton 定则方程等价。 $\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$, $\dot{\vec{v}} = \vec{p} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$ 。从 S 可以着手

$\therefore \omega = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, H-J 方程中 $H = -\frac{\partial \vec{S}}{\partial \vec{r}}$, 且平行于 S 可见

ω 垂直于 H

$$\text{上面已得} \quad \vec{k} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}} \rightarrow \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} = \vec{P}$$

$$\dot{\vec{P}} = \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r} \partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \rightarrow -\frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}} = \vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} \rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \vec{r}$$

声射线方程 $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial r}$.

色散关系 $\omega = kV_A$ ($\beta \ll 1$).

Osterbrock 分析的大尺度平行平面层。Hubble 等进一步扩展到射电源
磁场中的平行层，磁场中的等离子体类似于等离子体平衡。一个磁层中的
 B 是大的，那么从磁极延伸到磁极附近的区域就发生所需要的
耗散，不过要使这些波具有相当的周期，因此只有长波长
长波才是重要的。由于波长需要非均匀分形（即需考虑不均匀性）

Zweibel (1980) 进一步地估计了快波的阻尼，只考虑辐射和加热
的耗散平衡，发现平行磁场的耗散率，热平衡是不确定的。

Hollweg (1981b) 提出快模式源的二个困难：它们耗散度已被系统
地反射，可以从来就到 2-3 倍 ii. 从反射出来的光子运动相对速度和
水平速度者，快波应该总相等的。

6.4.2 Alfvén 波的非线性特点

1. 日冕有可能通过 Alfvén 波加热。Osterbrock 认为磁场强度小的时候，Alfvén 波在耗散，受到粘滞阻尼，需要通过磁声波的附加作用，增强 Alfvén 波。2. 过理论认为很可能引起未标注的边界附近产生大的 Alfvén 波。首先，边界附近的千分之几重大的磁场，使得 Alfvén 波穿过去时向上传播，几乎没有衰减，进入日冕。事实上磁场大于 10 G 时，Alfvén 波的阻尼是很大的。至于问题的引申要说明 Alfvén 波向外传播时，随着开放磁场进入不均匀，或者沿着闭合磁力线向内部时，如何把能量释放出来。

Alfvén 波很可能成为日冕加热或称为 Alfvén 波的非线性相互作用而耗散能量。磁场不均匀性与时间取決于波的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。磁场强度 10 G ，密度 10^{16} m^{-3} （日冕活动区模型值）Alfvén 速約约为 300 km/s 。波长 $100,000 \text{ km}$ ， 5 小时 的周期（半径行 $\frac{1}{2} R_\odot$ 的 $200,000 \text{ km}$ ）相等，相应的波周期为 5 分钟 。若周期远小于分钟，则波长远大于半径，Alfvén 波就在卷曲的磁场中传播。当 Alfvén 波传播弯曲磁场时，会由于非线性耗散而停止。如果 Alfvén 波传播于均匀磁场中，速度 V_A 为常数，即有无耗散和耗散分支。无耗散分支使波长 λ 和半径 R 成反比，即有 $\lambda \propto R$ 。耗散分支成快波（磁声波）模式的分支，此后快速衰減，使磁位移的弯曲部分变亮，但是仅在超未标注上方区域。对于周期 5 分钟 或大于 5 分钟 的波，在波长范围内，时间分属的厚度有大的变化。漫射近似就不成立。因此可以期望存在耗散，但耗散的顶部尚未讨论。

2. 考虑非线性作用

① 磁流体力学波的非线性相互作用已有多位作者做了详细处理。

当磁场很弱， $\omega \ll V_A < C_s$ （声速），即磁力线沿方向不能反向传播的波传播非线性地耗散，生成一光波，光波会比较快地衰減。

假设二支 Alfvén 波的频率 ω_0 和波数 k_0 为 $\omega_0 = k_0 V_A$ ， $\omega_1 = k_1 V_A$

$$\text{声波为 } \omega_2 = k_2 c_s \quad (b.14)$$

考虑所有与声速和波数为正，如果发生二支入射波的相位差，则合成的声波必有 $\omega_2 = \omega_0 + \omega_1$ (动量守恒) $(b.15)$

$$\text{波数为 } k_2 = k_0 - k_1 \quad (\text{动量守恒}) \quad (b.16)$$

因为是由于二支 Alfvén 波传播方向相反。

从 (b.14) 式求得波数，代入 (b.16)：

$$\frac{\omega_2}{c_s} = \frac{\omega_0}{\sqrt{4}} - \frac{\omega_1}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{\omega_0 + \omega_1}{c_s} = \frac{\omega_0 - \omega_1}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{1 + \frac{\omega_1}{\omega_0}}{c_s} = \frac{1 - \frac{\omega_1}{\omega_0}}{\sqrt{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{4} \frac{\omega_1}{\omega_0} = c_s - c_s \frac{\omega_1}{\omega_0} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{c_s - \sqrt{4}}{c_s + \sqrt{4}}$$

从而可求得合成的声波的频率 ω_2 ：

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{c_s - \sqrt{4}}{c_s + \sqrt{4}} \quad \therefore \quad \frac{\omega_1 + \omega_0}{\omega_0} = \frac{2c_s}{c_s + \sqrt{4}}$$

$$\therefore \omega_2 = \frac{2\omega_0 c_s}{c_s + \sqrt{4}}$$

\Rightarrow 强磁场区区域，有 $\sqrt{4} > c_s$ ，一支 (ω_0, k_0) 的 Alfvén 波将衰变成一支 (ω_1, k_1) 的 Alfvén 波，和 (ω_0, k_0) 相反的方向传播。 \Rightarrow 另一支声波 (ω_2, k_2) 和 (ω_0, k_0) 相同方向上传播。根据能量守恒的原则 $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ ， $-k_1 + k_2 = k_0$ 。（以上为能量、动量守恒），就有波相位平衡发生。衰变后得声 Alfvén 波和声波频率为：

$$\therefore -k_1 + k_2 = k_0 \Rightarrow -\frac{\omega_1}{\sqrt{4}} + \frac{\omega_2}{c_s} = \frac{\omega_0}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{\omega_2}{c_s} = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\sqrt{4}}$$

$$\sqrt{4} \omega_2 = c_s (\omega_1 + \omega_0) \Rightarrow \frac{\sqrt{4}}{c_s} = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\omega_2} = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\omega_0 - \omega_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{4} + c_s}{c_s} = \frac{2\omega_0}{\omega_0 - \omega_1} \Rightarrow \omega_0 - \omega_1 = \frac{2\omega_0 c_s}{\sqrt{4} + c_s}$$

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{\sqrt{4} - c_s}{\sqrt{4} + c_s} *$$

$$\omega_2 = \omega_0 - \omega_1 = \frac{2\omega_0 c_s}{\sqrt{4} + c_s} **$$

表层所带的 Alfvén 波 (ω_A), 可以看成原生的阿尔芬波 ω_0 , 可以再衰减。另一类速度低的 Alfvén 波, 加上一束声波, 很快过程继续下去, 直到 Alfvén 波的能量全部转换成声波, 声波快速衰减。

③ Wentzel (1974, 1977) 讨论了波相互作用的速率差估计力加速度作用。

他发现 $\frac{V_A}{C_S}$ 在 $\frac{1}{30}$ 和 30 之间的区域, 是 Alfvén 波转换成声波的主要区间。在更长或更短的范围内, 有耗散发生。波周期约一个量, 磁场又是最强的区域, 耗散最强。Alfvén 波的速度间隔 V_1 , 波幅差为

$$F = \frac{1}{2} \rho V_1^2 V_A \quad (6.17)$$

式中 ρ 是圆周等高半径数。

波数为 k 的波, 产生的密度扰动为 P_1 , 则耗散长度也可以写成

$$d = \frac{P_1}{k P_1} \quad (\text{即入射波的扰动力 } P_1, \text{ 与 } P_1 \text{ 相应的扰动力 } d, \text{ 长度 } d)$$

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{P_1}{P_1}, \quad d = \frac{P_1}{k P_1}$$

对于声波近似 $\frac{P_1}{P_1} \approx \frac{V_1}{C_S}$, V_1 为扰动波的速度梯度, 因此可得 (6.4) 式

$$\frac{P_1}{P_1} \approx \frac{C_S}{V_1} \Rightarrow \frac{P_1}{k P_1} \approx \frac{C_S}{k V_1} \approx \frac{\lambda C_S}{4 V_1} = d, \quad (6.4) \text{ 式中的 } d \text{ 是声波变成扰波的行程。这正是声波的耗散长度。但是 Alfvén 波引起的耗散以及声波的传播, Wentzel (1977) 文中引述 Hollweg (1971, Geophys. Res. 76, 5155) 的结果, 认为 Alfvén 波引起的耗散梯度 } \delta P = \frac{1}{4} P \left(\frac{V_1}{\lambda} \right)^2, \text{ 式中 } \delta P \text{ 与 } P_1, (V_1 \rho_1) \text{ 的变化机制以及波的传播有关。Wentzel 将耗散梯度写为 } \frac{\delta P}{P} = \alpha \left(\frac{V_1}{\lambda} \right)^2, \text{ 为数} \alpha \text{ 为常数。Priest \rightarrow 指出 } \frac{P_1}{P_1} \approx 2\pi \left(\frac{V_1}{\lambda} \right)^2 \text{ (对于两个方向相反方向行进的 Alfvén 波相互作用生成声波的情况下, 係数取 } 2\pi \text{ 是合适的) }$$

$$\text{耗散长度 } d = \frac{P_1}{k P_1} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{V_A}{V_1} \right)^2 \quad (\text{对声波 } d = \frac{P_1}{k P_1} = \frac{1}{4} \frac{C_S}{V_1})$$

$$\lambda = \tau V_A, \quad \tau: \text{波的周期}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{代入上式}$$

$$d = \frac{\tau V_A}{(2\pi)^2} \left(\frac{V_A}{V_1} \right)^2 \quad (6.18)$$

④ 现在考虑周期为 10 秒的 Alfvén 波是何时加热在它所穿过的加热区。互相连接的通路或宁静区 (interconnecting loops, - 连接环) 活动区, 似乎形成这样两个: = 22. 阿尔夫伦波传播, 互连或大 - 732. 声速 (声速) 和通过区 (通过区)。Quiet-region loops: - 不连接活动区, Priest, p.32 取, 心脏的热流量为 300 Wm^{-2} , 磁场 $B = 12 \text{ G}$, 互相连接环的面积: $7 \times 10^{14} \text{ m}^2$, 宁静区的声速: $2 \times 10^5 - 10^6 \text{ m}^{-3}$. 对于这二种情况我们有 - 取参数

$$\rho = \frac{10^{15}}{(10^6)} \cdot 1.67 \times 10^{-24} = 1.67 \times 10^{-15} \text{ g/cm}^3, \quad B = 12 \text{ G}, \quad F = 300 \text{ Wm}^{-2}$$

$$= \frac{3 \times 10^2 \times 10^7}{10^4} = 3 \times 10^5 \text{ erg cm}^{-2}, \quad F = \frac{1}{2} \rho V_1^2 \frac{\chi}{\lambda} = \frac{1}{2} \rho V_1^2 \left(\frac{\chi}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \rho^{\frac{1}{2}} V_1^2 \cdot \frac{\chi}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\lambda}$$

$$V_1^2 = \frac{4\pi \frac{\chi}{\lambda} \cdot F}{\rho^{\frac{1}{2}} \cdot B} = \frac{4\pi \frac{\chi}{\lambda} \cdot 3 \times 10^5}{(1.67 \times 10^{-15})^{\frac{1}{2}} \cdot 12} \approx 4.3 \times 10^{12} (\text{cm/s})^2$$

$$V_1 = 2.08 \times 10^6 \text{ cm/s} \approx 20 \text{ km/s}, \quad T = 10 \text{ s}$$

$$\text{耗散长度: } d = \frac{\tau V_1^3}{(\sigma \pi)^{\frac{1}{2}} V_1^2} = \frac{\tau}{(\sigma \pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{B}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\rho^{\frac{1}{2}} B}{4\pi^{\frac{1}{2}} \cdot F} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{\tau B^{\frac{3}{2}}}{\rho F} = 3.59 \times 10^5 \text{ km}$$

(Alfvén 速度: $8.2 \times 10^5 \text{ km/s}$, $\approx 300 \text{ km/s}$ 不对称)

(Priest 在起始时 $\approx 10^5 \text{ km}$), 互相连接环的半径 (互连环) 是 $\approx 700,000 \text{ km}$ 耗散长度与互连环半径相同 (我们对互连环的半径)

ii, 对于互连环的运动区 $F = 5000 \text{ Wm}^{-2}$, $B = 20 \text{ G}$, 温度梯度很大 $V_1 = 60 \text{ km/s}$, $V_A = 1.38 \times 10^5 \text{ km/s}$ ($\rho \propto L^2(t)$), $\tau = 10 \text{ s}$, $d = 1.85 \times 10^5 \text{ km}$. (65 km/s)

(65 km/s 附近, $d = 1.58 \times 10^5 \text{ km}$) 为 $1.1 \times 10^5 \text{ km}$. 由 0.5 半径长的加热区, 因此在该区, 大约周期 (≈ 10 秒) Alfvén 波可能在运动区上加热区边界的加热 (互连环) 加热

运动区半径大, 磁场较强, 耗散长度 $d \sim \frac{V_1^3}{F} \sim \frac{B^4}{F} \sim B^4$ (10^5 km $F = \text{const.}$), 因此加热区太长。可能长期的温度或磁场加热区加热有困难。

⑤ 相对于流束的方向是怎样的, = 流束的方向与什么引起加热

加热集中于次声附近。Wentzel (1976, 1978) 指出了上述讨论，包括了
1. 不等的储存，2. 对称的加热，热以及化过度已没有反射。反射过程便
向于仅能通过上升不相等的流速与相等量扰乱过度下面的波。

⑥ Hollweg (1979, 1981a) 对 Alfvén 波加热作了较为详尽的研究。Alfvén 波
的优点是除了数学上容易处理外，不易传播，不会有关或通过加热的
反射^(?)，而且能以磁场所得传播，传播速度也随有磁通量。Alfvén 波是
1 AU 太阳风湍流的主要因素，这已被观测到。Hollweg 提出垂直碰撞在
辐射带的相对论性扭旋的传播，由方程

$$\left(\frac{V^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \omega^2 \right) (B_0 \delta V) = 0, \quad ; \quad \omega \delta B = B_0 \frac{\partial}{\partial s} (B_0 \delta V)$$

则得。 ω : 角频率。 s : 1 周期 (B_0) 的距离。在一定速度下， ω 为常数，
若为零，则无运动。此将由扰动速度 δV 和磁场 δB 。

⑦ 考虑冕洞的运动场

，^(Alfvén 波) 短周期，长周期波 (10^3 到 10^5 秒)，典型的能量为 10 W m^{-2} 。

可以驱动太阳风。

\rightarrow 短周期 ^(Alfvén 波) ($10^3 < T < 5 \text{ min}$)，流速 $10^3 - 10^4 \text{ W m}^{-2}$ ，可以驱动针状体。
其能量足够引起色球和日冕的加热。“5 分钟”周期的加热是怎样的衰减这
些波，且理论似乎有几种可行的耗散机制。不过尚未有研究。

Alfvén 波在中层色球中，对于加热是重要的；通过速度剪切导致 Kelvin-Helmholtz 不稳定性，或者磁场剪切与运动撕裂模产生非线性波动；
^(Alfvén 波) 在色球层会产生阿尔贝特-卡普利模式和准线性湍流，随后加热，⁽ⁱⁱ⁾ 放热。
当 Alfvén 波携带的磁力线传播或反射时，线性的几何学（几何学）部分会
把它们归类中的 Alfvén 波转换成热浪，快速衰减（见图 1.248）

Hollweg 等人 (1982) 由于非线性方程进入密度不稳定的解和叫：1. 由
Alfvén 波的周期小于 (a few) 几分钟，光速的速率很高 (Alfvén 波的速度很快)
且约为 1 km s^{-1} (或大于此值)，Alfvén 波将色球加热并成为热浪 (?)
(Hollweg, J.V., 1981, in S. Jordan (ed), The Sun as a star NASA/CNRS, Ch. 15)

人们认为这种波将驱动向上流动(上升流), 附加速度也随高度而变.

8) 磁动包层理论

在包层中, 磁场变化率 $\frac{V_A}{L}$ 的倒数, L 是包层的长度, 与周期有关.

$L = 20,000 \text{ 公里}$, $B = 100 \text{ G}$, $n = 10^{16} \text{ m}^{-3}$, 周期 $T = \frac{2L}{nV_A}$ (Hollweg, 1981, Solar phys.

20, 25) $20\pi n, 10\pi n, 7\pi n \dots$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

$$T = \frac{2 \times (2 \times 10^4 \times 10^5)}{\frac{100}{(4\pi \cdot \frac{10^{16}}{10^6} \cdot 1.6 \times 10^{-19})^2}} \sim \frac{18.32}{n}, T = 18.32, 9.16, 6.10 \dots (n=1, 2, 3 \dots)$$

(这里 $2\pi n$ 和 $10\pi n$ 分别是 $n=20, 10, 7, \dots$ 相应之值)

磁层的边界位于 22.56 (≈ 7) 离地 2000 公里的反向, 离开速度已进入日冕, 为许多
m/s (典型值为 $1.5 \times 10^4 \text{ m/s}$) 无限地进入日冕区. 而且因带电荷过大
(从而 Alfvén 速度也大) 向极反射.

Leroy (1980) 利用老练的方法分析 Alfvén 波的反射, Alfvén 波沿磁场方向
($B_0 \vec{z}$) 向上传播. 在磁场中有等离子体流动. 他发现磁场为 1 G 时, 周期大于
1 小时的波将无反射地到达日冕.

磁场为 3000 G 时, 只有周期小于 1 小时的波才能到达日冕. 这样说来只有短
周期的波能利用磁通管到达日冕.

磁力加热的十倍:

1. 磁场扰动起因于磁力线被压缩的运动.

2. 向运动产生磁声波 (快, 慢磁声波, Alfvén 波)

磁声波形成激波, 表现为反射. Alfvén 波 (压缩带) $\xrightarrow{\text{传播不耗散}}$ 快声波
 → 表现为反射.

3. Osterbrock: 快(磁声)波和声波的区别

	声 波	快 波
向上传播过程中	速度增加 $10 \text{ km s}^{-1} \rightarrow 200 \text{ km s}^{-1}$ 偏高垂直方向 湍流 快	增速更快 $10 \text{ km s}^{-1} \rightarrow \sim 10^3 \text{ km s}^{-1}$ 偏高更多, 到达时速度更慢 湍流, 随着耗散 慢 $d = \frac{C_s t_0}{\eta}$
激波尾巴长尾		$d = \frac{V_F t_0}{\eta}$

4. 加热

Osterbrock	Hakkai et al.	Hollweg
i. $B=2 \text{ GWT}$, 快波加热低层 色球附近 (多) ii. 慢波加热色球后色球 (慢波通过快波加热相 互作用产生)	是由于快磁声波加热. 快磁声波不耗散传播得快, 反射出 Alfvén 速度大的 区域, 增强了压缩阻尼耗散	1. 快波加热顶层及底部 到 1.1 日冕 2. 从顶层到底部耗散 与不同 ω 和水平速度 有关. 快波在高层耗散少.
5. Alfvén 波和何表成的反射带.		

注意 Priest 的叙述 (P.162): ① 在有 IC 限制 \rightarrow Alfvén 波 ② Alfvén 波 2. 表示
 ③ 此处其他模式的波, Alfvén 波很弱且耗散

Osterbrock	一模型论	Hollweg
磁场强度大时, Alfvén 波在 色球上被压缩, 而通过 磁场波相位同时增强 Alfvén 波, 向上传播.	压缩带 (即压缩带附近有强 磁场, 压缩的 Alfvén 波可穿过 压缩带入色球, 同时因为, 压缩 带减弱了传播.)	Alfvén 波周期小于几分钟. 在色球上速度相位相位 $\sim 1 \text{ km s}^{-1}$ 色球中被洗成为慢声波.

b. Afven 波的产生机制

- i) 对称性和相位作用: ① 由于圆周对称性的妨碍作用, 周期大于 5 分钟的 Alfvén 波, 波长小于半径, (意味着磁力线弯曲传播, 跳变转化为 T 模式, 在圆) ② $\omega_{\perp} > \omega_{\parallel}$ (高), (意味着①的模式不成立, 仍可期望有耗散, 在圆上高次) ③ 波的频率与表层 (荷合运动量守恒), 故将产生声波
总之, 安逸 Alfvén 波变成声波.

ii. Wintzel:

Alfvén 波通过相互作用转换成声波, 任何逆向长度相当的扰高内发生耗散, 加热. ① 对于短周期 (~ 10 分) Alfvén 波, 对日冕活动区 (宁静区) 或活动区边缘 (色球环) 加热是可行的. ② 长周期 Alfvén 波或磁耗散有可能对于活动区深处加热.

iii. Hollweg:

- ① Alfvén 波的扭耳巴尼 (电波耗散) 在中层色球中, 对这阶段最重要
② 通过速度剪切导致 Kelvin-Helmholtz 不稳定性或者磁剪切驱动
扭耳巴尼模, 从而产生扭耳巴尼
③ 色球中, Alfvén 波与太阳风和慢波的非线性耦合, 限制了半径.
④ Alfvén 波弯曲磁力线传播, 或者折射时, Alfvén 波转换成快波
快速衰减. (与 i 中的①相同)
⑤ 逆向 (高处) 热辐射从极区向赤道流动, 送入日冕.

热辐射吸收率的热流密度 $1.5 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$

加热速率 (色球, 宁静区)

热辐射吸收率 300 W m^{-2}

活动区加热, 加热率高的地方

(色球) 5000 W m^{-2}

Habbal et al. 无碰撞理论, 新

② 热度梯度化流体 100 W m^{-2}

IV Leroy. 长周期波能通过强磁通量割面加热.

6.4.3 Alfvén 波的产生与传播

(本节内容取自 Larson, J. 1978, ApJ, 226, 650)

1. 日冕活动区的平行特征：封闭，类似环形
2. 作者介述一类特殊的过程：极紫外日冕回流环（EUV coronal rain loop）
起于冕环（约9-10天），形成致密的流动元素，呈下垂带上方带可识别。
↓
9月12日
晴转
3. Foukal (1976, 1977) 表明：日冕雨落环一环很大，直径 $\approx 10^5$ km，热力学
性质随半径改变，特别在密度和热压强向环的对称轴靠近
时减弱。日冕雨是一层同心环，最热部分 ($T \geq 10^6$ K) 半径很大 ($\leq 10^4$ km)
最冷部分 ($T \leq 10^4$ K)，半径为分割半率的极值 ($\approx 10^3$ km)
因为冷环（靠近轴中心）的速度已超过静力学平衡的速度，对这
种结构再采用静力学模型似不完全合理。
4. 观测表明，有 Hα 的爆发多次，始于数次，然后向下流动。
5. EUV 观测 (OSO 8) 表明，本系统中的回流速度达 10^3 to 100 km s⁻¹ 以上。
(即在平面上)
6. 对这种定型日冕回流环，必须假定运动速度差（即局部速度差和整体
速度差）以及质量的平均速度，必须随时间和附近对称轴时。
也即附近等高处速度较低的区域，质量减少。
7. 定型回流环的磁场环、可观测到的（热力学参数（密度、压强等的分布））
辐射 - 放射，即为半径环。可能随速度强度随时间变化的同时，相应地
有 Alfvén 速度的径向变化。由于辐射化的时间长，Alfvén 速度的变化，必
定反映了系统抵御 MHD 波的稳定性。
8. Foukal 认为这种活动区将被加热。珊瑚礁已观测到的辐射
损失通过从附近的热库吸收热量而得的平衡。热库则通过加速度
而消耗能量。除此外，向外热的传递等高处，即外日冕，是首先进
入的区域（热库）。外日冕由某些尚未清楚的机制加热。
9. Foukal 声称，焓流 (enthalpy flux) 从外日冕（热库）通过某种
7. 稳定性（很可能为 MHD 不稳定性）的作用，进入环流，从而发生发

(2) 情况二

生在环流带附近。一旦大水流进入环流内部，携带进来的热量高时，
7. 会像外日光中那样继续得到热量，而不能通过辐射冷却内部，流动就成功。
浮力作用减弱，随着流速的增加向下加速。这种流动的机制符合热力学上
的公理。但是考虑到外日光的大水流遇到岸边附近的速率，该方案似乎不可行；不稳定性通过对流使外部的热量高物体进入环流内部的最大速率就是
从外日光向水体提供热量高物体的速率，由于外日光可以有波动，为了解决
7. 不稳定性提供热量高峰，这些外部的热量高峰必须横越磁力线，因为
磁力线提供热量高峰，区域发生不稳定。这是做不到的。因此外日光中有大量的大水流未半径行驶
到岸边，而内部辐射损失的可能甚为可疑。

10. 日光带应该近似为热力学封闭系统（无关风速除外），如果确定封
闭系统，必须有均匀的壁温来保持热量平衡。由于热力学封闭不可同
寻常，因此环内的壁温的恒定可将外日光的壁温有长处。外日光
相对均匀，即认为（热力学上）均匀封闭不可行。

11. 传说通过磁流体的耗散率加热磁流体，这与丁此取的与日光加热机
制有很大不同（虽然也是利用磁流体力学），即 Alfvén 波通过某种
形式耗散能量。

12. 等离子体中有二类波 ① 传播即剪切 Alfvén 波 ② 匀速运动，从而有 Alfvén
表面波。匀速运动时 耗散速度 V_{ix} [高是 (459) 式]：

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\epsilon(x)}{k_y^2 + m_0(x)^2} \frac{dV_{ix}}{dx} \right] = \epsilon(x) V_{ix}$$

作为一个简单例子，有一个磁场分量，把均匀的厚度扁平，令由之于 $x=0$ 时

$$B_0(x) = \begin{cases} B_0, & x < 0 \\ B_0 e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

3. $m_0^2 > 0$, $m_0^2 > 0$ 时，有磁声和色波

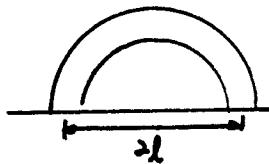
$$V_{ixm} = \begin{cases} e^{m_0 x} & x < 0 \\ e^{-m_0 x} & x > 0 \end{cases}$$

$$V_{ix} = V_{ixm} e^{i(\omega t + k_x x + k_y z)}$$

体波和表面波可以有连滚谱.

当不均匀性的特征长度减小时, 表面波变得最重要. 当特征长度大于行波(锐向速率), 表面波就完全变成边界波. 实际的星际中的等离子体一般行化程度较高, 因此没有表面波连滚谱. 体波和剪切 Alfvén 波, 和一起的 Alfvén 波的空问某向限区域的振幅随行波而变(意味着密度和压强的空间分布). 在半数以上某向量附近, 表面波的传播速度与当地 Alfvén 波速近一致时, 表面波将共振激发一部分体波. 该位差定义为共振空间(spatial resonance)半径空间附近区域运动半径约 λ , 半径内激发电波称为动力学 Alfvén 波(KAW: kinetic Alfvén waves), 因其动力学不同, 仍有区别. (因为 Alfvén 波在均匀介质中传播). Alfvén 表面波通过 KAW 作用半径, 加热非均匀等离子体. 这种加热的最重要特性是一致均匀性. 事实上当加热后内部加热是不均匀的.

13. 日冕曰 $\frac{V_A}{V}$ 和 β 分别意味着日冕 Alfvén 速度差 ΔV_A 是多大 (ΔV_A 和外部等离子体 V_A , B_0 , ρ_0), 支持 Alfvén 表面波的生成. 日冕磁场补充半径 λ . 表面波激发了位于半径内且与表面内的 KAW. 振放了能量. 然后 KAW 产生加热等离子体. 表面波的产生长度超过 λ 的比例时, 一根吸收高相干色圆锥了它的辐射. 加热就发生在鞘层内, 鞘层辐射相当弱.



14. 鞘层加热后, 它邻近鞘层的薄边界层 ($\leq 100 \text{ km}$) 内, 磁场不稳定的幅度增加得很大. 垂直磁场方向的等离子体数目的变化就很大的程度被抑制. 于是有一部分能量从鞘层中流出. 移出了边界层加热. 边界层中的热等离子体因为浮力作用, 使磁力线加速向上运动, 來自下方的热等离子体入鞘层. 边界层得以继续维持.

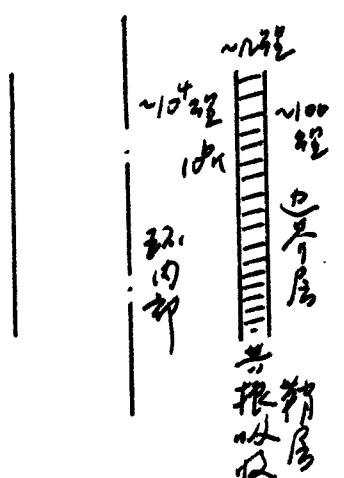
Foukal 模型中, 环形附近沿不稳定区(在图中为 Rayleigh-Taylor 不稳定性)使上升的边界层中的热等离子体进入环的内部. 环内发生对流; 即逆热的共振吸收鞘层附近的薄边界层内, 热等离子体上升, 令得

凝胶块、沉淀物等。

这种对光的稳定性差，任何加热或剧烈震荡都会造成质变，而减压蒸干也可引起光变。不论使辐射加热或加热时间过长，对光十分敏感的质和许多半胱氨酸变性。

15. Lanson 模型的模型：

- ① 各种氨基酸在不同磁场下的吸收峰带位置和强度
- ② 不同氨基酸的物理性质，共振吸收带，带宽和内吸波段，带宽，半径，吸收率不相同



6.4.4 破坏耗散

位于光球中的磁力线是直运动的，运动速度必须大于 Alfvén 波的传播时间 $\tau > \tau_A = \frac{L}{V_A}$ (6.12) 或者波长必须大于 L , (6.13), L 是位形的尺度。波通过均匀或湍流介质，传播的速度不再成立。研究日冕磁场时，认为日冕的破坏耗散的改善是通过一系列的平衡和演化而得到的。平衡位形中贮存的能量来自光球运动，起主导作用。因为日冕中的电导率 $\sigma \rightarrow \infty$ ，因此在尺度过大时，电流可以忽略，也因为尺度过大，电流也不可忽略。正常电导率 σ^* 约为 1 逸零电导率的 $\frac{1}{100}$ ，日冕振荡有永久的等离子运动，即为卷旋运动，电流也是可忽略的。因此通过磁场的耗散与耗散加热过程的第一方法是磁场卷旋以及由此产生的电流集中于电流片，即通过卷旋的电流鞘或电流丝 (current filament). (图 6.4)

如果电流密度很大且电流密集区的宽度大于几米，耗散则可能因为电流密度高而产生运动而大为增强 (参见 2.5 节，讲解 P. 22-23)

当有电流片，鞘或电流丝形成时，磁铁通过欧姆耗散迅速转换成热能，耗散加剧。这使人们感到日益特别的是由于强磁场，被许多微扰 (micro-flaring) 加热。这些微扰是由因光球运动而产生的。软 X 射线空洞中明显的冕环就是大部分耗散的热量集中在光线运动的体现。

理解磁耗散加热的特征需要讨论电流片，鞘或电流丝的形成，维持和衰减。Tucker (1973) 从量级上估计了电阻区域的厚度，电流片或电流丝的尺寸，但还没有令人信服的关于形成鞘或电流片的机制。三种强电流区域中，电流片最令人关注。电流片的形成有以下途径：(1) 由已存在的耗散带或者通过非磁中性点，前一种情况只要有限的光球运动就能维持电流片，其规模和速度则同电流丝，或者通过热不稳定 (6.4.4c) 形成电流片。

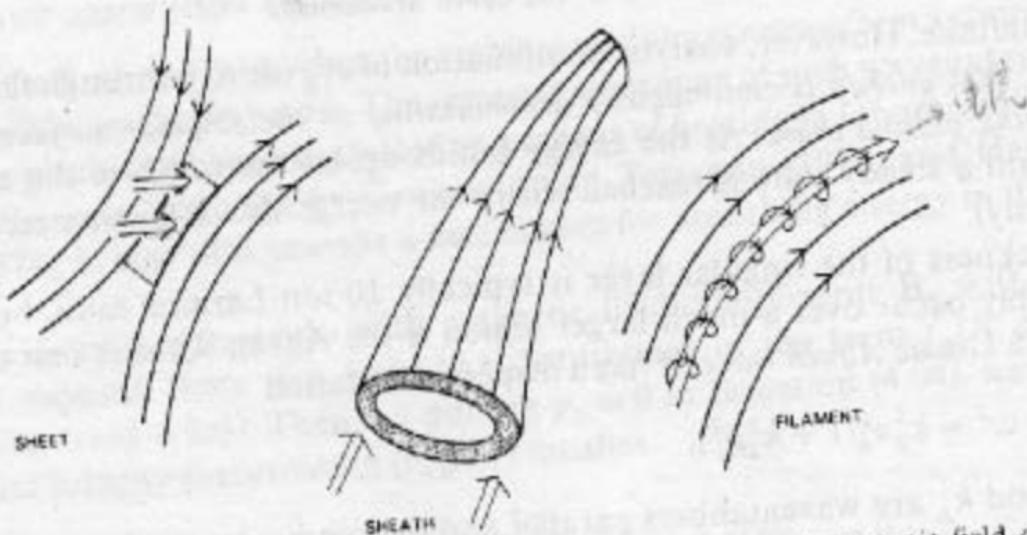


Fig. 6.4. Three geometries for a current concentration in which enhanced magnetic field dissipation may occur. Light arrows label magnetic field lines, whereas large arrows indicate electric current directions.

extremely intense current sheets, current sheaths (around flux tubes) or current filaments. If the current density is so strong that the width of such a current

附：关于斯图尔特进化论与考夫曼不稳定性（混沌）的讲稿。现以吉象山的一粗略稿本。

当 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, 对于后面的碰撞位移, 碰撞力将
趋于零, 同时碰撞力和碰撞速度向碰撞
原点处移动的

当 $T \rightarrow \infty$ 时，可以又稳定。由于催化
电阻（这个模型不稳定性特有的条件）
不能趋向中心部位不稳定。如果再加一个压
力值形如 $\frac{1}{2}x^2$ ，不能趋向中心，引起
不稳定，当然 x_0 。
电流化向着流向的方向。

6.4.4A 章節

Tucker (1973) 和 Levine (1974) 提出
自旋加速度是由非势磁场的耗散产生的
耗散扭折的磁场的不稳定性, 由 Teller (1974). Tucker 通过计算发现耗散的
速率是: $dW_m / dB^2 \approx$

$$\text{速率: } \frac{dW_m}{dt} \approx \frac{v\beta^2}{2\mu} L^2 \quad (b.19)$$

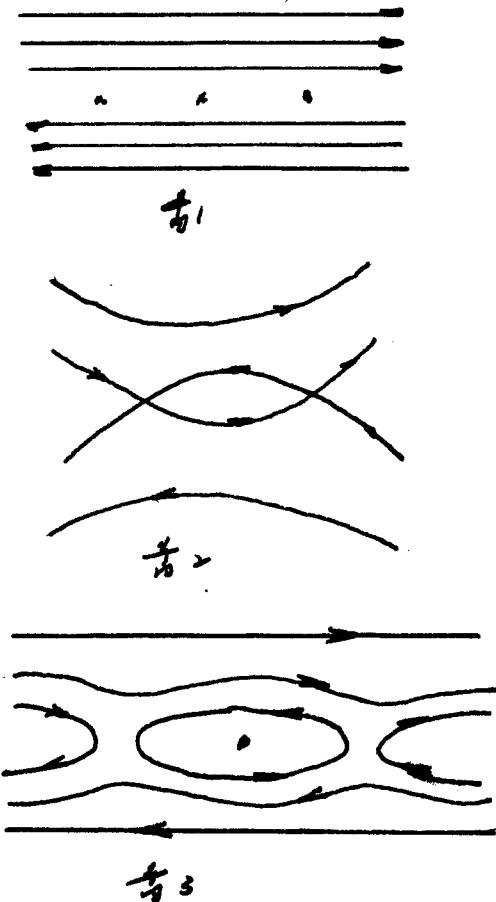
V. - 老练运动的扭曲速过。老练化运动区而来的L型运动，扭曲了
肩膀角，同时膝盖被踩踏耗散，不够扭劲的能量为耗散产热。

$$\text{速率} \quad D \approx \frac{\partial^2}{\partial t^2} L^3 \quad (6.20)$$

均匀分布化运动体积 L^3 中。D. 动量

(迪斯半径条件下: $\sigma \sim \frac{1}{x}$, $j \sim \frac{I}{L^2}$, $R \sim \frac{t}{x}$. 代入(6.20)可得 D 的时间功率)

(6.19) 式 = (6.20) 式. 由动量将保持不变



光球的扭曲速度是加速度随高度而增加的， π 为 3000 W m^{-2} （W/m²）送入日冕。从(6.19)式可知，当光球磁场为 100 G 时， $V \approx 100 \text{ m s}^{-1}$ （利用 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot V = 3000$ ）运动已深入到 $L \approx 10,000 \text{ km}$ ，整个运动区内均匀耗散，摩擦电导率 σ

$$\frac{1}{\sigma} = \eta = \frac{V_{ci} \cdot m_e}{n e^2}, \quad V_{ci} - \text{电子-离子碰撞频率}, \quad \eta - \text{电子的数密度}.$$

将(2.17)式 $\sigma = 1.53 \times 10^{-2} \cdot \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda} \text{ mho m}^{-1}$ 代入得电流密度 j 。

(注意 (6.19) 式左边为功率 (J. 是单位体积，而 η 是运动区)，(6.20) 式 η 为总功率单位，碰撞损失功率和耗散功率之半径 L)

$$\frac{dW_m}{dt} = D, \quad \text{其中 } \frac{V B^2}{2\mu} = 3000 \text{ W m}^{-2} (\text{W/m}^2)$$

$$\therefore \frac{j^2}{\sigma} L^3 = \frac{V B^2}{2\mu} L^2 = 3000 L^2$$

$$j^2 = \frac{\sigma}{L} 3 \times 10^3$$

取日冕温度 10^6 K , $\ln \Lambda = 10$, $L = 10^4 \text{ km} = 10^7 \text{ m}$, 则 j^2 为

$$j^2 = \frac{1.53 \times 10^6}{10^7} 3 \times 10^3 = 21.4 \text{ A/m}^2 \quad (\text{书中为 } \sim 30 \text{ A/m}^2)$$

② 现代湍流模型探讨。

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{4\pi}{c} j = \frac{4\pi}{c} 21.4 \times 3 \times 10^3 \frac{10^4}{10^4} (\text{cm}^2) = \frac{4\pi \times 2.14}{10^4} = 27 \times 10^{-4} \text{ G/cm} \sim 0.3 \text{ G/m}$$

$$(\text{书中电流密度为 } 30 \text{ A/m}^2, \frac{B}{l} \sim 0.4 \text{ G/m})$$

磁场梯度很大。Tucker 认为耗散之集于高电流产内，而耗散分布于运动区内， l 为电流产的厚度。

③ 考虑等离子流动。电流产仅占运动区体积的一部分，厚度为 l^* 。运动区面积为 L^* ，电流密度 $j^* \approx \frac{B}{\mu l^*}$ ，流动电导率 σ^* 。在运动区速率

$$D^* \approx \frac{j^{*2}}{\sigma^*} L^* l^* \quad \text{或} \quad D^* \approx \frac{B^2}{\mu^2 \sigma^*} \cdot \frac{L^{*2}}{l^{*2}}$$

$$\text{流动电导率 } \eta^* = 10^{-1} \bar{l}/\omega_p = 10^{-10.7} F \eta_{10}^{-1/2} \text{ seconds}$$

F：数位因子，对于等离子运动为 1，对于高电流为 100。

η_{10} : " 10^{10} cm^3 为单位"; ω_p : 等离子体频率

Tucker 取流动电导率为恒定值 (Columbic 导率): $-3 \text{ 万} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\eta^* \approx$

电流片厚度为 10 m . 他发现只差几个($a\text{ few}$) $L^k = 10,000$ 就进入大尺度电流片
直至的热量足以加热活动区.
Levine(1974)研究日冕磁场的缠绕,含有许多小的电流片,逐渐消失.
消之过程中,加速了粒子,并通过粒子的缠绕碰撞企图加热. 热达到热平衡,
(thermalized?) 而在类电流片中.

Rosner 等(1978)支持 Tucker 的观点,即通过磁耗散直接加热叶片。他们认为加热过程集中在电流密度高、辐射强的区域,通过加热或
电离带附近的壁附近,是辐射热的直接运动,使辐射应力作用,造成叶片
局部温度运动作用的功。当磁耗散平衡,一旦转化释放,就有当地磁场场
守恒(导热系数 $K_{\parallel} \gg K_{\perp}$)。粒子越磁场偏转角的提高取决于可得发射能
小,以及速度差。Golub 等(1980)进一步指出由于粒子直接运动,造成加
热以速率 $E_H \sim B_0 B_2 V_0 / L$ (单位体积)。

电流片模型的不确定性在于需要施加能维持该电流，为了保证足够的
热量，双面电流片厚度应为 50 m ，单层中的奇偶对必须位于流动层
而且离动电导率之常值的 $\frac{1}{10}$ 。除极化之外，在场内产生足够大的电流
不足以维持强的奇偶对流动似乎是不可行。

比较可行的钢内碳耗散态通过电炉不稳定性(7.5.5节), 灰和光硅
種或碳子的撕裂模, 发生这种不稳定性的要求的电流热效不得多.

Sakurai 和 Levine (1981) 分析固态球中无关的运动产生更多以从球
像光散射中的光子对。

Sturrock & Uchida (1981) 13 種を認めた。遼河延長の階級運動層の
石炭層を含む。

6.4.4 B 治疗片

1. 电流片的形成

扬子江流域，21个站，33个水系，93个水体，3522个点。

這就是說，你的思想的運動，相鄰的心理過程將相互作用，或者相反，當

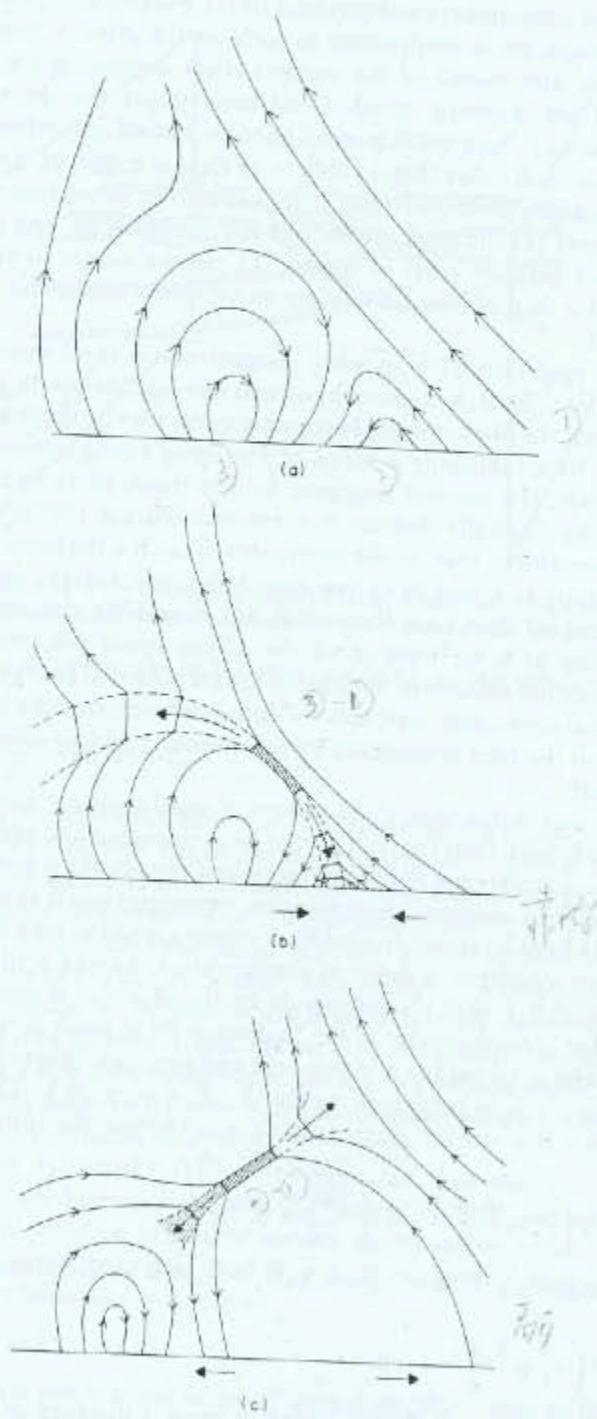
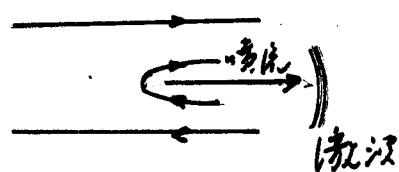


Fig. 6.5. Magnetic dissipation due to the relative motion of: (a) two neighbouring flux tubes when they (b) approach one another or (c) move further apart.

或是相互排斥，磁通量的负空间形成电流片，磁重联，耗散过程。这些磁耗散过程不仅在磁力线方向相反时发生，磁力线的夹角不为零时也会发生（见6.5）

2. 电流片是对于电场运动的响应，假如邻近的火卫以某一速度相对运动，日冕中相应产生电流片，可以有磁重联。当火卫的相对运动不断，就可能持续重联，以及能量耗散过程。电流片的厚度取决于磁场强度和电流片中速度。电流片的宽度是约小时，片内将处于湍流态。当电流片密度大于临界值，就会触发五级燃（subflare）或耗散。（由磁通调制机制而定）

电流片会发射粒子，对于慢速的火卫则形成喷流，快速火卫则形成激波（产生磁声激波）。通过激波增加速度而不依靠电流片本身。



3. 当磁流体静力学平衡被破坏或者当：

7. 在火卫运动时，也会引起电流片。

如果火卫是先慢后快运动时，低 β （高等离子）的日冕相变出现一系列的无规则运动，但实际情况远比这复杂。Parker (1972) 和 Syrovatsky (1978) 证明 磁场随火卫运动时，日冕不规则相变时的无规则平衡图

而是形成电流片，这些电流片本身是不处于平衡状态。因为电流片中快速的磁重联，磁位形（安培力平衡势能最低的狀態）和涡环都耗散过程（Parker）即意味着 磁位形 受到势能变化的驱动 耗散过程。连续的火卫运动意味着火卫运动时有相变运动，就有磁重联，有磁流体运动。

4. Parker (1972) 证明，仅当磁场的变化是由平行扭曲从一个火卫向另一个火卫延伸时，才有平衡态，比较复杂的运动机理使磁力线相互缠绕而形成的磁通管，不会处于平衡态。

Parker 考虑一个均匀的柱形，等高处压强 P_0 ，磁场 $B_{0\hat{z}}$ ，火卫位于 $\vec{z} = L$ 平面（见6.6），假设火卫垂直于运动入 ($\ll L$)，因此造成对平衡势的偏离， $\vec{B} = B_{0\hat{z}} + \vec{B}_1(x, y, z)$ ， $P = P_0 + P_1(x, y, z)$ ，其中 $\frac{B_1}{B_0} \ll \frac{P_1}{P_0} \ll 1$ (小扰动) 静力学平衡方程， $-\nabla P + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}_{\mu} = 0$ 。改写为 $-\nabla(P + \frac{1}{2} \vec{B}^2) + \vec{B} \cdot \nabla \vec{B}_{\mu} = 0$

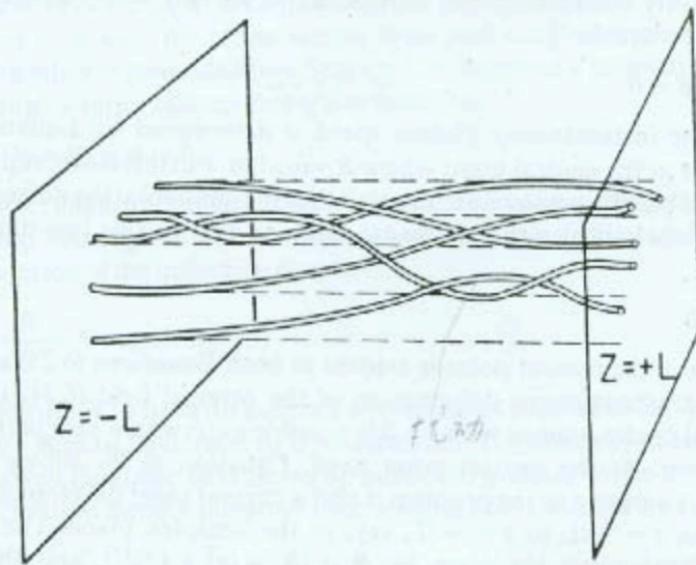


Fig. 6.6. Schematic drawing of the topology of magnetic tubes of force following a displacement of the ends of the tubes where they intersect $z = + L$ (from Parker, 1972).

the region $-L < z < L$ from the end-planes ($z = \pm L$), so the solution to Laplace's

加入小扰动/无, 且等式

$$-\nabla(P_1 + \frac{1}{\mu} B_0 B_{13}) + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial P_1}{\partial z} = 0 \quad (6.21)$$

由 $\nabla \vec{B} = 0$, 可得 $\nabla \vec{B}_1 = 0$, (6.21) 式取散度, 代入 $\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0$, 有

$$\nabla^2(P_1 + \frac{1}{\mu} B_0 B_{13}) = 0 \quad (6.22)$$

$(P_1 + \frac{1}{\mu} B_0 B_{13})$ 从轴界面 ($z = \pm L$) 前伸展入 ($< L$) 并以之为高进入
1 宽 $-L < z < +L$ 的区域内 (\because 小扰动, 故以之为入 ($< L$)).

Laplace 方程 (6.22) 的解为: $\therefore P_1 + \frac{1}{\mu} B_0 B_{13} = \text{const.} \quad (6.23)$

(在 $z = \pm L$ 处, 等效为入的边界 P_1 和 B_{13} .)

写成 (6.21) 式的子分量表达式: $-\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial B_{13}}{\partial z} + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial B_{13}}{\partial z} = 0$

$$\therefore \frac{\partial P_1}{\partial z} = 0$$

(6.23) 式 = 也即 $\frac{\partial B_{13}}{\partial z} = 0$

即此表示磁流体静力学平衡, 具有平行方向 (\hat{z} 方向) 的 1 宽 $\{z\}$ 变.

这称为叫 Parker 的 1 宽

(在 $z = \pm L$ 处附近入内有小扰动, $B_0 \hat{z}$ 变为 $B_0 \hat{z} + \vec{B}_1$ (见 7.8), P_1 也是如此).

$-L < z < +L$ 空间内 B_{13} 不变, 小扰动可从 -1 宽 ($z = \pm L$ 处). 1 宽 ($B_0 \hat{z}$ 和 B_{13} 在 $z = \pm L$ 处不随 z 变) 分离出来)

Sakurai 和 Levine (1981) 认为 扰动场, 由 1 宽和高宽场 (-1 宽), 所有的变化
发生在 $z = \pm L$ 处附近空间内. (例如有关速度)

当忽略附近的传播速度限制时, Parker 的 1 宽假设成立.

J. Green (1965) 和 Syrovatsky (1971) 证明 = 11 时中性层的势 (2.23) 为
连续层变化形状, 此理想导电条件下会形成中性层.

设初值磁场为 $B_x = y$, $B_y = x$, 用复变量 $z = x + iy$ 表示, 则有

$$B_y + iB_x = z \quad (6.24)$$

中性层无关, 见第 6.7

假设垂直于 $z=0$ 平面, 还加一均匀电场, 方向从底面向上, 该电场驱动等离子体垂直于磁场运动, 因为无理想条件, 所以磁力线被通电带电. 欧姆定律可写成 $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$. 根据矢量的方向, 有

$$\vec{E} + V\vec{B} = 0 \quad (6.25)$$

忽略等离子体的自感时速度可由 (6.25) 式确定, 中性层除外, 因为该处 $V=0$. 再假设 (等离子体) 流速和压强 $V^2/2$ 通过一系列平衡层而变化 (见). 而 Lorentz 力为零.

$$0 = jB \quad (6.26)$$

忽略项 (6.24), $j=0$ 时为势场, 除中性层附近外, 通过一系列的势场连续改变形状, 中性层附近因为 $B=0$, 不能用 (6.26) 式, 可以用非零电流. 期间总的行走为相反方向的磁力线向中性层靠拢. 最后一步增加后变为沿半径长为 $2L$ 的电流片 (参考 Green 1965 和 Fig. 1. 和 Fig. 2. Green 证明了待电流, 假设 j 为电流密度 \times 磁通量). Priest 则假设并加一均匀电场, 使之沿磁力线移动). 在夏利叶表示为切割, 即 $z = -iL$ 及 $z = +iL$ (Fig. 6.7(b)) 电流片外, 假设电流为零, 磁场被切断是 $\nabla \times \vec{B} = 0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, 在此情况下有

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \quad (= 11, \text{ 分割零}) \quad (6.4.4-1)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \quad (6.4.4-2)$$

设 $B_y + iB_x = f(z)$ 是复变量 $z = x + iy$ 的解析函数, 即子以其附近区域均可微. 因为解析, 所以 $f(z)$ 必须满足上二式, 于是式就成为一微分方程.

(over an Alfvén travel-time) to ...
Syrovatsky (1978) generalised his previous result for potential fields to ...

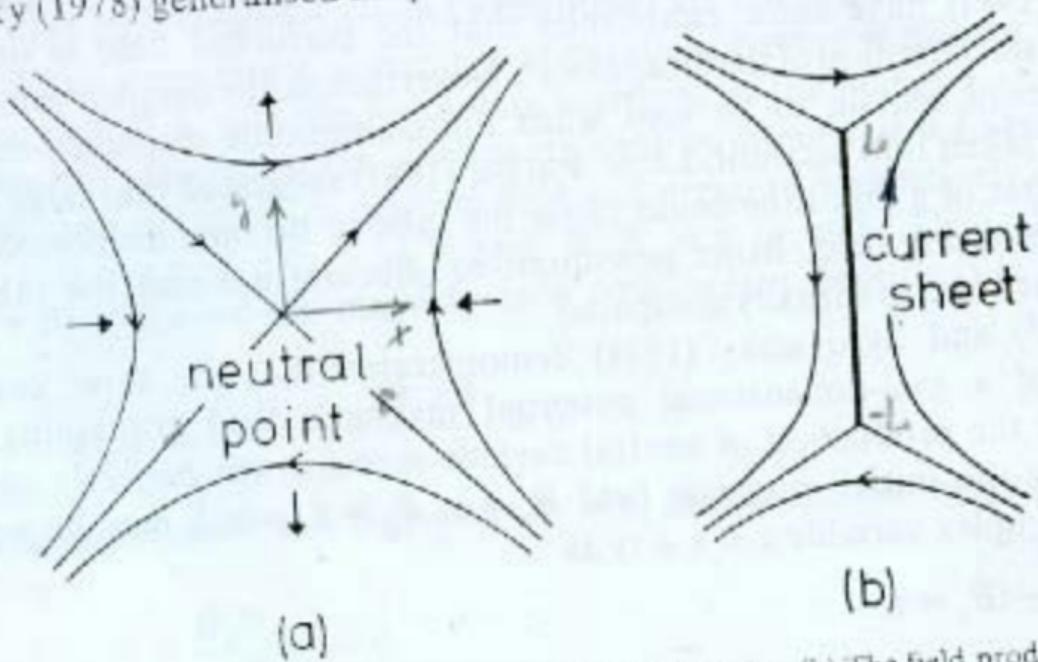


Fig. 6.7. (a) A potential magnetic field near an X-type neutral point. (b) The field produced by the slow motion indicated in (a) by solid-headed arrows. The plasma is assumed perfectly conducting

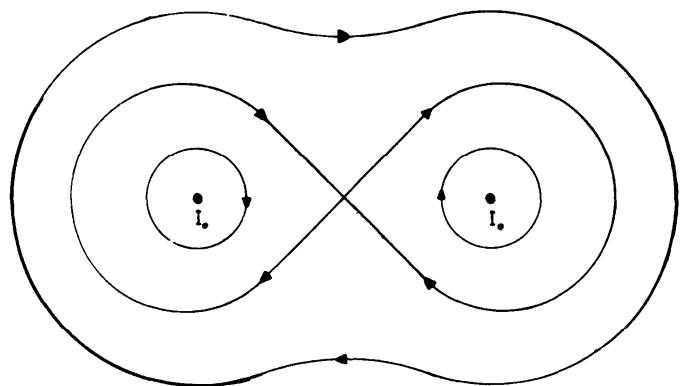


Fig. 1. The field of two line currents: current separation $2a_0$.

of the currents is directed into the page. The field of this arrangement

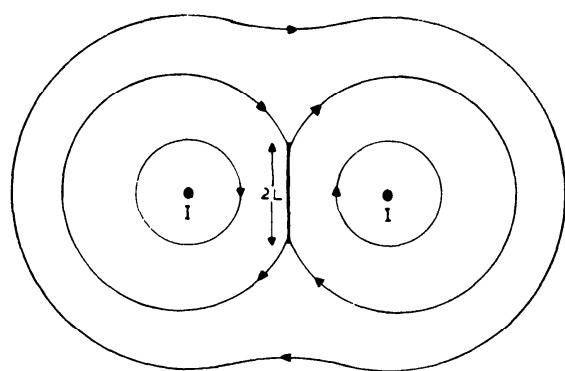


Fig. 2. The field of two line currents, and a sheet current: current separation $2a$.

复数函数的积分定理.

$$\text{磁力线方程 } \frac{dx}{dx} = \frac{B_y}{B_x} > \frac{x}{y}, \quad y^2 x^2 = \text{const.} \text{ 即为面6.7.}$$

$f(z)$ 是解析函数, 因此 $f'(z)$ 存在. 复数函数导数变化的条件是: 复平面上平行移动方式令 $\Delta z \rightarrow 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ 不依赖于 Δz . 故此令 $z=0$, $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$, 或 $x=0$, $\Delta z = \Delta y \rightarrow 0$ 导数应该相等

$$\therefore \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (B_y + iB_x) = \frac{\partial}{\partial y} (B_y + iB_x)$$

: 左边实部和虚部分别相等, 可得到 (6.4.4-1) 和 (6.4.4-2) 式.

我们说化安培复数 $f(z)$ 和复平面上的割线 $z = -iL$ 之 $z = iL$.

割线对应于物理上的电流片. 有电流片时 $z = -iL$ 必须大于 $z = +iL$. 可由下式表示磁场

$$B_y + iB_x = (z^2 + L^2)^{-1} \quad (6.4.4-3)$$

当 $z \rightarrow L$ 时, 磁场归为零. 当 $L = 0$ 时, 也归为零. 当 $z = \pm iL$ 时, 磁场零.

因此通过一系列的半径, 在 $|z| = L$ 时, 电流片的强度可用 (6.4.4-3) 式中 L 的强度增加来表示. 用复数的方法得到了电流片的强度, 相反方向的磁场强度的相互抵消.

上述讨论中, 假定磁流体在空间中各处成立. 但电流片内部满足不成立.

当是非停息运动时, 磁场形狀 $A(z)$ 在 t 与 $t + \Delta t$ 時間內迅速地归到較微弱的狀態, 即弱場 (假若速度由于非停息运动才使得磁场方向相反的二个磁场互相抵消)

Syrovatsky (1978) 認为充加速度慢, 断续改变形狀, 一般会通过电流片. 充加速度連续地改变形狀, 通常不能保持磁流体状态, 会出現一些电流片, 其中磁场不. 再充加速度, 可以认为这些电流片是压缩电流片 (pinch currents sheet)

2.7 完全导电流体 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$. 无加速度时, 电场为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \int_C \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0 \quad (6.4.4-4)$$

积分路径 C 为磁力线, 由 \vec{E} 产生的电流 I_n 沿 C 流动, 这正是无加速度的特例.

(2) 为电流平行于磁力线 $\nabla \times \vec{B} \times \vec{B} = 0$. $\frac{\partial}{\partial t} \int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ 表明有电流, 有耗散.

$$\text{但是 } \int_C \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}, \quad C \text{ 为磁力线, } (\vec{v} \times \vec{B}) \perp \vec{B} \parallel \vec{l} \\ = 0 \quad (6.4.4-5)$$

(6.4.4-4) 与式 $\frac{\partial}{\partial t} \int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ 说明有耗散, 本节讨论的是无耗散的电流动.

6.4.4C 电流 filament (Current filament)

(本节内容取自 Heyvaerts (1974) 的论文)

Joule 加热, 无线电和日冕中通常忽略. 但在高电流大或高磁场时, 可能变得重要. 热不稳定性很可能在日冕中产生, 中性层中的磁场通过扩散梯度, 热流梯度耗散. 热过程也促使电流片破裂, 从而加热耗散.

1. 考虑到稳定性, 我们从 MHD 方程出发, 假设完全耗散, 完全电离, 利用方程包括波加热, 充分高的热辐射冷却. Joule 加热中, 以为热传导率的異性.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P \vec{v}) &= 0 \\ P \frac{D \vec{V}}{D t} &= - \nabla P + \vec{j} \times \vec{B} \\ \frac{DP}{Dt} - \gamma \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} &= -(\gamma-1) \left(\frac{\vec{J}^2}{\rho} - L(P, T) + \nabla \cdot (\vec{k} \cdot \nabla T) \right) \quad (2.28f) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \nabla \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{j} &= \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 \mathcal{L} : 单位时间, 单位体积的损耗 (消耗功率)

$$\mathcal{L}(P, T) = -HP + P^2 Q(T)$$

HP : - 温度加热, 通常假设为 P 成正比.

$P^2 Q(T)$: - 辐射冷却

由导率 K_{\perp} 为各向同性, 可用热量 T 表示. 热传导系数 K 为各向异性.

$$K = \begin{pmatrix} K_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel} \end{pmatrix}$$

$$K_{\perp} = 6 \cdot 10^{-42} \cdot m_e^2 T_e^2 B^2 T^{-5/2} \text{ Joules s}^{-1} m^{-2} K^{-1}$$

$$K_{\parallel} = 3 \cdot 10^{11} T^{5/2} \text{ Joules s}^{-1} m^{-2} K^{-1}$$

平衡时为静磁均匀, 无加速度

$$\text{无加速度的特征长度 } L_0 = \frac{B_0}{\mu_0 J_0} = \frac{1}{K_0} \quad (\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{L} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow L = \frac{B_0}{\mu_0 J_0})$$

当特征长度 $L \ll L_0$, 平衡时电流沿平衡均匀的磁场流动, 可以考虑具体的磁化运动.

$$\text{无运动时, 有热平衡 } \frac{i^2}{J_0} = HP_0 - P_0^2 Q(T_0)$$

(这个式左边=0, 但不严密. 因为平衡时有电流, 有电阻 $\frac{i^2}{J_0} \neq 0$. 但可以 $HP_0 - P_0^2 Q(T_0) = 0$ 中定之 H)

用运动线性化方程组. 寻求色散关系. 运动量 $f(\vec{r}, t)$ (代表各种运动)

展开成 Fourier 级数

$$f(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{8\pi^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] f(\vec{k}, \omega)$$

当 $\omega = i\Omega$ 时 表示衰减

D. 2 式代入后, 1 变为双剩速率类型的方程, 从而得到色散关系

$$\det D_{ij}(\omega, \vec{k}) = 0$$

D_{ij} 为 3×3 矩阵.

$$\text{引进光速因子 } D = 1 + i \frac{k^2}{\omega \mu_0 \sigma_0} \quad \text{称为损耗}$$

$$\Delta = 2(Y-1) \left(\frac{\partial \ln T_0}{\partial \ln P_0} \right) \frac{w_j}{w-iw_1} \cdot \frac{k_1^2}{\mu_0 \sigma_0}. \quad \text{描述 Joule 效应}$$

式中: $w_j = \frac{\vec{J}_0^2}{\sigma_0 P_0}$ (\vec{J}_0 为 "0" 为平衡时的平均电流)

$$k_1^2 = k^2 \sin^2 \theta, \quad \theta - \text{传播方向与磁场方向夹角}$$

$$w_1 = (Y-1) \left(-\frac{\partial \vec{J}}{\partial \vec{T}_0} \cdot \frac{\partial \ln T_0}{\partial \ln P_0} + \vec{K} \cdot \vec{K} \cdot \vec{K} \frac{\vec{T}_0}{P_0} \right) \quad (b.4.vc-1)$$

$\vec{L}(P_0 \vec{T}_0) = -H \vec{P}_0 + \vec{P}_0 Q(T_0)$, 色散关系 $\det D_{ij} = 0$, 分解为 1 个第 1 次有源项, 第 2 次有源项.

2. Joule 模式和非稳态模型. 强化色散效应

当 $w \ll \frac{k^2}{\mu_0 \sigma_0}$, 非稳态条件下, 从 $D + \Delta = 0$, 得:

$$w = i(Y-1) \left(\frac{P_0^2 Q_0}{P_0} \frac{\partial \ln Q_0}{\partial \ln T_0} + \vec{K} \cdot \vec{K} \cdot \vec{K} \frac{\vec{T}_0}{P_0} - \frac{\vec{J}_0^2}{\sigma_0 P_0} \frac{\partial \ln T_0}{\partial \ln P_0} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right) \quad (b.4.vc-2)$$

Joule 加热驱动热传导的条件. 即 2 种情况的条件是 (仅发生色散中):

i. $\sin^2 \theta > \cos^2 \theta$, 主要热量在于磁场方向传播

ii. $\frac{P_0^2 Q_0}{P_0} \frac{\partial \ln Q_0}{\partial \ln T_0} < \frac{\vec{J}_0^2}{\sigma_0 P_0} \frac{\partial \ln T_0}{\partial \ln P_0} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$, 上升时间为 10^3 秒量级.

3. 稳定性的初步分析:

(忽略)

形成两个平行的导电丝, 热磁通管, 中间有电流, 热磁通管之间由冷磁通管分离, 冷磁通管之间形成闭合回路, 其闭合横向热导率 K_\perp 很大.

$$\frac{K_\perp}{K_\parallel} = 2 \times 10^{-3} \frac{n^2}{T^3 B^2} \quad (\text{Priest}, p.66)$$

由 w 的表达式可知, 要增大增长率 (growth-rate), 安培电流必须很大.

3. 扩散及耗散模式

由 $D + \Delta = 0$, 在非湍流条件下, 有 (b.4.vc-2) 式, 描述的为 Joule 不稳定性.

- 耗散的表达式:

$$w(w - iw_1) + i \frac{k^2}{\mu_0 \sigma_0} (w - iw_1) + 2(Y-1) \frac{\partial \ln T_0}{\partial \ln P_0} \cdot \frac{\vec{J}_0^2}{\sigma_0 P_0} \cdot \frac{k^2 \sin^2 \theta}{\mu_0 \sigma_0} = 0 \quad (b.4.vc-3)$$

w_1 由 (b.4.vc-1) 式表示.

当流有电流时，由(6.4.4c-3)式可得

$$\omega = i\omega,$$

$$\omega = -i \frac{R^2}{\mu_0 \sigma} \quad (6.4.4c-4)$$

其中(6.4.4c-4)式描述了场对等离子体中的反粒子(带电)

或Joule加热 $\propto \omega$ 中起主导作用($J_o T_e$)，而电场力

$$\omega = i \frac{R^2}{\mu_0 \sigma} \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

Joule加热仅起次要作用，导电系数 $\left(\frac{\text{Coloumb}}{\text{电荷}}\right) \eta = \frac{\pi e^2 m_e}{(k_B T_e)^{3/2}} \ln \Lambda$,

$T_e \uparrow, \eta \downarrow, \sigma \uparrow$

于是在该区域有更高的电流通过，这一过程称为Joule加热效应，是一种不稳定性。最后导致电流集中到“线上”，称为热反粒子(反粒子吸收系数)或称为无场的“热撕裂模”。

6.5 磁环.

太阳大气因重力的作用，垂直方向分离，水平方向也均匀，太阳大气有复杂的结构，其中磁场起主导作用。X射线和极紫外的光（例如冕带）之外的日冕主要由环状结构组成，这种环状结构可能相当不规则。有人说有5种环状：互连环（interconnecting loops），宁静区环（quiet-region loops），活动区环（active-region loops），喷发后环（post-flare loops）→从简单（喷发）环到环（Simple (compact) flare loops）。下面介绍这五类不同的模型。

6.5.1 静息磁重平衡模型

流体静力学平衡，且在热守恒，辐射和加热过程中实现热平衡。质量方程 $\rho \frac{DS}{Dt} = -\mathcal{L}$ (2.28a).

$$\mathcal{L} \text{ 为辐射率} \quad \mathcal{L} = \nabla \vec{q} + L_r - \frac{d}{dt} - H \quad (2.32)$$

\vec{q} 是热流矢量 (heat flux)，由热传导引起； $\frac{d}{dt}$ 变化耗散 (本节讨论中将忽略)； H 代表其他热辐射加热-冷却； L_r : 辐射损耗对于电子和大气 (色球, 日冕)， L_r 不再通过辐射转移方程而辐射耦合，而是 $L_r = n_e n_H Q_{LT}$ (2.35c)

n_e : 电子密度， n_H : 原子密度，当完全电离时 $n_e = n_H$ 。[注意简化，但

辐射表达式近似为 $Q_{LT} = \chi T^\alpha W m^3$ ， χ, α 见表 2.2 表 3.1。

热平衡时 $\mathcal{L} = 0$ ($\mathcal{L} = 0$ 代表损耗，负号为增加能量)

$$\nabla \vec{q} = -K \nabla T \quad \text{代入 (2.32)}$$

$$K \nabla T = \chi n_e^\alpha T^\alpha - H$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial S} (K_{||} \frac{\partial T}{\partial S} A) = \chi n_e^\alpha T^\alpha - H \quad (6.32)$$

$$K_{||} = 1.8 \times 10^{-10} \frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda} W m^{-1} K^{-1} = K_0 T^{5/2} \gg K_\perp \quad (2.34)$$

$A = A(s)$ 为平面度， s 为高度或半截面。

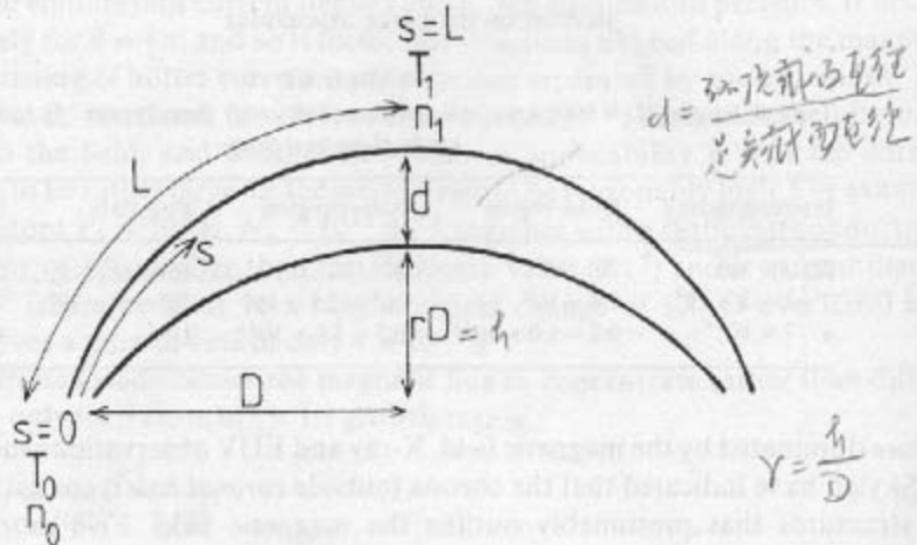


Fig. 6.9. The notation for a symmetric coronal loop of length $2L$ with temperature T_0 and density n_0 at the footpoint ($s = 0$), and T_1 , and n_1 at the summit ($s = L$). r is the ratio of loop height to half the base length (D), and d is the ratio of the diameter of the loop cross-section at the top to that at the footpoint.

式中 S 为磁力线方向。

设引力在 \hat{S} 方向， S 重力磁场方向仰角高，磁场与垂直方向夹角为 θ 。
静力学平衡时：

$$0 = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (3.1)$$

平行于 \vec{B} 方向的分量式为：

$$\sigma = -\frac{dP}{ds} - \rho g \cos \theta$$

$$(\frac{\vec{j}}{S} \parallel \vec{B})$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \frac{dP}{ds} = -\rho p Na g, \quad m_p: \text{底半径} \quad (6.33)$$

$$\text{压强 } P = 2\pi c k_B T \quad (6.34)$$

$$\theta = \theta(s) \quad (\text{看 } 6.9)$$

当 $A(s)$, $\theta(s)$ 已定，则 P 定。在下述条件下， θ 在 $s=0$ 及 $s=L$ 处 $S=0$ 时，
 $S=0$ ， $T=T_0$ (6.35) \Rightarrow 且 $\frac{dT}{ds}=0$ ， $S=L$ 时， $T=T_0$ (6.36) \Rightarrow 且 $\frac{dT}{ds}=0$ ，
又温度有极值，求解方程 (6.32), (6.33)。

当 T_0 (球底部的恒温) 固定，(绝热辐射)，特别地如 J 恒温 $T_1=T_1(L, P_0, H)$
即 T_1 由球长 L , 基底压强 P_0 和加热效率 H 确定。 T_0 相应地
若 J 为取为恒温或球形平衡区恒温 (看 1.2) 时，热平衡不
能成立 (thermally isolated loop)，上述边界条件 $(P=P_0, T=T_0)$
 $\frac{dP}{ds}=0$ ($S=L$) 还要再加上一个条件 $\frac{dT}{ds}=0$, $S=0$ 时。 (因为 T_0 不变，
 $\therefore \frac{dT}{ds}=0$) 这种情况下，球顶恒温 $T_1=T_1(L, H)$ 仅是 J 的函数。
因为 (6.35) 式中 S 在底压强不随温度而变化，必须同时满足 $P_0=P_0(L, H)$
和球顶的边界条件。

6.5.1A. 压强均匀分布。

假设 $\theta(s)=0$, J 恒温低于常数 J_0 (约 80,000 焦耳)，球的压
强均匀，则容易解得方程 (6.32)。 n_c 由 (6.34) 式得出，即 P 的分布。

首先考慮載面均勻的泡型爐，估計第 2 次溫度梯度後：當式 C (並假定)
 R (辐射), H (加熱) 相對大小隨溫度不同有差別。若僅由計算值不差
 同時 (量級上是相近的)，因為方程(6.32)中，加熱和辐射是等半徑，
 同一量級，換半徑時， $L=0$ 。∴

$$\nabla \vec{g} = L_r - H \quad (2. 次溫度梯度)$$

$$有 H \approx n_e X T^\alpha$$

$$由(6.34) \quad n_e = \frac{P}{2k_B T}, \quad \text{令} \alpha \approx \frac{1}{2} \quad (\text{在} 4300K, \text{ plateau})$$

則 $\sim 6600K$ ，均未列入 P 之 α 數值表 2.2 中)

$$H \approx \frac{P^2}{4k_B^2} X T_1^{-\frac{1}{2}} \quad (6.38)$$

式中 T_1 為第 2 次溫度。

換算等次的辐射項也可得。(6.32) 式即以表示為：

$$\frac{K_0 T_1^{\frac{3}{2}}}{L^2} \approx \frac{P^2}{4k_B^2} X T_1^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{因} (6.32) \text{ 在} \lambda \text{ 可寫成 } \frac{1}{A} \frac{d}{ds} \left(K_0 \frac{dT}{ds} A \right) \approx K_0 \frac{T_1^{\frac{3}{2}}}{L^2}.$$

$$\text{近似可簡化為 } T_1 \sim (PL)^{\frac{1}{3}} \quad (6.39)$$

$$\text{有此比例常數為 } \left(\frac{4k_B^2 K_0}{X} \right)^{-\frac{1}{2}} = 10^+ \quad (\text{mks 幖位})$$

$$(K_0 \approx 10^{11}, X \approx 10^{-32}, k_B = 1.4 \times 10^{-23})$$

(6.39) 式的 T_1 代入 (6.38) 式中，得

$$H \sim P^{\frac{2}{3}} L^{-\frac{5}{6}} \quad (6.40)$$

H 可看作機械加熱 (高波加熱，未考虑耗散)

$$\text{从} (6.40) \text{ 可求得 } P \sim H^{\frac{6}{5}} L^{\frac{5}{3}}$$

$$\text{代入(6.39): } T_1 \sim H^{\frac{2}{\gamma}} L^{\frac{4}{\gamma}} \quad (6.41)$$

表示通过伸展绝热过程 L 或等温加热 H , 可以使温度和压强增加.

(6.40) 和 (6.39) 式是关于加压和体积的定理 $T_1 \sim H^{\frac{2}{\gamma}} L^{\frac{4}{\gamma}}$. 当 $T_1 \gg T_0$ 时, 我们可把边缘条件 (6.35-6.37) ^T 并移至得 (6.32) 式.

$$(6.32) \text{ 式} = \text{边缘 } T^{\frac{2}{\gamma}} \frac{dT}{dS}, \text{ 令 } \lambda = \frac{P}{T} A \text{ 为常数.}$$

$$K_0 \left(T^{\frac{2}{\gamma}} \frac{dT}{dS} \right) \frac{d}{dS} \left(T^{\frac{2}{\gamma}} \frac{dT}{dS} \right) = T^{\frac{2}{\gamma}} \frac{dT}{dS} \left(\lambda n_e T^{\alpha} - H \right)$$

$$\text{以 } \frac{d}{dS} \text{ 为 } -\frac{1}{2}, \quad n_e = \frac{P}{2k_B T}$$

= 边积分 (从 T_1 到 T) 两边 T_1 与 T 分别对 T)

$$\frac{1}{2} K_0 \left(T^{\frac{2}{\gamma}} \frac{dT}{dS} \right)^2 = \int_{T_1}^T T^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{P^2 X}{4k_B^2} T^{-\frac{2}{\gamma}} - H \right) dT$$

$$\frac{1}{2} K_0 T^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{dT}{dS} \right)^2 = \frac{P^2 X}{4k_B^2} (T - T_1) - \frac{2}{7} H (T^{\frac{7}{2}} - T_1^{\frac{7}{2}}) \quad (6.42)$$

令 $T \rightarrow T_0$, 已知 $T_1 \gg T_0$, 而且对于绝热过程, $\frac{dT}{dS} = 0$ ($dS = 0$)

$\therefore (6.42)$ 式左边 $\frac{2}{7} H$

$$H = 3.5 \frac{P^2 X}{4k_B^2} T_1^{-\frac{1}{2}} \quad (6.38')$$

即即 (6.38) 式, 12 章 - 1 等效 3.5

(6.38') 式中以 H 代 λ (6.42)

$$T^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{dT}{dS} \right)^2 = \frac{P^2 X}{2K_0 k_B^2} (T - T_1) - \frac{4}{7} K_0 \cdot 3.5 \frac{P^2 X}{4k_B^2} T_1^{-\frac{1}{2}} (T^{\frac{7}{2}} - T_1^{\frac{7}{2}})$$

$$T^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{dT}{dS} \right)^2 = \frac{P^2 X}{2K_0 k_B^2} \left(1 - \frac{T_1}{T} - \frac{T^{\frac{5}{2}}}{T_1^{\frac{5}{2}}} + \frac{T_1}{T} \right)$$

$$T^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{dT}{dS} \right)^2 = \left(\frac{P^2 X}{2k_B^2 K_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left(1 - \frac{T^{\frac{5}{2}}}{T_1^{\frac{5}{2}}} \right)^{\frac{2}{\gamma}}$$

$$T_1^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{T}{T_1}\right) = \left(\frac{P^2 X}{2k_B^2 K_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{令 } x = \frac{T}{T_1}$$

$$T_1^3 x^2 \frac{dx}{ds} = P \left(\frac{x}{2k_B^2 K_0}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - x^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{2k_B^2 K_0}{X}\right)^{\frac{1}{2}} x^2 (1 - x^{\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{2}} T_1^3 dx = P ds$$

$$\text{令 } I = \int_0^1 x^2 (1 - x^{\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{2}} dx$$

因为 T 从 T_0 增加到 T_1 , 而 $T_0 \rightarrow 0$, 故此积分可从 $0 \rightarrow 1$

$$LP = \left(\frac{2k_B^2 K_0}{X}\right)^{\frac{1}{2}} I T_1^3 \quad , \quad \text{式中 } L \text{ 为丝长 (见图 6.9)} \quad (6.39')$$

I 可以通过数值积分求得, 近似为 $I \sim 0.72$

$$\text{两边同乘方, } T_1 \sim (PL)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{若 (6.39) 式相合, (6.39) 式实测少一个系数 0.373: } \left(\frac{X}{4k_B^2 K_0}\right)^{\frac{1}{6}} = 10^4$$

从 (6.39') 式直接求 T_1 :

$$T_1 = \left[\left(\frac{X}{2k_B^2 K_0} \right)^{\frac{1}{2}} I^{-\frac{1}{3}} \cdot LP \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{X}{4k_B^2 K_0} \right)^{\frac{1}{6}} [2^{\frac{1}{6}} \cdot I^{-\frac{1}{3}}] (LP)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{是 (6.39) 式 } (2^{\frac{1}{6}} \cdot I^{-\frac{1}{3}}) \approx 1.25 \text{ 附近.}$$

Wray 和 Priest (1982) 求得重声猝和的 光生力学平衡 的表达式
表明 光辐射律 (scaling law) (6.39) 对于短丝是正确的. 对于长丝
实际长度可能比光辐射律预测的低 2 倍左右. 长丝如果增加 T_1 , 则
可能会引起强度下降. (所以, 对于短丝, 当长度增加 2 倍时强度增加, 见
(6.41) 式)

通常情况下，砾底部附近，热流等至2.为零，即砾底部附近地
热状况，这样不仅需要推导一个（b.39）式变为一般的砾底部地热和透
度，增加一个额外的参数，加热率，而且可能会导致非稳态衡和不稳
定性。这些成为普遍的砾模型（从砾底部附近 T_0 和 $5 \times 10^5 K$
(过渡带中上部)）特别有用。例如(b.32)式描述过渡带的物理过程
相当。即当 $T_0 = 2 \times 10^4 K$ 时估计高，而不是从 $10^6 K$ 起始，可能会产生重大
误差。(即认为砾的底部位于过渡带底部，温度为 $\sim 10^4 K$ 。过渡带顶部
温度 $\sim 10^6 K$)

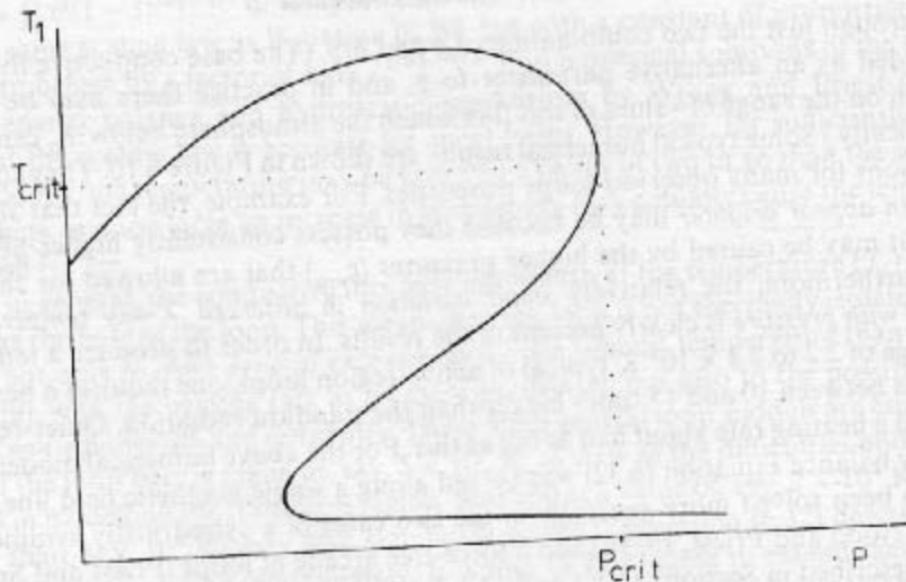


Fig. 6.11. The summit temperature (T_1) for a static coronal loop shown schematically as a function of its pressure (P). When P_{crit} is reached, the plasma cools along the dotted line to a new equilibrium well below T_{crit} .

6.5.1 B. 冷却

T_c

当环境温度增加，冷却速度并不大，或者降低到临界值 T_{crit} (1℃/min) 不太高，随温度增加，温度下降速度减慢(如结果)，如图所示， $\frac{dT}{dP}$ 变成无穷大，和图 6.11 所示，假如冷却超过 T_{crit}，则称之为非稳态冷却。在 (T_{crit}, T_c) 附近不稳定平衡，当温度降低到 T_c 时，即低于 $10^5 K$ 如寻找新的平衡点，当温度降低时，很多温度很快可以从图中确定。因为低温时，无论怎样保持液体力学平衡 (只降低温度) Fankal (1975, 1976) 和 Jordan (1975) 观察到有些宽板带冷却很慢，同样地，当 P 和 H 保持不变，温度随时间增长 (体积增加，内能减少) 或者当 P 和 L 保持不变，加热率随时间减少，T_c = T_c(L, H, P) 会随冷却而形成非稳态平衡。

当系统是包含冷的导热体的，但底面被绝热，这种流动必须倒过来，因为通常他限制沿墙的运动，这种运动可引起底部引起冷，冷却带却导热体不变，因此系统的热量无论怎样液体力学平衡，必定有运动。这些低层导热体可作为循环状态向上注入，或者通过热不稳定区，促进导热体降温。

绝热环 (thermally isolated loops) 对于水流温度保持不变，运动是热不稳定的，这可能是太阳风不断运动的原因，也可以解释针状冰的运动。

6.5.2 热环内的流动

大部分太阳大流的模型忽略了流动的因素，实际上必须和热流一起考虑流动先是普遍存在的。

从理论的角度，有几种方法可以描述热环中的流动 (见 6.13)

① 理论

satisfying conservation of mass.

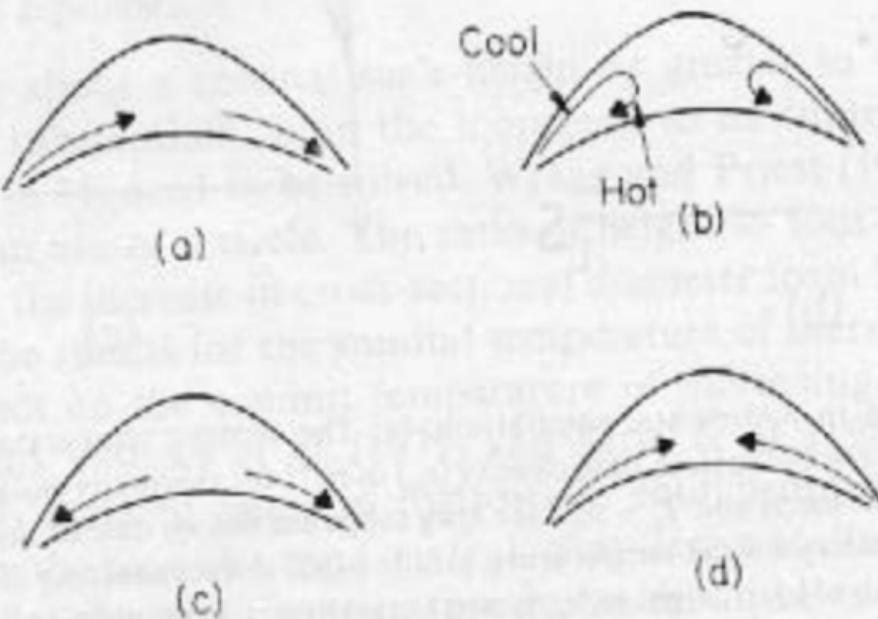


Fig. 6.13. The main types of flow in coronal loops are: (a) siphon flow, (b) spicule flow, (c) loop draining
(d) loop filling.

通过二项关系的压强差驱动, Meyer zu Schmidt (1968) 并指出
等温流和绝热流是 Evershed 流动。随着温度也可产生这种流动。

假设流动为一静止层, 加上压强差, 就有一个加速的流动, 方向从
压强大的是流向压强小的是, 假设流动区内有一个流动, 然后加上
压强, 方向与流动方向相反, 有可能剩余压强大的是方向产生减速流动
。有几种情况将保持不变(同关系)的压强差, 例如:

- i. 差压强(等高与零压强加速度压强)不变, 言谓着磁场强度的区域。
等高与零的高差.
- ii. 全部的电磁流动, 压缩磁场和等高与零, 因此向都地增强的流动.
- iii. 地球半径的流动随与运动向下的流动 (见 8.7 节)
- iv. 在的差的压强可随增加得等加速度.

简单的极化流动是沿圆周均匀分布的环的定常流动, 带走质量, 动量
和能量守恒。

$$\frac{d}{ds}(\rho V) = 0 \quad (6.5.2-1)$$

$$\rho V \frac{dv}{ds} = - \frac{dp}{ds} - \rho g \cos \theta \quad (6.5.2-2)$$

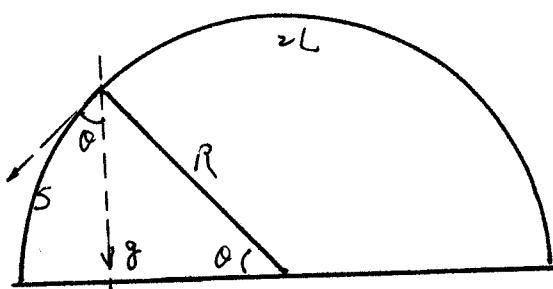
$$\frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\rho r} \right) = 0 \quad (6.5.2-3)$$

s 为 1" 长为 $2L$ 的环, 环度的半径, $\theta(s)$ 是环的某一点与垂直方向的
夹角。

$$\because s = \theta R, \quad \theta = \frac{s}{R}$$

$$\pi R = 2L, \quad R = \frac{2L}{\pi}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi s}{2L}$$



简单起见, 假定绝热。

$$展开 (6.5.2-1) 式: \nu \frac{dp}{ds} + \rho \frac{dv}{ds} = 0 \quad (6.5.2-4)$$

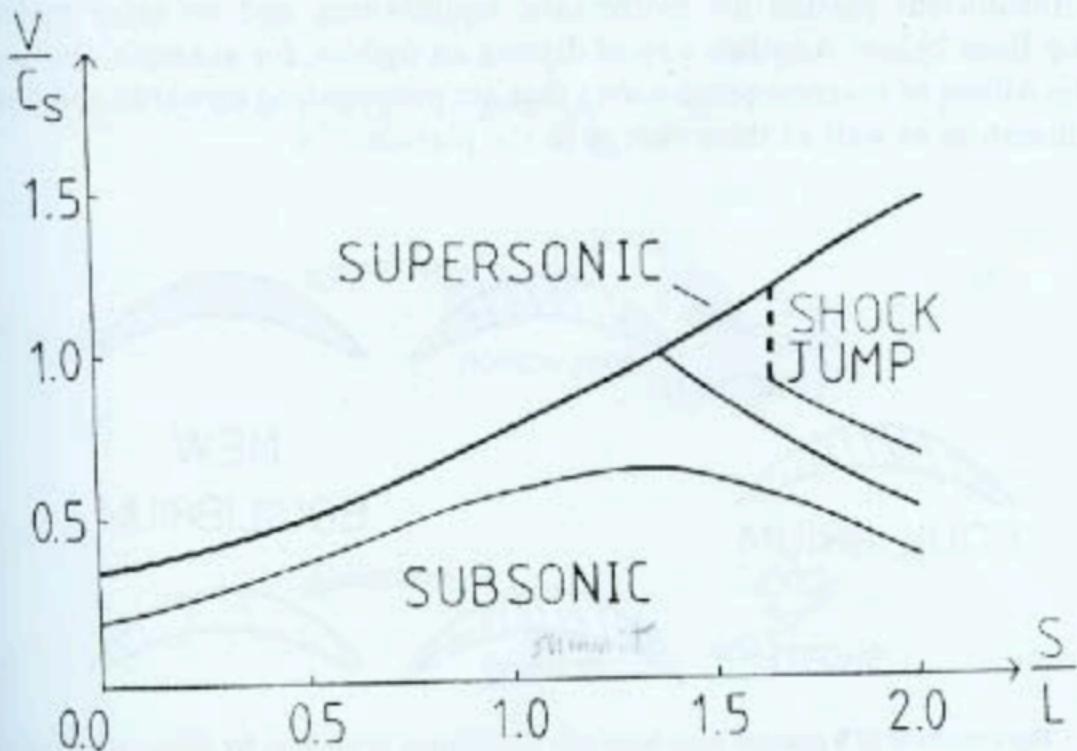


Fig. 6.14 The siphon flow speed (v) at a distance s along a converging coronal loop of length $2L = 100\,000$ km (from Cargill and Priest, 1980).

(6.5.2-3) 式可写成

$$\frac{1}{\rho r} \frac{dp}{ds} - r p \bar{\rho}^{k-1} \frac{dp}{ds} = 0$$

$$\frac{dp}{ds} - C_s^2 \frac{dp}{ds} = 0 \quad , \quad C_s \text{ 为声速}$$

$$\therefore \frac{dp}{ds} = \frac{1}{C_s^2} \frac{dp}{ds} \text{ 代入 (6.5.2-4) 式, 得}$$

$$\frac{dp}{ds} = - \frac{\rho C_s^2}{V} \frac{dV}{ds} , \text{ 再将此式代入 (6.5.2-2) 式}$$

$$(V - \frac{C_s^2}{V}) \frac{dV}{ds} = - g \cos \frac{\pi s}{2L} .$$

在出口处 $s=L$ 处, 有临界点 $V=C_s$.

截面可变, 伯努利方程的解也已为人所得, 主要的特点是: 压强和速度是正声速流动, 压强太低(在吸气阶段)成为负声速, 然后向下落的液体通过膨胀而减速 (参见 b.4)

② 针状体的流动 (参见 b.13 (b))

冷空气高速从管道向上运动, 扩展下降, 这个高空气流为上升气流, 可能性之一: 因受未冷却水的冲击。强风通过管道附近未冷却品, 运动和带空气等离子体垂直方向的运动发生共振。(Robert 1979)

另一种可能性是: 起始柱体内气泡运动撞到柱壁而发生共振。

再有可能是: 针状体在柱内等离子体速度不均匀因素 (6.5.1B)

③ 日浪 (surges)

i. 可能是因为射流或喷嘴的喷嘴迎着附近管道的壁子碰撞发生不稳定性, ii. 也可能是因为喷嘴内气泡运动引起喷嘴附近 (6.5.1B) 壁子不稳定性而引起之。

④ Evershed 流

可能因为虹吸流产生该叫, 或者是由于壳元附近与壳系中不流动

相关的简单结论。

⑤ 下沉流动 (Downflow)

发生下沉流动 (图 6.13(c))。ⁱ 在核心附近有湍流聚或有暗舌状可能发生。ⁱⁱ 也可能等高线通过地热加热过程，然后从针状体和凹陷向底部沉降。ⁱⁱⁱ 下沉流也可随冷芯形成过程中产生。假如热流增加距离 (或者增加辐射强度，或者减少加热) 直到达到平衡的温度高峰，然后通过附近冷却处的等高线而冷却却，不再处于流体静力学平衡。大部分冷却的等高线从芯部向外，直到到达新旧流体静力学平衡。一旦冷芯生成，小尺度的不稳定性可能驱动等高线的循环，从而把热量穿越外圈，进入芯部。此后下沉。^{iv} 下沉流动的驱动可能在壳层中，而不在外壳。例如，起壳粒 (气泡) 的流动可能把等高线向下平移。^v 下沉流动可能为强磁场周围的情况有关，强磁场的形成范围为强磁场的不稳定性。(8.7.3章)

⑥ 上升流动 (upflow)

发生下沉流动。ⁱ 可能是包含有宁静的环形 - 但是积 (a coronal arcade) 内等高线的一部分。ⁱⁱ 也可能化简单环 (或微些) 环被上升阶流被驱动。那时环中的加热率增加速度，等高线不总是保持在壳层中。ⁱⁱⁱ 同时从下面吸收额外的物质。^{iv} 另一种驱动上升流动的方式是：倒流在壳层上方。Alfvén 波或磁流体向上传播，把热量驱动到外圈等高线。

⑦ 排泄 (draining) 或填充 (filling) (即蒸发)

增加辐射 - 系列从 (i) 加热率 H 成正比增长的平衡线，可得会溢出 (排泄或填充)。

假设 H 或 L^{1/2} 增加，从 (6.41) 式： $T_1 \sim H^{2/3} L^{4/3}$, $P \sim H^{4/3} L^{5/3}$

可看成新的平衡的有之和密度。因为 H 或 L 的增加，会导致 P 和 T 同时增加，但是因为热膨胀系数 α ， P 的增加快于 T ，所以密度增加来抵抗压强，因此必须沿着环把物质从下向上带上。（蒸气）（参考）

类似地，假如力以速率或长度减小，环内同时平衡的等高与等长，必须向这一部分，直到压强等于该重力平衡。所有的首次平衡，即力，质量都达到平衡。

8) 其他因素产生流动。

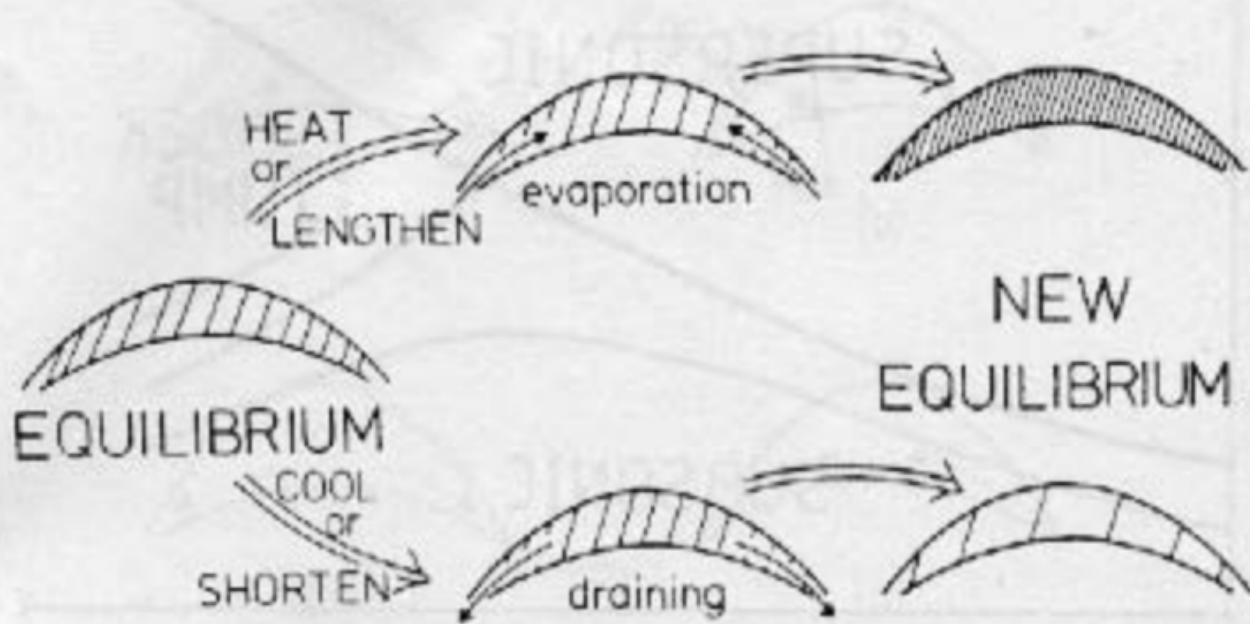


Fig. 6.15. The evolution of a coronal loop from one equilibrium to another by means of an evaporation or draining, depending on whether the heating rate (or loop length) increases or decreases in value.

第七章 不稳定性

7.1 引言

实验室里要固定住大量的等离子体是很困难的，但太阳日珥是很容易保持等离子体的稳定的。所以我们也希望知道太阳的磁场，以及为什么实战变成不稳定，产生日珥爆发或耀斑等。

单粒子-1维运动稳定性的研究方法的研究可应用于磁流体力学和流线性稳定性研究。

假设单粒子质量为 m ，在保守力作用下，沿 x 方向运动

$$\bar{F}(x) \vec{x}^0 = - \frac{dW}{dx} \vec{x}^0$$

$W(x)$ 是势能， \vec{x}^0 为 x 方向单位矢量。

取平衡位置为 $x=0$ ，运动方程为

$$m\ddot{x} = \bar{F}(x) = - \frac{dW}{dx} \quad (1)$$

对于小位移，上述方程可化为线性方程。 $\bar{F}(x)$ 为 Taylor 展开数

取 $n=2$

$$\bar{F}(x) = \bar{F}(0) + x \cdot \left. \frac{d\bar{F}(x)}{dx} \right|_{x=0} \quad (2)$$

$\bar{F}(0)$ 为平衡位置 $x=0$ 处之力，应为零。

$$\text{上式} = x \cdot \left. \frac{d\bar{F}(x)}{dx} \right|_{x=0} = -x \left(\frac{d^2W}{dx^2} \right)_0 = \bar{F}_1(x) \quad (3)$$

$\bar{F}_1(x)$ 是 $\bar{F}(x)$ 的一阶近似。方程(1) 近似为

$$m\ddot{x} = -x \left(\frac{d^2W}{dx^2} \right)_0 \quad (4)$$

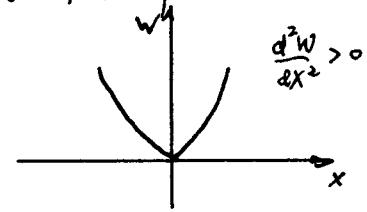
A. 方程是一维形式且 $x = x_0 e^{i\omega t}$ 为 $\bar{F}_1(x)$ 的模 (normal-mode) 时
将 x 表达式代入(4) 式 可得

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2W}{dx^2} \right)_0 \quad (5)$$

① 偏离势能 $W(x)$ 在 $x=0$ 处有极小值, 即 $\left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_0 > 0$, $\therefore \omega^2 > 0$

粒子在 $x=0$ 处近似平衡, 作用力倾向于使粒子回到平衡位置.

这叫稳定情况



② $W(x)$ 有极大值, 即 $\left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_0 < 0$, $\therefore \omega^2 < 0$

$$\omega = \pm i\omega$$

$$x = x_0 e^{i\omega t} = x_0 e^{\mp i\omega t} = \begin{cases} x_0 e^{-\omega t} & \rightarrow 0 \quad \text{当 } t \rightarrow \infty \\ x_0 e^{\omega t} & \rightarrow \infty \quad \text{当 } t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

这叫不稳定情况
(X) 随时间增加, 粒子远离平衡位置.

③ $\left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_0 = 0$ 不稳定的稳定性 (unstable)

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_0 = 0, \therefore \omega = 0, \quad x = x_0 e^{i\omega t} = x_0$$

或由(4)式 $m\ddot{x} = 0$ 说明为零, 粒子保持其运动状态不变 (牛顿第一定律)

B. 另一种处理粒子稳定性的方法: 修正系里

考虑偏离平衡位置的位移 x , 引入势能变化 δW

$$-\text{P}_{\text{外}} \text{ 逆侧 } \bar{F} \quad \delta W = x \left(\frac{dW}{dx}\right) \quad (\text{势能变化与外加 } \bar{F} \text{ 力})$$

由(2)式

$$\bar{F}(0) = \left(\frac{dW}{dx}\right)_0 = 0 \quad (x=0 \text{ 为平衡位置, } \therefore \bar{F}(0)=0)$$

$$\therefore \delta W = 0$$

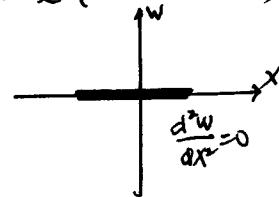
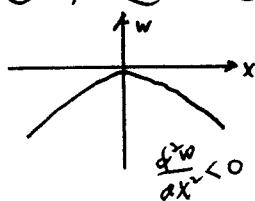
因此需要考虑 = P_{\text{外}} 逆侧

$$W(x) = W_0 + x \left(\frac{dW}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_0$$

$$\delta W \equiv W(x) - W(0) = \frac{x^2}{2} \left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_0 \quad (6)$$

$$\text{由(3)式} \quad \bar{F}_1(x) = -x \left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_0$$

$$\therefore \delta W = -\frac{x}{2} \bar{F}_1(x) \quad (7)$$



从(7)式可知若判别势能的变化是因扰动力而

$$\delta W = - \int_0^x F_i(x) dx \quad (8)$$

(7), (8)式应该相等

$$\int_0^x F_i(x) dx = \frac{x}{2} \bar{F}_i(x) \quad (7.1)$$

~~如果~~如果对于平衡位置 $x=0$ 的偏移 $|x| > 0$, 有 $\delta W > 0$, 则为稳定
若 $\delta W < 0$, 则不稳定.

力学系统处于势能为极小的平衡状态, 则此平衡为
稳定平衡. 对于满足边界条件的所有扰动 $\delta W > 0$, 才高
于平衡点, 如果只有一种扰动使 $\delta W < 0$ 则系统不稳定的
一物理原理.

由(6)式得

$$\left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)_0 = \frac{2}{x^2} \delta W \quad \text{代入(5)式得}$$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \delta W \quad (9)$$

从该式也可看出 $\delta W > 0$, 有 $\omega > 0$ 稳定
 $\delta W < 0$ 有 $\omega < 0$ 不稳定.

方程 A 是一致的.

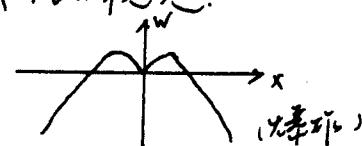
以上为单粒子一维运动稳定性研究方法, 在流体力学系统
的稳定性研究也是类似的, 先是线性化方程, 再寻找同解模解或者
修正的改变量.

同解模解和修正原理各有优缺点. 同解模解计算起来要复杂
 $\omega = \omega(k)$, 扰动的频率和波数之间必须满足

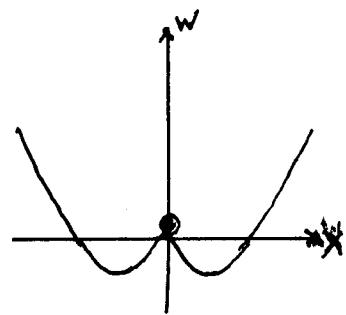
修正原理则可应用于更为复杂的平衡问题.

一般我们考察线性稳定性问题. 如果偏离平衡位置的位移
不饱和, 则要面对非线性稳定性问题

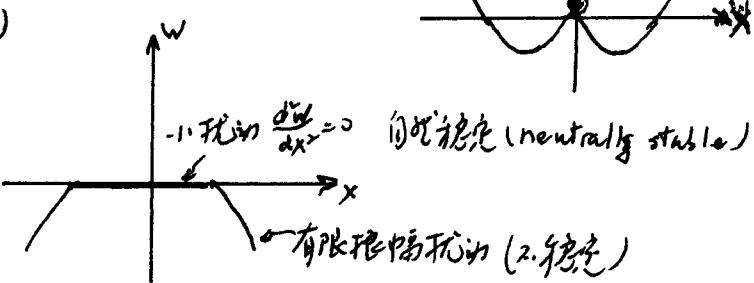
① 扰动是线性稳定的, 大扰动时为非线性的不稳定.



② 小扰动线性稳定，大扰动非线性稳定



③ 亚稳定性 (metastability)



当系统参数发生变化，由稳定态变为不稳定态是通过了中间稳定态 (marginal stability or neutral stability) 有三种途径

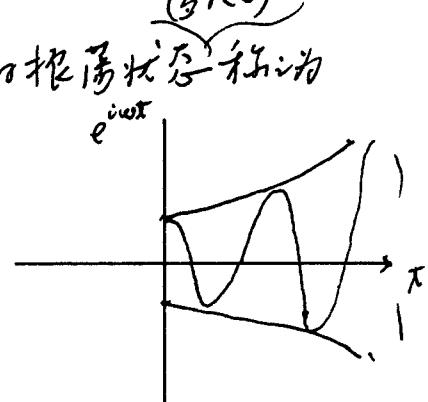
① ω^2 为实数，由大而小，通过 $\omega=0$ 的点。这是单调变化，中间态 $\omega=0$ 无途径

② ω 为复数。 $\omega = \sigma + i\gamma$

$$e^{i\omega t} = e^{i\sigma t} \cdot e^{-\gamma t} \quad \text{growing oscillation}$$

若虚部 γ 从正向负减少，就有 γ 增长的振荡状态称为 over stability (过稳定性)

中间态 (即振幅减小的增長振荡区间) 为某一个频率的振荡。



7.2 方程的线性化

理想流体(无耗散)的磁流体系统的行为由下列方程描述

磁流体力学

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.3)$$

见 Priest P.91

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.14)$$

未知数 $\vec{v}, \vec{B}, P, \rho, T$

$$\vec{j} = \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (2.15)$$

9个方程 9个未知数

$$\nabla \times (\vec{U} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P \vec{v}) = 0 \quad (7.5)$$

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

虽然已给出磁流体带系数为0，还需要加上等离子方程 $\frac{D}{Dt}(\frac{P}{\rho}) = 0$

我们知道由该方程推导出磁流体力学方程时，有三种截断方法
① 等离子体运动 ② 磁场为主。由两种方法可得

$$\frac{D}{Dt}(\frac{1}{\rho v}) = 0 \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

条件是高电导率，这对应于截断方程时选择绝热近似
或者（如 Priest 所说）系统流动时满足整体守恒或热平衡时损失
小得多。

假设有一个静止的平衡态 即速度 $\vec{v}_0 = 0$, 磁场 \vec{B}_0 , 等离子体压强 P_0
密度 ρ_0 及电流 \vec{j}_0 。（以下各量均指时间无关）

(7.3), (7.5) 式 是纯质量的，因为等式两边均为0. 其余的表达式化
平衡态时为

$$0 = -\nabla P_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_0 + \rho_0 \vec{g} \quad (7.6)$$

$$\vec{j}_0 = \nabla \times \frac{\vec{B}_0}{\mu} \quad (7.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (7.8)$$

施加外力场，对方程进行修正和简化

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_1, \quad \vec{v} = \vec{v}_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1 \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_1, \quad \vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_1. \end{aligned}$$

将这些代入方程中得

(7.4) 式 成为

$$(\rho_0 + \rho_1) \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{v}_1 \right) = -\nabla (\rho_0 + \rho_1) + (\vec{j}_0 + \vec{j}_1) \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) + (\rho_0 + \rho_1) \vec{g}$$

(7.5) 式 成为

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla \rho_1 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 + \rho_1 \vec{g} \quad (7.10)$$

(7.3) 式 成为

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) = R \vec{v}_1 \quad (7.9)$$

(7.5) 式 成为

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho_1) \vec{v}_1] = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0 \quad (7.11)$$

(7.7) 式 成为

$$\vec{j}_1 = \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu}, \quad \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{R} \vec{v}_1 \end{aligned}$$

修正方程无矛盾

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 r} \right) + \vec{v}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 r} \right) = 0 \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{v}_0 = 0 \right]$$

-11 扰动法

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \frac{\rho_0 + \rho_1}{(\rho_0 + \rho_1)^r} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_0 + \rho_1}{(\rho_0 + \rho_1)^r} + \vec{v}_1 \cdot \nabla \frac{(\rho_0 + \rho_1)}{(\rho_0 + \rho_1)^r} \\ &= \frac{1}{\rho_0^r} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{r \rho_0}{\rho_0^{r+1}} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\vec{v}_1}{\rho_0^r} \left[\nabla \rho_0 - \frac{r \rho_0^2}{\rho_0^r} \nabla \rho_0 \right] = 0 \quad (7.13') \end{aligned}$$

推导中利用下述关系式

$$\left(\frac{1}{P_0 + P_1}\right)^r \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{1}{P_0^r} \left(1 - \frac{P_1}{P_0}\right) \frac{\partial P_1}{\partial x} \approx \frac{1}{P_0^r} \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

(7.13') 可以进一步简化 (将 7.11 式代入)

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{r P_0}{P_0^r} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \vec{v}_1 \cdot \left[\nabla P_0 - \frac{r P_0}{P_0^r} \nabla P_0 \right] = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{r P_0}{P_0^r} \frac{\partial P_1}{\partial x} - P_0 (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \ln \frac{P_0}{P_0^r} \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = -r P_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \nabla) P_0 \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \therefore P_0 (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \ln \frac{P_0}{P_0^r} &= P_0 \vec{v}_1 \cdot \frac{1}{P_0} \nabla \frac{P_0}{P_0^r} \\ &= \vec{v}_1 \frac{P_0^r}{P_0^r} \left[\frac{1}{P_0^r} \nabla P_0 - r P_0 \frac{P_0^{r-1}}{P_0^r} \nabla P_0 \right] \\ &= \vec{v}_1 \cdot \nabla P_0 - \frac{r P_0}{P_0^r} \vec{v}_1 \cdot \nabla P_0 \end{aligned}$$

对流项

物理 Lagrangian 变量 $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$, 式中 \vec{r}_0 是粒子的初始位置, t 是时间变量
来表示粒子, 上面推导出的简化方程仍然是运动方程, 并用 Eulerian 变量
表示, 但方程把变量 \vec{r} 改为 \vec{r}_0 , 将 Eulerian 变量 (\vec{r}, t) (式中广义坐标) 改
为 Lagrangian 变量 (\vec{r}_0, t) , (\vec{r}_0 为标志)

空间点元的位移 $\vec{s}(\vec{r}_0, t)$ 可写成

$$\vec{s}(\vec{r}_0, t) = \vec{r} - \vec{r}_0$$

Eulerian 位移矢量 \vec{s}
Lagrangian 位移矢量
(不标)

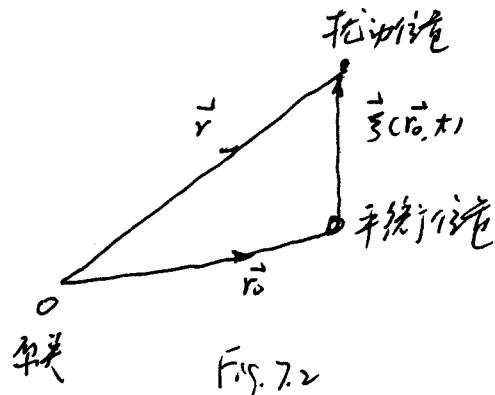


Fig. 7.2

(7.9) & (7.13) 用 \vec{s} 和 \vec{r} 表达 Eulerian 变量 (\vec{r}, t) 变为 Lagrangian 变量 (\vec{r}, t)

$$\text{Euler 速度 } \vec{v} = \frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{D(\vec{s}(\vec{r}_0, t) + \vec{r}_0)}{Dt} = \frac{D\vec{s}}{Dt}$$

$\vec{s}(\vec{r}_0, t)$ 与 \vec{r} 无关。

Eulerian \rightarrow Lagrangian 变换

$$\begin{aligned} P_1(\vec{r}, \tau) &= P_1(\vec{r}_0 + \vec{\xi}, \tau) = P_1(\vec{r}_0, \tau) + \vec{\xi} \cdot \nabla P_1(\vec{r}_0, \tau) \\ &\quad (\because \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\xi}) \\ &\approx P_1(\vec{r}_0, \tau) \end{aligned}$$

因此“惯性坐标系”中有 $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0$, $\nabla \rightarrow \nabla_0$, $\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \tau}$. 移了方程组简化为一个
的式子, ∇_0, \vec{r}_0 作为 ∇, \vec{r} (-的逆像) 对应于 对应于 方程.

$$\begin{aligned} (7.9) \text{ 式化为 } \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial \tau} &= \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \\ &= \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \tau} \times \vec{B}_0 \right) \end{aligned}$$

对 $t=0$ 时, 利用条件 $t=0$ 时, $\vec{B}_1 = \vec{\xi} = 0$

$$P_1 \text{ 有 } \vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \quad (7.15)$$

(7.5) 式化为

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \nabla \cdot (P_0 \vec{v}_1) = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \nabla \cdot (P_0 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \tau}) = 0$$

对 $t=0$ 时, $t=0$ 时, $P_1 = \vec{\xi} = 0$

$$P_1 = -\nabla \cdot (P_0 \vec{\xi}) \quad (7.16)$$

$$\text{于是有 } P_1 \vec{g} = -\nabla \cdot (P_0 \vec{\xi}) \vec{g}$$

$$\vec{j}_1 = \nabla \times \frac{\vec{B}_1}{\mu} = \nabla \times \nabla \times (\frac{\vec{\xi} \times \vec{B}_0}{\mu})$$

$$\vec{j}_0 = \nabla \times \frac{\vec{B}_0}{\mu}$$

(7.10) 式变换为

$$\begin{aligned} P_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial \tau} &= -\nabla P_1 + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 + P_1 \vec{g} \\ &= -\nabla P_1 + \underbrace{\left[\nabla \times \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu}}_{\vec{j}_1} + \underbrace{\left(\nabla \times \frac{\vec{B}_0}{\mu} \right) \times \left[\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right]}_{\vec{j}_0} - \nabla \cdot (P_0 \vec{\xi}) \vec{g} \end{aligned}$$

$$P_0 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \tau} = \vec{F}(\vec{\xi}(r_0, \tau)) \quad (7.17)$$

$$\text{其中 } \vec{F}(\vec{\xi}) = -\nabla P_1 + \underbrace{\left[\nabla \times \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu}}_{①} + \underbrace{\left(\nabla \times \frac{\vec{B}_0}{\mu} \right) \times \left[\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right]}_{③} - \nabla \cdot (P_0 \vec{\xi}) \vec{g} \quad (7.18)$$

一阶近似下，扰动力 \vec{F} 是 $\vec{\xi}$ 及空间参数的线性函数

即表达式 $\vec{\xi}(\vec{r}_0, t) = \vec{\xi}(\vec{r}_0) e^{i\omega t}$ (7.19)

(7.17) 式变为 $-\omega^2 P_0 \vec{\xi}(\vec{r}_0) = \vec{F}(\vec{\xi}(\vec{r}_0))$ (7.20) (同态模式方程)

(7.20) 式是同态稳定性研究的基本方程。

对(7.13)式稍作修改成 Lagrangian 形式：

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{r P_0}{P_0} []$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{r P_0}{P_0} \frac{\partial P_i}{\partial t} - P_0 (\vec{v}_i \cdot \nabla) \ln \left(\frac{P_0}{P_0 r} \right)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{r P_0}{P_0} \left[-\nabla \cdot (P_0 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}) \right] - P_0 \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \nabla \right) \ln \left(\frac{P_0}{P_0 r} \right)$$

对大写：

$$P_i = - \frac{r P_0}{P_0} \nabla \cdot (P_0 \vec{\xi}) - P_0 (\vec{\xi} \cdot \nabla) \ln \frac{P_0}{P_0 r} \quad (7.13)'$$

对(7.18)式考虑三种情况

① 均匀平衡态 P_0, P_0, B_0 为常数

1.) \vec{F} 式中第②项 $\nabla P_i = -P_0 C_S \nabla (\nabla \cdot \vec{\xi})$

第③项 $[\nabla \times \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu}$

$$= \frac{B_0^2}{\mu} [\nabla \times \nabla \times (\vec{\xi} \times \hat{B}_0)] \times \hat{B}_0$$

$$C_S = \frac{r P_0}{P_0}, \quad [4.14(7.13)']$$

$$P_0 (\vec{\xi} \cdot \nabla) \ln \frac{P_0}{P_0 r} = P_0 (\vec{B} \cdot \nabla) C = 0$$

$$= P_0 V_A^2 [\nabla \times \nabla \times (\vec{\xi} \times \hat{B}_0)] \times \hat{B}_0$$

$$V_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu P_0}$$

第③项为 0, $[\because \vec{B}_0 = \text{常数}, \nabla \times \vec{B}_0 = 0]$

$$\therefore \vec{F} = -P_0 C_S \nabla (\nabla \cdot \vec{\xi}) - \nabla \cdot (P_0 \vec{\xi}) \vec{g} + P_0 V_A^2 [\nabla \times \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)] \times \hat{B}_0$$

2) 不平衡态 $\nabla \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0, \frac{P_i}{P_0} = 0 \quad \therefore C_S \rightarrow \infty, \vec{B}_0 \neq 0$, 由上式知 P_i 无法确定。

$$C_S^2 = \frac{\partial P_i}{\partial P_0} = \frac{P_i}{P_0}$$

88

9

- 7.3 向心模式方程 当边界条件和平衡位置确定时 可由线性方程组 (7.9) 求解
- 扰动量 \vec{P} , \vec{V} , \vec{P}_1 , \vec{j}_1 和 \vec{B}_1 随 $e^{i\omega t}$ 变化! 解
- 向心模式方程, 可求得边界条件限制下的 ω .
1. 所有的向心模频率为实数 ($\omega > 0$). 系统在半径附近振荡. 大振幅.
2. 如果 ω 有一个负半虚部 ($\omega \leq 0$). 系统为不. 稳定. 因为扰动将随时间增长.

向心模方程可用方程组 (7.9) - (7.13), 也可直接用向心模式方程

$$-\omega^2 \vec{P}_0 \vec{\zeta}(\vec{r}_0) = \vec{F}(\vec{r}_0) \quad (7.20)$$

这时假设 $\vec{\zeta}(\vec{r}, t) = \vec{\zeta}(\vec{r}_0) e^{i\omega t}$

7.3.1 例 1: Rayleigh-Taylor 不稳定性

① 由磁场支撑受重力作用的等离子体, 是不稳定?

取坐标如图.

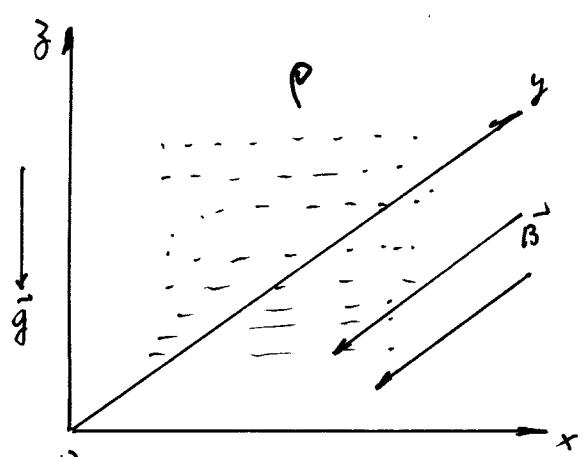
设密度为 P_0 且均匀等高

子午线平行于 $x>0$ 空间, B_0 沿

$-y$ 方向, 且是均匀的, 但等

高子体内部 ($z>0$) 的磁场 B 与

其外部 ($z<0$) 的磁场



重力沿 $-y^{\circ}$ 方向，于磁场运动的重力相平衡。
这种平衡是否稳定？以下用单粒子轨道理论来定性分析此平衡是否稳定的稳定性。

在重力和磁场的作用下，带电粒子作平行运动

$$\vec{V}_g = \frac{mc}{e} \frac{\vec{q} \times \vec{B}}{B^2} = - \frac{mc}{e} \frac{q}{B} \vec{x} \quad (\text{高斯制})$$

$$(\vec{V}_g = \frac{m}{e} \frac{\vec{q} \times \vec{B}}{B^2} = - \frac{m}{e} \frac{q}{B} \vec{x}^{\circ}) \quad (\text{MKS制})$$

电子和离子的漂移速度不同，方向也不同，电子离子体内产生电流。电子质量 m_e 远大于离子质量 M_i ，所以主要是离子电流 $\vec{j} = ne\vec{V}_g = -n \frac{MC}{B} \vec{x}^{\circ}$

n. 一等离子体的载荷密度。等离子体内，单位体积内密度的电荷力为 $\vec{F}_0 = \frac{nM}{B} q B (\vec{x}^{\circ} \times (-\vec{p}^{\circ})) = P_0 q \vec{s}^{\circ}$

$$\text{式中 } P_0 = nM$$

作用在等离子上的重力为 $-P_0 g \vec{s}^{\circ}$

二者平衡，这是重力场中磁流支撑

等离子体的物理本质。

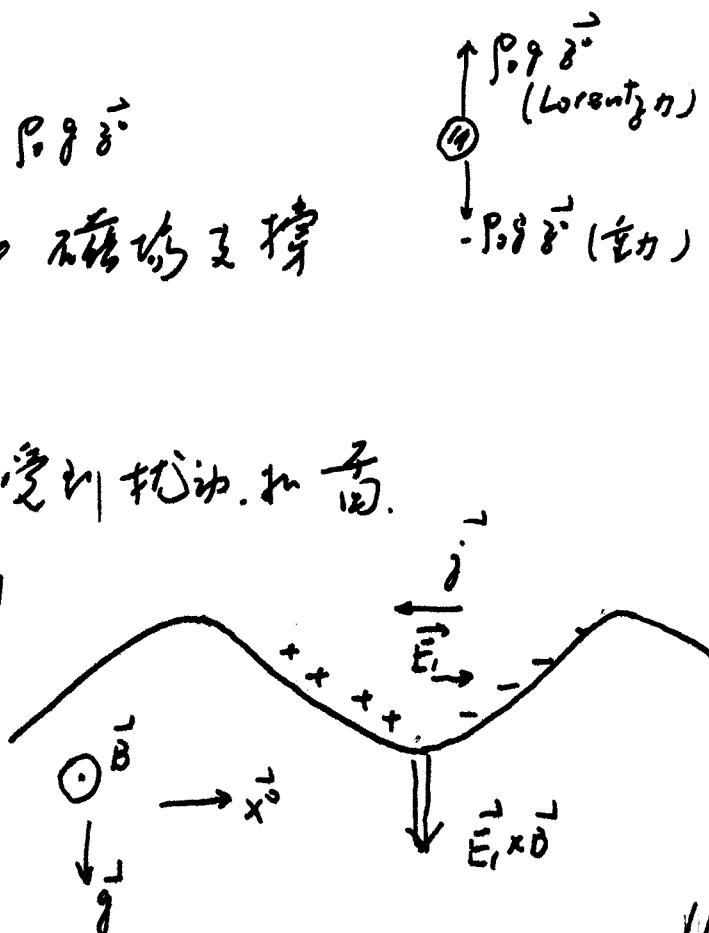
现代，修改边缘由受制运动，称高。

由于电子和离子漂移方向

不同，导致等离子体界

面上的电荷分离，形成

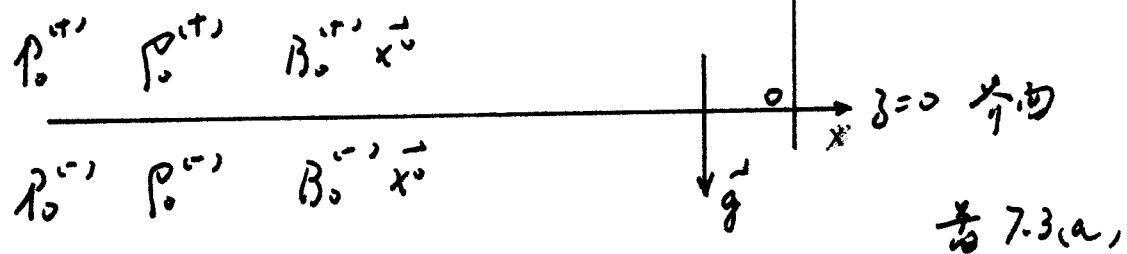
面电荷堆积，产生电场 \vec{E}_t



3) 电磁速度 $\vec{V}_E = c \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$, 方向指向运动扰动增加的方向. 因此这个平衡是不稳定的.

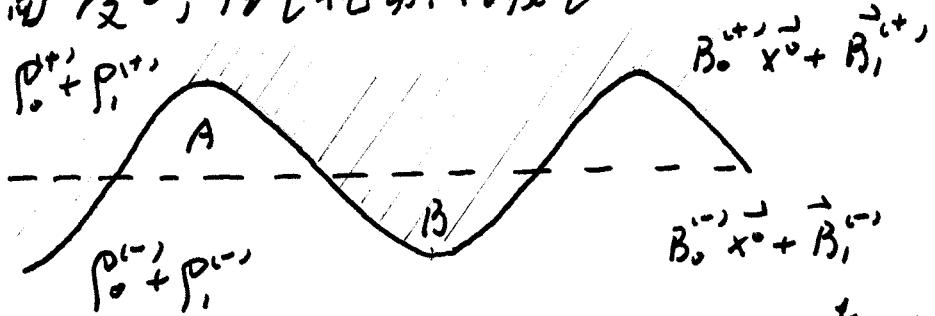
② Priest 讲的中心思想

i. 边界面上的物理量



ii. 先考虑一个无磁场的简单例子

设边界受一个垂直扰动, 位移差为 δz



密度 $P_0^{(+)}$ 的等高线现在变成 B , 该处先前的密度为 $P_0^{(-)}$; 密度 $P_0^{(-)}$ 的等高线现在变成 A . 前者的密度为 $P_0^{(+)}$ 也即 A 从密度 $P_0^{(+)}$ 的等高线已变成 B 从 $P_0^{(-)}$ 的等高线作了交换. 例如 $P_0^{(+)} < P_0^{(-)}$ (即 δz 上方的流体重) 这意味着毛流总势能增加. $\delta W = P_0^{(-)} g h_{\downarrow} - P_0^{(+)} g h_{\uparrow}$ 既然 $h_{\uparrow} = h_{\downarrow}$ 且 $\delta W > 0$, 根据能量原理, 系统不稳定. 若 $P_0^{(+)} > P_0^{(-)}$ (即 δz 上方的流体重), 则有 $\delta W < 0$. 不稳定. 这就是中性流体的 Rayleigh-Taylor 不稳定性.

起稳定作用。

磁场为磁场均位于 x - y 平面内 (\times 轴方向) 才能令 \vec{B}_0 伸缩磁力 \vec{F}_0
 与重力 \vec{g} 方向 (z 轴方向) 互相垂直才能保持平衡。
 (磁场 \vec{B}_0 方向为 x 轴方向). 为了数学上更容易地描述, 考虑以下
 特例:

7.3.1.4 磁场支撑等离子体

均匀等离子体, 磁场支撑以极简言之

均匀等离子体 $P_0^{(r)}$
 磁场: $\vec{B}_0^{(r)}$

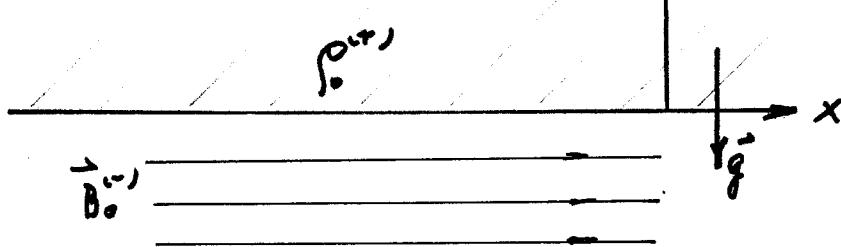


Fig. 7.4 (a)

平衡态讨论

假定^① $\rho \ll 1$ 之后的等离子体压强可忽略 $P_0^{(r)} \ll \frac{B_0^{(r)}}{\mu}$

② 此压强平衡下: $P_0^{(r)} = \frac{1}{\mu} B_0^{(r)^2}$, 均匀分布平衡态.

③ 在 y 方向也不去考虑 $\frac{\partial V_1}{\partial y}$, 忽略在 y 下述表达式

$$\vec{V}_1 = e^{i\omega t} \vec{v}_1(\vec{r}) e^{ik_y y} \quad (7.23)$$

④ 对于所有的运动学都有 (7.23) 式 $\Rightarrow \{$ 式

$$\nabla \cdot \vec{V}_1 = 0 \quad (7.24)$$

首先考虑 x 轴上的两个条件

纵向者 $\frac{\partial}{\partial x} \vec{V}_1 = -\vec{V}_1 \frac{\partial}{\partial x} \vec{B}_0$ (由 $\frac{\partial}{\partial x} \vec{B}_0 = 0$), 在 x 方向的变化 $\propto x$, y 方向零
 欲得 \vec{V}_1 . 即 $\frac{\partial}{\partial y} \vec{V}_1 \gg \frac{\partial}{\partial x} \vec{V}_1, \frac{\partial}{\partial z} \vec{V}_1$ (忽略 y, z 成分)

(7.10) 式:

$$P_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial x} = -\vec{P}_1 + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{P}_1 \vec{g}$$

(7.10) 式 D.J.N.J(i) + 決定數. 取 $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B_1 y}{\partial x} = 0$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V_{1x}}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial j_{1y}}{\partial x} B_{0x} - j_{0y} \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial x} g \quad (7.24)$$

(由 (7.10) 式 中 $\vec{B}_0 \times \vec{B}_1$ 互斥式中. $j_{0x} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial B_{0y}}{\partial z} \right)$)

$$\because \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0 \vec{x} \quad \therefore j_{0x} = 0 \quad \text{由 } \vec{B}_0 \vec{z} \quad \therefore \frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$$

由 (7.10) 式 $\frac{\partial P_1}{\partial x} + \nabla \cdot (P_0 V_1) = 0 \rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial x} = -\frac{d}{dy} (P_0 V_{1x}) \quad (7.11')$

$$(7.12): \vec{j}_1 = \nabla \times \vec{B}_1 / \mu_0 \rightarrow j_{1y} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_{1z}}{\partial x} \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} \quad (7.12')$$

由 $\vec{B}_0 \vec{z}$

$$(7.9): \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial x} = \nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) \rightarrow \frac{\partial B_{1x}}{\partial x} = B_0 \frac{\partial V_{1x}}{\partial x} = 0 \quad (7.9')$$

(由 \vec{B}_0 之方程. 2. 由應滿 $\nabla \cdot \vec{V}_1 = 0$)

$$(\vec{V}_1 \sim \vec{V}_1(x)) (V_{1x} \text{ 之 } x \rightarrow \infty) \frac{\partial}{\partial x} \approx 0$$

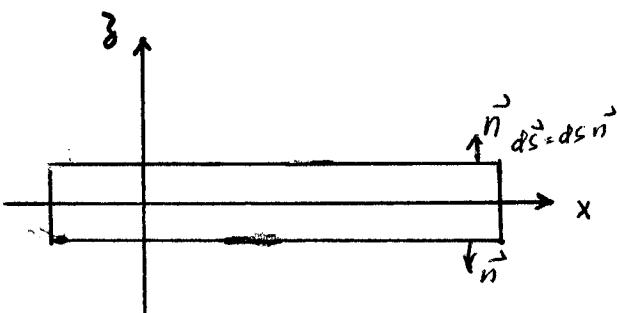
故而 $\frac{\partial V_{1x}}{\partial x} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial B_{1x}}{\partial x} \right) = 0 \quad (\because 7.9')$

由 (7.24) 式, 得

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V_{1x}}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial P_1}{\partial x} g \quad (7.24')$$

(7.23) 式 代入 (7.24'), 得 (7.11') 式. 有

$$3-\text{分量} \Rightarrow -\rho_0 \omega^2 V_{1y} = -i \omega \frac{\partial P_1}{\partial y} + g \frac{d}{dy} (P_0 V_{1y}) \quad (7.24'')$$



(7.24'') 式 1" 分

$$-\rho_0 \omega^2 V_{18} d\vec{z} = -i\omega dP_1 + g d(\rho_0 V_{18})$$

$$d\vec{z} \rightarrow 0$$

$$\sigma = -i\omega dP_1 + g d(\rho_0 V_{18}) \quad (1.2.1)$$

$$\sigma = -i\omega \int_{-s}^{+s} dP_1 \vec{z}^\circ \cdot d\vec{s} + g \int_{-s}^{+s} d(\rho_0 V_{18}) \vec{z}^\circ \cdot d\vec{s} \quad (\vec{ds} \text{ 与 } g \vec{z}^\circ \perp)$$

$$\sigma = -i\omega (P_1^{(+)} - P_1^{(-)}) + g (\rho_0^{(+)} V_{18}^{(+)} - \rho_0^{(-)} V_{18}^{(-)})$$

$$\sigma = -i\omega [P_1] + g [\rho_0 V_{18}] \quad (1.2.5)$$

$$\text{或 } [P_1] = P_1^{(+)} - P_1^{(-)}$$

$$[\rho_0 V_{18}] = \rho_0^{(+)} V_{18}^{(+)} - \rho_0^{(-)} V_{18}^{(-)}$$

物理量的跳跃.

2. 电压梯度由 (1.2.2) 式 $\nabla \cdot \vec{V}_1 = 0$ 及 (1.2.3) 知由下:

变为

$$\frac{dV_{18}}{dz} + ik V_{1y} = 0 \quad (\text{左边} \rightarrow \text{右边} \text{ 为} \frac{d}{dz} \text{ 的系数}) \quad (1.2.2')$$

方程 (1.1.0) 的 y 为

$$\rho_0 \frac{\partial V_{1y}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} P_1 + j_{18} B_0 + j_{0y} B_{1x} - j_{0x} B_{18}$$

其次的计算. 由 $\vec{j}_0 \times \vec{B}_1$ 有 $(\vec{j}_0 \times \vec{B}_1) \cdot \vec{z}^\circ = j_{0y} B_{1x} - j_{0x} B_{18}$

$$\vec{j}_0 = \nabla \times \vec{B}_0 \quad \vec{B}_0 = B_0 \vec{x}^\circ \quad \therefore \text{有} \vec{x}^\circ \text{ 分量.} \quad \therefore j_{0y} = j_{0x} = 0$$

$$\text{由 (1.1.0) 式 } \frac{\partial B_{1x}}{\partial x} = B_0 \frac{\partial V_{1x}}{\partial x} = 0$$

~~由 $j_{0x} = e^{i\omega t} B_{18}$ 及 $j_{0x} = i k z$ 得 $i \omega B_{18} = i k z$~~

~~$i \omega B_{18} = 0$~~

$$j_{1x} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial B_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} \right) \quad \vec{j} = \nabla \times \vec{B} / \mu$$

$$= 0 \quad (\because B_{1y} \text{ 和 } x \text{ 为共轭复数}, \vec{B}_{1x} \text{ 为 } y \text{ 的共轭复数})$$

B_{1x} 为 y 的共轭复数，共轭复数的子为共轭复数

由式(7.10)式 y 为 x 的

$$\rho_0 \frac{\partial V_{1y}}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial y} P_1$$

$$\begin{cases} i\rho_0 \omega V_{1y} = -ikP_1 \\ \frac{\partial V_{1y}}{\partial y} + ikV_{1y} = 0 \end{cases} \quad (7.22')$$

$$\text{解得 } P_1 = - \frac{i\omega \rho_0}{k^2} \frac{\partial V_{1y}}{\partial y}$$

V_{1y} 在界面为连续， P_1 代入(7.25). (3.2)

$$0 = - \frac{\omega^2}{k^2} \left[\rho_0 \frac{\partial V_{1y}}{\partial y} \right] + g V_{1y} [\rho_0]$$

考虑到边界方程 $P_0^{(r)} \ll \frac{1}{\mu} B_0^{(r)}$ ，近似为真空 $P_0^{(r)} \approx 0$

$\frac{1}{\mu} P_0^{(r)} \approx 0$

$$0 = - \frac{\omega^2}{k^2} \rho_0^{(r)} \left(\frac{\partial V_{1y}}{\partial y} \right)^{(r)} + g V_{1y}^{(r)} \rho_0^{(r)} \quad (7.26)$$

下面要找边界条件 $V_{1y} \approx 0$

假设运动规律为 \vec{B}_0, ρ_0, P_0 为均匀分布，方程(7.22)成立。即 \vec{v}_1 为常数

$$\begin{aligned} (7.9) \text{ 式 } \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial x} &= \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \\ &= \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{B}_0 - \vec{B}_0 \cdot \nabla \vec{v}_1 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \\ &= (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 \end{aligned}$$

$$= B_0 \frac{\partial}{\partial x} (V_{ix} \vec{x} + V_{iy} \vec{y} + V_{iz} \vec{z})$$

$$\therefore \vec{V}_i = V_{i,0} \vec{x}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial x} = 0$$

$$(7.11) \quad \frac{\partial P_i}{\partial x} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}_i) = \frac{\partial P_i}{\partial x} + \rho \nabla \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_i \cdot \nabla P_i = 0$$

$\downarrow \nabla \cdot \vec{v}_i$

$$\therefore \frac{\partial P_i}{\partial x} = 0 \quad (由 (7.11)' 的 \text{推导})$$

由等离子体物理

$$(7.12) \quad \text{此式令 } \vec{B}_i = 0, P_i = 0. \text{ 则 } \vec{j}_i = \nabla \times \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} = 0.$$

(7.10) 式由 (7.12) 得证

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x} = -\nabla P_i$$

由 (7.12) 得

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \vec{v}_i = -\nabla \cdot (\rho \vec{P}_i) = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \quad \text{即 } \vec{v}_i \text{ 为零矢量}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}_i) = \nabla (\nabla \cdot \vec{v}_i) - \nabla^2 \vec{v}_i = 0, \quad \nabla \cdot \vec{v}_i = 0$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{v}_i = 0$$

$$\text{设 } \vec{v}_i = e^{i\omega t} V_{i,0} e^{iky}$$

$$V_{i,0} = e^{i\omega t} V_{i,0} e^{iky}$$

$$\nabla^2 \vec{v}_i \text{ 为 } \vec{g} - \vec{g}^* \text{ 且 } \nabla^2 V_{i,0} = \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2 V_{i,0}}{\partial z^2} - k^2 V_{i,0} = 0$$

$\Im\{V_{12}\}$ = R の常数起電力の方程式

$$\frac{d^2 V_{12}}{dz^2} - R V_{12} = 0$$

$$V_{12} = A e^{-Rz} + B e^{Rz}$$

且 $z \rightarrow \pm \infty$ の時、上式有り

$$V_{12} = \begin{cases} A e^{-Rz} & z > 0 \\ B e^{Rz} & z < 0 \end{cases}$$

边缘面上有 $z=0$. $V_{12}^{(+)}$ = $V_{12}^{(-)}$. 推測 $A=B$

$$\text{且 } z=0 \text{ 時 } V_{12}^{(+)}=A, \quad \left. \frac{dV_{12}^{(+)}}{dz} \right|_{z=0} = -RA \quad \left(\frac{dV_{12}}{dz} = -RA e^{-Rz} \right)$$

代入 (7.26) 式 得 $\omega = -gk$

$$\omega = -i(gk)^{\frac{1}{2}}$$

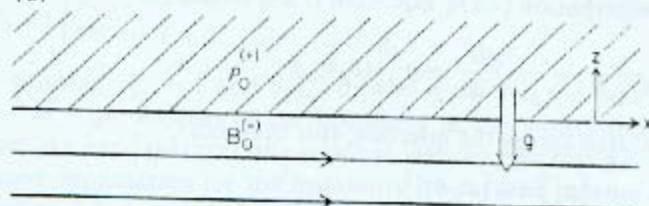
$$\text{令 } \gamma = (gk)^{\frac{1}{2}} > 0$$

$$\begin{aligned} V_1 &= e^{i\omega t} V_{12(0)} e^{iky} \\ &= e^{i\omega t} V_{12(0)} e^{iky} \end{aligned}$$

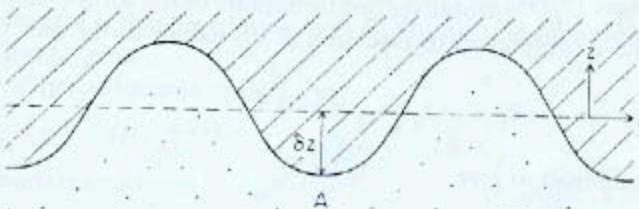
此が方向の波动 (波 e^{iky} 方向) $\therefore e^{i\omega t}$ の i の意味
は時間元 (矢量) 增加振幅. — 2. 総述

along the z -axis normal to the plane interface indicated in Figure 7.4(a).

(a)



(b)



(c)

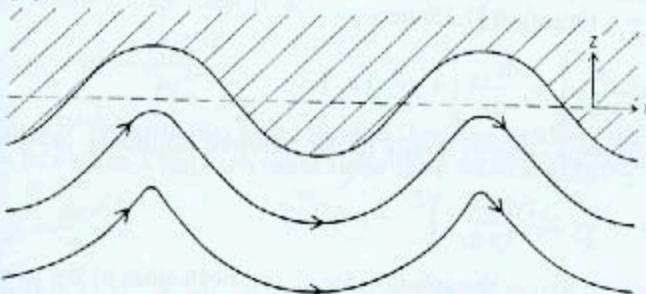


Fig. 7.4. Plasma (shaded) supported by a magnetic field ($B_0^{(+)} \hat{x}$). (a) Equilibrium configuration.
(b) Perturbations rippled in the y -direction. (c) Perturbations rippled in the x -direction.

设为一微扰运动形式可写成：

$$V_1 = e^{i\omega t} \sqrt{\rho_0} e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (7.28)$$

边界条件为

$$0 = -\frac{\omega}{k_z} \rho_0^{(+)^+} \left(\frac{dV_{1y}}{dy} \right)^{(+)^+} - \frac{k_x^2}{k_z^2} \frac{B_0^{(+)^+}}{\mu} \left(\frac{dV_{1x}}{dx} \right)^{(+)^+} + q V_{1y}^{(+)^+} \rho_0^{(+)^+}$$

忽略进深 (利用(7.27)式, 令 $V_{1y}^{(+)^+} = V_{1y}^{(-)}$)

$$\omega^2 = -gk + \frac{k_x^2 B_0^{(+)^+}}{\mu \rho_0^{(+)^+}}, \quad (7.29)$$

式中 $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

开方后, $\omega = \pm \left(-gk + \frac{k_x^2 B_0^{(+)^+}}{\mu \rho_0^{(+)^+}} \right)^{1/2}$

当 $-gk + \frac{k_x^2 B_0^{(+)^+}}{\mu \rho_0^{(+)^+}} < 0$ 且 $k_y = 0$ 时, 是扰动不稳定分支

这时, $k = k_x$. 可解得

$$k = k_x < \frac{g \mu \rho_0^{(+)^+}}{B_0^{(+)^+}}$$

令 $k_{crit} = \frac{g \mu \rho_0^{(+)^+}}{B_0^{(+)^+}}$ (7.30)

当 $0 < k < k_{crit}$ 有不稳定.

当波长时 $k > k_{crit}$ 有稳定 (由 e^{iky} 式扰动下 ω 不变) 且 $\frac{d\omega}{dk} = 0$. (即 $k = \frac{1}{2} k_{crit}$ 是增长速度极点) — — — (7.29) 式和 $\frac{d\omega}{dk} = 0$. (即 $k = \frac{1}{2} k_{crit}$ 是增长速度极点) — — —

7.3.1 B 均匀磁场场 ($B_0^{(+)^+} = B_0^{(-)}$)

考虑边界: 例 1 磁场均匀相等 (" $\frac{B_0}{B_0} = 1$ " 时 $B_0^{(+)^+} = B_0^{(-)}$)

界面: 例 1 等离子体密度 $\rho_0^{(+)^+}, \rho_0^{(-)}$, 扰动通过界面时
根据(7.28)式, 扰动的边界条件为

力学等
高级物理
学 "§5.7"

$$\cdot \left(\frac{\omega^2}{k^2} \rho_0^{++} - \frac{k_x^2 B_0^2}{k^2 \mu} \right) \left(\frac{dV_{1g}}{dg} \right)^{++} + \left(\frac{\omega^2}{k^2} \rho_0^{--} - \frac{k_x^2 B_0^2}{k^2 \mu} \right) \left(\frac{dV_{1g}}{dg} \right)^{--}$$

$$= +g (V_{1g}^{++} \rho_0^{++} - V_{1g}^{--} \rho_0^{--})$$

积分从边界下 ($x=0^\circ$) 和边界上 ($x=0^\circ$)

$$\text{式中 } k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}.$$

$$\text{将 } \left(\frac{dV_{1g}}{dg} \right)^{++} = - \left(\frac{dV_{1g}}{dg} \right)^{--} = -k, \quad V_{1g}^{++} = V_{1g}^{--} = \pm 1$$

代入上式得

$$\omega^2 = -gk \frac{\rho_0^{++} - \rho_0^{--}}{\rho_0^{++} + \rho_0^{--}} + \frac{2B_0^2 k_x^2}{\mu(\rho_0^{++} + \rho_0^{--})} \quad (7.31)$$

从色散关系 (7.31) 可以看出^① 磁场方向垂直于 (无磁场时) $B_0 = 0$
时的 ω 为零, 重流体无关, $\rho_0^{++} > \rho_0^{--}$, 则 $\omega < 0$, 2 种情况

② 1 倍磁场方向平行于 \vec{B}_0 (无磁场时), $k_x = 0$, 不考虑重流
对稳定性没有贡献. [(7.31) 中有磁场时, 是有利于稳定的]

③ 如果重流的扰动为 $k_y = 0$ (重流平行于 \vec{B}_0), 则第一次的
修正), $k_x \neq 0$, $k_x = k$, 则 ω 为零有利于稳定.

④ 如果 $\rho_0^{++} > \rho_0^{--}$ (重流平行于 \vec{B}_0), $k_y = 0$, 从 (7.31)
可知 ω (令 $\omega < 0$) 不稳定条件

$$0 < k = k_x < k_c \quad (7.32)$$

$$\text{其中 } k_c = \frac{(\rho_0^{++} - \rho_0^{--}) g \mu}{2B_0^2} \quad (7.31 \text{ 式}, \omega = 0 \text{ 时}) \quad (7.33)$$

⑤ 增长最快的模式, 为 $\Gamma = i\omega$ 的值最大. 且要求 ω 在很大范围内

对于 (7.31) 求 $\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dk_x} = 0$ 时 $\omega = \frac{1}{2} k_c$

⑥ 对于长波 $k > \frac{2\pi}{k_c}$, 磁场力不足以抵消引力, 长波 $k < \frac{2\pi}{k_c}$, 磁场力强, 可以忽略重力. $\therefore \omega \sim \frac{g}{\mu k_c}$, 长波 $\propto k_c$.

7.4 能量原理

所有可能的位移，都有 $\delta W > 0$ — 稳定

至少有一个位移使得 $\delta W < 0$ — 不稳定

势能表示式为，(对于一个平衡)

$$W_0 = \int \left(\frac{1}{2} \rho_0 B_0^2 + \rho_0 U_0 + \rho_0 g_0 \right) dV$$

U_0 为单位质量内能，积分范围为整个等高体所占的空间。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\rho_0}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial x} - P_0 \vec{B}_0 \cdot \vec{j}_0 \ln \left(\frac{P_0}{P_0'} \right) \quad (7.13)$$

离开平衡态的 P 为重心压 (P_0, P_1, \vec{B}_1) ，可用位移矢量 \vec{x}

和 \vec{x} ，方程 (7.13), (7.15) 及 (7.16) 即为和态式。用 $P_0 + P_1$ ，
 $P_0 + P_1, \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ 代入上式得，(得到 W_0 的和态式)

$$\text{因为初状态为平衡态, } \therefore \vec{F}(0) = \frac{dW}{dx} = 0, \therefore \vec{x} = 0 - \text{一个常数.} \quad (7.17)$$

现化简 δW 的表达式。

等高体已知于 \vec{x} ，有位移 $\vec{x}(r_0, t)$

$$\vec{x}(r_0, t) = \vec{x}(r_0) e^{i\omega t} \quad (7.18)$$

线性化的运动方程

$$-\omega^2 \rho_0 \vec{x}(r_0) = \vec{f}(\vec{x}(r_0)) \quad (7.19)$$

即 \vec{x} 满足 (7.20) 式。

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla P_0 + \rho_0 \vec{g} + \vec{j}_0 \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 \quad (7.20)$$

是单位体积活力，“简化”等高体上。以 \vec{F} 为作用力，以 势能
 V 表示，因此有

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \vec{x} \cdot \vec{F} dV \quad (7.21)$$

当位移 $\vec{\xi} = 0$ 时，为平衡态 $\vec{F} = 0$ 。当为 $\vec{\xi}$ 时，有力 \vec{F} ，即以 $\vec{\xi}$ 从 $0 \rightarrow \vec{\xi}$ 中，平均下同力为 $\frac{1}{\Delta t} \vec{F}$ 。

(7.35) 式 = 边界乘 $\vec{\xi}$ ，对整个空间积分。

$$\omega^2 \int \frac{1}{2} \rho_0 \vec{\xi}^2 dV = \delta W \quad (7.37)$$

左边表示高体的动能，势能的减少便等于体积分运动能。

能量原理通过求 δW 的极值及其符号来判断稳定性。对于可忽略引力的特例中，若扰动量 $\vec{\xi}$ 在于 \vec{B}_0 的子空间 $\vec{\xi}_x$ ， $\vec{\xi}_y$ ， $\vec{\xi}_z$ 无关，则 \vec{B}_0 平行的子空间 $\vec{\xi}_x$ ，要使 δW 极小，是优先对 $\vec{\xi}_x$ 的 - 阶导数为零。 $\vec{\xi} = \vec{\xi}_x + \vec{\xi}_y + \vec{\xi}_z$ ， $\therefore \vec{\xi}_y, \vec{\xi}_z$ 无关。

$\frac{\partial \delta W}{\partial \vec{\xi}_x} = 0$ 即为 $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ 。根据流体不可压缩的条件 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 可得 $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ ，对时间无关。初状态时 $\vec{\xi} = 0$ ，未扰动数为零。 $\therefore \nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ 时 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 亦然。因为不可压缩，流体不可压缩化压缩或膨胀等条件，于是扰动的幅度也不稳定。因此在研究稳定性时，通常只考虑满足 $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ 的扰动。~~同样等高与零的正力~~ ^{从而忘记} (7.36) 式中。_{流体} (下文中可看作 $\vec{\xi}$)

重写 (7.36) 式，记 $\vec{F}_i = -\nabla p_i + \vec{j}_i \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_i + \rho_i \vec{g}$ 。

$$\delta W = \frac{1}{2} \int [\vec{\xi} \cdot \vec{F}_i - \vec{\xi} \cdot \vec{p}_i \vec{g} - \vec{\xi} \cdot (\vec{j}_i \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_i)] dV \quad (7.38)$$

$$\text{注意到: } \begin{aligned} \int \vec{\xi} \cdot (\vec{j}_i \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_i) dV &= -\mu^{-1} \left\{ [(\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_i] \cdot d\vec{s} \right\} - \mu^{-1} \int \vec{B}_i dV \\ &+ \int \vec{j}_0 \cdot \vec{B}_i \times \vec{\xi} dV = -\mu^{-1} \int \vec{B}_i dV + \int \vec{j}_0 \cdot \vec{B}_i \times \vec{\xi} dV \end{aligned} \quad (7.38-1)$$

$$\text{利用公式 } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) \quad \text{其中 } \vec{a} = \vec{\xi}, \vec{b} = \nabla \times \vec{B}_i, \vec{c} = \vec{B}_0$$

$$\text{及 } \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b} \quad \text{其中 } \vec{a} = \vec{\xi} \times \vec{B}_0, \vec{b} = \vec{B}_i, \vec{b}_i = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$$

→
→
→

2) 例題 5. 気体の運動方程式

$$\text{同様} \quad \int \vec{\xi} \cdot \nabla p_i dV = \int [\nabla \cdot (\vec{\xi} p_i) - p_i \nabla \cdot \vec{\xi}] dV \\ = - \int p_i (\nabla \cdot \vec{\xi}) dV \quad \cdots \cdots (A)$$

$$\therefore p_i = - \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \underbrace{\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial t}}_{P_i^{(1)}} - \left\{ \underbrace{\vec{v}_i \cdot \nabla \rho_0}_{P_i^{(2)}} - \underbrace{\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \vec{v}_i \cdot \nabla \rho_0}_{P_i^{(3)}} \right\} \quad (7.17)$$

$$① P_i^{(1)}: \quad \frac{\partial P_i^{(1)}}{\partial t} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = - \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \\ P_i^{(1)} = - \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \quad (\text{初期条件} \because t=0, P_i^{(1)}=0)$$

$$\vec{\xi} \cdot \nabla P_i^{(1)} = - \vec{\xi} \cdot \nabla \left[\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \right] \\ = - \nabla \cdot \left[\vec{\xi} \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \right] + \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \nabla \cdot \vec{\xi}$$

面積分の式

② $P_i^{(2)}$:

$$\frac{\partial P_i^{(2)}}{\partial t} = \vec{v}_i \cdot \nabla \rho_0 - \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \vec{v}_i \cdot \nabla \rho_0$$

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \Rightarrow P_i^{(2)} = \vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0 - \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0 \quad (\text{初期条件} \text{の式})$$

$$\nabla P_i^{(2)} = \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0) - \nabla \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0 \right)$$

$$\vec{\xi} \cdot \nabla P_i^{(2)} = \vec{\xi} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0) - \vec{\xi} \cdot \nabla \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0 \right) \\ = \nabla \cdot [\vec{\xi} (\vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0)] - (\vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0) \nabla \cdot \vec{\xi} - \nabla \cdot [\vec{\xi} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0 \right)] \\ + \left[\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0 \right] \nabla \cdot \vec{\xi}$$

面積分の式

$$= -(\vec{\beta} \cdot \nabla P_0) \nabla \cdot \vec{\beta} + \left[\frac{rP_0}{\rho_0} \vec{\beta} \cdot \nabla P_0 \right] \nabla \cdot \vec{\beta} + (\text{忽略分子运动})$$

于是(A)式中

$$\begin{aligned}\vec{\beta} \cdot \nabla P_1 &= \frac{rP_0}{\rho_0} \nabla \cdot (P_0 \vec{\beta}) \nabla \cdot \vec{\beta} + (\vec{\beta} \cdot \nabla P_0) \nabla \cdot \vec{\beta} - \frac{rP_0}{\rho_0} (\vec{\beta} \cdot \nabla P_0) \nabla \cdot \vec{\beta} + K \\ &= -P_1 \nabla \cdot \vec{\beta} \\ &= -[P_1^{(1)} + P_1^{(2)}] \nabla \cdot \vec{\beta} = \left[\frac{rP_0}{\rho_0} P_0 \nabla \cdot \vec{\beta} + \frac{rP_0}{\rho_0} \vec{\beta} \cdot \nabla P_0 + (\vec{\beta} \cdot \nabla P_0) - \frac{rP_0}{\rho_0} \vec{\beta} \cdot \nabla P_0 \right] \nabla \cdot \vec{\beta} + K \\ &= \left[\frac{rP_0}{\rho_0} P_0 \nabla \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \frac{rP_0}{\rho_0} \nabla P_0 \right] \nabla \cdot \vec{\beta} + K \\ &= \left[\frac{rP_0}{\rho_0} \nabla \cdot (\vec{\beta} P_0) \right] \nabla \cdot \vec{\beta} + K \quad (7.38-2)\end{aligned}$$

$$\vec{\beta} \cdot \vec{P}_1 \vec{g} = \vec{\beta} \cdot (-\nabla \cdot P_0 \vec{\beta}) \vec{g} \quad [(7.16) \text{ 式代入}]$$

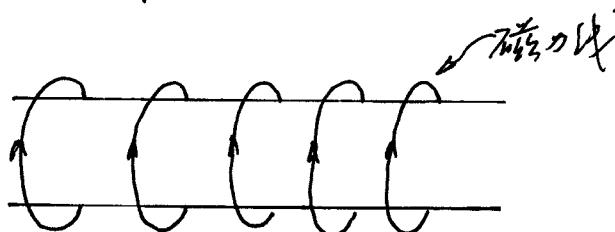
$$= -(\vec{\beta} \cdot \vec{g}) \nabla \cdot (P_0 \vec{\beta}) \quad (7.38-3)$$

(7.38-1), (7.38-2), (7.38-3) 代入 (7.38) 得:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\partial_1^2}{\mu} - \vec{j}_0 \cdot (\vec{B}_1 \times \vec{\xi}) + \frac{rP_0}{\rho_0} \nabla \cdot (P_0 \vec{\beta}) \nabla \cdot \vec{\xi} + (\vec{\beta} \cdot \vec{g}) \nabla \cdot (P_0 \vec{\beta}) \right] dV \quad (7.39)$$

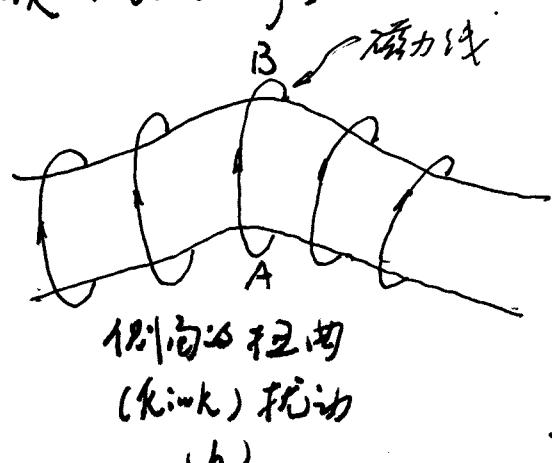
其中 $\vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\beta} \times \vec{B}_0)$ (7.15)

7.4.1 例1: 扭曲不稳定性 (Kink instability)



平行态

为 7.6 (a)



扭曲态

(kink) 振动
(b)

一、定性讨论

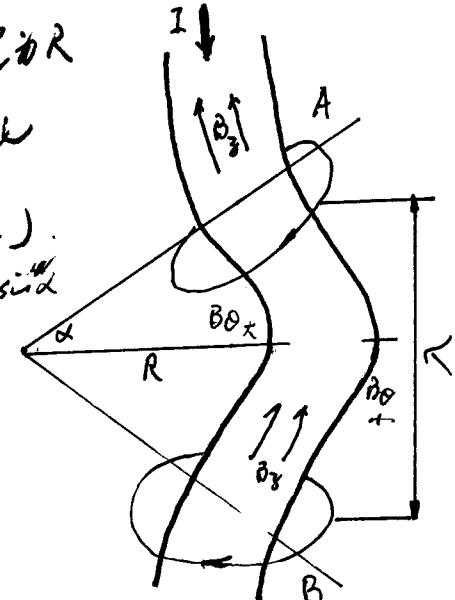
如果平衡等离子体柱受到弯曲的微扰弯曲，则由于凹边的极向磁场增加，凸边的减少，两边的磁压缩差，将使该扰动进一步增长。等离子体柱不断弯曲，直至器壁相碰。这就是扭曲不稳定性。若压缩前，在等离子体柱内已有纵向磁场，则可以使某些扭曲成为稳定。

设弯曲部分的特征长度为 λ ，曲率半径为 R
假定柱内有纵向磁场 B_0 ，它的磁力引证

向左方向的斥磁力为 $2 \cdot \frac{B_0^2}{8\pi} \sin \alpha$ (Gauss 定律)
(磁力沿磁力线方向为零，垂直压力 $\frac{1}{R} B_0^2$ ，再按斜对只方向)，柱半径为 a 。

在 πa^2 面上的总斥磁力为 $\approx \frac{B_0^2}{4\pi} \pi a^2 \frac{\lambda}{R}$

$$\frac{B_0^2}{8\pi} \cdot \pi a^2 \sin \alpha \approx \frac{B_0^2}{4} a^2 \alpha = \frac{1}{4} B_0^2 a^2 \cdot \frac{\lambda}{2R} \quad (1)$$



二、扭曲不稳定性

再求极向磁场 B_θ 引起的弯曲，设用半径
 λ 引入的偏转因数把等离子体柱的弯曲部分包围起来。
圆筒的上下面通过圆心的平面 A-B 内，圆筒的侧面
高等离子体柱的弯曲部分较直，因此偏转圆筒上的磁场可
近似认为 2. 变形变形。扰动引证的弯曲力大致等于圆
筒上下圆柱面极向磁场引证的弯曲力 (注意： B_0 和 B_θ 不是同
一个磁场的两个分量)，偏转圆筒上下圆柱引证的磁压均为
为 $\frac{1}{8\pi} B_0^2$ ，相应的偏转等离子体柱弯曲力为 $\frac{1}{8\pi} B_0^2 \sin \alpha \cdot 2$

= 圆筒向上弯曲弯曲力的为

$$2 \cdot \frac{B_0^2 \sin \alpha}{8\pi}$$

$$\frac{B_0^2}{8\pi} \sin \alpha \cdot 2$$

$$\frac{B_0^2}{8\pi} \cdot \pi a^2 \sin \alpha$$

$$= \frac{B_0^2}{8\pi} \cdot \pi a^2 \frac{\lambda}{R}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{R}$$



$$\frac{1}{8\pi} B_0^2 \sin \alpha \cdot 2$$

$$\begin{aligned}
 & 2\sin\alpha \int_a^R \frac{1}{8\pi} B_0^2 \cdot 2\pi r dr \approx \frac{1}{4} \frac{1}{R} \int_a^R B_0^2(r) \cdot r dr \approx \frac{1}{R} \int_a^R \frac{B_0^2}{2\pi} \cdot 2\pi r dr \\
 & = \frac{1}{R} \int_a^R \frac{B_0^2}{2\pi} \cdot 2\pi r dr \\
 & = \frac{1}{R} \frac{B_0^2}{2\pi} \cdot 2\pi a^2 \ln \frac{R}{a}
 \end{aligned}$$

$$\therefore B_0(r) = \frac{2I}{cr}, \quad B_{0a} = \frac{2I}{ca} \quad \therefore B_0(r) = B_{0a} \frac{a}{r} \quad \text{代入上式}$$

$$\text{上式} = \frac{\lambda}{4R} B_{0a}^2 a^2 \ln \frac{R}{a} \quad \left(= \frac{1}{R} \frac{B_{0a}^2}{2\pi} \cdot 2\pi a^2 \ln \frac{1}{a} \right)$$

比较(1)和(2)式，可知当坡度角大于弯曲时，可以进行即

$$\frac{B_0^2}{B_{0a}^2} > 2 \ln \frac{R}{a} \quad , \quad \left(\frac{B_0^2}{B_{0a}^2} > \ln \frac{1}{a} \right)$$

可以使曲轴不稳定性变得稳定。

根据平衡条件 $P + \frac{1}{8\pi} B_0^2 = \frac{1}{8\pi} B_{0a}^2$ ，有 $\frac{B_0^2}{B_{0a}^2} \leq 1$ ，因此
对于 $\frac{1}{a}$ 太大的长波扰动，仍很难稳定。

如果磁通也有内、外壳 B_0 时，则磁通管的弯曲
必然不稳定 — 曲轴不稳定 (kink)

附录：一般形式运动的边界条件（等离子体流速 v_i ，密度 ρ_i ）

一、运动方程。（一般形式运动 $\vec{v}_i = e^{i\omega t} \vec{v}_i^0 e^{i(k_x x + k_y y)}$ ）

$$\frac{\partial \vec{P}_i}{\partial t} = -\gamma \vec{P}_i \nabla \cdot \vec{v}_i - (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{P}_i \quad (5.5-7)$$

$$\frac{\partial \vec{P}_i}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_i \times \vec{B}_0) \equiv \vec{R}(\vec{v}_i) \quad (5.5-8)$$

$$\frac{\partial \vec{j}_i}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{g} \times \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{R}(\vec{v}_i) \quad (5.5-9)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = -\vec{P}_i + \vec{j}_i \times \vec{B}_0 + \vec{j}_i \times \vec{B}_0 \quad (5.5-5')$$

$$(5.5-5') \text{ 对 } z \text{ 考虑: } \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = -\nabla \vec{P}_i + \vec{j}_i \times \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{j}_i}{\partial t} \times \vec{B}_0 \\ = -\nabla [-\gamma \vec{P}_i \nabla \cdot \vec{v}_i - (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{P}_i] + \vec{j}_i \times \vec{R}(\vec{v}_i) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{R}(\vec{v}_i) \times \vec{B}_0$$

考虑引力 \vec{g} 。上式左边加上 $\frac{\partial \vec{P}_i}{\partial t} \vec{g}$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = \gamma \nabla (\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_i) + \nabla [(\vec{v}_i \cdot \nabla) \rho_0] + \vec{j}_i \times \vec{R}(\vec{v}_i) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \times \nabla \times \vec{R}(\vec{v}_i) + \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial t} \vec{g} \\ - \gamma \nabla (\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_i) + \nabla [(\vec{v}_i \cdot \nabla) \rho_0] + \vec{j}_i \times \vec{R}(\vec{v}_i) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \times \nabla \times \vec{R}(\vec{v}_i) - \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_i) \vec{g}$$

由(5.5-10)式可求得等离子体偏高平行运动力 F_{\parallel} 。

二、磁流形坐标选取

等离子体位于 $z > 0$ 的空间, $z < 0$ 为真空

在 $z=0$, 面上, 有密度梯度 $\partial \rho_0 / \partial z$

静磁场 \vec{B}_0 在 xz 平面上, 大小和方向随 z 变化

$$\vec{B}_0(z) = B_{0x}(z) \hat{x} + B_{0y}(z) \hat{y}$$

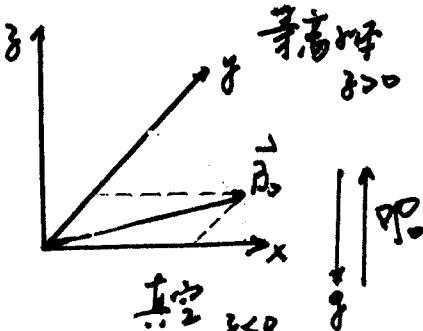
引力加速 \vec{g} 化 $-\hat{z}$ 方向

$$\text{静力学平衡条件: } -\frac{d}{dz} (\rho_0 + \frac{1}{\mu_0} B_0^2) - \rho_0 g = 0 \quad (5.7-2)$$

平衡假设到运动时, 等离子体的运动学行为由运动方程决定, 为简化起见

设等离子体不可压缩流体, $\nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \quad (5.7-3)$

三、求边界条件.



1. 转动方程的分量式：

$$该转动速度 \vec{v}_i(\vec{r}, t) = \vec{v}_i^0 e^{i\omega t} e^{i(k_x x + k_y y)}$$

$\vec{v}_i = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$, 其他速度有类似的形式。

利用 $\nabla \vec{v}_i = 0$. (5.5-10) 式 等于

$$\int_0^T \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = \nabla [(\vec{v}_i \cdot \nabla) P_0] + \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{R}(\vec{v}_i) - \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \times (\nabla \times \vec{R}(\vec{v}_i)) - [(\vec{v}_i \cdot \nabla) P_0] \hat{g} \quad (5.7-4)$$

(5.7-4) 式 的 分量式：

$$(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{R} - \vec{B}_0 \times (\nabla \times \vec{R}) = - [\vec{R} \times (\nabla \times \vec{B}_0) + \vec{B}_0 \times (\nabla \times \vec{R})]$$

$$= -\nabla (\vec{B}_0 \cdot \vec{R}) + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{R} + (\vec{R} \cdot \nabla) \vec{B}_0 \quad \xrightarrow{\text{无奇分量}}$$

$$\begin{aligned} \text{上式两个 } \hat{z} \text{ 分量: } & -\frac{d}{dz} (B_{0x} R_x + B_{0y} R_y) + (B_{0x} \frac{\partial}{\partial z} + B_{0y} \frac{\partial}{\partial y}) R_z \\ & = -\frac{d}{dz} (B_{0x} R_x + B_{0y} R_y) + (i k_x B_{0x} + i k_y B_{0y}) R_z \\ & = -\frac{d}{dz} (B_{0x} R_x + B_{0y} R_y) + i (\vec{R} \cdot \vec{B}_0) R_z \end{aligned}$$

$\therefore \hat{z}$ 分量：

$$-\omega^2 P_0 V_{1z} = \frac{d}{dz} (V_{1z} \frac{d}{dz} P_0) - \frac{1}{\mu} \frac{d}{dz} (B_{0x} R_x + B_{0y} R_y) + \frac{i}{\mu} (\vec{R} \cdot \vec{B}_0) R_z + V_{1z} \frac{d}{dz} P_0 \hat{g} \quad (5.7-7)$$

$(P_0, P_0 \Rightarrow \vec{r}, \vec{z} \text{ 为直角})$

\hat{y} 分量：

$$\begin{aligned} -\omega^2 P_0 V_{1y} &= \frac{d}{dy} [V_{1y} \frac{d}{dy} P_0] - \frac{1}{\mu} \frac{d}{dy} (\vec{B}_0 \cdot \vec{R}) + \frac{i}{\mu} (\vec{R} \cdot \vec{B}_0) R_y + \frac{1}{\mu} R_y \frac{d}{dy} B_{0y} \\ &= i k_y V_{1y} \frac{d}{dy} P_0 + \frac{1}{\mu} R_y \frac{d}{dy} B_{0y} - \frac{1}{\mu} \frac{d}{dy} (B_{0x} R_x + B_{0y} R_y) + \frac{i}{\mu} (k_x B_{0x} + k_y B_{0y}) R_y \\ &= i k_y V_{1y} \frac{d}{dy} P_0 + \frac{1}{\mu} R_y \frac{d}{dy} B_{0y} - \frac{1}{\mu} i k_y (B_{0x} R_x + B_{0y} R_y) + \frac{i}{\mu} (k_x B_{0x} + k_y B_{0y}) R_y \end{aligned}$$

$$-\omega^2 P_0 V_{1y} = i k_y V_{1y} \frac{d}{dy} P_0 + \frac{1}{\mu} R_y \frac{d}{dy} B_{0y} - \frac{i}{\mu} B_{0x} (k_y R_x - k_x R_y) \quad (5.7-8)$$

\vec{x} 分量:

$$-\omega^2 P_0 V_{ix} = i k_x V_{iz} \frac{dP_0}{dz} + \frac{1}{\mu} R_3 \frac{dB_{ox}}{dz} - \frac{i}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} (B_{ox} R_x + B_{oy} R_y) + \frac{i}{\mu} (k_x B_{ox} + k_y B_{oy}) R_x$$

$$= i k_x V_{iz} \frac{dP_0}{dz} + \frac{1}{\mu} R_3 \frac{dB_{ox}}{dz} - \frac{i}{\mu} k_x (B_{ox} R_x + B_{oy} R_y) + \frac{i}{\mu} (k_x B_{ox} + k_y B_{oy}) R_x$$

$$-\omega^2 P_0 V_{ix} = i k_x V_{iz} \frac{dV_{iz}}{dz} + \frac{1}{\mu} R_3 \frac{dB_{ox}}{dz} - \frac{i}{\mu} B_{oy} (k_x R_y - k_y R_x) \quad (5:7-9)$$

\vec{z} 分量 $\vec{R} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}_0)$

$$= \nabla \times [-V_{iz} B_{oy} \hat{x} + V_{iz} B_{ox} \hat{y} + (V_{ix} B_{oy} - V_{iy} B_{ox}) \hat{z}]$$

$$R_x = \frac{\partial}{\partial y} (V_{ix} B_{oy} - V_{iy} B_{ox}) - \frac{\partial}{\partial z} (B_{ox} V_{iz})$$

$$= i k_y (V_{ix} B_{oy} - V_{iy} B_{ox}) - V_{iz} \frac{dB_{ox}}{dz} + B_{ox} \cdot (k_x V_{ix} + k_y V_{iy})$$

$$= i V_{ix} (k_y B_{oy} + k_x B_{ox}) - V_{iz} \frac{dB_{ox}}{dz}, \quad \text{已知 } \nabla \cdot \vec{V} = \frac{dV_{iz}}{dz} + i k_x V_{ix} + i k_y V_{iy} \Rightarrow$$

$$\therefore R_x = i (k \cdot \vec{B}_0) V_{ix} - V_{iz} \frac{dB_{ox}}{dz} \quad (5:7-10)$$

$$R_y = i (k \cdot \vec{B}_0) V_{iy} - V_{iz} \frac{dB_{oy}}{dz} \quad (5:7-11)$$

$$R_z = i (k \cdot \vec{B}_0) V_{iz} \quad (5:7-12)$$

$$[7] \nabla \cdot \vec{J}_H \frac{\partial}{\partial x} \lambda = i k_x R, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i k_y R$$

B_{ox} 來 $(4:7-9)$ 得:

$$-\omega^2 P_0 V_{ix} B_{ox} = i k_x B_{ox} V_{iz} \frac{dP_0}{dz} + \frac{1}{\mu} B_{ox} R_3 \frac{dB_{ox}}{dz} - \frac{i}{\mu} B_{ox} B_{oy} (k_x R_y - k_y R_x)$$

B_{oy} 來 $(5:7-8)$ 得:

$$-\omega^2 P_0 V_{iy} B_{oy} = i k_y B_{oy} V_{iz} \frac{dP_0}{dz} + \frac{1}{\mu} B_{oy} R_3 \frac{dB_{oy}}{dz} - \frac{i}{\mu} B_{ox} B_{oy} (k_y R_x - k_x R_y)$$

\therefore 得 J_H 方程:

$$-\omega^2 P_0 (B_{ox} V_{ix} + B_{oy} V_{iy}) = i (k \cdot \vec{B}_0) V_{iz} \frac{dP_0}{dz} + R_3 \frac{d}{dz} \frac{B_0}{\mu}$$

$(5:7-12)$ 得 λ 上式:

$$-\omega^2 P_0 (B_{ox} V_{ix} + B_{oy} V_{iy}) = i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) V_{iz} \frac{dP_0}{dz} + i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) V_{iz} \frac{d}{dz} \frac{B_0^2}{2\mu}$$

$$B_{ox} V_{ix} + B_{oy} V_{iy} = -\frac{i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\omega^2 P_0} V_{iz} \frac{d}{dz} (P_0 + \frac{1}{2\mu} B_0^2)$$

$$\text{从 (5.7-2) 得 } \frac{d}{dz} \left[\frac{d}{dz} (P_0 + \frac{1}{2\mu} B_0^2) \right] = P_0 g \text{ 代入上式}$$

$$B_{ox} V_{ix} + B_{oy} V_{iy} = \frac{i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\omega^2} V_{iz} g \quad (5.7-13)$$

2. 本节方程

$i k_x$ 乘 (5.7-9).

$$-i k_x \omega^2 P_0 V_{ix} = -k_x^2 V_{iz} \frac{dP_0}{dz} + i k_x \frac{1}{\mu} R_0^2 \frac{d^2 B_{ox}}{dz^2} + \frac{1}{\mu} k_x B_{oy} (k_x R_y - k_y R_x)$$

$i k_y$ 乘 (5.7-8)

$$-i k_y \omega^2 P_0 V_{iy} = -k_y^2 V_{iz} \frac{dP_0}{dz} + i k_y \frac{1}{\mu} R_0^2 \frac{d^2 B_{oy}}{dz^2} + \frac{1}{\mu} k_y B_{ox} (k_y R_x - k_x R_y)$$

相加:

$$-i \omega^2 P_0 (k_x V_{ix} + k_y V_{iy}) = -k^2 V_{iz} \frac{dP_0}{dz} + \frac{i}{\mu} R_0^2 (k_x \frac{d^2 B_{ox}}{dz^2} + k_y \frac{d^2 B_{oy}}{dz^2}) + \frac{1}{\mu} (k_x R_y - k_y R_x) (k_x B_{oy} - k_y B_{ox})$$

$$\text{将 } R_0 = i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) V_{iz}, \frac{dV_{iz}}{dx} = i k_x V_{ix}, \frac{dV_{iz}}{dy} = i k_y V_{iy} \text{ 代入上式} \cdot (k_x B_{oy} - k_y B_{ox})$$

$$\text{利用 (7) } \frac{dV_{iz}}{dz} + \frac{dV_{ix}}{dx} + \frac{dV_{iy}}{dy} = \frac{dV_{iz}}{dz} + i k_x V_{ix} + i k_y V_{iy}$$

$$\omega^2 P_0 \frac{dV_{iz}}{dz} = -k^2 V_{iz} \frac{dP_0}{dz} - V_{iz} \frac{d}{dz} \left(\frac{i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\omega^2} \right) + \frac{1}{\mu} (k_x R_y - k_y R_x) (k_x B_{oy} - k_y B_{ox}) \quad (5.7-14)$$

将 R_x, R_y 代入上式 (5.7-10) (5.7-11) 代入 (5.7-14) 在方程左端 -2R

$$(k_x B_{oy} - k_y B_{ox}) [k_x \left(i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) V_{iy} - V_{iz} \frac{d^2 B_{oy}}{dz^2} \right) - k_y \left(i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) V_{ix} - V_{iz} \frac{d^2 B_{ox}}{dz^2} \right)]$$

$$= i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) [k_x B_{oy} V_{iy} - k_x k_y B_{ox} V_{iy} - k_x k_y B_{oy} V_{ix} + k_y B_{ox} V_{ix}]$$

$$+ \left[-k_x^2 B_{oy} V_{iy} \frac{d^2 B_{oy}}{dz^2} + k_x k_y B_{ox} V_{iy} \frac{d^2 B_{oy}}{dz^2} + k_x k_y B_{oy} V_{iz} \frac{d^2 B_{ox}}{dz^2} - k_y^2 B_{ox} V_{iz} \frac{d^2 B_{ox}}{dz^2} \right]$$

$$= i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) [k^2 (B_{ox} V_{ix} + B_{oy} V_{iy}) - (k_x B_{ox} + k_y B_{oy}) (k_x V_{ix} + k_y V_{iy})]$$

$$- V_{iz} \left[k^2 B_{oy} \frac{d^2 B_{oy}}{dz^2} - k_y^2 B_{oy} \frac{d^2 B_{oy}}{dz^2} + k^2 B_{ox} \frac{d^2 B_{ox}}{dz^2} - k_x^2 B_{ox} \frac{d^2 B_{ox}}{dz^2} - k_x k_y B_{ox} \frac{d^2 B_{oy}}{dz^2} - k_x k_y B_{oy} \frac{d^2 B_{ox}}{dz^2} \right]$$

$$\text{和 (5.7-13) 代入得 } \frac{dV_{iz}}{dz} = -i k_x V_{ix} - i k_y V_{iy}$$

$$\text{即 } \frac{d}{dz} \left[i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \left\{ \frac{1}{\omega^2} V_{iz} g \right\} - (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \frac{dV_{iz}}{dz} \right] - V_{iz} \left[k^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{B_0^2}{2\mu} \right) - (k_x B_{ox} + k_y B_{oy}) \cdot \left(k_x \frac{d^2 B_{ox}}{dz^2} + k_y \frac{d^2 B_{oy}}{dz^2} \right) \right], \quad 194$$

$$= (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \left(\frac{k^2}{\omega^2} g V_{1g} + \frac{dV_{1g}}{dk} \right) - \left[k^2 \frac{d}{dk} \frac{B_0^2}{2} - (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \frac{d}{dk} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \right] V_{1g}$$

$$= (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \left(-\frac{k^2}{\omega^2} g V_{1g} + \frac{dV_{1g}}{dk} \right) - \left[k^2 \frac{d}{dk} \frac{B_0^2}{2} - \frac{d}{dk} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \right] V_{1g}$$

代入 (5.7-14) 式，得

$$\omega^2 P_0 \frac{dV_{1g}}{dk} = -k^2 V_{1g} \frac{dP_0}{dk} - V_{1g} \frac{d}{dk} \left(\frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu \omega^2} \right) + \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \left(\frac{k^2}{\omega^2} g V_{1g} + \frac{dV_{1g}}{dk} \right) - \frac{V_{1g}}{\mu} \left(k \frac{d}{dk} \frac{B_0^2}{2} - \frac{d}{dk} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \right)$$

由 (5.7-2) 得

$$\omega^2 P_0 \frac{dV_{1g}}{dk} = -k^2 V_{1g} \frac{d}{dk} \left(P_0 + \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \right) + \frac{1}{\mu} \frac{k^2}{\omega^2} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 g V_{1g} + \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \frac{dV_{1g}}{dk}$$

$$\left[\omega^2 P_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu} \right] \frac{dV_{1g}}{dk} = k^2 V_{1g} P_0 g + \frac{1}{\mu} \frac{k^2}{\omega^2} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 g V_{1g}$$

$$= \frac{k^2}{\omega^2} g \left[P_0 \omega^2 - \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \right] V_{1g}$$

$$\text{若 } \omega^2 \neq \frac{1}{\mu} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\omega^2}, \text{ 则 } \frac{dV_{1g}}{dk} = \frac{k^2}{\omega^2} g V_{1g} \quad (5.7-16)$$

V_{1g} 的表达式 (5.7-7) 中有

$$B_{0x} R_x + B_{0y} R_y = B_{0x} \left[i (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) V_{1x} - V_{1g} \frac{d B_{0x}}{dk} \right] + B_{0y} \left[i (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) V_{1y} - V_{1g} \frac{d B_{0y}}{dk} \right]$$

$$= i (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) (B_{0x} V_{1x} + B_{0y} V_{1y}) - V_{1g} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{\mu} \vec{B}_0^2 \right)$$

(5.7-13) 式代入

$$\begin{aligned} &= i (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \left[i \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\omega^2} g V_{1g} \right] - V_{1g} \frac{d}{dk} \left[\frac{\vec{B}_0^2}{\omega^2} \right] \\ &= - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\omega^2} g V_{1g} - \frac{d}{dk} \frac{\vec{B}_0^2}{\omega^2} \cdot V_{1g} \end{aligned}$$

代入 (5.7-7)：

$$\begin{aligned} -\omega^2 P_0 V_{1g} &= \frac{d}{dk} \left(V_{1g} \frac{dP_0}{dk} \right) + \frac{d}{dk} \left[\left\{ \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu \omega^2} g + \frac{d}{dk} \frac{\vec{B}_0^2}{\omega^2} \right\} V_{1g} \right] - \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 V_{1g} + V_{1g} \frac{dP_0}{dk} \cdot g \\ &= \frac{d}{dk} \left[V_{1g} \frac{d}{dk} \left(P_0 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0^2 \right) \right] + \frac{d}{dk} \left[\frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu \omega^2} g V_{1g} \right] + V_{1g} \frac{dP_0}{dk} \cdot g - \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 V_{1g} \end{aligned}$$

由 (5.7-2) 得 (5.7-16), 代入 (5.7-16), 得

$$0 = -\frac{d}{dk} \left(V_{1g} g P_0 \right) + \frac{d}{dk} \left[\frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu \omega^2} g V_{1g} \right] + \omega^2 P_0 V_{1g} + V_{1g} \frac{dP_0}{dk} \cdot g - \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 V_{1g}$$

$$0 = \frac{d}{dk} \left[\left\{ P_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu \omega^2} \right\} \frac{dV_{1g}}{dk} \frac{\omega^2}{k^2} \right] - \omega^2 \left[P_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu \omega^2} \right] V_{1g} - \frac{dP_0}{dk} g V_{1g}$$

两边乘 $\frac{k^2}{\omega^2}$ ：

$$\frac{d}{dk} \left[\left\{ P_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu \omega^2} \right\} \frac{dV_{1g}}{dk} \right] - \frac{k^2}{\omega^2} \left(P_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu \omega^2} \right) \omega^2 V_{1g} - \frac{k^2}{\omega^2} g V_{1g} \frac{dP_0}{dk} = 0 \quad (5.7-17)$$

(上式最后-2项的符号与“流体”等高线平行记号“符号不同，这里同于平衡静力学式(5.7-2). 我们注意到分子取向与 \vec{k} 方向相反，故 $\vec{k} \times \vec{B}_0$ 同向)

3. 边界条件

由来(5.7-17)变为

$$\partial \left[\left(P_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu \omega^2} \right) \frac{dV_{18}}{d\delta} \right] - \frac{k_x^2}{\omega^2} \left(P_0 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu \omega^2} \right) \omega^2 V_{18} d\delta - \frac{k_x^2}{\omega^2} g V_{18} dP_0 = 0 \quad (5.7-17')$$

3. 例如，从 θ^- 和 θ^+ 到 θ^0 ， $\delta > 0$ 时物理量同上不加“带号， $\delta < 0$ 时”-“带号

$$\left(P_0^{(+)} - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0^{(+)})^2}{\mu \omega^2} \right) \left(\frac{dV_{18}}{d\delta} \right)^{(+)} - \left(P_0^- - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0^-)^2}{\mu \omega^2} \right) \left(\frac{dV_{18}}{d\delta} \right)^- - \frac{k_x^2}{\omega^2} g V_0 / (P_0^{(+)} - P_0^-) = 0$$

(5.7-17') 亦=0 $\because d\delta \rightarrow 0$. 为零.

4. 稳定性.

i, 当 $\vec{B}_0 = B_0 \hat{x}$ 无分支. $P_0^{(+)} = 0$ (上空), $P_0^{(-)} = 0$.

$$\text{有: } \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = k_x B_0.$$

$$P_0^{(+)} \left(\frac{dV_{18}}{d\delta} \right)^{(+)} + \frac{(k_x B_0)^2}{\mu \omega^2} \left(\frac{dV_{18}}{d\delta} \right)^- - \frac{k_x^2}{\omega^2} g V_0 P_0^{(+)} = 0$$

$$\text{或} V_0 = V_{18}^+$$

$$\frac{\omega^2}{R^2} P_0^{(+)} \left(\frac{dV_{18}}{d\delta} \right)^{(+)} + \frac{k_x^2 (B_0^2)}{\mu R^2} \left(\frac{dV_{18}}{d\delta} \right)^- - g V_{18}^{(+)} P_0^{(+)} = 0 \quad \text{by Priest} \quad (7.28')$$

ii, 3. $k_x = 0$, $k_y \neq 0$, 考虑到 $\vec{B}_0 \parallel \vec{k}$ $V_0 = e^{i\omega t} V_{18} e^{ik_y \delta}$

$$P_0^{(+)} = 0, \quad P_0^{(-)} = 0, \quad \vec{B}_0 = B_0 \hat{y} \parallel \vec{k}$$

$$\text{有 } \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\frac{\omega^2}{R^2} P_0^{(+)} \left(\frac{dV_{18}}{d\delta} \right)^{(+)} - g V_{18}^{(+)} P_0^{(+)} = 0 \quad \text{Priest, (7.26)}$$

$$\text{或写成 } \frac{\omega^2}{R^2} \left[P_0 \frac{dV_{18}}{d\delta} \right] - g V_{18} [P_0] = 0$$

二. 磁量原理的应用

考虑轴对称的磁通量，柱坐标 (R, ϕ, z) 下的中性面磁场

$$\vec{B}_0 = B_{0\phi}(R) \hat{\varphi} + B_{0z}(R) \hat{z} \quad (7.40)$$

电流密度

$$\mu \vec{j}_0 = - \frac{d B_{0z}}{d R} \hat{\varphi} + \frac{1}{R} \frac{d}{d R} (R B_{0\phi}) \hat{z}$$

设为无场区 $\vec{j}_0 \times \vec{B}_0 = 0$

\vec{B}_0, \vec{j}_0 代入无场区表达式，得

$$\frac{d}{d R} (B_{0\phi} \hat{\varphi} + B_{0z} \hat{z}) = - \frac{2 B_0^2}{R}$$

直观的理解：

该磁通带外：有中性面磁场 (Fig 7.6.a), 扭曲 (Fig 7.6.b)

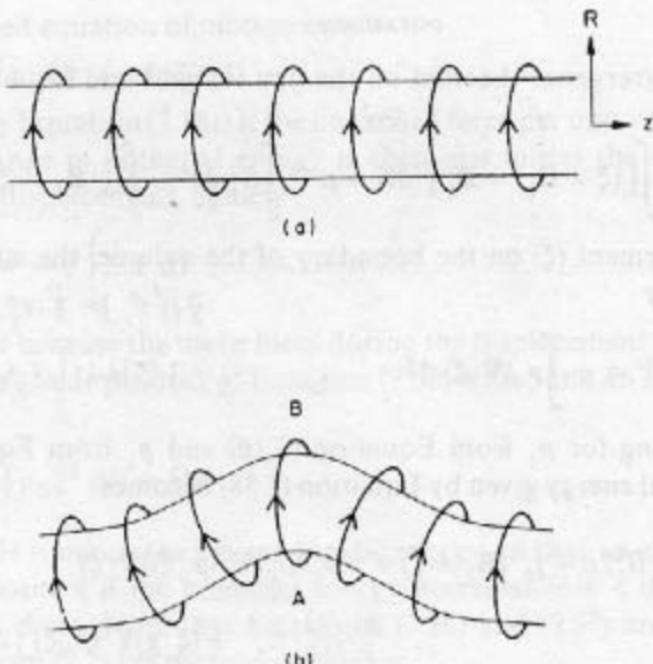


Fig. 7.6. (a) An equilibrium plasma tube surrounded by azimuthal field lines. (b) A lateral kink-like perturbation of the tube.

A附近的压力大于B附近的压力，因此A附近的
磁压力大于B附近的压力，增加扰动。假设不稳定性
加入下列因素可使之稳定：

- ① 轴向加入磁场
- ② 磁场扩散
- ③ 流动速度小于光速

Newcomb (1960)：利用能量原理处理通量管

Callebaut & Voslamber (1962), Aner (1968)：无为数通量管

Raadu (1972)：又提③

Giacchetti et al (1977)：②

Hood & Priest (1979)：②+③ (Raadu)

现在主要分析方法有五种，依次为其次。

叙述：

i. 扩散系数

ii. 无为数通量管 (即考虑粘滞时，引力，压强的二项差)。

而且在耗散层中，这二次也很小。这样(7.39)式中的扩散系数简化为

$$\begin{aligned}\delta W &= (2\mu)^{-1} \int [B_1^2 - \mu \vec{\beta}_0 \cdot (\vec{B}_1 \times \vec{\beta})] dV \\ &= (2\mu)^{-1} \int [B_1^2 - \vec{B}_1 \cdot (\vec{\beta} \times \nabla \times \vec{B}_0)] dV \quad (7.42)\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\beta} \times \vec{B}_0) \quad (7.43) \quad (\text{即}(7.5) \text{式})$$

为简单起见，仅考虑特定的一类扰动 $\vec{\beta}$ 。若因此 $\delta W < 0$ 。
系统首先不稳定性。若 $\delta W > 0$ 则扰动而后的稳定性
取这类扰动的 $\{\vec{\beta}\}$ 形式

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}^* f(\vec{x}) \quad (7.44)$$

$$\text{式中 } \vec{\xi}^* = \left[\xi^R(R) \vec{R}^* - i \frac{B_0 \varphi}{B_0} \xi^R(R) \vec{\varphi}^* + i \frac{B_0 \omega}{B_0} \xi^R(R) \vec{\phi}^* \right] e^{i(m\varphi + k\phi)}$$

(指旋扭曲波, helical)

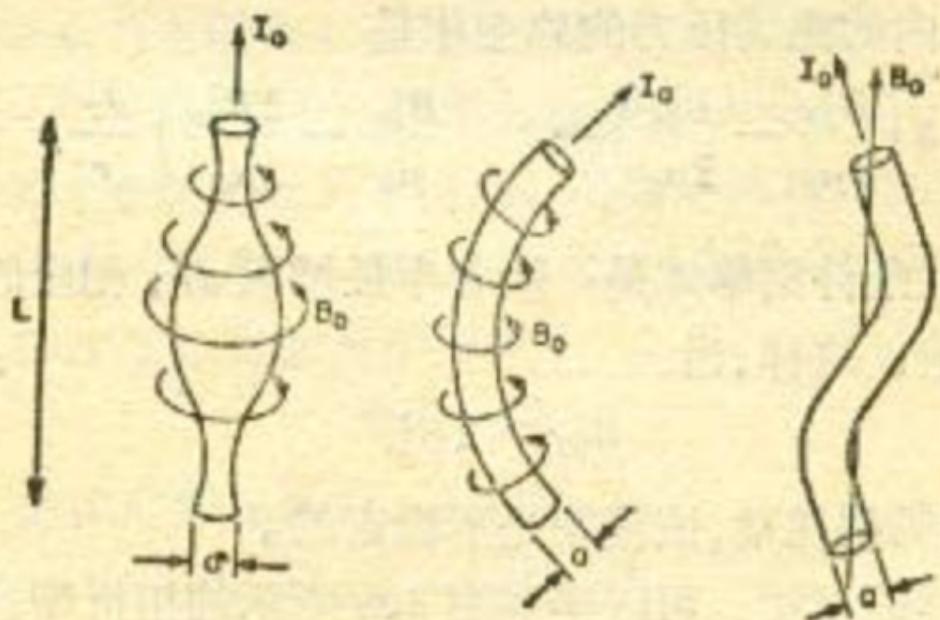
$$f(0) = f(2L) = 0. \quad (\text{表示磁通量二端口对称})$$

磁通量=场行壳体. 磁通量的下部分平行于 \vec{B}_0

从 (7.43) 式可知若令 $\vec{\xi} \parallel \vec{B}_0$, 则 $\vec{B}_1 = 0$, $\delta w = 0$. 磁通量不改变. (见图 2.7 应用). 因此扰动 $\vec{\xi}$ 在 \vec{B}_0 上垂直于 \vec{B}_0 , 即

$$\vec{\xi} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (\text{即 } \vec{\xi} \perp \vec{B}_0)$$

我们的目的是选择任意函数 $f(\theta)$, $\xi^R(R)$, $\xi^R(R)$ 以及 δw 为 $e^{i(m\varphi + k\phi)}$ 和之扭形螺旋形状的. 不只是半径上的弯曲 γ .



a) 膨脹型

b) 扭折型

c) 扭旋型

图 30 柱电流收缩不稳定性的各种形状

能量的变化为

$$\delta W = (2\mu)^{-1} \int \left\{ \vec{B}_1 - \vec{B}_1 \cdot [\vec{\xi} \times (\nabla \times \vec{B}_0)] \right\} dV \quad (7.42)$$

$$dV = R dR d\varphi d\zeta$$

又对 R, φ, ζ , 有

$$\delta W = \int_0^L \left[A \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 + Cf'' \right] d\zeta \quad (7.45)$$

其中 $A = \frac{1}{(2\mu)} \int_{R=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[B_0 \vec{\xi}(R) + B_{0\varphi} \vec{\xi}(R) \right] R dR d\varphi$

$$= \frac{1}{(2\mu)} \int_{R=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{\xi} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{\xi} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) R dR d\varphi \quad \vec{\xi} \times \vec{\xi} = 0$$

$$= \frac{1}{(2\mu)} \int_{R=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\vec{\xi} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right]^2 R dR d\varphi \quad (7.46)$$

$$C = \frac{1}{(2\mu)} \int_{R=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \left[\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)^\dagger + \nabla \times \vec{B}_0 \times \vec{\xi}^* \right] R dR d\varphi \quad (7.47)$$

A, C 的定义。

由 (7.45) 式 可得 (7.47) 式 (略去).

$$\vec{B}_0 = B_{0\varphi}(R) \vec{\varphi} + B_{0\zeta}(R) \vec{\zeta}$$

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}^* f(\zeta) \quad \vec{\xi} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad \nabla \cdot \vec{\xi} = 0$$

$$\text{由 } \vec{\xi} = \vec{\xi}^* f(\zeta) \text{ 及 } \vec{\xi} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad \mid \vec{\xi} \vec{\xi}^* \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{\xi}^* = \left[\vec{\xi}_{(R)}^* \vec{R} - i \frac{B_{0\zeta}}{B_0} \vec{\xi}_{(R)}^* \vec{\varphi} + i \frac{B_{0\varphi}}{B_0} \vec{\xi}_{(R)}^* \vec{\zeta} \right] e^{i(m\varphi + k_z)}$$

能量原理：

1. 适用于半径为 R_0 的等高环，势能表达式：

$$W_0 = \int (\frac{1}{2} \rho_0 B_0^2 + \rho_0 U_0 + \rho_0 g_0) dV$$

2. 在运动作用下，作用于等高环上的力为：

$$\vec{F}_1(\vec{\xi}) = -\nabla p_1 + \rho_1 \vec{g} + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1$$

设等高环速度 \vec{v} 为：

$$\vec{\xi}(r_0, t) = \vec{\xi}(r_0) e^{i\omega t}$$

3. 力 \vec{F}_1 力、守恒势能 W 变化。通过 $\delta W = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{F}_1$ ，且 δW 行进率决定稳定性。

转动量 $\vec{\xi}$ 垂直于 \vec{B}_0 分量 ξ_x, ξ_y 变化，要使 δW 变化，即 $\frac{\partial \xi_x}{\partial x} = 0$ ，即 $D \cdot \vec{\xi} = 0$
 \downarrow
 $\vec{\xi} \times \vec{B}_0 \neq 0$ 为零。
 \downarrow
 $\vec{\xi}$ 不可压缩 $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ 为零。

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \int [\vec{\xi} \cdot \nabla p_1 - \vec{\xi} \cdot \rho_1 \vec{g} - \vec{\xi} \cdot (\vec{j}_1 \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1)] dV \\ &= \frac{1}{2} \int [\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^2 - \vec{j}_0 \cdot (\vec{B}_1 \times \vec{\xi}) + \frac{r p_0}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \vec{v} \cdot \vec{\xi} + (\vec{\xi} \cdot \vec{g}) \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi})] dV \end{aligned}$$

4. 应用：Kink 2. 问题之二

i. 相对运动 $\vec{B}_0 = B_{0\phi}(R) \hat{\phi} + B_{0\theta}(R) \hat{\theta}$

ii. 运动方程 $\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$$\delta W = (2\mu)^{-1} \int [\vec{B}_1^2 - \mu \vec{j}_0 \cdot (\vec{B}_1 \times \vec{\xi})] dV$$

$$= (2\mu)^{-1} \int [\vec{B}_1^2 - \vec{B}_1 \cdot (\vec{\xi} \times \nabla \times \vec{B}_0)] dV$$

式中 $\vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$

选取 $\vec{\xi} = \vec{\xi}^* f(\theta)$

$$\vec{\xi}^* = \left[\vec{\xi}^*(R) \vec{z} - i \frac{B_{0\theta}}{B_0} \vec{\xi}^*(R) \vec{\varphi} + i \frac{B_{0\phi}}{B_0} \vec{\xi}^*(R) \vec{\theta} \right] e^{i(m\phi + k\theta)}$$

iii. 磁通量 = 定常流 (1.5 与 = 等效 2.1 与 2.2 有矛盾)

$$f(0) = f(2\pi) = 0$$

IV. $\vec{\xi} \cdot \vec{B}_0 = 0$

能量的变化为

$$\delta W = (2\mu)^{-1} \int \left\{ \vec{B}_1 - \vec{B}_1 \cdot [\vec{\xi} \times (\nabla \times \vec{B}_0)] \right\} dV \quad (7.42)$$

$$dV = R dR d\varphi d\zeta$$

若对 R, φ 及 ζ , 有

$$\delta W = \int_0^{2L} \left[A \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 + C f^2 \right] d\zeta \quad (7.45)$$

其中 $A = \frac{1}{(2\mu)} \int_{R=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[B_0 \vec{\xi}(R) + B_{0\varphi} \vec{\xi}(R) \right] R dR d\varphi$

$$= \frac{1}{(2\mu)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{\infty} \vec{\xi} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{\xi} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) R dR d\varphi \quad \vec{\xi} \times \vec{\xi} = 0$$

$$= \frac{1}{(2\mu)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{\infty} \left[\vec{\xi} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right]^2 R dR d\varphi \quad (7.46)$$

$$C = \frac{1}{(2\mu)} \int_{R=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \left[\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) + \nabla \times \vec{B}_0 \times \vec{\xi} \right] R dR d\varphi \quad (7.47)$$

A, C 为常数。

由 (7.45) 式得 \vec{B}_0 的表达式 (见下述)。

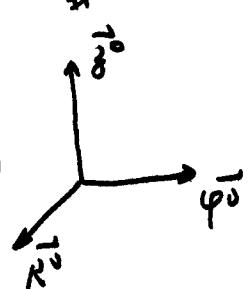
$$\vec{B}_0 = B_{0\varphi}(R) \vec{\varphi} + B_{0\zeta}(R) \vec{\zeta}$$

$$\vec{\xi} = \vec{\xi} \times \vec{f}, \vec{\xi} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad \nabla \cdot \vec{\xi} = 0$$

$$\text{由 } \vec{\xi} = \vec{\xi} \times \vec{f}, \text{ 及 } \vec{\xi} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad \text{及 } \vec{\xi} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{\xi} = \left[\vec{\xi}(R) \vec{R} - i \frac{B_{0\zeta}}{B_0} \vec{\xi}(R) \vec{\varphi} + i \frac{B_{0\varphi}}{B_0} \vec{\xi}(R) \vec{\zeta} \right] e^{i(m\varphi + k_z)}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\xi}^* \times \vec{B}_0 &= \left\{ \left[-i \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \theta} \vec{\xi}(R) - i \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \phi} \vec{\xi}(R) \right] \vec{R}^0 - B_0 \vec{\xi}(R) \vec{\varphi}^0 + B_0 \vec{\xi}(R) \vec{\delta}^0 \right\} e^{i(m\phi+k\delta)} \\
 &= \left[-i B_0 \vec{\xi}(R) \vec{R}^0 - B_0 \vec{\xi}(R) \vec{\varphi}^0 + B_0 \vec{\xi}(R) \vec{\delta}^0 \right] e^{i(m\phi+k\delta)} \\
 \vec{\delta}^0 \times (\vec{\xi}^* \times \vec{B}_0) &= (-i B_0 \vec{\xi}(R) \vec{\varphi}^0 + B_0 \vec{\xi}(R) \vec{R}^0) e^{i(m\phi+k\delta)} \\
 \left(\vec{\delta}^0 \times (\vec{\xi}^* \times \vec{B}_0) \right)^* &= (-i B_0 \vec{\xi}(R) \vec{\varphi}^0 + B_0 \vec{\xi}(R) \vec{R}^0) e^{-i(m\phi+k\delta)} \\
 &= (-B_0 \vec{\xi}^0 + B_0 \vec{\xi}^R) e^{-i(m\phi+k\delta)} \quad \# (7-1)
 \end{aligned}$$



④ 求 $\nabla \times (\vec{\xi}^* \times \vec{B}_0)$

$$\text{令 } \vec{D} = \vec{\xi}^* \times \vec{B}_0$$

$$\nabla \times (\vec{\xi}^* \times \vec{B}_0) = \nabla \times \vec{D}$$

$$= \left(\frac{1}{R} \frac{\partial D_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial D_\phi}{\partial \theta} \right) \vec{R}^0 + \left(\frac{\partial D_R}{\partial \phi} - \frac{\partial D_\phi}{\partial R} \right) \vec{\varphi}^0 + \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RD_\phi) - \frac{1}{R} \frac{\partial D_R}{\partial \phi} \right] \vec{\delta}^0$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial D_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial D_\phi}{\partial \theta} = \frac{1}{R} B_0 \vec{\xi}(R) i m e^{i(m\phi+k\delta)} + B_0 \vec{\xi}(R) i k e^{i(m\phi+k\delta)}$$

$$= \left[\frac{im}{R} B_0 \vec{\xi}(R) + ik B_0 \vec{\xi}(R) \right] \vec{\xi}(R) e^{i(m\phi+k\delta)} \quad \vec{R}^0$$

$$\frac{\partial D_R}{\partial \phi} - \frac{\partial D_\phi}{\partial R} = -i B_0 \vec{\xi}(R) i k e^{i(m\phi+k\delta)} - \frac{\partial}{\partial R} [B_0 \vec{\xi}(R)] e^{i(m\phi+k\delta)}$$

$$= \left\{ B_0 \vec{\xi}(R) k - \frac{d}{dR} [B_0 \vec{\xi}(R)] \right\} e^{i(m\phi+k\delta)} \quad \vec{\varphi}^0$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RD_\varphi) - \frac{1}{R} \frac{\partial D_R}{\partial \varphi} = \frac{\partial D_\varphi}{\partial R} + \frac{D_\varphi}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial D_R}{\partial \varphi}$$

$$= \left[-\frac{\partial}{\partial R} (B_{02} \vec{\xi}_1^R(R)) - \frac{1}{R} B_{02} \vec{\xi}_1^R(R) - \frac{1}{R} (-i B_0 \vec{\xi}_1^0(R)) \right] \text{im } e^{i(m\varphi + k\chi)}$$

$$= \left[-\frac{\partial}{\partial R} (B_{02} \vec{\xi}_1^R(R)) - \frac{1}{R} B_{02} \vec{\xi}_1^R(R) - \frac{m}{R} B_0 \vec{\xi}_1^0(R) \right] e^{i(m\varphi + k\chi)} \quad \vec{\varphi^0}$$

5) $\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \quad (= \vec{B}_1)$
 $\vec{\xi} \times \vec{B}_0 = \vec{\xi}^* f_{12} \times \vec{B}_0$

$$= \left[-i B_0 \vec{\xi}_1^0(R) \vec{R^0} - B_{02} \vec{\xi}_1^R(R) \vec{\varphi^0} + B_{04} \vec{\xi}_1^R(R) \vec{\chi^0} \right] f_{12} e^{i(m\varphi + k\chi)}$$

$$\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) = \nabla \times (\vec{\xi}^* f_{12} \times \vec{B}_0)$$

$$= \nabla \times [\vec{\xi}^* \times \vec{B}_0 f_{12}]$$

$$= \nabla \times [\vec{\nabla} f_{12}]$$

$$= \left[\frac{1}{R} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} f_{12} - \frac{\partial (D_\varphi f_{12})}{\partial \varphi} \right] \vec{R^0} + \left[\frac{\partial (D_R f_{12})}{\partial R} - \frac{\partial D_\varphi}{\partial R} f_{12} \right] \vec{\varphi^0}$$

$$+ \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RD_\varphi) \cdot f_{12} - \frac{1}{R} \frac{\partial D_R}{\partial \varphi} f_{12} \right] \vec{\chi^0}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} f_{12} - \frac{\partial (D_\varphi f_{12})}{\partial \varphi} = \frac{1}{R} B_{04} \vec{\xi}_1^R(R) f_{12} \text{im } e^{i(m\varphi + k\chi)}$$

$$+ \left[B_{02} \vec{\xi}_1^R(R) \frac{\partial f_{12}}{\partial \varphi} + B_{02} \vec{\xi}_1^R(R) f_{12} iK \right] e^{i(m\varphi + k\chi)}$$

$$= \left[\frac{i m}{R} B_{04} f_{12} + \left(B_{02} \frac{\partial f_{12}}{\partial \varphi} + iK B_{02} f_{12} \right) \right] \vec{\xi}_1^R(R) e^{i(m\varphi + k\chi)} \quad \vec{R^0}$$

$$\frac{\partial}{\partial R} (D_R f_{12}) - \frac{\partial D_\varphi}{\partial R} f_{12} = -i B_0 \vec{\xi}_1^0(R) \frac{\partial f_{12}}{\partial \varphi} e^{i(m\varphi + k\chi)} - i B_0 \vec{\xi}_1^0(R) f_{12} iK e^{i(m\varphi + k\chi)}$$

$$- \frac{\partial}{\partial R} (B_{04} \vec{\xi}_1^R(R)) f_{12} e^{i(m\varphi + k\chi)}$$

$$= \left[-i B_0 \vec{\xi}_1^0(R) \frac{\partial f_{12}}{\partial \varphi} + B_0 \vec{\xi}_1^0(R) f_{12} K - \frac{\partial}{\partial R} (B_{04} \vec{\xi}_1^R(R)) f_{12} \right] e^{i(m\varphi + k\chi)} \quad \vec{\varphi^0}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R D_\varphi) \cdot f(\vec{r}) - \frac{1}{R} \frac{\partial D_R}{\partial \varphi} f(\vec{r})$$

$$= \left[- \frac{d}{dR} (B_{02} \vec{\xi}(R)) \cdot f(\vec{r}) - \frac{1}{R} B_{02} \vec{\xi}(R) f(\vec{r}) - \frac{m}{R} B_0 \vec{\xi}(R) f(\vec{r}) \right] e^{i(m\varphi + k\vec{r})}$$

$$\therefore \vec{R}: \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)_{\vec{R}} \cdot f(\vec{r}) + B_{02} \frac{df(\vec{r})}{dR} \vec{\xi}(R) e^{i(m\varphi + k\vec{r})} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)_{\vec{R}}$$

$$\vec{\varphi}: \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)_{\vec{\varphi}} \cdot f(\vec{r}) - i B_0 \vec{\xi}(R) \frac{df(\vec{r})}{d\varphi} e^{i(m\varphi + k\vec{r})} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)_{\vec{\varphi}}$$

$$\vec{\theta}: \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)_{\vec{\theta}} \cdot f(\vec{r}) = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)_{\vec{\theta}}$$

b) $\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$ or $\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$ via?

$$\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) f(\vec{r}) + [B_{02} \vec{\xi}(R) \vec{R} - i B_0 \vec{\xi}(R) \vec{\varphi}] \frac{df}{dR} e^{i(m\varphi + k\vec{r})}$$

$$7) \delta W = (2\mu)^{-1} \left\{ \left\{ B_i^z - \vec{B}_i \cdot [\vec{\xi} \times (\nabla \times \vec{B}_0)] \right\} dV \right.$$

$$\vec{B}_i = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$$

$$\begin{aligned}
&= (2\mu)^{-1} \left\{ \left[\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right]^2 - \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \cdot [\vec{\xi} \times (\nabla \times \vec{B}_0)] \right\} R dR d\theta d\phi \\
&= (2\mu)^{-1} \left\{ \left[\nabla \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0) \cdot f(\vec{\xi}) + (B_0 \vec{\xi}^R R \vec{R} - i B_0 \vec{\xi}^0 R \vec{\varphi}) \frac{df}{d\vec{\xi}} e^{i(m\phi+k\delta)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\nabla \times (\vec{\xi}^y \times \vec{B}_0) \cdot f(\vec{\xi}) + (B_0 \vec{\xi}^R R \vec{R} - i B_0 \vec{\xi}^0 R \vec{\varphi}) \frac{df}{d\vec{\xi}} e^{i(m\phi+k\delta)} \right] (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{\xi}^y f(\vec{\xi}) \right\} \\
&= (2\mu)^{-1} \left\{ \left[(\nabla \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0)) \cdot f(\vec{\xi}) + (B_0 \vec{\xi}^R - B_0 \vec{\xi}^0) \left(\frac{df}{d\vec{\xi}} \right) e^{i(m\phi+k\delta)} \right] R dR d\theta d\phi \right. \\
&\quad \left. + 2 \nabla \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0) (B_0 \vec{\xi}^R R \vec{R} - i B_0 \vec{\xi}^0 R \vec{\varphi}) f \frac{df}{d\vec{\xi}} e^{i(m\phi+k\delta)} \right. \\
&\quad \left. + \nabla \times (\vec{\xi}^y \times \vec{B}_0) \cdot [(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{\xi}^x] f(\vec{\xi}) + (B_0 \vec{\xi}^R R \vec{R} - i B_0 \vec{\xi}^0 R \vec{\varphi}) (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{\xi}^y f \frac{df}{d\vec{\xi}} e^{i(m\phi+k\delta)} \right\} R dR d\theta d\phi
\end{aligned}$$

$\stackrel{?}{=}$

$$\begin{aligned}
&\therefore (2\mu)^{-1} \int \nabla \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0) \cdot \left[\nabla \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0) + (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{\xi}^x \right] f(\vec{\xi}) R dR d\theta d\phi \\
&\quad = C f(\vec{\xi}) \\
C &= (2\mu)^{-1} \int \nabla \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0) \cdot \left[\nabla \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0) + (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{\xi}^x \right] R dR d\theta d\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{ii. } (2\mu)^{-1} \int (B_0 \vec{\xi}^R - B_0 \vec{\xi}^0) \left(\frac{df}{d\vec{\xi}} \right) e^{i(m\phi+k\delta)} R dR d\theta d\phi \\
&= (2\mu)^{-1} \int \left[\vec{\xi}^0 \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0) \right] \left(\frac{df}{d\vec{\xi}} \right) R dR d\theta d\phi \\
&= A \left(\frac{df}{d\vec{\xi}} \right) \\
A &= (2\mu)^{-1} \int \left[\vec{\xi}^0 \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0) \right] R dR d\theta d\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{iii. } (2\mu)^{-1} \int (B_0 \vec{\xi}^R R \vec{R} - i B_0 \vec{\xi}^0 R \vec{\varphi}) \cdot \left[2 \nabla \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0) + (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{\xi}^x \right] f \frac{df}{d\vec{\xi}} e^{i(m\phi+k\delta)} R dR d\theta d\phi \\
&= B f \frac{df}{d\vec{\xi}}
\end{aligned}$$

$$B = (2\mu)^{-1} \int (B_0 \vec{\xi}^R R \vec{R} - i B_0 \vec{\xi}^0 R \vec{\varphi}) \cdot \left[2 \nabla \times (\vec{\xi}^x \times \vec{B}_0) + (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{\xi}^x \right] e^{i(m\phi+k\delta)} R dR d\theta d\phi$$

$$\delta W = \int [A \left(\frac{df}{d\vec{\xi}} \right) + C f^2] d\vec{\xi}$$

注意到： A, B 都是常数，且 f 是常数。因此 $\delta W = 0$
 $\vec{\xi} \times \vec{\xi}^x = (\vec{\xi}^R R \vec{R} - i \frac{B_0}{B_0} \vec{\xi}^0 \vec{\varphi} + i \frac{B_0}{B_0} \vec{\xi}^0 \vec{\varphi}) e^{i(m\phi+k\delta)}$

上式中的 $\tilde{f}(z)$ 按 Anger 定义是. Radon 为使磁通量的圆周分量 $f(z) = \tilde{f}(z)$
其实 $f(z) \sim \sin \frac{\pi z}{2L}$. 且 e^{ikz} 有某种相位的重复，应重新定义。

2. 因为 $f(z) \neq \int_0^z \sin \frac{\pi x}{2L}$. $\therefore f \frac{df}{dz}$ 不等于零。(增加 1 次 $e^{izk\theta}$ 次)

Radon 定义中有 $B \frac{df}{dz} \cdot f$ 项. 考虑到 A, B, C 均可归元类. 但没有列出 A, B, C
的表达式

3. Priest 定义中 A, C 表达式与李群中有不同之处。

归一化条件
为下场的总电
荷和电荷除
 $\int f(z) dz = 0$

$$\text{求 } \delta W = \int_0^{2L} \left[A \left(\frac{df}{dz} \right)^2 + C f^2 \right] dz$$

$$\text{归一化条件 } \int_0^{2L} f(z) dz = 1 \quad \text{下的极值问题}$$

利用 Lagrange 乘子构造了极大值

$$\delta W + \lambda \int_0^{2L} f(z) dz = \int_0^{2L} \left[A f'^2 + C f^2 + \lambda f(z) \right] dz$$

问题转化为经典力学问题 $(0, 2L)$ 间的问题，极值为极值。
这是变分学和微值问题

$$\text{令 } \bar{F} = A f'^2 + (C + \lambda) f^2 = \bar{F}(f, f')$$

极值: 0. 0. 为必要条件为 梯度 Euler 方程

$$\frac{\partial}{\partial f'} \frac{\partial \bar{F}}{\partial f'} - \frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial \bar{F}}{\partial f} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial \bar{F}}{\partial f'}$$

$$(C + \lambda) f = A f'' \quad (7-2)$$

入: Lagrange 乘子. 必要条件

λ : 归一化常数常数 (7-2)

$$A x^2 - (C + \lambda) = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{C+\lambda}{A}} = \pm n; \quad (\because A > 0, C + \lambda > 0, \text{虚数解不存在}, \\ n \in \mathbb{R})$$

$$f = P \sin(n\vartheta + \varphi)$$

$\Rightarrow \vartheta = 0$ 时, $f(0) = 0$, $\therefore \varphi = 0$

$$f = P \sin n\vartheta$$

$\Rightarrow \vartheta = 2L$ 时, $f(2L) = 0$

$$n \cdot 2L = s\pi \quad (s \text{ 为整数 } -N, \dots, 0, \dots, N)$$

$$n = \frac{s\pi}{2L}$$

$$= \frac{\pi}{2L} \quad (s \neq 0)$$

$$f = P \sin\left(\frac{\pi}{2L}\vartheta\right)$$

利用 $[7.4] \rightarrow [7.44]$, λ_1 之 P

$$I = \int_0^{2L} f^2 d\vartheta$$

$$= \int_0^{2L} P^2 \sin^2 \frac{\pi\vartheta}{2L} d\vartheta$$

$$= P^2 L$$

$$P = \left(\frac{1}{L}\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} f(\vartheta) = \left(\frac{1}{L}\right)^2 \sin \frac{\pi\vartheta}{2L} \quad (7.3')$$

(7.3) 式代入 (7.45) 式, 可单选得后有

$$\delta W = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 A + C \quad (7.49)$$

由该结论可知, 只要对系统有稳定的 (7.4). (7.49) 式第一次是大于零 (A 为半方程), 则有 $\delta W > 0$.

~~由~~ $\frac{\partial}{\partial \vartheta} A$ [(7.46) 式] 和 C [(7.47) 式] 对中系数之和, δW 变成:

$$\delta W = \int_0^{\infty} \left[F \left(\frac{d\Xi^R}{dR} \right) - G \Xi^R + \frac{(k+h^2)R^2+1}{R} (B_0 \Xi^0 - H) \right] dR$$

式中

$$F(R) = \frac{R(B_{00p} + kR B_{0g}) + h^2 R^3 B_0^2}{1 + (k^2 + h^2) R^2} \quad (7.5^{\circ})$$

$$G(R) = - \frac{(B_{00p} + kR B_{0g})}{R} - \frac{(B_{00g} - kR B_{0g})}{R[1 + (k^2 + h^2) R^2]} - \frac{h^2 R B_0^2}{1 + (k^2 + h^2) R^2} + \\ + h^2 R B_{0g}^2 - \frac{d}{dR} \left(\frac{B_0^2 + h^2 R^2 B_{0p}^2}{1 + (k^2 + h^2) R^2} \right) \quad (7.5^{\circ})$$

$$H(R, \Xi^R, \frac{d\Xi^R}{dR}) = \frac{R}{1 + (k^2 + h^2) R^2} \left(\frac{d\Xi^R}{dR} (kR B_{0g} - B_{0g}) - \frac{\Xi^R}{R} (kR B_{0g} + B_{0g}) \right)$$

$$h = \frac{\pi L}{2L}$$

$$\Xi^0 = \frac{H}{B_0} \quad (7.5^{\circ})$$

$$\delta W = \int_0^{\infty} \left[F \left(\frac{d\Xi^R}{dR} \right) - G \Xi^R \right] dR \quad (7.5^{\circ})$$

若 δW 为 Ξ^R 的极值，则满足 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dR} \frac{\partial K}{\partial \Xi^R} - \frac{\partial K}{\partial \Xi^{R'}} = 0$$

$$K = F \left(\frac{d\Xi^R}{dR} \right) - G \Xi^R = K(\Xi^R, \Xi^{R'})$$

$$\frac{d}{dR} \left(F \frac{d\Xi^R}{dR} \right) + G \Xi^R = 0 \quad (7.5^{\circ})$$

对于固定边界， Ξ^R 满足

Euler 方程时，且满足

$\frac{\partial K}{\partial \Xi^{R'}} = 0$ (U 边界条件)

这是间断边界 Ξ^R 的方程，即端点固定或 Ξ^R 在端点间连续

$$\therefore \frac{d\Xi^R}{dR} = 0 \quad (\text{若 } R=0), \quad \Xi^R = 1, \quad (\Xi^R \text{ 在 } 1, \text{ 或 } C)$$

注意： $R=0$ ，该方程的可解性。
假使数 F, G 在 $R=0$ 附近不

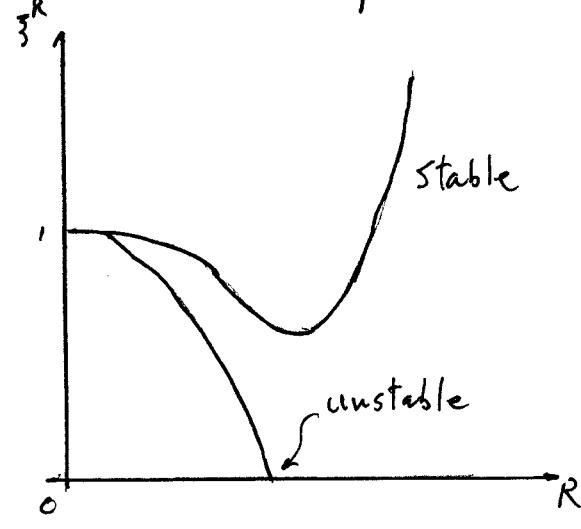
证明自然
边界问题
仍可使用
Euler 方程
“ δW 不是
T 时的变分解”

Newcomb (1960) 稳定性和扰动：

从方程(7.53)知若 $\xi^R > 0$, ($\xi^R \neq -R$), 则 $\delta W > 0$
(稳定);

if ξ^R vanishes somewhere we have an instability

在某些 ξ^R 处为零 (即方程有根) 则不稳定.



Randall 提出的判别方法由
方程(7.53)知当 ξ^R 满足

$$\xi^R = \text{const.} (l = 1)$$

$$\frac{d\xi^R}{dR} = 0$$

而确定。方程见书上结论

$$\begin{cases} (7.53) \\ \xi^R = 1 \\ \frac{d\xi^R}{dR} = 0 \end{cases}$$

Fig 7.7 Euler-Lagrange equation's solutions for ξ^R

13): 均匀扭曲无场 \vec{B}_0 (uniform-twist force-free field)

$$B_{03} = \frac{B_0}{1 + [\bar{\Phi}R/(2L)]^2}, \quad B_{0\phi} = \frac{B_0[\bar{\Phi}R/(2L)]}{1 + [\bar{\Phi}R/(2L)]^2}$$

重：一磁力线 绕系中 - 磁场 - 场 在扭曲时

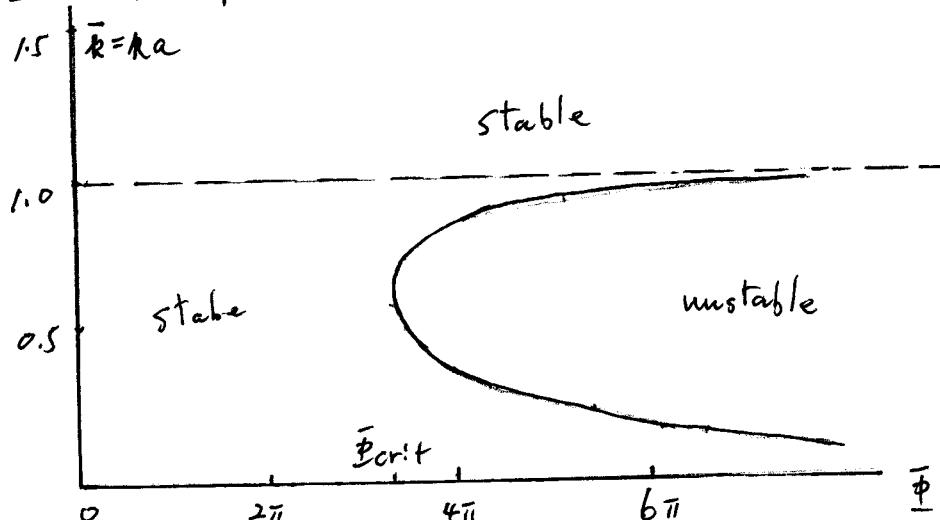


Fig. 7.8. The stability diagram for a uniform-twist force-free flux tube, length $2L$
effective width $2a$

由图 7.8 可见，磁通常数 $\vec{\xi} = \vec{\xi}(R, f(R))$ 式的 Kink 扰动
在扭曲 $\vec{\xi}$ 超过 $3.3\pi/17$ (即 α_{crit}) 时将不稳定。

当 $\vec{\xi} < 2\pi$ ，磁通带肯定稳定 (注意这时上述扰动也稳定)
[扭曲程度 $\vec{\xi} < 2\pi$ 一定稳定]
关于圆柱 α_{crit}
的大小与扰动的运动有关。
扭曲大 $\vec{\xi} > 3.3\pi/17$ 不稳定]

偏微分方程
的完全解表明不稳定性
只在圆柱半径
 $> 5\pi$ 处出现。

现时，尚不清楚扭曲对怎样边缘条件不稳定性有影响
(左端(右端的) 特别是扭曲等离子体有更强不稳定性时)。

将会通过一个对应模型有更深的了解边缘条件。

* 利用能量原理分析 Kink 不稳定性模型

i) 假设，考虑对称磁通量

$$\begin{aligned}\vec{B}_0 &= B_0 \varphi(R) \hat{\varphi} + B_0 \psi(R) \hat{\delta} \\ \therefore \vec{\delta} &= -\frac{d B_0 \varphi}{d R} \hat{\varphi} + \frac{1}{R} \frac{d}{d R} (R B_0 \psi) \hat{\delta}\end{aligned}$$

ii) 光力场，因此平衡态时不计引力，压强梯度为

$$\frac{d}{dR} (B_0 \varphi + B_0 \psi) = -\frac{2 B_0 \varphi}{R}$$

2, $S_W = (2\mu)^{-1} \int \left\{ \vec{B}_1^2 - \vec{B}_1 \cdot [\vec{\xi} \times (\nabla \times \vec{B}_0)] \right\} dV$

$$\delta W = \int_0^{2L} \left[A \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + cf^2 \right] dx$$

取扰动形式 $\vec{\xi} = \vec{\xi}(R, f(R))$

$\therefore \vec{\xi} \cdot \vec{B}_0 = 0, \therefore \vec{\xi}$ 为 R 方向扰动

磁通管二端固定 $f(0) = f(2L) = 0$

另，从 $\vec{\xi}^2$ 表达式可见扰动与 R 方向有关

$$\vec{\xi}^2 = \left[\vec{\xi}(R) \vec{R} - i \frac{B_0 \varphi}{B_0} \vec{\xi}(R) \vec{\varphi} + i \frac{B_0 \varphi}{B_0} \vec{\xi}(R) \vec{\delta} \right] e^{i(m\varphi + k_z)}$$

取 $\xi^0 = \frac{H}{B_0}$, 由 1.3(7.52) $\delta W = \int_0^\infty [F(\frac{d\xi^R}{dR}) - G\xi^R] dR$
 之真实下限的表达式 ξ^R 。因 $\xi^R e^{i(m\varphi + k\vartheta)}$ 和高扭曲和低扭曲
 / 没有关系

Kink 不稳定性和 $\begin{cases} \text{弯曲} \\ \text{扭曲 (螺旋形)} \end{cases}$

3. 选择 $f(\vartheta), \xi^R(R)$, $\xi^R(R)$ 使 δW 最小

1) 若为纯扭曲 $f(\vartheta) = 0$ 之情况, 3) 入物一化条件

$$\int_0^{2L} f(\vartheta) d\vartheta = 1$$

3) 入 Lagrange 条件入, 使 δW 最小

① 构造泛函

$$F = Af' + (c + \lambda)f^2 = F(f, f')$$

② 极值的必要条件 Euler 方程

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$

$$3) \text{求解 } f(\vartheta) = (\frac{1}{L})^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi \vartheta}{2L}$$

$$4) \delta W = (\frac{\pi}{2L})^2 A + c$$

第一次有利于确定

③ 求 A, C 及 c, λ 的值

$$\delta W = \int_0^\infty [F(\frac{d\xi^R}{dR})^2 - G\xi^R] dR$$

④ 归结为 Euler 方程

$$\frac{d}{dR} \left[F \frac{d\xi^R}{dR} \right] + G\xi^R = 0$$

4. Newcomb's 判据

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dR} \left(F \frac{d\bar{\xi}^R}{dR} \right) + G \bar{\xi}^R = 0 \\ \bar{\xi}^R = 1 \\ \frac{d\bar{\xi}^R}{dR} = 0 \end{array} \right.$$

无初侧力稳定，有侧力稳定。

5. 例 1.

均匀扭曲 (twist)

扭曲程度小	$\bar{\omega} < 2\pi$	稳定
扭曲大	$\bar{\omega} > 3.3\pi$	不稳定

7.5 不稳定性

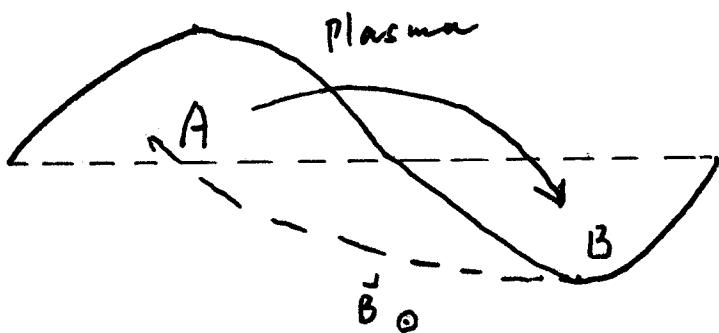
7.5.1 支持不稳定性

1. 偏离低速等离子体 ($\beta \ll 1$, 液流)

磁通量保持常数，且随大而变。即磁感应强度，磁场强度保持不变。

如果等离子体压强低是源于气体稀薄；可认为是无运动，则对应于一封闭系统的一般磁性状态，任何使磁通量变化的扰动均使磁能增加，根据能量原理，系统是稳定的。系统要回到原来的磁能态。因此液流在磁场中流动也即膨胀，系统尚可能有运动；但是磁通量相同的相邻磁通管连同内部等离子体一起进行交换，这时磁能会变化，而内能会变化，若会减小则引起支持不稳定性。

Rayleigh-Taylor 不稳定性也属于这一类不稳定性



原光行A的等离子体向磁流，进入B处。

原光行B的磁流进入A

这种不稳定性之因于压强不均匀性 (半径系大)

稳定性为体积的变化 $\delta V < 0$ 或 $\delta \int \frac{dl}{B} < 0$ (积分的磁通量差度)

当同一根磁力线既有凸向等高体(稳定)部分，也有凹向等高体(不稳定)部分，这时之块状稳定性由稳定性判别？不稳定的区域元{仅属于这一类型，何谓原理是有理的分析方法。

该等高体压强为不高压，系先是轴对称，求支撑运动引起的速度场的变化。

把平衡位_I于Ⅰ区域的等高体连同磁引线

-一起移到Ⅱ区域，同时把位于Ⅱ区域的等高体连同磁引线一起移到Ⅰ区域，这时系之位形(磁化内能，引力能之和)之变化是磁引线和等高体内部变化之和(引力能之和)

$$+ \text{磁化的变化} : \text{磁通量中的磁能} \quad W_m = \int dV \cdot \frac{\vec{B}^2}{2\mu} = \int S dl \frac{\vec{B}^2}{2\mu}$$

λ ：为常数， S ：横截面，积分沿磁力线进行。磁通量 $\Phi = \lambda B$ 为常数

$$\therefore W_m = \frac{\lambda^2}{2\mu} \int \frac{dl}{S}$$

支撑磁通量Ⅰ和Ⅱ引起的磁能变化为

$$\delta W_m = \frac{1}{2\mu} \left[(\bar{\lambda}_1 \int \frac{dl}{S} + \bar{\lambda}_2 \int \frac{dl}{S}) - (\bar{\lambda}_1' \int \frac{dl}{S} + \bar{\lambda}_2' \int \frac{dl}{S}) \right] =$$

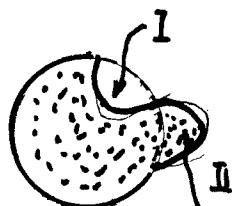
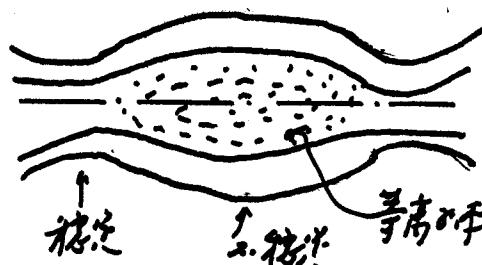
(Ⅰ, Ⅱ之 λ 的正负相同，体积相同) 如果支撑的支撑磁通量相同，则 $\delta W_m = 0$ ，磁能保持不变 ($\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2$)

* 内能之变化：体积为 V 的等高体中所包含的内能为

$$W_p = \frac{PV}{Y-1}$$

假设支撑运动是绝热过程，即满足 $PV^r = \text{const}$ 。当 P 为指零，由平衡方程 $\vec{f} \times \vec{B} = \vec{v}P$ ， \therefore 有 $\vec{B} \cdot \vec{v}P = 0$ ， \vec{B} 位于等压面上。即磁力线的 P 为常数。当Ⅰ和Ⅱ中包含的等高体作逆支撑时等高体内部变化等于Ⅰ的等高体移到Ⅱ时的内能变化加上Ⅱ的等高体移到Ⅰ时的变化。前者等于 $(P_1'V_1 - P_1V_1)/(Y-1)$

其中 P_1' 为区域Ⅰ的等高体移到区域Ⅱ时的压强，因为绝热，有 $P_1'V_1^r = P_1V_1^r$
 $\therefore P_1' = P_1(V_1/V_1')^r$ 后者也类似 $(P_1'V_1 - P_1V_1)/(Y-1)$ ， $P_1' = P_1(V_1/V_1')^r$



支模后引起总的压力变化为：

$$\delta W_p = \frac{1}{r-1} \left[P_I \left(\frac{V_2}{V_I} \right)^r V_{II} + P_{II} \left(\frac{V_I}{V_{II}} \right)^r V_{I} \right] - \frac{1}{r-1} [P_I V_I + P_{II} V_{II}]$$

支模后 支模前

：灌浆靠近，可以令 $P_{II} = P_I + \delta p$
 $V_{II} = V_I + \delta V$ 代入上式

$$\delta W_p = \frac{1}{r-1} \left[P_I \left(\frac{V_2}{V_I + \delta V} \right)^r (V_I + \delta V) + (P_I + \delta p) \left(\frac{V_I + \delta V}{V_2} \right)^r V_2 \right] - \frac{1}{r-1} [P_I V_I + (P_I + \delta p)(V_I + \delta V)]$$

利用近似公式 $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{1}{2}r(r-1)x^2$
 $(1+x)^{r+1} = 1 + (r-1)x + \frac{1}{2}r(r-1)x^2$

展开上式，保留 x^2 项，有

$$\delta W_p = \delta p \delta V + r p \left(\frac{\delta V}{V_I} \right)^r = V_I^{-r} \delta(p, V_I^r) \cdot \delta V$$

稳定条件 $\delta W = \delta W_h + \delta W_p = \delta W_p > 0$ ，迎风边附近 $\because P_2 \approx 0$

$\therefore \delta p = P_2 - P_1 \approx -P_1 < 0 \quad \therefore \text{要求 } \delta V < 0$

不考虑体积 $V = \int dl \cdot S = \bar{v} \int \frac{dl}{\beta}$ $\because \bar{v} = \text{const.}$

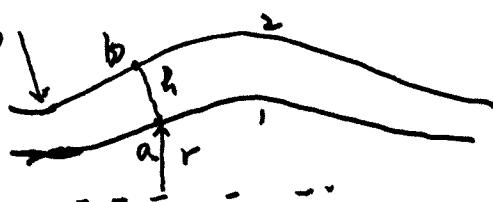
$\delta V < 0$ ，即 $\int \frac{dl}{\beta} < 0$ 即分子与分子链随管道而收缩。

且 $\int \frac{dl}{\beta}$ 与体积有关。所以稳定条件 $\delta V < 0$ 要求纤维们平行于管道等高线运动，
并减小方向 ($\delta p < 0$)，即 $\int \frac{dl}{\beta}$ 变小的平衡位置是充满稳定性。反之则不稳定。

在管道中的等高线与气流方向一致，有迎风边增长增加自身体积的倾向
也即在管道（阻力线：纤维抵抗变形的等高线中）若走向 $\int \frac{dl}{\beta}$ 增加的方向运动
(平行于管道)

可见 $W = - \int \frac{dl}{\beta}$ 类似有往复的倾向，即等高线随管道运动是力的方向
“引领” W 之低的方向 ($\delta V > 0$) 运动。如果等高线平行 W 极其之大，纤维运动
引起的“引领”变化为正 ($\delta W > 0$) 也即 $\delta V < 0$ 或 $\int \frac{dl}{\beta} < 0$ ，即平行于运动的充满稳定性

现在不考虑稳定条件 $\delta \int \frac{dl}{\beta} < 0$ 分析简单管道运动的充满稳定性
考虑管道中任意一点之靠近
的阻力线 1-2 对于迎风等高线



的磁力线为半径 $R < 0$, 凸向左 $R > 0$. 因此势能 $P > 0$.

该磁力线上任意点 a 和 b 的高度差, 由于 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, 可引述标量磁势 φ . $\vec{B} = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$

$$\int \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = \int \frac{\partial \varphi}{\partial l} \cdot d\vec{l} = \int d\varphi = \varphi$$

$\varphi = \int dl / B$, 可以认为 a, b 间的势相等.

$$\delta \int \frac{dl}{B} = \delta \int \frac{B dl}{B^2} = \delta \int \frac{d\varphi}{B^2} = \int d\varphi \delta \left(\frac{1}{B} \right) < 0$$

积分变化 \Rightarrow 磁场 B 上的磁力线之间垂直于 \vec{B} .

线上有: $\nabla \times \vec{B} = 0$, $\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi R = 0$.

线上: $B' = B + \delta B$, $R' = R + h$

$$\int B' dl' = B' \cdot 2\pi R' = 0. \quad \therefore B \cdot 2\pi R = (B + \delta B) \cdot 2\pi(R + h)$$

$$1 + \frac{\delta B}{B} - \frac{h}{R} = 1 \quad \frac{\delta B}{B} = \frac{h}{R}$$

利用磁力线间磁通为常数的条件, $2\pi rh B = \Phi = \text{const}$. Φ 中 r 为高对称轴的半径.

$$\int d\varphi \delta \left(\frac{1}{B} \right) = - \int \frac{d\varphi}{B^2} \frac{\delta B}{B} = - \int 2 \cdot \frac{B dl}{B^2} \cdot \frac{h}{R} = - \int 2 \cdot \frac{dl}{B^2} \frac{h}{2\pi r R} < 0$$

$$\therefore \int \frac{dl}{B^2 R r} > 0$$

磁力线 钢铁部分 $R > 0$, 积分为正. 中间部分 $R < 0$, 积分为负. 由于向左磁力线中间部分大于右侧部分, 故磁铁不能被吸引.

2. 相邻磁通量交换，等高线所包围的不变，但磁场减小。
特别：等高线内不含磁流，磁场凹向等高线 Fig. 7.9(a)

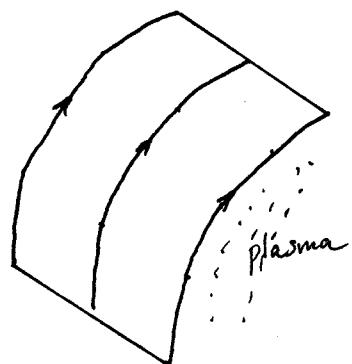


Fig. 7.9(a)

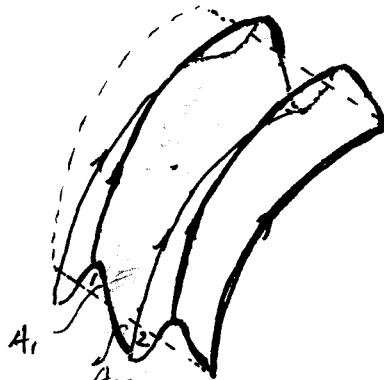


Fig. 7.9(b)

凹面有一个增加的过程 (看 7.9(b))。

假如等高线所包围不变，没有作功。因此，内核没有改变。平衡态时，磁场会按同样的体积 (V) 做运动。

磁通量从 A_1 变到 A_2 ，但通量不变 $B_0 A_2 = B_0 A_1$

$$\text{通量的改变为 } \frac{B_2}{2\mu} V - \frac{B_1}{2\mu} V = \frac{B_1 V}{2\mu} \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right)$$

如果 $A_2 > A_1$ 就发生不稳定性。

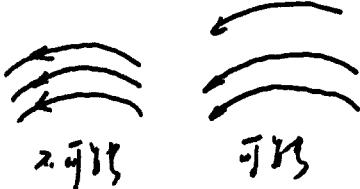
设运动轨迹的曲率半径为 R_c ，波数为 k ，磁场线的弯曲会引起惯性离心力，有一个等效重力加速

$$\vec{g}_c = \frac{V_c^2}{R_c} \vec{R} \quad (\vec{R} \text{ 法向量})$$

同时，磁场线的弯曲 $\nabla \cdot \vec{B} \sim \frac{1}{r}$ ，因此在指向有磁场相反，相应地加速

$$\vec{g}_c = \mp \frac{q}{2mc} V_c R_c \nabla \vec{B}$$

R_c : 波数半径
 V_c : 波数的波数



$$\text{综合后 } \vec{g} = \frac{V_c^2 + \frac{1}{2} V_s^2}{R^2} \vec{R} = \frac{2W_{11} + W_{12}}{mR^2} \vec{R}$$

参考单核
子轨迹论
论

$$W_{11} = \frac{1}{2} m V_{11}^2$$

$$\therefore m V_{11}^2 = 2 W_{11}$$

$$w_1 = \frac{1}{2} kT$$

(1) 逆时针
(2) 顺时针

$$w_2 = kT$$

(2) 逆时针
(1) 顺时针

$$= \frac{2kT}{mR^2} \vec{R} = \frac{2\eta kT}{\rho R^2} \vec{R} = \frac{2P}{\rho R^2} \vec{R}, g \parallel \vec{R} \text{ 同方向}$$

高磁场的凹向等高线半径为负. $\therefore (g = +\frac{2P}{\rho R})$

不稳定时 $w = -gR$

$$= -\frac{2PK}{\rho R_c} \quad (7.14)$$

$(\vec{R} \rightarrow \text{凸向等高线半径})$

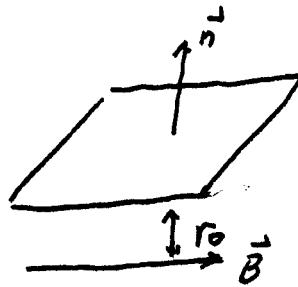
以前已提及，高磁场的二端根在于无场. 有利于稳定.

这叫扰动的磁力线传播. 速度为 $V_A = \frac{B}{(\mu P)^{1/2}}$

不稳定性增长率为 ω 的 1 衍式

$$\omega^2 = -\frac{2PK}{\rho R_c} + \frac{V_A^2}{L} \quad (7.14')$$

假如弯曲的方向垂直于传播方向，相速为 V_A . 磁力线数约为 r_0^{-1} (最大坡度 α). 磁通管弯曲固有的稳定性由



最大的波的扰动 (ω). 充分条件是 $(7.14)'$ 中 $\omega^2 > 0$

$$\frac{V_A^2}{L^2} > \frac{2PK}{\rho R_c}$$

$$\frac{B^2}{\mu PL^2} > \frac{2PK}{\rho R_c}$$

$$\frac{r_0 R_c}{L^2} > \frac{2\mu P}{B^2}$$

若 P_{max}
在 r_0 处取到

波动小于 r_0 的扰动是不稳定的.

事实上，弯曲是弯曲. 在区域中的磁力线传播将可能引起不稳定性. 因为磁力线在扰动过程 (传播) 中没有延伸. 无穷远处磁场加作用.

3. 电流2. 稳定性：腊肠2. 稳定性 (直接2. 稳定性)

柱状等离子体半径为 a . 为柱状磁场压缩. 电流由柱表面向或柱内的电流密度. $\vec{j} = j \hat{\delta}$

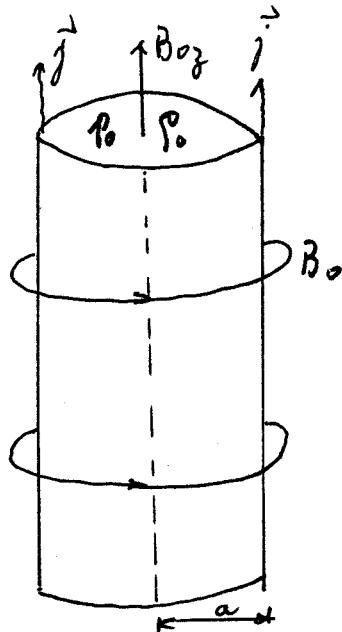


Fig. 7.10 a

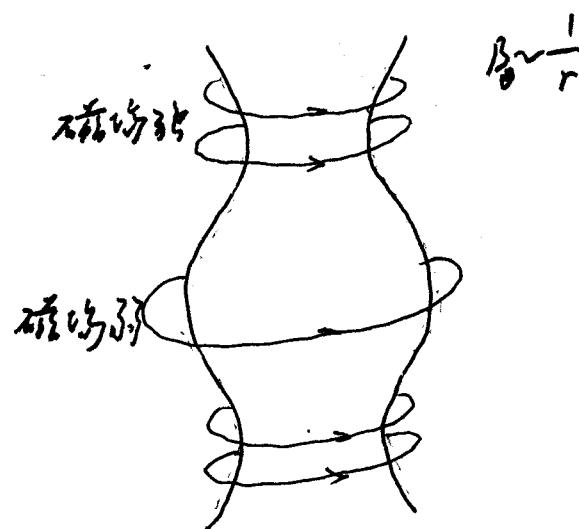


Fig. 7.10 b

Lorentz力 $j \times B$ 被压缩而被平衡. 等离子体 (ρ_0, P_0) 不包含磁场. 压缩是不稳定的. 因为磁场迎向等离子体. 称为腊肠2. 稳定性. 由(7.54)式. 可得增长率 (腊肠2. 稳定性也属于直接2. 稳定性)

$$i\omega = \left(\frac{2\beta_0 k}{\rho_0 a} \right)^{1/2}$$

若扰动波数 $k \approx a^{-1}$ 2.1

$$i\omega = \left(\frac{2\rho_0 / \rho_0}{a} \right)^{1/2} \quad (7.58)$$

足够大的轴向磁场 B_{0z} 作用于等离子体内时. 有助于稳定
轴向力. 加速等离子体. 这对磁力

$$\rho_0 + \frac{B_{0z}}{2\mu_0} = \frac{B_{0y}}{2\mu_0} \quad (7.58)'$$

B_{0z} 之外
加入的磁场

沿轴向传播. Alfvén 速度 $(\frac{B_{0z}}{\mu_0 \rho_0})^{1/2}$

1. 方程 (7.54)' 式. 速度场 $\vec{v}(x)$ 为

$$\omega^2 = -\frac{2P_0}{\rho_0 a^2} + \frac{\beta_0^2}{\mu P_0 a^2} \quad (\text{近似})$$

系统稳定条件是保证 $\omega > 0$, 从 (7.58)' 式得 P_0 . 代入上式

$$\text{得 } \beta_0^2 > \frac{1}{2} \beta_\phi^2$$

4. 扭曲 (kink) 2. 稳定性

直线 振荡 (线程流) 2. 稳定性 } ($m=0$) } 截面为 1

\rightarrow 12° 向扭曲 (lateral) 2. 稳定性 }

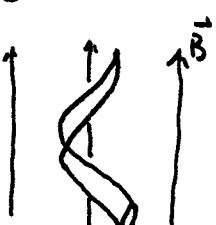
螺旋扭曲 (helical) 2. 稳定性 } ($m=1$) } 截面为 2
 $\begin{cases} \vec{s} = \vec{s}(R) e^{(m\phi + k\delta + \omega t)} \\ (m=2 \text{ 时, 截面为 3}) \end{cases}$

Fig 7.6

该磁场分布见 Fig 7.10 (a).

柱向场 (12°) 和侧场 (侧扭) 在柱外形成螺旋扭曲磁场. 旋转运动后, 等高环平面形成螺旋状, 产生螺旋不稳定性.

① 由已推导的线程流运动方程叠加变换下.



$$P_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial x} = -\nabla P_1 + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 \quad (\text{忽略重力}) \quad (7.5-5)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{P}_0 \vec{v}_1) = 0 \quad (7.5-6)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial x} = -\gamma P_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \nabla) P_0 \quad (7.5-7)$$

$$\frac{\partial \vec{j}_1}{\partial x} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \quad (7.5-8)$$

$$\frac{\partial \vec{j}_1}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial x} \quad (7.5-9)$$

(7) 扭曲位移 $\vec{s}(r_0, x)$ 表示上述方程

$$\vec{P}_1 = -\nabla \cdot (\vec{P}_0 \vec{s})$$

| (7.16)

$$\begin{aligned} P_1 &= -\vec{\xi} \cdot \nabla P_0 - \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi} \\ \vec{B}_1 &= \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (5.5-12) \\ (7.15) \end{array} \right.$$

② 边界条件

i. 等离子体-真空边界 (边界条件 A)

假定等离子体和真空区域之间存在一个半径为 r_0 的边界 S_0 , 表面上有面电流流动, 因而等离子体压强和磁场可以有掠过界面的不连续性。平衡状态时, S_0 为等压面 (磁场外线, 电流线分布在此上), $\vec{B}_n = 0$, 而且掠过界面的速率也很快:

$$P_0(\vec{r}_0) + \frac{\vec{B}_{0e}(\vec{r}_0)}{2\mu} = \frac{\vec{B}_{1e}(\vec{r}_0)}{2\mu} \quad (5.5-18) \quad \text{因 } r_0 \text{ 上} \\ \text{磁流指向} \\ \text{掠过率}$$

i : 为内, e : 为外。

有位移时, 压强也必须连续

$$P_0(\vec{r}) + P_1(\vec{r}) + \frac{1}{2\mu} [\vec{B}_{0e}(\vec{r}) + \vec{B}_{1e}(\vec{r})]^2 = \frac{1}{2\mu} [\vec{B}_{0e}(\vec{r}_0) + \vec{B}_{1e}(\vec{r}_0)]^2 \quad (5.5-19)$$

$$\text{式 } \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\xi}_n \vec{n}.$$

\vec{r}_0 为 S_0 表面上一点, \vec{n} 为该处外法线单位矢量 $\vec{\xi}_n = \vec{\xi}_0 \cdot \vec{n}$

$P_0(\vec{r})$ 和 \vec{r}_0 关系式

$$\begin{aligned} P_0(\vec{r}) &= P_0(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla P_0(\vec{r}_0) + \dots \\ &= P_0(\vec{r}_0) + \vec{\xi}_n \vec{n} \cdot \nabla P_0(\vec{r}_0) + \dots \end{aligned} \quad (5.5-20)$$

由 (5.5-12) 式

$$P_1(\vec{r}) = -\vec{\xi} \cdot \nabla P_0(\vec{r}) - \gamma P_0(\vec{r}) \nabla \cdot \vec{\xi} \quad (5.5-20) \text{ 代入左式, 取一阶近似.}$$

$$\text{即 } P_1(\vec{r}) = -\vec{\xi} \cdot \nabla P_0(\vec{r}) - \gamma P_0(\vec{r}) \vec{n} \cdot \vec{\xi} \quad (1 \text{ 为常数, } \vec{r} \text{ 为 } \vec{r}_0) \quad (5.5-21)$$

用 (5.5-19) 式, $\vec{\xi}_n \cdot \vec{\xi} = \vec{\xi}_0 \cdot \vec{\xi}$

$$\begin{aligned} [\vec{B}_{0e}(\vec{r}) + \vec{B}_{1e}(\vec{r})]^2 &\approx \vec{B}_{0e}(\vec{r})^2 + 2[\vec{B}_{0e}(\vec{r}) \cdot \vec{B}_{1e}(\vec{r})] \\ [\vec{B}_{0e}(\vec{r}_0) + \vec{B}_{1e}(\vec{r}_0)]^2 &\approx \vec{B}_{0e}(\vec{r}_0)^2 + 2[\vec{B}_{0e}(\vec{r}_0) \cdot \vec{B}_{1e}(\vec{r}_0)] \end{aligned} \quad (5.5-22)$$

将位移边界上的束缚磁远场用色散率修正量的值展开

$$\vec{B}_0^2(\vec{r}) = \vec{B}_0^2(\vec{r}_0) + \vec{\beta} \cdot \nabla \vec{B}_0(\vec{r}_0) + \dots \quad (\text{对 } i, e \text{ 的贡献}) \quad (5.5-23)$$

$$\text{且且 } \vec{B}_0(\vec{r}) \cdot \vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{B}_0(\vec{r}_0) \cdot \vec{B}_1(\vec{r}_0) \quad (\text{对 } i, e \text{ 的贡献}) \quad (5.5-24)$$

$$\therefore \vec{B}_0(\vec{r}) = \vec{B}_0(\vec{r}_0) + \vec{\beta} \cdot \nabla \vec{B}_0(\vec{r}_0) ; \quad \vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}_0) + \vec{\beta} \cdot \nabla \vec{B}_1(\vec{r}_0) = \vec{B}_1(\vec{r}_0)$$

\vec{B}_1 为-7个量.

$$\therefore \vec{B}_0(\vec{r}) \cdot \vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{B}_0(\vec{r}_0) \cdot \vec{B}_1(\vec{r}_0)$$

由(5.5-20, 5.5-21, 5.5-22, 5.5-23, 5.5-24)代入(5.5-19)

利用连续条件(5.5-18) (考虑到位移边界上脚注的条件之一:
位移)

$$-\gamma P_0(\vec{r}_0) \nabla \cdot \vec{\beta} + \frac{\vec{B}_0(\vec{r}_0) \cdot \vec{B}_{10}(\vec{r}_0)}{\mu} + \frac{\vec{\beta}_n}{\epsilon_n} \frac{\partial}{\partial n} P_{0n}(\vec{r}_0) \\ = \frac{\vec{B}_{0e}(\vec{r}_0) \cdot \vec{B}_{1e}(\vec{r}_0)}{\mu} + \frac{\vec{\beta}_n}{\epsilon_n} \frac{\partial}{\partial n} P_{0e}(\vec{r}_0) \quad (5.5-25)$$

ii. 电势条件 B_0

等离子体为理想导体 $\sigma \rightarrow \infty$, $\therefore \vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}_0 = 0$

在位移边界上, 电场切向为零, 真空中该切向场为零. (等离子体)

$$\therefore \vec{E}_t + [\vec{U} \times \vec{B}_{00}]_t = 0 \quad (5.5-26)$$

$$\text{可得} \vec{n}_0 \times [\vec{E}_t + \vec{U}_t \times \vec{B}_{0e}] = 0, \quad \text{"下标" 为无边值}$$

" \vec{U} " 为真空中物理量
(平衡时 $\vec{U} = 0, \vec{E} = 0, \vec{B} = \vec{B}_0$)

$$\vec{n}_0 \times \vec{E}_t = -\vec{n}_0 \times (\vec{U}_t \times \vec{B}_{0e})$$

$$= -\vec{U}_t (\vec{n}_0 \cdot \vec{B}_{0e}) + \vec{B}_{0e} (\vec{n}_0 \cdot \vec{U}_t)$$

$$= U_{tn} \vec{B}_{0e} \quad \because \text{外面为真空间 } B_n = 0$$

$$\vec{n}_0 \times \vec{E}_t = U_{tn} \vec{B}_{0e}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} \\ &= \nabla \times (\vec{U}_1 \times \vec{B}_{0e}) \quad \rightarrow (\text{利用 } (5.5-26), \because \vec{B}_1 \text{ 为 } \vec{B}_{0e} \text{ 的切向分量}) \\ &= \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \times \vec{B}_{0e} \right) \\ \vec{B}_{1e} &= \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_{0e}) \\ \vec{n}_0 \cdot \vec{B}_{1e} &= \vec{n}_0 \cdot [\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_{0e})] \quad * \quad (5.5-28)\end{aligned}$$

3) 该方程 (5.5-5), (7) P_1, P_i, \vec{B}_1 代入 1 阶时该方程

$$\begin{aligned}P_0 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} &= \vec{F} \cdot \vec{\xi}, \quad (5.5-13) \\ &= -\nabla P_i + \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 \\ (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 &= -\nabla (\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_0) + \underline{\vec{B}_0 \times (\nabla \times \vec{B}_1)} + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \\ (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 &= -\nabla (\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_0) + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 \\ P_0 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} &= -\nabla (P_i + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1) + \frac{1}{\mu} [(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0] \quad \begin{array}{l} \text{由 } \vec{B}_0 = \vec{B}_1, \vec{b} = \vec{B}_0 \\ \text{内部 } \vec{j}_0 = 0, \therefore P_0 = \text{const} \end{array} \\ \text{若 } L \gg a \Rightarrow \text{内部磁场弱} \\ \text{且 } \vec{B}_1 \text{ 为 } \vec{B}_0 \text{ 的切向分量} &\text{, 由 } \vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_1 \text{, 同为表面电流, 等高处有 } P_0, \vec{B}_1 \\ \text{且 } \vec{P} \text{ 为 } r \text{ 变化 } \therefore (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_1 = 0, \text{ 上式变为} &\rightarrow \text{Fig. 7.10(a). } \vec{j} \text{ 为 } r \text{ 方向流动} \\ P_0 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} &= -\nabla (P_i + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1) + \frac{1}{\mu} (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_1. \quad (5.10-2)\end{aligned}$$

式中 $\vec{B}_{1e} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_1)$

$$\begin{aligned}&= \vec{\xi} \cdot \nabla \vec{B}_1 - \vec{B}_1 \cdot \nabla \vec{\xi} + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{\xi} - (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_1 \\ &\quad \parallel \quad \parallel \quad (\text{对称性}) \quad \parallel \quad (\vec{B}_1, \text{ 为 } \vec{B}_0 \text{ 的切向分量}) \\ &= \vec{B}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \vec{\xi}(r) e^{i(m\varphi + kr)} \\ &\quad = i k \vec{B}_1 \cdot \vec{\xi}(r) \quad (\vec{\xi}(r) = \vec{\xi}(r) e^{i(m\varphi + kr)})\end{aligned}$$

(\vec{B}_1 为 \vec{B}_0 的切向分量, r 方向)

$$\begin{aligned}\text{且 } \vec{\xi}(r, \vartheta) &= \vec{\xi}(r) \exp i(m\varphi + kr + \omega t) \text{ 及 } \vec{B}_1 \text{ 代入 } (5.10-2) \\ &= \vec{\xi}(r) e^{i\omega t}\end{aligned}$$

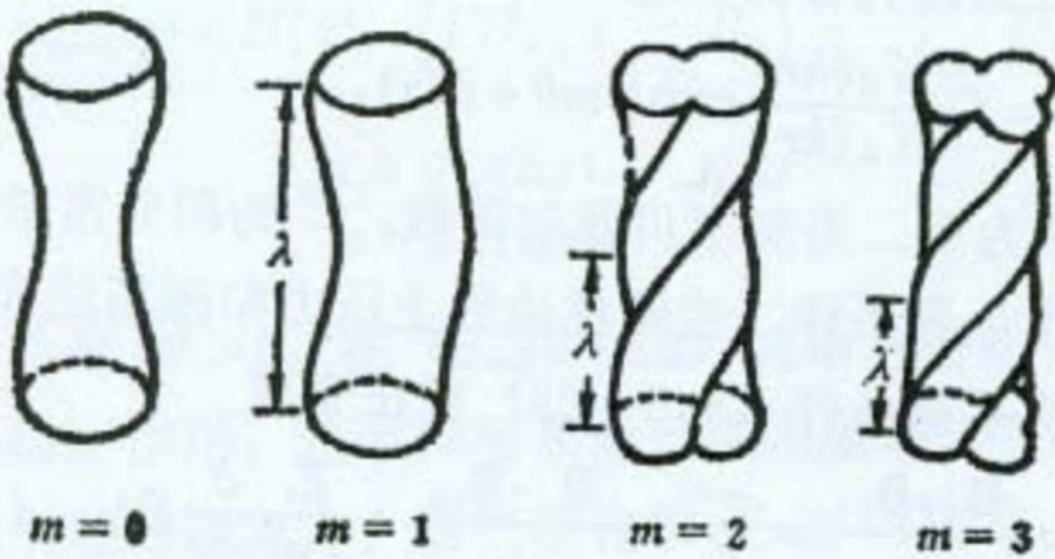


图5-17

$$-\omega^2 \rho \vec{\vec{B}} - \nabla \left(P_1 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_i \cdot \vec{B}_{i,i} \right) + \frac{1}{\mu} \vec{B}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\text{i.e. } \vec{B}_i \cdot \vec{\vec{B}}(\vec{r}))$$

(B_i 为随 \vec{r} 变化)

$$\left(-\omega^2 \rho_0 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_i \cdot \vec{\vec{B}} \right) \vec{\vec{B}} = -\nabla \left(P_1 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_i \cdot \vec{B}_{i,i} \right) = -\nabla \tilde{P} \quad (5.10-3)$$

边界条件: B_i 在 r, θ 为常数 \therefore 左边 $\nabla \cdot \vec{\vec{B}} = 0$, 于是有

$$\nabla^2 \tilde{P} = 0 \quad (\text{无限长圆柱, 轴向外的真空 } z \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{P} \rightarrow 0)$$

Laplace 方程。在上下界面上边界条件满足 ($=0$) 后, 扩展虚零点 Bessel 方程

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right] \tilde{P}_i(r) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \left(1 + \frac{m^2}{(kr)^2} \right) \right] \tilde{P}_i(r) = 0$$

$\because x = kr$, 上式化为

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2} \right) \right] \tilde{P}_i(x) = 0 \quad (5.10-4)$$

这是 m^2 的虚零点 Bessel 方程

$x \rightarrow 0$ 时 $\tilde{P}_i \rightarrow 0$ 有解为 $I_m(kr)$

$$\tilde{P}_i(r) = A I_m(kr), \quad A \text{ 为待定系数}$$

$$-\omega^2 \rho_0 \vec{\zeta} \vec{B}_i = -\nabla \left(P_i + \frac{1}{\mu} \vec{B}_i \cdot \vec{B}_{i,i} \right) + \frac{1}{\mu} \vec{B}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{k} \cdot \vec{B}_i \vec{\zeta}(\vec{r}))$$

~~+ \vec{B}_i 没有贡献~~

$$\left(-\omega^2 \rho_0 + \frac{k^2 B_i}{\mu} \right) \vec{\zeta}(\vec{r}) = -\nabla \left(P_i + \frac{1}{\mu} \vec{B}_i \cdot \vec{B}_{i,i} \right) = -\nabla \tilde{P} \quad (5.10-3)$$

边界条件： \vec{B}_i 在 $r=0$ 及 $r \rightarrow \infty$ 为零 \therefore 左边 $\nabla \cdot \vec{\zeta} = 0$. 于是有

$$\nabla^2 \tilde{P} = 0$$

(无长波长，场向外传播 $\Rightarrow \tilde{P} \rightarrow 0$)

Laplace 方程。由于上下界面边界条件 $\nabla \cdot \vec{\zeta} = 0$ 同时满足虚零 Bessel 方程

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right] \tilde{P}(r) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - k^2 \left(1 + \frac{m^2}{(kr)^2} \right) \right] \tilde{P}(x) = 0$$

$\because x = kr$, 上式化为

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2} \right) \right] \tilde{P}(x) = 0 \quad (5.10-4)$$

这是 $m \neq 0$ 虚零 Bessel 方程

$x \rightarrow 0$ 时 $\tilde{P} \rightarrow 0$ 有解 $\Leftrightarrow I_m(kr) \rightarrow 0$

$$\tilde{P}(r) = A I_m(kr), \quad A \text{ 为待定常数}$$

问： $A = ?$

$$\text{设 } r=a \quad (\text{右边界}) \quad \tilde{P}(r) = \tilde{P}(a)$$

$$\tilde{P}(r) = \tilde{P}(a) \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)} \quad (5.10-5)$$

代入 (5.10-3). 可求得边界上之传播系数 $\tilde{\zeta}_r(a)$

即左边取 $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_r$ 于 $r=a$. 右边取传播之 $\tilde{\zeta}_r$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{P}(r) = k \tilde{P}(a) \frac{I_m'(kr)}{I_m(ka)}$$

另一个解法是令 $P(r) = K_m(kr)$ $\rightarrow \infty$ 于 $r \rightarrow 0$.

\therefore 不能满足 $\tilde{P} \rightarrow 0$.

代入(5.10-3), 令 $r=a$, 将边界上径向分量 $\xi_r(a)$

$$\rightarrow \xi_r(a) = \frac{k}{\omega P_0 - \frac{R^2 D}{\mu}} \tilde{P}_r(a) \frac{I_m'(ka)}{I_m(ka)} \quad (5.10-6)$$

柱外真空中, 磁场满足 $\nabla \times \vec{B}_{1e} = 0$, 有标量方程 4

$$\vec{B}_{1e} = \nabla \psi, \quad \therefore \nabla \cdot \vec{B}_{1e} = 0$$

$$\therefore \nabla^2 \psi = 0 \quad (5.10-7)$$

虚零点 Bessel
主数 $I_m(kr)$
 $\Rightarrow r \rightarrow 0$ 时, 有限
 $\Rightarrow K_m(kr)$
 $\Rightarrow r \rightarrow \infty$ 时, 有限

柱坐标系, Laplace 方程之高亮差 (仍为虚零点方程). 对于无
限远处有限的解为齐次虚零点 Bessel 主数. (综合 4.3 节部分)

有: $\psi = C \frac{K_m(ka)}{K_m(kr)} \exp i(m\varphi + kr) \quad (5.10-8)$

(C 为积分常数)

现在考虑边界条件. 也即柱的边界上给定压强和磁场 (指向柱内)
满足的条件. 压强半径 (5.5-25) (即条件 A) 变为

$$(5.5-25)' \text{ 式: } -\gamma P_0(\vec{r}_0) \nabla \cdot \vec{\xi} + \frac{\vec{B}_{0e} \cdot \vec{B}_{1e}(\vec{r}_0)}{\mu}$$

$$+ \frac{\xi_r \frac{\partial}{\partial r} \vec{B}_{0e}(\vec{r}_0)}{\mu} = \frac{\vec{B}_{0e} \cdot \vec{B}_{1e}}{\mu} + \frac{\xi_r \frac{\partial}{\partial r} \vec{B}_{0e}}{\mu}$$

$$= \frac{\vec{B}_{0e} \cdot \vec{B}_{1e}(\vec{r}_0)}{\mu} + \frac{\xi_r \frac{\partial}{\partial r} \vec{B}_{0e}}{\mu}$$

$$\vec{P}_1 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_{1e} = \tilde{\vec{P}} = \frac{\vec{B}_{0e} \cdot \vec{B}_{1e}}{\mu} + \frac{\xi_r \frac{\partial}{\partial r} \vec{B}_{0e}}{\mu} \quad (5.10-9)$$

初值 条件 不变

[(5.5-25) 左边界一次 \vec{B}_{0e} 在 \hat{r}^0 方向, 在右侧由指向 \hat{r}^0 方向为 0.
第一次 1 次为 P_1]

柱外半径磁场 $\vec{B}_e = \vec{B}_{0e} + \vec{B}_{1e}$, B_{1e} 为常数, $B_{1e} \sim \frac{1}{r}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \vec{B}_e &= \frac{\partial}{\partial r} (\vec{B}_{0e} + \vec{B}_{1e}) \\ &= 2B_{1e} \frac{\partial \vec{B}_{1e}}{\partial r} \sim 2B_{1e} \left(-\frac{\vec{B}_0}{r}\right) \sim 2B_{1e} \frac{\vec{B}_0}{r} \left(-\frac{1}{r}\right) \\ &\sim -\frac{2\vec{B}_0}{r} \end{aligned}$$

$$\text{柱面 } 2\pi r, r=a. \quad \therefore \frac{\partial}{\partial r} \vec{B}_e = -\frac{2B_{1e}(a)}{a}$$

$$\vec{B}_e \cdot \vec{B}_{ie} = (\vec{B}_{eg} + \vec{B}_q) \cdot \nabla \psi \quad (1\text{处: 不计下})$$

$$= B_{eg} i k \psi + B_q \frac{i}{r} \sin \psi$$

$$= i (k B_{eg} + \frac{1}{r} B_q) c \quad (B_q \text{为常数} \Rightarrow r \text{无关} \Rightarrow r = a \text{处})$$

$$(\frac{K_m(kr)}{K_m(ka)})|_{r=a} = 1, \quad \text{左边 } B_{ie} \sim e^{i(m\varphi + kr)} \cdot \nabla \psi \text{ 右边 } \psi \sim e^{i(m\varphi + ka)}$$

(前两步常数c)

$$(5.10-9) 式 成为 \quad \vec{B}_q = \vec{B}_q^{(a)}$$

$$\xrightarrow{\text{边缘 A 处结果}} \vec{P}_{ia} = \frac{i}{\mu} (k B_{eg} + \frac{m}{a} B_q) c - \frac{B_q^{(a)}}{\mu a} \vec{\xi}_r(a) \quad (5.10-10)$$

(5.5-28) 式:

$\vec{n}_o \cdot \vec{B}_{ie} = \vec{n}_o \cdot [\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_{ie})]$ 由边缘不平行于 \vec{n}_o 且 \vec{e}_r (5.5-28) 式, 化简得边界上 $(\vec{n}_o \cdot \vec{e}_r \vec{e}_r \cdot \vec{B}_{ie} = \vec{e}_r \cdot [\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_{ie})])$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{B}_{ie} = \vec{e}_r \cdot \nabla \psi$$

$$= c k \frac{K_m'(kr)}{K_m(ka)} e^{i(m\varphi + ka)}$$

$$\vec{e}_r \cdot [\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_{ie})] = \vec{e}_r \cdot [\nabla \times (\vec{\xi} \times (\vec{B}_{eg} + \vec{B}_q))] \\ = \vec{e}_r \cdot [\vec{\xi} \nabla \cdot \vec{B}_{eg} - \vec{B}_{eg} \nabla \cdot \vec{\xi} + (\vec{B}_{eg} \cdot \nabla) \vec{\xi} - (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_{eg} \\ + \vec{\xi} \nabla \cdot \vec{B}_q - \vec{B}_q \nabla \cdot \vec{\xi} + (\vec{B}_q \cdot \nabla) \vec{\xi} - (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_q]$$

$(\nabla \vec{\xi} = 0, \vec{B}_{eg} = \text{const.})$

$$\vec{e}_r \cdot [\vec{B}_{eg} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} (\vec{\xi}_r(r) \vec{r}^\circ + \vec{\xi}_q(r) \vec{q}^\circ + \vec{\xi}_g(r) \vec{g}^\circ) e^{i(m\varphi + kr)} \\ + \vec{e}_r \cdot \vec{B}_q \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{\xi}_r(r) \vec{r}^\circ + \vec{\xi}_q(r) \vec{q}^\circ + \vec{\xi}_g(r) \vec{g}^\circ) e^{i(m\varphi + kr)} \\ - \vec{e}_r \cdot \vec{\xi}_r \frac{\partial}{\partial r} \vec{B}_q(r) \vec{q}^\circ e^{i(m\varphi + kr)} \quad (\vec{B}_q = \vec{B}_q(r) \Rightarrow q, r \text{无关})]$$

$\exists r = a \sqrt{t}$

$$\vec{r} = i(kB_{\text{ex}} + \frac{m}{a}B_{\phi})\vec{\xi}_r(a) e^{i(m\phi + k\theta)}$$

$\rightarrow \vec{r} \propto$
 $(k^2 B_i)$

$$\rightarrow i(kB_{\text{ex}} + \frac{m}{a}B_{\phi})\vec{\xi}_r(a) = C k \frac{K'_m(ka)}{K_m(ka)} \quad (5.10-12)$$

$$\vec{\xi}_r(a) = \frac{k}{\omega^2 p_0 - \frac{k^2 B_i^2}{\mu}} \tilde{p}(a) \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \quad (5.10-6) \quad ①$$

$$\tilde{p}(a) = \frac{i}{\mu} (kB_{\text{ex}} + \frac{m}{a}B_{\phi}) C - \frac{B_{\phi}^2(a)}{\mu a} \vec{\xi}_r(a) \quad (5.10-10) \quad ②$$

$$i(kB_{\text{ex}} + \frac{m}{a}B_{\phi}) \vec{\xi}_r(a) = C k \frac{K'_m(ka)}{K_m(ka)} \quad (5.10-12) \quad ③$$

$$\text{由 } ③ \text{ 且 } C = \frac{i(kB_{\text{ex}} + \frac{m}{a}B_{\phi}) K_m(ka) \vec{\xi}_r(a)}{k K'_m(ka)} \quad ④$$

$$④ \rightarrow ② \quad \tilde{p}(a) = \left[- \frac{(kB_{\text{ex}} + \frac{m}{a}B_{\phi})^2 K_m(ka)}{\mu k K'_m(ka)} - \frac{B_{\phi}^2(a)}{\mu a} \right] \vec{\xi}_r(a) \quad ⑤$$

$$⑤ \rightarrow ① \quad \vec{\xi}_r(a) = \frac{k}{\omega^2 p_0 - \frac{k^2 B_i^2}{\mu}} \cdot \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \cdot \left[- \frac{(kB_{\text{ex}} + \frac{m}{a}B_{\phi})^2 K_m(ka)}{\mu k K'_m(ka)} - \frac{B_{\phi}^2(a)}{\mu a} \right] \vec{\xi}_r(a)$$

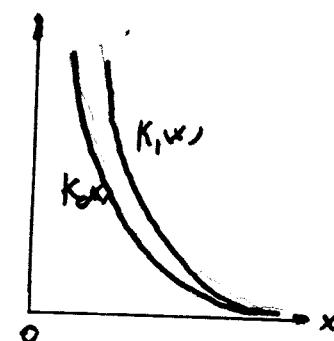
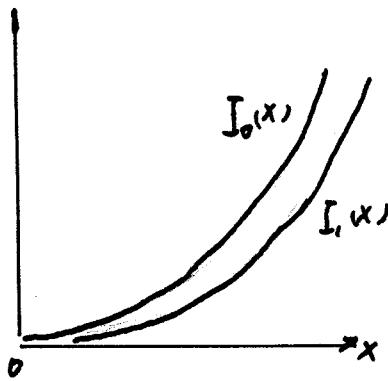
由 $\vec{r} \propto \vec{B}_i$

$$\mu p_0 \omega = k^2 B_i^2 - (kB_{\text{ex}} + \frac{m}{a}B_{\phi})^2 \frac{I'_m(ka) K_m(ka)}{I_m(ka) K'_m(ka)} - \frac{k B_{\phi}^2}{a} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \quad (5.10-13)$$

$B_i \propto B_{\phi}$

稳定条件是 $\omega^2 > 0$. 由散失角 (5.10-13) 式可知第一次为心起稳定作用. 因为柱内不转动变形时, 磁力线伸长, 产生恢复力.

(注意 $I_m(x)$ 和 $K_m(x)$ 的意义).



可以看出 $K_m/K_0 < 0$, $I_m/I_0 > 0$. 即心第一次也为心.

与 B_{eg} 和 B_q 有关, 均为柱外磁场. 因此心第一次等于柱外磁力线的形状. 如果 $\vec{k} \cdot \vec{B} = k B_{eg} + \frac{m}{a} B_q = 0$, 即 扰动螺旋论

$$|k| = \frac{2\pi m}{R} \quad (5.10-14)$$

等价磁力线螺旋论 $k_B = 2\pi r \frac{B_{eg}}{B_q} \quad (5.10-15)$

如果 k 为零, 这时柱外磁场不垂直, 因而不满足稳定作用. 扰动会继续发展, 引起螺旋不稳定性.

右边第一次总为负. 与柱向 (2.4) 场有关, 因为该场的磁力线总呈凹向等离子体. 心不稳定的因素

④ 不稳定三种情况

4.1 $B_{eg} = 0$

柱外真空中没有磁场, 且 $m=0$. 该模式的色散关系为

$$\omega^2 = \frac{B_0^2 k^2}{\mu_0 \rho_0} \left[1 - \frac{B_q}{B_0} \frac{1}{ka} \frac{I'_0(ka)}{I_0(ka)} \right] \quad (5.10-16)$$

由(5.10-16)式可知中第2次 取最大值时，高阶稳定，只算1次
差值稳定。令 $x = ka$ ，则 $\frac{I_0'(x)}{x I_0(x)}$ 为极大值，它等于 $\frac{1}{2}$

i.e. 方便起见，取 $x \rightarrow \infty$ 时的渐近表达式

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad I_0'(x) = \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}} - \frac{e^x}{(8\pi)^{1/2} x^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{I_0'(x)}{x I_0(x)} \right] = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0, \text{ 得: } x=1 \text{ 时有极值}$$

$$\text{代入 } \frac{I_0'(x)}{x I_0(x)} = \frac{2x-1}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

稳定条件是: $1 - \frac{\beta_\phi^2}{\beta_0^2} \frac{I_0(ka)}{ka I_1(ka)} > 0$

$$\frac{\beta_\phi^2}{\beta_0^2} < 2$$

$$\beta_0^2 > \frac{1}{2} \beta_\phi^2 \quad (5.10-17)$$

而涉及对偶场的稳定性 ($m=0$) 稳定。

$\exists m=1$

色散关系 (5.10-13) 式成为 (i) $|k| > R$, $\beta_{0y} = 0$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\beta_0^2 k^2}{\mu \rho_0} \left[1 - \frac{\beta_\phi^2}{ka \beta_0^2} \left(\frac{I_1(ka) K_1(ka)}{ka I_1(ka) K_1'(ka)} + \frac{I_1'(ka)}{I_1(ka)} \right) \right] \\ &= \frac{\beta_0^2 k^2}{\mu \rho_0} \left[1 - \frac{1}{ka} \frac{\beta_\phi^2}{\beta_0^2} \cdot \frac{I_1(ka) K_1(ka) + ka I_1'(ka) K_1'(ka)}{ka I_1(ka) K_1'(ka)} \right] \end{aligned}$$

$$K_1'(x) = -K_{1-1}(x) - \frac{1}{x} K_0(x) \quad (K_{1-1}'(x) = -K_0(x) - \frac{1}{x} K_1(x))$$

代入上式后有

$$\omega^2 = \frac{\beta_0^2 k^2}{\mu \rho_0} \left[1 + \frac{\beta_\phi^2}{\beta_0^2} \frac{I_1(ka) K_1(ka)}{ka I_1(ka) K_1'(ka)} \right] \quad (5.10-18)$$

$$\frac{I_1'}{I_1} > 0, \quad \frac{K_0(ka)}{K_1'(ka)} < 0, \quad \therefore \text{ 扰动第2次为负}$$

这样当 $ka \gg 1$ 时, $\omega^2 > 0$ (长波运动)

而当 $ka \rightarrow 0$ 时, $\omega^2 < 0$ (短波运动)

当 $ka \rightarrow 0$ 时, (5.10-18) 式第二次利用下面各式可简化.

$$I_1'(x) = I_0(x) - \frac{1}{x} I_1(x)$$

$$K_1'(x) = -K_0(x) - \frac{1}{x} K_1(x)$$

$$K_0(x) = \ln \frac{2}{x} \quad (x \rightarrow 0)$$

$$K_1(x) = \frac{P_{11}}{x} = \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow 0)$$

$$I_0(x) = \frac{1}{P_{11}} = 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2P_{11}} = \frac{x}{2} \quad (x \rightarrow 0)$$

代入后, 由 (5.10-18) 式利用 $ka \rightarrow 0$ 得 $\omega^2 \approx 0$

$$\frac{I_1'(x) K_0(x)}{x I_1(x) K_1'(x)} \approx -\ln \frac{2}{x}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{\beta_i^2 R^2}{\mu_0 \rho_0} \left[1 - \frac{\beta_q^2}{\beta_i^2} \ln \frac{2}{ka} \right] \quad (5.10-19)$$

可见, 取 $\beta_q = \beta_i$, $\left[1 + \frac{1}{\pi} \beta_i^2 + \frac{1}{\pi} \beta_q^2 \right]$, $P=0$ 时 $\omega^2 \approx 0$. $\because ka \rightarrow 0$

$\ln \frac{2}{ka} \gg 0$, $\omega^2 \approx 0$ 为长波运动

\therefore 对于 $m=1$ 的长波运动, 简谐振动不明显.

④.2 $\beta_{eq} \gg \beta_q$

$\underbrace{\beta_{eq} \gg \beta_q \text{ 时}}$

前已指出色散关系的第二次修正, 有利于稳定. 同上节所取

引起不稳定性长波运动之 $(\beta_{eq} + \frac{m}{a} \beta_q \approx 0)$, 以 $m=1$ 时

\therefore 考虑长波时 $ka \ll 1$.

利用 $x \rightarrow 0$ 时的近似式

$$I_m(x) = \frac{x^m}{2^m \Gamma(m+1)}, \quad K_m(x) = \frac{2^{m-1} \Gamma(m)}{x^m}$$

$$\text{由定义} \quad I_m'(x) = I_{m-1}(x) - \frac{m}{x} I_m(x)$$

$$K_m'(x) = -K_{m-1}(x) - \frac{m}{x} K_m(x)$$

$$\text{证明} \quad \frac{I_m'(x)}{I_m(x)} = \frac{I_{m-1}(x)}{I_m(x)} - \frac{m}{x} = \frac{m}{x} = \frac{m}{ka} \quad [I_{m+1}(x) = m I_m(x)]$$

$$\frac{K_m'(x)}{K_m(x)} = -\frac{K_{m-1}(x)}{K_m(x)} - \frac{m}{x} = -\frac{m}{x} = -\frac{m}{ka}$$

代入(5.10-13)式

$$\mu_0 P_0 \omega^2 = B_i^2 R + \left(k B_{eq} + \frac{m}{a} B_q \right)^2 - \frac{m}{a} B_q^2 \quad (5.10-2b)$$

若 ω^2 为负数，则 $\frac{\partial \omega^2}{\partial R} = 0$

$$\therefore R = -\frac{m}{a} \cdot \frac{B_{eq} B_q}{(B_{eq}^2 + B_i^2)} \quad \text{即} \quad \omega^2 \text{ 为负数}$$

$$\omega_{min}^2 = \frac{B_q^2}{\mu_0 P_0 a^2} \left(\frac{m^2 B_i^2}{B_{eq}^2 + B_i^2} - m \right) \quad (5.10-27)$$

利用平衡条件

$$P + \frac{1}{2\mu_0} B_i^2 = \frac{1}{2\mu_0} B_{eq}^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_q^2 \quad \text{即} \quad \beta = \frac{P}{\frac{1}{2\mu_0} (B_{eq}^2 + B_q^2)}$$

$$1 - \beta = \frac{B_i^2}{B_{eq}^2 + B_q^2} \approx \frac{B_i^2}{B_{eq}^2} \quad (\text{本节} \quad \text{if} \quad B_{eq} \gg B_q)$$

$$\omega_{min}^2 = \frac{B_q^2}{\mu_0 P_0 a^2} m \left(m \frac{B_i^2}{B_{eq}^2 + B_i^2} - 1 \right) \quad (\text{考虑内摩擦系数} \quad \text{除以} \quad B_{eq}^2)$$

$$= \frac{B_q^2}{\mu_0 P_0 a^2} m \left(m \frac{1 - \beta}{2 - \beta} - 1 \right) \quad (5.10-28)$$

m 为振动数，相位角 ϕ 为第 n 阶 $m \geq 0$

$$\therefore 0 < m < \frac{2 - \beta}{1 - \beta} \quad \text{即} \quad \omega_{min}^2 < 0 \quad (m=0, \text{无意义})$$

即低 β 时 (等离子体无电流), $m=1$ 模是稳定的. 不论 $B_{\theta z}$ 多大 ($B_{\theta z} \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0$), 线性长波稳定性 $\omega - \omega_m = 1 \ll \frac{1}{R} \omega_0$ (因为 $\alpha \ll 1$) 扰动是不稳定的.

对于有限长的磁流注, 扰动波长 λ 可能大于柱长 L : $\lambda > \frac{\pi}{k_\theta}$. 由 (5.10-2b) 式可知, 对于 $m=1$ 模的稳定性条件为

$$B_z^2 k_\theta^2 + (k B_{\theta z} + \frac{1}{a} \partial_\theta q)^2 - \frac{1}{a^2} B_q^2 > 0$$

$$k^2 B_z^2 + k B_{\theta z} (k B_{\theta z} + \frac{1}{a} \partial_\theta q) > 0$$

$$\text{以及 } \beta \neq 0 \Rightarrow B_z \approx B_{\theta z} \equiv B_\theta$$

(P&O)

$$2k B_\theta > -\frac{1}{a} B_q$$

$$-\frac{B_q}{B_\theta} < ka \quad (5.10-2g)$$

如果 $\frac{B_q}{B_\theta} > 0$, 上述不等式是成立的. 若 $\frac{B_q}{B_\theta} < 0$, 则上式变为

$$\left| \frac{B_q}{B_\theta} \right| < ka \quad (5.10-2g_a)$$

此即稳定性条件. 对于长波 $L \gg \text{磁流注半径}$

$$B_\theta = B_z + B_{\theta z} \quad \left| \frac{B_q}{B_\theta} \right| < \frac{2\pi a}{L} \quad h = \frac{2\pi a B_\theta}{B_q}, \quad (5.10-2g_b) \quad \text{即 } \frac{h}{L} > 1 \quad \text{稳定, 定义 } q = \frac{h}{L}$$

即磁力线与半径不垂直不稳定的且为稳定 $-1 < q < 1$.

这就是强磁场中等离子体磁流注对螺钉式不稳定性的稳定性条件.

(Kruskal-Shafranov 条件) 对于平行场, 十字形 $a \ll R$, 且 $k_\theta \ll 1$
 $\frac{B_q}{B_\theta} = \frac{2\pi a}{L} \leq \frac{2\pi a}{R} \leq \frac{2\pi a}{a} = 2\pi$ (5.10-2g)
 Priest 表达式是正确的

$$\frac{B_\theta}{B_\theta} < \frac{1}{2} \cdot a$$

$$\text{且 } q < \frac{a}{R} \frac{B_\theta}{B_q} > 1$$

(P&O) ① The kink instability cannot be stabilised by superposing an axial field outside the plasma column, since a helical perturbation of the above form is unstable provided wavelength ($\sim \frac{2\pi}{k}$) is long enough that $\frac{B_q}{R} + k B_\theta \geq 0$ In other words, the perturbation and the vacuum field have the same pitch namely $\geq \pi a \frac{B_\theta}{B_q}$.

1. 对 $B_{\theta z}$, $m=1$ 时, 不论 $B_{\theta z}$ (等离子体无电流) 多大, 对螺钉式不稳定的稳定性

长波稳定

2. (5.10-13) 式 第二次为 0, 由于轴对称磁力线的中性点。

$$\text{记波数 } \vec{k} = (0, \vec{a}', k)$$

$$\text{且 } \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 = k B_{\theta} + \frac{1}{a} B_{\varphi}$$

$$\text{得 } \frac{B_{\theta}}{B_{\varphi}} = -\frac{1}{ka}, \quad \text{磁螺距为 } L_B = 2\pi a \left| \frac{B_{\theta}}{B_{\varphi}} \right| = \frac{2\pi}{k} = \zeta \quad (\text{扭动螺旋})$$

即为 $\zeta = \frac{B_{\theta}}{B_{\varphi}}$
 k 为入

注 扭动螺旋 = 磁力线螺旋时, $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$. 第二次消失, 即 $B_{\theta} = 0$, 不再有 B_{θ} 变化, 不能维持稳定, 扭动螺旋会驱动不稳定性。

③ the above criterion may be written in terms of $\bar{\Phi} = \frac{2LB_{\varphi}}{R B_{\theta}}$

for any twist, the flux tube is unstable to a helical kink with wavenumber

$$k \geq -\frac{\bar{\Phi}}{2L} \quad (7.59)$$

$$(7.59) \text{ 式 即为 (5.10-29)} \quad \therefore \quad (7.59) \text{ 中 } R = a \bar{\Phi} / \lambda, \text{ 即 (5.10-29)}$$

③ 关于电流流分布直线磁场问题可参考“等离子体物理” §5.11

7.5.2 横裂不稳定

考慮无限扩展的片电流插縮，片电流在外面产生均匀磁场

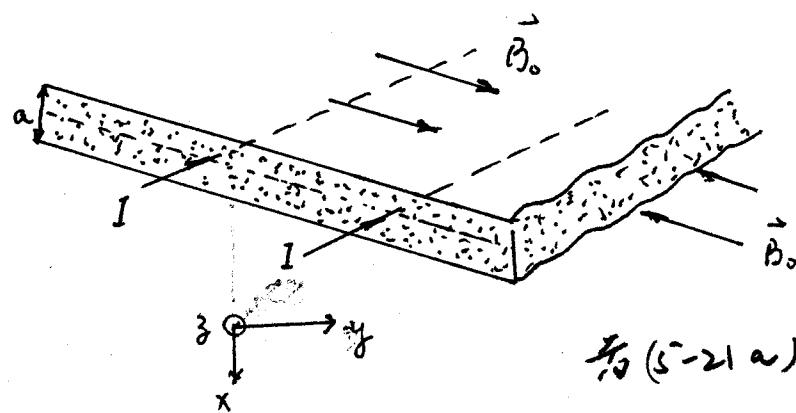


图 5-21a

以前讨论的 MHD 不稳定性，均为理想流体 $\sigma \rightarrow \infty$ 。现在则考虑有限电导率，由此引起不稳定性。所谓横裂不稳定性，形式如若

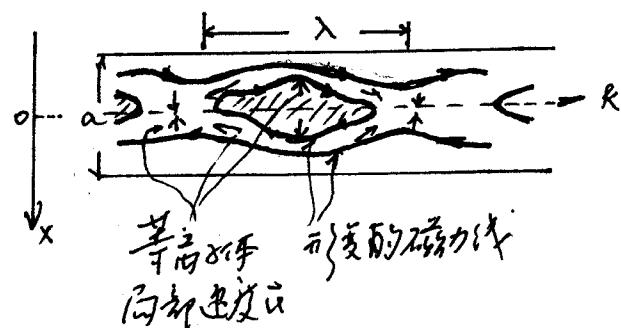


图 5-21b

设沿 y 方向上无限扩展的片电流 I 沿 z 轴方向流动 (图 5-21a)
这个电流在片的中心部分 ($x=0$ 处) 上下产生沿 z 轴方向相反的磁场，幅度等离子体，达到平衡态，由既定的定常

$$\vec{E}_1 + \vec{u}_1 \times \vec{B}_0 = \gamma \vec{j}_1 \quad (5-13-15)$$

可见，在 $x \approx 0$ 中心附近， $\vec{B}_0 \sim 0$ ，电阻有重要作用，而离中心较远处（下标 “1” 为扰动量） $\vec{u}_1 \times \vec{B}_0$ 较大，可将等离子体看成理想导电，因此可将片电流分成三个区域

电阻性区域 $|x| < \epsilon$ (内区)

无电阻区域 $a > |x| > \epsilon$ (外区)

若电阻区里有扰动 $B_{1x} \sim B_{1x}(x) e^{i(wt+ky)}$ (\vec{k} 沿 z 方向)

由 $\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial x}$ 且 \vec{E}_1 垂直于 $(y-x)$ 及 $(z-x)$ 平面上的电场

$$i \vec{k} \times \vec{E}_1 = i k \vec{E}_1 \vec{B}_1 (-\vec{x}) = -i \omega B_{1x} \vec{x}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\omega}{k} B_{1x}$$

无电阻区 $B_0 \sim 0$ $\therefore \vec{E}_1 = \eta \vec{j}_1$ 产生电流 j_1

j_1 和 B_0 产生的 Lorentz 力 \vec{F}_{L} 使运动方向和运动方向 (运动速度 B_{1x} 和 \vec{x} 方向) 相同

故此平行电流持续，成为 $5-21$ 所示形状。

同样计算不稳定的增长率为 γ ，磁感应

无电阻情况下，由 $\vec{E}_1 = \eta \vec{j}_1$ 及 Maxwell 方程可得

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial x} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B}_1 \quad \text{电阻率}$$

对于 $B_{1x} \sim B_{1x}(x) \exp(i k x)$ 式代入波动方程化为

$$\frac{d^2 B_{1x}}{dx^2} - \left(k^2 + \frac{\gamma \mu_0}{\eta} \right) B_{1x} = 0$$

$$\text{解得 } B_{1x} \sim C \cosh \left(kx + \sqrt{\frac{\gamma \mu_0}{\eta}} \right) \quad (5-3-18)$$

$[y - z]$ $\sim \sinh \left(kx + \sqrt{\frac{\gamma \mu_0}{\eta}} \right) \quad \text{且满足 } x = \pm \infty \text{ 时 } B_{1x} = 0$
(Hasegawa)

无电阻区 (光速区) $\vec{E}_1 + \vec{u}_1 \times \vec{B}_0 = 0$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial x}$$

$$\nabla \times (\vec{u}_1 \times \vec{B}_0) = \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial x}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \nabla \cdot \vec{B}_0 - \vec{B}_0 \cdot \nabla \cdot \vec{u}_1 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{u}_1$$

$$= B_0 \frac{\partial}{\partial x} u_{1x}(x) e^{(kx + ikx)}$$

$$= i k B_0 u_{1x}$$

(无电阻区， $\vec{B}_0 = \vec{B}_{0xx} \sim \text{常数}$)

$$ikB_0U_{,x} = \gamma B_{,x}$$

为了联立 $U_{,x}$ 和 $B_{,x}$ 的方程，从运动方程和 Maxwell 方程组得

$$\int_0^l \frac{D\vec{U}}{Dx} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla P$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

对运动方程取方差，假定高斯体不压缩 $\nabla \cdot \vec{U} = 0$ ，则 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

由 2 章得

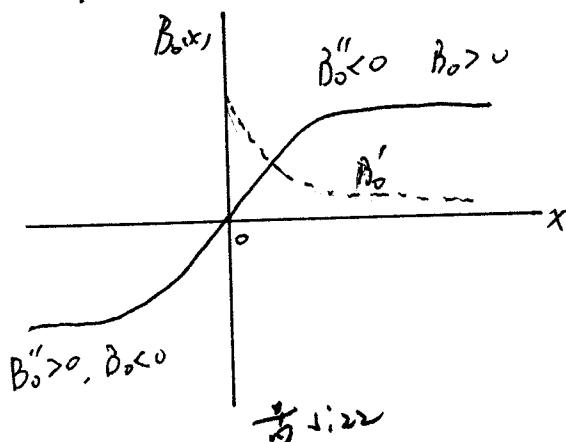
由假设和 1.1 得 $\frac{d^2 B_{,x}}{dx^2} - \left(k^2 + \frac{B_0''}{B_0} \right) B_{,x} = \frac{\gamma^2}{k^2 V_x} \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) \frac{B_{,x}}{B_0}$ (5.13-20a)

(5.13-20a)
对 3 $\gamma^2 \ll k^2 V_x + B_0''$ 。简化

$$\frac{d^2 B_{,x}}{dx^2} - \left(k^2 + \frac{B_0''}{B_0} \right) B_{,x} = 0 \quad (5.13-20b)$$

$B_0 = B_0(x)$, γ 常数。 $B_0'' = \frac{d^2 B_0}{dx^2}$,

对 1.7 末节 $|x| \leq a$ 的非均匀片电流，由 5.1.2 可见， B_0''/B_0 为负



$$\frac{1}{2} \frac{B_0''}{B_0} = -\lambda^2$$

(5.13-20b) 变成 $\frac{d^2 B_{,x}}{dx^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - k^2 \right) B_{,x} = 0 \quad (5.13-21)$

当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时，有解

$$B_{,x} = C \sin \left(\frac{1}{\lambda^2} - k^2 \right)^{\frac{1}{2}} x \quad (5.13-22)$$

$|x| < \varepsilon$ 时 $\lambda^2 \gg 1$ ，由 (5.13-18)。当 $x = \varepsilon$ 时得

$$r = \frac{\gamma}{\epsilon^2 \mu_0} \quad (5.13-23)$$

(5.13-20b) 式的推导:

为简化起见, 设电流片在 $x-y$ 平面上 - 高度 $h=120$ 米处
磁感应强度为常数, 平衡时, 所有物理量 \vec{B}_0, P, ρ 与 x 有关于 x .

建立小扰动线性化处理后, 运动方程

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_1, \quad \eta_m = \frac{1}{\mu c} \text{ 磁扩散系数}$$

若用 $-i\vec{\xi}$ 表示流体质点的位移, 则 $\vec{v}_1 = -i \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$. 考虑

$x-y$ 平面内运动形式为

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_0(x) e^{ikx + i\gamma t}$$

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(x) e^{ikx + i\gamma t}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} = i\gamma, \quad \frac{\partial}{\partial x} = ik, \quad \text{没有 } \hat{k} \text{ 分量}$$

$$\vec{v}_1 = -i\gamma \vec{\xi}.$$

对运动方程取实部, 可得 P .

$$-i\gamma \nabla \times (\rho_0 \vec{\xi}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times [(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1] + \frac{1}{\mu} \nabla \times [(\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0] \quad (a)$$

$$\text{右边第 } -2 \text{ 项} = \frac{1}{\mu} [(\nabla \times \vec{B}_0) \cdot \vec{B}_1 - \vec{B}_1 \cdot \nabla \times \vec{B}_0 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \nabla \times \vec{B}_0 - (\nabla \times \vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1]$$

$$\text{其中 } (\nabla \times \vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 = \left[\left(\frac{\partial B_{0y}}{\partial y} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial z} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial B_{0x}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0y}}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \cdot \nabla \vec{B}_1$$

$$\text{由于 } x \text{ 为坐标} \quad B_{0x} = 0, \quad B_{0y} = 0, \quad B_{0z} = 0 \quad \text{且 } \partial B_{0y} / \partial z \neq 0$$

$$= \frac{\partial B_{0y}}{\partial z} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \vec{B}_1 = \vec{B}_1(x, y, t)$$

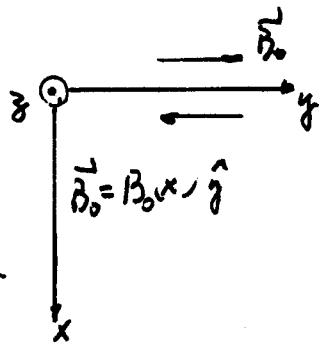
$$(a) \text{ 式 右边第 } 2 \text{ 项} = \frac{1}{\mu} [(\nabla \times \vec{B}_1) \cdot \vec{B}_0 - \vec{B}_0 \cdot \nabla \times \vec{B}_1 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \nabla \times \vec{B}_1 - (\nabla \times \vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0]$$

$$= \frac{1}{\mu} [(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \nabla \times \vec{B}_1 - (\nabla \times \vec{B}_1) \cdot \nabla \vec{B}_0]$$

$$\text{其中 } (\nabla \times \vec{B}_1) \cdot \nabla \vec{B}_0 = \left[\left(\frac{\partial B_{1y}}{\partial y} - \frac{\partial B_{1z}}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial B_{1z}}{\partial z} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial B_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1y}}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \cdot \nabla \vec{B}_0$$

$$(x, y, z) \text{ 为 } \vec{B}_{1y} = B_{1y}(x, y)$$

$$= \left(\frac{\partial B_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} B_{0z} = 0$$



$$\therefore -i\gamma^2 \nabla \times (\rho_0 \vec{\xi}) = \frac{1}{\mu} [(\vec{B}_1 \cdot \nabla) \nabla \times \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \nabla \times \vec{B}_1] \quad (b)$$

$$\text{式中 } (\vec{B}_1 \cdot \nabla) (\nabla \times \vec{B}_0) = \vec{B}_1 \cdot \nabla \left[\left(\frac{\partial B_{0x}}{\partial y} - \frac{\partial B_{0y}}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} \right) \hat{k} \right]$$

$$= (B_{1x} \frac{\partial}{\partial x} + B_{1y} \frac{\partial}{\partial y}) \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} \hat{k} \quad (B_{1y} = B_0(x) \text{ 沿 } \hat{y} \text{ 方向})$$

$$= B_{1x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_0(x) \hat{k}$$

$$(\vec{B}_0 \cdot \nabla) (\nabla \times \vec{B}_1) = (B_0 \frac{\partial}{\partial y}) \left(\frac{\partial B_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$= B_0 \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} - (ik) B_{1x} \right] \hat{k}$$

$$= B_0 \left[- \frac{\partial^2 B_{1x}}{\partial x^2} + k^2 B_{1x} \right] \hat{k} \quad \because \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0, \frac{\partial B_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{1y}}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial B_{1y}}{\partial y} = - \frac{\partial B_{1x}}{\partial x}$$

(b) 式 T₁₂ = 2k² i $\int n dk$

$$\frac{1}{\mu} \left[B_{1x} \frac{\partial^2 B_0(x)}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial^2 B_{1x}}{\partial x^2} + k^2 B_{1x} B_0 \right] \hat{k} = -\frac{1}{\mu} B_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 - \frac{1}{B_0} \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} \right] B_{1x} \hat{k} \quad (c)$$

(b) 式 T₂₁:

$$-i\gamma^2 \nabla \times (\rho_0 \vec{\xi}) = -i\gamma^2 [\nabla \rho_0 \times \vec{\xi} + \rho_0 \nabla \times \vec{\xi}] , \quad \rho_0 = \rho_0(x), \vec{\xi} = \vec{\xi}(x, y) = \xi_x \hat{i} + \xi_y \hat{j}$$

$$= -i\gamma^2 \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial x} \hat{i} \times \vec{\xi} + \rho_0 \left\{ \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial y} - \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial y} \right) \hat{k} \right\} \right]$$

$$= -i\gamma^2 \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial x} \xi_y + \rho_0 \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial x} - ik \xi_x \right) \right] \hat{k}$$

$$= -i\gamma^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (\xi_y \rho_0) - ik \rho_0 \xi_x \right] \hat{k}$$

$$\therefore \frac{\partial \xi_y}{\partial y} = ik \xi_y, \therefore \xi_y = \frac{1}{ik} \frac{\partial \xi_y}{\partial y}, \nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial \xi_z}{\partial y} = \nabla \cdot \vec{\xi} - \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \quad \text{即 } \xi_y = \frac{1}{ik} \left(\nabla \cdot \vec{\xi} - \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right) \text{ 代入式}$$

$$\begin{aligned} \text{式} &= -i\gamma^2 \left[\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \left(\nabla \cdot \vec{\xi} - \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right) \right) - ik \rho_0 \xi_x \right] \hat{k} \\ &= \frac{\gamma^2}{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho_0 \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \nabla \cdot \vec{\xi} \right) \right\} - k^2 \rho_0 \xi_x \right] \hat{k} \end{aligned} \quad (d)$$

$$(c) \vec{z} = (d) \vec{z}$$

$$\mu \gamma^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ B_0 \left(\frac{\partial \vec{\xi}_x}{\partial x} - \nabla \cdot \vec{\xi} \right) \right\} - k^2 B_0 \vec{\xi}_x \right] = -k B_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 - \frac{1}{B_0} \frac{d^2 B_0}{dx^2} \right] B_{1x} \quad (e)$$

Furth et al. (Phys. Fluids, 6, 459, 1963) 計算 壓縮性效應時，
对于等離子模可忽略電荷考慮，即無 $\nabla \cdot \vec{\xi}$ ，方程(e)變成：

$$\mu \gamma^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(B_0 \frac{\partial \vec{\xi}_x}{\partial x} \right) - k^2 B_0 \vec{\xi}_x \right] = -k B_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 - \frac{1}{B_0} \frac{d^2 B_0}{dx^2} \right) B_{1x} \quad (f)$$

1) 不動狀態極化後的磁感應方程為：

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 &= -i \gamma \vec{\xi} \times B_0 \vec{j} = -i \gamma (\vec{\xi}_x \vec{i} + \vec{\xi}_y \vec{j}) \times B_0 \vec{k} = -i \gamma \vec{\xi}_x B_0 \vec{k} \\ \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) &= \nabla \times \left(-i \gamma \vec{\xi}_x B_0 \vec{k} \right) = -i \gamma \left[\frac{\partial (\vec{\xi}_x B_0)}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial (\vec{\xi}_x B_0)}{\partial x} \vec{j} \right] \\ &\quad \downarrow \text{沒有 } \vec{k} \text{ 分量} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_{1x}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial x} \vec{j} = -i \gamma \frac{\partial (\vec{\xi}_x B_0)}{\partial y} \vec{i} + i \gamma \frac{\partial (\vec{\xi}_x B_0)}{\partial x} \vec{j} + \eta_m \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{B}_1$$

(f) 式中 只考慮 $\vec{\xi}_x, B_{1x}$. ∵ 此式取 \vec{x} 分量就可解，且 $i \gamma \frac{\partial}{\partial x} = k$. $\frac{\partial}{\partial y} = ik$

$$Y B_{1x} = Y k \vec{\xi}_x B_0 + \eta_m \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) B_{1x}$$

$$\text{得 } B_{1x} = k \vec{\xi}_x B_0 + \frac{\eta_m}{Y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) B_{1x} \quad (g)$$

(f) 和 (g) 合成求得 $B_{1x}, \vec{\xi}_{1x}$ 的微分方程組。

考慮 η_m 很小的形狀，即高 Reynolds 數 $R_m = \frac{a V_A}{\eta_m} \gg 1$. 或者考慮
的特征時間 $T_d = \frac{a}{\eta_m} \gg Alfvén 漲落時間$ 的特征時間 $T_A = \frac{a}{V_A}$. a 為
電流密度。 ($\because \frac{a V_A}{\eta_m} \cdot \frac{a^2 V_A}{a} = \frac{T_d}{T_A} \gg 1 \therefore T_d \gg T_A$)

現在，等離子由无限擴展的片電流縮縮。片電流產生的磁場是均
匀的。這種情形和等离子柱在壓縮中由於環向磁場的增加而引
起的不稳定性，或電導率 $\sigma \rightarrow \infty$ ，平行磁場的位形，由於磁壓強和磁場力
的增加，對於因運動引起的挤压，會通過抗壓作用而恢復平衡是
稳定的。

当磁感应强度很大时，若令 $\eta_m \rightarrow 0$ ，就处理甚简单，加上所述理想导体的这种假设之后是稳定的，也就是说在不考虑运动的无限长时间内，所以 $\gamma \rightarrow 0$ 从而 (7) 式直接变为：

$$B_{ix} = R \xi_x B_{0(x)} \quad (7')$$

(7') 式简化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - R^2 - \frac{1}{B_0} \frac{d^2 B_0}{dx^2} \right) B_{ix} = 0 \quad (f')$$

求解 ξ_x 和 B_{ix} 。

外边的许应满足边界条件： $|x| \rightarrow \infty$ 时， $\xi_x \rightarrow 0$ ， $B_{ix} \rightarrow 0$ ，而内部的 f' 应该平衡。设 $x \rightarrow 0$ 时（靠近电化中心附近）， $\xi_x \rightarrow B_{ix} \neq 0$ 。

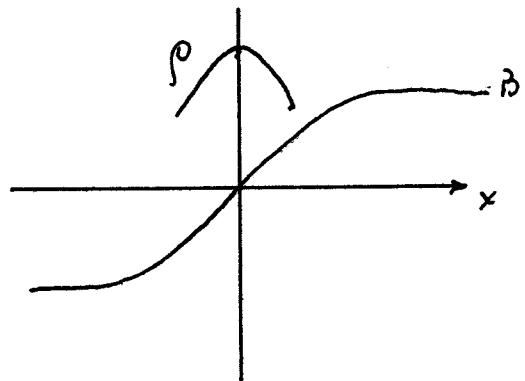
$$\text{由 (7') 式可得 } \xi_x = \frac{B_{ix}}{R B_0}$$

设 ξ_x 和 B_{ix} 的变化和为 ρ 。

$$\vec{B}(x) = B_0 \frac{x}{a} \hat{r}^0, \quad a \text{ 是电化半径}, \quad B_0 \text{ 为常数}$$

$$\text{因此近似有 } \xi_x = \frac{B_{ix}}{R B_0} \approx \frac{B_{ix} a}{R B_0} \cdot \frac{a}{x} \rightarrow \infty$$

$$\text{内凹: } B_{ix} \approx B_{ix0}$$



得到 (f') 式的解件是 $\eta_m = 0$ 时， $\gamma = 0$ 。 (f') 式即 (§: 13-20 b)

可见当电容率 γ 与导磁率 μ 的比值足够大时，由(5.13-21)式可见，为得到此结果需 $\frac{1}{\lambda^2} - k^2 > 0$ ， $k < \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{a}$ ，这种传播性质的扰动波长大于电流波的波长。

注：

$$\text{内部区域 (电容率相同)} \quad B_{,x} \sim C_1 \cosh \left(k \sqrt{\frac{\gamma \mu}{\eta}} x \right) \quad (5.13-18)$$

$$\text{外区 (电容率不同)} \quad B_{,x} \sim C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - k^2} x \right) \quad (5.13-22)$$

$$\text{得到传播条件} \frac{1}{\lambda^2} - k^2 > 0, \quad k < \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{a}$$

$$\text{在边界 } x=\varepsilon \quad (5.13-18) = (5.13-22)$$

$$(5.13-22) \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} \approx \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon}{\cosh \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon}, \quad \varepsilon \approx \varepsilon$$

$$C_2 \sin \frac{\varepsilon}{\lambda} = C_1 \cosh \left(\frac{\gamma \mu}{\eta} \right) \varepsilon \quad (1)$$

$\because \varepsilon < a$ 且有

$$C_2 \frac{\varepsilon}{\lambda} = C_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma \mu}{\eta} \varepsilon^2 \right)$$

$$2 \left(\frac{C_2 \varepsilon}{C_1 \lambda} - 1 \right) = \frac{\gamma \mu}{\eta} \varepsilon^2$$

$$\gamma \approx \frac{\eta}{\varepsilon \mu}$$

注意： $\sin x \approx x$ 为 1， $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$ 为 1。由此得 ε 有关，即

$$T_A \quad C_2 > C_1$$

$$\therefore \text{若令 } \gamma = \frac{\eta}{\varepsilon \mu} \text{ 代入 得 } 2 \left(\frac{C_2 \varepsilon}{C_1 \lambda} - 1 \right) = \frac{\gamma \mu}{\eta} \varepsilon^2 = C_2 \frac{\varepsilon}{\lambda} = C_2 \frac{\varepsilon}{a} = C_1 \cosh 1$$

$$= C_1 \frac{e + e^{-1}}{2} \approx 1.5 C_1$$

$$\frac{C_2 \varepsilon}{C_1 a} \approx 1.5$$

7.5.3 指引 2. 稳定性的进一步讨论

当 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, 对于初磁场的不稳定性
磁力线被压扁, (即) 磁场和磁通量而
恢复原来}. 是稳定的

当 $\sigma \neq \infty$ 时, 可能不稳定. 由于电阻的存在
磁场向中心部分扩散, 如再加外行压
则(磁通量) 无法恢复

磁场的耗散, 引起磁通量联. 出现

奇点(涡旋).

下面介绍常见的计算磁流体中的方法
问题的归结化于磁感应方程 $\omega = 2$
都需考虑

之是外部为磁流体, 内部则有电阻耗散.

平衡态时, $\vec{B}_0 = (0, B_0(x), 0)$, $V_0 = 0$, $P_0 = P_0(x)$

小扰动: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$, $\vec{V} = \vec{V}_1$, $P = P_0 + P_1$

$$\nabla \cdot \vec{V}_1 = 0 \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial x} = - \nabla P_1 + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 \\ \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_1 \end{array} \right. \quad (2)$$

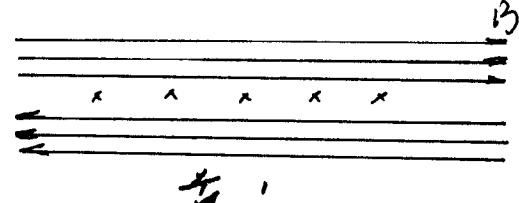
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \\ \nabla \cdot \vec{V}_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

①式可写成:

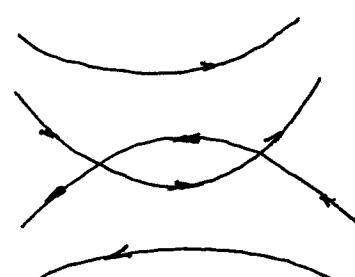
$$\frac{\partial V_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{y1}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$② = 3 \text{ 式: } P_0 \frac{\partial V_{x1}}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial B_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} \right) \frac{B_0}{\mu} \quad (5)$$

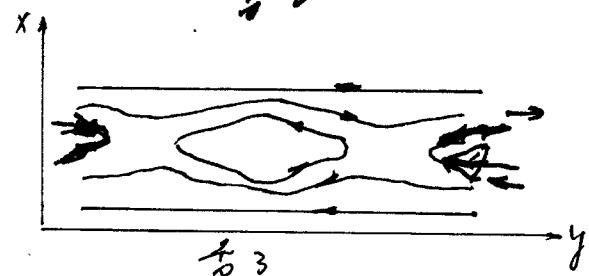
$$P_0 \frac{\partial V_{y1}}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial y} \quad (6)$$



奇 1



奇 2



奇 3

iii 不可压缩

iii = [131] 恒 ($V_x, V_y, 1$)
($B_x, B_y, 1$)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V}_0 = 0 \Rightarrow \vec{j}_0 = 0 \\ B_0 = 0 \\ \therefore \vec{B} = \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{E} \end{array} \right\}$$

$$\vec{j}_1 = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B}_1$$

$$= \frac{1}{\mu} \left[- \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} \hat{j} \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial B_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} \right) \hat{k} \right]$$

N. $P_0 = \text{const.}$

B

$$\vec{V}_1 \times \vec{B}_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ V_{x1} & V_{y1} & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = V_{x1} B_0 \vec{k}$$

$$\nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & V_{x1} B_0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} (V_{x1} B_0) \vec{i} - \frac{\partial}{\partial x} (V_{x1} B_0) \vec{j}$$

③. ② 与 ③ 重合：

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial x} = B_0 \frac{\partial V_{x1}}{\partial y} + \gamma_m \left(\frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial y^2} \right) \quad ⑧$$

$$\frac{\partial B_{y1}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (B_0 V_{x1}) + \gamma_m \left(\frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial y^2} \right) \quad ⑨ \quad (B_0 \ll x \ll \lambda)$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial B_{y1}}{\partial y} = 0 \quad ⑩$$

假设扰动量

$$\begin{pmatrix} B_{x1} \\ V_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_{x1}(x) \\ \bar{V}_{y1}(x) \end{pmatrix} e^{i\omega t} \sin ky$$

$$\begin{pmatrix} B_{y1} \\ V_{x1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_{y1}(x) \\ \bar{V}_{x1}(x) \end{pmatrix} e^{i\omega t} \cos ky$$

δ 为扰动量
部分地近似
电流片厚度为 δ ，假设 $k \ll 1/\delta$ 且 $k\delta \ll 1$

由 ⑤、⑨ 式 1 项

$$\frac{d\bar{V}_{x1}}{dx} + k\bar{V}_{y1} = 0 \quad ⑪$$

$$\frac{d\bar{B}_{x1}}{dx} - k\bar{B}_{y1} = 0 \quad ⑫$$

$$\text{电流片内 } \frac{d\bar{V}_{x1}}{dx} \approx \frac{\bar{V}_{x1}}{\delta}, \quad \frac{d\bar{B}_{x1}}{dx} \approx \frac{\bar{B}_{x1}}{\delta}$$

$$\text{由 ⑪ 式 1 项: } |\bar{V}_{x1}| \approx k\delta |\bar{V}_{y1}|, \quad |\bar{V}_{y1}| \ll |\bar{V}_{x1}| \quad ⑬$$

$$\text{由 ⑫ 式 1 项: } |\bar{B}_{x1}| \approx k\delta |\bar{B}_{y1}|, \quad |\bar{B}_{y1}| \ll |\bar{B}_{x1}| \quad ⑭$$

所以电流片中的运动能量 $\frac{1}{2} \rho \bar{V}_{y1}^2$ 为零。不考虑 $\rightarrow \mu$ 为零

⑤式 = 由來 $\rightarrow V_{x_1}$ (是)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} (V_{x_1})^2 = -V_{x_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial B_{y_1}}{\partial x} - \frac{\partial B_{x_1}}{\partial y} \right) \frac{\rho_0}{\mu} V_{x_1}$$

⑦式 = 由來 V_{y_1} (是)

$$\frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} (V_{y_1})^2 = -V_{y_1} \frac{\partial p_1}{\partial y}$$

$$\text{相加: } \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \rho_0 (V_{x_1}^2 + V_{y_1}^2) \right] = - \left(V_{x_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} + V_{y_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial B_{y_1}}{\partial x} - \frac{\partial B_{x_1}}{\partial y} \right) \frac{\rho_0}{\mu} V_{x_1}$$

在 $\lambda \ll \delta$ 之高頻近似下. ($T \approx 0$)

$$\text{上式} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \rho_0 (V_{x_1}^2 + V_{y_1}^2) \right] = - \frac{\rho_0}{\mu} \left(\frac{\partial B_{y_1}}{\partial x} - \frac{\partial B_{x_1}}{\partial y} \right) V_{x_1}$$

$$\text{式中 } \frac{\partial B_{x_1}}{\partial y} \sim \bar{B}_{x_1} k \cos k y \sim \bar{B}_{x_1} \lambda$$

$$\frac{\partial B_{y_1}}{\partial x} \sim \frac{\partial \bar{y}_1}{\delta} \gg \bar{B}_{x_1} \lambda \quad (\because \lambda = \frac{1}{k} \gg \delta)$$

另. 在 $\lambda \ll \delta$ 之高頻近似下. 有 ④ 式 $|\bar{B}_{x_1}| \ll |\bar{B}_{y_1}|$, $\therefore \left| \frac{\partial \bar{B}_{x_1}}{\partial y} \right| \ll \left| \frac{\partial \bar{B}_{y_1}}{\partial x} \right|$
之高頻 ⑤ 式. 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho_0 V_{y_1}^2 \right) = - \frac{\rho_0}{\mu} \frac{\partial \bar{B}_{y_1}}{\partial x} V_{x_1} \quad (15)$$

从 ⑤ 式 算法 13:

$$\frac{\partial \bar{V}_{x_1}}{\partial x} \cos k y + \bar{V}_{y_1} k \cos k y = 0$$

$$\frac{\bar{V}_{x_1}}{\delta} = -k \bar{V}_{y_1}$$

$$\bar{V}_{y_1}^2 = \frac{\bar{V}_{x_1}^2}{(k \delta)^2} \quad (16)$$

(二) 算. 由 16 計算 ⑩ 式

$$\frac{\partial \bar{B}_{x_1}}{\partial x} \sin k y - k \bar{B}_{y_1} \sin k y = 0$$

$$\frac{\partial \bar{B}_{x_1}}{\partial x} = k \bar{B}_{y_1}$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial \bar{B}_{x_1}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{B}_{y_1}}{\partial x}$$

(17)

$$⑯ ⑰ 式代入 ⑮ 式:$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_0 \frac{\bar{V}_{x_1}}{(k\delta)} e^{i\omega t} \right] = - \frac{\rho_0}{\mu} \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2} e^{i\omega t} \cdot \bar{V}_{x_1} e^{i\omega t}$$

$$i\omega \rho_0 \frac{\bar{V}_{x_1}}{(k\delta)^2} = - \frac{\rho_0}{\mu k} \frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2} \bar{V}_{x_1}$$

$$i\omega \bar{V}_{x_1} = - \frac{k\delta^2 \rho_0}{\mu \rho_0} \frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2} \quad . \quad ⑯$$

1.3.3 磁場方程 ⑧ 磁場方程の導出

$$i\omega \bar{B}_{x_1} = -k \bar{V}_{x_1} B_0 + \eta_m \left(\frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2} - k^2 \bar{B}_{x_1} \right) \quad ⑯$$

$$\because k\delta \ll 1, \therefore k \ll \frac{1}{\delta}$$

$$|k^2 \bar{B}_{x_1}| \ll \frac{\bar{B}_{x_1}}{\delta^2} \sim \frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2}$$

したがって、⑯ 式を簡略化

$$-i\omega \bar{B}_{x_1} = k \bar{V}_{x_1} B_0 - \eta_m \frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2} \quad ⑯$$

より ⑯, ⑯ で得る $\bar{V}_{x_1}, \bar{B}_{x_1}$

$$\text{由 ⑯ } \bar{V}_{x_1} = \frac{\eta_m}{k B_0} \frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2} - \frac{i\omega}{k B_0} \bar{B}_{x_1}$$

代入 ⑯

$$i\omega \frac{\eta_m}{k B_0} \frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2} - \frac{(i\omega)^2}{k B_0} \bar{B}_{x_1} = - \frac{k \delta^2 B_0}{\mu \rho_0} \frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{k \delta^2 B_0}{\mu \rho_0} + i\omega \frac{\eta_m}{k B_0} \right) \frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2} - \frac{(i\omega)^2}{k B_0} \bar{B}_{x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{B}_{x_1}}{\partial x^2} - \frac{(i\omega)^2}{\left(\frac{k \delta^2 B_0}{\mu \rho_0} + i\omega \eta_m \right)} \bar{B}_{x_1} = 0 \quad ⑯$$

⑯ 式を解く \bar{B}_{x_1} は複数解のうちの一つ $(-\delta \rightarrow +\delta)$

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \bar{B}_{x_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{B}_{x_1}}{\partial x} \right) dx = \bar{B}_{x_1} \left. \frac{\partial \bar{B}_{x_1}}{\partial x} \right|_{-\delta}^{+\delta} - \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\partial \bar{B}_{x_1}}{\partial x} d \bar{B}_{x_1}$$

$$= \bar{B}_{x_1} \frac{d\bar{B}_{x_1}}{dx} \Big|_{-\delta}^{+\delta} - \int_{-\delta}^{+\delta} \left(\frac{d\bar{B}_{x_1}}{dx} \right)^2 dx$$

$$\therefore \text{②式差为} \quad \bar{B}_{x_1} \frac{d\bar{B}_{x_1}}{dx} \Big|_{-\delta}^{+\delta} = \int_{-\delta}^{+\delta} \left(\frac{d\bar{B}_{x_1}}{dx} \right)^2 dx + \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{(i\omega)^2}{(\kappa\delta)^2 B_0^2 + i\omega\eta_m} \bar{B}_{x_1}^2 dx$$

②式左边一阶项为零，所以电流片之边 $\frac{d\bar{B}_{x_1}}{dx}$ 有问题。引入

$$\Delta' = \frac{1}{\bar{B}_{x_1}} \left[\frac{d\bar{B}_{x_1}(0)}{dx} - \frac{d\bar{B}_{x_1}(-\delta)}{dx} \right] \quad 22$$

Δ' 是一个瞬时数（2. 无意义），由内8小区域的连续条件定。

利用④式可得 电流片中的 \bar{B}_{x_1} 为 Δ' 的函数近似表达式

$$\frac{d^2\bar{B}_{x_1}}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{d\bar{B}_{x_1}}{dx} = \frac{\frac{d\bar{B}_{x_1}(0)}{dx} - \frac{d\bar{B}_{x_1}(-\delta)}{dx}}{dx} = \frac{\Delta' \bar{B}_{x_1}}{\delta} \quad 23$$

23代入 21

$$(i\omega)^2 - \left(\frac{\eta_m \Delta'}{\delta} \right) (i\omega) - \frac{(\kappa\delta)^2}{\mu\mu_0} B_0^2 \left(\frac{\Delta'}{\delta} \right) = 0 \quad 24$$

此即色散关系

在电流片中心 $x=0$ 处， \bar{B}_{x_1} 为零，故须是该处。所以 24 式，令 $\Delta' = 0$ 上可近似为

$$i\omega \bar{B}_{x_1} \approx \eta_m \frac{d^2\bar{B}_{x_1}}{dx^2} \approx \eta_m \frac{\Delta' \bar{B}_{x_1}}{\delta} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{成立条件} \end{matrix}$$

$$\text{于是得} \quad i\omega \approx \frac{\eta_m \Delta'}{\delta} \quad 25$$

$$\left[\Delta' \sim \frac{d\bar{B}_{x_1}(0)}{dx} \sim \frac{\bar{B}_{x_1}}{\delta} \bar{B}_{x_1} \sim \frac{1}{\delta} \quad \therefore i\omega = \gamma \sim \frac{\eta_m}{\delta} \right] \quad \downarrow \quad \text{由 603 与 701 得}$$

$$(\varepsilon = \delta) \quad \eta_m = \frac{1}{\mu\omega} = \frac{1}{\mu} \quad \frac{1}{\delta^2\mu} \leftrightarrow \gamma = \frac{1}{\varepsilon^2\mu}$$

25) 式代入總動量守恒 24)

$$\left(\frac{\eta_m \Delta'}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{\eta_m \Delta'}{\delta}\right)^2 - \frac{(k\delta)^2}{\mu P_0} B_0^2 \left(\frac{\Delta'}{\delta}\right)^2 = 0$$

$$(i\omega) - (i\omega) \approx (i\omega)$$

$$\frac{\eta_m^2 \Delta'^2}{\delta^2} = \frac{(k\delta)^2}{\mu P_0} B_0^2 \frac{\Delta'^2}{\delta^2}$$

$$\eta_m^2 \Delta' = \frac{k^2 \delta^3}{\mu P_0} B_0^2 \quad 26)$$

電流片中心處 $B_0(x=0)$ 為零 $B_0(0) = 0$

$$B_0(x) = B_0(0) + \frac{dB_0(x)}{dx} \Big|_{x=0} \cdot x + \dots$$

$$= \frac{dB_0(x)}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \delta$$

$$= B_0' \delta \quad 27)$$

26) 式中 $B_0 = B_0(x)$, (4) 27) 式代入, 得 Δ'

$$\Delta' = \frac{\eta_m^2 \Delta' \mu P_0}{k^2 B_0^2(x)} = \frac{\eta_m^2 \Delta' \mu P_0}{k^2 B_0'^2 \delta^2}$$

$$\checkmark \quad \delta = \left[\frac{\mu P_0 \eta_m^2 \Delta'}{k^2 B_0'^2(x=0)} \right]^{1/5}$$

δ 為電流片厚度

$\delta, i\omega$ 為定 从而由 25) 式和 27) 式得 Δ'

行分 Bateman
的結果

$$i\omega = \eta_m \Delta' \left[\frac{\mu P_0 \eta_m^2 \Delta'}{k^2 B_0'^2(x=0)} \right]^{-1/5}$$

$$= \left[\frac{k^2 B_0'^2(x=0) \eta_m^3 \Delta'^4}{\mu P_0} \right]^{1/5}$$

3) 入特點在 L

$$\text{擴散時間} T_d = \frac{L}{\eta_m}, \text{吸收時間} T_a = \frac{L}{V_A} = \frac{L(\mu P_0)^{1/2}}{B_0}$$

$$i\omega = \tau_d^{-\frac{1}{2}} \tau_A^{-\frac{1}{2}} (\Delta' L)^{\frac{1}{2}} (RL)^{\frac{1}{2}}$$

未考虑扩散的惯性力：

$$i\omega = 0.55 \tau_d^{-\frac{1}{2}} \tau_A^{-\frac{1}{2}} (\Delta' L)^{\frac{1}{2}} (RL)^{\frac{1}{2}} \quad ⑧$$

对于以下的尺寸： $L = 5$

i. 惯性：

1. 斯托克斯稳定性要求 $\tau_A \ll \tau_d$

已导得 ⑥ 式

$$k^2 \delta^3 \frac{\rho_0}{\mu_0} = \eta_m^2 \Delta'$$

$$\Delta' \sim \frac{1}{\delta}, \quad \delta \sim L, \quad V_A^2 = \frac{\rho_0}{\mu_0}, \quad \tau_A = \frac{L}{V_A} \quad \text{代入上式}$$

$$\frac{L^2 k^2 \delta^3}{\tau_A^2} = \eta_m^2 \frac{1}{\delta}$$

$$\text{再利用 } \tau_d = \frac{L^2}{\eta_m} \sim \frac{\delta^2}{\eta_m}, \quad \text{此式变为 } \frac{L^2 k^2}{\tau_A^2} \cdot \tau_d^2 = 1$$

$$L^2 k^2 = \frac{\tau_d^2}{\tau_A^2}$$

推导 ④ 式忽略了工程中假定的长波近似，即 $kL \ll 1 \Rightarrow \tau_d \ll \tau_D$

2. 库伦斯托克斯稳定性要求 $k\delta \ll 1$ (长波近似)。 δ 电流片中电场已忽略不计为 $\gg \delta$

3. 对于日光

特征长度 L ($\eta \delta$) 典型值 $\sim 10^4 \text{ cm}$ ($= 0.1 \text{ km}$)

特征时间 $\tau_d \sim 1 \text{ 天}$ ($8.64 \times 10^4 \text{ 秒}$)。 $V_A \sim 10^{7.5} \text{ cm/s}$ ($= 300 \text{ km/s}$)

$\tau_A \sim 10^{-3.5} \text{ sec}$. 增长率 $i\omega \approx 0.2/g\eta$ ($= (\tau_D \bar{\eta})^{1/2}$)

$$\tau_A < i\omega < \tau_D$$

4. 斯托克斯稳定性与特征具有耗散的增益率

大湍流大耗散的时标 $\tau_{flare} \sim 10^2 - 10^3 \text{ sec}$. 斯托克斯稳定性与

时才开始. 但很快将分子加速到与速率相等. 有可能抑制某些局部过程

5. Price + 中途停止: $\omega = [\tau_d^3 \tau_h^2 (kL)^2]^{-\frac{1}{5}}$ ($P > P_c$)

为什么? 我们令 $\omega = \omega_0 e^{-kt}$. 我们令 $\omega = \omega_0 e^{-kt}$.

6. 对于最长的运动距离, 增速率 ω 最大. $\omega = (\tau_d \tau_h)^{\frac{1}{2}}$.
即 $\tau_d \tau_h$ 的几何平均. 将可上一起讨论.

第 10 页 (Chapt-7-10th) 留空待定的部分:

1. 假设扰动量 $P_1 = \bar{P}_1 e^{i\omega t} \cos kx$ (P.63)

2. P.64. ②式=边乘以 V_{x1} 得

$$\frac{1}{2} P_0 \frac{\partial}{\partial x} (\bar{V}_{x1} e^{i\omega t}) \cos kx = - \bar{V}_{x1} \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x} e^{i\omega t} \cos kx - \left(\frac{\partial \bar{B}_{y1}}{\partial x} e^{i\omega t} \cos kx - \bar{B}_{x1} e^{i\omega t} \cos kx \right) \cdot \frac{B_0}{\mu} \bar{V}_{x1} e^{i\omega t} \cos kx$$

$$\frac{1}{2} P_0 \frac{\partial \bar{V}_{x1}^2}{\partial x} = - \bar{V}_{x1} \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \bar{B}_{y1}}{\partial x} - k \bar{B}_{x1} \right) \cdot \frac{B_0}{\mu} \bar{V}_{x1} \cdot \bar{x}_1$$

3. ②式=边乘以 V_{y1} 得:

$$\frac{1}{2} P_0 \frac{\partial}{\partial x} (\bar{V}_{y1} e^{i\omega t}) \sin kx = - \bar{V}_{y1} \bar{P}_1 e^{i\omega t} (-k) \sin kx$$

$$\frac{1}{2} P_0 \frac{\partial \bar{V}_{y1}^2}{\partial x} = k \bar{V}_{y1} \bar{P}_1$$

4. 二式相加

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} P_0 (\bar{V}_{x1}^2 + \bar{V}_{y1}^2) \right] = - \left(\bar{V}_{x1} \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x} - k \bar{V}_{y1} \bar{P}_1 \right) - \left(\frac{\partial \bar{B}_{y1}}{\partial x} - k \bar{B}_{x1} \right) \cdot \frac{B_0}{\mu} \bar{V}_{x1}$$

5. 冷却高假近似:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} P_0 (\bar{V}_{x1}^2 + \bar{V}_{y1}^2) \right] = - \frac{B_0}{\mu} \left(\frac{\partial \bar{B}_{y1}}{\partial x} - k \bar{B}_{x1} \right)$$

$\therefore \frac{\partial \bar{B}_{y1}}{\partial x} \sim \frac{\bar{B}_{y1}}{\delta}$, 长波近似下已推得④式: $|\bar{B}_{x1}| \ll |\bar{B}_{y1}|$

$k\delta \ll 1 \quad \therefore |\bar{B}_{y1}| \gg k\delta |\bar{B}_{x1}| \quad \frac{\bar{B}_{y1}}{\delta} = \frac{\partial \bar{B}_{y1}}{\partial x} \gg k |\bar{B}_{x1}|$, 再利用③式.

此简化为: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} P_0 \bar{V}_{y1}^2 \right) = - \frac{B_0}{\mu} \frac{\partial \bar{B}_{y1}}{\partial x} \bar{V}_{x1} \quad (5)$

6. P.65 上遗漏的式子 $\bar{V}_{y1} = \bar{V}_{x1}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{B_0}{2\mu} \frac{\bar{V}_{x1}}{(k\delta)^2} \right] = - \frac{B_0}{\mu} \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \bar{B}_{x1}}{\partial x^2} \bar{V}_{x1}$$

7. P.68. 讨论部分 3. 2.5 与日光, $T_d < (i\omega)^{-1} < T_D$

7.5.5 电阻不稳定性

宽为 l 的电流片，磁扩散时间 $T_d = \frac{l^2}{\eta_m}$, $\eta_m = (\mu\sigma)^{-1}$. 磁扩散过程中，磁场因电阻而耗散，以向一速率转化为热能，太简单， T_d 过大。除非 l 很小，否则无法计算动力学过程的实际时间。Forst 提出三种不稳定性，可以以快得多的速率将磁场为热能和动量。如果电流片足够宽，满足 $T_d \gg T_A$, $T_d = \frac{l}{V_A}$, 这些不稳定性就发生。

它们的时标可写成 $T_d (T_{E_d})^\delta$, $0 < \delta < 1$. 通过不稳定性，给定电流片内产生许多小尺度的磁扰动，向外传播，释放磁场。

2. 稳定过程中，在电流片中心附近，宽为 ϵl 的区域内，磁场通过等离子体滑动，在背景已知速度 v_B ，磁场强度 B_0 。^(看7.12)

设等离子体进入背景区的速度是 $-v_x \hat{x}$, $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z} \hat{y}$ ($x \gg 0$ 部分)

$$\text{所以电流 } j \approx \sigma(\vec{v} \times \vec{B}) = -\sigma v_x (\epsilon B_0) \hat{y} \quad (7.61)$$

$$\text{作用于等离子体的 Lorentz 力} -\vec{F}_L = \vec{j} \times \vec{B} = -\sigma v_x (\epsilon B_0) \hat{y} \times \epsilon B_0 \hat{y} \\ = \sigma v_x (\epsilon B_0)^2 \hat{x}.$$

\vec{F}_L 完全阻止流体的运动。如果 v_x 是一种运动， \vec{F}_L 应该阻止运动的发展，起一种恢复力。如果有2. 稳定性发生，那么恢复力应该大于驱动力(\vec{F}_d)。 \vec{F}_d 的大小近似于 \vec{F}_L 相同。 $\vec{F}_d \approx -\vec{F}_L$ ，驱动力 \vec{F}_d ，驱动功率 P_d 。

$$\vec{F}_d \cdot \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{F}_L = -(-v_x \hat{x}) \cdot \sigma v_x (\epsilon B_0)^2 \hat{x} = \sigma v_x^2 (\epsilon B_0)^2. \quad (7.62)$$

因为不可压缩， \hat{x} 方向的驱动力可沿电流片长度 $\frac{L_0}{R}$ 加速等离子体速度 v_y 。假设沿 \hat{y} 方向，等离子体波数 $k \gg l^{-1}$ ，对于不可缩等离子体 $\partial_v = 0$. $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$, $\frac{v_x}{\epsilon l} = -\frac{v_y}{k L_0} = -k v_y$

$$v_y = -\frac{v_x}{k R l}$$

时间 $(i\omega)^{-1}$ 内 ($i\omega$ 为上升率，时间 $\frac{1}{i\omega}$)，动能增加率

$$\frac{P_d v_y^2}{(i\omega)^4} = i\omega P_d v_y^2 \approx \frac{i\omega P_0 v_x^2}{(k R l)^2}$$

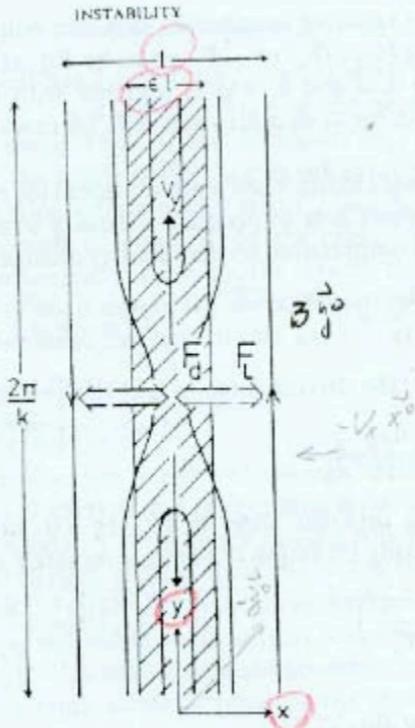


Fig. 7.12 Resistive instability in a current sheet for which the driving force (F_d) exceeds the restoring force (F_L). Significant diffusion takes place over a fraction (ϵ) of the width (l) of the sheet. Here just one wavelength ($2\pi/k$) is shown, but, in practice, there may be many such features end to end.

动量的增加是由运动速度引起的力，称为惯性

$$\therefore \frac{i\omega \rho_0 V_x^2}{(\epsilon B)^2} = \vec{F}_d \cdot \vec{v} = \sigma V_x^2 (\epsilon B_0)^2$$

$$\text{可得 } (\epsilon B)^2 = \frac{i\omega \rho_0 V_x^2}{\sigma V_x^2 B_0^2}, \quad \text{即 } \epsilon^2 = \frac{i\omega \bar{\rho}_0^2}{(\epsilon B)^2 B_0^2} \quad (7.63)$$

(利用 $\eta_m = (\mu \sigma)^{-1}$, σ 为电导率)

对于三种电阻不稳定性中的一种，从意义上考虑，可以令电动力和 Lorentz 力相等 $\vec{F}_d = -\vec{F}_L$ ，从而找到 ϵ, ω, B 之间的关系。利用(7.63)式和波动方程 $\omega = \omega(k)$ ，对大尺度的磁流形三种稳定性而言，引力模和波模在电流片内传播方向相反，危害性相对较小，不过有可能产生高能粒子辐射。

1. 引力模 (gravitational mode)

引力场与速度的方向为 $\rho g \hat{x}$ ，密度随位置 $\rho(x)$ ， ρ 可以表示为 $\rho = \rho_0 + \rho_1$ ，这时的连带模方程为 $\frac{\partial \rho}{\partial x} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$ ，加入平均值： $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $V_0 = 0$, $V_{0x} = V_0$

$$(\rho_1) \sim \frac{\rho_1(x)}{V_1(x)} \cdot e^{i\omega t + ik_x x}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + V_x \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0, \quad i\omega \rho_1 = -V_x \frac{\partial \rho_0}{\partial x}, \quad \rho_1 = -\frac{V_x}{i\omega} \frac{\partial \rho_0}{\partial x}$$

电动力 $\vec{F}_d = \rho_1 g \hat{x}$ ，因流动而产生

$$\vec{F}_d = \rho_1 g \hat{x} = -\frac{V_x}{i\omega} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} g \hat{x} \quad (7.64)$$

若 $\frac{\partial \rho_0}{\partial x} < 0$ ，则电动力使质量增加不稳定。(参考 7.13)

$\because \vec{F}_d$ 方向与流动速度 $V_x (> 0)$ 方向一致 (反向) 速度和运动 ρ_1 相反

(7.61) 式中的 \vec{F}_L 对应于流动速度 $-V_x \hat{x}$ ，对 (7.64) 式相加得 (7.61) 式

$$\text{即改写 } \vec{F}_L = -\sigma V_x (\epsilon B_0)^2 \hat{x}, \quad \vec{F}_d = -\vec{F}_L$$

$$-\frac{V_x}{i\omega} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} g = \sigma V_x (\epsilon B_0)^2 \quad \text{或写成 } \frac{V_x}{i\omega} \left| \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \right| g = \sigma V_x (\epsilon B_0)^2$$

$$i\omega = \frac{1}{\sigma (\epsilon B_0)^2} \left| \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \right| g$$

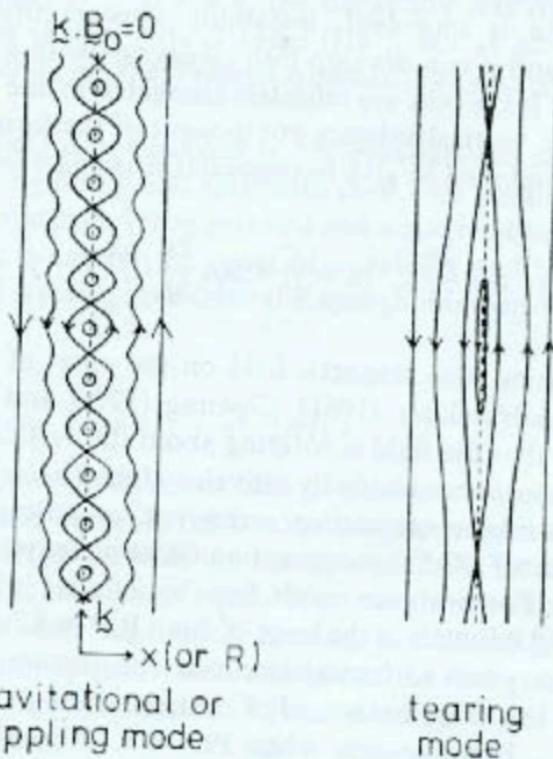


Fig. 7.13. Small- and long-wavelength resistive instabilities in a current sheet or a sheared magnetic field.

由(7.63)式求得的表达式

$$(i\omega)^{\frac{1}{2}} = \frac{ikT_A}{\sigma B_0 T_A} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| g$$

引述引力时有 $T_A = \left(-\frac{g}{P_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right)^{\frac{1}{2}}$ (式中可见 $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$)

$$(i\omega)^{\frac{1}{2}} = \frac{ikT_A}{\sigma B_0 T_A} \cdot P_0 \cdot \frac{1}{T_A}$$

$$i\omega = \left(\frac{(kT_A)^2}{T_A + T_A} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ 可见 } -\frac{g}{P_0} \frac{\partial P}{\partial x} > 0. \text{ 即重力加速度指向等高面差及}$$

多级
2. 波纹模 (rippling mode)

3 磁感应强度 $\eta_m = \eta_m(x)$, 也即沿越电流片时, η_m 变化而 \vec{V}_0 不变, 则波动模式稳定. η_m 的变化可归因于密度分布的不均匀. $\eta_m = \frac{1}{\mu \sigma} = \frac{1}{\mu} \eta$. η 为电阻率. 可以推得 $\eta = \frac{\pi e^2 m k_B}{(k_B T_e)^2 \ln \Lambda}$, 与温度有关. \because 电流是均匀的, 所

有速度梯度为零. 但 η 有 $\frac{d\eta_m}{dx} \neq 0$ (类似于不可压缩流体 $\frac{d\rho}{dx} = 0$)

$$\therefore \frac{\partial \eta_m}{\partial x} + \vec{V}_0 \cdot \nabla \eta_m = 0$$

固扰动. 设 $\eta_m = \eta_0 + \eta_1$. $\vec{V}_0 = 0$. 扰动速度 V_x

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ V_x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \eta_1 w \\ V_x w \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t + ikx}$$

$$\eta_1 = -\frac{V_x}{i\omega} \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \quad (7.65)$$

$$\eta_1 \text{ 为 } \vec{j} \text{ 与 } \vec{E}_0 \text{ 的夹角 } \vec{j} \rightarrow \vec{j}_0 + \vec{j}_1, \vec{j} = \sigma \vec{E}_0 = \frac{1}{\mu \eta_m} \vec{E}_0$$

$$\vec{j}_0 + \vec{j}_1 = \frac{1}{\mu(\eta_0 + \eta_1)} \vec{E}_0 = \frac{1}{\mu \eta_0} \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \vec{E}_0$$

$$\vec{j}_1 = -\frac{\eta_1}{\eta_0} \vec{j}_0$$

外部的电流 \vec{j}_1 , 所产生的 Lorentz 力是驱动力, 引起扰动速度 (参 F. 7.12)

左边, $x > 0$. 磁场梯度为 $\epsilon B_0 \hat{y}$ (ϵ 为一常数), 产生示进运动 (E 方向) ϵ 时的电流 \vec{j}_0 为 $\mu \vec{j}_0 = \epsilon B_0 \hat{x} = \frac{B_0}{\mu \lambda} \hat{y}$

L: 扩散和漂移的充效应.

$$\vec{j}_1 = -\frac{\eta_1}{\eta_0} \vec{j}_0 = -\frac{\eta_1}{\eta_0} \frac{B_0}{\mu l} \hat{x}$$

故而 Lorentz 力是扰动起因的驱动力

$$\vec{F}_d = \vec{j}_1 \times \epsilon B_0 \hat{y} = \frac{\eta_1}{\eta_0} \frac{\epsilon B_0^2}{\mu l} \hat{x} = -\frac{V_x}{i\omega\eta_0} \frac{d\eta_0}{dx} \frac{\epsilon B_0^2}{\mu l} \hat{x}, \quad (7.67)$$

扰动力的方向和图 7.12 一样

① 当 $x > 0$ (由图 7.12 的左边), 上式中的扰动速度应是 $-V_x \hat{x}$

$\frac{d\eta_0}{dx} < 0$ (即中心附近磁导率最大, 即电流密度最大, 逆 x 方向变化)

$$\vec{B}_0 = \epsilon B_0 \hat{y}$$

$$\vec{F}_d = \frac{V_x}{i\omega\eta_0} (-1) \left| \frac{d\eta_0}{dx} \right| \frac{\epsilon B_0^2}{\mu l} \hat{x}$$

\vec{F}_d 和 $-\hat{x}$ 方向, 和扰动速度方向 $-V_x \hat{x}$ 一致, 守恒. 稳定

② 当 $x < 0$ (由图 7.12 的右边) 扰动速度剩余部分应为 $V_x \hat{x}$

$\frac{d\eta_0}{dx} > 0$ (x 越大, 越靠近中心位置, 电流密度越大), $\vec{B}_0 = -\epsilon B_0 \hat{y}$

$$\vec{F}_d = \vec{j}_1 \times \epsilon B_0 (-\hat{y}) = -\frac{\eta_1}{\eta_0} \frac{B_0}{\mu l} \hat{y} \times \epsilon B_0 (-\hat{y}) = -\frac{\eta_1}{\eta_0} \frac{\epsilon B_0^2}{\mu l} \hat{x}$$

$$= -\frac{1}{\eta_0} \left(-\frac{V_x}{i\omega} \right) \frac{d\eta_0}{dx} \frac{\epsilon B_0^2}{\mu l} \hat{x}$$

$$= \frac{V_x}{i\omega\eta_0} \frac{d\eta_0}{dx} \frac{\epsilon B_0^2}{\mu l} \hat{x}$$

\vec{F}_d 和方向和扰动速度方向一致, 不稳定.

③ 磁导率 (或磁阻率系数) $\eta_m = \frac{1}{\mu} \eta$, η 为电阻率, 可见 $\eta_m \sim T_0^{-3/2}$
若电流片中 $x=0$, 有 η_m 极大, 则 T_0 应为极小, 所以当磁导率系数中
当电流片中间增加 ($x < 0$ 区域), 不稳定性发生于电流片右侧
($x < 0$) 区域. 而 η_m 单调减小 ($x > 0$ 区), 不稳定性在 $x > 0$ 区域发生.

$\vec{F}_d = -\vec{F}_2$. \vec{F}_2 由 (7.61) 式表示 扰动力 $-V_x \hat{x}$. ($x > 0$)

(7.67) 式应为 $\vec{F}_d = -\frac{V_x}{i\omega\eta_0} (-1) \left| \frac{d\eta_0}{dx} \right| \frac{\epsilon B_0^2}{\mu l} \hat{x}$

$$\vec{F}_L = \sigma V_x (\epsilon B_0)^2 \hat{x}$$

$$\therefore \frac{V_x}{i\omega\eta_0} \left| \frac{d\eta_0}{dx} \right| \frac{\epsilon B_0^2}{\mu\lambda} = -\sigma V_x (\epsilon B_0)^2$$

$$\frac{V_x}{i\omega\eta_0} \frac{d\eta_0}{dx} \frac{\epsilon B_0^2}{\mu\lambda} = \sigma V_x (\epsilon B_0)^2 \quad \left(\frac{d\eta_0}{dx} < 0 \right)$$

$$i\omega = \frac{1}{\eta_0} \frac{d\eta_0}{dx} \cdot \frac{\eta_0}{\lambda} \cdot \frac{1}{\epsilon} \quad \left(\text{利用 } \eta_0 = \frac{1}{\mu\sigma} \right)$$

$$(7.63) 式两边 \epsilon 代入上式, \frac{1}{\eta_0} = T_d \quad (\eta_0 \neq 0 \Rightarrow \eta_0 \approx \eta_m)$$

$$i\omega = \frac{1}{\eta_0} \frac{d\eta_0}{dx} \frac{\lambda}{T_d} \left[\frac{(kl)^2 T_d}{i\omega T_d^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$i\omega = \left[\left(\frac{\lambda}{\eta_0} \frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 \frac{(kl)^2}{T_d^3 T_d^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

注意: 如果电导率足够大, 则 $\eta_m \approx 0$, $\vec{V}_x \cdot \vec{\eta}_m \approx 0$ (\vec{V}_x 垂直于 $\vec{\eta}_m$)。

$\frac{d\eta_0}{dx} \approx 0$. (7.65) 式不再成立. 涡流模式就被称为稳定.

3. 撕裂模

撕裂模是三种模式中最重要的, 对于日冕加热, 太阳耀斑可能很重要.
撕裂模也常发生在剪切层中. 下面介绍 Furth et al. 的撕裂模不稳定性
分析. ("Magnetic Reconnection" 第六章)

等离子体处于静止. 剪切不稳定性处于半稳定 (剪切即是 $x=0$) 的情况下 (Bartenev - Bateman) $\vec{B}_0 = B_{0y}(x) \hat{j} + B_{0z}(x) \hat{k}$ (6.1)

(6.1) 式说明, 等离子体上的磁力线, 当 x 方向移动时, 会旋转.

考虑对半稳定的偏高, 偏芯感应方程和涡旋方程, 考虑设不可压缩
(ρ , 不考虑粘滞系数均匀, 磁场均匀) (运动中令 $K_3 = \sigma^{1/2} \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_{0y}(x)$ 为常数). 不考虑电荷密度 (等离子体的电荷密度为常数)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{B} \quad (6.2)$$

$$\mu \rho \frac{D}{Dx} (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}] \quad (6.3)$$

$$(6.3) 式源于运动方程 $\rho \frac{D\vec{v}}{Dx} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$$$

$$\nabla \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (6.4)$$

假设为扰动形式

$$\left(\begin{array}{c} \vec{V}_1 \\ \vec{B}_1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} \vec{V}_{1,0} \\ \vec{B}_{1,0} \end{array} \right) e^{iky + i\omega t}$$

且感应方程(b.2)以扰动方程(b.3)代入扰动(带虚数单位)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) + \eta \nabla^2 \vec{B}_1 \\ &= (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 + \eta \nabla^2 \vec{B}_1 \\ &= B_{0,y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{V}_1 - (V_{1,x} \frac{\partial}{\partial x} + V_{1,y} \frac{\partial}{\partial y}) (B_{0,y} \hat{y} + B_{0,z} \hat{z}) + \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{B}_{1,0} e^{iky + i\omega t} \end{aligned}$$

$$\hat{x} \text{ 分量: } \omega B_{1,x} = B_{0,y} k_x V_{1,x} + \eta (B''_{0,x} \hat{x} - k_y^2 B_{1,x} \hat{x})$$

$$\omega B_{1,x} = i V_{1,x} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) + \eta (B''_{0,x} \hat{x} - k_y^2 B_{1,x} \hat{x}) \quad (6.6)$$

$$(k = k_y)$$

电流片位于 $y-z$ 平面上，运动在 $x-y$ 平面上。根据以上假设和方程，我们已得出到运动方程（见 P.60-4. ③ 式）：

$$\mu \omega^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho, \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial x} \right) - \vec{k} \cdot \vec{P} \cdot \vec{E}_x \right] = -k B_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 - \frac{1}{B_0^2} \frac{d^2 B_{0,y}}{dx^2} \right) B_{1,x} \quad ④$$

$$(\text{原第4式中 } \gamma \text{ 已换成 } \omega, \rho_0 \text{ 换成 } \rho, \text{ 等等, ④式中的 } \vec{B}_0 = B_0 \hat{y} + B_{0,z} \hat{z})$$

将 $\vec{V}_1 = -i\omega \vec{\xi}$, $V_{1,x} = -i\omega \xi_x$ 代入，已得之参数 P 及 \vec{E} , ②, ③, ④ 式

改写为

$$\begin{aligned} \mu \omega^2 \rho \left(\frac{\partial V_{1,x}}{\partial x^2} \cdot \frac{i}{\omega} - \frac{i}{\omega} k^2 V_{1,x} \right) &= i \mu \omega \rho \left(\frac{\partial^2 V_{1,x}}{\partial x^2} - k^2 V_{1,x} \right) \\ &= -k B_0 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) B_{1,x} - \frac{1}{B_0} \frac{d^2 B_{0,y}}{dx^2} B_{1,x} \right]. \end{aligned}$$

此为 \hat{x} 方向分量式。

$$\omega \left(\frac{\partial^2 V_{1,x}}{\partial x^2} - k^2 V_{1,x} \right) = \frac{i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\mu \rho} \left[-B_{0,x} \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}_0}{\partial x^2}}{\vec{k} \cdot \vec{B}_0} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) B_{1,x} \right] \quad (2.7)$$

$$\text{式中 } \vec{k} = k_y \hat{y}, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = k_y B_{0,y} \quad \vec{B}_0 = B_{0,y} \hat{y} + B_{0,z} \hat{z}$$

$$(\rightarrow k B_0 \rightarrow \text{④式中 } B_0 \text{ 由 } B_{0,y})$$

无量纲化：

利用场强 B_0 特征长度 λ , 特征速度 v_L , 特征时间 λ/v_L

$$\overline{\vec{B}} = \frac{\vec{B}_0}{B_0}, \quad \overline{\vec{V}} = -\vec{V}_1 \cdot \frac{i k l^2}{\eta}, \quad \bar{k} = k l \quad (k \text{ 为常数}), \quad \bar{\omega} = \frac{\omega l^2}{\eta}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}$$

(b.6) 式 可写成

$$\frac{1}{l^2} \bar{\omega} B_0 \bar{B}_{1x} = - \frac{\eta}{k l^2} \bar{V}_{1x} B_0 (\bar{k} \cdot \bar{B}_0) + \eta \left(B_0 \frac{\bar{B}_{1x}''}{l^2} - \frac{\bar{k}^2}{l^2} B_0 \bar{B}_{1x} \right)$$

$$\text{从左端看 } \frac{d^2 B_{1x}}{dx^2} = B_0 \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \bar{B}_{1x}}{dx^2} = B_0 \frac{\bar{B}_{1x}''}{l^2}$$

$$\bar{\omega} \bar{B}_{1x} = -\bar{V}_{1x} \frac{\bar{k} \cdot \bar{B}_0}{k} + (\bar{B}_{1x}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{1x})$$

R.T. $\bar{x} \rightarrow 1.1$ 为数

$$\therefore f = \frac{\bar{k} \cdot \bar{B}_0}{k}$$

$$\bar{\omega} \bar{B}_{1x} = -\bar{V}_{1x} f + (\bar{B}_{1x}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{1x}) \quad (b.9)$$

(b.7) 式 進行无量纲化，得

$$\text{左边} = \frac{1}{l^2} \bar{\omega} \left[- \frac{1}{i k l^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{V}_{1x}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\bar{k}^2}{l^2} \frac{1}{i k l^2} \bar{V}_{1x} \right]$$

$$= - \frac{1}{l^2} \frac{1}{i k l^2} [\bar{V}_{1x}'' - \bar{k}^2 \bar{V}_{1x}] \bar{\omega}$$

$$\text{右边} = i \frac{\bar{k} \cdot \bar{B}_0}{\mu \rho} B_0 \left[-B_0 \bar{B}_{1x} \cdot \frac{1}{l^2} \frac{f''}{f} + \frac{B_0}{l^2} (\bar{B}_{1x}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{1x}) \right]$$

$$\text{式中 } f'' = \frac{\bar{k} \cdot \bar{B}_0''}{k}, \quad \frac{\bar{k} \cdot \bar{B}_0''}{\bar{k} \cdot \bar{B}_0} = \frac{\bar{k} \cdot \bar{B}_0'' \cdot B_0 \cdot \frac{1}{l^2}}{\bar{k} \cdot \bar{B}_0 \cdot B_0} = \frac{\bar{k} \cdot \bar{B}_0''}{\bar{k} \cdot \bar{B}_0} \cdot \frac{1}{l^2} = \frac{f''}{f} \cdot \frac{1}{l^2}.$$

$$\text{右边} = i \frac{\bar{k} \cdot \bar{B}_0}{l^2} V_A^2 \left[-\bar{B}_{1x} \frac{f''}{f} + (\bar{B}_{1x}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{1x}) \right]$$

左边的系数 $- \frac{1}{l^2} \frac{1}{i k l^2}$ 移到右边

$$\begin{aligned} \bar{\omega} [\bar{V}_{1x}'' - \bar{k}^2 \bar{V}_{1x}] &= - \frac{i k l^2}{\eta^2} \cdot i \frac{\bar{k}^2}{k l^2} f V_A^2 \left[-\bar{B}_{1x} \frac{f''}{f} + (\bar{B}_{1x}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{1x}) \right] \\ &= \frac{l^2 V_A^2}{\eta^2} \bar{k}^2 f \left[-\bar{B}_{1x} \frac{f''}{f} + (\bar{B}_{1x}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{1x}) \right] \\ &= L_u^2 \bar{k}^2 f \left[-\bar{B}_{1x} \frac{f''}{f} + (\bar{B}_{1x}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{1x}) \right] \end{aligned}$$

$$\text{式中 } L_u = \frac{V_A}{\eta} = \frac{I_d}{E_d} \quad \text{Lundquist number}$$

元量(3)心后，我们得到方程：

$$\bar{\omega} \bar{B}_{ix} = -\bar{V}_{ix} f + (\bar{B}_{ix}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{ix}) \quad (6.9)$$

$$\bar{\omega} (\bar{V}_{ix}'' - \bar{k}^2 \bar{V}_{ix}) = L_n \bar{k}^2 f [-\bar{B}_{ix} \frac{f''}{f} + (\bar{B}_{ix}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{ix})] \quad (6.10)$$

式中 $L_n = \frac{T_0}{T_1}$ 称为 Lundquist 数。

假定 $L_n \gg 1$ 。注意：对于外部，磁感应方程中的频率项可以忽略，电流分布中 \bar{x} 方向，电阻起主导作用，磁场近似满足关系 $\bar{B}_x = 0$ 。深槽处 $\nabla \times (\bar{V} \times \bar{B}) = 0$ ，中心附近 $f = \frac{\bar{k} \cdot \bar{B}_0}{\bar{k}} = 0$ 。或者 $\bar{k} \cdot \bar{B}_0 = 0$ ($\because \bar{B}_0 \neq 0$)，以及中心附近的高度差为 $2\varepsilon l$ ，中心 $x=0$ ，其中有磁力线折弯，重联过程。将电流分布分为二区域： $|x| > \varepsilon l$ 即 $|\bar{x}| > \varepsilon$ 为外部区域
 $|\bar{x}| < \varepsilon$ 为内部区域。

分别求得两个区域。

外部区域： $\because f = \frac{\bar{k} \cdot \bar{B}_0}{\bar{k}} = \frac{\bar{k} \bar{B}_0}{\bar{k}} = \bar{B}_0$ ($\because \bar{k}$ 只有 \bar{x} 方向分量， $\bar{k} = k_y$ 。
 \bar{B}_0 也只有 \bar{x} 方向)

(6.9) 式变为：

$$\bar{\omega} \bar{B}_{ix} = -\bar{V}_{ix} \bar{B}_0 + (\bar{B}_{ix}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{ix}) \quad (6.12)$$

外部区域满足，在 $L_n \ll 1$ ，(6.10) 式左边的 $L_n \bar{k}^2 f$ 忽略不计，且将左方忽略，令为零，有

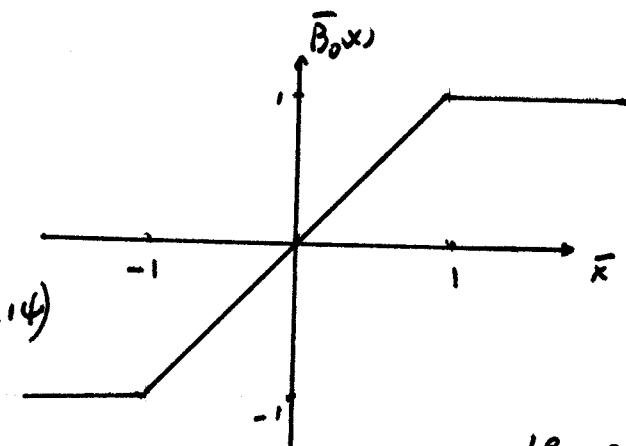
$$0 = -\bar{B}_{ix} \frac{f''}{f} + (\bar{B}_{ix}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{ix}), \quad f'' = \bar{B}_0''$$

$$0 = -\bar{B}_{ix} \frac{\bar{B}_0''}{\bar{B}_0} + (\bar{B}_{ix}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{ix}) \quad (6.3)$$

如果 $\bar{B}_0(x)$ 已知，就可求出 \bar{B}_{ix}

但若 $\bar{B}_0(x)$ 为 p 个分段数

$$\bar{B}_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } \bar{x} > 1 \\ \bar{x} & \text{当 } |\bar{x}| < 1 \\ -1 & \text{当 } \bar{x} < -1 \end{cases} \quad (6.4)$$



对于 $\bar{x} < 1$ 时 $\bar{B}_0 = 0$. $\bar{B}_x = \bar{x}$. $\bar{B}_y'' = 0$. 由(6.13)式得 7.15

$$\bar{B}_{ix} = \begin{cases} a_1 \sinh \bar{k} \bar{x} + b_1 \cosh \bar{k} \bar{x} & (\bar{x} < 1) \\ a_0 \exp(-\bar{k} \bar{x}) & (\bar{x} > 1) \end{cases} \quad (6.15-1)$$

($\bar{x} > 1$ 时, 由(6.13) $\bar{x} \rightarrow \infty$, \bar{B}_{ix} 有极点. \therefore 带留 $e^{-\bar{k} \bar{x}}$)

且 $\bar{x}=1$ 连续. \bar{B}_{ix} 连续, 于是有

$$a_1 \sinh \bar{k} + b_1 \cosh \bar{k} = a_0 e^{-\bar{k}} \quad (6.15-1)$$

\bar{B}'_{ix} 在 $\bar{x}=1$ 连续.

$$\begin{aligned} a_1 \bar{k} \cosh \bar{k} + b_1 \bar{k} \sinh \bar{k} &= -a_0 \bar{k} e^{-\bar{k}} \\ a_1 \cosh \bar{k} + b_1 \sinh \bar{k} &= -a_0 e^{-\bar{k}} \end{aligned} \quad (6.15-2)$$

由(6.15-1) 得:

$$a_1 = a_0 e^{-\bar{k}} \frac{1}{\sinh \bar{k}} - b_1 \frac{\cosh \bar{k}}{\sinh \bar{k}} \quad \text{代入 (6.15-2)}$$

$$a_0 e^{-\bar{k}} \cosh \bar{k} - b_1 = -a_0 e^{-\bar{k}} \sinh \bar{k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = a_0 e^{-\bar{k}} (\cosh \bar{k} + \sinh \bar{k}) \\ a_1 = a_0 e^{-\bar{k}} (-\sinh \bar{k} - \cosh \bar{k}) \end{array} \right. \quad (6.16)$$

(Priest. "Magnetic Reconnection" p.181 由(6.16) 式得 $a_0^2 = 1$)

7.15. 例

$$\bar{B}_{ix} = \begin{cases} a'_1 \sinh \bar{k} \bar{x} + b'_1 \cosh \bar{k} \bar{x} & (\bar{x} > -1) \\ a_0 \exp(\bar{k} \bar{x}) & (\bar{x} < -1) \end{cases} \quad (6.15')$$

且 $\bar{x}=-1$ 连续:

$$a'_1 \sinh(-\bar{k}) + b'_1 \cosh(-\bar{k}) = -a'_1 \sinh \bar{k} + b'_1 \cosh \bar{k} = a_0 e^{-\bar{k}} \quad (6.15-3)$$

\bar{B}'_{ix} 在 $\bar{x}=-1$ 连续:

$$a'_1 \cosh \bar{k} - b'_1 \sinh \bar{k} = a_0 \exp(-\bar{k}) \quad (6.15-4)$$

$$a'_1 = b'_1 \frac{\sinh \bar{k}}{\cosh \bar{k}} + a_0 e^{-\bar{k}} \frac{1}{\cosh \bar{k}} \quad \text{代入 (6.15-3) 得}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1' = a_0 e^{-\bar{k}} (\cosh \bar{k} + \sinh \bar{k}) \quad [= b_1] \\ a_1' = a_0 e^{-\bar{k}} (\cosh \bar{k} + \sinh \bar{k}) \quad [= -a_1] \end{array} \right.$$

由 (b.15) 及 (b.15') 可见. 对于 $\bar{x} < 0$ 时 \bar{B}_{ix} 连续. 12-阶导数(第4项)

2. 连续. $\bar{B}_{ix} = a_1 \bar{k} \cosh \bar{k} \bar{x} + b_1 \bar{k} \sinh \bar{k} \bar{x} \quad (\bar{x} < 1)$

$$\bar{B}_{ix}' = a_1' \bar{k} \cosh \bar{k} \bar{x} + b_1' \bar{k} \sinh \bar{k} \bar{x} \quad (\bar{x} > -1)$$

$$\bar{x} = 0^+ \quad \bar{B}_{ix}' = a_1' \bar{k} = a_0 e^{-\bar{k}} (-\sinh \bar{k} - \cosh \bar{k}) \bar{k} \quad \left\{ \text{参见下页} \right. , \therefore 2. \text{ 连续}$$

$$\bar{x} = 0^- \quad \bar{B}_{ix}' = a_1' \bar{k} = a_0 e^{-\bar{k}} (\sinh \bar{k} + \cosh \bar{k}) \bar{k}$$

1. 由 $\bar{B}_0(x)$ 为奇数阶电场强度有关 (参见 $\bar{B}_0(x) = B_{0y}(x) \hat{y} + B_{0z}(x) \hat{z}$).
从 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. 尤其有待商定), 不妨假定方程中的电阳为零, 则得

另一个需要问的问题是: 原来 $\bar{x} = 0$ 时 $\bar{B}_0 = 0$, $\bar{B}_0'' = 0$. ∴ 从 (b.13) 式
及 $\bar{B}_{ix}'' - \bar{k}^2 \bar{B}_{ix} = 0$. (对 $x = 0$ 成立), 代入 (b.12) 可知在原点附近有

$$\bar{V}_{ix} = -\frac{\bar{\omega} \bar{B}_{ix}}{\bar{B}_0}, \quad \therefore \bar{B}_0 \sim 0, \quad \therefore \bar{V}_{ix} \rightarrow \infty. \quad \text{原点附近物理量有奇数阶}$$

可认为 $\frac{\bar{B}_{ix}}{\bar{B}_0}$ 有跳跃状. 认为

$$\delta' = \left[\frac{\bar{B}_{ix}}{\bar{B}_0} \right]_{0^-}^{0^+}$$

Furth (1963) 已将 \bar{x} 与 \bar{k} 的关系 $\bar{k} = kL$. $\bar{\delta}' = 2 \left(\frac{1}{\bar{k}} - \bar{k} \right)$. $\bar{\delta}'$ 为一无量纲量.

我们考虑近似情况. 即 $\bar{k} = kL \ll 1$. ∴ $\bar{\delta}' \approx \frac{2}{\bar{k}}$. 根据 Priest (1968) 我们已得 $\bar{\delta}'$ 式. $i\omega = 0.55 T_d^{-\frac{1}{2}} T_A^{-\frac{1}{2}} (\Delta'L)^{\frac{1}{2}} (kL)^{\frac{1}{2}}$. 式中 L 为特征长度
即等于 l . $\Delta'L$ 为无量纲. 有 $\frac{1}{\bar{k}}$ 级. ∴ $\Delta'L = \bar{\delta}'$. $kL = kL = \bar{k}$.

$$\text{用 } \bar{\delta}' \approx \frac{2}{\bar{k}} \text{ 代入上式. 可得上半部分 } i\omega = 0.55 T_d^{-\frac{1}{2}} T_A^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\bar{k}} \right)^{\frac{1}{2}} (kL)^{\frac{1}{2}}$$

$$= T_d^{-\frac{3}{2}} T_A^{-\frac{1}{2}} (\bar{k})^{\frac{1}{2}} = T_d^{-\frac{3}{2}} T_A^{-\frac{1}{2}} (kL)^{-\frac{1}{2}}$$

Priest 在 "magnetic Reconnection" 中指出时. 对于 $\bar{k} \ll 1$, 在高阶时
 $\bar{\delta}' \approx \frac{2}{\bar{k}}$, 选取两个无量纲上半部分 $\bar{\omega} = [(S L n) / (q \bar{k})]^{\frac{1}{2}}$

同时利用有衰减的表达式， $\bar{\omega} = \omega \frac{k^2}{\eta_m} = \omega T_d$, $L_n = \frac{T_d}{T_A}$.

$$\therefore \omega = \frac{1}{T_d} \left(\frac{T_d}{T_A} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (k\lambda)^{-\frac{1}{2}} = T_d^{-\frac{1}{2}} \cdot T_A^{-\frac{1}{2}} \cdot (k\lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

撕裂模与上二种电化模式不同，现对于上二种模式为长波近似
即 $k \gg l^{-1}$, l 为电流片宽度，而撕裂模为长波近似 $kl \ll 1$. 上半部分
可表达为 $\omega \approx [T_d^3 T_A^2 (k\lambda)]^{1/2}$ ，与我们前面的结果 (P.68) 是一致。

然后可以得到电耗系数和方程。发现不论什么 $\bar{\omega}_{max} = 0.6 L_n^{1/2}$
同时有衰减表达式： $\bar{\omega} = \omega T_d = 0.6 \left(\frac{T_d}{T_A} \right)^{1/2}$, $\omega_{max} = 0.6 (T_d T_A)^{-1/2}$

即上半部分的最大值为 $\omega \approx (T_d T_A)^{1/2}$. 在这个意义上 Alfvén 波的周期短。
这意味着不稳定的撕裂模，对成长向常数不敏感，而电流片的宽度太细
在内部电阻区即吸收耗散产生的热量，绝大部分热能都已耗散掉。
小于 6% 的能量耗散于流体的运动

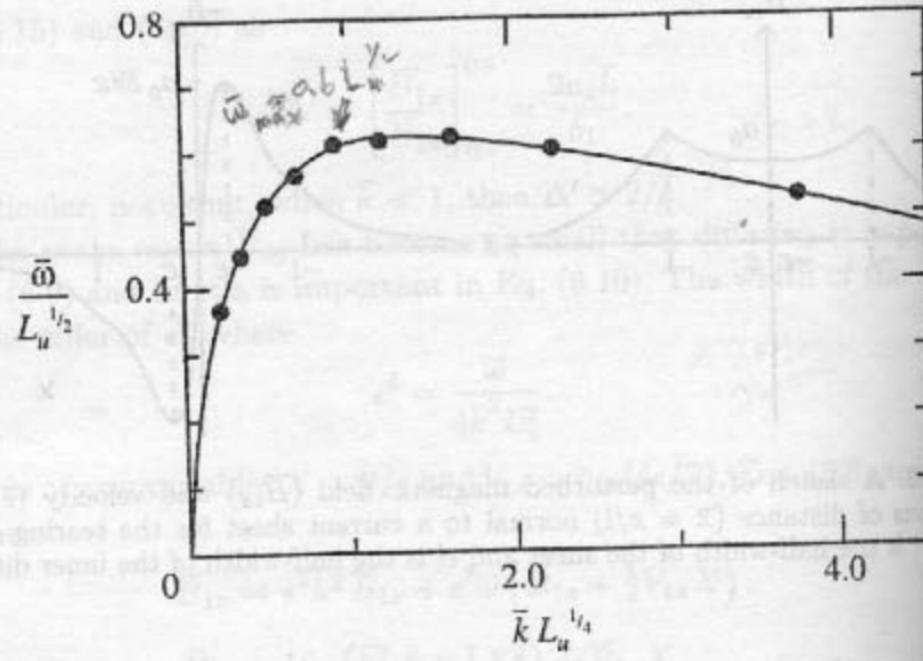


Fig. 6.4. A sketch of the tearing-mode dispersion relation $\omega = \omega(k)$ when $k l \ll 1$, where k is the wave-number, l is the scale of magnetic variations (such as a current-sheet half-width), and L_u is the Lundquist number (after Furth et al., 1963).

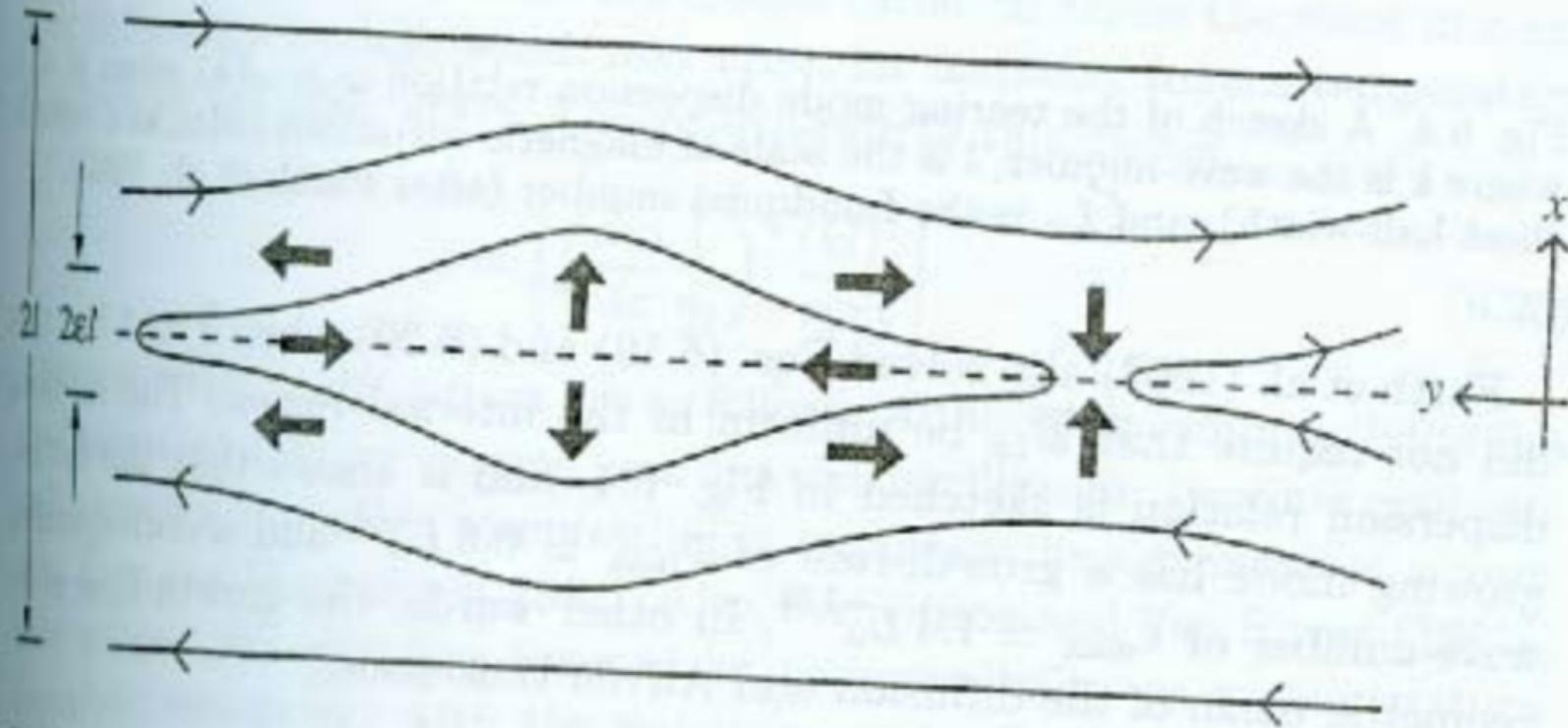


Fig. 6.3. Plasma velocity (thick arrows) and magnetic field lines (thin arrows) for the tearing-mode instability.

7.5.3 电流对流不稳定性 (Current convective instability)

参考“等高
与重力集解
说录”
P.P. 1984-2006
牛顿力学

$$\mu_e = -\frac{e}{m_e c^2 n}$$

$$U_{de} = n_e e V_e$$

S. 我的等离子体物理
讲义稿。

$$\therefore \sigma \sim \frac{1}{n}$$

$$\frac{d\sigma}{dx} \sim -\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$$

$$\frac{d\sigma}{dx} < 0, \frac{dn}{dx} > 0$$

$$(\sigma \downarrow, \sigma \downarrow, \eta \uparrow)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$$

$$n = n_0 + n_1$$

$$\therefore \frac{d\sigma_1}{dx} \sim -\frac{1}{n_0} \frac{dn_1}{dx}$$

$$-\frac{1}{n_0} \frac{dn_1}{dx}$$

$$\sim -\frac{1}{n_0} \frac{dn_1}{dx}$$

$$(\because \frac{dn_1}{dx} \text{ 很大})$$

设均匀磁场 \vec{B}_0 方向，沿着 \vec{B}_0 有很弱的电流 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ，因为弱，产生的磁场远小于 \vec{B}_0 。

弱电离等离子体中，电导率梯度可忽略不计

$$\text{因为 } \sigma = n_e e |\mu_{el}| + n_i e |\mu_i| \sim \frac{1}{n} \quad (\text{完全电离: 等离子体中}\newline \text{没有带电粒子, 电导率很大})$$

n 为迁移率

加入扰动元 $\left\{ \begin{array}{l} n_1 \\ \vec{E}_1 \\ \varphi_1 \end{array} \right\}$

$$\left(\begin{array}{l} n_1 \\ \vec{E}_1 \\ \varphi_1 \end{array} \right) \sim \exp(i\omega t + ik_y y + ik_z z)$$

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_1 = (\sigma_0 + \sigma_1)(\vec{E}_0 + \vec{E}_1), \text{ 且 } j_0 \approx 0.$$

$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{x}$$

纵向扰动电流

$$j_{1x} = \sigma_1 E_{0x} + \sigma_0 E_{1x}$$

①

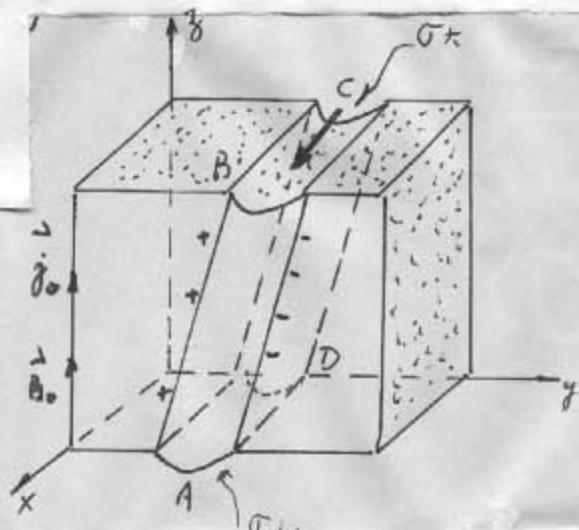
从式 $\frac{d\sigma_1}{dx} \sim -\frac{1}{n_0} \frac{dn_1}{dx}$ 可见。设 $\frac{d\sigma_1}{dx}$ 为常数，则 $\frac{dn_1}{dx} > 0$ 。随 x 增加方向， n_1 增大，等离子体 x 方向有引力 $\frac{dn_1}{dx} \hat{x} = \tilde{g} \hat{x}$ ，且 $\vec{B} = B_0 \hat{y}$ ，作用有漂移速度 $\frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \hat{x} = \frac{1}{c} \tilde{g} B_0 (-\hat{y})$ ，因此等离子体沿 $-\hat{y}$ 方向，负电荷比正电荷移向所向，应沿扰动电流的方向 \hat{y} 。再因 \vec{B} 下降，有漂移速度 $\sim \frac{E_0}{B_0} \hat{x} \sim \frac{E_0}{B} \hat{x}$

进一步推得 $\frac{d\sigma_1}{dx} < 0$ ，一脉相成

$$U_{1x} = \frac{\vec{E}_1 \cdot \vec{B}_0}{B_0} = \frac{\vec{E}_{1y}}{B_0}$$

设电场元 \vec{E}_1 ($\vec{E}_0 \vec{E}_1 \ll 0$) 且 $\vec{E}_1 = -\nabla \varphi_1$

$$E_{1y} = -ik_y \varphi_1$$



因为有密度梯度，类似于 $\frac{D\eta}{dx} \gg 0$ ，有 $\frac{D\sigma}{dx} \gg 0$ 。

$$\frac{2\sigma}{\sigma} + \vec{v} \cdot \nabla \sigma \gg 0$$

扰动底有

$$\therefore \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + U_{1x} \frac{d\sigma_0}{dx} \gg 0$$

$$-i\omega \sigma_1 + \frac{\vec{E}_0}{B_0} \frac{d\sigma_0}{dx} = -i\omega \sigma_1 - \frac{i k_y q_i}{B_0} \frac{d\sigma_0}{dx} = 0 \quad \rightarrow$$

扰动的增长时间远大于等离子体中电荷的弛豫时间，因此可以认为整个过程中，等离子体保持准电中性，因此纵向扰动电流 $j_{1y} = 0$

对于①式：

$$\sigma_1 \vec{E}_0 + \sigma_0 \vec{E}_1 = j_{1y} \vec{s}^0 = 0 \quad \begin{matrix} (j_0 + j_1) \vec{s}^0 \\ j_0 \approx 0 \end{matrix}$$

$$\vec{E}_{1y} = -i k_y \Psi_1$$

$$\sigma_1 \vec{E}_0 - i k_y \Psi_1 \vec{s}^0 = 0 \quad ③$$

由②

$$i\omega = - \frac{i k_y \Psi_1}{B_0 \sigma_1} \frac{d\sigma_0}{dx} \quad ④$$

由③

$$\sigma_1 = \frac{i k_y \Psi_1}{\vec{E}_0} \sigma_0 \quad ⑤$$

③代入④：

$$i\omega = - \frac{i k_y \Psi_1 \vec{E}_0}{B_0 i k_y \Psi_1 \sigma_0} \frac{d\sigma_0}{dx} \quad (r = -i\omega)$$

$$\text{设 } Y = i\omega = \frac{k_y}{k_x} \frac{\vec{E}_0}{B_0} \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{dx} \quad ⑥$$

γ 与 $\frac{k_y}{k_x}$ 及 $\frac{1}{\sigma_0}$ 有关，即与扰动相对于子和波的倾斜角有关。由 $\frac{k_y}{k_x} \sim \frac{1}{\sigma_0} \sim \frac{d\sigma_0}{dx} \sim \frac{1}{\lambda}$ 时，引起电流对流速度增加。

扰动 \rightarrow 电荷分离 $\rightarrow \vec{E}_{1y} \rightarrow$ 速率速度 U_x $\int \rightarrow$ ④式
 $n_1 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow$ 电荷半径扰动 σ_1 方程 $\int \rightarrow$ ⑥式
 电中性 $j_{1y} = 0$ $\int \rightarrow$ ④式

7.5.4 车辆行驶运动的热力学稳定性

假设热平衡状态下，当从其以后大气中将发生不稳定性的最高温度处于平衡态，绝热 T_0 ，密度 P_0 ，单位体积内机械加热量为 hP_0 （ h 为常数），无辐射的辐射 $\chi P_0 T^{\alpha}$ （ χ, α 为常数）；则有

$$hP_0 = \chi P_0^2 T^{\alpha}$$

$$h = \chi P_0 T_0^{\alpha} \quad T_0 \text{ 为平衡态值.} \quad ①$$

式为热平衡状态的表达式。

压强不变(P_0)时，运动下的质量方程（对于单向流动）

因为压强不变
所以 C_p

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = h - \chi P T^{\alpha} \quad ②$$

$$P = \frac{m P_0}{k_B T}$$

代入②)

$$\begin{aligned} C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \chi P_0 T_0^{\alpha} - \chi P T^{\alpha} \\ &= \chi P_0 T_0^{\alpha} \left(1 - \frac{P}{P_0} \frac{T_0^{\alpha}}{T^{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{P_0}{P} = R T_0, \quad \frac{P_0}{P} = R T \quad (P=P_0 \text{ 保持不变})$$

$$\therefore \frac{P}{P_0} = \frac{P_0/R T_0}{P_0/R T} = \frac{T_0}{T}$$

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \chi P_0 T_0^{\alpha} \left(1 - \frac{T_0^{\alpha-1}}{T^{\alpha-1}} \right) \quad ③$$

若 $\alpha < 1$, T 为减力, 即 $T < T_0$. 左边为正, 则 $\frac{\partial T}{\partial t} < 0$
 $\underbrace{\text{同理}}$

运动将速度, 产生不稳定性

$$\alpha: -2 \rightarrow +2 \quad T = 10^{4.6} - 10^{4.9}$$

$$\text{Priest 2. 水平风速} T_{\text{wind}} = \frac{C_p}{(\chi P_0 T_0)^{\alpha-1}} \quad (\text{风速与风压})$$

系统总有效率 $C_p T_0$, 脉冲耗散为 $\chi P_0 T_0^\alpha$ (χ 为单位脉冲)
 单位脉冲 χ 为单脉冲耗散

7.5.4 Kelvin-Helmholtz 2. 稳定性

二种 2.1 之稳定性判据条件

若 $P_2 > P_1$, 称 Rayleigh-Taylor

\rightarrow 理论判据为不稳定的。反之，安

\rightarrow $V_2 > V_1$ 为不稳定的。即判流体为

K-H 2. 稳定性。

$$\text{色散方程为 } \frac{\omega}{k} = \frac{(P_1 V_{10} + P_2 V_{20}) \pm i(V_{20} - V_{10}) \sqrt{P_1 P_2}}{P_1 + P_2}$$

可见 $V_1 + V_2$, $\omega - \text{一定值} \rightarrow$ 不稳定

计入重力 \vec{g}

$$\omega = \frac{1}{P_1 + P_2} \left[k(P_1 V_{10} + P_2 V_{20}) \pm \left(-P_1 P_2 k^2 (V_{10} - V_{20})^2 + g R (P_2^2 - P_1^2) \right)^{1/2} \right]$$

重力有双稳态

不稳定性条件下，重力双稳态也有双稳态。

假设等离子流体为不可压缩，完全导电， $\sigma \rightarrow \infty$. 理想流体，粘滞 $\nu = 0$. (考虑重力影响)

方程：

$$\nabla \cdot \vec{v}_i = 0$$

$$P_i \frac{D \vec{v}_i}{Dt} = -\nabla (P_i + \frac{1}{2\rho} \vec{B}_i^2) + \frac{\vec{B}_i}{\mu} \cdot \nabla \vec{B}_i$$

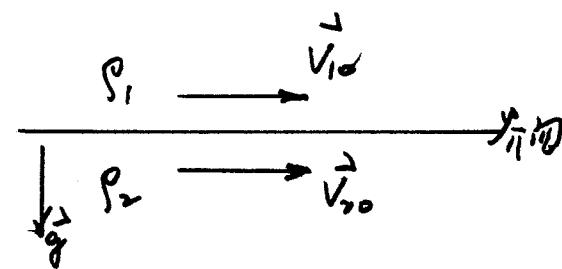
$$\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_i \times \vec{B}_i)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_i = 0$$

(3. 斯托克斯)

(7-1)

$i = 1, 2$. 为 $\vec{v}_1 = 180^\circ / \vec{v}_2$



i. 讨论无扰动，空间断面边缘与体的物理量为

$$\vec{V} = \vec{V}_{i0} + \vec{V}_i', \quad \vec{B} = \vec{B}_{i0} + \vec{B}_i'. \quad P = P_{i0} + P_i'$$

因无扰动而压缩，令扰动量 $P_i' = 0 \quad P = P_i + P_i' = P_i$

常，“”为扰动量。代入(7-1) 为判别线性方程组

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V}_i' &= 0 & ① \\ \frac{\partial \vec{V}_i'}{\partial t} + (\vec{V}_{i0} \cdot \nabla) \vec{V}_i' &= -\frac{1}{\rho_i} \nabla (P_i' + \frac{1}{\mu} \vec{B}_{i0} \cdot \vec{B}_i') + (\frac{1}{\mu} \vec{B}_{i0} \cdot \nabla) \vec{P}_i' & ② \\ \frac{\partial \vec{B}_i'}{\partial t} &= (\vec{B}_{i0} \cdot \nabla) \vec{V}_i' - (\vec{V}_{i0} \cdot \nabla) \vec{B}_i' & ③ \\ \nabla \cdot \vec{B}_i' &= 0 & ④ \end{aligned} \quad (7-2)$$

假设扰动量为

$$(P_i', \vec{V}_i', \vec{B}_i') = (\bar{P}_i', \bar{V}_i', \bar{B}_i') e^{i(\omega t - k_x x - k_y y) \pm k_z z} \quad \left\{ \begin{array}{l} +, \delta > 0 \\ -, \delta < 0 \end{array} \right.$$

即 $\vec{V}_i' \propto e^{i(\omega t - k_x x - k_y y) \pm k_z z}$ 且 $\vec{B}_i' \propto e^{i(\omega t - k_x x - k_y y) \pm k_z z}$

代入(7-2-③)及(7-2-④)式中，得 $\bar{V}_i' \propto \bar{B}_i'$

$$\rho_i (\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{i0}) \bar{V}_i' = \pm i k (\bar{P}_i' + \frac{1}{\mu} \vec{B}_{i0} \cdot \bar{B}_i') - \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_{i0}) \bar{B}_i' \quad (7-3)$$

$$(\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{i0}) \bar{B}_i' = - (\vec{k} \cdot \vec{B}_{i0}) \bar{V}_i' \quad (7-4)$$

$$\therefore \bar{B}_i' = \frac{-(\vec{k} \cdot \vec{B}_{i0}) \bar{V}_i'}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{i0}}$$

代入(7-3)

$$\left[\rho_i (\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{i0})^2 - \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_{i0})^2 \right] \bar{V}_i' = \pm i k (\bar{P}_i' + \frac{1}{\mu} \vec{B}_{i0} \cdot \bar{B}_i') (\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{i0}) \quad (7-5)$$

边界条件：界面两边压强不相等

$$[P + \frac{1}{\mu} B^2] = 0, \quad [] \text{ 表示 } \text{ 左侧加减右侧的压强差}$$

对于平衡态可写成：

$$P_{i0} + \frac{1}{\mu} B_{i0}^2 = P_{i0} + \frac{1}{\mu} B_{i0}^2 \quad (7-6)$$

有转动时，边界平衡条件写成：

$$P'_1 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_{10} \cdot \vec{B}'_1 = P'_2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_{20} \cdot \vec{B}'_2 \quad (7-7)$$

边界角速度转动方程

$$\dot{\gamma} = \bar{\zeta} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

$$V'_{i\theta} = \frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} + (\vec{V}_{i0} \cdot \vec{\nabla}) \dot{\gamma}$$

$$\bar{V}'_{i\theta} = i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{i0}) \bar{\zeta} \quad (7-8)$$

(7-8) 式代入 (7-5) 式

$$[\bar{P}_i (\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{i0})^2 - \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_{i0})^2] = \pm K (\bar{P}'_i + \frac{1}{\mu} \vec{B}_{i0} \cdot \vec{B}'_i)$$

根据 (7-7) 式，上式简化为

$$\bar{P}_i (\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{i0})^2 - \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_{i0})^2 = - [\bar{P}_2 (\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{20})^2 - \frac{1}{\mu} (\vec{k} \cdot \vec{B}_{20})^2]$$

(右端的符号是因左边已由 K 约去而得)

$$\bar{P}_i (\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{i0})^2 + \bar{P}_2 (\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{20})^2 = \frac{1}{\mu} [(\vec{k} \cdot \vec{B}_{i0})^2 + (\vec{k} \cdot \vec{B}_{20})^2]$$

$$\omega = \frac{1}{\bar{P}_i + \bar{P}_2} \left\{ \bar{P}_i (\vec{k} \cdot \vec{V}_{i0}) + \bar{P}_2 (\vec{k} \cdot \vec{V}_{20}) \pm \left[\frac{\bar{P}_i + \bar{P}_2}{\mu} [(\vec{k} \cdot \vec{B}_{i0})^2 + (\vec{k} \cdot \vec{B}_{20})^2] - \bar{P}_i \bar{P}_2 (\vec{k} \cdot \vec{V}_{i0} - \vec{k} \cdot \vec{V}_{20}) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (7-9)$$

可见只要物体在切向间断被约束为

$$\frac{1}{\mu} [(\vec{k} \cdot \vec{B}_{i0})^2 + (\vec{k} \cdot \vec{B}_{20})^2] \geq \frac{\bar{P}_i \bar{P}_2}{\bar{P}_i + \bar{P}_2} (\vec{k} \cdot \vec{V}_{i0} - \vec{k} \cdot \vec{V}_{20})^2 \quad (7-10)$$

从 (7-10) 式 取 $\vec{B} = 0$, 肯定成立

若取 $\vec{V}_{i0} - \vec{V}_{20}$ 的方向即 x 方向，被约束为 (7-10) 式为

$$\frac{1}{\mu} [(k_x B_{10x} + k_y B_{10y})^2 + (k_x B_{20x} + k_y B_{20y})^2] \geq \frac{\bar{P}_i \bar{P}_2}{\bar{P}_i + \bar{P}_2} k_x^2 (\vec{V}_{i0} - \vec{V}_{20})^2$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} [(B_{10x}^2 + B_{20x}^2) + 2 \frac{k_y}{k_x} (B_{10x} B_{10y} + B_{20x} B_{20y}) + (\frac{k_y}{k_x})^2 (B_{10y}^2 + B_{20y}^2)] \\ & \geq \frac{\bar{P}_i \bar{P}_2}{\bar{P}_i + \bar{P}_2} (\vec{V}_{i0} - \vec{V}_{20})^2 \end{aligned} \quad (7-11)$$

按前面 1, 2
完成的方程
由(7), 斯巴利
等. 请看

二边的转动
是否能忽略
→ 不考虑

討論:

① 若 $\vec{B}_{10}, \vec{B}_{20} \parallel (\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20})$, 即 \vec{B} 与 \vec{x} 方向

$$B_{10y} = B_{20y} = 0$$

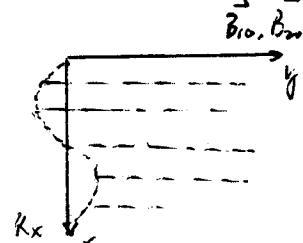
$$\frac{1}{\mu} (B_{10}^2 + B_{20}^2) \geq \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} (\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20})^2$$

边缘稳定状态时的平行于 \vec{V} 的最长元长, $\vec{B} \parallel \vec{V}$ 时
磁场场强稳定有效.

② $\vec{B}_{10}, \vec{B}_{20} \perp (\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20})$ 时, 即 \vec{B} 与 \vec{y} 方向, $B_x = 0$
稳定条件变为:

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{k_y}{k_x} \right)^2 (B_{10}^2 + B_{20}^2) \geq \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} (\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20})^2$$

- i. 若无扰动仅沿 \vec{x} 方向, $k_x \neq 0, k_y = 0$. $\therefore \vec{B}_{10}, \vec{B}_{20}$ 与 \vec{y} 方向
(7-10) 左边 $k_y \cdot \vec{B} = 0$. 稳定. 这时 \vec{x} 方向的相互磁力
与 \vec{x} 方向一起运动, 既有张力, 也有张力
- ii. 若 $k_x = 0$, 则绝对稳定. $k_y \neq 0$, 扰动沿 \vec{y} 方向.



$$\text{i. } T_y D_c = \left| \frac{k_y}{k_x} \right| = \left[\frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} \frac{(\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20})^2}{B_{10}^2 + B_{20}^2} \cdot \mu \right]^{1/2}$$

若 k_y 与 \vec{x} 轴夹角 $\theta \geq D_c$ 时稳定, 反之不稳定

③ $\vec{B}_{10}, \vec{B}_{20}$ 在 x, y 平面上不为零, 即 $\vec{B}_{10}, \vec{B}_{20}$ 与平行于 $(\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20})$, 且 $k_y \neq 0$, $\sqrt{\frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}}$
也不垂直于 $(\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20})$ 且 $k_y \neq 0$, $\sqrt{\frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}}$

$$f\left(\frac{k_y}{k_x}\right) = \frac{1}{\mu} [(B_{10x}^2 + B_{20x}^2) + \frac{2k_y}{k_x} (B_{10x} B_{10y} + B_{20x} B_{20y}) + \left(\frac{k_y}{k_x}\right)^2 (B_{10y}^2 + B_{20y}^2)]$$

$$\text{由 } \frac{df}{d\left(\frac{k_y}{k_x}\right)} = 0, \quad \frac{d^2 f}{d\left(\frac{k_y}{k_x}\right)^2} > 0 \quad \text{求解}$$

$$\frac{k_y}{k_x} = - \frac{B_{10x} B_{10y} + B_{20x} B_{20y}}{B_{10y}^2 + B_{20y}^2}$$

$$f_{\min} = \frac{1}{\mu} \frac{(B_{10x}B_{20y} - B_{10y}B_{20x})^2}{B_{10y}^2 + B_{20y}^2}$$

$$\text{若 } f_{\min} \geq \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_{20})^2$$

成立

MHD 动向问题而稳定性判据条件

$$\frac{1}{\mu} \frac{(B_{10x}B_{20y} - B_{10y}B_{20x})^2}{B_{10y}^2 + B_{20y}^2} \geq \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

这是 K-H 稳定性变成稳定性的一个条件。

第八章 黑子

对太阳黑子的理论理解得有利于磁流体力学的发展。

本章要讨论一些基本问题，诸如磁对流 (magnet convection) 磁浮力 (magnetic buoyancy)，黑子的冷却，黑子的平衡结构，黑子的形成等。

8.1 磁对流

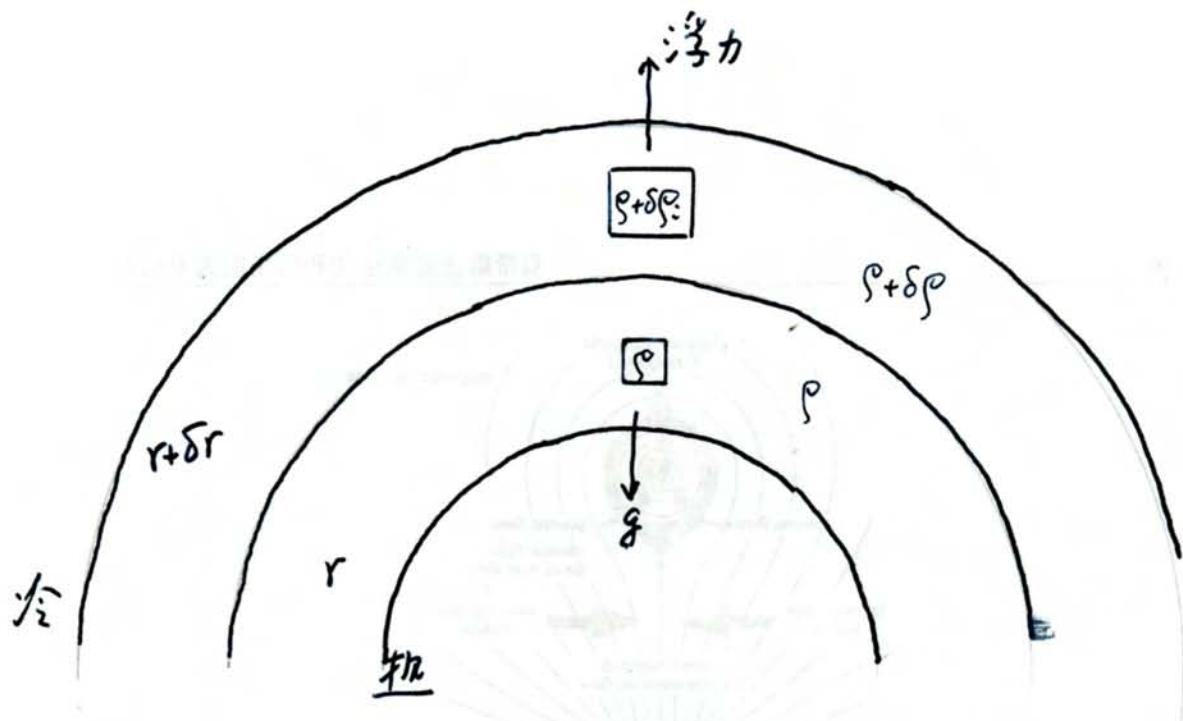
- 磁场中的热对流简称磁对流。
- 处理太阳对流区的运动较为困难：非线性，可压缩流体，非常等问题。很可能受穿过该区的强磁流管的禁锢。
- 强烈的对流可能解释磁流管的集中
- 对流化管内的受抑制可能说明黑子为什么冷却。

8.1.1 物理效应

1. 当没有磁场时，底部加热的流体是不稳定的。温度梯度超过绝热情况下的温度梯度时，会启动对流运动。

利用流体元分析：当垂直温度梯度 $-\frac{dT}{dr}$ 很大时，不稳定性就发生。

① 考虑 3 层等离子体，静力学平衡，应力 $P(r)$ ，温度 $T(r)$ ，密度 $\rho(r)$



流体元从 r 移动到 $r+\delta r$. [流体元内密度改变 $\delta\rho$, 而周围环境密度改变 $\delta\rho'$]

我们假设流体元的垂直方向运动很慢以至于水平方向的压力保持不变。[$\delta P_i = \delta P$] 流体元内外密度有差别，又有浮力存在，如果满足

$$\delta P_i < \delta P \quad (1.4)$$

则一直上升。[上浮即 $(P_0 - P_i)g > 0$, 由热向冷的地方走, $\therefore \delta P_i, \delta P = \delta P'$ 均为正由此可得(1.4)式]

③ 理想气体定律

$$P = \frac{k_0}{m} \rho T$$

可得当压强、密度和温度变化之间的关系,

$$\frac{\delta P_i}{P} = \frac{\delta \rho_i}{\rho} + \frac{\delta T_i}{T} \quad (1.5)$$

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta T}{T}$$

注意：我们已假设水平方向压力不变，即 $\delta P = \delta P_i$ 。

根据(1.4), (1.5)式, 可得 $\delta T_i > \delta T$

$$\text{即 } -\delta T_i < -\delta T$$

(即流体元内温度变化的绝对值小于环境
温度变化的绝对值)

满足(1.4)式, 流体元就上升. 为什么?

$$-\frac{dT}{dr} > -\frac{dT_i}{dr} \quad (1.6)$$

成立. 流体元就上升, 发生不稳定.

从(1.6)式看, 环境温度随高度下降, 即流体元内的温度 T_i 快, 就有不稳定性. 即环境温度梯度绝对值大于流体内部梯度的绝对值.

③ 流体元由下列关系制约.

$$P_i = \frac{k_B}{m} \rho_i T_i$$

$$\frac{dP_i}{dr} = -\rho_i g$$

由理想气体定律可得 $\frac{dT_i}{dr} = \frac{m}{k_B} \left(\frac{1}{\rho_i} \frac{dP_i}{dr} - P_i \rho_i^{-2} \frac{d\rho_i}{dr} \right)$

假如运动很快, 以至于忽略流体元热交换, 或者说运动的特征时间远大于热交换的特征时间, 则流体元的运动是绝热过程.

$$\frac{P_i}{\rho_i^r} = \text{const.}$$

$$\frac{dP_i}{dr} = \frac{1}{r} \frac{\rho_i}{P_i} \frac{dP_i}{dr}$$

将 $\frac{dP_i}{dr}, \frac{d\rho_i}{dr}$ 代入 $\frac{dT_i}{dr}$ 表达式

$$\frac{dT^e}{dr} = - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g_m}{k_B} \quad (1.7)$$

$\frac{dT^e}{dr}$ 称为绝热温度梯度

因此对流不稳定判别式(1.6)，可以改写为

$$-\frac{dT}{dr} > \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g_m}{k_B} \quad (1.8)$$

称为 Schwarzschild 条件。

(1.8) 式中有几点值得注意：

dT 为流体元周围环境温度变化本身为负。

(1.8) 式左边总大于零。

由此可推得 $\delta T^e, \delta T$ 本身均为负。

(1.6) 式可写为 $|\frac{dT}{dr}| > |\frac{dT^e}{dr}|$

2. 流体的粘性会改变上述对流不稳定的判据。

可作如下估计：

等高处流体元上升时，浮力为 $\rho_e \Delta P$ ($\Delta P = \rho_e - \rho_i$, e 指环境， i 指流体元内部)，被粘滞力所平衡。

流体力学的运动方程，粘滞力项为 $\mu \nabla (\nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{v})$

其中 μ 为流体力学粘性系数（可参阅流体力学书籍），近似为 $\sim \rho v / d$ ，
 v 为垂直方向速度， d ：移动距离。

密度差 $\Delta P = \rho \alpha \Delta T$ ，式中 α 为体积膨胀系数。因为由盖吕萨克定律

压强一定时, $V_t = V_0(1 + \alpha T)$, 式中 α 为体积膨胀系数, 可推出
 $\Delta P = \text{表达式}$. 压力和惯常力的平衡即为

$$\rho g \alpha \Delta T \approx \pi^2 \rho v^2 / d^2$$

如果等高流体元不处于绝热过程, 有热量流入. 热传递
 系数为 K , 不稳定性条件是不变的. 我们作粗略估计, 量化寻找稳定条件.

$$\text{能量方程} \quad \rho T \frac{D\dot{s}}{Dt} = -\mathcal{L} \quad (2.28a)$$

S : 熵, \mathcal{L} : 热量损耗系数 (热量耗散和损失的表示)
 该方程告诉我们: 单位体积的热量增加率与热量输入.

$$\mathcal{L} = \text{热量损耗率} - \text{热量增加率}$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + L_r - \vec{j}_v \cdot \vec{H}$$

\vec{q} : 热流矢量. 流体层是假定平行的

L_r : 产热率

\vec{j}_v : 电磁损耗

H : 其他加热源和

作为粗略估计, 仅考虑热流矢量 $\vec{q} = -K \nabla T$. (2.33)

设 K 为常数, $\rho \frac{DQ}{Dt} = K \nabla^2 T \quad K: \text{一热传导系数}$

同特征标被代入, 作为近似

$$\frac{Q}{\pi} \sim K \frac{T}{d^2}$$

t : 特征时间, d : 流体元移动距离

$$\frac{Q_T}{\pi} \sim \frac{K}{d^2}$$

热量的衰减 Q 近似为内能 U 的改变, $Q \sim U \sim k_B T$

$$\frac{Q}{T} \sim k_B$$

$$\frac{Q}{V} \sim \frac{d^2}{\kappa}$$

对流的不稳定性条件为 $\frac{d}{V} < \frac{d^2}{\pi^2 \kappa}$

即液体元移动距离 d 的时间 $\frac{d}{V}$ 小于热扩散平滑化时间 τ_{smooth}
(时间常数 $\frac{d^2}{\pi \kappa}$), 则有不稳定性产生

设 $V > \frac{\pi^2 \kappa}{d}$, 再由 $\rho g \alpha \Delta T \approx \pi^2 \rho V \frac{V}{d}$ 得 $V = g \alpha \Delta T \frac{d^2}{\pi^2 \kappa}$

$$g \alpha \Delta T \frac{d^2}{\pi^2 \kappa} > \frac{\pi^2 \kappa}{d}$$

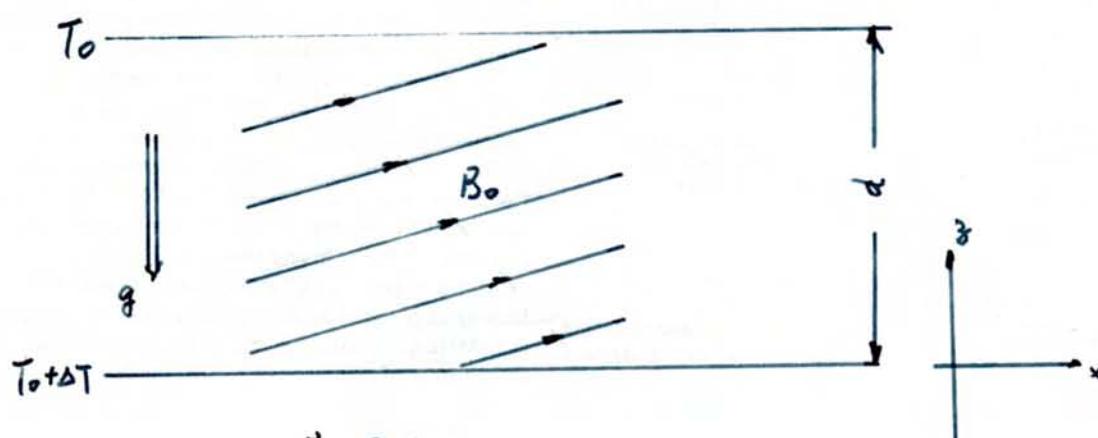
$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{\kappa V} > \pi^4 \quad (8.1)$$

该式为对流不稳定性判据, Ra 称为 Rayleigh 数.

3. 磁场的影响

磁感应力能起阻碍作用, 因此对流不稳定性将受到抑制作用.

通过第 8.1 节物理解释



第 8.1

取一水平层, 底部加热, 温差 ΔT , 厚为 d . g 在 $-z$ 方向, 平衡层: 均匀 \vec{B}_0 , \vec{B}_0 (在 $x-z$ 平面内)

各点的温度可表示为 $T_0(\xi) = T_0 + \Delta T(1 - \frac{\xi}{\xi_0})$

假设磁力线在垂直方向有一个位移 ξ , 磁力线形成弓形曲线, 弓数为 λ , $\xi = \lambda \sin kx$

$$\begin{aligned} \text{曲率半径 } R &= \pm \frac{(1 + \xi'^2)^{3/2}}{\xi''} \\ &= - \frac{(1 + \xi'^2)^{3/2}}{\lambda''} \quad (\text{凸的那部分取}-\frac{1}{\lambda}) \\ &= - \frac{[1 + (\lambda k \cos kx)^2]^{3/2}}{-\lambda^2 k^2 \sin kx} \end{aligned}$$

若 $kx = \frac{\pi}{2}$ 时, 曲率半径为 $R = \frac{1}{k^2 \lambda}$

$$\begin{aligned} \text{Lorentz 力} &= \vec{j} \times \vec{B} \\ &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}/\mu - \nabla \frac{\vec{B}^2}{2\mu} \end{aligned}$$

磁感应力: $(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}/\mu$

令 $\vec{B} = B \vec{s}$, \vec{s} : 1² 磁力线方向的单位矢量

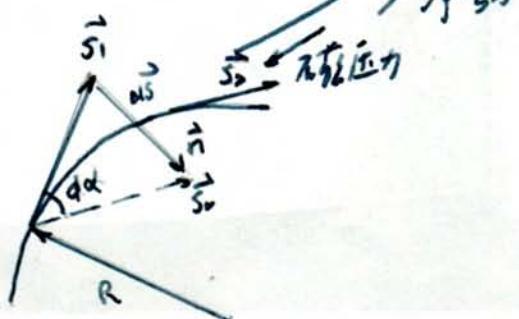
磁感应力可写成 $\frac{B}{\mu} \frac{d}{ds}(B \vec{s})$, 即 B 方向的方向导数.

$$\begin{aligned} \frac{B}{\mu} \frac{d}{ds}(B \vec{s}) &= \frac{B}{\mu} \frac{\partial B}{\partial s} \vec{s} + \frac{\vec{B}}{\mu} \frac{d\vec{s}}{ds} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) \vec{s} + \frac{B^2}{\mu} \frac{\vec{n}}{R} \end{aligned} \quad (2.57)$$

右边第一项为 弯曲部 分用以抵消各向同性的磁感应力 [化- \vec{s} 方向]

第二项为 净 感应力

$$\left[\frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{ds}, \text{ 按曲率定义 } \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} \right. \\ \left. \frac{ds}{d\alpha} \text{ 且 } d\alpha \rightarrow 0, \text{ 即 } \vec{n} \text{ 方向} \right]$$



综上所述，抵消磁压力后，净磁吸力为 $\frac{B_0^2 \mu}{\mu R^2}$ ，可以产生恢复力
代入 R，为 $\frac{B_0^2 K_3}{\mu}$

密度 ρ 的变化 $\Delta\rho = \rho_0 \alpha \Delta T$

温度梯度 $\frac{\Delta T}{d}$ ，向上传播了，一边减少 $\frac{\Delta T}{2}$

从而密度减少 $\rho_0 \alpha (\frac{\Delta T}{2})$

浮力： $g \Delta \rho$ ，因此浮力的变化为 $g \rho_0 \alpha \frac{\Delta T}{2}$

如果有不稳定性存在，即浮力的变化随传播进一步增大，则安培力能克服磁吸力

$$\frac{\rho_0 g \alpha \Delta T}{d} > \frac{K^2 B_0^2}{\mu} \quad (8.2)$$

4. 对流（浮力大于引力的流动 翻滚对流 (overturning convection)）

发生的条件

i. 仰冲磁场足够弱 或者 扰动波长大于约长

ii. 流体元沿磁力线方向流动。（因为沿磁力线方向运动，没有 Lorentz 力，从而没有磁吸力）

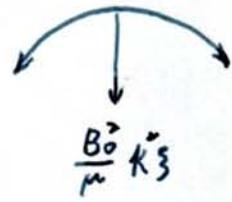
5. 讨论 热导系数 K ，磁耗常数 γ

i. 以上为发生急速的翻滚对流的条件。若上述条件 2. 得满足，耗散效应将允许较为平和的对流产生，起因于漏泄 (Leak) 2. 稳定性，或者是过稳定性 (overstability)

增长的振荡状态 (Instability)

i. 漏泄 磁耗常数 γ 和热导系数 K 的作用就是使磁场和热量在等离子体中耗散。

γ 越大，阻力和导热率越大



因此 (8.2) 式的磁力部分 (右边) 要除以 η . (浮力部分 (左边) 除以 k)

$$\frac{\rho_0 g \Delta T}{k} > \frac{k^2 B_0^2}{\mu \eta}$$

$$\frac{\rho_0 g \Delta T \eta}{k} > \frac{k^2 B_0^2 \nu}{\mu} \quad (8.3)$$

例如 $\kappa < \eta$, 则对于较小的 ΔT , 仍有不稳定性.

i. 稳定性

① 若条件 $\frac{\rho_0 g \Delta T}{k} > \frac{k^2 B_0^2}{\mu}$ (产生翻滚对流的条件) 不满足.

则通过耗散作用仍能维持平稳的对流.

② 磁粘常系数 η 和热传导系数 k , 使磁场和热量化等
高维中扩散

③ η, k 越大, 磁吸力和浮力变得越大, 因为磁耗散削弱了磁场, 热传导减少了 ΔT . (因此 (8.2) 式也应分别求 κ^{-1}, η^{-1} , 得到修正不稳定性条件 (8.3) 式.)

④ 如果 $\kappa < \eta$, 即为温差 ΔT 小于翻滚对流的 (8.2) 式中的 ΔT_{crit} . 则 (8.3) 式满足. 则仍有不稳定性 - 泄露不稳定性 (leak instability).

ii. 过稳定性 (overstability)

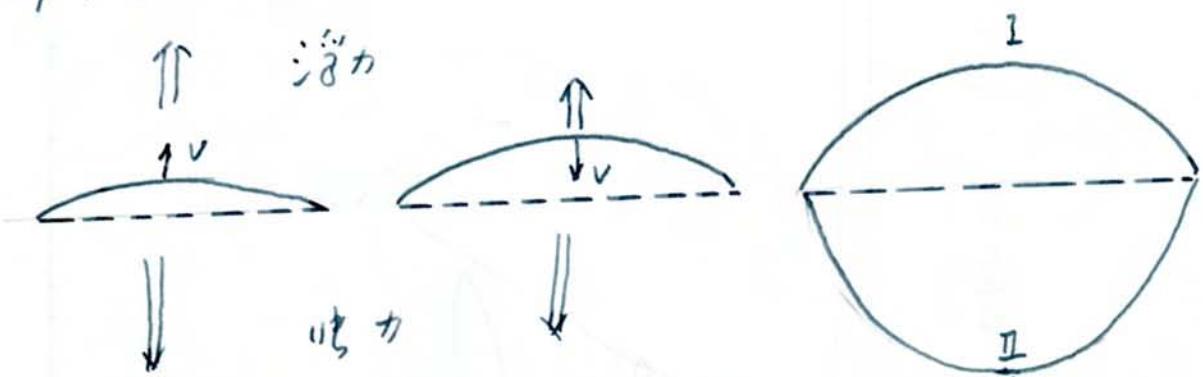
① 假如 $\kappa > \eta$, 且 (8.2) 式不满足 (即无翻滚现象). 导高维仍会有稳定性

② 该例中, 吸力过强, 超过浮力, 会产生垂直方向振荡

③ 振荡过程中, 热传导减少了空间的温差, 从而减小了浮力

reduces the horizontal temperature (and so the buoyancy force) by a factor proportional to κ , while the tension force falls by an amount proportional to η

④ 当等高物体趋于回到平衡位置时，产生不稳定性力(浮力)
和恢复力都已减小，但指向平衡位置的合力增大。
形成螺旋运动



张力大于浮力

$$\frac{k^2 B_0^2}{\mu} > \frac{P_0 g \alpha \Delta T}{d}$$

等高物体向右运动时，
张力、浮力均已减小
且 ∇F 合力指向右
因为 $\kappa > \eta$

张高正 > 张高工

$$\frac{k^2 B_0^2}{\mu} - \frac{k^2 B_0^2 \eta}{\mu} > \frac{P_0 g \alpha \Delta T}{d} - \frac{P_0 g \alpha \Delta T \kappa}{d}$$

$$\frac{k^2 B_0^2}{\mu} (1 - \eta) > \frac{P_0 g \alpha \Delta T}{d} (1 - \kappa)$$

$$\therefore \frac{P_0 g \alpha \Delta T \kappa}{d} > \frac{k^2 B_0^2 \eta}{\mu} \quad (8.4)$$

(等式 1)

$$\kappa > \eta$$

Boyd p. P.P 69-70. 可推得不稳定性系数 $\eta \sim 10^{-4}$ (太阳星)

太阳星

L	T
10^9 cm	10^{14} K

$$T \sim \frac{L}{\eta}, \eta \sim \frac{L^2}{T} = \frac{(10^9)^2}{10^{14}} = 10^{-4}$$

8.1.2 线性稳定性分析

1. 不可压缩等离子流体的标准方程组

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \rho v \nabla^2 \vec{v} - \rho g \vec{\hat{s}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = K \nabla^2 T \quad (3) \quad (2.30 b)$$

对质量方程 (3) 加以说明 (3) 式即为 (2.30 b) 式

i. 质量方程为 $\rho T \frac{DS}{Dt} = -L$

ii. 太阳内部 (光球层以下). 质量的输运主要是辐射或对流, 对流的热传导退于次要地位.

现在主要考虑辐射

$$L_r = \nabla \cdot \vec{g}_r$$

$$\vec{g}_r = -K_r \nabla T \quad K_r: -\text{辐射导热系数}$$

(coefficient of radiative conductivity)

\vec{g}_r : - 辐射流量 (radiative flux)

$$L_r = -K_r \nabla^2 T$$

iii. 质量方程 (2.30c) 可以写成多种形式, 见 P.85

$$\text{取 } \rho \frac{D}{Dt} (C_p T) - \frac{DP}{Dt} = -L \quad (2.30g)$$

定义 热扩散率 (thermal diffusivity)

$$K = \frac{K_r}{\rho C_p}$$

假定压力不变，流体可看作不可压缩

2. 小扰动线性化方程组

作下述假设：

$$K = \text{常数}$$

忽略声波，即不计压力， $\nabla \cdot \vec{N} = 0$ 。

流体可压缩部分归入引力场，即密度扰动仅发生于引力场，写成

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha T_1) \quad T_1: \text{温度扰动}$$

$$\Delta \rho = \rho - \rho_0 = \alpha \rho_0 T_1 (= \rho_1)$$

$$g \Delta \rho = \rho_1 g = 1 \text{ 般力} \quad \rho_1: \text{密度扰动}$$

(称为 Boussinesq 近似)

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 \quad (\text{注意 } \vec{B}_0 \text{ 为给定方向}), \vec{B}_1 \text{ 均匀}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \quad (\text{即 } \vec{v}_0 = 0, \text{ 假设})$$

$$T = T_0(\vec{x}) + T_1$$

下标“1”指为小扰动量，即：1个或1个以上的量可以忽略。

$$\text{①式变成: } \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla \vec{B}^2] + \rho_0 \nabla^2 \vec{v} - \rho_0 g \vec{g}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 \mu} \nabla (\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_0) + \frac{1}{\rho_0 \mu} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 + \nabla^2 \vec{v}_1 - \alpha g T_1 \vec{g} \quad ④$$

$$\text{②式变成: } \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 + \eta \nabla^2 \vec{B}_1$$

$$\text{③式: } \frac{\partial T_1}{\partial t} = \sigma = K D^2 T_0$$

$$T_0 = T_0(\vec{x}) \quad \therefore \frac{d \ln \sigma}{dt} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial \vec{T}_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{T}_0 = K \nabla^2 \vec{T}_1 \quad b)$$

3. 用 $\nabla \times \nabla \times$ 作用于④式 = 边 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \vec{v}_1 = \frac{1}{\rho_0 \mu_0} \nabla (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 + \nu \nabla^2 (\nabla^2 \vec{v}_1) + \alpha g \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{T}_1 \hat{z}$$

3. 分量式为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 V_{13} = \frac{1}{\rho_0 \mu_0} \nabla (\vec{B}_0 \cdot \nabla) B_{13} + \alpha g \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_1 \quad ⑦$$

b) 用 $(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2)$ 作用 ③ 式 = 边

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 V_{13} = \frac{1}{\rho_0 \mu_0} \nabla (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) B_{13} + \alpha g \left(\frac{\partial}{\partial x} - \eta \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_1$$

$$\text{代入} ⑤ \text{ 式} = \frac{1}{\rho_0 \mu_0} \nabla (\vec{B}_0 \cdot \nabla) (\vec{B}_0 \cdot \nabla) V_{13} + \alpha g \left(\frac{\partial}{\partial x} - \eta \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_1 \quad ⑧$$

c) 再用 简化 $(\frac{\partial}{\partial t} - K \nabla^2)$ 作用 ⑧ 式 = 边， 并利用 ⑥ 式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - K \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 V_{13} \\ &= \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla)^2}{\mu_0 \rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} - K \nabla^2 \right) \nabla^2 V_{13} + \alpha g \left(\frac{\partial}{\partial x} - \eta \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) V_{13} \left(- \frac{d \bar{T}_0}{d z} \right) \end{aligned}$$

[注] 为 $\frac{d \bar{T}_0}{d z} = \text{const.}$ 令 $\frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{d \bar{T}_0}{d z}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 V_{13} = \quad (8.5)$$

$$= \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla)^2}{\mu_0 \rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} - K \nabla^2 \right) \nabla^2 V_{13} + \frac{g \alpha \partial T}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{13}}{\partial y^2} \right)$$

(参考: Savage, B. 1969, ApJ. 156, 707)

4. 取(8.5)式的解, 并记

$$V_{12} \sim e^{\omega t} e^{i(k_x x + k_y y)} \sin k_y y \quad (8.6)$$

注意 $e^{\omega t}$ 指数没有虚数 i.

边界条件: 下边界 $y=0 \left\{ \begin{array}{l} \text{左}, V_{12}=0 \\ \text{右}, k_y d = \pi \end{array} \right. , V_{12}=0$

显然 $y=0$ 时, (8.6) 式为空

$y=d$ 时, 假设 $V_{12}=0$, 则 $k_y d = \pi$,

$$k_y = \frac{\pi}{d}$$

(8.6) 式代入(8.5)式中, 有

$$\begin{aligned} & (\omega + \kappa k^2)(\omega + \eta k^2)(\omega + \nu k^2) k^2 \\ &= - \frac{(\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2}{\mu \rho_0} (\omega + \kappa k^2) k^2 + \frac{g \alpha \Delta T}{d} (\omega + \eta k^2) (k_x^2 + k_y^2) \end{aligned} \quad (8.7)$$

i. 设 $\vec{B} = B_0 \vec{x}$, 无耗散 即 $\kappa = \eta = \nu = 0$

$$(\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2 = B_0^2 k_x^2$$

$$\omega^2 = - \frac{B_0^2}{\mu \rho_0} k_x^2 + \frac{g \alpha \Delta T}{d} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}$$

a) 上式表示 $k_x = 0$, 即波沿垂直于 $\vec{B}_0 = B_0 \vec{x}$ 方向传播,

V_{12} 随时间不断增加, 只要 $k_y \neq 0$, 就是不稳定.

就有时谐运动

b) 若 $k_x \neq 0$, 且 $\omega^2 > 0$ 时, 其中一支是不稳定的

$$\omega^2 > 0, \text{ 且 } \frac{g \alpha \Delta T}{d} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} > \frac{B_0^2}{\mu \rho_0}$$

式中的 k_x, k_y 常数应该相同, $\therefore \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 k_y^2} \sim \frac{1}{R^2}$ (书中写成 R^2 ?)

$$\frac{\rho g \alpha \Delta T}{d} > \frac{k^2 B_0^2}{\mu} \quad (\text{浮力} > \text{磁力}, \text{不稳定})$$

这对应(8.2)式

当 $\omega^2 < 0$ 时, $\omega = \pm i\omega$, V_{12} 为振荡频率, 1 行稳定 (无对流)

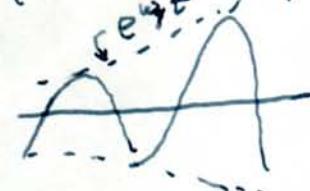
$$\text{即满足 } \frac{k^2 B_0^2}{\mu} > \frac{\rho g \alpha \Delta T}{d} \quad (\text{浮力} > \text{磁力}, \text{稳定})$$

ii. 设 $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, 耗散系数均不为零

$$(\omega + \eta R^2)(\omega + \eta R^2)(\omega + \nu R^2) R^2 = -\frac{B_0^2}{\mu \rho_0} k^2 k_y^2 (\omega + \eta R^2) + \frac{g \alpha \Delta T}{d} (\omega + \eta R^2)(k_x^2 + k_y^2) \quad (8.8)$$

a. $\omega^2 > 0$, 不稳定

b. $\omega = \omega_r + i\omega_i$, 其中 $\omega_r > 0$ \therefore 发生过稳定性 (overstability), 振荡增长的不稳定状态 $e^{\omega_r t} e^{i\omega_i t}$



5. 不稳定性发生的临界条件为 $\omega = 0$, (8.8) 式变为

$$\eta \nu R^2 = -\frac{B_0^2}{\mu \rho_0} k^2 k_y^2 R^2 + \frac{g \alpha \Delta T}{d} \eta R^2 (k_x^2 + k_y^2)$$

$$\text{Hartmann 数} \quad H_a = \frac{B_0 d}{(\mu \rho \nu \eta)^{1/2}} \quad \left(\frac{\text{磁力}}{\text{耗散系数}} \quad P.95 \right)$$

对于大 P $H_a \gg 1$

$$\text{Rayleigh 数} \quad R_a = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{\kappa \nu} \quad \left(\frac{\text{浮力}}{\text{耗散系数} \times \text{粘滞系数}} \quad P.95 \right)$$

代入上式得:

$$\eta \nu R^2 = -H_a^2 k^2 d^2 (d^2 k_y^2) + R_a d^2 R^2 - R_a (d^2 k_y^2)$$

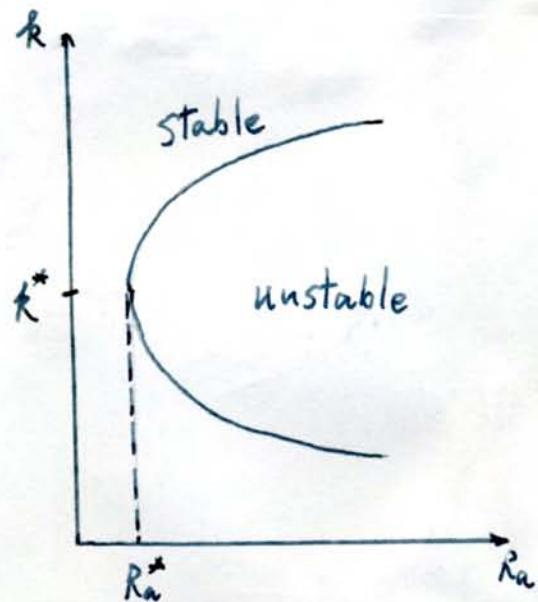
利用 $R^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

$$\therefore k_2 = \frac{\pi}{d} \quad (\text{见计第 } P.14)$$

$$\therefore Ra(d^2R^2 - \pi^2) = \pi^2 Ha^2 d^2 R^2 + d^6 R^6 \quad (8.9)$$

$$Ra = \frac{1}{d^2 R^2 - \pi^2} (\pi^2 Ha^2 d^2 R^2 + d^6 R^6)$$

即 $R_a \sim Ra$ 而 (见 8.3)



见 8.3

均匀磁场，两界对流稳定
定曲线， k 为波数， R_a
为瑞利数

有了 R_a 的最小值 R_a^* ，对应于 R^* ，对于实数 k 的讨论，可以
通过 (8.9) 式转换成三次代数方程，根据存在三个实数根 (d^2R^2 作为
变量) 的条件，可确定 R_a^* (根据方程系数的规律)

(8.9) 式可写成： $x = d^2 R^2$

$$x^3 + \pi^2 Ha^2 x = Ra(x - \pi^2)$$

$$x^3 - (Ra - \pi^2 Ha^2)x + Ra\pi^2 = 0$$

三根为实数的条件为：

$$\frac{1}{4}(Ra\pi^2)^2 + \frac{1}{27}[-(Ra - \pi^2 Ha^2)]^3 \leq 0$$

$$(Ra - \pi^2 Ha^2)^3 = \frac{27}{4}\pi^4 Ra^2$$

$$\text{简化后：} (Ra^* - \pi^2 Ha^2)^3 = \frac{27}{4}\pi^4 Ra^{*2}$$

$$x^3 + px + q = 0$$

$$p = -(Ra - \pi^2 Ha^2)$$

$$q = Ra\pi^2$$

判别实数的条件：

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0$$

(8.9-1)

R_a 与 $\pi^2 H_a^2$ 的值, R_a^* 可以以上述方程中求出。

上述方程解出 R_a 求定极值吗?

$$\text{令 } f(R_a) = (R_a - \pi^2 H_a^2)^3 - \frac{27}{4} \pi^4 R_a^2$$

$$f'(R_a) = 3(R_a - \pi^2 H_a^2)^2 - \frac{27}{2} \pi^4 R_a,$$

$$f''(R_a) = 6(R_a - \pi^2 H_a^2) - \frac{27}{2} \pi^4$$

$$= 6R_a - (6\pi^2 H_a^2 + \frac{27}{2} \pi^4)$$

$f'(R_a) = 0$, 将此式代入 $f''(R_a)$, 得 $f''(R_a) > 0$ 为极大值

为简单起见, 直接将数据代入计算简。

(P.281
 $R_a \approx 10^{10}$ for the sun)

$$\text{P.277 } (1-\pi^2 H_a^2) H_a = 10, R_a = 2650$$

代入 $f''(R_a)$, 可见 $f''(R_a) > 0 \therefore R_a = R_a^*$ 为极大值 (本例中即为极值, 见前面 8.5)

考虑(8.9-1)式

b. 当磁感应强度极强时, 根据 H_a 的定义, $\pi^2 H_a = 0$, 这就与图 7.5.1 中的经典情况 $R_a^* = 27\pi^4/4$ 该成为发生对流不稳定的判据 (8.1) 式的精确形式。当 $R_a > R_a^*$ 就有对流不稳定性。

对于太阳, 常数 $H_a \gg 1, 12 R_a^* \gg 1$,

$$(8.9) \text{ 式可写成: } R_a^{*3} \left(1 - \frac{\pi^2 H_a^2}{R_a^*}\right)^3 = \frac{27}{4} \pi^4 R_a^{*2} \approx 658 R_a^*$$

$$R_a^* \left(1 - \frac{3\pi^2 H_a^2}{R_a^{*3}}\right) \approx 658$$

$$R_a^* \gg 658, \text{ 而且令右边为零}$$

$$\therefore R_a^* \approx \pi^2 H_a^2 \quad (8.10)$$

从 (8.10) 式可知, 随 H_a 增加时, R_a^* 增加, 而 R_a^* 与 R_a 之间的关系是 R_a^* 减少的, 与 (8.3) 式相似。 $\frac{g \alpha \Delta T d^3}{k \nu} \approx \pi^2 \frac{\rho_0 d^2}{\mu \rho_0 g}$, $\frac{g \rho \alpha \Delta T}{\nu} \pi^2 \frac{\rho_0 K}{\mu \alpha^2} = \frac{k^2 B_0 K}{\mu}$

说明: H_a 增加, R_a^* 减少, 由此可见, 但 R_a^* 与 R_a 互为反比。

根据前门的推导, 对 (8.10) 式略为严格的推导是 $R_a^* \approx 3\pi^2 H_a^2$

在(8.9)式中, R_a 用已知的最小值 R_a^* 代入, 则 k 应写成 k^*

$$R_a^* = \frac{1}{d^2 k^{*2} - \frac{\pi^2}{l^2}} \left(\frac{1}{3} R_a^* d^2 k^{*2} + d^6 k^{*6} \right)$$

d 为 $T_0 + \Delta T$ 与 T_0 的差. 若 ΔT 是很大的, 则有 $d \gg l$

即 $d \ll k$

$$R_a^* \approx \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{d^2 k^{*2}}} \left(\frac{1}{3} R_a^* + d^4 k^{*4} \right)$$

$$\text{忽略 } \frac{\pi^2}{d^2 k^{*2}}$$

$$R_a^* \approx \frac{3}{2} d^4 k^{*4}$$

$\therefore R_a^*$ 增加, k^* 也增加.

因此增强磁场 (即增加 H_0), 便等效于升高水温.

3. 磁场在垂直方向 (1.2). $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$. 耗散系数不为零。
过稳定性 (overstability) 应满足的边界条件是 $\omega_r = 0$

展开 (8.8) 式:

$$\begin{aligned} \omega^3 + (\kappa + \eta + \nu) R^2 \omega^2 + (\kappa \eta + \kappa \nu + \eta \nu) R^4 \omega + \kappa \eta \nu R^6 \\ = - \frac{B_0^2}{\mu_0^2} R_0^2 (\omega + \kappa R^2) + \frac{g \alpha \Delta T}{d R^2} (\omega + \eta R^2) (k_x^2 + k_y^2) \end{aligned}$$

将 $\omega = \omega_r + i \omega_i$ 代入上式

实部:

$$\begin{aligned} \omega_r^3 - 3\omega_r \omega_i^2 + (\kappa + \eta + \nu) R^2 (\omega_r^2 - \omega_i^2) + (\kappa \eta + \kappa \nu + \eta \nu) R^4 \omega_r + \kappa \eta \nu R^6 \\ = - \frac{B_0^2}{\mu_0^2} k_y^2 \omega_r^2 - \frac{B_0^2}{\mu_0^2} k_0^2 \kappa R^2 + \frac{g \alpha \Delta T}{d R^2} (k_x^2 + k_y^2) \omega_r + \frac{g \alpha \Delta T}{d} (k_x^2 + k_y^2) \eta \end{aligned}$$

$\omega_r = 0$ 代入:

$$-(\kappa + \eta + \nu) R^2 \omega_i^2 + \kappa \eta \nu R^6 = - \frac{B_0^2}{\mu_0^2} \kappa k_y^2 R^2 + \frac{g \alpha \Delta T}{d} \eta (k_x^2 + k_y^2) \quad (8.8-1)$$

虚部:

$$\begin{aligned} 3\omega_r \omega_i - \omega_i^3 + (\kappa + \eta + \nu) R^2 \cdot 2\omega_r \omega_i + (\kappa \eta + \kappa \nu + \eta \nu) R^4 \omega_i \\ = - \frac{B_0^2}{\mu_0^2} k_y^2 \omega_i + \frac{g \alpha \Delta T}{d R^2} (k_x^2 + k_y^2) \omega_i \end{aligned}$$

将 $\omega_r = 0$ 代入:

$$\omega_i^2 = (\kappa \eta + \kappa \nu + \eta \nu) R^4 + \frac{B_0^2}{\mu_0^2} R_0^2 - \frac{g \alpha \Delta T}{d R^2} (k_x^2 + k_y^2) \quad (8.8-2)$$

(8.8-2) 代入 (8.8-1). 注意 $k_y = \frac{\pi}{d}$, H_a , R_a 是常数

$$\begin{aligned} -(\kappa + \eta + \nu)(\kappa \eta + \kappa \nu + \eta \nu) R^6 - (\kappa + \eta + \nu) R^2 H_a^2 \frac{\pi^2}{d^4} \nu \eta + (\kappa + \eta + \nu) R_a \frac{K \nu}{d^4} (R^2 - \frac{\pi^2}{d^2}) \\ + \kappa \eta \nu R^6 = -H_a^2 \frac{\nu \eta K}{d^4} \pi^2 R^2 + R_a \frac{K \nu \eta}{d^4} (R^2 - \frac{\pi^2}{d^2}) \end{aligned}$$

整理后:

$$-R_a (R^2 - \frac{\pi^2}{d^2}) \frac{K \nu}{d^4} (\kappa + \nu) = -\pi^2 H_a^2 \frac{K^2}{d^4} \nu \eta (\nu + \eta) - (\eta + \kappa)(\eta + \nu)(\kappa + \nu) R^6$$

二边乘 $(-\alpha^2)$, 并除以 $\frac{\kappa\eta}{d^4}(K+\nu)$ 得:

$$Ra(\alpha^2 R^2 - \pi^2) = \pi^2 Ha^2 d^2 R^2 \frac{\eta(K+\eta)}{K(K+\nu)} + d^6 R^6 \frac{(\eta+K)(\eta+\nu)}{K\nu} \quad (8.9-1)$$

令 $R \sim Ra^{\frac{1}{2}}$, 类似于前 8.3

利用三次代数方程 求为实数的条件, 确定前者的 R_a 值.

令 $x = d^2 R^2$, (8.9-1) 式变为

$$x^3 - \frac{Ra - \pi^2 Ha^2 \frac{\eta(K+\eta)}{K(K+\nu)}}{\frac{(\eta+K)(\eta+\nu)}{K\nu}} x + \frac{Ra \pi^2}{\frac{(\eta+K)(\eta+\nu)}{K\nu}} = 0$$

三根为实数的条件要求:

$$\frac{1}{4} \left[\frac{Ra \pi^2}{(\eta+K)(\eta+\nu)} \right]^2 + \frac{1}{27} \left[- \frac{Ra - \pi^2 Ha^2 \frac{\eta(K+\eta)}{K(K+\nu)}}{(\eta+K)(\eta+\nu)} \right]^3 \leq 0$$

取等号, 并利用通常浮游系数 $\nu \ll \eta, K$

$$\frac{1}{4} (Ra \pi^2)^2 = \frac{1}{27} (Ra - \pi^2 Ha^2 \frac{\eta^2}{K^2})^3$$

$$Ra \left(1 - 3\pi^2 Ha^2 \frac{\eta^2}{K^2} \cdot \frac{1}{Ra} \right) = \frac{27}{4} \pi^4 \approx 0$$

$$Ra \approx 3\pi^2 Ha^2 \frac{1}{K^2} > \pi^2 Ha^2 \frac{\eta^2}{K^2} \quad (8.11)$$

将 Ra, Ha 代入 (8.11).

$$\frac{\rho g \Delta T K}{d} > \frac{\pi^2}{d^2} \cdot \frac{B_0^2}{\mu} \eta = k_g^2 \frac{B_0^2}{\mu} \eta \approx k^2 \frac{B_0^2}{\mu} \eta \quad (8.4)$$

(8.11) 式本原上与 (8.4) 式一样.

过稳定性判定 -3 很快增长的 Alfvén 波速度, 附录中引入了引力波

8.1.3 磁通量的排斥及集中

(magnetic flux expulsion and concentration)

磁场穿过一参与对流运动的流体元，假设磁感应强度 B 与流动的速度 v 成正比，即 $B \propto v$ 。磁场不阻挡对流运动，但当磁雷诺数 $R_m \gg 1$ 时，流动就带者磁场运动，使磁场增长，这过程中磁力线拉长，从磁冻结区中分离，有湍流式缠绕，因此在 $R_m \ll 1$ 时， $B \propto v$ ， B 为流元的长度， v 为侧向速度， R_m 为若此变长。

$dl = \frac{B}{\mu_0}$

对于不可压缩流体， B 会增加，直至磁感应强度相等（流体速度减慢）或者局部磁雷诺数变为量级为1。这是因为流速变大， R_m 变大，磁力线就会从等高线中向外凸出。这是因为在流动中，磁通量从流体元中心被排斥而累积于流元的边界。

Parker (1963a, *Astrophys. J.*, 138, 552) 提出了一个简单的模型通过一个流体元来研究磁通量的运动与集中，以下为论文中与本课有关的内容。

1. 设为理想流体，磁感应方程①（式中的 x_i 为流体中的序号）

$$\text{设为 } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad ①$$

①式的解对于不可压缩流体为

$$B_i(x_i) = B_i(x_{0i}) \frac{\partial x_i}{\partial x_{0i}} \cdot \frac{1}{J} \quad (I)$$

Parker 论文中引用 Lundquist (1952, *Ark. f. Fysik*, 5, 297) 的结果， x_i 表示初始位置处 i 处的流体元，在时刻 t 的位置

$B_j(X_{0k})$ 表示初值

J 表示 $\frac{\partial X_i}{\partial X_{0j}}$ 变换的 Jacobian, 对于不可压缩流体 $J=1$

$$\begin{aligned} \text{设 } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(V_l \frac{\partial B_m}{\partial x_j} + B_m \frac{\partial V_l}{\partial x_j}) \\ &= V_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} + B_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - V_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - B_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial B_i}{\partial t} = B_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - V_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = B_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

假设 V_j 为 $V_j = V_j(t, x_j, B_i)$, 且 B_i 为导数项.

为一阶线性偏微分方程求解.

左边非齐次项为 $R = R(B_i, x_j, t)$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_j}{V_j} = \frac{dB_i}{B_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}}$$

$$dB_i = B_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_j \cdot \frac{1}{V_j}$$

$$= B_j \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_j \partial t} \cdot \frac{1}{\frac{\partial x_i}{\partial t}} \cdot dx_j$$

$$= B_j d \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

B_i 与之 $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ 的关系

$$B_i(x_k) = B_j(x_k) \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

$\therefore x_k \rightarrow x_{0k}$ (初值坐标), $B_j(x_k) \rightarrow B_j(x_{0k})$, 逐步由 j 算

$$B_i(x_k) = B_j(x_{0k}) \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

$$= B_j(x_{0k}) \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_{0j}}{\partial x_j}$$

对于不可压缩流体, 流经位置 x_0 的质量, 和时刻的变化

是同样的. $\frac{\partial x_{0j}}{\partial x_j} = 1$

$$\therefore B_i(x_k) = B_j(x_{0k}) \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}$$

2. 考虑无旋流体 $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$

引入速度势 φ , $\vec{v} = \nabla \varphi$

无源时, 满足 Laplace 方程 $\nabla^2 \varphi = 0$. 我们处理 = 问题.

构造一个复解析函数 $w = \varphi + i\psi$

ψ 为速度势, 则 ψ 为流线

根据复变函数的柯希-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{array} \right.$$

$$\text{可得 } \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

可见流线和速度势垂直

$\psi = \text{const.}$ 的曲线族为流线. 以下求 ψ .

取坐标 y 为垂直方向, x 为水平方向. 流速速度

$$V_x = V \sin kx$$

$$V_y = -V k \cos kx$$

V : 常数

当 $kx = (2n+1)\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时.

$V_x = 0$, $V_y \neq 0$ 代表流体向上 $\because V_y > 0$

(其实 $kx = 2n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 也是 $V_x = 0$ 但 V_y 必定小于零,
下沉向流速有上向.)

当 $y=0$ 时, $V_y=0$. 表示没有流体穿过 $y=0$ 平面 (过流动)

由 C-R 方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = V \sin kx$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = V \sin kx$$

$$\psi = V y \sin kx + C(x)$$

由 C-R 方程 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = V k y \cos kx + \frac{d C(x)}{dx}$$

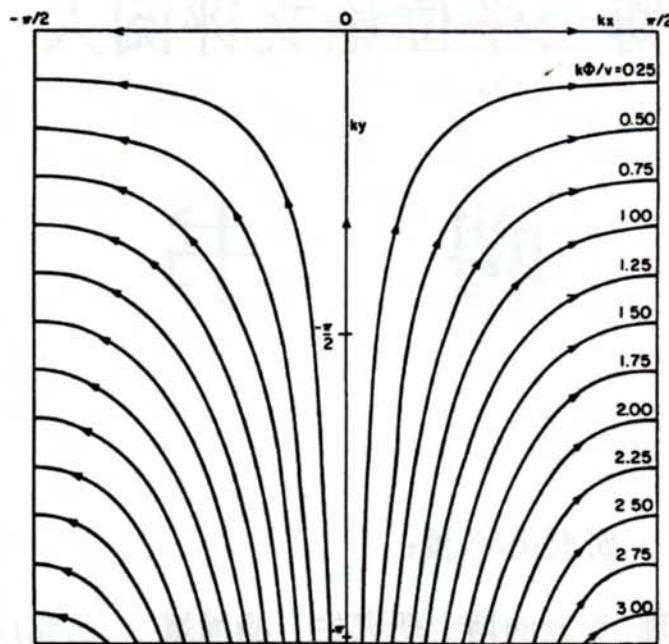
$$= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -V_y = V k y \cos kx$$

可见 $\frac{d C(x)}{dx} = 0$, $C(x) = \text{const.}$ 令 $C=0$.

$$\therefore \psi = V k y \int \cos kx dx$$

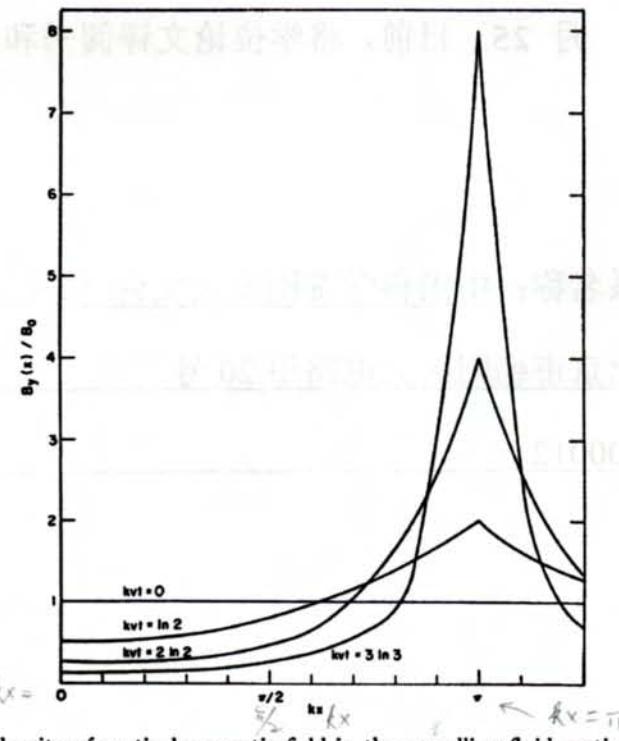
$$= V y \sin kx$$

当 $V y \sin kx = \text{const.}$ 即 $y \sin kx = \text{const.}$ 即为流线族. 预告 1.



$$\frac{R\bar{\theta}}{V} = \gamma \sin kx (= \text{const.})$$

FIG. 1.—Streamlines of the incompressible upwelling given by eq. (4)



$$\vec{B} = B_0 \hat{x}$$

$$X = \frac{\pi}{R}$$

$$V_x = 0, V_y > 0$$

upwelling

$$B_y = B_0 e^{kvt}$$

concentration

FIG. 2.—The flux density of vertical magnetic field in the upwelling fluid motions shown in Fig. 1, showing the progressive concentration of magnetic field at the edges of the cell.

(17)

已知 $y \sin kx = y_0 \sin kx_0 = C$. 下标 "0" 表示 $t=0$ 时的坐标.

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{V_x} = \int_{y_0}^y \frac{dy}{V_y}$$

令 $\xi = kx, \eta = ky, \tau = kv t$

$$V_x = V \sin kx = V \sin \xi, \quad V_y = -VRy \cos kx = -V \eta \cos \xi$$

$$\textcircled{1} \quad t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{V \sin \xi} = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{RV \sin \xi} = (\ln t_g \frac{1}{2} kx) \cdot \frac{1}{kv} \Big|_{x_0}^x$$

$$kv t = \ln t_g \frac{1}{2} kx - \ln t_g \frac{1}{2} kx_0$$

$$t_g \frac{1}{2} \xi = t_g \frac{1}{2} \xi_0 \cdot e^{-\tau} \quad (\text{I}^2)$$

$$\textcircled{2} \quad t = \int_{y_0}^y \frac{dy}{V_y} = - \int_{y_0}^y \frac{dy}{VRy \cos kx}$$

流线上 y 与 x 是 2. 互不独立. $\therefore y \sin kx = C = y_0 \sin kx_0$

二边平方可得 $y \cos kx = (y^2 - C^2)^{1/2}$, 代入积分表达式

$$t = - \int_{y_0}^y \frac{dy}{VR(y^2 - C^2)^{1/2}} = - \frac{1}{VR} \ln [y + \sqrt{y^2 - C^2}] \Big|_{y_0}^y$$

$$= - \frac{1}{VR} \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - y_0^2 \sin^2 kx_0}}{y_0 + \sqrt{y_0^2 - y_0^2 \sin^2 kx_0}}$$

$$\text{由 } \frac{y}{y_0} = \frac{\sin kx}{\sin kx_0}, \text{ 可得 } 1 - \frac{y^2}{y_0^2} \sin^2 kx_0 = \cos^2 kx$$

$$t = - \frac{1}{VR} \ln \frac{y(1 + \cos kx)}{y_0(1 + \cos kx_0)}$$

$$y(1 + \cos kx) = y_0(1 + \cos kx_0) e^{-\tau}$$

$$\text{即 } y(1 + \cos \xi) = y_0(1 + \cos \xi_0) e^{-\tau} \quad (\text{I}^3)$$

再求 η_0 , (I) 式改写为

由(I²)式, 可得 $\cos^2 \frac{1}{2} \xi_0 = \frac{1}{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi_0 \cdot e^{-2\tau}}$

$$1 + \cos \xi_0 = \frac{2}{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi_0 \cdot e^{-2\tau}} \quad (I^4)$$

(I³)式 改写为

$$\eta_0 = \eta \frac{1 + \cos \xi}{(1 + \cos \xi_0) e^{-\tau}}$$

(I⁴)代入上式

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \eta (1 + \cos \xi) (1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi \cdot e^{-2\tau}) \cdot e^\tau \quad (I^5)$$

为推导下述方程, 把要用的关系式归结如下:

$$\eta \sin \xi = \eta_0 \sin \xi_0 \quad ①$$

$$t_g \frac{1}{2} \xi_0 = t_g \frac{1}{2} \xi \cdot e^{-\tau} \quad ②$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \eta (1 + \cos \xi) (1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi \cdot e^{-2\tau}) \cdot e^\tau \quad ③$$

i. 求 $\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}$

②式改写为 $t_g \frac{1}{2} \xi = e^\tau t_g \frac{1}{2} \xi_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} &= \frac{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi_0 \cdot e^{-\tau}}{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi} \\ &= \frac{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi \cdot e^{-2\tau}}{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi} \cdot e^\tau \end{aligned} \quad ④$$

ii. 求 $\frac{\partial \eta}{\partial \xi_0}$ (1. 应用 η, ξ 表示). 对③式: 运用微分法.

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi_0} = \eta \sin \xi \cdot \sinh \tau$$

iii. 求 $\frac{\partial \eta}{\partial \eta_0}$

从③式: 运用微分开始

$$\frac{\partial \eta}{\partial \eta_0} = \frac{(1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi) \cdot e^{-c}}{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi \cdot e^{-2c}}$$

IV. 求 $\frac{\partial \xi}{\partial \eta_0}$

从 ① 式出发

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta_0} = 0$$

这样算下：

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta_0} = \frac{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi \cdot e^{-2c}}{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi} \cdot e^c$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi_0} = \eta \sin \xi \sinh c$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \eta_0} = \frac{(1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi) e^{-c}}{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi \cdot e^{-2c}}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta_0} = 0$$

3. $B_z(x_k) = B_z(x_{0k}) \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}$

i 可以等于 j

i 可以取 x, y, z, ξ, η ($x_x = \xi, x_y = \eta, x_{0x} = \xi_0, x_{0y} = \eta_0$)

i, B 仅对 y 方向，初值为 $B_z, B_{x0} = 0$

$$B_y = B_{x0} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_0} + B_z \frac{\partial \eta}{\partial \eta_0}$$

$$= B_{x0} \frac{\partial \eta}{\partial \eta_0}$$

$$B_x = B_{x0} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} + B_y \frac{\partial \xi}{\partial \eta_0}$$

$$B_y(x) = B_{x0} \frac{(1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi + t_g^2 \frac{1}{2} \xi^2) \cdot e^{-c}}{1 + t_g^2 \frac{1}{2} \xi^2 \cdot e^{-2c}}$$

$$= B_0 \frac{e^{-kvt}}{\cos^2 \frac{1}{2} kx + \sin^2 \frac{1}{2} kx \cdot e^{-2kvt}} \quad (I.7)$$

$$B_x = 0$$

ii. B 仅沿 x 方向, 初值为 B_0 , $B_{y0} = 0$

$$B_x = B_{x0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{x}_0} + B_{y0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{y}_0} = B_{x0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{x}_0}$$

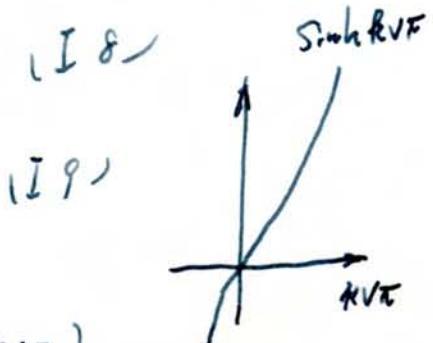
$$B_y = B_{x0} \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}_0} + B_{y0} \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{y}_0} = B_{x0} \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}_0}$$

$$B_x = B_0 \frac{1 + t \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot e^{-2t}}{1 + t \frac{1}{2} \frac{1}{2}} \cdot e^{-2t}$$

$$= B_0 (\cos \frac{1}{2} kx + \sin \frac{1}{2} kx \cdot e^{-2kvt}) \cdot e^{kvt} \quad (I.8)$$

$$B_y = B_0 k y \sin kx \sinh kvt$$

(垂直方向, 有方向, 没有场的聚合)



由(I.7)式可见: (无论流体元沉浮, B 保持 x 方向)

$$\vec{B} = B \vec{x}_0 \quad a, x=0, V_x=0, V_y < 0, \text{ 有下沉}$$

$$B_y = B_0 e^{-kvt} \quad \text{磁场扩散} \quad (\text{垂直于流动方向})$$

(在 } x=0 \text{ 处, 向外扩散)

$$b, x=\frac{\pi}{k}, V_x=0, V_y > 0, \text{ 有上涌}$$

P.28b
叙述有误?

$$B_y = B_0 e^{kvt} \quad \text{磁场聚合}$$

(在 } x=\frac{\pi}{k} \text{ 处, 磁场随时间增加)

(先首 2)

由(I.8), (I.9)式可见:

$$a. x=0, V_x=0, V_y < 0, \text{ 下沉}$$

$$B_x = B_0 e^{kvt} \quad (\text{向里}) \quad \text{聚合} \quad (x \text{ 平行于流动方向})$$

$$B_y = 0$$

$$b. x=\frac{\pi}{k}, \text{ 上涌} \quad B_x = B_0 e^{-kvt} \quad \text{向外扩散}; \quad B_y = 0$$

$$V_x=0, V_y > 0$$

Parker (1963a) 模型的擴充

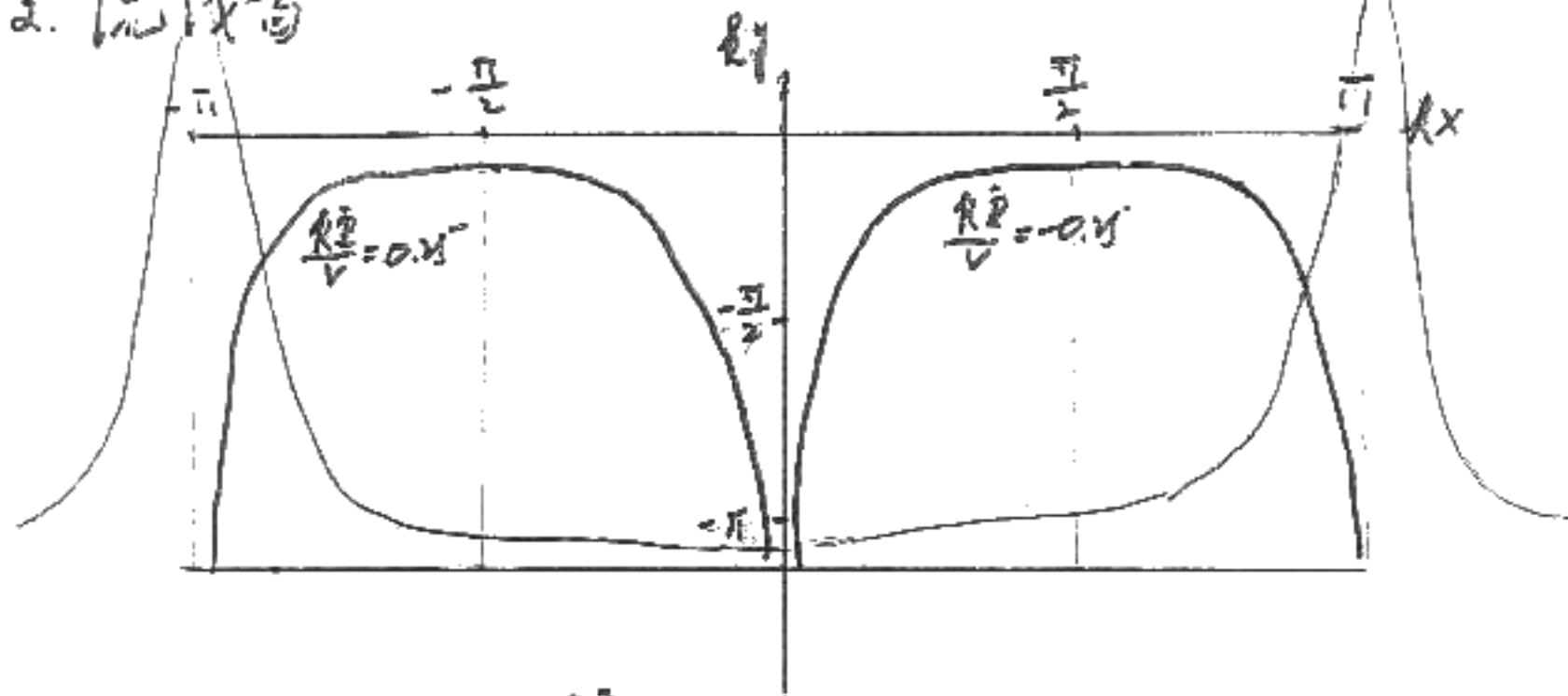
$$1. \vec{v} = \nabla \times \vec{B}_0 \text{ 單 } (x, y), \quad \vec{B}(x, y) = V_0 \sin kx \hat{i}$$

展示了速度分布僅有 \vec{V}_y 分量， \vec{V}_x

$$V_x = \frac{\partial \vec{B}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = V_0 k \sin kx$$

$$V_y = -\frac{\partial \vec{B}(x, y)}{\partial x} = -V_0 k \cos kx$$

2. 流线条



$$ky \sin kx = \text{const} = \frac{kx}{V} = -0.25$$

$0 \leq kx \leq \pi, \sin kx \geq 0, ky < 0$

$$-\pi \leq kx \leq 0 \quad \sin kx \leq 0 \quad \frac{kx}{V} = +0.25 \quad kx < 0$$

3. i. B 仅沿 y 方向，初值为 B_0 , $B_{x0} = 0$

$$B_y(x, y) = B_0 \frac{e^{-kVx}}{\cos^2 \frac{1}{2} kx + \sin^2 \frac{1}{2} kx \cdot e^{-2kVx}}$$

$$B_x = 0$$

$$\text{当 } \lambda=0, \begin{cases} V_x=0 \\ V_y=-V_0 \end{cases}$$

$$B_y = B_0 e^{-kVx}$$

$$\text{当 } x=\frac{\pi}{k}, \begin{cases} V_x=0 \\ V_y=V_0 \end{cases}$$

$$B_y = B_0 e^{kVx}$$

ii. 自 x 方向初值为 B_0 , $B_{y0}=0$

$$B_x(x, t) = B_0 \left(\cos^2 \frac{1}{2} kx + \sin^2 \frac{1}{2} kx \cdot e^{-2kVt} \right) \cdot e^{kVt}$$

$$B_y(x, t) = B_0 k \frac{1}{2} \sin kx \sinh kVt.$$

4. $B_i(x_k) = B_j(x_{0k}) \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ $i=x, y, j=x, y, i \neq j$

$B_i(x_k)$: - 位置 x_k 时 (x, y) 处的 B 的分量

如 $B_x = B_x(x, t)$, 它等于初始位置 $x_{0k} = (x_0, y_0)$ 的分量, $B(x_{0k})$ 有^① 分量, $B_x(x_0, y_0)$ 和 $B_y(x_0, y_0)$

坐标 x_i 对初位置不相等, 如 $x_i = y$. 则此坐标

$$\text{在 } x_0, y_0 \text{ 时 } \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} = \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial y}{\partial y}.$$

$$\therefore i \text{ 的分量为 } B_i(x, y) = B_x(x_0, y_0) \frac{\partial y}{\partial x_0} + B_y(x_0, y_0) \frac{\partial y}{\partial y}.$$

5. 边缘磁场高而增弱 ($kx=3\pi$), 磁感应强度无关,

依赖于流动参数的不稳定性 特性随 x 分布.

4. 磁通量从离子中心排列到边缘的数值模拟
Weiss (1966) 数值模拟磁通被排斥的运动学过程 (经典论)
(1966, Proc. Roy. Soc. A 293, 310)

i. 离子磁场对流体的作用

ii. 二维流动, 不可压 (流动速度 u) 流函数 (stream function)

表达

$$\psi = \frac{UL}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi z}{L}$$

U, L 分别是特征速度和长度.

iii. 初始时刻均匀的磁场 $B_0 \vec{z}$, 时间演化由磁感应方程

确定 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}$ (8.12)

无界的边界上, 对梯度成立

磁雷诺数 $R_m = \frac{UL}{\eta}$, 如 8.4 为 $R_m = 250 \approx 10^3$

i. 离子中心附近, 磁场首先增强

ii. 磁重联发生 (如 8.4 之 4 所示)

iii. 强场衰减

iv. 时刻 $6\frac{1}{2}$ 之后, 几乎所有的磁通量从离子中心排斥出去
(如 8.4 之 10 所示)

v. 达到定态

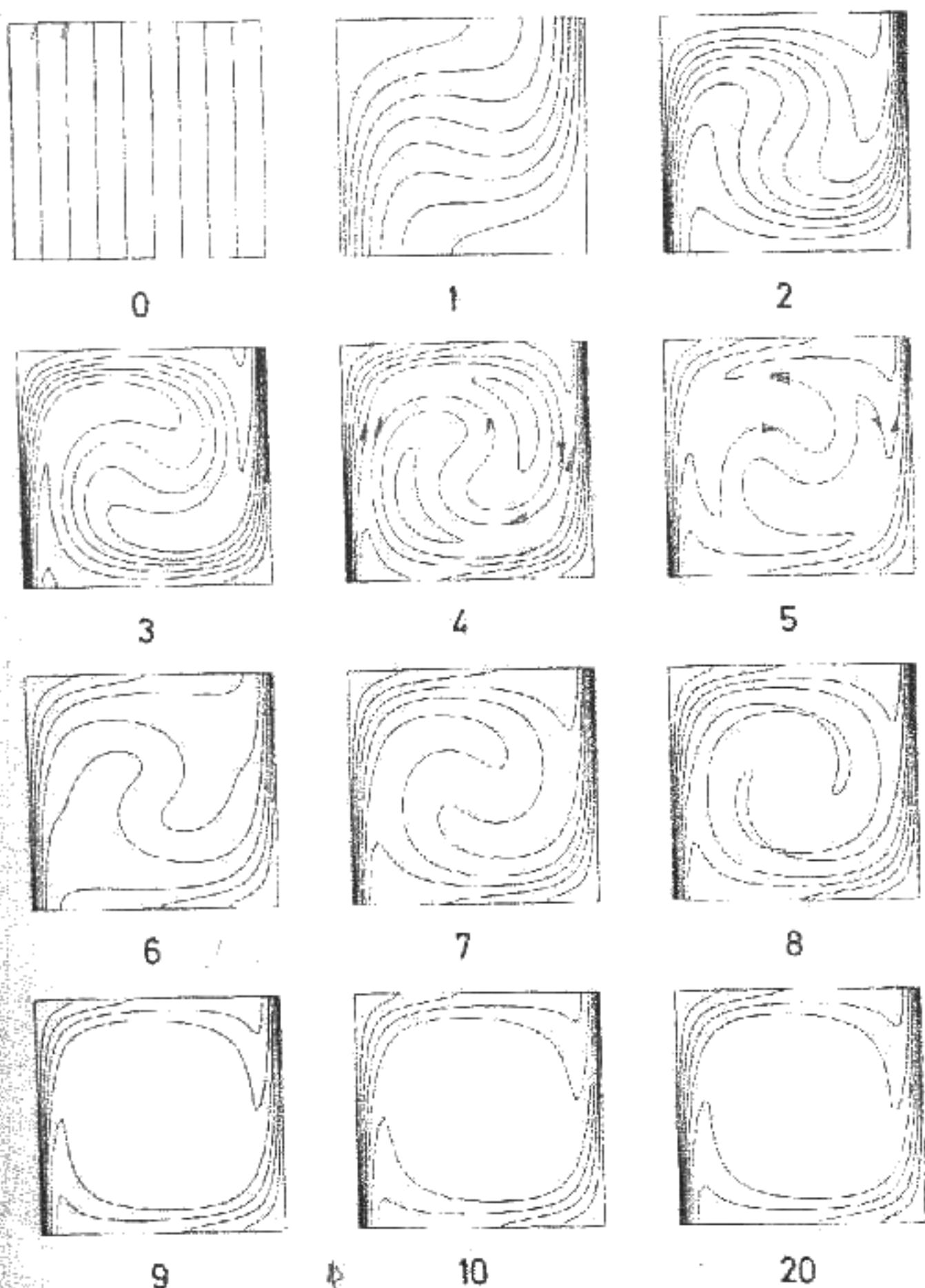


Fig. 6.4. Flux expulsion from a single oddz. The magnetic field lines for $R_0 = 250$ after times of $t/\tau = 0 \dots 20$, where $\tau = 5L/(3U)$ (from Galloway and Weiss 1981)

$$t = 6 \frac{L}{U}$$

$$\tau = \frac{5}{8} \frac{L}{U}$$

$$\frac{t}{\tau} = 9.6$$

5. 1. 两块无限大平行板间磁感应强度 B_0 和定域场 B_m 的量性估计

i. 撞散前，场强 B 增大的分布

$$\tau \approx \frac{L}{v} \quad (8.13)$$

该式通过 (8.12) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}$, 认为撞散未闻扰前, 如于磁流体状态, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$, 左边实际是动生电势对磁场增加的贡献.

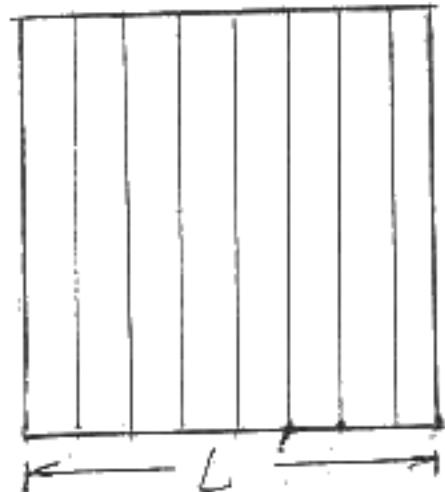
ii. 撞散分布

撞散已发生表示磁流体已成立.

假设两块的能量守恒, 两块运动

带着磁力线运动, (碰撞时间) [壳线元] 长度和声速 c_s

$$d\vec{l} = \epsilon \frac{\vec{B}}{P}$$



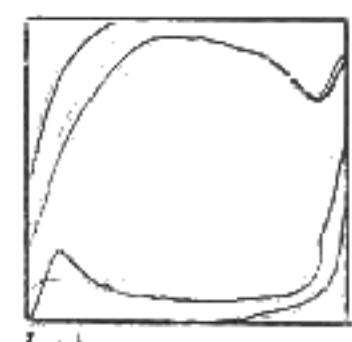
如果流体质点在运动过程中伸长, 则 $|d\vec{l}| > |d\vec{l}_0|$, $d\vec{l}_0$ 为初扰时刻流体质点的长度, 则 $|\frac{\vec{B}}{P}| > |\frac{\vec{B}_0}{P_0}|$ 如果流体不可压缩
则 $|\vec{B}| > |\vec{B}_0|$, 可见在能量守恒的条件下, 能量可由流动
和磁场之间转移.

因此磁力线一端壳线拉长, 意味着磁场的增加, 动能减少
速度变小, 于是磁雷诺数变小, 撞散开始起作用. 这就是以
示流 (渐变为撞散) 的物理过程.

$$\text{撞散时间 } \tau_d \approx \frac{l^2}{\eta} \quad (8.14)$$

i. - 卷绕场的横向标长

$$\text{根据磁通量守恒 } l \approx \frac{B_0}{B} L \quad (8.15)$$



iii. 极大磁场强度 B_1 的估计

需要通过时间 T , 才增加某- 极大值. 然后逐渐衰减.

所以当 $T = T_d$ 时, 可达到 B_1 的极大值

$$\frac{L}{U} \approx \frac{d^2}{\eta} \approx \left(\frac{B_0 L}{\eta}\right)^2 = \left(\frac{B_0}{B_1}\right)^2 \frac{L^2}{\eta}$$

B_1 为极大值

$$\therefore B_1 = R_m^{1/2} B_0 \quad (8.16)$$

R_m 为雷诺数 (Reynolds' number)

iv. 厚度为 d 的横向边界层

对流和扩散达到平衡, 处于完整.

对流带上的磁场 (流动带和磁场, 是为平行), 扩散耗散磁场, 所以涡流和扩散均已考虑.

流入边界层的速度: $\frac{d}{t} = d \frac{U}{L}$

扩散速度: $\frac{d}{t} = \frac{d}{d\eta} = \frac{\eta}{d}$

平衡: $d \frac{U}{L} = \frac{\eta}{d}$

$$d^2 = \frac{\eta}{L U} \cdot L^2$$

$$d = R_m^{-1/2} \cdot L \quad (8.17)$$

v. 边界上, 磁通量聚合, 磁场达到极大 B_m , 由磁通守恒求得.

$$B_m d = B_0 L \quad (8.18)$$

将(8.17)式代入

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{L}{d} B_0 \\ &= R_m^{1/2} B_0 \end{aligned} \quad (8.19)$$

由(8.16)- 式知 B_m 为定值, (实际上磁通已被限制到边缘)

vi. 二维流动，磁通量在流场中沿聚合方向增加。假设轴对称流场磁通量集中于中心，均流况下情况二，由(8.19)式可知定磁场大得多。因为通量守恒表达式(8.18)，在磁流管(半径为 d)的情况下，有 $B_m d^2 \approx B_0 L^2$

$$B_m = \frac{L^2}{d^2} B_0 = R_m B_0 \quad [(8.17) \text{ 式代入}]$$

vii. (8.16)式对极大磁场 B_1 的估计， $B_1 \approx R_m B_0$ 是过于简单的扩散。实际上很可能发生撕裂模不稳定性(撕裂模不稳定性是各向异性电阻存在时存在的不稳定性)。因此磁场的极大值将被限制于更小的值 B_1^* 和 B_1^{**} 。先对此项估计。

令 τ 等于撕裂模的时标。 (τ) 的定义见(7)
撕裂模最大增长率 $\gamma = (\tau_d \tau_A)^{1/2}$, $\tau_d = \frac{l}{\eta}$, $\tau_A = \frac{l}{V_A}$ (从图 13-10 看出时标), 撕裂模时标 $\tau_{\text{thr}} = \frac{1}{\gamma} = (\tau_d \tau_A)^{1/2} = \left(\frac{l}{\eta} \frac{l}{V_A}\right)^{1/2}$

$$\tau = \tau_{\text{thr}}$$

(8.13)式代入无也, (8.15)式代入式而得, 13章

$$\frac{V_A}{V_{A0}} = \frac{B}{B_0}, \quad V_A = \frac{B}{B_0} V_{A0}$$

$$\frac{L}{U} = \frac{\left(\frac{B_0}{B} L\right)^{1/2}}{\left(\eta \frac{V_A}{V_{A0}}\right)^{1/2} \left(\frac{B}{B_0}\right)^{1/2}}$$

$$B_1^* = B = \left(\frac{R_m U}{V_{A0}}\right)^{1/4} B_0 \quad (8.20)$$

也就是说撕裂模发生时，磁场由极大值由 B 变成 B_1^* 。由(8.20)表达，
Priest (1980a) 指出，撕裂模仅当

$$B_0 < \left(\frac{U}{V_A}\right)^{1/4} B \quad \text{满足时发生}$$

B : 为管道中的磁场。

$$B_0 < \left(\frac{\eta}{V_{A0} L} \right)^{1/2} B = \left(\frac{\eta}{V_{A0} L} \right)^{1/2} B_0^{1/2} B_0^{1/2}$$

$$B_0^{1/2} < \left(\frac{\eta}{L U} \cdot \frac{U}{V_{A0}} \right)^{1/2} B^{1/2}$$

$$B_1^{**} = B > \left(\frac{V_{A0}}{U} \right) R_m B_0$$

B_1^{**} 为增长中的磁场的极大值，取为 $B_1^{**} = \left(\frac{V_{A0}}{U} \right) R_m B_0$

如果 $B_1^{**} > B_1^*$ ，即 $\frac{V_{A0}}{U} R_m > \left(\frac{R_m U}{V_{A0}} \right)^{1/4}$

$$\left(\frac{V_{A0}}{U} \right)^5 > \frac{1}{R_m^3}$$

就取聚合场极大 B_1 为 B_1^{**} ，若该不等式成立，则取 $B_1 = B_1^*$

b. 三维流动的数值模型 (Galloway & Moore 1979, 考虑到维系数对磁能 Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 12, 73 流动)

i. 培养鞘之时，长时间的平行行为是磁场化流动
在对称轴上集中，形成磁绳，但磁通管内没有运动，另外，
的运动仅稍微受到磁绳的影响，因此有三个分支的区域：
静止的磁绳，无场的对称区。 (Fig. 8.5)

ii. 培养进一步增强，Galloway and Moore 发现，磁绳内有过
稳定性 (overstability)，然后到处都发生不稳定，过稳
定性的表现是：对流和周期性地变换运动方向。

iii. 起初我们以为集中后的磁通量二倍达到能量的分量的大小
即 $B = B_0 e$ ，而 $B_0^2 = \frac{1}{2} \rho U^2$ 。

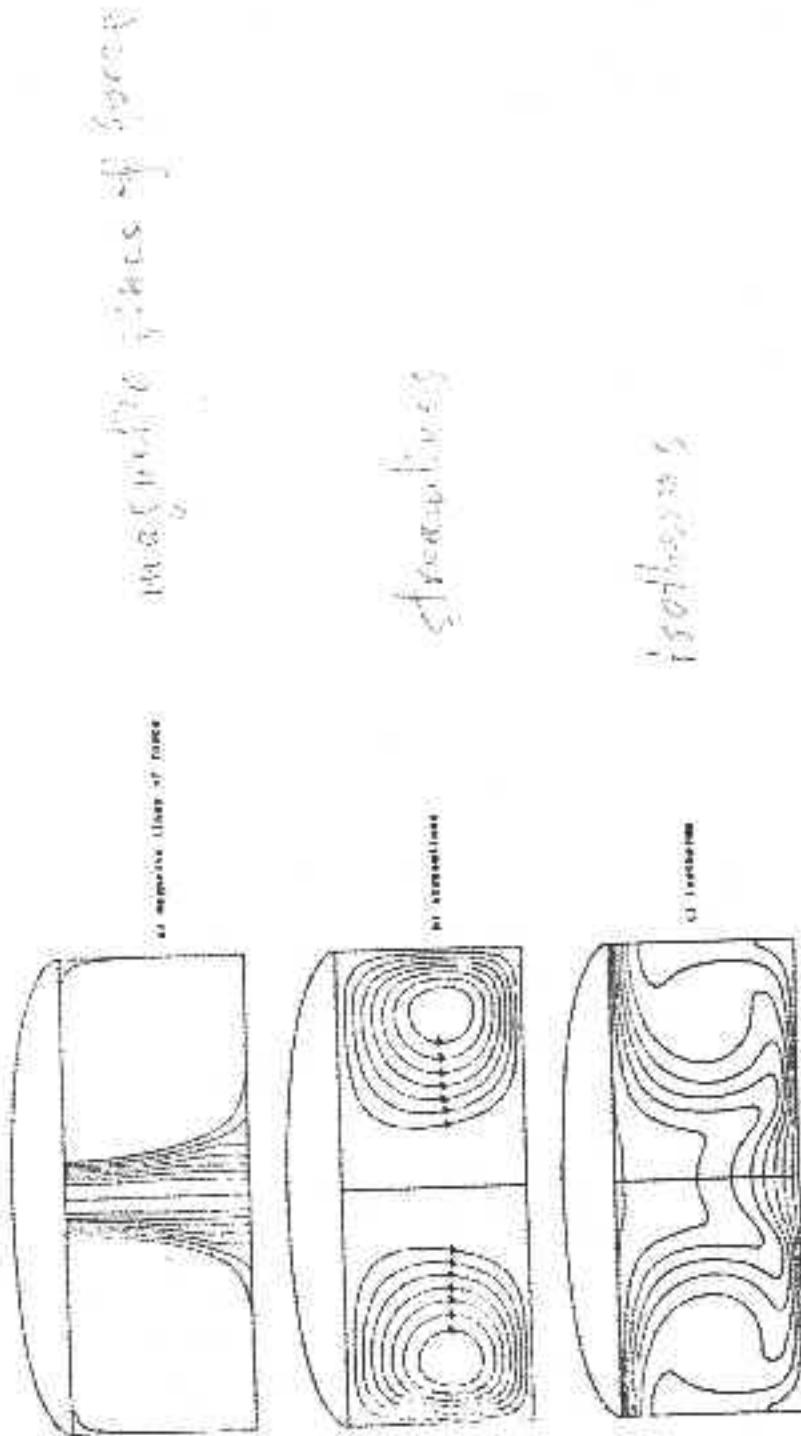


Fig. 8.5. (a) Magnetic field lines, (b) streamlines and (c) isotherms for a nonlinear steady state of axisymmetric magnetohydroconvection. Magnetic flux has been expelled from most of the cell and concentrated as a flux tube on the axis (from Galloway and Moore, 1979).

数值模拟的结果表明的数值可以是 B_0 的 6 倍之多。
关键是要找 Lorentz 力不为零的惯性项 $P\vec{v} \cdot \nabla \vec{V}$, 但可以被
压力梯度所平衡。因此在磁场中，磁场的最大值由壳层外
压力 P_e 决定。 B 最大只限于那时， $\frac{1}{4}\mu B^2 = P_e$ ，磁通管内
部的气压这时可以忽略。

IV. 他们发现磁流的初始磁场 B_0 ，增加到 B_m , 则从
 $B_m = R_m B_0$ 。达到极大后，就减小。

V. 洛伦兹力所作的功，首先被耗散度的热所平衡

$$B_m \approx \left(\frac{R_a}{H_a^3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{k}{\eta} \frac{B_0}{\log \frac{B_m}{B_0}}$$

以后即以耗散为主导

$$B_m \approx \left(\frac{R_a}{H_a^2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{k}{\eta} B_0$$

VI. 理想情况下计算结果，Galloway et al. (1978) 发现

B_m 的极大： $B_{max} = \left(\frac{R_a}{\eta} \right)^{\frac{1}{3}} B_0$, “流动扩散率” $\tilde{\nu} \approx \eta$
 即 $B_{max} \approx B_0$ ，这意味着壳层上为心石子，对壳巴底
 部附近 $10^4 G$.

8.2 磁浮力

磁浮力指二种之间的情况：1. 水平方向导磁通量不比趋于平衡值，必定会上升，因为在此周围介电率。2. 分流的磁场达到平衡值，但是由于形成上升之磁通量时，可改变得不稳定。

8.2.1 性质描述

(见图 8.5)

对流层内，磁场倾向于集中在磁通管内，被湍流运动所压缩而小于流动时，磁力线会被拉伸，故使磁通量增加，流体即降低，进而使磁通量减少，引起扩散。

- Parker (1955a) 指出，一旦磁通管形成，便因磁浮力而上升，穿过光球表面，形成一对星子。(见图 8.6)

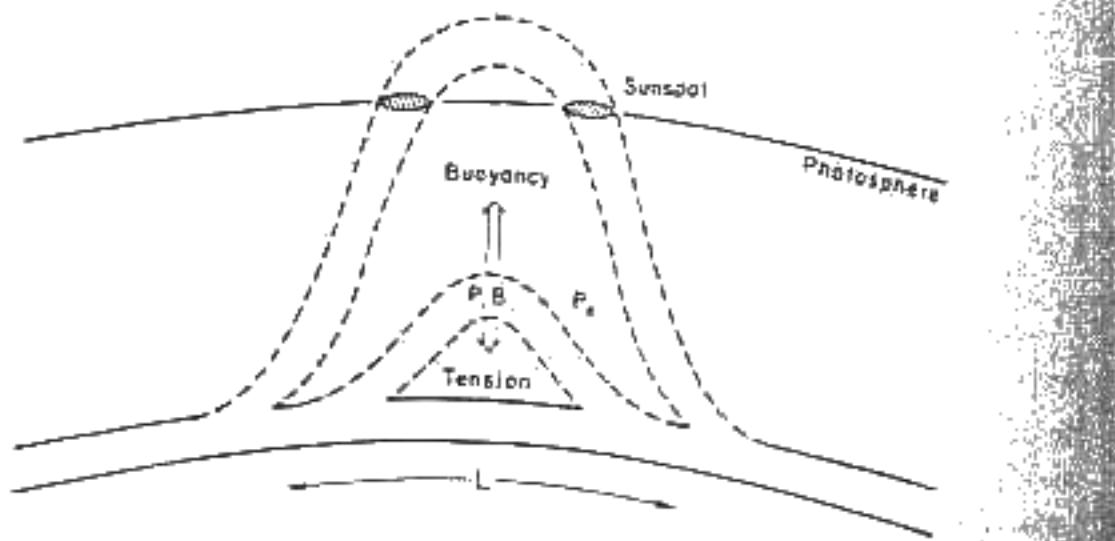


Fig. 6.6. Successive positions in the upper convective zone for a magnetic flux rope, part of which passes through magnetic buoyancy and produces a sunspot pair where it breaks the photosphere.

上升-速度

假设磁通管内气压 P_e , 磁场强度 B , 周围环境的气压为 P_i
管侧的压力平衡: $P_e = P_i + \frac{1}{4\pi} B^2$

再设温度 T 为均匀, 相应的参数为 ρ_e, ρ_i , 上式变为

$$\frac{k_B T \rho_e}{m} = \frac{k_B T \rho_i}{m} + \frac{1}{4\pi} B^2 \quad (8.24)$$

可见 ρ_e 必大于 ρ_i , 磁通管内的等高子感受到浮力 $(\rho_e - \rho_i)g / cm^3$
致使磁通管上升, 一旦磁通管弯曲磁浮力就要逆向变直.

但若弯力不够大, 则不能完全抵消浮力, 就会上升.

该弯浮力由(2.57)式给出 $\frac{B^2}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{R}$

$$R = \frac{1}{2} L$$

$$(\rho_e - \rho_i)g > \frac{B^2}{4\pi L}$$

或者从(8.24)式

$$\frac{k_B T}{m} (\rho_e - \rho_i) = \frac{1}{4\pi} B^2$$

二边除以 $\frac{1}{2} L$, 得

$$\frac{2}{L} \frac{k_B T}{mg} (\rho_e - \rho_i) g = \frac{B_0^2}{\mu L}$$

$$\text{若 } \frac{2}{L} \frac{k_B T}{mg} < 1, \text{ 则 } (\rho_e - \rho_i) g > \frac{1}{\mu L} B_0^2$$

因此需 $L > 2 \cdot \frac{k_B T}{mg} = 2 \lambda$, 则磁流管上升

结论：磁流管的长度大于临界值二倍，磁流管就因浮力上升
速度 L 的定义

λ : 一标尺

标尺的确定：磁流体静力学平衡方程 (P. 117)

$$\vec{j} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g}$$

$$\text{设 } \vec{B} = B \hat{z}, \vec{g} = -g \hat{z}$$

$$\vec{j} \text{ 分量: } 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g, \quad \rho = \frac{mP}{k_B T(B)}$$

$$P = P_0 \exp \left(- \int_0^z \frac{1}{\lambda(B)} dz \right)$$

$$\lambda(B) = \frac{k_B T(B)}{mg} \quad (= \frac{P}{\rho g})$$

• 估计磁浮力的影响

$$\text{由 (8.24) 式} \quad \frac{\rho_e - \rho_i}{\rho_e} = \frac{B_0^2}{2\mu} \frac{m}{k_B T} \cdot \frac{1}{\lambda_e}$$

$$\text{用 J. 斯革特利: } \frac{\rho_e - \rho_i}{\rho_e} = \frac{B_0^2}{8\pi} \frac{m}{k_B T \rho_e}$$

$$\text{考虑 } \lambda_e^2 \sim \lambda^2, \quad 2 \times 10^4 \text{ km}^2, \quad \rho_e = 0.25 \text{ kg m}^{-3} = 2.5 \times 10^{-4} \text{ g cm}^{-3} \\ T = 2.5 \times 10^5 \text{ K}, \quad B_0 \approx 10^3 \text{ G}, \quad k_B = 1.38 \times 10^{-16}, \quad m = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g} \quad (\text{J. 施特利})$$

$$\frac{\rho_e - \rho_i}{\rho_e} = \frac{(10^3)^2 \cdot 1.67 \times 10^{-24}}{8\pi \cdot 1.38 \times 10^{-16} \cdot 2.5 \times 10^5 \times 2.5 \times 10^{-4}} \approx 10^{-5}$$

磁浮力的影响忽略

ii. 光球层以下 10^3 km, $P_e \approx 0.8 \times 10^{-5}$ kg/m⁻³, $T \approx 1.5 \times 10^4$ K.

$$B_z \approx 10^3 G$$

$$\frac{P_e - P_i}{P_e} = \frac{(10^3)^2 \cdot 1.67 \times 10^{-24}}{8\pi \cdot 1.38 \times 10^{-6} \cdot 1.5 \times 10^4 \times 0.8 \times 10^{-5} \cdot \left(\frac{10^3}{10^2}\right)^3} \approx 4$$

在对流区上部, 压力要下降
 $(6.7 \text{ 的倍数为 } 0.004 = 4 \times 10^{-3})$

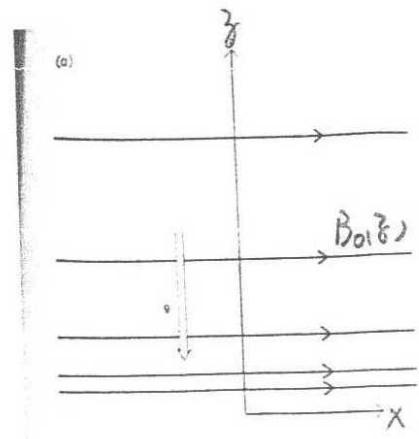
iii. 有人认为黑子的冷却是由于对流减弱的现象. 在光球层下面
2000 km 处, 磁通量密度的减弱导致了对流区消失.

8.2.2 磁浮力与稳定性

1. 考虑水平磁场 $B_0(\vec{z})\vec{x}$, 处于平衡态, 引力化为 \vec{g} 方向
假如磁场强度随高度的减小足够快
则系统是不稳定的。

光凭磁力线为直线, 像如场强
的减小比密度的减小要快, 有

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{B_0}{P}\right) < 0, \text{ 则系统不稳定。}$$



证明: ① 磁流管上升 δz , 管内场强

密度和压力改变 $\delta B, \delta P, \delta P$. 周围环境相应的变化为
 $\delta B_0, \delta P_0, \delta P_0$

(平衡时: $B=B_0, P=P_0, P=P_0$)

$$\text{水平方向的平衡: } P_0 + \frac{1}{\mu_0} B_0^2 = P + \frac{1}{\mu_0} B^2$$

$$\delta P_0 + \frac{1}{\mu_0} B_0 \delta B_0 = \delta P + \frac{1}{\mu_0} B \delta B$$

$$\text{因为水平面上平衡, 所以 } B=B_0 \quad (\delta B \text{ 可以不等于 } \delta B_0)$$

$$\delta P_0 + \frac{1}{\mu_0} B_0 \delta B_0 = \delta P + \frac{1}{\mu_0} B_0 \delta B$$

$$\delta P = \frac{k_B T_0}{m} \delta P_0, \quad \delta P_0 = \frac{k_B}{m} T_0 \delta P_0 \quad (\text{管内 } \delta), \quad T=T_0$$

$$\frac{k_B T_0}{m} \delta P + \frac{1}{\mu_0} B_0 \delta B = \frac{k_B}{m} T_0 \delta P_0 + \frac{1}{\mu_0} B_0 \delta B_0. \quad (8.28)$$

磁流管上升的条件是 $\delta P < \delta P_0$, 以上式可知 $\delta B_0 < \delta B$

② 如果质量守恒和磁通守恒, 则有 $\frac{B}{P} = \text{const.}$

(设磁力线垂直穿过的面积 A , 厚度为 d , 磁通量为 M , 质量为 m ,

$$\text{则 } B = \frac{M}{A}, \quad P = \frac{m}{A \cdot d}, \quad \frac{B}{P} = \frac{\frac{M}{A}}{\frac{m}{A \cdot d}} = \frac{d}{m}, \quad \text{现面积变} A', \text{厚度} d' \text{为}$$

$$B' = \frac{M}{A'}, \quad P' = \frac{m}{A' d'} \quad \frac{B'}{P'} = \frac{\frac{M}{A'}}{\frac{m}{A' d'}} = \frac{d'}{m} = \frac{d}{m} = \text{const.}$$

$\frac{\partial P}{\partial r} = \text{const}$

已知分:

$$\frac{\rho \delta B - B \delta \rho}{\rho^2} = 0, \quad \frac{\delta B}{B} = \frac{\delta \rho}{\rho} \quad \because \text{水平方向平衡} \quad B = B_0, \quad P = P_0$$

$$\frac{\delta B}{B_0} = \frac{\delta \rho}{P_0} \quad (8.27)$$

磁通管上升的条件 $\delta \rho < \delta \rho_0$ 代入 (8.27), 有

$$\frac{k_B}{m} T_0 \delta \rho_0 + \frac{1}{\mu} B_0 \delta B > \frac{k_B}{m} T_0 \delta \rho_0 + \frac{1}{\mu} B_0 \delta B_0$$

$$\text{推得 } \delta B_0 < \delta B$$

记得 $\delta \rho < \delta \rho_0$, $\therefore (8.27)$ 变为 $\frac{\delta B}{B_0} < \frac{\delta \rho_0}{P_0}$ 進一步有

$$\frac{\delta B_0}{B_0} < \frac{\delta B}{B_0} \quad \text{最后得} \quad \frac{\delta B_0}{B_0} < \frac{\delta \rho_0}{P_0}$$

$$\text{即 } \frac{d}{dr} \left(\frac{B_0}{P_0} \right) < 0 \quad (8.28)$$

③ 磁力线流有扭曲 (twist) [参考 Acheson, 1979a, Solar Phys. 62, 23]

$$V = \eta = K = 0$$

有重力作用, 磁场在水平方向, 而且随高度而改变.

磁通管从子午面上升到 $z + dz$

磁通管上升到转位量, 以周围环境平衡, 压必须达到当地值

$$\delta P + \frac{1}{\mu} B_0 \delta B = \delta P_0 + \frac{1}{\mu} B_0 \delta B_0 \quad (A.2) \quad "o" \text{ 指管外的值}$$

磁流管内等熵: $P \bar{\rho}^r = \text{const.}$

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{r \delta \rho}{\rho}$$

$$\text{令 } \bar{\rho} = a^2 \rho \quad (a: - \text{等温声速})$$

$$\delta P = \frac{r \bar{\rho}}{\rho} \delta \rho = r a^2 \delta \rho$$

$$\text{从 (8.27) 得 } \delta B = \frac{\beta_0}{\rho_0} \delta P$$

$\delta P, \delta B$ 代入 (A.2)

$$(\gamma a^2 + V_A^2) \delta P = \delta P_0 + \frac{1}{\mu} B_0 \delta B_0$$

两边除以 δP , 得 $\delta P < \delta P_0$

$$\frac{\delta P_0}{\delta P} + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\delta B_0}{\delta P} < (\gamma a^2 + V_A^2) \frac{\delta P_0}{\delta P} \quad (A.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta P_0}{\delta P} - \gamma a^2 \frac{\delta P_0}{\delta P} &< V_A^2 \frac{\delta P_0}{\delta P} - \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\delta B_0}{\delta P} \\ &= V_A^2 \rho_0 \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} - \frac{1}{B_0} \frac{\delta B_0}{\delta P} \right] \quad (A.4') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{上式左边} &= \frac{\delta P_0}{\delta P} - \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} \\ &= \rho_0 \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} - \frac{\gamma}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} \right] \\ &= \frac{\rho_0 \gamma}{q} \cdot \frac{q}{\gamma} \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} - \frac{\gamma}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} \right] \\ &= \frac{\rho_0 \gamma}{q} \cdot N^2 \\ \text{式中 } N^2 &= \frac{q}{\gamma} \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} - \frac{\gamma}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} \right] \quad (= \frac{q}{\gamma} \frac{q}{\gamma} \ln(\rho_0 \delta P_0^{-r})) \quad (1.3) \end{aligned}$$

无磁场时 N^2 表达式:

$$N^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} + \frac{1}{\gamma \rho_0} \rho_0 g \right)$$

(当 Lorentz 力对重力平衡且无风时, 有 $\frac{dP}{dZ} = -\rho g$ (3.5))

$$= -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} + \frac{q}{c_s^2} \right) \quad (4.36) - Priest$$

$$c_s^2 = \frac{\rho_0}{\gamma} \quad (\text{绝热声速})$$

回到 (A.4')

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\rho_0 \gamma}{q} N^2 &< V_A^2 \rho_0 \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} - \frac{1}{B_0} \frac{\delta B_0}{\delta P} \right] \\ &= V_A^2 \rho_0 \frac{\gamma a^2}{q} \left(-\frac{q}{\gamma a^2} \right) \left[\frac{1}{B_0} \frac{\delta B_0}{\delta P} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta P_0}{\delta P} \right] \end{aligned}$$

$$= -V_A^2 P_0 \frac{ra^2}{g} \left(\frac{q}{ra^2} \right) \frac{d}{df} \ln \frac{B_0}{P_0}$$

$$- \frac{q}{ra^2} \frac{d}{df} \ln \frac{B_0}{P_0} > \frac{N^2}{V_A^2} \quad (\text{已利用 } a^2 = \frac{P_0}{g}) \quad (A.5)$$

(A.4) 和 (A.5) 式是等价的。因为 (A.5) 的获得，没有添加任何假设，仅仅是代数运算，实际上和 (8.29) 式一样，不过是一种更直观、稳定的表达。

Prestwich (8.29) 式其实和 Acheson 在 (A.5) 式一样。

(8.29) 式是： $\frac{1}{\Lambda} \frac{P_0}{B_0} \frac{d}{df} \left(\frac{B_0}{P_0} \right) < - \frac{N^2}{V_A^2}$

$$\text{左边} = \frac{1}{\Lambda} \frac{P_0}{B_0} \left[\frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{df} - \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{df} \right] \quad (\Lambda = \frac{P_0}{B_0 g})$$

$$= \frac{P_0}{P_0} \cdot \frac{P_0}{B_0} \left[\frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{df} - \frac{B_0}{P_0} \frac{dP_0}{df} \right]$$

$$= \frac{q}{a^2} \left[\frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{df} - \frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{df} \right]$$

$$- \frac{q}{ra^2} \left[\frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{df} - \frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{df} \right] > \frac{N^2}{V_A^2}$$

$$- \frac{q}{ra^2} \frac{d}{df} \ln \frac{B_0}{P_0} > \frac{N^2}{V_A^2} \quad * \quad (A.5)$$

N:- Brunt 波数

2. 例举不稳定性弯曲，讨论有更多 2. 稳定因素。Parker 和 Gilman 提到背景磁场随高度减小而减小，磁浮力会驱动一种不稳定性，即

$$\frac{dB_0}{dz} < 0 \quad (8.30)$$

扰动使磁流管稍微弯曲，从而等高面从高处向低处弯曲，高处因物质减少，密度变低，增强浮力效应，磁浮力 2. 稳定性实际上

这是磁流体 Rayleigh-Taylor 不稳定性。因为 $\frac{dB_0}{dy} < 0$ 表示着磁场反向力支撑物质，使得密度随波的减小程度比无磁场时要小得多。

以下通过 Gilman (1970, ApJ, 162, 1019) 的分析，未探讨不稳定性问题。

a. 稳定性时，变量为 $P_{0,y}$, $P_{0,z}$, $T_{0,y}$, $B_{0,z}$

满足完全气体定律， $P_0 = \frac{k_B}{m} \rho T_0$ (8.31)

和磁流体静力学平衡方程 $\frac{\partial}{\partial y} (P_0 + \frac{1}{2} \mu B_0^2) + P_0 f = 0$ (8.32)

一般情况下，这类稳定性问题的讨论会假设一定边界条件下，求扰动变量的常微分方程组。但对于二维问题可考虑特别，导出声速和 Alfvén 速度和不同，波数均为常数。

$$C_{s0} = \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad V_{A0} = \frac{B_0}{(\mu \rho_0)^{\frac{1}{2}}}$$

在前后的色散关系中，系数为常数。

根据方程 (8.31), (8.32) 有

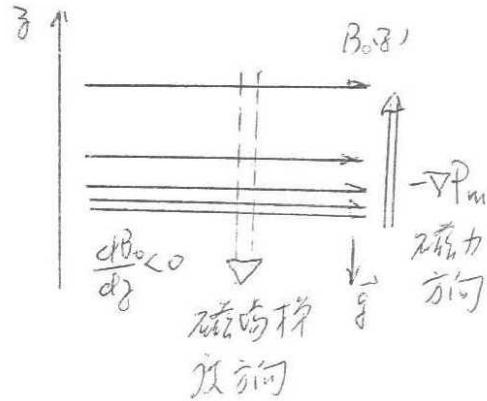
$$(8.32) \rightarrow \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} P_0 + \frac{1}{P_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \mu B_0^2 \right) = -f \quad (8.2.2-a) \quad \text{— Gilman 方程}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial y} - C_{s0}^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln \rho_0$$

$$\therefore \frac{P_0}{\rho_0} = C_{s0}^2 = \text{const.} \quad \text{上式左边为零}$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial y} = C_{s0}^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln \rho_0$$

~~上式~~ 边界以 y 代入 (8.2.2-a)



(8.2.2-a) 变为

$$C_{S0} \frac{d}{dz} \ln \tilde{P}_0 + \frac{1}{2\tilde{P}_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{B_0^2}{\mu \tilde{P}_0} \cdot \tilde{P}_0 \right) = -g$$

$$C_{S0} \frac{d}{dz} \ln \tilde{P}_0 + \frac{1}{2} V_{A0}^2 \frac{d}{dz} \ln \tilde{P}_0 = -g$$

(3) 为 V_{A0} 为常数, 所以可简化求解.

$$(C_{S0}^2 + \frac{1}{2} V_{A0}^2) \frac{d}{dz} \ln \tilde{P}_0 = -g$$

$$\tilde{P}_0 = A e^{-\frac{g}{C_{S0}^2 + \frac{1}{2} V_{A0}^2} z}$$

A 为待定常数.

$$\therefore \Lambda_B = \frac{C_{S0}^2 + \frac{1}{2} V_{A0}^2}{g} = \frac{\tilde{P}_0}{\tilde{P}_0^*} + \frac{1}{2\mu} \frac{B_0^2}{\tilde{P}_0}$$

$\therefore C_{S0}^2, V_{A0}^2$ 分别为常数

$$\therefore C_{S0}^2 = \frac{\tilde{P}_0}{\tilde{P}_0^*} = \frac{\tilde{P}_0^*}{\tilde{P}_0^{**}}$$

$$V_{A0}^2 = \frac{B_0^2}{\mu \tilde{P}_0} = \frac{B_0^{**2}}{\mu \tilde{P}_0^{**}}$$

"*" 表示 $z=0$ 时的相应值.

(4) 因此有 $\Lambda_B = \frac{\tilde{P}_0^{**} + \frac{1}{2\mu} B_0^{**2}}{\tilde{P}_0^{**} g}$, 有磁场时的标高
(scale-height)

当 $z=0$ 时, $\tilde{P}_0 = \tilde{P}_0^{**}$. $\therefore A = \tilde{P}_0^{**}$

$$\tilde{P}_0(z) = \tilde{P}_0^{**} e^{-\frac{g}{\lambda_B} z} *$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= C_{S0}^2 \tilde{P}_0 \\ &= \frac{\tilde{P}_0}{\tilde{P}_0^*} \cdot \tilde{P}_0^* e^{-\frac{g}{\lambda_B} z} \end{aligned}$$

$$\tilde{P}_0(z) = \tilde{P}_0^* e^{-\frac{g}{\lambda_B} z} *$$

$$B_0 = V_{A0} (\mu P_0)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{B_0^*}{(\mu P_0^*)^{\frac{1}{n}}} (\mu P_0)^{\frac{1}{n}}$$

$$B_0(\beta) = B_0^* e^{-\frac{\beta}{\lambda_B}}$$

以上便是方程(8.31)和(8.32)关于 $P_0(\beta)$, $P_0(\beta)$, $B_0(\beta)$ 的解.

b. Gilman 的分析作以下基本假设:

① 重力-流动方向

② 无滑移壁 $V_0 = 0$

③ 复量仅与 β 的函数, $P = P(\beta)$, $T = T(\beta)$, $B = B(\beta) \propto \beta^0$

④ 满足完全气体状态方程 $P = PRT$

⑤ 满足静力学平衡方程 $\frac{\partial}{\partial \beta} (P + \frac{B^2}{8\pi}) + Pg = 0$ (主运动渐变剖面)

如果已知 B, T , 则由上述三个方程可确定 P, T

⑥ 无粘性, 电导率无穷大, 理想流体.

⑦ 气体热弛豫过程足够快, 时标短, 以至任何温度的变化可以通过辐射和守恒平衡, 可认为是等温过程, 从而忽略质量方程.

⑧ C_{so}, V_{A0} 为常数 (2. 随速度变化)

c. 不稳定性所需能量来源

① 磁场随波子减少, 由磁应力梯度产生的力, 使子方向向上支撑物质, 物质具有势能, 向下输运时, 粒子势能 (Rayleigh-Taylor 不稳定性)

② 磁通量向上输运 (扩散) 时, 粒子磁化.

d. MHD 方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{4\pi\rho} \nabla \times \vec{B} \times \vec{B} - g \vec{g}^0 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \\ \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \end{array} \right.$$

----- 该方程可以归到 MHD 方程组中无源项

$$P = \rho R T$$

等温过程，质量方程不再需要。

对 B, V, P , P_0, V_0 按振动 (T 不变, 扰动, 等温)

振动形式为 $\phi = \Phi(\theta) e^{i(kx+ly-\omega t)}$

$\Phi(\theta)$ 代表 B, P, ρ 为子函数 $(\phi = \Phi(x, y, t, \theta))$

$$\rho' = \rho(\theta) e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$B' = B(\theta) e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$\Phi(\theta)$ 为 $\Phi(\theta)$

第“ $'$ ”为振动量

$$\text{振动量 } \vec{v}' = u \vec{x}^0 + v \vec{y}^0 + w \vec{z}^0$$

$$u = U(\theta) e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$v = V(\theta) e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$w = W(\theta) e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$\vec{B}' = a \vec{x}^0 + b \vec{y}^0 + c \vec{z}^0$$

$$a = A(\theta) e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$b = B(\theta) e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$c = C(\theta) e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

②

$$\therefore \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad , \text{ 平衡时 } \vec{B}_0 = B_0 \delta J \vec{x}^0$$

$$= (B_0 + a) \vec{x}^0 + b \vec{y}^0 + c \vec{z}^0$$

$$① \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})$$

$$\text{已设 } \vec{V}_0 = 0, \text{ 扰动方程: } \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{B}_0) \quad ①$$

$$\text{设 } \vec{A} = \vec{V}' \times \vec{B}_0 = \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ u & v & w \\ B_0 x & 0 & 0 \end{vmatrix} = w B_0 i \vec{x} + v B_0 j \vec{y} - u B_0 k \vec{z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & w B_0 i & -v B_0 j \end{vmatrix}$$

$$= [-v B_0 i \vec{x} - \frac{\partial}{\partial z} (w B_0 i \vec{x})] \vec{x} + v B_0 j \vec{y} + w B_0 k \vec{z}$$

分量式

$$\vec{x}^0: -i\omega a = -B_0 i \vec{x} v - \frac{\partial}{\partial z} (w B_0 i \vec{x}) \quad (8a)$$

$$\vec{y}^0: -i\omega b = B_0 i \vec{y} v \quad (8b)$$

$$\vec{z}^0: -i\omega c = B_0 i \vec{z} w \quad (8c)$$

② 连续性方程

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\rho_0 \vec{V}') = 0$$

$$\vec{V}' = [u, v, \vec{x}^0 + v_i \vec{z}, \vec{y}^0 + w_i \vec{z}, \vec{z}^0] e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$\rho' = \rho_0 \rho'$$

$$-i\omega \rho' = -\rho_0 (iku + ilv) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 w) \quad (9)$$

$$③ P_0 = \rho_0 R T_0$$

$$\rho' = \rho' R T_0$$

④ 运动方程

静止时:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}_0}{\partial t} - \rho_0 (\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_0) \vec{V}_0 = -\nabla P_0 + \frac{1}{4\pi} \vec{B}_0 \cdot \nabla \vec{B}_0 - \frac{1}{4\pi} \nabla B_0^2 - \rho_0 g \vec{z}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', P = P_0 + P', \vec{V} = \vec{V}' \quad (\vec{V}_0 = 0)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\nabla P_0 + \nabla' + \frac{1}{4\pi} (\vec{B}_0 + \vec{B}') \cdot \nabla (\vec{B}_0 + \vec{B}') - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} \nabla (\vec{B}_0 + \vec{B}')^2 = \rho'_g \vec{g} - P'_g \vec{g}$$

减去静息运动方程，得

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\nabla P' + \frac{1}{4\pi} [\vec{B}' \cdot \nabla \vec{B}_0 + \vec{B}_0 \cdot \nabla \vec{B}' - \nabla (\vec{B}_0 \cdot \vec{B}')] - P'_g \vec{g}$$

$$-i\omega \rho_0 \vec{v}' = -ikP' \vec{x}^0 - i\lambda P' \vec{y}^0 - \frac{\partial P'}{\partial \vec{z}} \vec{z}^0 \quad (-\nabla P')$$

$$+ \frac{1}{4\pi} (a \vec{x}^0 + b \vec{y}^0 + c \vec{z}^0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{x}^0 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y}^0 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}^0 \right) B_0 \vec{g} \vec{x}^0 \quad (\vec{B}' \cdot \nabla \vec{B}_0)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} [B_0(\vec{z}) \vec{x}^0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\vec{x}^0 + b \vec{y}^0 + c \vec{z}^0)] \quad (\vec{B}_0 \cdot \nabla \vec{B}')$$

$$- \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{x}^0 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y}^0 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}^0 \right] (B_0(\vec{z}) a) \quad \nabla (\vec{B}_0 \cdot \vec{B}')$$

$$- P'_g \vec{z}^0$$

| 该 a, b, c 的表达式 ②

分量式

$$\vec{x}^0: -i\omega \rho_0 u = -ikP' + \frac{1}{4\pi} C_0(\vec{z}) \frac{\partial B_0(\vec{z})}{\partial \vec{z}} \quad (6a)$$

$$\vec{y}^0: -i\omega \rho_0 v = -i\lambda P' + \frac{1}{4\pi} B_0(\vec{z}) ik b(\vec{z}) - \frac{1}{4\pi} B_0(\vec{z}) ik a(\vec{z})$$

$$= ik b(\vec{z}) \cdot \frac{B_0(\vec{z})}{4\pi} - i\lambda \left(P' + C_0(\vec{z}) \frac{B_0(\vec{z})}{4\pi} \right) \quad (6b)$$

$$\vec{z}^0: -i\omega \rho_0 w = -\frac{\partial P'}{\partial \vec{z}} + \frac{1}{4\pi} B_0(\vec{z}) ik c(\vec{z}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} (B_0(\vec{z}) a(\vec{z})) - P'_g$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \vec{z}} (P' + a(\vec{z})) \cdot \frac{B_0(\vec{z})}{4\pi} - P'_g + ik c(\vec{z}) \frac{B_0(\vec{z})}{4\pi} \quad (7)$$

i, 我们仅限于讨论 $\lambda \rightarrow \infty$ 的情形, 即 \vec{g}^0 方向的扰动波长入

及 \vec{x}^0, \vec{y}^0 方向^{特征长度}相比较小, \vec{y}^0 方向的扰动很宽, 因此在 \vec{y}^0 方向的 diffusive effects 是主要的

这样选取 λ 的值, 使得热扩散

比扰动增长时间要快 (保持导温

过程, 以确保和次时间常数比扰动增长要慢

$\xrightarrow{\text{扩散可忽略}}$

$\xrightarrow{\text{扩散比热快}}$

(可计算常数和振动频率)

ii. $k \rightarrow \infty$ 时， ω 应该稳定性，因为扰动便运动线弯曲产生的力超过其他力（参见图 P.7，曲率半径的扰动波数的度量）

$$R = \frac{1}{k\omega}, \quad \omega: \text{一振动振幅}$$

磁吸力 $\sim \frac{\omega^2}{R}$, $k \rightarrow \infty$, 则 $R \rightarrow 0$, 磁吸力就很大

iii. 垂直方向的平行尺及限制得很好，也有利于稳定，因为气压和磁压梯度将克服磁浮力。
△-8

iv. 当 $k \rightarrow \infty$ 时，由 (6b) 式可得

$$\dot{P}' + \frac{1}{4\pi} B_0(\theta) a(\theta) = 0 \quad (11)$$

(Gilman, 图中分子多了一个 \bar{P} , 可能印刷错误)

v. (11) 式代入 (7) 式得：

$$-i\omega w = ikC_0 \frac{B_0}{4\pi\rho_0} - \frac{\dot{P}'}{\rho_0} \quad (12')$$

vi. 同理 (9) 式中令 $V \rightarrow 0$, V 是 \vec{P} 方向的速度扰动
扰动速度限于 (x, z) 平面

vii. (8a) 和 (9) 式中均出现 lV , 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $V \rightarrow 0$. (V 为有限值, 例如 10^{-4}
每秒, 则 (8a) 变为

$$-i\omega a = -\frac{\partial}{\partial z}(wB_0)$$
$$i\omega a = \frac{\partial w}{\partial z}B_0 + \frac{\partial B_0}{\partial z}w \quad (8a')$$

(9) 式变为：

$$i\omega \dot{P}' = \rho_0 i k u + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w)$$
$$= ik u \rho_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} w + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9')$$

磁浮力:

孤立的磁流管，完全导电的理想流体，动力学平衡

$$P_{in} + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = P_{out} \quad , \quad \therefore P_{in} < P_{out}$$

"in" 表示磁通管内的物理量

"out" 为管外

设 $T_{in} = T_{out}$ ，由 $P = \frac{k_B}{m} PT$

则 $P_{in} < P_{out}$ 则磁通管四周介电性，
在重力作用下 (g)，将此

Parker 1955 年引入。

$$从(8'a)求得 \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{i w a}{B_0} - w \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln B_0,$$

代入(9'), 沿乘 B_0 , 得到

$$i w a + i R u B_0 - i w \frac{\partial}{\partial \bar{z}} p' + (B_0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln B_0 - \frac{\partial B_0}{\partial \bar{z}}) w = 0 \quad (13)$$

最后我们得到方程组:

$$\left. \begin{array}{l} -i w \bar{p}_0 u = -i k p' + \frac{1}{4\pi} C(\bar{z}) \frac{\partial B_0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \\ -i w c = i k B_0 w \end{array} \right\} \quad (ba)$$

$$\left. \begin{array}{l} p' = p' R_{10} \\ p' + \frac{1}{4\pi} B_0(\bar{z}) a(\bar{z}) = 0 \end{array} \right\} \quad (8c)$$

$$\left. \begin{array}{l} -i w w = i k \frac{1}{4\pi} C(\bar{z}) \frac{B_0}{\bar{p}_0} - \frac{p' q}{\bar{p}_0} \end{array} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{array}{l} -i w w = i k \frac{1}{4\pi} C(\bar{z}) \frac{B_0}{\bar{p}_0} - \frac{p' q}{\bar{p}_0} \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$i w a + i R u B_0 - i w \frac{\partial}{\partial \bar{z}} p' + (B_0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln B_0 - \frac{\partial B_0}{\partial \bar{z}}) w = 0 \quad (13)$$

求解的变量: u, w, a, c, p', p'

其中 v, b 为零 (见 vi), a, b, c 与 p' , u, v, w 无关 v' .

分析其余的方程式为何不必列入.

(6b) 式 $\because b = v = 0$, 由(11)式, 左边 = 右边 = 0.

(8a) 式 变为(13)式 (见 vii)

(8b) 式 $b = v = 0$, 左边 = 右边 = 0

(9) 式 代入(13)式 变成一次 (见 vii)

这是一个代数方程组, 因为这 6 个变量不含对称子的守恒. 接下来,
方程等号右边的项归左边, 为使方程有非零解, 系数行列式为零

$$\begin{array}{|cccccc|c|} \hline & w & a & c & p' & p' \\ \hline -i\omega P_0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_0}{\partial z} & ik & 0 \\ 0 & -ikB_0 & 0 & -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -RT_0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\pi} B_0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 & -ik \frac{\partial \rho}{4\pi P_0} & 0 & \frac{g}{P_0} \\ \hline ikB_0 & \frac{\partial \rho}{\partial z} \ln P_0 - \frac{\partial B_0}{\partial z} i\omega & 0 & 0 & -i\omega \frac{B_0}{P_0} & = 0 \\ \end{array}$$

通过解得 $\overline{i\omega}$ 可以求得 3×3 个 3×1 的，结果为

$$\omega^2 P_0 \left[\omega^2 - \frac{k^2 B_0^2}{4\pi P_0} \right] \left[1 + \frac{B_0^2}{4\pi P_0 R T_0} \right] + k^2 \frac{B_0^2 g}{16\pi^2 P_0 R T_0} \cdot \frac{\partial B_0}{\partial z} - \frac{k^2 B_0^2}{4\pi} \left[\omega^2 - \frac{k^2 B_0^2}{4\pi P_0} \right] + \\ + \omega^2 \frac{B_0 g}{4\pi R T_0} \left(B_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln P_0 - \frac{\partial B_0}{\partial z} \right) = 0$$

$$V_{A0}^2 = \frac{B_0^2}{4\pi P_0}, \quad C_{S0} = R T_0 \quad (\text{等温声速}) \quad \text{即为子的速度}$$

$$\omega^4 (C_{S0}^2 + V_{A0}^2) - \omega^2 V_{A0}^2 \left[(2C_{S0}^2 + V_{A0}^2) k^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\rho_0}{P_0} \right] + k^2 V_{A0}^4 (C_{S0}^2 k^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \ln B_0) = 0 \quad (14)$$

这就是 Gilman 得到的色散关系，但不考虑磁浮力不稳定性。

将 (14) 式变成 Priest 和 (8.34) 式，寫下以下證明：

$$\textcircled{a} \text{ 求之: } \frac{1}{B_0 \omega} \frac{\partial B_0}{\partial z} = - \frac{1}{2k_B}$$

$$\lambda_B = \frac{P^* + \frac{1}{4\pi} B^*}{\rho^* g} \quad " \quad \lambda = 0 \text{ 时的相应值}$$

有磁場时的不稳。

$$\rho_0(z) = \rho^* e^{-\frac{z}{\lambda_B}}$$

$$P(z) = P^* e^{-\frac{z}{\lambda_B}}$$

$$B_0(z) = B_0^* e^{-\frac{z}{\lambda_B}}$$

已知: $\frac{d}{dz} (P + \frac{1}{\mu} B_0^*) = -\rho g$ (已知 \vec{g} 沿 $-\hat{z}$ 方向)

$$\frac{dP}{dz} + \frac{B_0}{\mu} \frac{dB_0}{dz} = -\rho g$$

$\frac{dP}{dz} = P^* e^{-\frac{z}{\lambda_B}} (-\frac{1}{\lambda_B})$, 右边的 P 移到左边并代入 $P = \rho g$

$$\frac{P^* e^{-\frac{z}{\lambda_B}}}{\rho^* e^{-\frac{z}{\lambda_B}}} (-\frac{1}{\lambda_B}) + V_{A0}^* \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dz} = -g \quad (A)$$

$$C_{S0}^* = \frac{P^*}{\rho^*} \text{ 等离子速}$$

(A) 式变形 $- \frac{1}{\lambda_B} C_{S0}^* + V_{A0}^* \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dz} = -g \quad (B)$

$$\lambda_B = \frac{P^* \frac{1}{\mu} B_0^*}{\rho^* g} = \frac{P^*}{\rho^* g} \left(1 + \frac{\frac{1}{\mu} B_0^*}{P^*} \right)$$

$$= \lambda \left(1 + \frac{1}{\lambda} \frac{V_{A0}^*}{C_{S0}^*} \right) \quad \text{式中 } \lambda = \frac{P^*}{\rho^* g} = \frac{C_{S0}^*}{g} \quad (C)$$

$$\begin{aligned} \text{由(B)式 } \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dz} &= \frac{-g \lambda_B + C_{S0}^*}{\lambda_B V_{A0}^*} \\ &= \frac{-g \lambda \left(1 + \frac{1}{\lambda} \frac{V_{A0}^*}{C_{S0}^*} \right) + C_{S0}^*}{\lambda_B V_{A0}^*} \end{aligned}$$

$$(C) \text{ 代入(B)式 } = -\frac{1}{\lambda_B} = \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dz} \quad \text{---}$$

$$\begin{aligned} \text{由 (14) 式 } g \frac{\partial}{\partial z} \ln B_0 &= g \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dz} \\ &= -\frac{g}{2\lambda_B} \cdot \frac{C_{S0}^*}{\rho^* P^*} = -\frac{1}{2\lambda_B} \cdot C_{S0}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (14) \text{ 式 } g \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{B_0}{B_0^*} &= g \frac{\partial}{\partial z} (\ln B_0 - \ln B_0^*) \\ &= -\frac{C_{S0}^*}{2\lambda_B} - g \frac{d}{dz} \ln B_0 \end{aligned}$$

注 75'

利用该等式及 (14) 式可变换为下式, 由 (C) 式可知 $g = \frac{C_{S0}^*}{\lambda}$ 代入.

$$(C_{S0}^* + V_{A0}^*) w^4 - V_{A0}^* \left[(C_{S0}^* + V_{A0}^*) R^2 + \frac{C_{S0}^*}{2\lambda_B} \right] w^2 + R^2 V_{A0}^* C_{S0}^* \left(R^2 - \frac{1}{2\lambda_B} \right) = 0 \quad (8.34)$$

这就是线性化 MHD 方程上的色散关系.

(14) 因为 $\omega^2 \propto -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2}$, 已知

$$\frac{g}{\rho} \frac{\partial^2 \ln P_0}{\partial z^2} = -\frac{1}{2\lambda_B} C_{S0}^2$$

再求: $\frac{g}{\rho} \frac{\partial \ln P_0}{\partial z} = \frac{g}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial z}$, 寻找 P_0 与 B_0 的关系.

$$V_{A0}^2 = \frac{B_0^2}{\mu P_0} = \text{const.} \quad P_0 = \frac{B_0^2}{\mu V_{A0}^2}$$

$$\frac{g}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial z} = \frac{g}{P_0} \frac{1}{\mu V_{A0}^2} B_0 \frac{\partial B_0}{\partial z}$$

$$\therefore -\frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} = \frac{1}{2\lambda_B}$$

$$\text{上式} = \frac{g}{P_0} \frac{2B_0}{\mu V_{A0}^2} \cdot \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial z}$$

$$= -g \cdot \frac{1}{\lambda_B}$$

$$= -\frac{1}{\lambda_B} \frac{g P_0}{P_0}$$

$$= -\frac{C_{S0}}{\lambda_B} = \frac{g}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial z} *$$

$$\therefore \frac{g}{\rho} \frac{\partial^2 \ln \frac{P_0}{\rho}}{\partial z^2} = -\frac{C_{S0}}{2\lambda_B} + \frac{C_{S0}^2}{\lambda_B} = \frac{C_{S0}^2}{2\lambda_B} *$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{P_0}{\rho} = -\frac{C_{S0}}{\lambda_B} \cdot \frac{1}{g} = -\frac{C_{S0}}{\lambda_B} \frac{P_0}{\rho} \cdot \frac{1}{g} = -\frac{1}{\lambda_B}$$

3. 稳定性判据 (Gilman)

i. (14) 式 描述的所有 2. 稳定性, 在无磁场, 1. 和无磁场

时 $V_{A0} = 0$, 且 $\omega = 0$

ii. 当 $0 < k^2 < -\frac{g}{C_{S0}} \frac{\partial}{\partial k} \ln \beta_0 = \frac{1}{2\lambda\lambda_B}$ 时, 则有 2. 稳定性

$$\text{iii. } \text{今 } \omega = \Omega, \quad \sqrt{k^2} [(2C_{S0}^2 + V_{A0}^2)k^2 + \frac{C_{S0}^2}{2\lambda\lambda_B}] = M$$

$$k^2 V_{A0}^2 C_{S0}^2 (k^2 - \frac{1}{2\lambda\lambda_B}) = N$$

$$(8.34) \text{ 式 变为 } \Omega^2 (C_{S0}^2 + V_{A0}^2) - 2M + N = 0$$

$$\omega = \Omega = \frac{M \pm [M^2 - 4N(C_{S0}^2 + V_{A0}^2)]^{1/2}}{2(C_{S0}^2 + V_{A0}^2)}$$

为使 $\omega < 0$, 必须 $[M^2 - 4N(C_{S0}^2 + V_{A0}^2)]^{1/2} > M$

$$\text{即 } -N(C_{S0}^2 + V_{A0}^2) > 0$$

\therefore 要求 $N < 0$. 即 $k^2 V_{A0}^2 C_{S0}^2 (k^2 - \frac{1}{2\lambda\lambda_B}) < 0$

$$0 < k^2 < \frac{1}{2\lambda\lambda_B} \quad (8.35)$$

结论

① 满足方程 (8.31), (8.32) (其中磁场随高度减小) 的任何静力学
磁流体 (magnetohydrostatic fluid), 因长驱长化有限, 会失去 2.
稳定性. 形式是磁流管 (loops of flux) 及其物质, 和非平衡.
值得注意的是 2. 无磁场的强度, 都要发生 2. 稳定性

② (8.35) 是 Parker 提出的 2. 稳定条件 $L > \frac{V_{A0} T}{mg} = 2\lambda$ (8.35). 的更新
(update). 对于运动的波数大, 不容易形成磁流管. 磁流管
(走读) .

iii. 但当 $C_{S0}^2 \geq V_{A0}^2$ 即 Gilman 说 $\beta \leq 1$ 时. (注意 Gilman 文中

$$\text{设 } \beta = \frac{V_{A0}^2}{C_{S0}} \text{ 在通常意义下: } \beta \text{ 定义为} (\beta \text{ 相反})$$

Gilman 定义无量纲波数 $k = \frac{K}{H}$, H为标高, 从而无量纲波长

$$\lambda = \frac{2\pi H}{K}, \quad \text{Gilman} \quad \text{特别指出是无论磁感应强度 } B, 1 \leq \beta \leq 10$$

$\lambda_{\text{最大}} = \lambda_{\text{最小}}$. 最大波长 $\lambda_{\text{最大}} \approx K \sim 0.4$ 附近. 即 $\lambda \approx 16\lambda$.

IV. 加来 Γ_0 X 方向磁场无差化, 即 $B=0$. [K 为 X 方向波数, $\lambda \approx$ 为 Y 方向]

$$(8.34) \text{ 式简化为 } (C_{S0}^2 + V_{A0}^2) \omega^4 - \frac{V_{A0}^2 C_{S0}^2}{2\Lambda \Lambda_B} \omega^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{V_{A0}^2 C_{S0}^2}{2\Lambda \Lambda_B (C_{S0}^2 + V_{A0}^2)}$$

进行稳定

$$V. \text{ 假定初值磁场随速度均匀 } \frac{d\beta}{dx} = 0, \quad \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} = -\frac{1}{2\Lambda_B} \quad \therefore \frac{1}{\Lambda_B} = 0$$

(8.34) 式变为

$$(C_{S0}^2 + V_{A0}^2) \omega^4 - V_{A0}^2 (2C_{S0}^2 + V_{A0}^2) K^2 \omega^2 + K^4 V_{A0}^2 C_{S0}^2 = 0$$

$$\text{解得: } \omega^2 = \frac{V_{A0}^2 (2C_{S0}^2 + V_{A0}^2) K^2}{2(C_{S0}^2 + V_{A0}^2)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(C_{S0}^2 + V_{A0}^2) C_{S0}^2}{(2C_{S0}^2 + V_{A0}^2)^2}} \right]$$

设下面的条件成立

$$\frac{4(C_{S0}^2 + V_{A0}^2) C_{S0}^2}{(2C_{S0}^2 + V_{A0}^2)^2} \ll 1 \quad (\text{类似于 Alfvén 波的讨论})$$

(只要 $C_{S0} \ll V_{A0}$ 上式即成立. 但 $V_{A0} \ll C_{S0}$ 时不行)

$$\text{于是 } \omega^2 = \frac{V_{A0}^2 (2C_{S0}^2 + V_{A0}^2) K^2}{2(C_{S0}^2 + V_{A0}^2)} \left[1 \pm \left(1 - \frac{2(C_{S0}^2 + V_{A0}^2) C_{S0}^2}{(2C_{S0}^2 + V_{A0}^2)^2} \right) \right]$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} K^2 + \frac{1}{2} V_{A0}^2$, 利用 $C_{S0} \ll V_{A0}$, 且忽略内括号的 $\frac{1}{2}$ 次

$$\omega^2 \approx K^2 V_{A0}^2$$

the growth rate is also a function of height. The reason here is also analogous, namely, that the perturbation gas pressure vanishes in the large-horizontal-wavenumber limit.

From a linear analysis, we cannot tell whether the magnetic-buoyancy instability would lead to a thorough mixing, or whether loops, after having grown to finite amplitude, would then become stable to further perturbations.

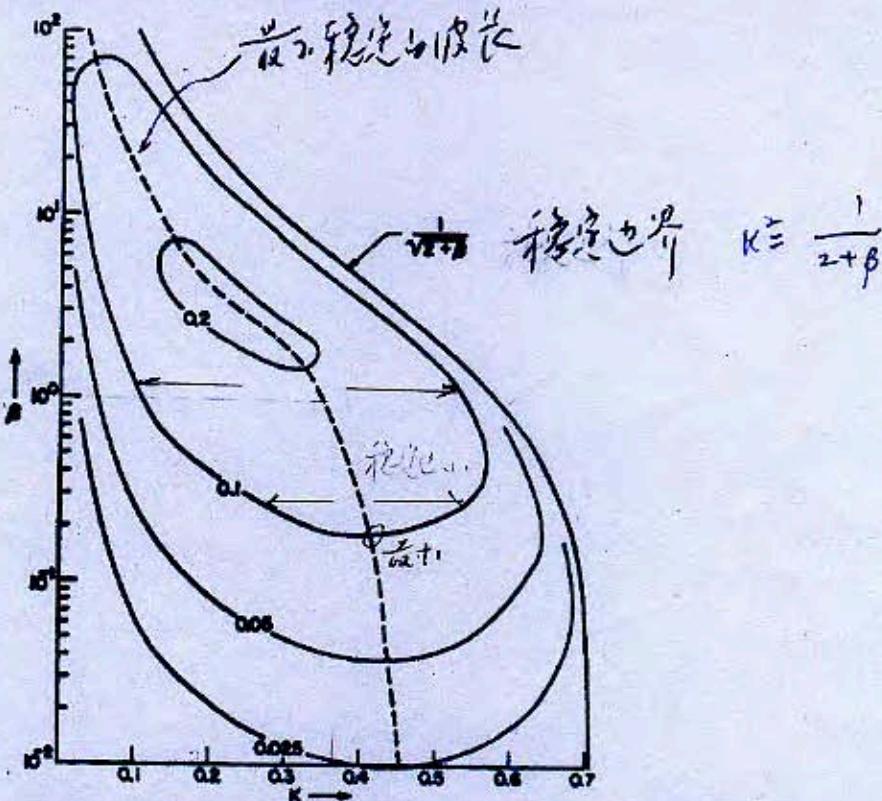


FIG. 1.—Dimensionless stability diagram for A, S, β independent of height. Light contours are growth rates. Dashed curve indicates most unstable wavelength.

VI. A PARTICULAR EXAMPLE

a) Stability Properties

We can gain further insight into the nature of this instability by considering a particularly simple example that can be solved completely, namely, the case of constant temperature and constant Alfvén speed ($S, A = \text{const.}$). In this case, equations (1) and (2) yield

$$\tilde{\rho}, \tilde{\mu} = \tilde{\rho}_0, \tilde{\mu}_0 e^{-\omega I}; \quad \tilde{B} = \tilde{B}_0 e^{-\omega I},$$

where the modified scale height $I = H(1 + \frac{1}{2}\beta)$, $\beta = A^2/S^2$. Here it is convenient to scale ω and k according to $\omega = (S/H)\Omega$; $k = (1/H)K$. Then equation (14) becomes

$$(1 + \beta)\Omega^4 - \beta[(2 + \beta)K^2 + 1/(2 + \beta)]\Omega^2 + \beta^2 K^4[K^2 - 1/(2 + \beta)] = 0, \quad (16)$$

so we get instability if $\beta > 0$, $0 < K^2 < 1/(2 + \beta)$. We plot the growth rates as a function of K and β in Figure 1 for the range $10^{-4} \leq \beta \leq 10^{-1}$. For $\beta \ll 1$ and $\beta \gg 1$, respectively, we find

稳定性，代表 Alfvén 速度

② 取“+”号，根据内声速的贡献，我们得到

$$\omega^2 \approx \frac{V_{A0}^2 C_{S0}^2 R^2}{2C_{S0}^2 + V_{A0}^2} \quad (+5 \text{ Priest P.295. 表示式相似，分母有一个修正项})$$

稳定性是慢磁声型

vi. 太阳大气的分层对稳定性有附加的影响，麦修斯(8.35)式。

稳定性条件分层时，应计入重力项 (原书 8.35 式中只在地表假设)

$$\frac{1}{\lambda B_0} \frac{dB_0}{dz} < -R^2 - \frac{RN^2}{V_A^2} \quad (8.36)$$

$$N^2 = -g \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{g}{V_A^2} \right) \quad (8.36) \quad C_S = \text{声速} \quad (\text{对应 } \frac{V_A}{R}) \quad \text{参见 P.46}$$

N 称为 Brunt-Väisälä 频率，被看作是分层介质中一种共振频率

$$(8.35) \text{ 式 可写成 } 0 < R^2 \lambda < \frac{1}{2\lambda_B} \equiv -\frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dz}$$

(8.36) 式 並未列出之假设：

以上是磁浮力的简单分析，未计入耗散影响 (LJ, K) 和转动 (R) 而且转动方向与垂直方向成 90° 角，就相对复杂，不考虑耗散就减少了固分层而起于稳定的条件。2. 稳定性判据 (8.29) 修改成

$$\frac{1}{\lambda} \frac{P_0}{B_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{B_0}{P_0} \right) < -\frac{1}{K} \frac{RN^2}{V_A^2} \quad (R=0)$$

(8.36) 式 修改时

$$\frac{1}{\lambda B_0} \frac{dB_0}{dz} < R^2 - \frac{1}{K} \frac{RN^2}{V_A^2} \quad (R \neq 0)$$

(Acheson, 1979, Solar Phys. 62, 23-50)

VIII. Gilman (1970) 和图 7.12 快速旋转削弱地球重力, 而使系统稳定

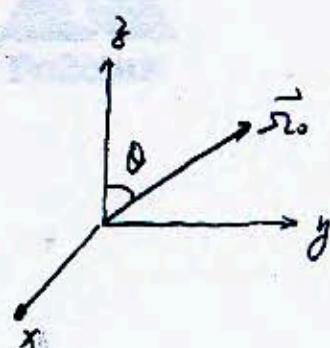
以下公式序号为 Gilman 图之中的顺序

Gilman 计入转动 (Ω_{rot}) 及有 Coriolis 和离心力, 以及离心力大于引力
∴ 安定之引力 g' 包含离心力即可.

转动矢量 $\vec{\omega}$ 与重直方向成 θ 角, 在 $x-y-z$ 平面内

Coriolis 力: $-2 \vec{\omega} \times \vec{v}'$

$$\vec{v}' = u \vec{x} + v \vec{y} + w \vec{z}$$



$$-2 \vec{\omega} \times \vec{v}' = (2 \omega_0 \cos \theta v - 2 \omega_0 \sin \theta w) \vec{x} \\ - 2 \omega_0 \cos \theta u \vec{j} + 2 \omega_0 \sin \theta u \vec{k} \quad (20)$$

由 $\vec{v}' = e^{i(kx + ly - wt)}$ 可见, y 方向转动惯量 I_y 为零

可认为 y 方向转动速度 $v \rightarrow 0$ (见 G-19, G-(10a) 的处理, $I_y v, v \rightarrow 0$)

$$\therefore w \approx 2 \omega_0 \cos \theta \nu$$

运动方程 y 方向的分量表示 (66)

$$-i \omega p_0 v = i k b_0 \beta \frac{B_0 \beta}{4\pi} - i \lambda \left(P' + \frac{1}{4\pi} A_0 \beta B_0 \beta \right)$$

应改正为

$$-i \omega p_0 v = i k b_0 \beta \frac{B_0 \beta}{4\pi} - i \lambda \left(P' + \frac{1}{4\pi} A_0 \beta B_0 \beta \right) - 2 \omega_0 \cos \theta u$$

$\therefore v \rightarrow 0$, 从 (66) 式可知

$$\left| i k b_0 \beta \frac{B_0 \beta}{4\pi} \right| \approx \left| i \lambda \left(P' + \frac{1}{4\pi} A_0 \beta B_0 \beta \right) \right|$$

$i k b_0 \beta \gg 2 \omega_0 \cos \theta u$ (5 阶次修正项相对)

Coriolis 力的该分量可忽略

其中 Coriolis 力 $\approx \vec{v}'$ 分量归入 g' , 令 $g' = g - 2 \omega_0 \sin \theta u$

只有垂直于引力方向的转动分量有影响，(ba)式变为

$$-i\omega P_0 u = -ikP_0' + \frac{1}{4\pi} C_{s0} \frac{\partial P_0'}{\partial \theta} - 2\Omega \sin \theta w \quad (ba')$$

(12)式变为

$$\begin{aligned} -i\omega w &= ikC_{s0} \frac{P_0}{P_0'} - \frac{P_0' g'}{P_0} \\ &= ikC_{s0} \frac{P_0}{P_0'} - \frac{P_0'}{P_0} (g - i\omega) \end{aligned} \quad (12')$$

$$\text{或 } j = 2\Omega \sin \theta$$

PSS 上方程组改由下列诸式组成

$$\left. \begin{array}{l} (ba') \\ (fc) \\ (10b) \\ (11) \\ (12') \\ (13) \end{array} \right\}$$

待定变量 u, w, a, c, P', P^0

令系数行列式等于零，得

$$\begin{aligned} &\left(C_{s0} + V_{A0} \right) w - \left\{ V_{A0} \left[(2C_{s0} + V_{A0}) k^2 + g \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \frac{P_0}{P_0'} \right] + j \left(C_{s0} + V_{A0} \right) \right\} \omega^2 \\ &\stackrel{(1)}{=} \left(C_{s0} + V_{A0} \right) w - \left\{ V_{A0} \left[(2C_{s0} + V_{A0}) k^2 + g \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \frac{P_0}{P_0'} \right] + j \left(C_{s0} + V_{A0} \right) \right\} \omega^2 \\ &+ jkV_{A0} \left[g - C_{s0} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln P_0 - V_{A0} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln P_0 \right] w + k^2 V_{A0}^2 \left(k^2 C_{s0} + g \frac{\partial}{\partial \theta} \ln P_0 \right) = 0 \quad (21) \end{aligned}$$

我们不讨论一般性例子，仅考虑等温和 Alfvén 速度为常数的例子
作下列代换，从而化(21)式

$$\beta = \frac{V_{A0}}{C_{s0}}, \quad \omega = \frac{C_{s0}}{H} \Omega, \quad (H \text{ 为常数}, H=1), \quad k = \frac{k}{H}, \quad G = \frac{\partial \ln P_0}{\partial \theta}$$

代入得

$$\text{第①项 } (C_{s0}^2 + V_{A0}^2) w^4 = C_{s0}^2 (1+\beta) \frac{C_{s0}^4}{H^4} \Omega^4 \quad (\times \frac{H^4}{C_{s0}^4}) \Rightarrow (1+\beta) \Omega^4,$$

$$\begin{aligned}
 & \text{第3回} [V_{A0}^2 \left((2G_{S0}^2 + V_{A0}^2) \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \rho_0 + g \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \frac{\rho_0}{\rho_0} \right) + j^2 (G_{S0}^2 + V_{A0}^2)] \omega \\
 &= \left\{ G_{S0}^2 \beta \left[G_{S0}^2 (2+\beta) \frac{K^2}{H^2} - \frac{G_{S0}^2}{2IH} + \frac{G_{S0}^2}{IH} \right] + \frac{G_{S0}^2 G^2}{H^2} G_{S0}^2 (1+\beta) \right\} \frac{G_{S0}^2}{H^2} \Omega^2 \\
 &\text{式中 } I = \lambda_B = H(1 + \frac{1}{2}\beta), \text{ 且 } \lambda_B = \lambda(1 + \frac{1}{2}\beta) \\
 &= \left\{ \frac{G_{S0}^4}{H^2} \beta \left[K^2 (2+\beta) + \frac{1}{2+\beta} \right] + \frac{G_{S0}^4}{H^2} G^2 (1+\beta) \right\} \frac{G_{S0}^2}{H^2} \Omega^2 \quad (\times \frac{H^4}{G_{S0}^6}) \\
 &\Rightarrow \left\{ \beta \left[K^2 (2+\beta) + \frac{1}{2+\beta} \right] + G^2 (1+\beta) \right\} \Omega^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{第3回. } jkV_{A0}^2 \left(g - G_{S0} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \rho_0 - V_{A0} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln B_0 \right) \omega \\
 &= j \frac{K}{H} G_{S0} \beta \left(g + \frac{G_{S0}}{I} + \frac{V_{A0}}{2I} \right) \Omega \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \rho_0 = -\frac{1}{\lambda_B} \quad (2P.57') \\
 &= \frac{G_{S0}^4}{H^3} GK\beta \left[g + \frac{2G_{S0}^2 + V_{A0}^2}{H(2+\beta)} \right] \Omega \\
 &\quad \frac{2G_{S0}^2 + V_{A0}^2}{H(2+\beta)} = \frac{G_{S0}^2(2+\beta)}{H(2+\beta)} = \frac{g}{\beta/\rho g} = g \\
 &= \frac{G_{S0}^4}{H^3} GK\beta \cdot 2g\Omega \quad (\times \frac{H^4}{G_{S0}^6}) \Rightarrow \frac{H}{G_{S0}^2} 2K\beta g \Omega G = \frac{1}{g} 2K\beta g \Omega G \\
 &\quad = 2K\beta G \Omega
 \end{aligned}$$

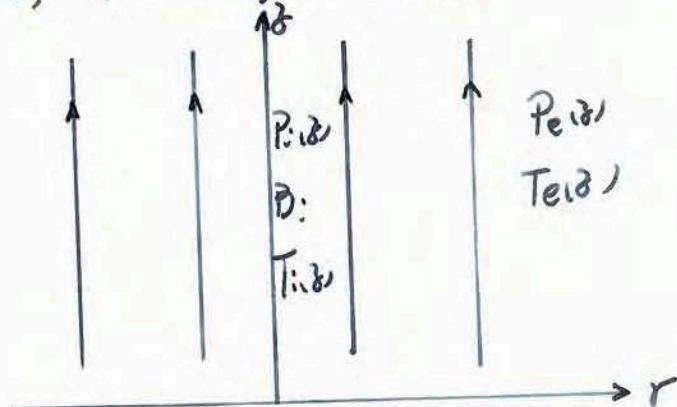
$$\begin{aligned}
 & \text{第4回. } k^2 V_{A0}^4 \left[K^2 G_{S0}^2 + g \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \rho_0 \right] \\
 &= \frac{K^2}{H^2} G_{S0}^4 \beta^2 \left(\frac{K^2}{H^2} G_{S0}^2 - \frac{g}{2I} \right) \quad (2P.57') \\
 &\quad (\times \frac{H^4}{G_{S0}^6}) \Rightarrow K^2 \beta^2 \left(K^2 - \frac{H^2}{G_{S0}^2} \frac{g}{H(2+\beta)} \right) \\
 &\quad = K^2 \beta^2 \left(K^2 - \frac{1}{2+\beta} \right)
 \end{aligned}$$

$$(1+\beta)\Omega^2 - \left\{ \beta \left[K^2 (2+\beta) + \frac{1}{2+\beta} \right] + G^2 (1+\beta) \right\} \Omega^2 + 2K\beta G \Omega + \beta^2 K^2 \left(K^2 - \frac{1}{2+\beta} \right) = 0 \quad (22)$$

8.4. 里子的平衡结构

8.4.1 磁流体静力学平衡

为简单起见，考虑分层大气平衡，仅有垂直磁场 $B(r)$ 及轴向 $r=0$ 处， $B(r=0)$ 有极大值 B_0 ：



8.4.2 垂直方向通过分层大气的磁流

当 r 较大时 $B(r) \rightarrow 0$

P_e 为子的函数，与 r 无关

$$\text{水平方向平衡} \quad P_i(r) + \frac{1}{\mu_0} B_i(r) = P_e(r) \quad (8.43)$$

$$\text{垂直方向平衡} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (8.44)$$

注意(8.44)式，对于 里子 内 (i) 外 (e) 均成立。

1. 高子初速时。因为 $B=0$ ，(8.44)式可写成

$$\frac{\partial P_e}{\partial z} = -\rho_e g \quad (8.45)$$

由于 P_e 由密度和温度决定，因此高子的垂直方程 (8.45)

即 $\frac{\partial P_e}{\partial z}$ 是温度方程 $T_e(z)$

在轴上 ($r=0$)，(8.43)式可写成

$$P_i(r) + \frac{1}{\mu_0} B_i^2 = P_e(r) \quad (8.46)$$

若 P_e 知道， $P_i(r)$ 就可求出。

这样(8.44)式变为

$$\frac{dP_i}{dr} = -\rho_i g \quad (8.47)$$

(8.46)式对 r 求导，注意到 B_i 为常数(且以为 r 的函数， $\frac{dB_i}{dr} \neq 0$)

$$\frac{dP_e}{dr} = \frac{dP_i}{dr}$$

由(8.45),(8.47)得 $P_i = P_e \quad (8.48)$

2. 对于任意离子轴的半径 r ，从(8.43)式可知，空间内的压力 P_i 等于包围它的压力 P_e ，(8.43)式也除以 P_e

$$\frac{P_i}{P_e} + \frac{1}{2\mu} \frac{B_i^2(r)}{P_e} = 1$$

记得(8.48)式，有 $\frac{T_i}{T_e} = 1 - \frac{1}{2\mu} \frac{B_i^2(r)}{P_e}$

垂直磁场的饱和对“横向(r 方向)温度差无影响”($\because P_i = P_e$)

但度过了应力的差异，即温度有了差别，当它保持水平方向的平衡

等离子体热平衡产生了这种温差差异，是由于磁力线是直线，
但是通常情况下磁力线是弯曲的。

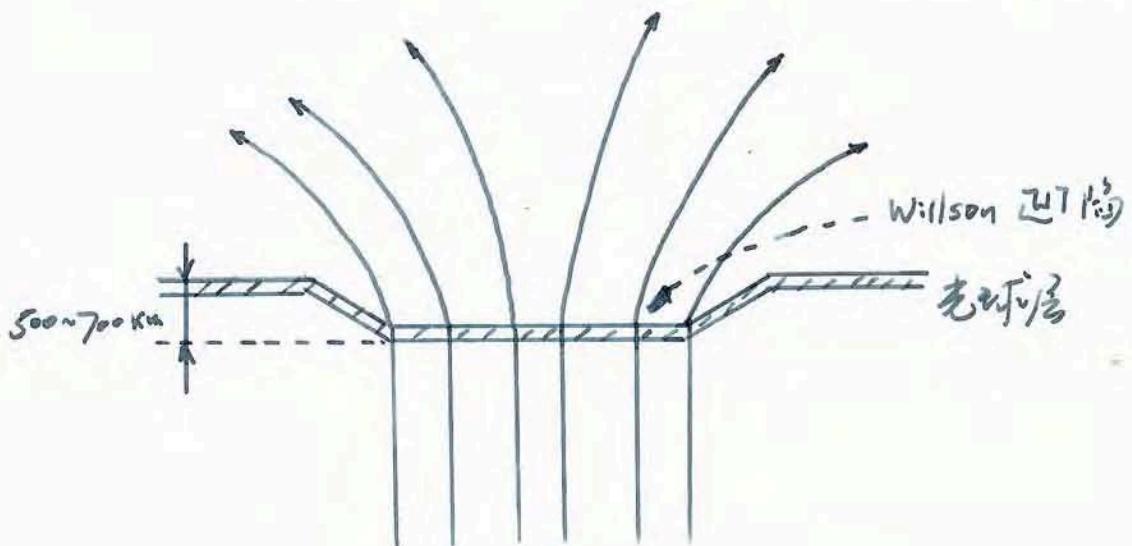
3. 磁泡中 $P_i + \frac{1}{2\mu} B_i^2 = P_e$ $\quad (8.46)$

B_i 为轴心的磁场，现在用 B 代表磁泡的场强，由式可得

$$\frac{1}{2\mu} B^2 < P_e$$

该式在宏观下是正确的，但在宏观表面上，磁压为
 $2.4 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}$ ($2.4 \times 10^5 \text{ dyne cm}^{-2}$)，场强为 $3 \times 10^3 \text{ G}$ ，超过气压
 $1.4 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}$ (即 $T_{5000} = 1.2$)，因此磁力线不被包围在磁泡

室内，要行散点，加面 1.26 倍方，导致内压减少。



第 1.26 黑子（单端充管）

[Willson effect] 指由于黑子比它周围（光球）更为透明（因为黑子的温度、密度更低），所以可看到之深处的光线]

B_z^2 的这一带减少，从 (8.46) 式可知黑子内的压力梯度

$\frac{dP_i}{dz}$ 将大于 $\frac{dP_e}{dz}$ ，根据 (8.45) 和 (8.47) 式，则有

$$-P_i g > -P_e g$$

$$P_i < P_e$$

实际上这时的 P_i 是子的函数，且 $\frac{dP_i}{dz} < 0$

$$\text{所以由 (8.46) } \frac{dP_i}{dz} + \frac{dP_i}{gpdz} = \frac{dP_i}{dz} - \left| \frac{dP_i}{dz} \right| = \frac{dP_e}{dz}$$

$$\therefore \frac{dP_i}{dz} > \frac{dP_e}{dz}$$

黑子内部密度的减少，产生了 Willson 效应。

4. 光球以下几千公里处，等离子体压力超过 10^7 N/m^2 ，如果有相应的碰撞，磁流管可以被高流速运动撞碎，所以有人认为认为黑子下面的磁流管相接线，只跨入到约 10,000 公里。也有人认为对流层中深处，磁流管仍此包围论。

5. Schlüter and Temesvary (1958) 静力学模型

- 根据 $\sigma = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} - Pg \hat{z}$ 作以下假设
- 柱坐标，轴对称 ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$)，子轴垂直太阳表面，指向太阳中心
 - 当 $r=0$ 时， $H_r=0$, $\vec{j}=0$, H_z 有极大
 - 电子视为准静态集中电荷，即所有质量对时间的守恒为零
(对于寿命较长的电子似乎是合理的假设)
 - 当 $z=-\infty$ 和 $r=\infty$, 磁场强度及其守恒为零。
 - 忽略星内物质的运动。
 - 磁场无扭转，即任何地方 $H_\phi=0$, 磁力线平行垂直太阳表面的平面内
- 磁场的垂直分量为 $H_z(z, r)$, 同深浅处子处的中心强度
即在 $r=0$ 处, $H_r=0$, $H_{z0}=H_z(z, 0)$
引进比例因子 $\zeta(z)$ 来表达 $\frac{H_z(z, r)}{H_{z0}}$ 对 z 的依赖关系。

$$\frac{H_z(z, r)}{H_{z0}} = \frac{D(\alpha)}{D(0)}$$

$$\alpha = \zeta(z) r$$

$$D(\alpha) \text{ 次次了磁流管的形状.}$$
 - 磁力线的连续性 $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, 在和上即 $r=0$, 有 $H_{z0}=H_z(z, 0)$
截面小, H_{z0} 较大 (连续性), 和大的磁流管截面大由 $D(0)$
决定, $H_{z0} \sim \frac{D(0)}{r^2}$, 令 $\zeta(z) = \zeta(z) D(0)$ ②
 - ②式代入①式, $H_z(z, r) = \zeta(z) D(\alpha)$ ③

$$\bullet \text{现代安撫式} H_r(\zeta, r) = -\frac{d^2}{d\zeta^2} \alpha D(\alpha)$$

i.e.: $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, [即]才達荷表示. 根據假设 vi, $H_r = 0$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{\partial}{\partial \zeta} H_\zeta = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) = -\frac{\partial}{\partial \zeta} H_\zeta$$

$$③ \text{式代入上式: } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) = -\frac{\partial}{\partial \zeta} [\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} D(\alpha)]$$

$$= -[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}] D(\alpha) - \zeta^2 \frac{\partial^2 D(\alpha)}{\partial \zeta^2}$$

$$= -2 \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} D(\alpha) - \zeta^2 \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta}$$

$$= -2 \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} D(\alpha) \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} - \zeta^2 \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta}$$

$$= -2 \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} D(\alpha) \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} - r \zeta^2 \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r H_r) = -2 r \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} D(\alpha) \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} - r^2 \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} D(\alpha) \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha}$$

$$\therefore \alpha = \zeta \cdot r$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r H_r) = -2 \alpha D(\alpha) \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha}$$

$$r H_r = -2 \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \int \alpha D(\alpha) d\alpha - \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \int \alpha^2 \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$d\alpha = \zeta \cdot dr, \quad dr = \frac{1}{\zeta} d\alpha \text{ 代入上式}$$

$$r H_r = -2 \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \cdot \frac{1}{\zeta} \int \alpha D(\alpha) d\alpha - \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \int \alpha^2 \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \int \alpha D(\alpha) d\alpha - \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \left[\alpha^2 D(\alpha) - 2 \int \alpha D(\alpha) d\alpha \right]$$

$$= -\frac{\alpha^2}{\zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} D(\alpha)$$

$$H_r = -\frac{\alpha^2}{r \zeta(\alpha)} \frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha} D(\alpha) \quad [\alpha = \zeta(r) r]$$

$$= -\frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha} \alpha D(\alpha) \quad (4) \text{ (推导完成且已求出 } H_r, H_\theta)$$

$$\frac{H_r}{H_\theta} = -\frac{\frac{d\zeta}{d\alpha} \alpha D(\alpha)}{\zeta^2 D(\alpha)} = -\frac{\alpha}{\zeta^2} \frac{d\zeta}{d\alpha} = -\frac{r}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\alpha} = -r \frac{d \ln \zeta}{d\alpha} \quad (5)$$

α : - Alfvén 波数在半径为 r 的水平面上的值，本章用相似变换。
 α 可理解为按比例缩小后的离轴的距离。

当 $\alpha(\zeta, r) = \zeta(r) \cdot r = \text{const.}$ 时，就确定了磁力线。也即
 磁力线 α 是常数。

通过半径为 r 的水平面的磁通量为

$$2\pi \int_0^r H_\theta r dr = 2\pi \int_0^r \zeta(r) D(\alpha) r dr$$

在确定的 $\zeta(r)$ 有 $d\alpha = \zeta(r) dr$, $r = \frac{\alpha}{\zeta}$

$dr \approx r dr$ 积分，对应 $d\alpha \approx \alpha d\alpha$ 积分

$$\begin{aligned} \text{磁通量 } F &= 2\pi \int_0^r H_\theta r dr \\ &= 2\pi \int_0^\alpha \alpha D(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

(3) 和和一张固定的磁力线之间的磁通量与 α 无关。

Priest 表达为 $F = 2\pi \int_0^\infty \zeta f(\zeta) d\zeta$

衍射方程

Schlüter et al.

$$D(\alpha)$$

$$\alpha$$

$$\zeta(\theta)$$

$$H$$

$$H_\theta = \zeta^2 D(\alpha)$$

$$H_r = -\frac{d\zeta}{dr} \alpha D(\alpha)$$

Priest

$$f(\zeta)$$

$$t$$

$$B_z(\theta)$$

$$B$$

$$B_\theta = f(\zeta) B_z(\theta)$$

$$B_r = -\frac{1}{2} R f(\zeta) \frac{dB_z}{d\theta}$$

求 $H_\theta, H_r, P_z, P_\theta$

首先考虑平衡方程 $\sigma = -\nabla p + j \times \vec{B} - \rho g \vec{z}$ ⑦

已知情况 $\vec{B} = (B_R(R, \theta), 0, B_\theta(R, \theta))$ ⑧) Schlüter 给定 $\vec{H} = (H_r(r, \theta), 0, H_\theta(r, \theta))$, 原分量式 ⑨式 $\sigma = -\nabla p + j \times \vec{H} + \rho g \vec{z}$

\vec{r} 分量: ($\nabla \times \vec{H}$ 的 \vec{r} 分量乘以 $H_\theta \vec{\theta}$)

$$\sigma = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial H_r}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right) \quad \text{根据 (8.49) 式}$$

$\vec{\theta}$ 分量: ($\nabla \times \vec{H}$ 的 $\vec{\theta}$ 分量乘以 \vec{r} 的 $\vec{\theta}$ 分量)

$$\sigma = -\frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial H_r}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right) - \rho g \quad \text{根据 (8.50) 式}$$

\vec{r} 分量: $H_\theta \left(\frac{\partial H_r}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right) = 4\pi \frac{\partial p}{\partial r} \quad (7-1)$

式中 $H_\theta \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = \zeta(\theta) D(\alpha) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{d\zeta}{dr} \alpha D(\alpha) \right) \quad [3.7 \text{ 式代入}]$

$$= -\zeta(\theta) \alpha D(\alpha) \frac{d^2 \zeta}{dr^2} - \zeta(\theta) D(\alpha) \frac{d\zeta}{dr} \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha D(\alpha))$$

$$= -\zeta(\theta) \alpha D(\alpha) \frac{d^2 \zeta}{dr^2} - \zeta(\theta) D(\alpha) \frac{d\zeta}{dr} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha D(\alpha)) \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\zeta_{,0}^2 \alpha D(\alpha) \frac{d^2 \zeta}{d\alpha^2} - r \zeta_{,0}^2 D(\alpha) \left(\frac{d \zeta}{d\alpha} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha D(\alpha)) \\
 &= -\zeta_{,0}^2 \alpha D(\alpha) \frac{d^2 \zeta}{d\alpha^2} - \alpha \zeta_{,0}^2 D(\alpha) \left(\frac{d \zeta}{d\alpha} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha D(\alpha)) \quad (7-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7-1) \text{ 式中 } \text{ 令 } H_2 \frac{\partial H_2}{\partial r} &= \zeta_{,0}^2 D(\alpha) \frac{\partial}{\partial r} (\zeta_{,0}^2 D(\alpha)) \\
 &= \zeta_{,0}^2 D(\alpha) \zeta_{,0}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} D(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial r} \\
 &= \zeta_{,0}^2 D(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} D(\alpha) \quad (7-3)
 \end{aligned}$$

$$(7-1) \text{ 式中 } \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \zeta_{,0}^2 \frac{\partial P}{\partial \alpha} \quad (7-4)$$

(7-2), (7-3), (7-4) 代回 (7-1) 式. 以 $\zeta'' = \frac{d^2 \zeta}{d\alpha^2}$ 有

$$\alpha D(\alpha) \zeta'' + \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} [\alpha D(\alpha)] \zeta' + \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} (D^2(\alpha)) \cdot \zeta'' = -4\pi \frac{dP}{d\alpha} \quad (7-5)$$

对 r 积分, 也即 α 积分, 从 轴 ($r=0$) 到 元素 远处 ($r=\infty$) 积分
以 $\alpha \rightarrow 0 \rightarrow \infty$, 积分 (7-5) 式

$$\zeta'' \int_0^\infty \alpha D(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \zeta'^2 \alpha D(\alpha) \Big|_0^\infty + \frac{1}{2} \zeta'' D^2(\alpha) \Big|_0^\infty = -4\pi \Delta P$$

当 $\alpha=0$ 和 $\alpha=\infty$ 时, $\alpha D(\alpha)=0$

当 $\alpha=\infty$ 时, 磁流管应消失, $\therefore D(\alpha)=0$.

$$\zeta'' \int_0^\infty \alpha D(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} \zeta'' D^2(0) = -4\pi \Delta P \quad (7-6)$$

(Priest (8.51) 式 最后一次 应为 $B_i^2 f_{,0}^2$ 相加 $\frac{1}{2} \zeta'' D^2(0)$, 19 页修正
 $f_{,0}(0)=1$, 所以 变成 B_i^2)

$$\Delta P = P(\infty, \beta) - P(0, \beta)$$

为 同上 考虑, 全 3 式 $H(\beta) = \zeta_{,0}^2 D(\alpha) = y^2$.

$$f = \frac{2}{D(\alpha)} \int_0^\infty \alpha D(\alpha) d\alpha \quad (8)$$

于是有 $\zeta D(\alpha) = y$

$\zeta^* D(\alpha) = y^*$ 代入(7-6)式得

$$f y y'' - y^* + \delta \pi \Delta P = 0 \quad (7)$$

⑦式是磁场的修正方程

y^* 相当于 H^* (参见⑤式), 代表磁感应强度

$f y y''$ 来自于 $H_0 \frac{\partial H_r}{\partial z}$, “力项, 表示磁力线条曲, 代表沿磁力线的“吸力”

⑦式的子分量, 即(8.50)式, 当 $r \rightarrow 0$ 时, $H_r \rightarrow 0$. 因此有

$$\frac{dP_i}{dz} = -P_i q \quad (\text{下标 } i \text{ 代表 } r \rightarrow 0 \text{ 时的值}) \quad (8.52)$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时, $D(\alpha)$ (表示磁流管的形状) $\rightarrow 0$, $\therefore H_r \rightarrow 0$

$$\frac{dP_e}{dz} = -P_e q \quad (\text{下标 } e \text{ 代表 } r \rightarrow \infty \text{ 时的值}) \quad (8.53)$$

• 把需要求解的方程归结如下:

对应于 Priest 方程

$$f y y'' - y^* + \delta \pi \Delta P = 0 \quad (8.51)$$

$$\frac{dP_i}{dz} = -P_i q \quad (8.52)$$

$$\frac{dP_e}{dz} = -P_e q \quad (8.53)$$

求 P_i, P_e, H_0, H_r (其中 H_0, H_r 均用其导数表达)

因此知道 a. 1 邻近流管 ($\sim \Delta P$ 有关) b. 通量 $F = 2\pi \int \alpha D(\alpha) dz$

(由 Priest 方程: $2\pi \int f dz = 0$) c. 磁流管的形状 (因 $\int \alpha d \ln D(\alpha) = D(\alpha) \bar{\alpha}^2$)

相当于 Priest: $f(z) = e^{-\bar{\alpha}^2 z^2}$) d. 边值: 在 $z=0$ 时, $f(0) = 1$, $\frac{df}{dz}(0) = T_E$

已知.

则方程⑦($= (8.51)$) 中, 可为 $f(z)$ [因 $\int f dz = 0$ $\therefore \frac{\pi F}{F} = \int_0^\infty \alpha D(\alpha) dz / \int_0^\infty D(\alpha) dz$]
 $= \int_0^\infty \alpha D(\alpha) e^{-\bar{\alpha}^2 z^2} dz / \int_0^\infty D(\alpha) e^{-\bar{\alpha}^2 z^2} dz = \int_0^\infty D(\alpha) e^{-\bar{\alpha}^2 z^2} dz / \int_0^\infty D(\alpha) dz = \bar{\alpha}^2$,
积分后可得 $f(z) = e^{-\bar{\alpha}^2 z^2}$]

从(8.51), (8.52), (8.53) 三个方程可求得 $\gamma(\eta)$, $P_0(\eta)$, $P_{\infty}(\eta)$

于是从③式 $H_\theta(\theta, r) = \zeta(\theta, D(r))$

④式 $H_r = -\frac{d\zeta}{d\theta} \alpha D(r)$

求 H_θ, H_r ($H_\theta = 0$ 是已知的假设)

从 (8.51), (8.52), (8.53) 三个方程可求得 γ (即 ζ), P_{\perp} , P_{\parallel}

于是从③式 $H_z(\theta, r) = \zeta(\theta, r) D(r)$

④式 $H_r = - \frac{d \zeta}{d \theta} \alpha D(r)$

求 H_z, H_r ($H_\varphi = 0$ 是已作假设)

Schlüter 等人模型的延伸

1. Deinzer (1965)

利用能量方程确定温度, 计入对流对热流 (heat flux) 的阻尼作用.

2. Jakimiec (1965), Yun (1968), Landman and Finn (1979)

进一步对该模型研究.

然而不求物子的相似 (self-similar) 假设 (该假设在实际不符), 我们仍需求得方程 (8.49), (8.50) 以及能量平衡方程 (包括磁场中对流效应)

3. Osherovich (1979, 1982) 从二方面改进了 Schlüter-Temesvary 理论

i, 计入角向场 B_θ

ii, 考虑了磁力线倾斜和限制 (原来理论略含磁力线偏离垂直方向角度为 17.67°), 其结果与典型黑子表面的 $B_x(R)$, $B_y(R)$ 规则性符合很好.

Meyer et al. (1977) 通过简单的磁流体静力学模型.

1. 黑子间磁通量分布, 内部的压力为 P_i , 密度 ρ_i , 磁场 B_i 与球体半径 R_i , 被充满区域 V_0 包围, 压力为 P_e , 密度 ρ_e (参 8.10)
内外两个区域的平衡方程

$$\text{内: } \mathbf{0} = -\nabla(P_i + \frac{1}{2\mu} B_i^2) + (\vec{B}_i \cdot \nabla) \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial r} + \rho_e \vec{g} \quad (8.54)$$

$$\text{外: } \nabla P_e = \rho_e \vec{g} \quad (8.55')$$

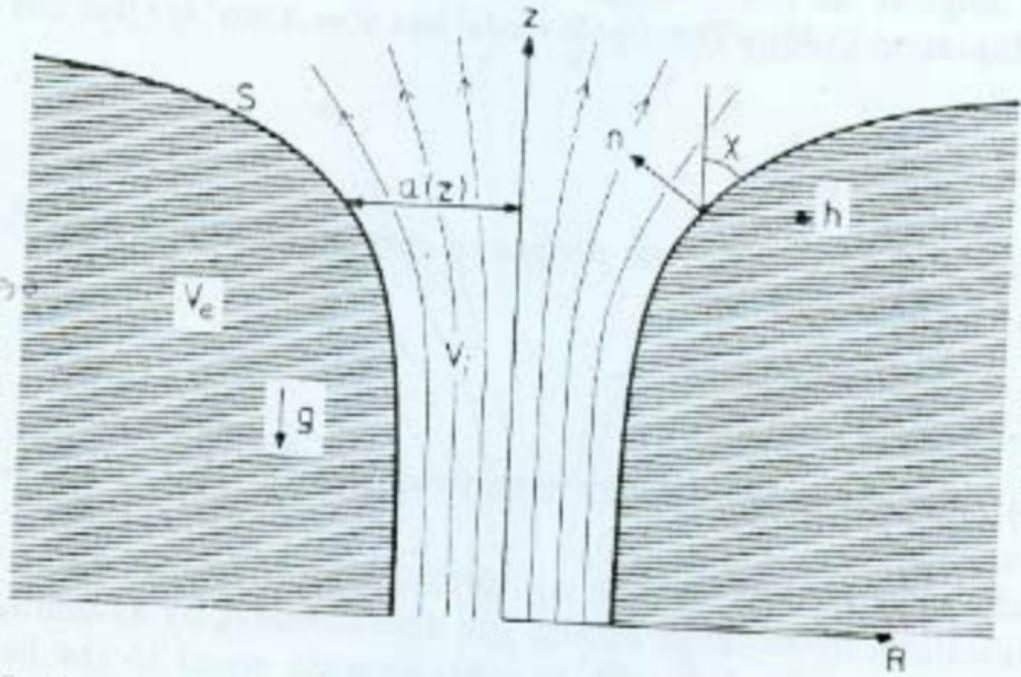


Fig. 8.10. A magnetic flux rope surrounded by field-free plasma (after Meyer *et al.*, 1977).
field (B_0) is potential. It may be written

边界条件：接合面上的压强连续

$$P_i + \frac{1}{2\mu} B_i^2 = P_e$$

壳体附近本征的(真)压强远远小于外压，可采用更简单的模型
内部压强 P_i 及空心忽略。称该真空模型 (vacuum model)

因为内部压强 P_i 被忽略，于是等离子体密度也忽略 $n_i \rightarrow 0$ (真空)，由此
引起的电流也忽略。所以磁场 B_i 是势场 (需要注意的是这样
的推论是非普遍的，静力学平衡时 $-\nabla P_i + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}_i + P_i \vec{g} = 0$ ，忽略 $\vec{j} \times \vec{B}_i = 0$
有二种情况满足此式 ① $\nabla \times \vec{B} = 0$ $\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B}$ 无场
② $\nabla \times \vec{B} = 0$ $\vec{B} = -\nabla \varphi$ 势场。

对于真空模型， $n_i \rightarrow 0$, $\vec{j} \rightarrow 0$)

(用柱坐标中的通量函数 (flux function) $\psi(r, \theta)$ 表示)

(p.368 $A(x, \vec{z}) \vec{g}^0$: is the magnetic vector potential or flux function
注意 \vec{A} 与 $\vec{\psi}$ 元素 A 为分量，在柱坐标中只有 φ 元素 $A = RA_\varphi$

p.143 有关)

Meyer et al. (1977) 附录 B. 直角坐标 (x, \vec{z})
 $\vec{B} = (B_x, B_z) = (-\frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial \psi}{\partial x})$ 在 p.143 后一行

$$\vec{B}_i = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial R} \right)$$

ψ 为通量函数

对通量函数 ψ 有一些说明。

通量函数 $\psi(R, \theta)$ 为 φ 元素。

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{R} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right) \vec{R}^0 + \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \right) \vec{\varphi}^0 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RA_\varphi) - \frac{1}{R} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} \right) \vec{z}^0 \\ &= -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \vec{R}^0 + \frac{\partial A_R}{\partial z} \vec{\varphi}^0 + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RA_\varphi) \vec{z}^0 \end{aligned}$$

令 $\psi = RA_\varphi$

$$\therefore \vec{B} = \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial \psi}{\partial R}, \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)$$

$$\mu \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial B_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_R}{\partial z} \right) \vec{R}^0 + \left(\frac{\partial B_R}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial R} \right) \vec{\varphi}^0 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RB_\varphi) - \frac{1}{R} \frac{\partial B_R}{\partial \varphi} \right) \vec{z}^0$$

\vec{B} 分量表达式代入 (关于 ψ 对称)

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial b\theta}{\partial \vec{z}} \vec{R}^o + \left[\frac{\partial}{\partial \vec{z}} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) \right] \vec{\varphi}^o + \frac{1}{R} \frac{\partial b\theta}{\partial R} \vec{\theta}^o \\
 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial b\theta}{\partial \vec{z}} \vec{R}^o - \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{z}^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \right) \vec{\varphi}^o + \frac{1}{R} \frac{\partial b\theta}{\partial R} \vec{\theta}^o
 \end{aligned}$$

$$\vec{j} \times \vec{B} = 0$$

$$\begin{vmatrix}
 \vec{R}^o & \vec{\varphi}^o & \vec{\theta}^o \\
 -\frac{1}{R} \frac{\partial b\theta}{\partial \vec{z}} & \frac{\partial \psi}{\partial \vec{z}} & \frac{1}{R} \frac{\partial b\theta}{\partial R} \\
 -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{z}} & \frac{\partial \psi}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2}
 \end{vmatrix} = 0,$$

$$j_\psi = - \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{z}^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \right)$$

$$\vec{R}^o \text{ 分量: } j_\psi \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{b\theta}{R} \cdot \frac{1}{R} \frac{\partial b\theta}{\partial R} = 0$$

$$j_\psi \text{ 代入 } \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{z}^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{b\theta}{R} \frac{\partial b\theta}{\partial R} = 0 \quad (\#)$$

$$\text{从 } \vec{\varphi}^o \text{ 分量 可得 } -\frac{\partial \psi}{\partial \vec{z}} \frac{\partial b\theta}{\partial R} + \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial b\theta}{\partial \vec{z}} = 0 \quad [\psi = \psi(R, \vec{z})]$$

$$-\frac{\partial b\theta}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{z}} + \frac{\partial b\theta}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{z}} \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

$$\frac{\partial b\theta}{\partial \psi} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{z}} + \frac{\partial \psi}{\partial \vec{z}} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = 0.$$

$$j_\psi \frac{\partial b\theta}{\partial \psi} \neq 0, \quad \frac{\partial b\theta}{\partial \psi} = K(\psi) \quad \therefore b\theta = b_\theta(\psi)$$

$y = f(x)$ 为奇数，也是
偶数

$b_\theta \therefore$ 为 ψ (逆函数) 的奇数

$$\frac{\partial b\theta}{\partial R} = \frac{\partial b\theta}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad \text{代入 } (\#) \text{ 得}$$

$$\left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{z}^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial R} - b\theta \frac{\partial b\theta}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

$$\Delta_1 \psi + \frac{d}{d\psi} \left(\frac{1}{2} b_\theta^2 \right) = 0 \quad (\#)$$

$$\text{或 } \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{z}^2}$$

注意 Δ_1 是 Laplace 算子 $\Delta = \nabla^2$

$$2. \text{ J.J. Meyer 的例子}, \vec{B}_i = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial R} \right), b_\theta = 0$$

$$\psi(R, \theta) 满足 (8.57) 式: \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (8.57)$$

边界条件: (已忽略里内部真压、引力)

边界面上 $a = a(\theta)$ 上, 有 $\frac{1}{2\mu} \vec{B}_i^2 = P_e(\theta)$

边界条件的上底和下底:

$\theta \rightarrow \infty$, 这时可设场为单极场, 边界面上的场几乎为水平方向 (因为假设为单极场)

$$\text{通量 } F = B_0 2\pi a^2 \quad (\text{半球面面积})$$

$$B_0 \approx R_i \approx \frac{F}{2\pi a^2}$$

当 $\theta \rightarrow -\infty$ 是垂直场

$$B_\theta \approx B_i \approx \frac{F}{\pi a^2} \quad (\text{半球底部面积 } \pi a^2)$$

我们想用的是对于无场区域, 给定等高体压力 $P_e(\theta)$. 令之通量 $F = 2\pi(4)_s$

求边界面半径 $a(\theta)$ 和通量函数 $(4)_s$ 以及均值, 通量 $F = 2\pi(4)_s$, 则
(给定的边界条件)

可以这样理解 $\overline{F = 2\pi(4)_s}$ 通量.

$$\bar{F} = 2\pi a^2 B, \quad B a^2 \sim \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} a^2 \sim \frac{4}{a} \cdot a^2 = 4$$

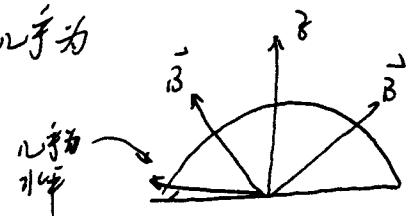
不过对于相反问题的求解要容易一些, 即选择 (8.57) 分析解, 再推出 $P_e(\theta)$, $\psi \rightarrow B_i \rightarrow P_e(\theta)$

几个真空场: 简单例子

例一. Bessel-function 模型

$$\text{解 (8.57)} \quad \text{势函数 } \psi = A R J_1(RR) e^{-RR} \quad (J_1(RR) > 0)$$

$$\text{里内部磁场} \quad \vec{B}_i = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial R} \right)$$



$$\begin{aligned} \text{径向场 } B_R &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ &= -\frac{1}{R} A R J_1(Rr) (-k) e^{-kr} \\ &= A R J_1(Rr) e^{-Rr} \end{aligned}$$

式中 A, k 为常数, 对应于第 8.10. 段已得 $\Phi = 2\pi F(R, r)$, $B_R = \frac{kF}{R} = \frac{kF}{2\pi R}$
上式 B_R 为介电常数 ϵ , $R=a$ 时, 且子带大 $R(r) (=a(r))$ 也带大, B_R 减少.

当 $Rr \gg 1$ 时, Bessel 函数近似. 根据 8.4.2 节讨论, 该磁场到地磁之差

13.1. 偶极模型

$$\text{偶极子} (R, \theta, \phi), \quad \Phi = \frac{A}{R} \sin^2 \theta, \quad B_r = \frac{3\gamma^3}{A^2} \frac{\cos \theta}{\sin^5 \theta} \quad (\text{Priest (1962) } \frac{3\gamma^3}{A^2} \sin^3 \theta)$$

(8.57) 式. 轴对称高密度场

(即为 Mayer 所谓轴对称场, 也未给出偶极子下, Φ 及 B_R 的表达式.)

13.2. 有孔电流片模型

引入扁球面坐标 (oblate spheroidal coordinates) (u, v, ϕ) , $R = \cosh u \sin v$

$v = \sinh u \cos \phi$ 为势重, $\vec{B} = -\nabla \bar{\Psi}$, $\nabla^2 \bar{\Psi} = 0$. 令 $v = \text{const}$. $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(u)$

$$\text{有 } B_R = \frac{\tanh u \sin v}{\cosh^2 u - \sin^2 v} \quad (\text{参考 Meyer et al. (1977) 4.3 节})$$

但是还有一个模型得自于 Priest 和 Pinn 的工作, 相符. Meyer 选择用平均模型 (mean model). 他说核, 外层空间有一平均场 $\bar{B}_z(\bar{r})$, 两侧等于边界上的值. 对于旧磁通管该假设不适用. 方程 (8.58) 改为

$$\bar{B}_z(\bar{r}) \approx [2\mu_0 \rho_e(\bar{r})]^{1/2} \quad (8.64)$$

Priest 根据 1.5 节理论之对流层的标准模型得出. 通过下面的定理. 通量管的半径由下式确定

$$\pi \bar{A}(\bar{r}) \bar{B}_z(\bar{r}) = F \quad (8.65)$$

- Parker (1979b) 对于河流的黑子和泉——单一的磁通管——提出同轴流
 - 他认为黑子是由许多分离的磁通管组成，在光球面约 1000 km 处，小磁通管降至 300 个 (图 8.11)，起因于交换或 (翻转) 对流不稳定。
 - 而 spaghetti 模型中，太阳表面磁通管的最集会是有助于磁浮力和黑子下面的下沉气流。
 - 在 1000 km 附近，磁通管内部，热输送才大大地受到阻碍。场强为 5000 G，小磁通管被气体所分割。气体中没有磁场，通常情况下，气体可通过对流传递热量。气体通过对流传递的净热量，是仅为正常热量的五分之一 (见图 8.11)。
 - 表面下的下沉气流向黑子的轴的方向流动，穿行在各小磁通管之间。并通过小磁通管的气体动力学拖曳，提供束缚力 (confining force) 以通过对小磁通管的气体动力学拖曳，提供束缚力 (confining force)
 - 下沉气流也携带了一些热量，化黑子下面的剩余热量，从而减少了对束缚力的要求 (即会促进气体膨胀)
 - 下沉气流如何产生？ Parker 指出下沉气流的上升的磁通管有关。
 - 下沉气流如何产生？ Parker 指出下沉气流的上升的磁通管有关。被对流力 (convective force) 所增强，从而给磁通管一个对流推动。而卫星则认为磁通管很可能位于下沉气流中，不存在和不存在之间。而卫星则认为磁通管很可能位于下沉气流中，不存在和不存在之间。
 - 通过这种对流元可能取代黑子形成。早期阶段是极化，因为几乎没有。
 - 对流元 (moat cell) 本性了。它的对流方向与之相反。
 - Spruit (1981d) 认为，小磁通管可以是聚化的，不是抗拒于对流已的底部。
 - Parker 模型的观测支持
 - 带有本影亮点 (bright umbral dots) 的分支
 - 黑子本影的表面温度似乎与直径无关，2. 无论直径 4000 km 或 40,000 km 表面温度约 3900 K，场强约 3000 G。单一磁通管理论的分支许许多多样，因为单一磁通管内的流动类似于对流，但应该一致。

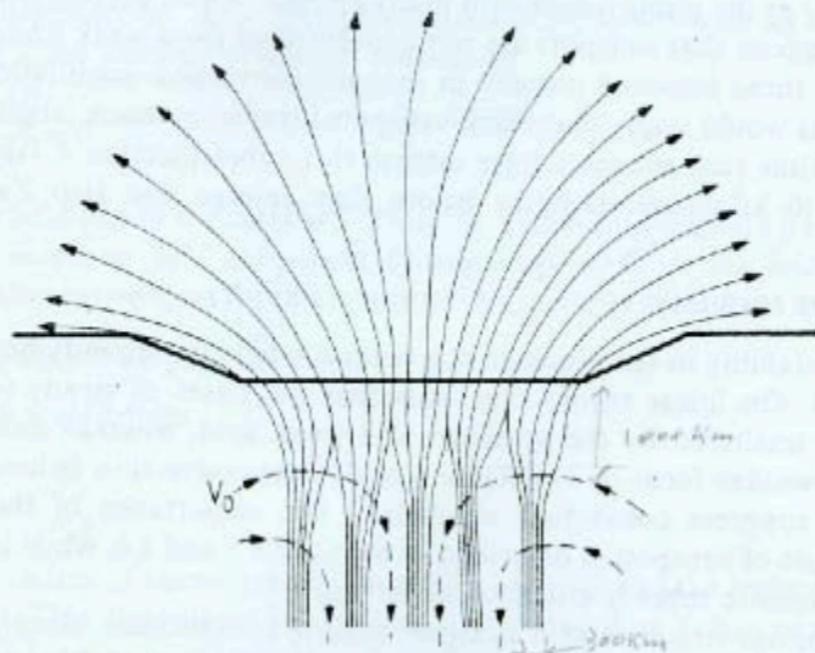


Fig. 8.11. Parker's model for a sunspot as a cluster of magnetic flux tubes, held together by a convective downdraft indicated by dashed arrows (from Parker, 1979b).

若本磁力线附近有气体若无速度入口则运动一致。

虽然 Parker 模型有许多令人感兴趣的特点，加上我们对于强磁通管 (intense flux tube) 行为的研究的快速发展，关于星云磁通管问题的研究工作。理论尚处于初期阶段。

- Spruit (1981a) 在去上导管的风力中除了磁通管间的磁斥力。
- Pidduckson 认为星子不是由弱而均匀的场 (100G) 集流而成。在星子出现前，星子已集流到千山斯的强度。

8.4.2 里子的稳定性

线性理论表明：有弱磁场时，绕转（overturning翻滚）对流的发生不受磁场影响。适中大小的磁场当 $K > \eta$ 时，仅形成较弱的振荡对流（overstable oscillatory convection）。强磁场则抑制对流的发生。

里子的平衡结构颇为复杂，因为需同时考虑重力平衡、磁力和压力。因此稳定性问题迄今尚不能作全面的分析。Meyer (1977) 等人的分析仅平衡问题取得很大进展。他们先在附近考虑局部稳定性问题。有一次回流地壳带，首先不稳定性发生，因为椭状磁力线使里子边界弯曲，使里子属于立模或模型不稳定性。第二次因素，稳定性问题发生于由于里子外部的磁力线平行于为洞带的外部等高平面的上面。属于 Rayleigh-Taylor 模式的稳定性（假如不考虑磁力线的弯曲）

Meyer et al. (1977) 的稳定性判据（对于太阳里子）很困难，方程待定。

$$\nabla \cdot (\vec{P}_i + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_i^2) = \rho_i \vec{g} + (\vec{B}_i \cdot \nabla) \vec{B}_i \quad (8.54) \quad (\text{里子内部})$$

$$\nabla \vec{P}_e = \rho_e \vec{g} \quad (8.55) \quad (\text{里子外部, 无磁场})$$

$$\vec{P}_i + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_i^2 = \vec{P}_e \quad (8.56)$$

加速度原理

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e + \delta W_s$$

δW 为改变绝热往复量，它的能量改变。 δW_i 为里子内部的能量改变。

δW_e 为外部， δW_s 为界面上的增量变化。

假设体积次 δV_i , δW_e 和 δW_s 均大于零 (因为厚度对流之速率 \vec{n} 稳定性), 则稳定性的重要条件是

$$\delta W_s > 0$$

$$\delta W_s = \frac{1}{2} \int_S (\vec{n} \cdot \vec{\zeta})^2 \vec{n} \cdot [\nabla (P_i + \frac{1}{2\mu} \vec{B}_i^2) - \nabla P_e] dS \quad (8.66)$$

(该式见于第 265 页)

已知 (8.66) 式的被积函数为正 (稳定性的重要条件)

$$\vec{n} \cdot [\nabla (P_i + \frac{1}{2\mu} \vec{B}_i^2) - \nabla P_e] > 0. \quad (8.67)$$

(8.54), (8.55) 代入 (8.67)

$$\nabla (P_i + \frac{1}{2\mu} \vec{B}_i^2) - \nabla P_e = (\vec{B}_i \cdot \nabla) \frac{\vec{B}_i}{\mu} - (P_e - P_i) \vec{g}. \quad (8.67')$$

$$\vec{n} \cdot [(\vec{B}_i \cdot \nabla) \frac{\vec{B}_i}{\mu} - (P_e - P_i) \vec{g}] > 0$$

在边界上，中括号内的量 代表界面之力的作用。

取水平方向单位法向量 \vec{n} (第 8.10)

关系 (8.67'), 又引刀次可得 $\vec{n} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$ 为刀次，平行于 \vec{n} 。
 \vec{n}, \vec{B} 夹角大于 90° . $\therefore \vec{n} \cdot [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}] < 0$... 稳定条件。

即界面上，沿 \vec{B} 方向的力向量，沿 \vec{n} 方向的投影必须减小。

假设仍沿水平方向引之 ($\vec{n} \parallel \vec{B} = \vec{B}_{\text{水平}}$), $P_i = P_i, \vec{B}_i$

根据 (8.54) $\nabla (P_i + \frac{1}{2\mu} \vec{B}_i^2) = P_i \vec{g} + (\vec{B}_i \cdot \nabla) \frac{\vec{B}_i}{\mu}$

$$\vec{n} \cdot \nabla (P_i + \frac{1}{2\mu} \vec{B}_i^2) = \vec{n} \cdot \frac{dP_i}{dz} \vec{g} + \frac{1}{2\mu} \vec{n} \cdot \nabla \vec{B}_i^2 = \frac{1}{2\mu} \vec{n} \cdot \nabla \vec{B}_i^2$$

$$\vec{n} \cdot P_i \vec{g} + \vec{n} \cdot (\vec{B}_i \cdot \nabla) \frac{\vec{B}_i}{\mu} = \frac{1}{\mu} \vec{n} \cdot (\vec{B}_i \cdot \nabla) \vec{B}_i$$

SUNSPOTS

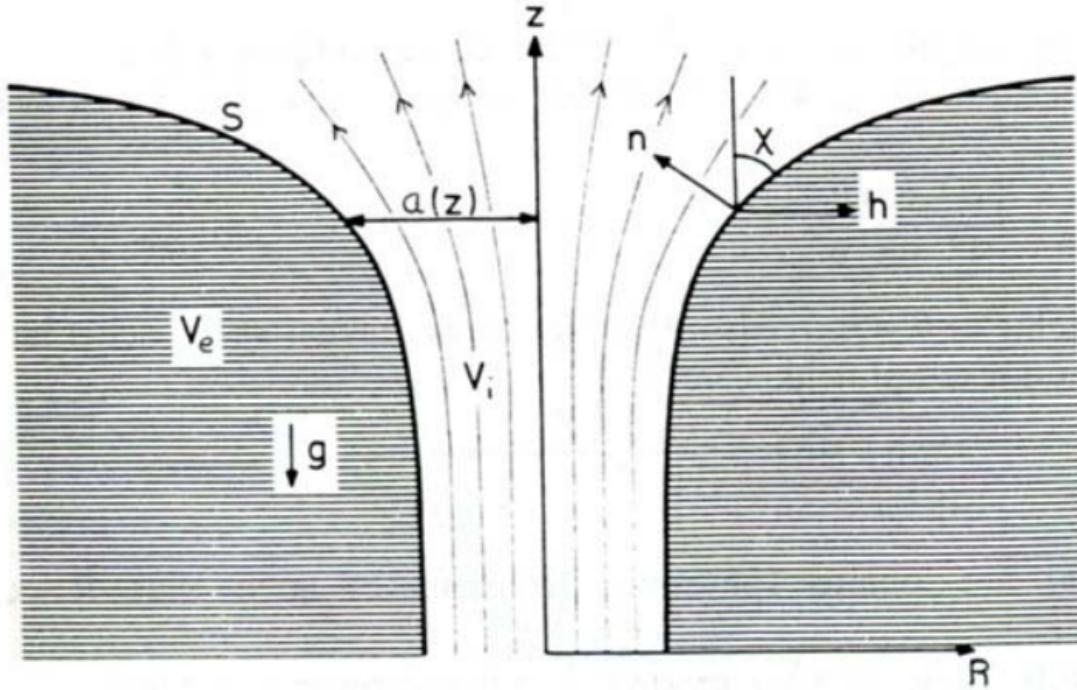


Fig. 8.10. A magnetic flux rope surrounded by field-free plasma (after Meyer *et al.*, 1977).

field (B_i) is potential. It may be written

∴ 由上式 及稳定性可知

$$\frac{1}{2} \vec{B}_r \cdot \nabla \vec{B}_r^2 = \vec{B}_r \cdot (\vec{B}_r \cdot \nabla) \vec{B}_r < 0$$

$$\vec{B}_r \cdot \nabla \vec{B}_r^2 < 0 \quad (\text{在 } S \text{ 上成立})$$

因正离子，取柱坐标，轴对称，(B_r, θ, B_θ)

\vec{B} 水平方向，实际即为 \vec{r} 方向

$$\vec{B} \cdot (\vec{B}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{B}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}) (\vec{B}_r + \vec{B}_\theta) = \vec{B}_r \frac{\partial \vec{B}_r}{\partial r} + \vec{B}_\theta \frac{\partial \vec{B}_r}{\partial \theta} < 0$$

化简得 B_r 垂直水平方向 $B_\theta \approx 0, B \approx B_r$. 且 $\vec{B} \perp \vec{r}$, $B = B_r, B_r = 0$. 通

过增加 B_r 时 $\vec{B}_\theta \frac{\partial B_r}{\partial \theta} < 0$

$$B_\theta > 0 \quad \text{同上} \quad \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \Big|_S < 0 \quad (8.68)$$

此即 Meyer et al. 之(2.13)式.

所以后者磁道弯曲向上 (子午加方向), 磁场径向分量减小, 以稳定.

$$\text{由 (8.67')} \quad \vec{n} \cdot [(\vec{B}_r \cdot \nabla) \vec{B}_r - (\rho_e - \rho_i) \vec{g}] > 0$$

$$\text{式中 } \frac{1}{\mu} (\vec{B}_r \cdot \nabla) \vec{B}_r = \frac{\vec{B}_r}{\mu} \frac{d}{ds} (\vec{B}_r \cdot \vec{s}) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\vec{B}_r}{\mu} \right) \vec{s} + \frac{\vec{B}_r}{\mu} \frac{\vec{n}'}{R_C} \quad (2.57)$$

$$\vec{B}_r = B_r \vec{s} \quad (\rho_i \text{ 代入 (2.57)})$$

$$\left(\frac{ds}{ds} = \frac{\vec{n}'}{R_C} \right)$$

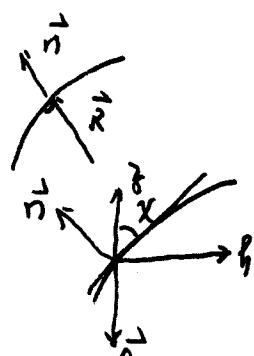


\vec{n}' 为弯曲法向, 是垂直于 \vec{s} 的运动线

(弯曲即为运动线). ∴ (2.57) 左边第一次乘积为零

\vec{n}' 为曲率半径的反方向 (曲率半径方向, 平行 \vec{n}')

$$\therefore \text{反平行 } \vec{n}, \text{ 因此 } - \frac{\vec{B}_r}{\mu R_C} > (\rho_e - \rho_i) \vec{n} \cdot \vec{g}$$



$$= (\rho_e - \rho_i) g \cos(\frac{\pi}{2} + \chi) = - (\rho_e - \rho_i) g \sin \chi$$

$$\frac{B_i^2}{\mu R_c} < (\rho_e - \rho_i) g \sin \chi$$

在恒定均匀磁场条件下， $P_e = \rho_e \frac{kT}{m}$, $P_i = \rho_i \frac{kT}{m}$

$$P_e - P_i = (\rho_e - \rho_i) \frac{kT}{m}$$

由(8.56)得

$$\frac{1}{2\mu} B_i^2 = P_e - P_i$$

$$= (\rho_e - \rho_i) \frac{kT}{m}$$

$$\therefore \frac{1}{\mu R_c} B_i^2 = 2(\rho_e - \rho_i) \frac{kT}{m} \cdot \frac{1}{R_c} < (\rho_e - \rho_i) g \sin \chi$$

$$R_c \sin \chi > \frac{2 \frac{kT}{m}}{g} = \frac{2 P_e}{\rho_e g} = 2 \Lambda_e \quad (8.69)$$

界面半径 R_c 是判别不稳定性.

书中3.1节 Parker 对于(8.61)式的简单推导. 因为他认为
(浮力大于引力时) 会向不稳定判别. 要求形式上得到(8.69)式.
但(浮力大于引力, 分明导致对流不稳定).

(8.69)式中的 R_c, χ 与磁通管半径 a 及其导数有关 (见 8.10)

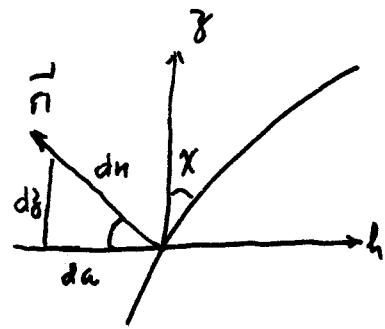
曲率半径的公式为 $R_c = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, 其中曲线 $y=f(x)$, 现即

为磁通管半径 $a=a(x)$

$$R_c = \frac{(1+a'^2)^{3/2}}{a''}, \text{ 式中 } a' = \frac{da}{dx}, \quad a'' = \frac{d^2a}{dx^2}$$

$$\sin \chi = \frac{da}{dn} = \frac{d\beta}{(\beta^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 + \frac{a^2}{\beta^2})^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{(1 + a'^2)^{1/2}}$$



R_c , $\sin \chi$ 代入 (8.69)

$$R_c \sin \chi = \frac{(1 + a'^2)^{3/2}}{a'} \cdot \frac{1}{(1 + a'^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1 + a'^2}{a'} > 2/\epsilon \quad (8.71)$$

故中 $\gg a'$.

Meyer et al. (1977) 对真空模型应用 (8.68) 式的稳定性条件.

里子顶部 $B_R \approx B_z = \frac{F}{2\pi a^2}$, $2\pi a^2$ 为半径的面积.

忽略里子内部气压, $\frac{1}{2\mu} \dot{\beta}_z^2 \approx P_e(\beta)$. 该式化里子顶部, 底部均满足 $\therefore B_R^2 = 2\mu P_e(\beta) = \left(\frac{F}{2\pi a^2}\right)^2$

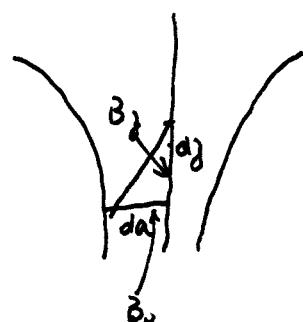
在弯曲管部分 (图 8.10), 随子增加 a , β 增加, 直到 $a \rightarrow \infty$ 时 $\beta \rightarrow \beta_R$. 随子增加而 $\left. \frac{d\beta_R}{d\gamma} \right|_S < 0$, 弯曲稳定

里子底部 $\frac{B_R}{B_z} = \frac{da}{d\gamma}, B_R = B_z \frac{da}{d\gamma}$

$$B_z = B_{\beta} = \frac{F}{\pi a^2} \quad \therefore B_R = B_z \frac{da}{d\gamma} \sim \frac{da}{d\gamma} \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$B_{\beta}^2 = B_z^2 = 2\mu P_e(\beta)$$

$$P_e \sim \frac{1}{a^4}, a \sim P_e(\beta)^{-1/4}$$



$$\frac{da}{d\delta} = \frac{da}{dP_{e(\delta)}} \cdot \frac{dP_{e(\delta)}}{d\delta} \sim -\frac{1}{4} P_{e(\delta)}^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{dP_{e(\delta)}}{d\delta}$$

$$\begin{aligned} \text{代入 } B_R \text{ 表达式: } B_R &\sim \frac{da}{d\delta} \cdot \frac{1}{a^2} \sim -\frac{1}{4} P_{e(\delta)}^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{P_{e(\delta)}^{-\frac{1}{4}}} \frac{dP_{e(\delta)}}{d\delta} \\ &= -\frac{1}{P_{e(\delta)}^{\frac{3}{4}}} \frac{dP_{e(\delta)}}{d\delta} \\ B_R &\approx -4 \frac{dP_{e(\delta)}}{d\delta}^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

设 $P_{e(\delta)} \sim \delta^n$, 代入 B_R 表达式, 可以发现当 $n > 4$ 时,

$\frac{d^3 B_R}{d\delta^3}$ 才能小于零. 因此 $P_{e(\delta)}$ 从 1^n 向 δ^n 增加, 即 $\delta > 1^n$ 才有稳定的分支.

在所有角度上, Bessel 函数模型是稳定的. (3) 为方程
 $(8.61) \quad B_R = AR J_1(kR) e^{-k\delta}, \text{ 势 } \psi = AR J_1(kR) e^{-k\delta}$

$B_R = \frac{k\psi}{R}$, 在向上运动过程中由于 ψ 增加, R 不变, 上升半径 R 增加. B_R 减小, $\therefore \frac{d^3 B_R}{d\delta^3} < 0$. 稳定

Meyer et al. (1977) 考虑平均模型

$$\bar{B}_r(\delta) = (2\mu P_{e(\delta)})^{\frac{1}{4}} \quad (8.64)$$

$$\pi a^2 \bar{B}_r(\delta) = \bar{F} \quad (8.65)$$

$$\text{设 } a = \frac{\bar{F}}{\pi \bar{B}_r(\delta)} = \frac{\bar{F}}{\pi [2\mu P_{e(\delta)}]^{\frac{1}{4}}}, \quad a = \left[\frac{\bar{F}}{\pi (2\mu)^{\frac{1}{4}}} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{P_{e(\delta)}^{\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{da}{d\delta} = \frac{da}{dP_e} \frac{dP_e}{d\delta} = \left[\frac{\bar{F}}{\pi (2\mu)^{\frac{1}{4}}} \right]^{\frac{1}{4}} (-\frac{1}{4}) P_{e(\delta)}^{-\frac{5}{4}} \frac{dP_{e(\delta)}}{d\delta}$$

$$\text{由 (8.55) } \bar{P} P_e = \bar{P} \bar{g}, \quad \frac{d\bar{P}}{d\delta} = -\bar{P} \bar{g}, \quad \text{代入得, 由 } \frac{1}{\bar{P}} \frac{1}{\bar{g}} \lambda_e = \frac{P_e}{\bar{P} \bar{g}}$$

$$\frac{da}{d\delta} = \frac{a}{4\lambda_e}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{a}}{d\gamma^2} &= \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{\bar{a}}{4\Lambda_e} \right) \\ &= \frac{d\bar{a}}{d\gamma} \cdot \frac{1}{4\Lambda_e} - \frac{\bar{a}}{4} \Lambda_e^{-2} \frac{d\Lambda_e}{d\gamma} \\ &= \frac{\bar{a}}{16\Lambda_e^2} \left[1 - 4 \frac{d\Lambda_e}{d\gamma} \right]\end{aligned}$$

稳定性条件 (8.71) $\frac{\bar{a}'(1+\bar{a}'^2)}{\bar{a}''} > 2\Lambda_e$

把上面所得的 $\bar{a}' = \frac{d\bar{a}}{d\gamma}$, $\bar{a}'' = \frac{d^2\bar{a}}{d\gamma^2}$ 代入, 得
 $\bar{a}^2 > 8\Lambda_e^2 \left(-4 \frac{d\Lambda_e}{d\gamma} - 1 \right)$

$$\frac{F}{\pi [2\mu P_{e,0} \gamma]} > 8\Lambda_e^2 \left(-4 \frac{d\Lambda_e}{d\gamma} - 1 \right)$$

$$F > 8\pi [2\mu P_{e,0} \gamma] \Lambda_e^2 \left(-4 \frac{d\Lambda_e}{d\gamma} - 1 \right) \quad (8.72)$$

* * *
 气球上升时的稳定性条件 $\frac{1+\bar{a}'^2}{\bar{a}''} > 2\Lambda_e$

$$\begin{aligned}\bar{a}^2 &> 2\Lambda_e \bar{a} \left(1 - 4 \frac{d\Lambda_e}{d\gamma} \right) - 1 \\ &\approx 2\Lambda_e \bar{a} \left(1 - 4 \frac{d\Lambda_e}{d\gamma} \right)\end{aligned}$$

$$\bar{a} > 2\Lambda_e \left(1 - 4 \frac{d\Lambda_e}{d\gamma} \right)$$

* 对于给定的 $P_{e,0}$ 和 $\Lambda_{e,0}$ 有 $\frac{d\Lambda_e}{d\gamma} < -\frac{1}{4}$ (见图 7-2 内)

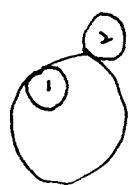
3). 如果 $\Lambda_e < 0$, 因为 F 必定 > 0 . (8.72) 式永远成立, 是稳定的(正 2(p)), 磁通量是增加的, 即磁通管是不稳定的. 换言之, 细磁通管有 $\frac{d\Lambda_e}{d\gamma} < -\frac{1}{4}$ 时, 对于正模态向都 2. 稳定的 (?). 这样的范围对 γ 范围 $-700 \text{ km} < \gamma < 30 \text{ km}$ 标准模型大底成立.

- * 相反的极谪例子，大里子 $R_c \approx a \gg \lambda_e$, $\sin X > \frac{1}{2}$. 稳定条件 $R_c \sin X > 2\lambda_e$ 很容易满足。
- * Meyer 等人利用(8.72)式以及他们的标准模型求得它们估计已分稳定的、稳定的磁通管的临界磁通量。结论是：当磁通量超过约 $10^{17} Wb (10^{19} Mx)$ 时，真空模型的磁通管随深度增加而单调地会变，是稳定的。
- * 在某些情况下，磁通管气压超过它的磁压，真空模型失效。
- * Parker (1979b) 考虑里子模型有一个浅“袋”或“细腰”。乞下面的端是关闭的。这种磁通管的上部，磁力线走斜着，浮力变化使上部稳定，但时候却从喉部一下一下部边界，对于互换模 (interchange mode) 代表走向却不稳定。按照 Parker 的看法，就是这个原因，导致单一的磁通管分裂成多股。
- * 一个里子群的前守里子倾向于而后随着长命。所以许多流动区只有一前守里子。Meyer 等人认为这是因为在一些磁端从对流区深处上升，用速度的减慢导致磁通管的前守部分几乎变成垂直，因此稳定 ($R_c \rightarrow \infty, \sin X \sim 1$)，后守部分偏离垂直方向，使内 (inner edge) 边缘渐行渐增，以后随里子升降。
- * 将来，应用完整的真空模型，包括热力学统计及周围的对流元，考察对磁通管稳定性的影响。

支撑2. 稳定性

磁通管连同其中的等高体一起进行支撑，如果进行支撑的磁通管的磁通量相同，那么支撑的频率，例如等高体的内附减小，则这种振动将继续发展下去，引起所谓支撑2. 稳定性。

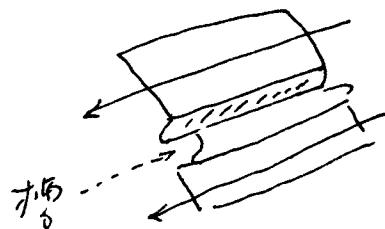
不稳定发展时，形成“凸”形，磁通管变形和摆动也叫做支撑2. 稳定性。



区域1：磁通量从等高体一起移到2。
区域2：...



若内附减少，打破稳定原理，振动继续发展



Rayleigh-Taylor 2. 稳定性 实际上是等高体一磁场边界上产生支撑2. 稳定性。

一般情况下磁约束等高体一磁场几何是复杂的。同一根磁力线既有凸向等高体（弯曲半径 $R > 0$ ）也有凹向等高体（ $R < 0$ ）。我们根据能量原理及热力学来进行分析。假设我们考虑的是一个磁镜系统。

设等高体压强为常量，系统为轴对称。求支撑振动引起的系统能量变化。把平衡时位于区域I的等高体连同其中的磁力线一起移到区域II，同时把区域II的等高体连同磁力线一起移到区域I，这时能量变化是磁能和等高体内的变化之和。

先考察磁能，把一根磁通管中已知的磁能为

$$W_M = \int dV \frac{B^2}{2\mu} = \int S dl \frac{B^2}{2\mu}$$

l : - 长度, S : - 磁通管截面积.

对于 λ 的积分沿着核 γ 破折线.

1. 先將題目中的磁通 $\Phi = BS$ 作串聯，故

$$W_M = \frac{\dot{\Phi}^2}{2\mu} \int \frac{dl}{s}$$

于支撑磁通臂工况引起的磁场变化为

$$\delta W_M = \frac{1}{2\mu_0} \left[\left(\bar{\Psi}_1^2 \int_2 \frac{dl}{s} + \bar{\Psi}_2^2 \int_1 \frac{dl}{s} \right) - \left(\bar{\Psi}_1^2 \int_1 \frac{dl}{s} + \bar{\Psi}_2^2 \int_2 \frac{dl}{s} \right) \right]$$

原先是两个磁通量 \uparrow 和 \uparrow 的磁通量

设之模的值不随通量相同, 即 $\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2$ 则 $\delta W_M = 0$, 磁场保持不变.

再考慮內部：体积为V的等离子体中所包含的内能是

$$W_p = \frac{P V}{\gamma - 1}$$

γ 为比热比。假设交换扰动是绝热进行，即 $PV^\gamma = \text{const}$ 。在等高
体压强 P 为标量时，由运动方程 $P \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \vec{j} \times \vec{B}$ ，得产热条件

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla P$$

由此可得 $\vec{F}_D = 0$ 。说明磁力线平行于应变面，也就是说沿着一根磁力线 D 为常数。内能的变化等于区域工材料区域互叶的变化

加上区域Ⅱ接收到区域Ⅰ的光变化。 $I \rightarrow II: (P'_1 V_1 - P_1 V_1) / V_1$

P_{II}' 为 $I \rightarrow II$ 时的压强, P_I 为该工时的压强, γ 为退泡热过程
 $(P_{II}'V_I - P_I V_H) \quad P_{II}'V_I = P_I V_H$

$$(P'_i V_i - P_{ii} V_{ii}) = P'_i V_i^T Z P_{ii} V_{ii}^T$$

$P_1'V_1' = P_1V_1$. 对 II \rightarrow I. 情况类似, 焓内能变化可以表示成:

$$= \frac{1}{r-1} \left[P_1 \left(\frac{V_1}{V_{II}} \right)^r V_{II} + P_{II} \left(\frac{V_{II}}{V_1} \right)^r V_1 \right] - \frac{1}{r-1} (P_1 V_1 + P_{II} V_{II})$$

$$\text{设:} \quad P_{II} = P_I + \delta P \\ V_{II} = V_I + \delta V$$

$\delta W = \delta W_p$, 且得到 $\delta P, \delta V$ 为恒定量

$$\begin{aligned}\delta W_p &= \frac{1}{r-1} \left[P_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + \delta V} \right)^r \left(V_1 + \delta V \right) + \left(\frac{V_1 + \delta V}{V_1} \right)^r V_1 \right] - \frac{1}{r-1} [P_1 V_1 + (P_1 + \delta P) (V_1 + \delta V)] \\ &= \frac{1}{r-1} \left[P_1 V_1 \left(1 + \frac{\delta V}{V_1} \right)^{r-1} + P_1 V_1 \left(1 + \frac{\delta P}{P_1} \right) \left(1 + \frac{\delta V}{V_1} \right)^r \right] - \frac{1}{r-1} [P_1 V_1 + P_1 V_1 \left(1 + \frac{\delta P}{P_1} \right) \left(1 + \frac{\delta V}{V_1} \right)] \\ (1+x)^r &= 1 + rx + \frac{1}{2} r(r-1)x^2 \\ (1+x)^{r-1} &= 1 - (r-1)x + \frac{1}{2} r(r-1)x^2 \\ &= \delta P \delta V + r P \left(\frac{\delta V}{V} \right)^2 \quad (*) \\ &= V^{-r} \delta (P V^r) \delta V\end{aligned}$$

稳定条件 $\delta W = \delta W_m + \delta W_p = \delta W_p > 0$, 且 $P_{II} \rightarrow 0$, 则 $P_{II} \rightarrow 0$,
 $P_{II} - P_1 = \delta P \therefore \delta P < 0$, 从 (*) 式可知 第二次大于零(或近于零)

所以稳定条件要求 $\delta V < 0$.

磁通管体积: $V = \int dS = \bar{B} \int \frac{dl}{B}$, $\bar{B} = \text{const.} \therefore$ 稳定条件即
 \therefore 写成 $\delta \int \frac{dl}{B} < 0$, 即分段磁通管趋于收敛.

现在不考虑稳定条件 $\delta \int \frac{dl}{B} < 0$ 分析简单磁通管形状之稳定性.

二元流靠近的磁力线 1 和 2. 1 之半径是 R
 和 2 之半径是 b 之垂直距离. 对于低 B
 (高体稀薄) 等高线可以忽略其中的扰

流电流 $\nabla \times \vec{B} = 0$ 且 $\vec{B} = -\nabla \varphi$

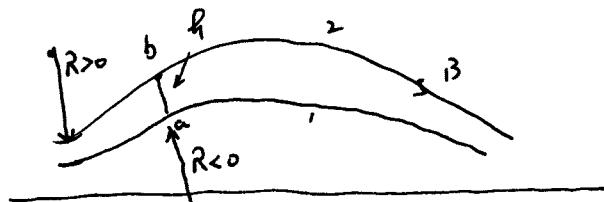
$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial l} \cdot d\vec{l} = - \int d\varphi = -\varphi$$

$$\delta \int \frac{dl}{B} = \delta \int \frac{B dl}{B^2} = - \delta \int \frac{d\varphi}{B^2} = - \int d\varphi \delta \left(\frac{1}{B^2} \right) < 0$$

$\nabla \times \vec{B} = 0 \therefore \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0, B \cdot 2\pi R = 0$ (线 2 上成立. R 为 b 之曲率半径)

线 1 上 $B' = B + \delta B$ ($B' > B$), 且 $R' = R - h$

$$B \cdot 2\pi R = (B + \delta B) \cdot 2\pi (R - h) (= 0) \quad B \cdot 2\pi R = B \cdot 2\pi R \left(1 + \frac{\delta B}{B} \right) \left(1 - \frac{h}{R} \right)$$



$$\frac{\delta B}{B} = \frac{h}{R}$$

利用磁力线间磁通为常数的条件有 $2\pi rhB = \bar{B} = \text{const.}$
 r 为高对称轴的半径.

$$-\int d\varphi \delta\left(\frac{1}{B^2}\right) = + \int \frac{B d\varphi}{B^3} (-2) \delta B < 0$$

$$-2 \int \frac{dl}{B} \frac{\delta B}{B} = -2 \int \frac{dl}{B} \frac{h}{R} = -2 \int \frac{dl}{B} \frac{\bar{B}}{2\pi r B R} = -\frac{\pi}{\bar{B}} \int \frac{dl}{B^2 R r} < 0$$

$$\int \frac{dl}{R r B^2} > 0$$

磁力线分布部分 $R > 0$, 则上式成立. 该部分稳定. 中间部分 $R < 0$. 上式2满足. 因此不稳定.

8.5 里子半影

简述各种模型

1. Danielson (1961)

亮(热)物质上升. 暗(冷)物质下沉

利用色散关系

$$\omega^2 = -\frac{B_0^2}{\mu\rho_0} k_x^2 + \frac{g\alpha\Delta T}{d} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \quad (P.284)$$

$\vec{B}_0 = B_0 \vec{x}$, 忽略耗散项, 由(8.7)式可得上式. 从该式可知
 (流体元与磁场平行时). $k_x = 0$. 若不考虑流. 对于倾角的场, 取
 2. 稳定的扰动使流元的 $k_x = 0$. 他发现当磁场水平时. 对
 流扰动流.

2. Meyer (1977)

在分层的半影以下. 对流元可将驱动局部(等高线连同)
 磁场)支撑. 对流元除透磁场, 也切断亮纤维(filament)

3. Parker (1979)

半影纤维是磁散集丛磁通管的一部分.

4. Spruit (1981)

亮纤维上升, 应倾向于驱动内流(inflow), 暗纤维下沉
 导致等高线外流.

要理解半影还有很多工作要做. 已经对亮的非线性数
 学模型, 主要针对垂直场. 场倾斜时, 半影中等高线应力不降
 少此, 而且半影模型必须能解释 Evershed flow (亮面上的暗带
 有 $6-7 \text{ m s}^{-1}$ 的外流, 在色球上有逆向速度回流(inflow)).

8.6. 黑子的演化

8.6.1 黑子的形成

a. Meyer 等人 (1974) 的描述

磁通管呈上壳球，轴近乎垂直。在下降阶段中，磁通管的压缩，甚至趋于增长状態的标志。

阶段①. 起来柱(即上壳球)向下流动速(约 $10,000 \text{ km/s}$)。磁通管集中(见8.12). 由(8.22)式 $\frac{1}{\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \rho v^2$ (转动的能密度的分配, B, v 均为扰动量), 在球上 $\rho = 3 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$, $v = 0.3 \text{ km s}^{-1}$ (起未扰动时的向下流速) 可求得 B 仅为 50 G . 向外情况下, 亦可通过未扰动以下层, 速度可达 2 km s^{-1} , 磁场可更强一些, 约 400 G . 磁通内部, 磁通加强, 产生 overturning convection (强大扰动的流动)

阶段② 等高气体冷却下沉, 磁场进一步增加, 外部气压与内部磁压大致平衡, $\frac{1}{\mu_0} B_p^2 = p_e$ (8.23). 这时在 200 km 附近, 球壳气压为 $2 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}$, 估计 $B \sim 2200 \text{ G}$. 表面气压 $5 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}$, $B \sim 3500 \text{ G}$.

黑子下面集流的热量, 然后就阻止起来柱(即扰动——黑子停止增长——此刻许多黑子分裂, 特别是后面), 其磁通与垂直方向有些偏离.

假如磁通垂直深入到(约) $10,000 \text{ km}$, 就形成环状对流(或称扰动 moat) (见8.12b) 围绕黑子, 运动方向(由下向上)与起来柱(即扰动)运动方向相反. 环状对流元的运动是由黑子下面附近的热量驱动, 从而使得缓慢在磁场中黑子的演化快许多倍.

CHAPTER 8

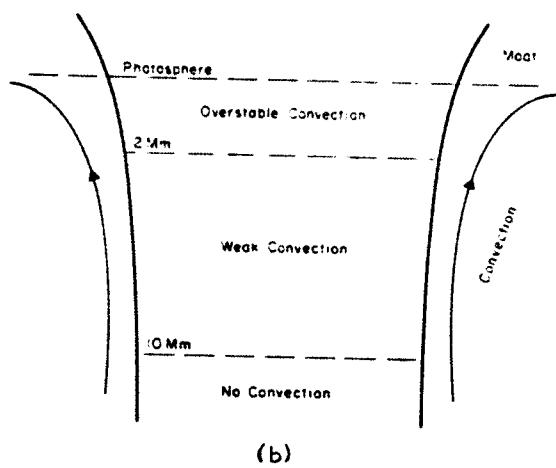
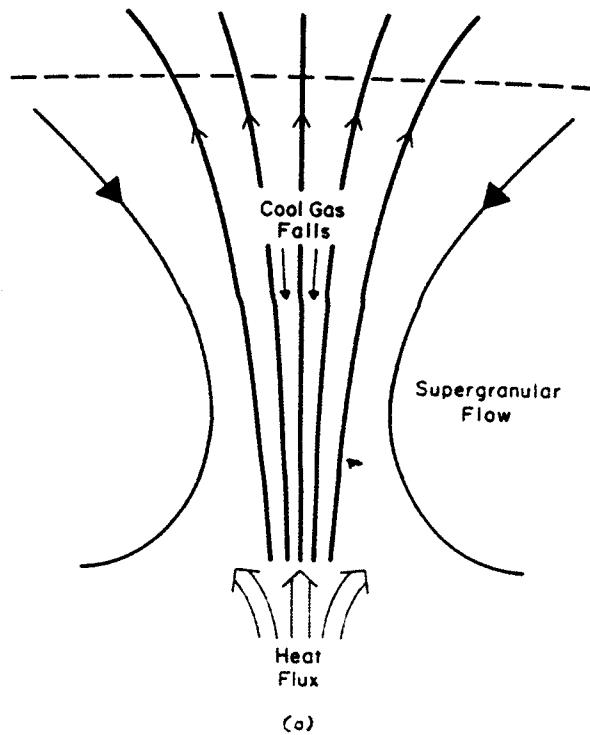


Fig. 8.12. (a) The growth phase of a sunspot. (b) The slow decay phase of a long-lived sunspot.

b. Parker 和 spaghetti 模型

小的磁通管因为流体力学吸引，彼此会合成为大磁通管，直到它们相遇时，伯努利 (Bernoulli) 定理使它们相互吸引。

理想，无压，无重力的流体，如果运动无逆流，则可得到伯努利积分 $\frac{V^2}{2} + \tilde{V} + \Pi = C(\gamma)$

$$\tilde{V} - \text{压强加势函数 } F = -\text{grad } \tilde{V}, \quad \Pi = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad \text{无压, } \left(\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \Pi \right)$$

$C(\gamma)$ 积分常数，不同流线取不同值，是流线参数加势函数。

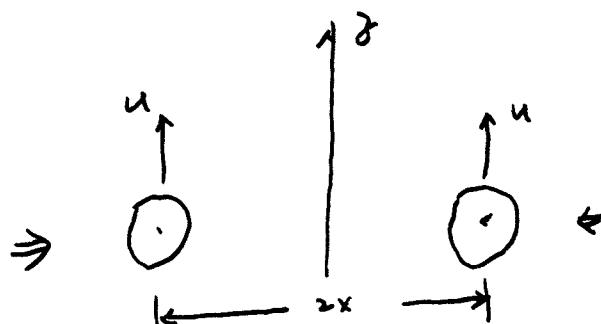
对于不可压缩重力流流

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{P}{\rho}, \quad \tilde{V} = gz$$

$$\text{伯努利积分: } \frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = C(\gamma)$$

$$\text{如果重力可忽略, 上式变为 } \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} = C(\gamma)$$

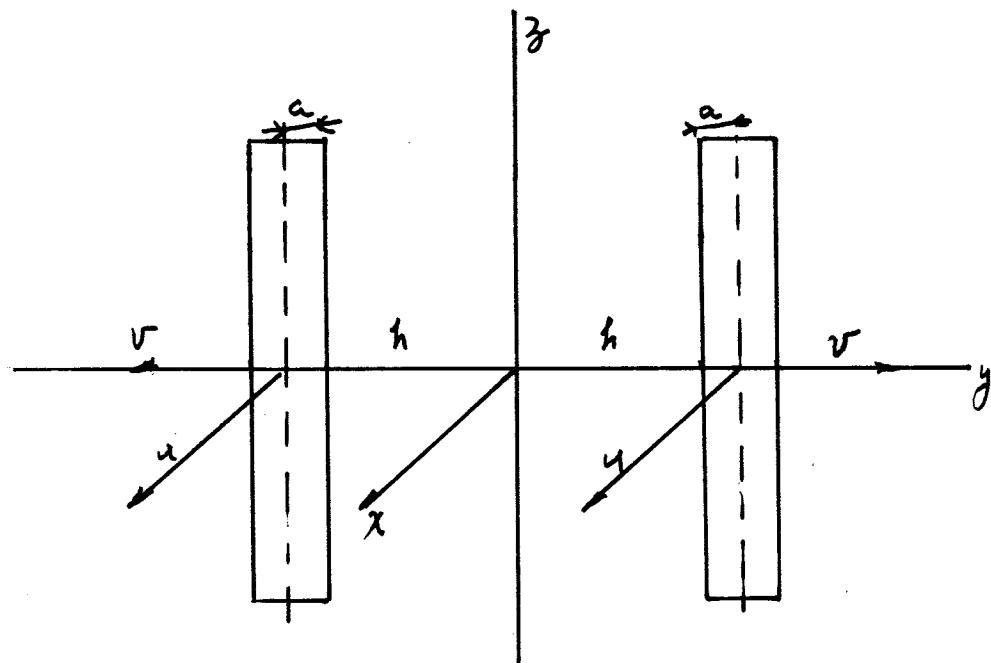
考虑半径为 a 的水平柱体，以速度 u 垂直上升，相距 $2x$



$$\frac{1}{2} 8.14 a$$

因流体在柱体之间隙中得加速，由伯努利积分可知，间隙中的压强减小。

下面我们将介绍 Parker 和 spaghetti 模型的磁通管磁通管相互吸引力。



考虑：柱体，半径为 a . 对称，平行于 z 轴=1. $t=0$ 时，二柱在 x 方向有速度 U_0 ，同时在 y 方向分别为 U_0 和 $-U_0$ ，因此二柱分离的距离 h 随时间而变 $\frac{dh}{dt} = U(t)$ ， x 方向速度为 $U(t)$ 。流体和柱的运动在 $t=0$ 后 1 后期已能解决。假如流体作无旋运动，则有速度势和流函数构成解析的复变函数。二柱以及流体的总运动为 $2T$

$$T = \frac{1}{2} R (U^2 + V^2)$$

R: 一圆柱质量加上 5 圆柱相关的运动流体+实际质量，是 $2h$ 的函数

$$R(h) = \pi a^2 \sigma + \pi a^2 \rho \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\beta)^2 \beta^n}{(1-\beta^{n+1})^2} \right\}$$

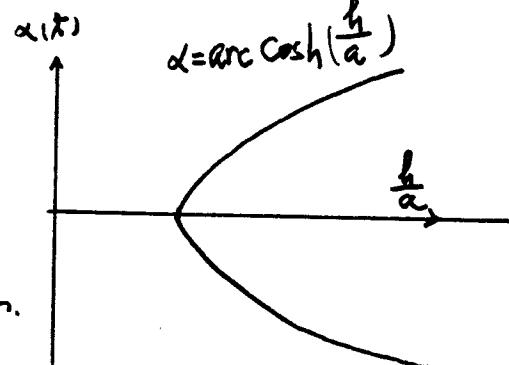
(R 应是单位长及 h 的量)

ρ : 流体的密度 . σ : 柱的密度 . 位移为 $\beta = \beta(t) = e^{-2xt}$
 α 是与分离距离 $2h$ 和半径 a 相关的参数

$$h(t) = a \cosh \alpha t$$

下表“0”表示初值。无下标的是 V, u, R, g, α 表示随时间变化的值

$$\begin{aligned}\alpha &= \operatorname{arc cosh} \frac{h(t)}{a} \\ &= \ln \left[\frac{h}{a} + \left(\frac{h^2}{a^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]\end{aligned}$$



质量坐标是正的，随 t 增加，半径减小。

$$\text{设 } h \rightarrow \infty, \text{ 则 } \alpha \rightarrow \infty, g \rightarrow 0, R = \pi a^2 (\rho + \sigma)$$

由此式可知，孤立圆柱运动 ($h \gg a$)，有相应质量的流体伴随运动，流体质量等于取代圆柱位置的流体质量。

考虑柱体相互远离， $h \gg a$ ，则 $\alpha \approx \ln \frac{2h}{a}$

$$g = e^{-2\alpha} = \left(e^{-\ln \frac{2h}{a}} \right)^2 = \left(\frac{a}{2h} \right)^2 \ll 1$$

$$\begin{aligned}R(h) &= \pi a^2 \sigma + \pi a^2 \rho \left\{ 1 + 2 \left(1 - \frac{a}{2h} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2h} \right)^n}{(1 - \frac{a}{2h})^{n+1}} \right\} \\ &= \pi a^2 \sigma + \pi a^2 \rho \left\{ 1 + 2 \left[1 - \left(\frac{a}{2h} \right)^2 \right] \frac{\left(\frac{a}{2h} \right)^2}{\left[1 - \left(\frac{a}{2h} \right)^2 \right]^2} + \dots \right\}\end{aligned}$$

$$= \pi a^2 \sigma + \pi a^2 \rho \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2h} \right)^2}{1 - \left(\frac{a}{2h} \right)^2} + \dots \right\}$$

$$= \pi a^2 \sigma + \pi a^2 \rho \left\{ 1 + 2 \left(\frac{a}{2h} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{a}{2h} \right)^2 \right] + \dots \right\}$$

$$= \pi a^2 \left[\sigma + \rho \left(1 + \frac{a^2}{2h^2} \right) + \dots \right]$$

计算“下”于“上”柱体的吸引力。

该外力可以用势能描述 $V(x, y)$

$$\text{Lagrangian 力学 } L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} R (u^2 + v^2) - V(x, y)$$

R: 单位长度的重量, u 在 \vec{x} 方向, v 在 \vec{y} 方向.

$$\text{广义坐标为 } x, y. \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (\alpha = x, y)$$

$$\begin{aligned} \vec{x}: \quad & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2}(u^2 + v^2)R + \frac{\partial V}{\partial x} \\ & = \frac{d}{dt}(Ru) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\dot{x} = u) \end{aligned}$$

(注意 $R(h)$, R 为柱体间的距离), 考虑重力 g .

$$\vec{y}: \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}(Rv) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \frac{dR}{dy} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(Ru) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt}(Rv) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \frac{dR}{dy} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

假设外力 $(V(x, y))$ 为常数, 则 u, v 均为常数

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{d}{dt}(Ru) = -u \frac{dR}{dt} = -u \frac{dh}{dt} \frac{dR}{dh}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{d}{dt}(Rv) + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \frac{dR}{dy} = -v \frac{dh}{dt} \frac{dR}{dh} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \frac{dR}{dh}$$

$$v = \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \frac{dR}{dh}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -uv \frac{dR}{dh}$$

已知 单位长度的重量 $R(h) = \pi a^2 [\sigma + \rho(1 + \frac{a^2}{2h} + \dots)]$ (忽略高斯项)

当柱体分离甚远时, 为保持平行运动时, 外力为:

$$\bar{F}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\pi a^2 \rho \frac{uv}{a} \left(\frac{a}{h}\right)^3$$

$$\bar{F}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \pi a^2 \rho \frac{u^2 - v^2}{2a} \left(\frac{a}{h}\right)^3$$

当平行运动时, $v=0$ (沿方向速度), 外力为

$$F_y = \pi a^2 \rho \frac{u^2}{2a} \left(\frac{a}{h}\right)^3$$

表面张力者量固为 $\frac{\text{ergs}}{\text{cm}^2}$ ，但只为单位长及厚度，还应乘上长度
所以量固为 $\frac{\text{ergs}}{\text{cm}} = \text{力}$ 。

对于长边 L 的拉伸 受力为

$$F_a = \frac{1}{2} \pi a^2 \rho u^2 \left(\frac{a}{h}\right)^3 \cdot L$$

现在考虑 = 两个极性磁荷之间的斥力

$$\text{利用磁以库伦定律 } F = k \frac{B_1 B_2}{r^2}$$

B_1, B_2 为磁荷。

磁荷 $M = \frac{\Phi}{2\pi}$ ，半空间的立体角为 2π

：磁荷相距 $2h$ ，斥力为 $(\frac{M}{2h})^2$ (底座空间)

实际情况是怎样的：只在太阳表面上方的半空间，在太阳表面以下，磁荷被压缩成孤立的磁通管没有磁
相互作用] (Parker: "Cosmical Magnetic Fields" p.152)

(因为在上面所言，磁荷的磁场有相互作用，棒体的作用不予以考虑。)

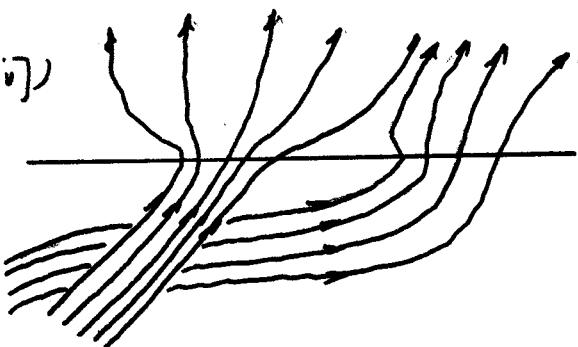
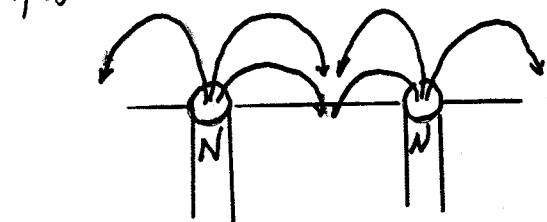
斥力为上式的一半，太阳表面以下只有流体力学的作用力，趋向于
磁通管快速上升。

磁荷半径为 a . 端强 B_0 , $\Phi = \pi a^2 B_0$, 斥力

$$F_r = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2h}\right)^2 = \frac{1}{8} B_0^2 a^2 \left(\frac{a}{2h}\right)^2$$

这个在太阳表面上的斥力。

$$V_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho} \quad (\text{高斯单位制})$$



上升的磁通管由下而上，扩展

相互作用 (Parker: "Cosmical Magnetic Fields" p.152)

代入方程式

$$\bar{F}_r = \frac{1}{8} \pi a^2 \rho V_4^2 \left(\frac{a}{h} \right)^2$$

$$\bar{F}_r \leq \bar{F}_a$$

$$求得 L \geq \frac{1}{4} h \frac{V_4^2}{a^2}$$

所以回流长度超过 L , 吸引力就将芯股吸.

当 $V_4 \sim a$ (x 方向的速度) 时, 二磁通管相距 $2h$, 因此长度超过 $L = \frac{1}{4} h$, 也即超过间距 $2h = \frac{1}{8} h$ 时, 芯股受芯股斥力. 二磁通管就相互排斥. 二者相同极性的磁荷间斥力将使磁通管向上升磁通管的流体力学吸力所克服. 磁通管的吸引和排斥起因于流体力学的引力, 只要磁通管化上升, 这个效应就继续存在. 一旦磁通管达到垂直位置, 就停止上升, 就不再有吸力. 分离的磁荷相互排斥, 聚合的磁通管会形成离子. 但倾向于再次分离成分立的磁荷. (除非有力的作用使之结合在一起).

Parker 还指出了一磁通管上升, 和它尾流中张进时的磁通管也会被吸引. 磁通管在太阳表面开始成束时, 表面之下, 有下沉气流, 使磁通管聚化起来 (节 8.11)

讨论里子的衰减之前, 我们重提一下 7.5.6 节的对流和稳定性.

1. 实验证明具有湍流带, 热传导水平流向方向, 底部加热, 但如上下层温差足够大就有不稳定性产生.

2. 用差同 Rayleigh 数 R_a 表示, $R_a = g \alpha \beta d^3 / k \nu$
 α : 一体积膨胀系数, k : 一导热系数, ν : 一运动粘滞系数
 β : 一温度 d : $1/2$ 厚.

Rayleigh 数 $R_a > 1$ 时 R_a 就产生不稳定性, 发展成对流.

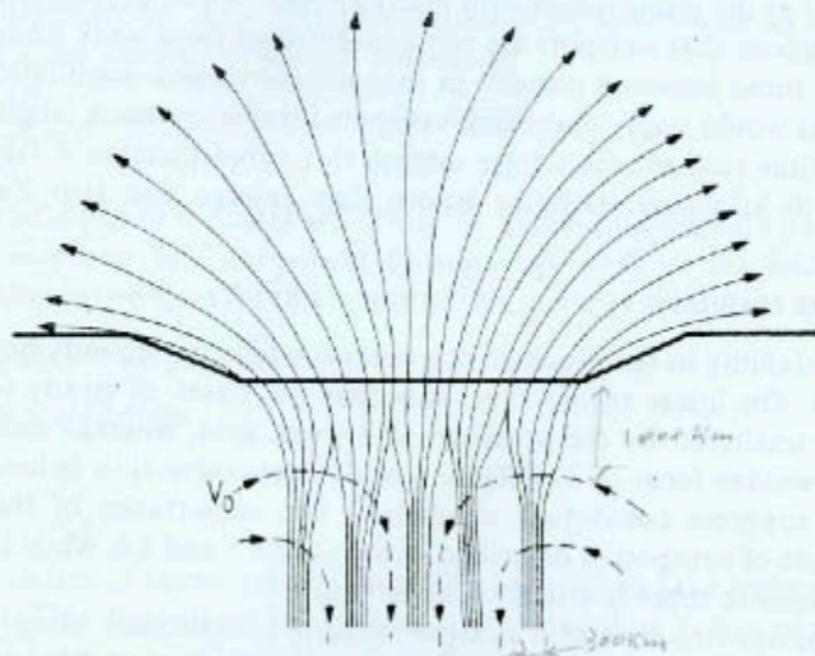


Fig. 8.11. Parker's model for a sunspot as a cluster of magnetic flux tubes, held together by a convective downdraft indicated by dashed arrows (from Parker, 1979b).

3. 移动阻滞对流. 用速度 \bar{U} 由 Taylor 故事描述

$$\bar{U} = 4S^2 \delta^* / U^2$$

· 高 S Rayleigh 故 Ra 随 S 而增加

4. 不稳定性和开挖时走稳热对流 (stationary convection), 很当 Prandtl 故 $Pr = \frac{\nu}{\kappa} < 1$ 时. \bar{U} 变大, 不稳定性理论为过稳定性 (overstability) (如 $Pr = 0.1, \bar{U} > 73^\circ$)

5. 垂直方向的磁场, 平行于 \vec{g} , 阻碍对流运动

b. 不稳定性依赖于 η 和 K

i. $K < 1$ 时不稳定 (leak instability) 开始

(因为 η 大, 磁场容易漏泄, 对运动的阻力小, 不稳定性 \bar{U} 变大). 稳定的走稳热对流 (stationary convection)

ii. $K > \eta$. 不稳定性开始时. 若 Hartman 故 $(Ha = B_0 d / (\mu \rho \eta u_f))$
 μ : - permeability 磁导率, η : - 磁扩散率) $Ha < \frac{1}{2} \sqrt{K} Ha^*$ 是稳
定对流; $Ha > Ha^*$ 成为过稳定性 (overstability)

Ha^* 依赖于 Prandtl 故 Pr 和走稳 Prandtl 故 $Pm = \frac{\nu}{\eta}$.

8.6.2 电子的衰减

1. 对于慢衰减状态, Mayer 等人 (1974) 提出电子倍增器前面 (8.12, b) 所示, 电子外面, 在环流区 (annular moat flow) 附近有着小尺度的对流, 可用涡旋散度系数代表, 电子内部的流速不随场影响, 依赖于比例常数. 发生对流不稳定的条件是 (8.10) 式, $Ra^* \approx \pi^2 Ha^2$, Ra^* 是 Rayleigh 数, $Ra = \frac{\rho \alpha \Delta T d^3}{\kappa \mu}$. Ra^* 是 Ra 的最大值, 由 (8.1) 式知, $Ra > \bar{R}^*$ 即有不稳定性.

$$Ha = \frac{\beta \rho d}{(\mu \rho \eta v)^{1/2}} \quad \text{是 Hartmann 数, 式中 } d \text{ 为管的半径.}$$

Ra, Ha 代入 (8.10) 式, 有

$$\Delta T = \frac{\pi^2}{\alpha} \frac{\kappa}{\eta} \frac{\beta^2}{\mu \rho g d} \quad (8.76 a)$$

① 假设 $\kappa < \eta$, 在上述条件下 (由 8.76a 式给出), 因漏泄 (leak) 不稳定性引起对流 ($\because \eta$ 大, 磁阻力线弯曲也大, 因此漏泄产生对流). 式中 $\frac{\beta^2}{\mu \rho g d}$ 是磁阻力与浮力 ($\sim \rho g d$) 之比.

② 假设 $\kappa > \eta$, 在漏泄产生过稳定性 (overstability) 的条件下 (8.11) 式: $Ra \approx \pi^2 Ha \frac{\eta}{\kappa}$, 把 Ra, Ha 的表达式代入, 得到

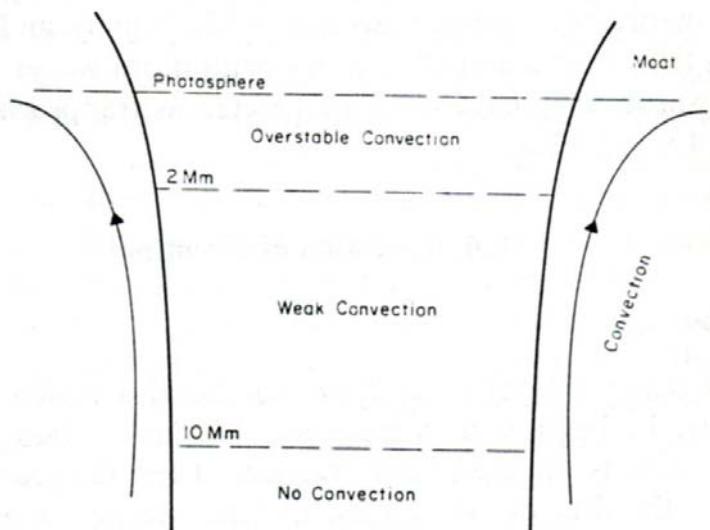
$$\Delta T = \frac{\pi^2}{\alpha} \frac{\eta}{\kappa} \frac{\beta^2}{\mu \rho g d} \quad (8.76 b)$$

在此条件下, 对流开始.

③ overturning convection (浮力大于惯力的流动) 通过热量最有效, 下列条件满足时, 就发生.

$$\frac{\rho g \alpha \Delta T}{d} > \frac{\beta^2 \eta^2}{\mu} \quad (8.2) \text{ 式, P. 282}$$

(a)



(b)

$$\Delta T = \frac{k\alpha}{\mu\rho g} \frac{B_0^2}{d}, \quad k = \frac{\pi}{d}$$

$$= \frac{\pi^2}{d} \frac{B_0^2}{\mu\rho g d} \quad (8.77)$$

2. 高8.13 表示 η 和 K 随温度的变化

由前可知，黑子边界层 ~ 2000 公里处，($K > \eta$) 有过渡区带高。柱内有平行于磁场的运动(即黑子内)。 $2000 - 10000$ 公里之间，
假设 ΔT 符合 (8.76a) $K\eta$ 和 (8.77) 的表达值之间，则有 η
只及 (leak) 对流。在 6000 公里深处，流元尺度 (Cell Size)
约 1.7×2000 公里， $\Delta T \sim 50K$ ，等离子体速度 $\sim 20m/s$ ，冷却热流
 $10^7 W m^{-2}$ ，与观测值相当。假设 ΔT 大于 (8.77) 式给出的值，
就发生 overturning ($\nabla \theta > \nabla T$)，磁场可能集中到磁通管内
(高8.11) 形成 Parker vs spaghetti 模型。

3. 半胱氨酸侧黑子的慢衰减不可能是简单的线性扩散。

因为扩散时间 $T_d = \eta / v$ 太长，例如：特征尺度 3000 公里。
磁扩散率 $\eta = 300 m^2/s$ ， $T_d \approx 10000$ yr. 又 10^4 年为几百月而已。
Mayer 等人 (1974) 在高磁通量因磁扩散率 η 缓慢地
从黑子消失，然后通过周围冷流，迅速越过 moat。

Wallenhorst 和 Howard (1982) 发现 黑子消失时，活动区磁通量
减少。他们认为磁通量不是简单地发散出去，而是下沉到表面以
下或重新联。高8.5 模拟了上述效应。增加带 η 负侧赤带，
则对流方向倒转 (即 $\nabla T < \nabla \theta$)。 (该效应是可逆的：磁通逐渐上升
 \rightarrow 形成对流 \rightarrow 应是 overstability, 且流方向为 $\nabla \theta$)

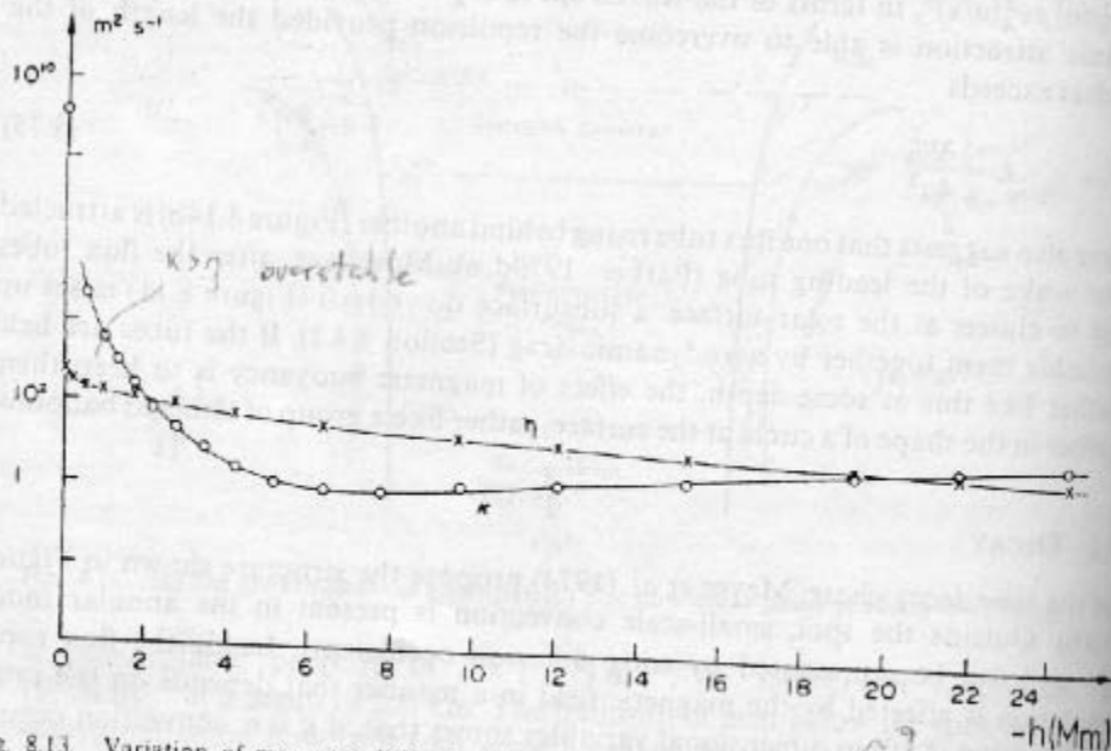


Fig. 8.13. Variation of magnetic diffusivity (η) and thermal conductivity (κ) (in $m^2 s^{-1}$) with depth ($-h$ in Mm) below the photosphere ($1 \text{ Mm} \equiv 1000 \text{ km}$). By comparison, the eddy magnetic diffusivity at the photosphere is 10^7 to $10^9 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (from Meyer *et al.*, 1974).

$$\eta = \left(\frac{L^2}{\tau} \right)$$

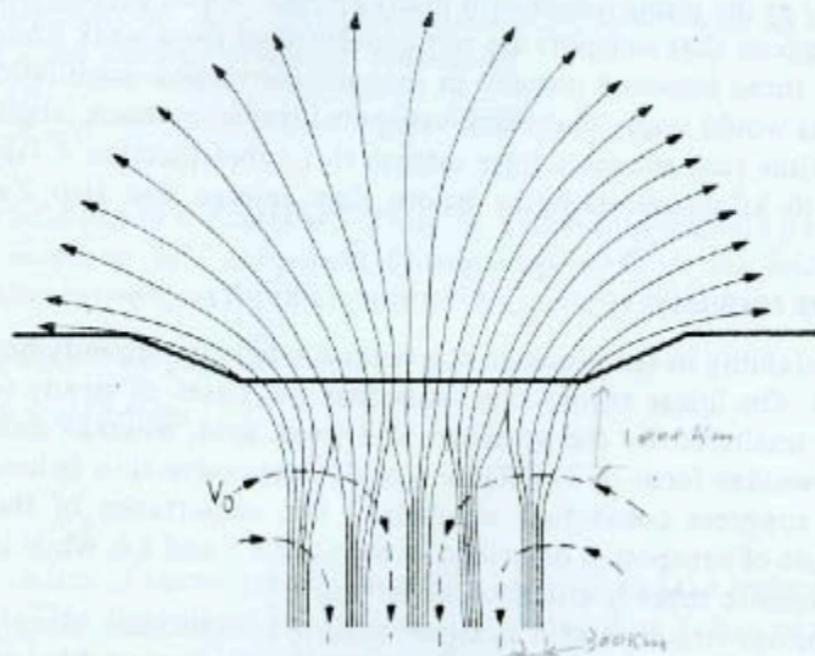


Fig. 8.11. Parker's model for a sunspot as a cluster of magnetic flux tubes, held together by a convective downdraft indicated by dashed arrows (from Parker, 1979b).

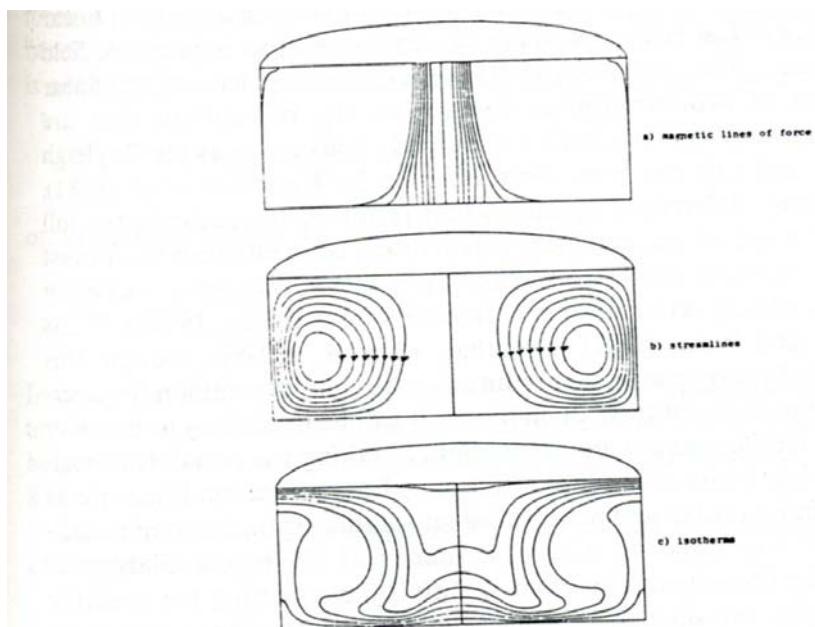


Fig. 8.5. (a) Magnetic field lines, (b) streamlines and (c) isotherms for a nonlinear steady state of axisymmetric magnetoconvection. Magnetic flux has been expelled from most of the cell and concentrated as a flux tube on the axis (from Galloway and Moore, 1979).

为了对中心区黑子 (2000 ± 1000 强度) 构造扩散模型。
考虑柱坐标下磁感应方程的垂直分量。中心区的磁通量近似于垂直
 $B(R, \pi)$ \vec{B}_z ，不考虑流动，即 $\vec{v} = 0$ 。则有

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \tilde{\eta} \nabla^2 \vec{B}$$

$$\vec{B}_z \text{ 分量 } \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\tilde{\eta}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial B_z}{\partial R} \right)$$

$$\text{条件: } B_z = \frac{\phi_0}{(4\pi\tilde{\eta}\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\tilde{\eta}\pi}\right) \quad (8.78)$$

假设黑子的边缘 $R = a$ 处，磁场为 B_s ，则黑子的通量为

$$\bar{F} = \int_0^a 2\pi B_z R dR$$

$$(8.78) \text{ 式代入, 且 } B_s = \frac{\phi_0}{(4\pi\tilde{\eta}\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{4\tilde{\eta}\pi}\right), \text{ 有}$$

$$\bar{F} = \bar{F}_0 - 4\pi\tilde{\eta} B_s a$$

$$\text{通量的减少率: } -\frac{d\bar{F}}{dt} = 4\pi\tilde{\eta} B_s \quad (8.79)$$

根据观测者 ν ，磁通量减少率为常数

$$-\frac{d\bar{F}}{dt} = 1.2 \times 10^8 B_{\max} m^2 s^{-1} \quad (8.80)$$

B_{\max} 单位是 Tesla。

从 (8.79), (8.80) 式，得 $B_s = 1500 G$, $B_{\max} = 3000 G$ 时。

$$\tilde{\eta} \approx 2 \times 10^7 m^2 s^{-1}$$

在 6000 ± 1000 强度，对小尺度，对流动引起的磁场扩散速率与 10^7 上述推导相符合。

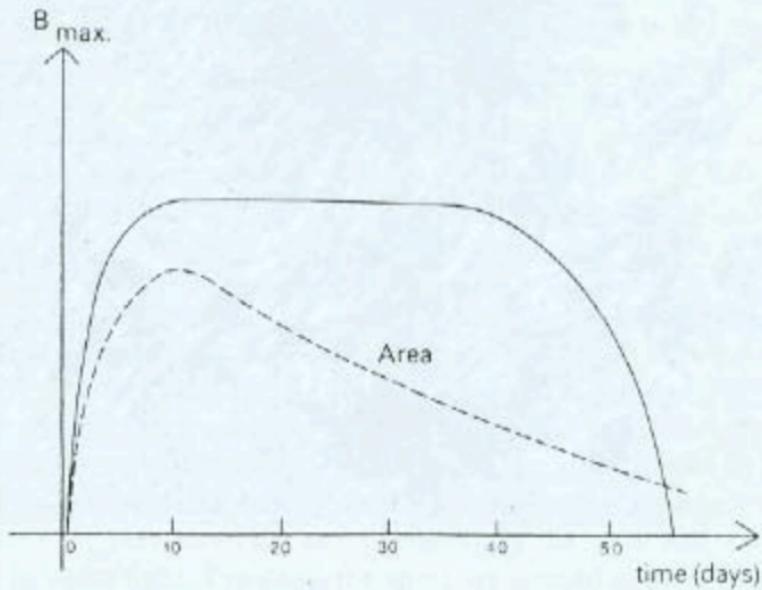


Fig. 1.25. A typical variation with time of the maximum magnetic field strength (solid) and area (dashed) of a large sunspot. The field strength peaks at 3 kG, while the maximum area is 4×10^{-4} of the Sun's hemisphere (after Cowling, 1946).

8.7 强磁通管 (Intense Flux Tube)

光球观测表明,光球磁通管大部分集中于强磁通管内,它们场强为 1500 G 到 2000 G , 直径只有 100 到 300 公里, 典型的通量值为 $5 \times 10^9 \text{ Wb}$ ($5 \times 10^{17} \text{ M}_A$), 它们很可能位于起来被边缘附近的米粒之间, 与风速, 小尺度光斑有关联。这与由于强磁通管的磁场特别强, 从而不能使磁场线垂直于米粒的运动均分来解释, 因为均匀分布, 光球上的磁场值仅约 200 G , $1000\text{ 公里深处为 }600\text{ G}$ 。强磁通管的强磁场是一种可能的来源是磁场流将磁场集中到相当强度, 超过均分值 (如图 8.4 之截面模型)。磁通管也可因槽纹之稳定性 (即之稳定稳定性) 不断地被撕开, 实际上有可能是裂了对流区由对流元与强磁通管连接而形成。8.7.2 节将叙述另一种高场强的解释。

首先讨论细磁通管的性质 (slender flux tube)

细磁通管在地球上无处不在, 太阳大气中都有。利用这些性质, 方可讨论光球的强磁通管的行为。

- i. 细磁通管很狭小, 因此密度方向上的磁场近似均匀, 这意味着通量可写成 $F = \pi a^2 B(s)$, a 为半径, B 为顺着磁通管的距离为 s 处的场强, 而且磁通管表面的场强 (即外表包围着管子) 与中心处的场强 (也有很大的不同)。

ii. 磁通管宽度远远大于外部等离子体的特征尺度 Λ_e

iii. 宽度远小于所考虑的尺度很长, 从而可作长波近似。

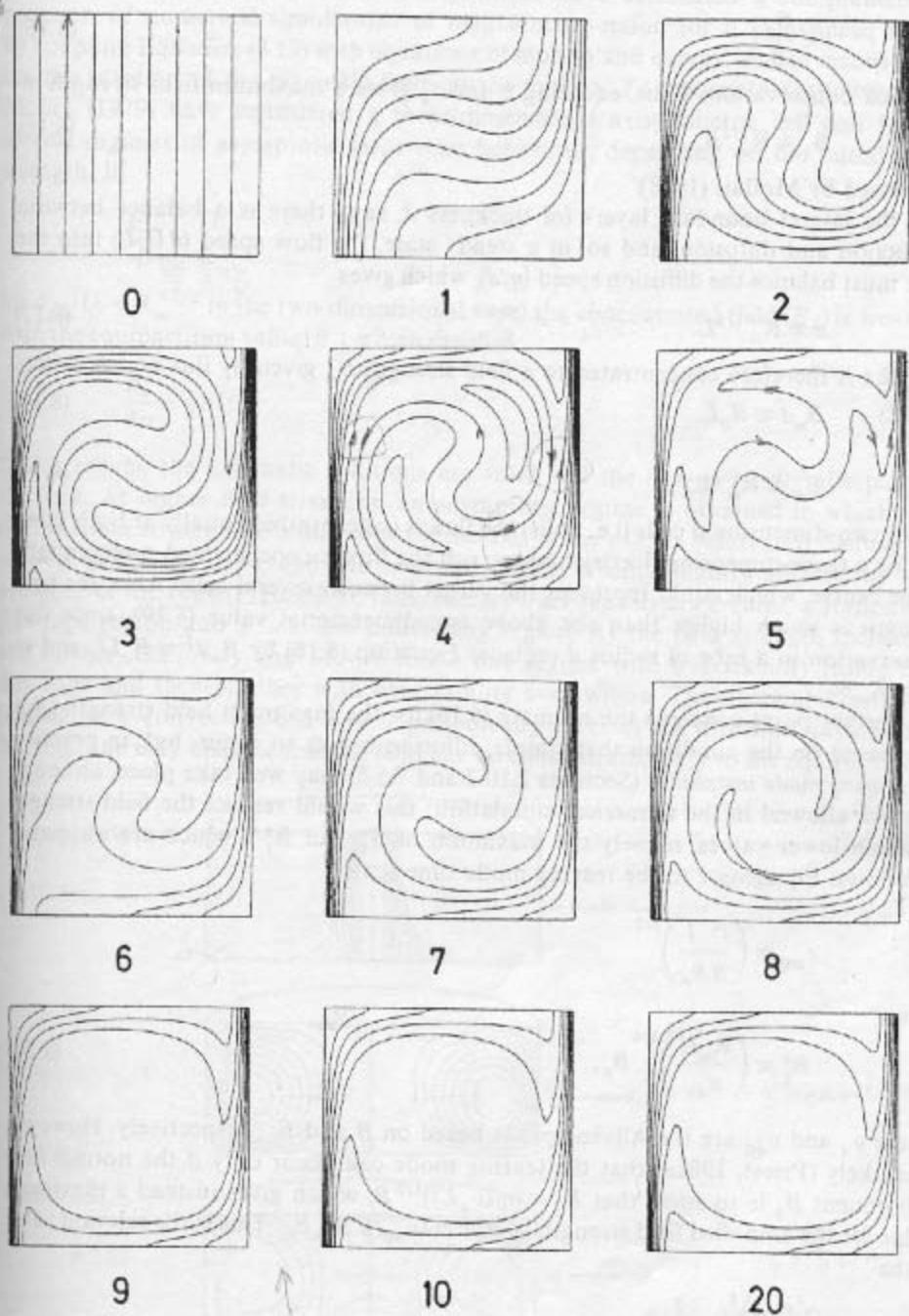


Fig. 8.4. Flux expulsion from a single eddy. The magnetic field lines for $R_s = 250$ after times of $t/\tau = 0 - 20$, where $\tau = 5L/(8U)$ (from Galloway and Weiss, 1981).

$$t = \frac{6L}{U}$$

$$\tau = \frac{5L}{8U}$$

$$\frac{t}{\tau} = 9.6$$

8.7.1 细磁通管的平衡

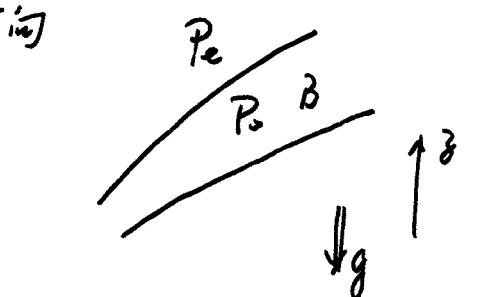
1. 细磁通管，具有性质 i. 重力沿 \vec{z} 方向

假设周围介质力学平衡

$$0 = -\frac{dP}{dz} - \rho g$$

$$P_e(z) = P_{e(0)} e^{-\bar{m}_e(z)} \quad (8.81)$$

$$[\text{上式来自(3.6)式. } P = P_0 \exp(-\int_0^z \frac{1}{\Lambda_B(z)} dz)]$$



表示 细磁通管外部压
力 P_0 常定

$$\Lambda_B(z) = \frac{R_B I}{mg} = \frac{P}{\rho g} \quad \text{常数}$$

式中 $\bar{m}_e(z) = \int_0^z \Lambda_e(z)^{-1} dz$. 参考点 $z=0$ 为外标高.

Λ_e 为(磁通管)外标高.

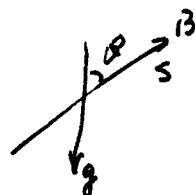
再假设, 考虑 MHD 平衡: 压力梯度, 引力, Lorentz 力平衡.
平衡力沿管的方向 (即 \vec{B} 的方向). 所以 Lorentz 力 $\vec{J} \times \vec{B}$ 先 \vec{B} 的方向
分量计算如下.

s 为沿磁力线方向, 与垂直方向夹角为 θ

$$0 = -\frac{dP}{ds} - \rho g \cos \theta$$

$$ds \cos \theta = dz$$

$$0 = -\frac{dP}{dz} - \rho g$$



可求得内压力 (internal pressure P_i)

$$P_i(z) = P_{i(0)} e^{-\bar{m}_i(z)} \quad (8.82)$$

$$\bar{m}_i(z) = \int_0^z \Lambda_i(z)^{-1} dz$$

Λ_i 为内标高.

管子表面压力平衡

$$P_i + \frac{1}{2\mu} B_i^2 = P_e \quad (8.83)$$

(7) (8.81), (8.82) 代入上式

$$\frac{1}{2\mu} B(z) = P_{e(0)} e^{-\bar{m}(z)} - P_{i(0)} e^{-\bar{m}(z)} \quad (8.84)$$

B 为管内, 表面处的磁场强度

从 (8.84) 式可知, 磁通管内外, 表面处的磁子处的压力已知.

若以 T 为常数, 则由 (8.84) 式可得管子的磁场强度

可由该式确定.

磁通管的通量守恒

$$B(z) \pi a^2(z) = B(0) \pi a^2(0) \quad , \quad a \text{ 为管子的半径.}$$

$$a^2(z) = \frac{a^2(0) B(0)}{B(z)} \quad (8.85)$$

2. 对于特例: 磁通管内外温度相同 (忽略 ∇T)

$$\text{则有 } \bar{m}_{e(0)} = \bar{m}_{i(0)} = \bar{m}(z)$$

$$\therefore \bar{m} = \int_0^z \frac{1}{\lambda} dz = \int_0^z \frac{\rho g}{P} dz = \int_0^z \frac{mg}{RT} dz$$

(8.84) 式变为

$$B(z) = 2\mu [P_{e(0)} - P_{i(0)}] e^{-\bar{m}(z)}$$

当 $z=0$ 时, 由而表式可知 $\bar{m}(0)=0$

$$\text{因此 } B(0) = 2\mu (P_{e(0)} - P_{i(0)})$$

代入 $B(z)$ 表达式, 有

$$B(z) = B(0) e^{-\bar{m}(z)}$$

$$B(z) = B(0) e^{-\frac{1}{2}\bar{m}(z)} \quad (8.86)$$

(8.86) 式代入 (8.85), 有

$$a_i(\delta) = a^{(0)} e^{\frac{1}{k_B} \bar{m}_i(\delta)}$$

[因为温度相同] $\therefore A_i(\delta) = \frac{k_B T}{m g} = \text{const.}$

$$\bar{m}_i(\delta) = \frac{1}{A_i} \delta$$

因此随磁通 δ 增加, $\bar{m}_i(\delta)$ 增加, 从而 $a_i(\delta)$ 增加. 即磁场强度变粗, 而磁场强度 $B_i(\delta)$ 变小.

3. 当管内温度与外部温差 ΔT

$$P_{i,(0)} = P_{i,(0)} \exp \left(- \int_0^{\delta} A_i(\delta') d\delta' \right)$$

$$= P_{i,(0)} \exp \left(- \int_0^{\delta} \frac{m g}{k_B T_e(\delta')} d\delta' \right)$$

$\because T < \text{管外的温度. } \therefore P_{i,(0)} \text{ 下降比 } P_{e,(0)} \text{ 快.}$

大范围的冷却, 管壁中部的物质大部分消失 (设管外温度为常数 T , 管内别为 $T - \Delta T$, 设 ΔT 为一定值, P_i 随 δ 增加迅速下降, 亦谓着物质的减少)

$$P_{i,(0)} = P_{i,(0)} \exp \left[- \int_0^{\delta} \frac{m g}{k_B T_e(\delta') \left(1 - \frac{\Delta T}{T_e(\delta')} \right)} d\delta' \right]$$

$$T_i(\delta) = T_e(\delta) - \Delta T$$

$$= T_e(\delta) \left(1 - \frac{\Delta T}{T_e(\delta)} \right)$$

$$P_{i,(0)} \approx P_{i,(0)} \exp \left[- \int_0^{\delta} \frac{m g}{k_B T_e(\delta')} d\delta' \right] \cdot \exp \left[- \int_0^{\delta} \frac{m g}{k_B T_e(\delta')} \frac{\Delta T}{T_e(\delta')} d\delta' \right]$$

$P_{i,(0)}$ 要比 $P_{e,(0)}$ 小得多 于是有 $\frac{1}{2\pi} B \approx P_e$ (8.87)

4. 管内的等离子体应力可忽略时, 内部场为势场 (电流也可忽略)

内部磁场 B 可由 P_e 求出. P_e 由 (8.81) 式定, 即 $\frac{dP_e}{dz} = - \frac{P_e}{\lambda_e}$ (8.88)

磁通量的半径可由下式确定

$$\pi a^2 B_{av} = F \quad (8.89)$$

F 应为常数

5. 为了扩编高细磁通管时的运用，须记得(8.87)式中的
 B_{av} 为管的表面值，(8.89)式中的 B_{av} 为平均值。

8.7.2 强磁场不稳定性 (intense magnetic instability)

从湍散的磁场形成强磁通管的背景，如图 8.16 所示

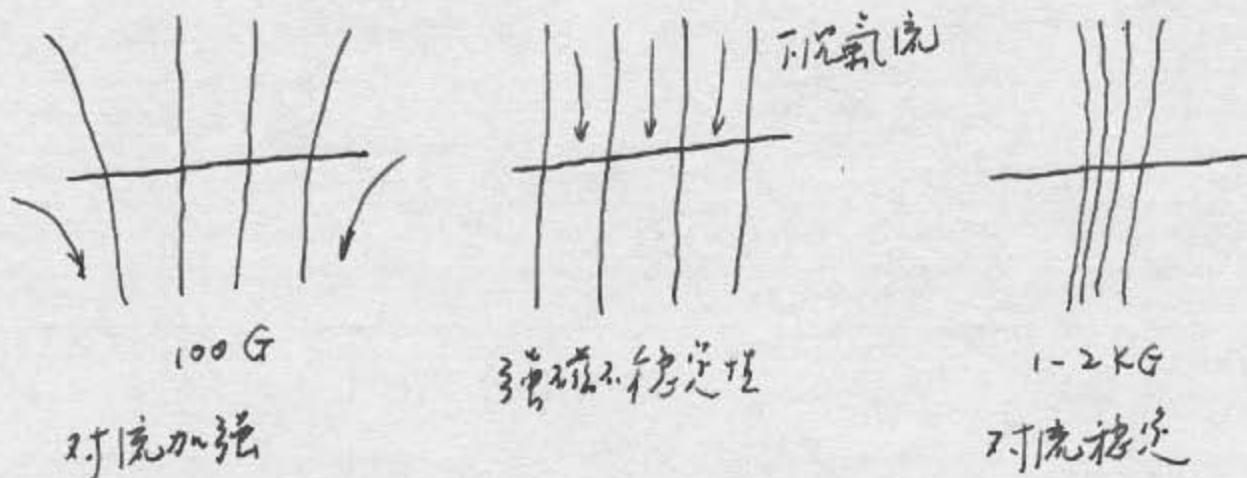


Fig. 8.16

1. 湍散的垂直磁场首先移动到起来粒组织的角落和边界 (参见 8.1.3 节). 形成中等强度的磁通管 (几百高斯) 这种磁通管 因为强磁场的不稳定性. 遭遇到对流收缩 (convective collapse). 这种强磁场的不稳定性有时称之为泡 (bubble) 或对流不稳定性. (即: 磁力线因对流向收缩)
2. 露内等离子体冷却, 下沉, 这可能解释 $0.5\text{--}2.0 \text{ km s}^{-1}$ 的下沉气流. 同时新的不稳定的磁通管不断形成并下沉 在起来粒的边界上能发现这些下沉气流.
3. 同时, 场强增强, 磁通管变窄直至增强至 $1\text{--}2 \text{ KG}$, 从而克服超绝热大气 (superadiabatic atmosphere) 的对流不稳定性, 并抑制了运动. (即: 抑制快速的对流运动)
4. 最终对流稳定的强磁通管被流动拖曳, 同时时支离破碎

逆性，倾向于弥散（因为支撑和稳定性使得磁通管撕裂）
 5. 垂直的细磁通管随波传播慢扩散，其中垂直运动可用
 (非线性) 细磁通管方程描述。

轴对称密度 $\rho(x, t)$, 压力 $P(x, t)$, 垂直速度 $v(x, t)$, 磁场 $B(x, t)$
 由连深性方程, 垂直及横向运动方程和等熵增长率表达。

见九个经 Roberts-Webb (1977) 所述深有关系部分。
 理想导体 ($\sigma \rightarrow \infty$), 无粘滞完全流体, 等熵运动的磁流体力学
 方程组: (与序号为 R-W 之中的序号)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad ①$$

$$\rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \vec{j} \times \vec{B} \quad ②$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad ③$$

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{\gamma P}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \right) \quad ④$$

$$P = \frac{\gamma}{m} \rho T \quad ⑤$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \mu \vec{j} = \nabla \times \vec{B} \quad ⑥$$

$$\text{设 } \vec{B} = B(0, 0, B(x, t)), \quad \vec{v} = (0, 0, v(x, t)) \quad ⑦$$

轴对称, 垂直, 无扭曲的强磁通管, 选择坐标且 $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0$.
 垂直方向 (即 \vec{z} 方向) 的方程为.
 \vec{g} 北 - \vec{g} 方向.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad ⑧$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \quad ⑨$$

$$(\vec{B} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}, \text{ 展开后可见 } \vec{B} \text{ 分量为零})$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -V \frac{\partial B}{\partial y} \quad (9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} = C_{so}^2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (10)$$

$$C_{so}^2 = \frac{V^2}{P}$$

带电管道内有气体和磁场，可以期望关于 V 的方程应该包括与流体力学和磁学相关的物理量。但直接对上述方程化简，或流动线性化的方程太难，待到研究 V 的方程，其系数与 B 无关，是进行符合物理性的稳定性分析。

通过连续性方程和磁感应方程可以得另一个方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{B} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{PV}{B} \right) = 0 \quad (8.90) \quad (11)$$

利用该式作小扰动线性化处理。

下面先求 (8.90) 式。

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \nabla (P \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (P V) = 0$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} (P V) = 0 \quad (*)$$

\vec{B} 方向，对于完全导电等离子体，感应方程为

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -V \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$= \text{邊乘 } \frac{\rho}{B^2} \text{ 有: } \frac{\rho}{B^2} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho v}{B^2} \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{B} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{B} \right) = 0 \quad (*)$$

$$(*) \text{ 式} + (*) : \frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{B} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial z} (\rho v) + \rho v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{B} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{B} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho v}{B} \right) = 0 \quad (8.90)$$

根據初邊方程，管內流動的平衡。得到

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \quad (8.91)$$

管內外流動的平衡，有：

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_e \quad (8.92)$$

下稱之“表定常式”。管外傳導沒有破壞。

等熵流動過程的熱過程 $\frac{dP}{dT} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\gamma-1} = 0$ ，表示元氣有

$$\frac{\partial P}{\partial T} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\gamma P}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (8.93)$$

考慮半徑 r ， $P_0(\theta)$ ， $P_e(\theta)$ ， $\rho_0(\theta)$ ， $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ ，則 $\vec{V} = 0$ 。

方程 ④ 錄，半徑 r 時，有

$$\frac{dP_0}{d\theta} = - \rho_0 g \quad (4)$$

P_0 ， P_e 似為子母函數。

$$P_0(\theta) = P_{0(0)} \exp \left[- \int_0^\theta \lambda_0(\theta')^{-1} d\theta' \right] \quad (5)$$

$$\lambda_0(\theta) = \frac{k T_0(\theta)}{m g} \quad (\theta = 0, \text{at } T_{5000} = 1)$$

$$\text{管外有 } P_e(\theta) = P_{e(0)} \exp \left[- \int_0^\theta \lambda_e(\theta')^{-1} d\theta' \right] \quad (6)$$

$$\Lambda_{\text{ext}} = \frac{kT_{\text{ext}}}{mg}$$

$$\text{管内外平衡: } P_e(\delta) = P_o(\delta) + \frac{1}{2\rho g} B_o(\delta)$$

$$\frac{dP_e}{d\delta} = \frac{dP_o}{d\delta} + \frac{d}{d\delta} \left(\frac{1}{2\rho g} B_o \right)$$

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{1}{2\rho g} B_o \right) = g (P_o - P_e) \quad (7)$$

由(8.9), (5), (6)式可得:

$$\frac{1}{2\rho g} B_o(\delta) = P_o(\delta) e^{-\bar{m}_o(\delta)} - P_o(0) e^{-\bar{m}_o(0)}$$

$$m_o(\delta) = \int_0^\delta \frac{1}{\lambda} d\delta = \int_0^\delta \frac{mg}{kT_o(\delta)} d\delta$$

$$\therefore T_o(\delta) = T_o(0)$$

$$\therefore \bar{m}_o(\delta) = \bar{m}_o(0)$$

$$B_o^2(\delta) = 2\rho g (P_o(\delta) - P_o(0)) e^{-\bar{m}_o(\delta)}$$

$$\therefore \delta=0, \bar{m}_o(0)=0$$

$$\therefore B_o^2(0) = 2\rho g (P_o(0) - P_o(0))$$

$$B_o^2(\delta) = B_o^2(0) e^{-\bar{m}_o(\delta)}$$

$$B_o^2(\delta) = B_o^2(0) \frac{P_o(\delta)}{P_o(0)} = B_o^2(0) \frac{P_o(\delta)}{P_o} \quad (8)$$

$$B_o(\delta) \sim P_o^{1/2}(\delta)$$

现在令 δ 使 $T_o(\delta) = T_e(\delta)$ (即 δ 为平衡层或中性层, 即 δ 处 P 和 T 相等)

$$C_{so}(\delta) = \frac{g P_o(\delta)}{P_o(\delta)}, \quad V_A^2(\delta) = \frac{B_o^2(\delta)}{\mu P_o(\delta)} \quad (9)$$

$$\text{density scale-height } H_o(\delta), \quad H_o(\delta)^{-1} = -\frac{P_o'(\delta)}{P_o(\delta)} = -\frac{d \ln P_o(\delta)}{d \delta}$$

$$\text{buoyancy freq. } N_b^2 = \frac{g^2}{H_o(\delta)} - \frac{g^2}{C_{so}^2(\delta)}$$

No 7. چیزی که باید بدانیم

که این پارامترها چگونه

$$\frac{\lambda(\beta)}{\lambda(0)} = \frac{P_0(\beta)/P_0(0)}{P_0(0)/P_0(0)} = \frac{P_0(\beta)P_0(0)}{P_0(0)P_0(\beta)} = e^{-m(\beta)} \cdot \frac{P_0(0)}{P_0(\beta)}$$

$$\therefore P_0(\beta) = P_0(0) \frac{\lambda(0) e^{-m(\beta)}}{\lambda(\beta)}$$

$$\text{با اینکه } P_0(\beta) = P_0(0) e^{-m(\beta)}$$

$$B_0(\beta) = B_0(0) e^{-\frac{i}{2}m(\beta)}$$

$$\text{پس از } m(\beta) = \int_0^\beta \frac{d\beta'}{\lambda(\beta')}$$

$$\frac{C_{10}^2(\beta)}{V_{A(\beta)}^2} = \frac{\mu P_0(\beta)/P_0(0)}{\frac{1}{\mu} B_0^2(\beta)/P_0(0)} = \frac{\mu Y P_0(\beta)}{B_0^2(\beta)} = \frac{\mu Y P_0(0)}{B_0^2(0)} = \frac{C_{10}^2(0)}{V_{A(0)}^2} = \text{const.} \quad (22)$$

气压方程组的简化：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_0}{B_0}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_0 V_0}{B_0}\right) = 0 \\ P_0 \left(\frac{\partial V_0}{\partial t} + V_0 \frac{\partial B_0}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_0}{\partial z} - P_0 g \\ P_0 + \frac{1}{\rho_0} B_0^2 = \bar{P}_e \\ \frac{\partial P_0}{\partial t} + V_0 \frac{\partial P_0}{\partial z} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial P_0}{\partial t} + V_0 \frac{\partial P_0}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

1. 扰动线性化方程组 设 $V_0=0$, 第二章为小扰动量。

$$\begin{aligned} (1'): & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_0 + P'}{B_0 + B'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(P_0 + P')V'}{B_0 + B'}\right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{P_0}{B_0}\left(1 + \frac{P'}{P_0}\right)\left(1 - \frac{B'}{B_0}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_0}{B_0}\left(1 + \frac{P'}{P_0}\right)\left(1 - \frac{B'}{B_0}\right)V'\right] = 0 \end{aligned}$$

(5) 为平衡项，有 $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_0}{B_0}\right) = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P'}{B_0} - \frac{P_0}{B_0^2} B'\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_0}{B_0} V'\right) = 0 \\ & \frac{1}{B_0} \frac{\partial P'}{\partial t} - \frac{P_0}{B_0^2} \frac{\partial B'}{\partial t} + V' \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_0}{B_0}\right) + \frac{P_0}{B_0} \frac{\partial V'}{\partial t} = 0 \\ & B_0 \frac{\partial P'}{\partial t} - P_0 \frac{\partial B'}{\partial t} + V' \left(B_0 \frac{\partial P_0}{\partial z} - P_0 \frac{\partial B_0}{\partial z} \right) + P_0 B_0 \frac{\partial V'}{\partial z} = 0 \quad (5') \end{aligned}$$

$$(2'): (P_0 + P') \frac{\partial V'}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}(P_0 + P') - P_0 g - P' g$$

代入 P.120 得 (5') 式。得：

$$P_0 \frac{\partial V'}{\partial z} = -\frac{\partial P'}{\partial z} - P' g \quad (6')$$

1. 若设 \bar{P}_e 无扰动

$$\begin{aligned} (3'): & P_0 + P' + \frac{1}{\rho_0} (B_0 + B')^2 = \bar{P}_e \\ & P' + \frac{1}{\rho_0} B_0 B' = 0 \quad (7') \end{aligned}$$

$$④' \quad \frac{\partial(P_0 + P')}{\partial t} + v' \frac{\partial(P_0 + P')}{\partial \delta} = \frac{v(P_0 + P')}{P_0 + P'} \left(\frac{\partial(P_0 + P')}{\partial t} + v' \frac{\partial(P_0 + P')}{\partial \delta} \right)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + v' \frac{\partial P_0}{\partial \delta} = \frac{P_0}{P_0 + P'} (1 + \frac{P'}{P_0}) (1 - \frac{P'}{P_0}) \left(\frac{\partial P'}{\partial t} + v' \frac{\partial P_0}{\partial \delta} \right)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + v' \frac{\partial P_0}{\partial \delta} = C_{S0}^2 \beta \left(\frac{\partial P'}{\partial t} + v' \frac{\partial P_0}{\partial \delta} \right) \quad ⑤'$$

线性化后的方程组如下：

$$\left. \begin{array}{l} B_0 \frac{\partial P'}{\partial t} - P_0 \frac{\partial B'}{\partial t} + v' \left(B_0 \frac{\partial P_0}{\partial \delta} - P_0 \frac{\partial B_0}{\partial \delta} \right) + P_0 B_0 \frac{\partial V'}{\partial \delta} = 0 \\ P_0 \frac{\partial V'}{\partial t} = - \frac{\partial P'}{\partial \delta} - P' g \\ P' + \frac{1}{\mu} \partial_\delta B' = 0 \end{array} \right\} \quad ⑤'$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + v' \frac{\partial P_0}{\partial \delta} = C_{S0}^2 \beta \left(\frac{\partial P'}{\partial t} + v' \frac{\partial P_0}{\partial \delta} \right) \quad ⑥'$$

B_0, P_0, P_0, C_{S0} 均为子的系数，未知数为 P', B', V', P' ，相应有 4 个方程。
该方程组的形式为： $\sim \bar{A}_{(8)} e^{i\omega t}$ 。先设重根 $\bar{A}_{(8)}$ ，将子的系数代入上述方程组

$$⑦' \quad i\omega B_0 \bar{P}' - i\omega P_0 \bar{B}' + \bar{V}' \left(B_0 \frac{\partial P_0}{\partial \delta} - P_0 \frac{\partial B_0}{\partial \delta} \right) + P_0 B_0 \frac{\partial \bar{V}'}{\partial \delta} = 0 \quad ⑦'$$

$$⑧' \quad i\omega P_0 \bar{V}' = - \frac{d \bar{P}'}{d \delta} - \bar{P}' g \quad ⑧'$$

$$⑨' \quad i\omega \bar{P}' + \bar{V}' \frac{d \bar{P}_0}{d \delta} = C_{S0}^2 \left(i\omega \bar{P}' + \bar{V}' \frac{d \bar{P}_0}{d \delta} \right) \quad ⑨'$$

$$⑩' \quad \bar{B}' = - \frac{1}{B_0} \bar{P}' \quad ⑩'$$

$$⑪' \quad \text{式可得} - \frac{1}{B_0} \bar{P}' : i\omega \bar{P}' + \bar{V}' \left(\frac{d \bar{P}_0}{d \delta} - C_{S0}^2 \frac{d \bar{P}_0}{d \delta} \right) = i\omega C_{S0}^2 \bar{P}'$$

$$\bar{P}' = \frac{\bar{P}'}{C_{S0}^2} + \bar{V}' \left(\frac{1}{i\omega C_{S0}^2} \frac{d \bar{P}_0}{d \delta} - \frac{1}{i\omega} \frac{d \bar{P}_0}{d \delta} \right) \quad ⑫'$$

(12) 13), 14), 15).

$$i\omega B_0 \left[\frac{\bar{P}'}{C_{S0}} + \bar{V} \left(\frac{1}{i\omega C_{S0}} \frac{dP_0}{d\delta} - \frac{1}{i\omega} \frac{dV_0}{d\delta} \right) \right] + i\omega P_0 \frac{\kappa}{B_0} \bar{P}' + \bar{V} \left(B_0 \frac{dP_0}{d\delta} - P_0 \frac{dV_0}{d\delta} \right) + P_0 B_0 \frac{dV_0}{d\delta} = 0$$

$$\bar{P}' \left(1 + \frac{C_{S0}^2}{\kappa B_0} \right) + \frac{\bar{V}}{i\omega} \left(\frac{dP_0}{d\delta} - P_0 \frac{C_{S0}^2}{B_0} \frac{dV_0}{d\delta} \right) + \frac{1}{i\omega} P_0 C_{S0} \frac{dV_0}{d\delta} = 0$$

$$\frac{dP_0}{d\delta} = -P_0 g \quad (14)$$

$$\text{由 (3) 式 } B_0(\delta) = B_{00} e^{-\frac{1}{2}m_1(\delta)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_0(\delta)}{d\delta} &= B_{00} e^{-\frac{1}{2}m_1(\delta)} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{dm_1(\delta)}{d\delta} \\ &= -\frac{1}{2} B_0(\delta) \frac{1}{m_1(\delta)} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} B_0(\delta) \frac{P_0 g}{P_0} \quad (14')$$

14), 14'), 15) 之解

$$\bar{P}' = \frac{1}{i\omega \left(1 + \frac{C_{S0}^2}{\kappa B_0} \right)} \left[\left(1 - \frac{Y}{2} \right) P_0 g \bar{V} - P_0 C_{S0} \frac{d\bar{V}}{d\delta} \right] \quad (15')$$

(15') 之解 2 种。 ($\frac{C_{S0}(\delta)}{\kappa B_0(\delta)} = \text{const.}$)

$$\frac{d\bar{P}'}{d\delta} = \frac{1}{i\omega \left(1 + \frac{C_{S0}^2}{\kappa B_0} \right)} \left[\left(1 - \frac{Y}{2} \right) g \frac{dP_0}{d\delta} \bar{V} + \left(1 - \frac{Y}{2} \right) P_0 g \frac{d\bar{V}}{d\delta} - \frac{d}{d\delta} \left(P_0 C_{S0} \right) \frac{d\bar{V}}{d\delta} - P_0 C_{S0} \frac{d^2 \bar{V}}{d\delta^2} \right]$$

$$\text{和 (14) 式. 及 } P_0 C_{S0} = Y P_0$$

$$\frac{d\bar{P}'}{d\delta} = \frac{1}{i\omega \left(1 + \frac{C_{S0}^2}{\kappa B_0} \right)} \left[\left(1 - \frac{Y}{2} \right) g \frac{dP_0}{d\delta} \bar{V} + \left(1 + \frac{Y}{2} \right) P_0 g \frac{d\bar{V}}{d\delta} - P_0 C_{S0} \frac{d^2 \bar{V}}{d\delta^2} \right] \quad (16')$$

15) 代入 (13) 式.

$$\bar{P}' = \frac{1}{i\omega \left(1 + \frac{C_{S0}^2}{\kappa B_0} \right) C_{S0}} \left[\left(1 - \frac{Y}{2} \right) P_0 g \bar{V} - P_0 C_{S0} \frac{d\bar{V}}{d\delta} \right] + \bar{V} \left(\frac{1}{i\omega C_{S0}} (-P_0 g) - \frac{1}{i\omega} \frac{dP_0}{d\delta} \right)$$

$$\bar{P}' = \left[\frac{1}{i\omega(1+\frac{C_{S0}^2}{V_{A0}})C_{S0}^2} (1-\frac{\gamma}{2}) P_0 g - \frac{P_0 g}{i\omega C_{S0}} - \frac{1}{i\omega} \frac{dP_0}{dg} \right] \bar{V}_1 - \frac{1}{i\omega(1+\frac{C_{S0}^2}{V_{A0}})C_{S0}^2} P_0 \frac{d\bar{V}_1}{dg} \quad (17)$$

(16'), (17), (18) 式

$$i\omega P_0 \bar{V}_1 = -\frac{1}{i\omega(1+\frac{C_{S0}^2}{V_{A0}})} \left[(1-\frac{\gamma}{2}) g \frac{dP_0}{dg} \bar{V}_1 + (1+\frac{\gamma}{2}) P_0 g \frac{d\bar{V}_1}{dg} - P_0 C_{S0}^2 \frac{d^2 \bar{V}_1}{dg^2} \right]$$

$$- \left[\frac{1}{i\omega(1+\frac{C_{S0}^2}{V_{A0}})C_{S0}^2} (1-\frac{\gamma}{2}) P_0 g^2 - \frac{P_0 g^2}{i\omega C_{S0}} - \frac{g}{i\omega} \frac{dP_0}{dg} \right] \bar{V}_1 + \frac{P_0 g}{i\omega(1+\frac{C_{S0}^2}{V_{A0}})} \frac{d\bar{V}_1}{dg}$$

由來 $\frac{i\omega}{P_0}$:

$$\left[\omega^2 - \frac{1}{1+\frac{C_{S0}^2}{V_{A0}}} (1-\frac{\gamma}{2}) \frac{g}{P_0} \frac{dP_0}{dg} - \frac{1}{(1+\frac{C_{S0}^2}{V_{A0}})C_{S0}^2} (1-\frac{\gamma}{2}) g^2 + \frac{g^2}{C_{S0}^2} + \frac{g}{P_0} \frac{dP_0}{dg} \right] \bar{V}_1$$

$$- \left[\frac{1}{1+\frac{C_{S0}^2}{V_{A0}}} (1+\frac{\gamma}{2}) g - \frac{g}{1+\frac{C_{S0}^2}{V_{A0}}} \right] \frac{d\bar{V}_1}{dg} + \frac{C_{S0}^2}{1+\frac{C_{S0}^2}{V_{A0}}} \frac{d^2 \bar{V}_1}{dg^2} = 0$$

$$C_T^2 = \frac{C_{S0}^2 V_{A0}^2}{V_{A0}^2 + C_{S0}^2}, \quad \therefore \text{由 } P_0 \text{ 之 } C_T \quad (\text{Tube speed})$$

上式中 ①, ③ \Rightarrow 為

$$- \frac{1}{C_{S0}^2} (1-\frac{\gamma}{2}) \left[\frac{g}{P_0} \frac{dP_0}{dg} + \frac{g^2}{C_{S0}^2} \right] = - \frac{(1-\frac{1}{2}\gamma)}{C_{S0}^2} g \left[\frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{dg} + \frac{g}{C_{S0}^2} \right]$$

$$= \frac{(1-\frac{\gamma}{2})}{C_{S0}^2} N_o^2$$

$$\therefore N_o^2 = -g \left(\frac{g}{C_{S0}^2} + \frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{dg} \right)$$

3), 4) 次為

$$\frac{1}{C_T^2} \left(\frac{g^2}{C_{S0}^2} + \frac{g}{P_0} \frac{dP_0}{dg} \right) = \frac{g}{C_T^2} \left(\frac{g}{C_{S0}^2} + \frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{dg} \right) = -\frac{N_o^2}{C_T^2}$$

$$\therefore \bar{V}_1 \text{ 之 } N_o^2 \text{ 係數為: } \frac{\omega^2 - N_o^2}{C_T^2} + (1-\frac{\gamma}{2}) \frac{N_o^2}{C_{S0}^2}$$

$$\frac{d\bar{v}_1}{d\delta} \rightarrow \text{常数}, \text{故为: } -\left(\frac{1}{C_{S0}} \frac{\gamma}{2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{P_0}{\rho_0} = -\frac{1}{2\lambda_0}$$

$$\text{进而有: } \frac{d^2\bar{v}_1}{d\delta^2} - \frac{1}{2\lambda_0} \frac{d\bar{v}_1}{d\delta} + \left[\frac{\omega^2 - N_0^2}{C_T} + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{N_0^2}{C_{S0}} \right] \bar{v}_1 = 0. \quad (8.94)$$

对于特别, $\frac{\omega^2}{C_T}$ 为常数, λ_0, C_{S0}, N_0 均为常数 $V_A = \text{const}$.

$$\text{因为 } \lambda_0 = \frac{P_0}{\rho_0 g} = \frac{Rg T_0 \beta}{m g}, \quad \frac{\omega^2}{C_T} T_0 \beta = T_0 \alpha, \quad \lambda_0 = \text{const}.$$

$$C_{S0} = \frac{\gamma P_0 \alpha}{P_0 \beta} = \frac{\gamma Rg T_0 \beta}{m} = \text{const}.$$

$$H_0^{-1} = - \frac{\frac{dP_0 \alpha}{d\delta}}{P_0 \beta}, \quad P_0(\delta) = P_0^{(0)} e^{-M(\delta)}, \quad M(\delta) = \int \frac{d\delta}{\lambda_0 \beta}, = \frac{1}{\lambda_0 \alpha},$$

$$P_0(\delta) = P_0^{(0)} e^{-M(\delta)}$$

$$\frac{dP_0 \alpha}{d\delta} = -P_0(\delta) \frac{1}{\lambda_0 \alpha}, \quad \therefore H_0^{-1} = \frac{1}{\lambda_0 \alpha} = \text{const}.$$

$$V_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu \rho_0} = \frac{B_0^2 \alpha \beta e^{-\frac{\delta}{\lambda_0}}}{\mu P_0^{(0)} e^{-\frac{\delta}{\lambda_0}}} = \text{const}.$$

$$\text{可得: } N_0^2 = -g \left(\frac{g}{C_{S0}} + \frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{d\delta} \right)$$

$$= -g \left(\frac{g}{C_{S0}} - \frac{1}{H_0} \right)$$

$$\Rightarrow \text{const}.$$

$$C_T^2 = \text{const}.$$

因此在上述特别下, 方程(8.94)成为二阶常系数线性微分方程.

$$\text{令 } K = \left[\frac{\omega^2 - N_0^2}{C_T} + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{N_0^2}{C_{S0}} \right]$$

$$x^2 - \frac{1}{2\lambda_0} x + K = 0$$

$$x = \frac{1}{4\lambda_0} \pm \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4\lambda_0} - 4K \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\lambda_0} \pm \frac{1}{2} i \left(4K - \frac{1}{4\lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

通过:

$$\bar{V}'(\theta) = e^{\frac{i}{4\lambda_0}\theta} \left[A \cos \frac{1}{2} \left(4K - \frac{1}{4\lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}} \theta + B \sin \frac{1}{2} \left(4K - \frac{1}{4\lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}} \theta \right]$$

设定方程(8.94)的边界条件: $\Im \theta = 0$ 和 $\theta = -d$ 时, $\bar{V}'(\theta) = 0$

1. 当 $\theta = 0$ 时, $\bar{V}'(0) = 0$, 有 $A = 0$

2. $\theta = -d$ 时, $\bar{V}'(-d) = 0$,

$$\bar{V}'(-d) = e^{-\frac{d}{4\lambda_0}} \cdot B \sin \frac{1}{2} \left(4K - \frac{1}{4\lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}} (-d)$$

由上, $B = 0$ 且 $\bar{V}'(\theta)$ 为零, 为零解. 为使 $\bar{V}'(\theta)$ 有解, 必须

$\sin \frac{1}{2} \left(4K - \frac{1}{4\lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}} (-d) = \sin(-kd) = 0$. 以 d 为本征值向量

$$k = \frac{1}{2} \left(4K - \frac{1}{4\lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-kd = \pi$$

$$k^2 = \left(K - \frac{1}{16\lambda_0^2} \right) = \left(\frac{\pi}{d} \right)^2$$

$$K = \frac{1}{16\lambda_0^2} + k^2 = \frac{\omega^2 N_0^2}{C_T^2} + \left(1 - \frac{r}{2} \right) \frac{N_0^2}{C_{S0}^2}$$

$$\omega^2 = N_0^2 + \frac{C_T^2}{16\lambda_0^2} + k^2 C_T^2 - \left(1 - \frac{r}{2} \right) \frac{N_0^2 C_T^2}{C_{S0}^2}$$

$$= \left(\frac{1}{N_0^2} + \frac{r}{2C_{S0}^2} \right) C_T^2 N_0^2 + \left(\frac{1}{16\lambda_0^2} + \frac{\pi^2}{d^2} \right) C_T^2$$

最后有 $V(\theta, t) = \bar{V}'(\theta) e^{i\omega t}$

$$= B e^{\frac{i}{4\lambda_0}\theta} \cdot e^{i(\omega t + kd)}$$

由 ω^2 的表达式, ω 也跟着是可变的, 且 $N_0^2 > 0$ 且 $\omega^2 > 0$, 该表述成立.

稳定；当 $N_0 < 0$ 时， m 及 d 越大（即 $\frac{dN}{dt}$ 可忽略）从而有不稳定性。
 (N_0) 也可写成 $N_0 = \frac{2}{\lambda_0} \left(\frac{Y-1}{Y} + \frac{d\lambda_0}{dY} \right)$ ，其中 λ_0 即可认为是不变的常数。参考书中数据： $C_{S0} = V_{A0}$, $Y=1.2$, $\lambda_0 = 150 \text{ km}$, $d\lambda_0/dY = -0.25$, 可得 $\omega^2 < 0$

当强磁通密度稳定，但该处就有强磁场，所以一旦强磁通密度被扰动，就有强磁场的聚集，是一种产生强场的方法。

非线性方程 (8.90)-(8.93) 迄今尚未仔细研究过。Roberts 曾得到孤粒尺寸，Spruit 有一个可能的解释。

上述磁增强的材料实际上在磁场中流体增强磁场 (见图 8.10)。我们设计模型来描述磁场对流不稳定性的影响。上述材料为之一种补充。

8.7.3 针状体的产生

强磁通管是束缚在其周围大气间流体运动的自我通道。未粒组之间的相互作用导致高浓度通道朝向它们，它们也是针状体物质以及来自日冕的等离子体的回落通道。针状体 (10^5) 和强磁通管 (4×10^4) 数量相当，均集中于越来越大且也越上方的网状上。针状体 (8-15 min) 和未粒 (5-10 min) 寿命相近，它们之间应该有连接。

未粒组的排斥增加磁通管的压力，驱动管壁向上的大振幅流动。管子越细，向上的流动越快。当外界的振荡性驱动的相速度超过管内传播的纵波速度 (管速 tube speed) C_T ，就应该共振效应。

我们要确定因外部压力的变化，在管内令感引起什么运动。

设均匀磁场 $B_0 \vec{z}$, 可压缩理想气体(完全气体), 线性绝热运动 $\vec{v} = (V_x, 0, V_y)$, 由下述方程来描述其运动(Cooling, 1976)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta = C_0 \nabla^2 \Delta + V_A^2 \nabla^2 (\Delta - \bar{\Gamma}) \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial t^2} = C_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta \quad (4-2)$$

此式序号^{大体上} Roberts (1975) 的论文。考虑二维问题, 在 (x, z) 平面。

$$\text{式中 } \Delta = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \bar{\Gamma} = \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, C_0 = \left(\frac{V_{A0}}{P_0}\right)^{1/2}, V_A = \frac{B_0}{(m P_0)^{1/2}}$$

寻求下述形式的解

$$V_x = \hat{V}_x(x) \cos \omega t \cos k_z \quad (5-1)$$

$$V_z = \hat{V}_z(x) \cos \omega t \sin k_z \quad (5-2)$$

$$P = \hat{P}_0 \sin \omega t \cos k_z$$

$$b_x = \hat{b}_x(x) \sin \omega t \sin k_z$$

$$b_z = \hat{b}_z(x) \sin \omega t \cos k_z$$

$$\rho = \hat{\rho}_0 \sin \omega t \cos k_z$$

$$(4-2) \text{ 式 ①: } \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \hat{V}_z}{\partial z} \right) = C_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \hat{V}_z}{\partial x} + \frac{\partial \hat{V}_x}{\partial z} \right)$$

$$\text{根据 } (5-2), \frac{\partial \hat{V}_z}{\partial z} = k \hat{V}_z \cos \omega t \cos k_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{V}_z}{\partial z} \right) = -\omega k \hat{V}_z \sin \omega t \cos k_z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \hat{V}_z}{\partial z} \right) = -\omega^2 k \hat{V}_z \cos \omega t \cos k_z \quad (b)$$

$$\text{由(5-1), } \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{d\hat{V}_x}{dx} \cos \omega t \cos k_3$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = -k \frac{d\hat{V}_x}{dx} \cos \omega t \sin k_3$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = -k^2 \frac{d\hat{V}_x}{dx} \cos \omega t \cos k_3 \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\partial V_x}{\partial \hat{x}} \right) = -k^2 \hat{V}_3 \cos \omega t \sin k_3$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial \hat{x}} \right) = -k^3 \hat{V}_3 \cos \omega t \cos k_3 \quad (8)$$

(b), (7) 代入 (4-2)

$$-\omega^2 k \hat{V}_3 \cos \omega t \cos k_3 = C_0^2 \left(-k^2 \frac{d\hat{V}_x}{dx} - k^3 \hat{V}_3 \right) \cos \omega t \cos k_3$$

$$(\omega^2 - k^2 C_0^2) \hat{V}_3 = k C_0^2 \frac{d\hat{V}_x}{dx} \quad (9)$$

将 $\frac{\partial V_x}{\partial x}$, $\frac{\partial V_x}{\partial \hat{x}}$ 代入 (4-1) 式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Delta &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial \hat{x}} \right) \\ &= -\omega \frac{d\hat{V}_x}{dx} \sin \omega t \cos k_3 - \omega k \hat{V}_3 \sin \omega t \cos k_3 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta = -\omega^2 \frac{d\hat{V}_x}{dx} \cos \omega t \cos k_3 - \omega^2 k \hat{V}_3 \cos \omega t \cos k_3 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial \hat{x}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial \hat{x}} \right) \\ &= \frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3} \cos \omega t \cos k_3 + k \frac{d^2 \hat{V}_3}{dx^2} \cos \omega t \cos k_3 - k^2 \frac{d\hat{V}_x}{dx} \cos \omega t \cos k_3 \\ &\quad - k^3 \hat{V}_3 \cos \omega t \cos k_3 \\ &= \left(\frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3} + k \frac{d^2 \hat{V}_3}{dx^2} - k^2 \frac{d\hat{V}_x}{dx} - k^3 \hat{V}_3 \right) \cos \omega t \cos k_3 \quad (11) \end{aligned}$$

$$\Delta - \bar{\Gamma} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial V_x}{\partial \hat{x}}$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla^2(\Delta - \vec{V}) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial V_y}{\partial x} \\
 &= \frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3} \cos \omega t \cos k_3 - k^2 \frac{d \hat{V}_x}{dx} \cos \omega t \cos k_3 \\
 &= \left(\frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3} - k^2 \frac{d \hat{V}_x}{dx} \right) \cos \omega t \cos k_3
 \end{aligned} \tag{12}$$

(10), (11), (12) 代入 (4-1): 由上式得 $\cos \omega t \cos k_3$

$$-\omega^2 \frac{d \hat{V}_x}{dx} - \omega^2 k \hat{V}_y = C_0^2 \left(\frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3} + k \frac{d^2 \hat{V}_x}{dx^2} - k^2 \frac{d \hat{V}_x}{dx} - k^3 \hat{V}_y \right) + V_A^2 \left(\frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3} - k^2 \frac{d \hat{V}_x}{dx} \right) \tag{13}$$

$$\text{由 (9) 式 得 } \hat{V}_y = \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{d \hat{V}_x}{dx} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d \hat{V}_y}{dx} &= \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{d^2 \hat{V}_x}{dx^2} \\
 \frac{d^2 \hat{V}_y}{dx^2} &= \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3}
 \end{aligned} \tag{15}$$

(14), (15) 代入 (13) 式:

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \frac{d \hat{V}_x}{dx} - \omega^2 k \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{d^2 \hat{V}_x}{dx^2} &= C_0^2 \left(\frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3} + k \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3} - k^2 \frac{d \hat{V}_x}{dx} - k^3 \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{d \hat{V}_x}{dx} \right) \\
 &\quad + V_A^2 \left(\frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3} - k^2 \frac{d \hat{V}_x}{dx} \right) \\
 &= \left(C_0^2 + \frac{k^2 C_0^4}{\omega^2 - k^2 C_0^2} + V_A^2 \right) \frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3} - \left(C_0^2 k^2 + \frac{k^4 C_0^4}{\omega^2 - k^2 C_0^2} + k^2 V_A^2 \right) \frac{d \hat{V}_x}{dx} \\
 &\left(k^2 C_0^2 + \frac{k^4 C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} + k^2 V_A^2 - \omega^2 - \omega^2 \frac{k^2 C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \right) \frac{d \hat{V}_x}{dx} = \left(C_0^2 + \frac{k^2 C_0^4}{\omega^2 - k^2 C_0^2} + V_A^2 \right) \frac{d^3 \hat{V}_x}{dx^3}
 \end{aligned}$$

由上式得 $\frac{d \hat{V}_x}{dx}$ 不为零，说明分布数为零。

$$\left[\omega^2 C_0^2 + (\omega^2 - k^2 C_0^2) V_A^2 \right] \frac{d^2 \hat{V}_x}{dx^2} = \left(\omega^2 k^2 C_0^2 + \omega^2 k^2 V_A^2 - k^4 C_0^2 V_A^2 - \omega^4 \right) \hat{V}_x$$

$$\frac{d^2 \hat{V}_x}{dx^2} - m_0^2 \hat{V}_x = 0 \tag{16}$$

$$m_0^2 = \frac{(k^2 C_0^2 - \omega^2)(k^2 V_A^2 - \omega^2)}{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)} \tag{17}$$

1. 方程(16)是对于磁通管推出的，也可应用于无源区。对于无源区，

寻求平面波解 e^{ikx} , (16) 式变为 $k^2 + m_0^2 = 0$, 将(7)式代入

$$k_0^2 + \frac{(k^2 C_0^2 - \omega^2)(k^2 V_A^2 - \omega^2)}{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)} = 0$$

$$\text{整理后得: } \omega^4 - (k^2 + \lambda^2)(C_0^2 + V_A^2)\omega^2 + k^2(k^2 + \lambda^2)C_0^2 V_A^2 = 0 \quad (18)$$

这是磁声色散方程。

管道(tube speed) C_T 是 $1/\sqrt{k^2 + \lambda^2}$ 方向传播(磁声波)的群速。

2. 对于磁通管 $|x| < x_0$, 由解(16)式,

$$\hat{V}_x = A_1 e^{m_0 x} + A_2 e^{-m_0 x}$$

当 $x \rightarrow 0$ (管道上), 有 $\hat{V}_x \rightarrow 0$, $\therefore A_1 = -A_2$

$$\begin{aligned} \hat{V}_x &= A_1 \left(e^{m_0 x} - e^{-m_0 x} \right) \\ &= \frac{A_1}{2} \sinh m_0 x \\ &= A_0 \sinh m_0 x \end{aligned} \quad (8.97)$$

$$A_0 = \frac{1}{2} A_1 \text{ 不变}.$$

假设未耗散的扰动以扰动速度 V_e 为形式传播, 磁通管半径为 R_e . 可用提高压力来表示 $\delta P_e = \frac{1}{2} \rho_e V_e^2 \sin \omega t \cos k\delta$, 作用于管道, 即也行。

在巴克利管内, 外加力平衡, $P_e = P_0 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0^2$

$$\begin{aligned} \text{受扰动时, } P_e + \hat{P}_e &= P_0 + \hat{P} + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0^2 \left(1 + \frac{\vec{b}}{\vec{B}_0} \right)^2 \\ &= P_0 + \hat{P} + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \vec{b} \\ &= P_0 + \hat{P} + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \hat{b}_3 \quad (\because \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0 \vec{b}_3) \end{aligned}$$

$$\hat{P}_e = \hat{P} + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \hat{b}_3$$

(注意: 已耗散及 \vec{b}, P, \hat{P} 均为扰动量.) 上式可写为 $P_e = P + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \vec{b}_3$

见上 Roberts 第 10 式。

(Roberts, 1979, Solar Phys., 61, 23-34)

P 和 b_2 的形式已列于(5-3), (5-4). 现将方程 $\hat{P}(x, b_2(x))$ 予以表达式.

$$\text{运动方程 } \rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla(P_0 + \frac{1}{2\mu} \vec{B}_0^2) + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \nabla \vec{B}_0 \quad (2. \text{ 计重力})$$

1. 扰动线性化方程. 设 $\vec{V}_0 = 0$.

$$(P_0 + P_1) \left(\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \nabla \vec{V}_1 \right) = -\nabla(P_1 + P_1 + \frac{1}{2\mu} (\vec{B}_0 + \vec{b})^2) + \frac{1}{\mu} (\vec{B}_0 + \vec{b}) \cdot \nabla (\vec{B}_0 + \vec{b})$$

以下列事实: ① 平衡磁场 $\vec{B}_0 = B_0 \vec{z}$ 为均匀磁场, $\nabla \vec{B}_0 = 0$

② 第二项“ \vec{b} ”为扰动量, \vec{b} 为扰动场

③ 方程(7) (Roberts 文中(7)式) 描述的是管内的运动, 是同外部的感应场无关的. 例如这一种扰动运动, (7)和(5)式的关系应该是一扰动运动的形式相同. 可以乘高扰动量.

$$\text{于是我们有 } \rho_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\nabla(P_1 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \vec{b}_2) + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \nabla \vec{b}_2$$

$$\text{写成分量式: } \rho_0 \frac{\partial V_{1x}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (P_1 + \frac{1}{\mu} B_0 b_2) + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial b_2}{\partial z} \quad (18)$$

$$\rho_0 \frac{\partial V_{1y}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} (P_1 + \frac{1}{\mu} B_0 b_2) + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial b_2}{\partial x} \quad (19)$$

将(5)式代入

$$(18) \rightarrow: -\rho_0 \omega \hat{V}_{1x}(x) \sin \omega t \cos k_2 = -\frac{\partial \hat{P}(x)}{\partial x} \sin \omega t \cos k_2 - \frac{1}{\mu} B_0 \frac{\partial \hat{b}_2(x)}{\partial x} \sin \omega t \cos k_2 + \frac{1}{\mu} B_0 k \hat{b}_2(x) \sin \omega t \cos k_2 \quad (20)$$

$$(19) \rightarrow: -\rho_0 \omega \hat{V}_{1y}(x) \sin \omega t \sin k_2 = k \hat{P}(x) \sin \omega t \sin k_2 + \frac{1}{\mu} k \hat{b}_2(x) \sin \omega t \sin k_2 - k \frac{1}{\mu} B_0 \hat{b}_2(x) \sin \omega t \sin k_2 \quad (21)$$

(20), (21) 整理后:

$$\begin{cases} -\rho_0 \omega \hat{V}_{1x}(x) = -\frac{d \hat{P}(x)}{dx} - \frac{B_0}{\mu} \frac{d \hat{b}_2(x)}{dx} + \frac{B_0}{\mu} k \hat{b}_2(x) \\ -\rho_0 \omega \hat{V}_{1y}(x) = k \hat{P}(x) \end{cases} \quad (22)$$

$$-\rho_0 \omega \hat{V}_{1y}(x) = k \hat{P}(x) \quad (23)$$

$$\text{由(23)得: } \hat{P}(x) = -\frac{\omega}{k} \rho_0 \hat{V}_{1y}(x)$$

$$\text{由(14)式得} \hat{V}_x = \frac{kC_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{d\hat{V}_x}{dx}, \quad \hat{V}_x \text{由(8.97)表示. } \hat{V}_x = A_0 \sinh mx$$

$$\begin{aligned} \text{代入上式 } \hat{P}_{xx} &= -\frac{\omega P_0}{k} \frac{kC_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} m_0 A_0 \cosh mx \\ &= -\omega P_0 \frac{C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} m_0 A_0 \cosh mx \end{aligned} \quad (24)$$

再寻找 $\hat{b}_y(x)$ 的表达式

$$\text{对于理想流体, 感应方程 } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\rightarrow \text{运动线性化后. } \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_i \times \vec{b}_0)$$

因为 \vec{B}_0 垂直于 \vec{v}_i , $\therefore \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{B}_0 = 0$. 理想流体无压缩流体

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} &= (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_i - \vec{B}_0 \nabla \cdot \vec{v}_i \\ &= B_0 \frac{\partial}{\partial z} \vec{v}_i - \left(\frac{\partial V_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial V_{iz}}{\partial z} \right) B_0 \vec{e}_0 \end{aligned}$$

分离成分量式

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = B_0 \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = B_0 \frac{\partial V_z}{\partial z} - B_0 \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

[2] (5) 式代入:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \hat{b}_x(x) \cos \omega t \sin k z = -k B_0 \hat{V}_x(x) \cos \omega t \sin k z \\ \omega \hat{b}_z(x) \cos \omega t \cos k z = k B_0 \hat{V}_z(x) \cos \omega t \cos k z - B_0 \frac{d \hat{V}_x(x)}{dx} \cos \omega t \cos k z \\ \qquad \qquad \qquad - k B_0 \hat{V}_x(x) \cos \omega t \cos k z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \hat{b}_x(x) = -k B_0 \hat{V}_x(x) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \hat{b}_z(x) = k B_0 \hat{V}_z(x) - B_0 \frac{d \hat{V}_x(x)}{dx} - k B_0 \hat{V}_x(x) \\ \qquad \qquad \qquad = -B_0 \frac{d \hat{V}_x}{dx} \end{array} \right.$$

(8.97) 式代入:

$$\hat{b}_g(x) = -\frac{\partial \sigma}{\omega} A_{0m} \cosh m_0 x \quad (25)$$

$$\text{于是 } \hat{P} + \frac{1}{\mu} B_0 \hat{b}_g = -\omega \rho_0 \frac{C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} A_{0m} \cosh m_0 x - \frac{B_0^2}{\mu \omega} A_{0m} \cosh m_0 x \\ = -\rho_0 \frac{\omega^2 C_0^2 + V_A^2 (\omega^2 - k^2 C_0^2)}{(\omega^2 - k^2 C_0^2) \omega} A_{0m} \cosh m_0 x$$

$$= -\rho_0 \frac{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)}{(k^2 C_0^2 - \omega^2) \omega} A_{0m} \cosh m_0 x$$

$$P + \frac{1}{\mu} B_0 b_g = -\rho_0 \frac{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)}{(k^2 C_0^2 - \omega^2) \omega} A_{0m} \cosh m_0 x \sin \omega t \cos k_3 \quad (26)$$

边界上 $x = \pm x_0$, (26) 式 应等于零, 因为 $\delta P_e(x \pm) = \frac{1}{2} \rho_e U_e^2 \sin \omega t \cos k_3$

P_e : 风速; U_e : 流流速; ω , k 由前引条件决定。
决定壳体上产生的典型频率为 ω ($\approx 0.02 s^{-1}$), k 为流动半径 (1.5 m)
假设。

$$\left[P + \frac{1}{\mu} B_0 b_g \right]_{x=\pm x_0} = \delta P_e \Big|_{x=\pm x_0}$$

$$-\rho_0 \frac{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)}{(k^2 C_0^2 - \omega^2) \omega} A_{0m} \cosh m_0 x_0 = \frac{1}{2} \rho_e U_e^2$$

因此可得 \hat{V}_g 沿水平方向 (\vec{x}_0) 速度 V_x 为 $\frac{1}{2} \rho_e U_e^2 \hat{V}_x(x)$ 。

$$A_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_e}{\rho_0} \right) \frac{\omega(k^2 C_0^2 - \omega^2)}{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)} \cdot U_e^2 \frac{1}{m_0 \cosh m_0 x_0}$$

$$V_g = \hat{V}_g(x) \cos \omega t \sin k_3, \text{ 将 (14) 式代入}$$

$$V_g = \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{d \hat{V}_x}{dx} \cos \omega t \sin k_3, \text{ 且有 } \hat{V}_x = A_0 \sinh m_0 x \propto \lambda$$

$$V_g = \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} A_{0m} \cosh m_0 x \cos \omega t \sin k_3$$

$$= \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \cdot \frac{\omega(k^2 C_0^2 - \omega^2)}{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{\rho_e}{\rho_0} \right) U_e^2 \frac{\cosh m_0 x}{\cosh m_0 x_0} \cdot \cos \omega t \sin k_3$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_e}{\rho_0} \right) U_e^2 \frac{k \omega C_0^2}{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)} \cdot \frac{\cosh m_0 x}{\cosh m_0 x_0} \cos \omega t \sin k_3$$

在不考虑重力的条件下 $x=0$, 有

$$\frac{V_g(x=0)}{C_T} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_0}{P_0} \right) \left(\frac{U_0}{V_A} \right)^2 \cdot \frac{k \omega C_0^2 V_A^2}{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2) \cdot C_T} \cdot \frac{1}{\cosh m_0 x_0} \cos \omega t \sin k_0 y$$

$$\cosh m_0 x_0 = 1$$

$$\therefore f(k) = \frac{\omega k C_T}{(k^2 C_T^2 - \omega^2) \cosh m_0 x_0}$$

$$V_g(x=0) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_0}{P_0} \right) \left(\frac{U_0}{V_A} \right)^2 C_T f(k) \cos \omega t \sin k_0 y \quad (27)$$

3 | λ 在 \mathbb{R} 上的解

$$\kappa = \frac{k C_T}{\omega}, \quad a = \frac{\omega x_0}{C_T}, \quad \lambda = \frac{C_0^2}{V_A^2}, \quad \beta_0 = m_0 x_0$$

$$f(k) \text{ 变为 } f(\kappa) = \frac{\kappa}{(\kappa^2 - 1) \cosh \beta_0} \quad (28)$$

由(7)得 (28.96) 的

$$m_0^2 = \frac{(k^2 C_0^2 - \omega^2)(k^2 V_A^2 - \omega^2)}{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)}$$

$$\tilde{\beta}_0^2 = m_0^2 x_0^2$$

$$= m_0^2 \frac{C_T^2}{\omega^2} a^2$$

$$= \frac{(k^2 C_0^2 - \omega^2)(k^2 V_A^2 - \omega^2)}{(k^2 C_T^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)} \cdot \frac{C_0^2 V_A^2}{C_0^2 + V_A^2} \cdot \frac{a^2}{\omega^2}$$

$$= \frac{\omega^2 \left(\frac{k^2}{C_0^2} C_0^2 - 1 \right) \omega^2 \left(\frac{k^2}{V_A^2} V_A^2 - 1 \right)}{\omega^4 (k^2 - 1) (C_0^2 + V_A^2)^2} \cdot C_0^2 V_A^2 a^2$$

$$= \frac{\left(\frac{k^2}{C_T^2} C_0^2 - 1 \right) \left(\frac{k^2}{C_T^2} V_A^2 - 1 \right) C_0^2 V_A^2}{(k^2 - 1) (C_0^2 + V_A^2)^2} a^2$$

$$= \frac{\left(k^2 - \frac{V_A^2}{C_0^2 + V_A^2} \right) \left(k^2 - \frac{C_0^2}{C_0^2 + V_A^2} \right)}{k^2 - 1} a^2$$

$$= \frac{\left(k^2 - \frac{1}{1+\lambda} \right) \left(k^2 - \frac{1}{1+\lambda} \right)}{k^2 - 1} a^2 \quad (29)$$

$f(k)$ 与 λ 有关: a 磁通管的无量纲半径, 入声速 U 和速度 v .
 $f(k)$ 有一极大值, 从简单的数学逻辑不易得到. 我们从物理上考虑.
 若 $\delta = 0 \text{ 且 } a = 0$ 时开始于庄·磁通管, 我们期望 $\delta > 0$, 有上升流动,
 $\delta < 0$ 有向下的流动, 将 $a = 0$, $\delta > 0$ 和 $\delta < 0$ 分别代入(27)式, 可知 $f(k)$ 必
 经为 0, 也即要求 $(k^2 - 1) \cosh \delta_0 > 0$

光球上的强磁通管的典型条件是 $\lambda = 1$, 即 $C_0 = 1/4$. (29) 式简化为

$$\delta_0^2 = \frac{(k^2 - \frac{1}{2})^2 a^2}{k^2 - 1}$$

$$13|1. \quad \delta_0^2 > 0 \quad (13\text{题: } \delta_0 = m\lambda, \text{ 且有 } \delta_0 \neq 0) \quad \text{即 } C_0 \rightarrow \frac{\omega}{k} \text{ (假设)} \\ \text{若 } k > 1, \text{ 即 } \omega < kC_0, \text{ 则 } \delta_0^2 > 0. \quad \text{若 } k < 1, \text{ 有 } \cosh \delta_0 \rightarrow \infty$$

$f(k) \rightarrow 0$, (cosh δ_0 像指函数型, 上升快)

若 $k \rightarrow \infty$ 时, $f(k) \rightarrow 0$.

$f(k)$ 必大于零, 且当 $k=1$ 时

必有一极大值.

$$(28) \text{ 式} \quad f(k) = \frac{k}{(k^2 - 1) \cosh \delta_0}$$

$$(30) \text{ 式} \quad \delta_0^2 = \frac{(k^2 - \frac{1}{2})^2 a^2}{k^2 - 1}$$

可求得 $f(k)$ 的极大值 f^{\max} (13题: 已知 k 的值). 对于细磁通管
 $a \ll 1$, 若 $k \approx 1 + U^2 a^2$ 时, $f = f^{\max} \approx \frac{(1 - 16 U^2)^{1/2}}{a^2 U^2}$

$$U \approx 0.24 \text{ 时 } \tanh(\frac{1}{2U}) = 4U \approx 0.01.$$

$f(k)$ 的极大值随着管径 a 而增大.

无效 无效

$$13|2. \quad \delta_0^2 < 0$$

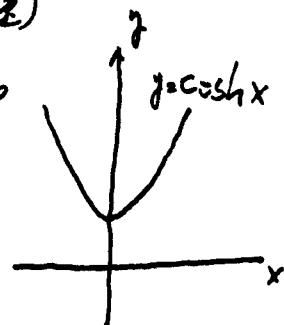
若 $0 < k < 1$, 有 $\delta_0^2 < 0$ (对 $\lambda = 1$)

当 $a \rightarrow 0$, 即使 $k \rightarrow 1$, $f(k) \rightarrow \infty$

$$\delta_0^2 = \frac{(k^2 - \frac{1}{2})^2 a^2}{k^2 - 1} < 0$$

$$\hat{\delta}_0^2 = -\delta_0^2 = \frac{(k^2 - \frac{1}{2})^2 a^2}{1 - k^2}$$

$$\cosh \delta_0 = \cosh(i \hat{\delta}_0) = \cos \hat{\delta}_0$$



$$f(k) = -\frac{k}{(1-k^2)\cos \hat{\theta}_0} \hat{y}_0$$

$\Rightarrow k \rightarrow 1$ ($0 < k < 1$). $|f(k)| \rightarrow \infty$, 而且 $k \cos \hat{\theta}_0 \approx 0$. $|f(k)| \rightarrow \infty$, 即

$$\hat{y}_0 \cdot \frac{(k^2 - \frac{1}{2})^2 a^2}{1 - k^2} = (2N+1)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\frac{(k^2 - \frac{1}{2})^2}{1 - k^2} = (2N+1) \cdot \frac{\pi^2}{4a^2} \quad N=0, 1, 2 \dots$$

即 $|f(k)| \rightarrow \infty$ 有无穷多解.

我们取 $k > 1$, $\hat{y}_0 > 0$ 为具体情况.

讨论:

1. 外界的运动和流动有可能驱动破通过管内的垂直流动, 流动的幅值对管道的半径很敏感, 而且依赖于外界驱动压力波的相速度 c_T . 当外界作用的波速和相速 $\omega \approx c_T$ (高速) 时, 没有大附加流动. 像如 ω 已经给定 (由外界条件确定). 外界的压力 (系数 ω , 以及数 k) 对管内流动, 将有选择地放大. 管子越长, V_x 的量 (系数) 越越大. 无壁流动破通过管的典型条件下, 有 $C_0 = V_A$. 可求得 $C_T = \frac{1}{\sqrt{2}} C_0$, $k \approx \sqrt{\omega}$. 高速 $C_0 = 9 \text{ km s}^{-1}$, $\omega = 0.02 \text{ s}^{-1}$. 得 $k = 3.1 \times 10^3 \text{ km}^{-1}$ (长度约 2000 km).

2. 所有的讨论是在线性模型的框架内. 在上面讨论中忽略大速度流动产生的非线性效应非常重要. 线性假设意味着 $\hat{V}_3, k \ll \beta_0$. 从(25)式可得 $|\frac{\hat{b}_3}{\beta_0}| = |\frac{A_0 m_0 \cosh mx}{\omega}|$, 由(14)式 $\hat{V}_3 = \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{dV_x}{dx}$,

$$\hat{V}_x = A_0 \sinh mx, \therefore \hat{V}_3 = \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} A_0 m_0 \cosh mx, \text{ 且 } A_0 m_0 \cosh mx = \frac{\omega^2 - k^2 C_0^2}{k C_0^2} \hat{V}_3.$$

$$\text{代入 } |\frac{\hat{b}_3}{\beta_0}| = \left| \frac{(k^2 C_0^2 - \omega^2) \hat{V}_3}{k C_0^2 \omega} \right| \ll 1. \text{ 该式也可化为 } \frac{C_0^2 \frac{m_0}{\omega}}{C_0^2 \frac{\omega}{k}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}{\frac{\omega^2}{k^2}} \frac{1}{C_0^2}.$$

$$\therefore \hat{V}_3 \ll \left| \frac{\frac{\omega}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{k^2} \frac{1}{C_0^2}} \right| \quad \text{参考参数 } k = 3.1 \times 10^3, \omega = 0.02 \text{ s}^{-1}, \frac{\omega^2}{k^2} \frac{1}{C_0^2} \ll 1$$

$\frac{\omega}{k} = C_0$ (假设). \therefore 此 \hat{V}_3 为线性近似.

因此线性假设也要求 $\frac{V_{\infty}}{L} \ll \frac{\omega}{L}$, 即流动发展的条件是 $\omega \ll C_T$.
所以线性理论有这个条件是 $\frac{V_{\infty}}{L} \ll C_T$. 当此耗散效应也会影响
共轭. 很可能因此理由 $f(x)$ 成为无穷大. 为使线性模型确实表明. 共
轭之外部很适合地的高速的垂直流动.

3. 高速流动的发展可被度量微波

4. 光球上垂直方向流动的速度. 可能发展为色球上观测到的针状体.
由恒定驱动产生的共轭守恒垂直流动仅产生针状体之起始
流动 (seed-flow)

5. 当外界气体密度和压力随高度下降. 强磁通管将发散. 直到与附近
磁通管的磁力线相遇. 见下图.

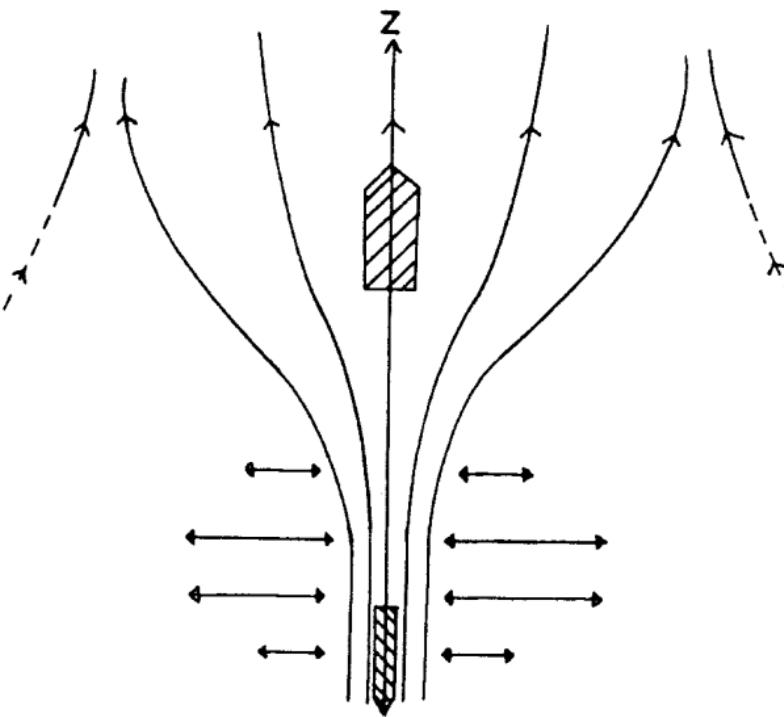


Fig. 3. A sketch of the possible geometry of an intense flux tube in the Sun. The figure shows the expansion of the tube above the photosphere, where the turbulent pumping (indicated by \leftrightarrow) of the granules drives a flow up the tube in $z > 0$ and down the tube in $z < 0$.

8.7.4 管波 (Tube waves)

管道通常为壳体和轴取之间热交换的有效通道，特别是
流动的自然通道。不过这些均与介质有很多种形式化这种并非
简单的流动中传播。

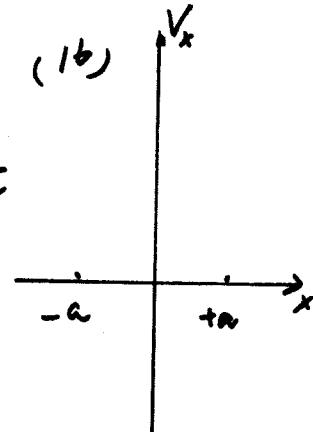
对于二维 (x, θ) 扰动，即：令速度分量 V_x 及波数 k (ηk_θ) 为零。

$$V_x(x) = \hat{V}_x(x) e^{i(\omega t + k_\theta)} \quad , \quad \text{可已求得(1b)式} \quad (\text{见 8.7.3 节})$$

$$\frac{d^2 \hat{V}_x}{dx^2} - m_0^2 \hat{V}_x = 0 \quad (|x| < a) \quad (1b)$$

$$\text{式中 } m_0^2 = \frac{(k C_0^2 - \omega^2)(k \sqrt{\lambda} - \omega^2)}{(C_0^2 + \lambda^2)(k C_1^2 - \omega^2)} \quad , \quad C_1^2 = \frac{C_0^2 \lambda^2}{C_0^2 + \lambda^2}$$

考虑规范化方向的扰动。



m_0^2 可以认为是负数。

$$\hat{V}_x = A_1 e^{m_0 x} + A_2 e^{-m_0 x}$$

高阶 (参见 8.17.a) 的边界条件： $\hat{V}_x(x)$ 和 $\hat{V}'_x(x)$ 在 $x = \pm a$ 处连续。
 $x = \pm \infty$ ，扰动消失。产生于管壁的波（即管内、管外、毛细管）在
高阶之外，随 $|x|$ 增加逐渐消失。

1. 对于奇函数 (腊肠型)

当 $x \rightarrow 0$ ，有 $\hat{V}_x \rightarrow 0$

$$\therefore A_1 = -A_2 = A'$$

$$\begin{aligned} \text{管内 (即管内)} \quad \hat{V}_x &= A' (e^{m_0 x} - e^{-m_0 x}) \\ &= A_0 \sinh m_0 x \end{aligned}$$

$A_0 = 2A'$ 得定。 $\sinh m_0 x$ 为奇函数。

① 在 $x > a$ 的区域，当 $x \rightarrow \infty$ ， $\hat{V}_x \rightarrow 0$ 。作为

$$\hat{V}_x = B e^{-m_0 x}$$

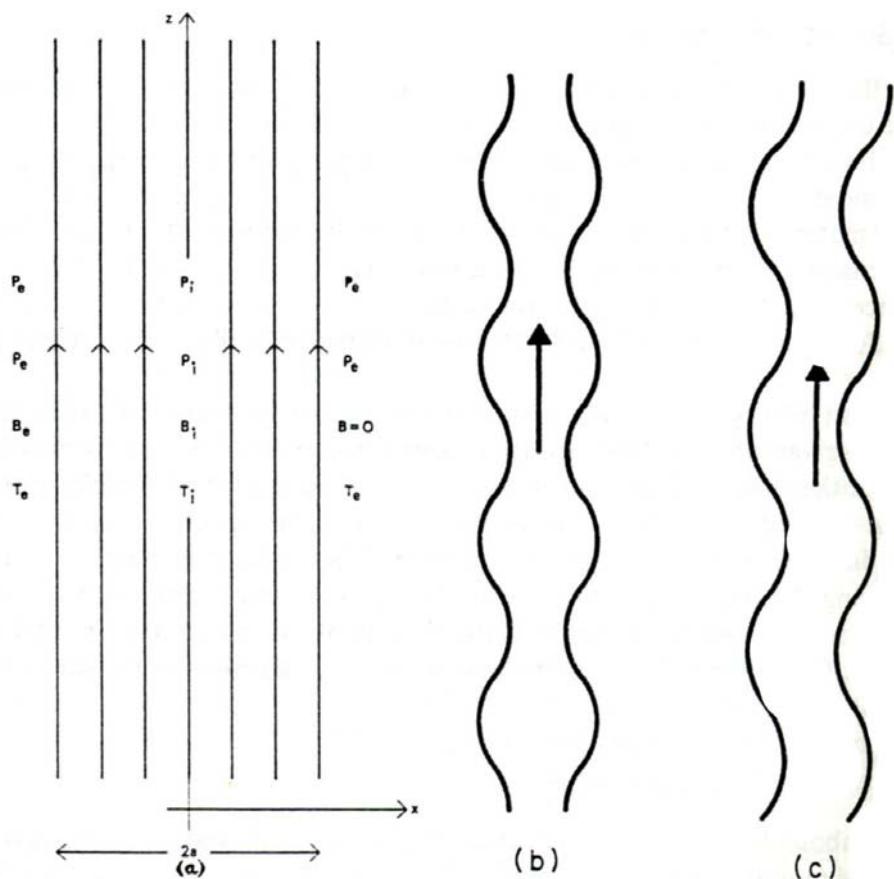


Fig. 8.17. (a) A magnetic slab surrounded by a field-free medium. (b) A sausage mode disturbance travelling along the tube. (c) A kink mode.

$$\text{若 } x=a \text{ 时}, A_0 \sinh m_0 a = B e^{-m_0 a}$$

$$B = \frac{A_0 \sinh m_0 a}{e^{-m_0 a}}$$

$$\text{若 } x \geq a \text{ 时}, \hat{V}_x(x) = A_0 \frac{\sinh m_0 a}{e^{-m_0 a}} e^{-m_0 x}$$

2) 若 $x < -a$ 时, $x \rightarrow -\infty, \hat{V}_x \rightarrow 0$. 得

$$\hat{V}_x = B' e^{m_0 x}$$

$$\text{若 } x=-a \text{ 时}, -A_0 \sinh m_0 a = B' e^{-m_0 a}$$

$$B' = -A_0 \frac{\sinh m_0 a}{e^{-m_0 a}}$$

$$\hat{V}_x = -A_0 \frac{\sinh m_0 a}{e^{-m_0 a}} \cdot e^{m_0 x}$$

3. 壁面附近内部总压

$$\hat{P} + \frac{1}{\rho} \hat{B}_0 \hat{b}_y(x) = -P_0 \frac{(k^2 C_0^2 - \omega^2)(C_0^2 + V_A^2)}{(k^2 C_0^2 - \omega^2)\omega} A_0 m_0 \cosh m_0 x \quad (8.7.3 \text{ 附录}(26') \text{ 式})$$

$$= -A_0 P_0 \frac{1}{m_0} \frac{1}{\omega} (k^2 C_0^2 - \omega^2) \cosh m_0 x$$

(将 m_0 表达式代入(26')即可)

现代换(8.7.3). (8.7.4) 式得 \hat{P}_e . 由上节(23), (24) 式得

$$\hat{P} = -\frac{P_0 \omega}{k} \hat{V}_y(x) = -\frac{P_0 \omega}{k} \frac{k C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \cdot \frac{d \hat{V}_y}{dx}$$

$$\text{若 } x < -a \text{ 时有 } \hat{V}_y(x), P_0 \rightarrow P_e, C_0 \rightarrow C_e, \omega^2 \rightarrow m_e^2 = \frac{k^2 C_e^2 - \omega^2}{C_e^2}$$

$$\hat{V}_y \rightarrow \hat{V}_x = -A_0 \frac{\sinh m_0 a}{e^{-m_0 a}} e^{m_0 x} \quad (x < -a)$$

$$\therefore \hat{P}_e = -\frac{P_0 \omega}{k} \frac{k C_e^2}{\omega^2 - k^2 C_e^2} \left(-A_0 \frac{\sinh m_0 a}{e^{-m_0 a}} \right) m_e e^{m_e x}$$

$$= A_0 \frac{\sinh m_0 a}{e^{-m_0 a}} P_0 \omega m_e e^{m_e x} \cdot \frac{C_e^2}{\omega^2 - k^2 C_e^2} \cdot m_e^2 \cdot \frac{1}{m_e}$$

$$\hat{P}_e = -A_0 \frac{\sinh m_0 a}{e^{-m_0 a}} \rho_e \omega \cdot \frac{1}{m_e} e^{m_0 x} \quad (x < -a)$$

$$\hat{P}_e = -A_0 \frac{\sinh m_0 a}{e^{-m_0 a}} \rho_e \omega \frac{1}{m_e} e^{-m_0 x} \quad (x > a)$$

$x=a$ 处, 内力连续.

$$-A_0 \frac{\sinh m_0 a}{e^{-m_0 a}} \frac{\rho_e \omega}{m_e} e^{-m_0 a} = -A_0 \rho_0 \frac{1}{m_0 \omega} (k^2 \nu_h^2 - \omega^2) \cosh m_0 a$$

$$(k^2 \nu_h^2 - \omega^2) m_e = \frac{\rho_e}{\rho_0} \omega^2 m_0 \tanh m_0 a \quad (8.98a)$$

2. 1阶出数(扭折 kink 型)

对 j(16) 式设 if $\hat{V}_x = A_1 e^{m_0 x} + A_2 e^{-m_0 x}$ 且取 $x=0$ 为定常数. 利用管壁

条件. 为 $x=a$ 时 $\hat{V}_x^+ = A_1 e^{m_0 a} + A_2 e^{-m_0 a}$

$x=-a$ 时, $\hat{V}_x^- = A_1 e^{-m_0 a} + A_2 e^{m_0 a}$

又得, $\hat{V}_x^+ = \hat{V}_x^-$

$$\begin{aligned} \text{二式相减: } 0 &= (A_1 - A_2) e^{m_0 a} + (A_2 - A_1) e^{-m_0 a} \\ &= (A_1 - A_2) (e^{m_0 a} - e^{-m_0 a}) \end{aligned}$$

$$\therefore A_1 = A_2 = A e'$$

$$\begin{aligned} \text{管内: } \hat{V}_x &= A e' (e^{m_0 x} + e^{-m_0 x}) \\ &= A e \cosh m_0 x \quad (\text{此为1阶出数}) \end{aligned}$$

$$\hat{P} = -\frac{\rho_0 \omega}{R} \hat{V}_x(x) = -\rho_0 \omega \frac{C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{\partial \hat{V}_x}{\partial x}$$

$$= -\rho_0 \omega \frac{C_0^2}{\omega^2 - R^2 C_0^2} A e m_0 \sinh m_0 x$$

$$\hat{b}_3 = -\frac{B_0}{\omega} \frac{\partial \hat{V}_x}{\partial x} \quad (\text{见书 P.125})$$

$$= -\frac{B_0}{\omega} A e m_0 \sinh m_0 x$$

薄层内总压力

$$\hat{P} + \frac{1}{\mu} B_0 \hat{b}_3 = - P_0 \omega \frac{C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} A e^{m_0 x} \sinh m_0 x - \frac{1}{\mu} \frac{P_0}{\omega} A e^{m_0 x} \sinh m_0 x$$

外部压力

$$\hat{P}_e = - P_0 \omega \frac{C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} \frac{\partial}{\partial x} (B_0 e^{-m_0 x})$$

$$= - P_0 \omega \frac{C_0^2}{\omega^2 - k^2 C_0^2} (-m_0) A e \frac{\cosh m_0 a}{e^{-m_0 a}} e^{-m_0 x}$$

$$m_0^2 = \frac{k^2 C_0^2 - \omega^2}{C_0^2}, \text{代入}$$

$$\hat{P}_e = - P_0 \omega \frac{1}{m_0} A e \frac{\cosh m_0 a}{e^{-m_0 a}} e^{-m_0 x}$$

边界上 $x=a$, 压力连续

$$\hat{P} + \frac{1}{\mu} B_0 \hat{b}_3 = \hat{P}_e$$

$$- A e^{m_0 a} \sinh m_0 a \cdot P_0 \left[\frac{\omega C_0}{\omega^2 - k^2 C_0^2} + \frac{V_A}{\omega} \right] = - P_0 \omega \frac{1}{m_0} A e \frac{\cosh m_0 a}{e^{-m_0 a}} e^{-m_0 a}$$

$$(k^2 V_A - \omega^2) m_0 = \frac{P_0}{P_0} \omega^2 m_0 \coth m_0 a \quad (8.98 b)$$

对于第一例中的奇函数 $\hat{V}_x = A_0 \sinh m_0 x$, 当 $x=0$ 为定值数, 薄轴 ($x=0$) 保持不旋转时, 引起随着管道传播时, 也沿管道流动称为腊膜模式; 第二例中, 偶函数 $\hat{V}_x = A e \cosh m_0 x$, 当速度通过时, 薄轴旋转偏高平衡位置 $x=0$, 称为扭折 (kink) 模式 (见图 8.17 b)

管内	管外
\hat{V}_x 奇函数: $\hat{V}_x = A_0 \sinh m_0 x$	$\hat{V}_x = A_0 \sinh m_0 a \exp[-m_0(x-a)] \quad (x>a)$ $\hat{V}_x = -A_0 \sinh m_0 a \exp[m_0(x+a)] \quad (x<a)$
\hat{V}_x 偶函数: $\hat{V}_x = A e \cosh m_0 x$	$\hat{V}_x = A e \cosh m_0 a \exp[-m_0(x-a)] \quad (x>a)$ $\hat{V}_x = A e \cosh m_0 a \exp[m_0(x+a)] \quad (x<a)$

- i) 若 $m_0^2 > 0$, 壁外扰动 $V_x = \hat{V}_x \sin \omega t \cos kx \sim e^{\pm i \omega x} \sin \omega t \cos kx$
当 $x \rightarrow \pm \infty$, $\rightarrow e^{\mp i \omega x}$ 表示无界.
- ii) $m_0^2 < 0$, 则 $V_x = \hat{V}_x \sin \omega t \cos kx \sim e^{\mp i m_0 x} \cdot \frac{1}{2i} (e^{i \omega t} - e^{-i \omega t}) \cos kx$
 $\sim \sin(\omega t \mp m_0 x)$, 有纵向或者高开磁通管的波
- iii) 若 $m_0^2 = -n_0^2 < 0$ (管内), 则管内扰动为 $e^{i(\omega t + kx) \pm n_0 x}$, 表示
是管内波, 称为体波 (body waves). 有可能对耗散率高.
- iv) $m_0^2 > 0$, 则管内扰动为 $e^{i(\omega t + kx) \mp m_0 x}$. 表表面波 (surface waves)

磁通管外	磁通管内
$m_0^2 > 0$ 表面波	$m_0^2 > 0$ 表面波
$m_0^2 < 0$ X方向有波传播	$m_0^2 < 0$ 体波

- 更为一般的形式, 考虑 (16) 式, 应是 $\frac{d}{dx} \left[\frac{\epsilon(x)}{k^2 + m_0^2} \frac{d\hat{V}_x}{dx} \right] = \epsilon(x) \hat{V}_x$
 $\epsilon(x) = \rho_0(x) (\omega^2 - k^2 V_A^2)$, k 为波矢代数方向的投影分量.
 该方程的一个解是 $\hat{V}_x = 0$, 即 $\omega = k V_A$, 表示磁通管传播的
 Alfvén 波 (管外无磁场, 没有 Alfvén 波). (因为是均匀无扰动
 $(\epsilon(x) = 0)$ 是方程的解, 与扰动 V_x 无关) 但没有向外的运动. (因)
 此对于磁通管而言, 这种 Alfvén 波只将对应于扭曲 (torsional)
 Alfvén 波 (没有向外运动的分量). 其他的磁场有关的均为
 磁声波模式, 在可压缩流体中因此没有真正的 Alfvén 表面波.

- 在波数 k 下, $Ra \ll 1$, a 为磁通管半径

$$\tanh m_0 a = \frac{\sinh m_0 a}{\cosh m_0 a} \approx \frac{m_0 a}{1}$$

(8.98a) 归化为

$$(k^2 V_A^2 - \omega^2) m_0 = \frac{\rho_0}{\rho_0} \omega^2 m_0 a \quad (8.99)$$

• 当 ka 趋近于零, (8.99) 式有二个解

$$i, m_0 \rightarrow \infty, \omega = kC_T \quad (8.100)$$

由 m_0 表达式可知, 若 $\omega = kC_T$ 且 $m_0 \rightarrow \infty$ 称为管波 (tube wave) 或慢表面波 (slow surface wave)

$$ii, m_0 \rightarrow 0, \omega = kC_e \quad (8.101)$$

从 m_0^2 的表达式可以知道 $\omega = kC_e$ (C_e 为管外的速度.)

称为快波, 可称慢表面波, 也可称是体波, 取决于 m_0^2 的符号
(见 P.145 的表 P_m^2)

• $ka \ll 1$, 由 8.18 中另外的模式得到

i. 慢体波 (slow body waves)

对于椭圆型及 Kink 型都有
 $\omega = kC_T$

ii. 慢表面波 (slow surface waves)

对于 Kink 模式

$$\text{因为是 Kink 模式} \therefore (k^2 V_A^2 - \omega^2) m_e = \frac{\rho_e}{\rho_0} \omega^2 m_0 \coth m_0 a \quad (8.98b)$$

$$\coth m_0 a = \frac{e^{m_0 a} + e^{-m_0 a}}{e^{m_0 a} - e^{-m_0 a}} \approx \frac{1 + m_0 a + 1 - m_0 a}{1 + m_0 a - 1 + m_0 a} = \frac{1}{m_0 a}$$

$$(k^2 V_A^2 - \omega^2) m_e = \frac{\rho_e}{\rho_0} \omega^2 m_0 \cdot \frac{1}{m_0 a}$$

$$(k^2 V_A^2 - \omega^2) m_e \frac{\rho_e}{\rho_0} a = \omega^2$$

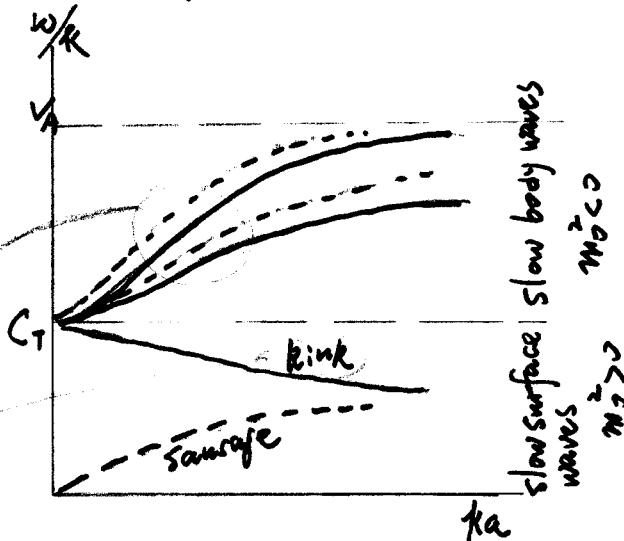
$$\therefore A = \frac{\rho_0}{\rho_e} a m_e$$

$$(k^2 V_A^2 - \omega^2) A = \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{k^2 V_A^2}{1+A} A \approx k^2 V_A^2 (1-A) \cdot A, \quad \because ka \ll 1, A \ll 1$$

$$\approx k^2 V_A^2 A = k^2 V_A^2 \frac{\rho_0}{\rho_e} m_e a$$

$$\therefore \text{若 } k \rightarrow 0, R \rightarrow 0, \text{ 则 } C_e = \frac{\omega}{k} \rightarrow \infty$$



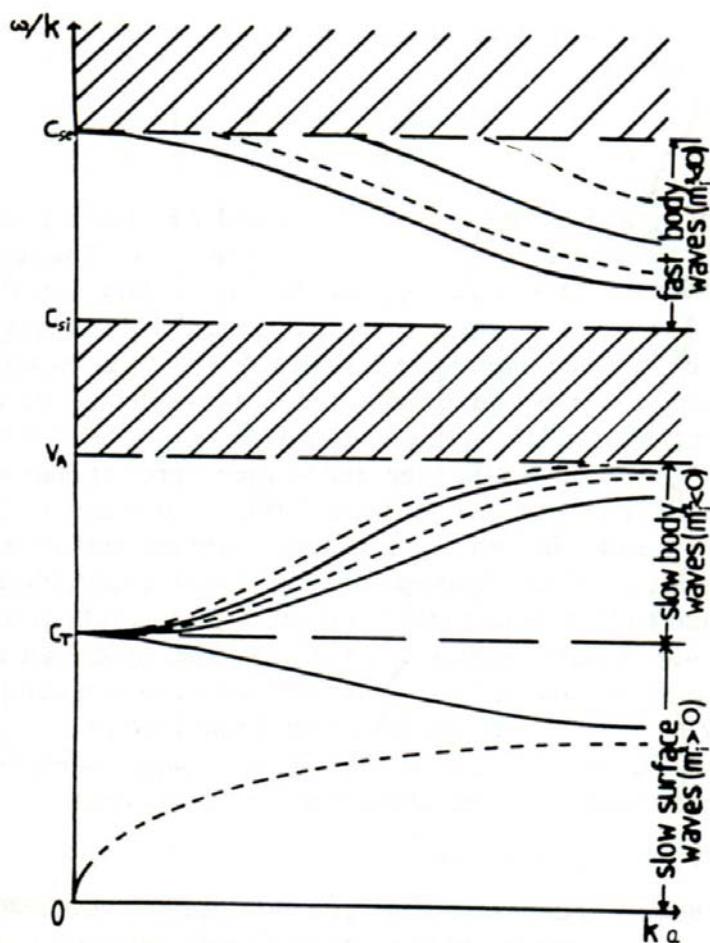


Fig. 8.18. The phase speed (ω/k) as a function of wavenumber (k) for 'tube' waves in a slab of width $2a$ when $c_{se} > c_{si} > v_A$. Sausage modes are shown by solid curves and kink modes by dashed ones. In the shaded region, there are no modes evanescent outside the slab (from Roberts, 1981b).

$$m_e^2 = \frac{R^2 C_0^2 - \omega^2}{C_0^2}$$

$$= R^2 - \frac{\omega^2}{C_0^2}$$

$$\approx R^2$$

$$\therefore \omega = R V_A \left(\frac{\rho_0}{\rho_e} k a \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.102)$$

• 不可压缩流体情况

$$\frac{C_0^2}{V_A^2} \rightarrow \infty, \quad C_T^2 = \frac{C_0^2 V_A^2}{C_0^2 + V_A^2} \rightarrow V_A^2, \quad m_0^2 = \frac{(R^2 C_0^2 - \omega^2)(R^2 V_A^2 - \omega^2)}{(C_0^2 + V_A^2)(R^2 C_0^2 - \omega^2)} \rightarrow R^2 = \frac{\omega^2}{C_0^2} \rightarrow R^2$$

$$m_e^2 = \frac{R^2 C_0^2 - \omega^2}{C_0^2} = R^2 - \frac{\omega^2}{C_0^2} \rightarrow R^2, \quad \therefore m_0 = m_e = k$$

方程 (8.98) 化为

$$R^2 V_A^2 - \omega^2 = \frac{\rho_0}{\rho_e} \omega^2 \tanh ka \quad (\text{Alfvén 模型})$$

$$R^2 V_A^2 - \omega^2 = \frac{\rho_0}{\rho_e} \omega^2 \coth ka \quad (\text{kink 模型})$$

(3) 由第 8.18 中 $C_T \neq \pm V_A$. C_0 (即本种中 C_0) 变成 ∞ 而消失.

体波 (body waves) 无论快慢均消失. 只有下面的慢表面波是存在的.

对于 $ka \ll 1$, (8.100) 式中令 C_T 变为 V_A , $\omega = R V_A$ (慢模模型) (8.103)

$$\omega = R V_A \left(k a \frac{\rho_0}{\rho_e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Ripple}) \quad (8.104)$$

这二支波常被称为 Alfvén 表面波

• 慢 Kink 模的 Park 推导.

设 $\rho = \rho_0$, 厚度 (slab) δ , 向右传播 $\xi(z, t) = \xi \exp i(\omega t - k z)$

$\epsilon, ka \ll 1$.

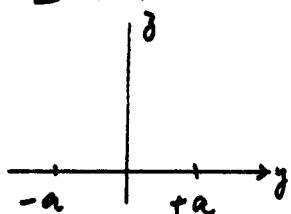
(底部高高边界传播)

若外流体运动时静止. 因此无涡旋, $\vec{V}(y, z, t) = -\nabla \bar{\psi}(y, z, t)$

设为不可压缩流体 $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. $\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0$

$$\nabla^2 \bar{\psi} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} = 0$$

$$\text{设 } \bar{\psi} = A(y) e^{i(\omega t - k z)}$$



$$\frac{d^2 A(y)}{dy^2} - k^2 A(y) = 0$$

$$A(y) = K_1 e^{ky} + K_2 e^{-ky}$$

$$\begin{aligned} \text{若 } y > a, y \rightarrow \infty, A(y) \rightarrow 0 \quad \therefore K_1 = 0, A(y) = K_2 e^{-ky} \\ \bar{\Psi} = K_2 e^{-ky} \cdot e^{i(wt-kz)} \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \Big|_{y=a} = V_y \Big|_{y=a} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = i\omega \varepsilon e^{i(wt-kz)} \quad (\text{由第3问之} \bar{\Psi})$$

$$K_2 k e^{-ka} \cdot e^{i(wt-kz)} = i\omega \varepsilon e^{i(wt-kz)}$$

$$K_2 = \frac{i\omega \varepsilon}{k} e^{ka}$$

$$\bar{\Psi} = \frac{i\omega \varepsilon}{k} e^{-k(y-a)} \cdot e^{i(wt-kz)} \quad (y > a) \quad (8.105)$$

$$(\exists) \text{ 若 } y < -a \text{ 时或有 } \bar{\Psi} = K' e^{ky} e^{i(wt-kz)}$$

$$K' = \frac{i\omega \varepsilon}{k} e^{ka}$$

$$\bar{\Psi} = i\frac{\omega \varepsilon}{k} e^{k(y+a)} \cdot e^{i(wt-kz)} \quad (8.105')$$

$$\text{运动方程 } \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0$$

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} + \frac{1}{2} \nabla (V^2)$$

$$\nabla \left[-\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \bar{\Psi})^2 + \frac{P}{\rho} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} (\nabla \bar{\Psi})^2 + \text{const.}$$

$$\text{设 } \frac{1}{\rho} = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} (\nabla \bar{\Psi})^2 \quad (\bar{\Psi} \sim \varepsilon \text{ 为常数})$$

$$P = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}$$

$$P(y, z, t) = -\rho \varepsilon \frac{\omega^2}{k} e^{-k(y-a)} \cdot e^{i(wt-kz)} \quad (8.106)$$

$$P(-y, z, t) = \rho \varepsilon \frac{\omega^2}{k} e^{k(y+a)} \cdot e^{i(wt-kz)}$$

3. 在无限长 (3D slab) 向右运动有速度 $\frac{1}{R_C}$ 在 y 方向. $\frac{1}{R_C} = \frac{-Y''}{(1+Y'^2)^{3/2}}$

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -ik\varepsilon e^{i(wt-kx)}$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -k^2 \varepsilon e^{i(wt-kx)}$$

$$\frac{1}{R_c} = \frac{-k^2 \varepsilon e^{i(wt-kx)}}{(1+k^2 \varepsilon^2 e^{2i(wt-kx)})^{1/2}} \approx -k^2 \varepsilon e^{i(wt-kx)}$$

单位面积上总压力为 $2a \frac{1}{\mu} B^2$, 单位长度压力为 $2a \frac{1}{\mu} \rho \frac{\partial \xi}{\partial \theta}$ ($= 2 \frac{1}{\mu} \rho \cdot \frac{1}{R_c}$)

单位面积上的压力差为 $-[P(a, \theta, t) - P(-a, \theta, t)]$

薄壁管运动方程: $2a \rho \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} = 2a \frac{1}{\mu} \rho \frac{\partial \xi}{\partial \theta} - [P(a, \theta, t) - P(-a, \theta, t)]$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\omega^2 \varepsilon e^{i(wt-kx)}, \text{ 代入(8.106) 有}$$

$$\omega^2 = k^2 \frac{V_A^2}{(1 + \frac{1}{R_c})}$$

$$\frac{\omega}{k} = V_A (ka)^{1/2} / (1 + ka)^{1/2} \approx V_A (ka)^{1/2}$$

此即 $P_0 = P_c$ 时慢吞压波 Kink 模式的色散关系 (8.102)

以后讨论磁通量为半径的半球形, 考虑细磁通管的色散关系。
由于半球形磁通管为半径的半球形, 磁通量随半径而变化.
转动半径 r , 径向速度的衰减 $\propto r^{-1/2}$, 而半径前的 e^{-kx} .

$$\dot{\varphi} = \frac{a \tilde{\omega} \varepsilon}{R} \sin \phi e^{i(wt-kx)}$$

φ 从 x 轴量起, $\sin \phi$ 可看作 r 在 y 轴上的投影, 因此

$$\text{径向速度化 } r = a \sin \phi \text{ 速度 } v_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \sin \phi \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

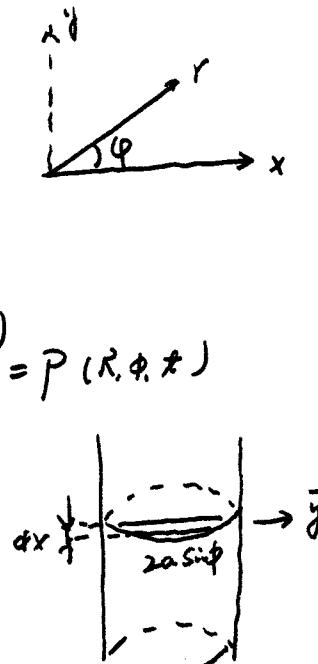
$$\text{已得 } P = \rho \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = -\rho a \tilde{\omega} \varepsilon \cdot \frac{1}{R} \sin \phi e^{i(wt-kx)} = P(R, \phi, t)$$

在 x 方向, 在磁通管内切去一薄片宽为 dx

y 方向宽度为 $2a \sin \phi$.

$$\text{运动方程: } 2\rho a \sin \phi dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 2a \sin \phi \frac{1}{\mu} B^2 dx \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \\ - [P(a, \phi, t) - P(a, -\phi, t)]$$

$$\text{代入后可得 } \omega/k = \frac{1}{2} V_A^2, \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_A.$$



第九章 发电机理论

9.1 引言

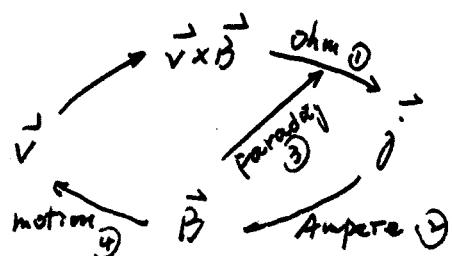
地球上磁感应的主要体现在于磁子，下面行为通常认为主要与对流层中的发电机有关：

1. 太阳黑子数的 11 年周期
2. 黑子大体上位于赤道带内
3. 黑子带向赤道移动
4. 黑子群向赤道倾斜
5. 黑子极性逆转：同一 11 年周期内，北半球所有黑子的极性不一样，东周期中则相反；南半球则相反。
6. 黑子数极大期附近，极已磁场反向。

但是等离子体与磁场相互作用的细节尚未完全理解，所以我们面临的问题是首先定位磁场，然后考虑上述特征。

太阳等离子体磁场的衰减由扩散时间 R_{\odot}/v 来表示，约 10^9 年。而太阳的平均相当，据此可以认为太阳磁场是原生的。情况其实并非如此。上述的磁场衰减时间是粗略且偏高的估计值。下列因素有可能减少扩散系数：电阻不稳定性可以使特征速度 $v = R/\tau$ ；磁浮力倾向于减小磁通；对流区的流动会增大磁场扩散系数 $\sim 10^9 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ 。因此约 10 年就可耗散该区域中的磁场。于是我们需要寻找发电机来维持太阳磁场。

发电机理论：磁场不但由于电流而得以维持，等离子体还通过磁感应线的流动产生运动电场 $\vec{v} \times \vec{B}$ 。该电场通过欧姆定律产生电流 $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ ，再通过安培定律 $\vec{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B}$ 产生磁场，磁场通过法拉第定律 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 产生电场，同时有 Lorentz 力 $\vec{j} \times \vec{B}$ 抵制等离子体流动。



第 9.1 磁场和等离子体的相互作用

① 通过 Ohm 定律 $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 产生电流 \vec{j} 。② 由 Ampere 定律 $\vec{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B}$ 产生 \vec{B} 。③ Faraday 定律 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 产生 \vec{E} 。④ Lorentz 力 $\vec{j} \times \vec{B}$ 抵制流动

$$\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}$$

这是一个非线性发电机问题，需用到完整的磁流体方程组。主要讨论
1. 不对称模式，足以维持变化的磁场。2. 有时间的非稳态运动学。
这一步将列出和解磁感应方程和运动方程，问题的求解相当困难。但是大部分的分析仅限于第一项，称为运动学发电机问题，换而言之，问题变成构造一个速度场，使得磁场是一个（单调或振荡）增长的磁场。实际上构造一个现实的发电机几乎也是不可能。运动学发电机是磁流体力学发电机的一种近似。

9.2 Cowling 定理

9.2.1 无发电机定理 (antidynamo theorem)

等离子体的稳定流动 2. 磁维持破缺于空间有限区域且静止的磁场。

Cowling (1934): 定轴对称时，磁场不能维持。
说明： 定轴对称磁场可以写成

$$\vec{B} = B_p \hat{\theta} + \vec{B}_p \quad (9.1)$$

其中 $B_p \hat{\theta}$ 为环向场 (toroidal component)，不指向球极，也不指向极轴，大致与纬度圈平行。垂直于球极的 $\hat{\theta}$ 方向。 \vec{B}_p 为极向场 (poloidal) 磁场线在子午面内，球坐标中有 θ , ϕ 分量，光轴 $\theta=0$ ，柱坐标中极向场为径向 r 和轴向 z 分量之和。

因为轴对称，所有通过对称平面的子午面内的磁场形都一样，且由封闭的磁场线构成。到了子午面，磁场化为一个 O 型中性区。在这一带 $\vec{B}_p = 0$ 。因此只有环向场 $B_p \hat{\theta} \neq 0$. (古 9.2)

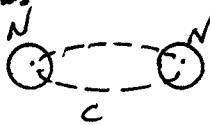
在 N 极, $B_p = 0$, 只有垂直于子午面的环向场

$$\text{Ohm 定律} \quad \frac{d}{dt} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}$$

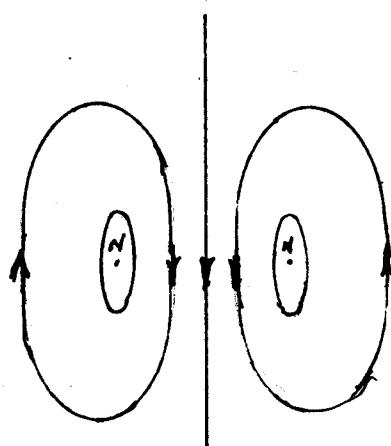
环流通过 N 极的封闭磁场线积分 (古 9.3)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$ 为 C 的线元。 \vec{E} 和 \vec{V} 垂直平行于 $d\vec{l}$
 S 为 C 所围的面积



古 9.3 过 N 极的封闭磁场线 C 积分



古 9.2 轴对称磁场 子午面内的磁场线

$$\oint_C \vec{J}_A \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

(感生电动势) (动生电动势)

在静止情况下磁场为定值 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, 磁场为零, 代入得 $\vec{B}_p = 0$, $\therefore \vec{B} = \vec{B}_p \hat{\phi}$
 $\vec{B}_p \parallel d\vec{l}$, $\vec{B}_p \perp (\vec{v} \times \vec{B}_p)$ $\therefore d\vec{l} \perp (\vec{v} \times \vec{B})$. 因此动生电动势为零.
 上式左边=次项为零. 但是 \vec{J}_A 在 N 线上等于零, 即 $\oint_C \vec{J}_A \cdot d\vec{l} = 0$ 不能满足, 所以定磁场不可以走轴对称的。25°以后才开始有转子。

9.2.2 发电机之应用例

单极发电机

1. 固定在磁场中旋转, 向左运动, 试求

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{\phi} \times r \hat{r} = \omega r \hat{\phi}$$

作用力 $F = \vec{v} \times \vec{B} = \omega r B \hat{r}$

(1) 蓝外径 r_2 和 内径 r_1 之间电势差

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \Delta \varphi = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{r} \\ &= \omega B (r_2^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

外部电流通过该线圈时由9.4. 可以产生轴向磁场 $\because \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, $\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$
 可见电流越大, 轴向的磁场也越大.

$$\text{又 } \Delta \varphi = R \omega I, \quad \text{式中 } R = (r_2^2 - r_1^2) B / I$$

当转速转得很快时, 电流工强大, 有可能补偿磁场中的耗散增加磁场, 维持发电机过程, 当0.5小时, 不足以补偿耗散, 磁场逐渐衰减.

电流通过线圈为 L . 电阻 R , 退磁系数

$$L \frac{dI}{dt} = (R - L) I \quad (9.2)$$

临界转速 $\omega_c = R/L$

$\omega > \omega_c$, 退磁电流随时间指数增加.

$\omega = \omega_c$ 维持恒定状态

$\omega < \omega_c$ 电流随时间衰减, 不能维持发电机过程.

2. 转子的旋转方向必须与外磁场的电流方向一致, 否则不能维持发电机过程. 在转子上可选取类似迴路, 电流方向也应该与转动方向一致, 因此对于转子而言, 上下迴路绕向应

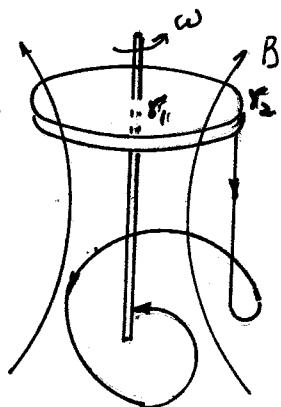


图 9.4 单极发电机

对称 (第 9.5)

3. 在单极机中, 如果外部磁场与转动导体固定转子, 则没有磁通量的变化, 也没有电动势。

转动 (固定相对于转子) 第 9.5 径向对称 径向对称
转动物体的一部分, 犹如只

2. 固定上 - 不变 (固定部分不会变化)。

单极发电机的启示: 在转子静止时, 相速度过零, 磁流的相速过零, 可以认为系统有较大转矩, 另外不随转子转动, 旋转发电机平衡的关键。

9.2.3 固定发电机的特性

磁感应方程的推导依次设磁场衰减, 对流应该和转子平行的电流, 从而使转子磁场抵消磁场的耗散。

1. 磁场的衰减和维持

通过“发电机理论”之磁流体为发电机理论的简化。导电液体的运动速度恒定, 在给定磁场下, 磁场变化规律。忽略磁场对流场的作用。

磁感强度方程: 迈尔斯 $B = \mu \vec{B}$

$$\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{B} \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \vec{B} \cdot \nabla^2 \vec{B}$$

$$\text{式中 } \vec{B} \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = -\mu \vec{v} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})$$

$$\therefore \vec{B} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$$

$$\text{令 } \vec{a} = \vec{v} \times \vec{B}, \vec{b} = \vec{B}, \text{ 则有 } \vec{B} \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \nabla \cdot [(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B}] + (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla \times \vec{B}$$

其中 $\nabla \cdot [(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B}]$ 将被忽略, 因为这时为零。

$$\vec{B} \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \mu \vec{j} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -\mu \vec{v} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})$$

$$\text{右边界项中的 } \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} = -\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{B} = -\mu \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{j} \quad (\because \nabla \times \nabla \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B})$$

$$\text{利用公式 } \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{j}) = \vec{j} \cdot \nabla \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{j}$$

$$\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{j} = \vec{j} \cdot \nabla \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{j}$$

$$= \mu \vec{j}^2, \quad \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{j}) \text{ 为零, 因为 } \vec{B} \times \vec{j} \sim \vec{B} \times \vec{j} \sim \vec{B} \times \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\sim \sigma \vec{v} \vec{B} \cdot \vec{n} S \rightarrow 0$$

故乘 \vec{v} 后的磁感强度方程变为

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \vec{v} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) - \mu^2 \eta \vec{j}^2$$

$$7 = \frac{1}{\mu \eta} \quad \text{代入上式, 得方程}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{4\pi} \vec{B}^2 d\tau = - \int \vec{v} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) d\tau - \int \frac{j^2}{\rho} d\tau \quad (9.3)$$

$d\tau$ 为体积元

(9.3) 式右边第一项表示导电流体运动所产生时，可以使磁场增加或者减少，第二项为电流耗散使磁场衰减。自持发电机安培力机械能转换为磁能的速率是必须等于电流耗散的速率。

2. 环向场和极向场的产生

任何无源场可分为环向场和极向场之和，因此需要将之通过磁场产生磁场的环向和极向分量。定性地看太阳赤道区风速运转很快，即风比较强，赤道位于伸张场，赤道环向场（参见 9.6.a.），等高气压带上升带向场向南，通过 Coriolis 力的作用，南部产生极向场（参见 9.6.b.）

$$\vec{B} = \vec{B}_T + \vec{B}_P$$

$$\text{其中环向场 } \vec{B}_T \text{ 可写成 } \vec{B}_T = \nabla \times (\vec{r} T(r)) = -\vec{r} \times \nabla T$$

$$\text{极向场 } \vec{B}_P = \nabla \times \nabla \times (\vec{r} P(r))$$

式中 $T(r)$, $P(r)$ 是 \vec{r} 的广义坐标数， $\vec{r} T(r)$, $\vec{r} P(r)$ 相当于矢势有 $\nabla \cdot (\vec{r} T(r)) = 0$, $\nabla \cdot (\vec{r} P(r)) = 0$.

环向场 \vec{B}_T 的旋度 $\nabla \times \vec{B}_T$ 为极向场，反之亦然

$$\begin{aligned} \vec{B}_T &= \nabla \times \nabla \times (\vec{r} P(r)) = \nabla [\nabla \cdot (\vec{r} P(r))] - \nabla^2 (\vec{r} P(r)) \\ &= -\nabla^2 (\vec{r} P(r)) \end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{B}_P = -\nabla \times \nabla^2 (\vec{r} P(r)) = -\nabla \times [\vec{r} \nabla^2 P(r)] \quad (\text{可参考第 3.5.3 节})$$

其中 $\nabla^2 P$ 为广义坐标形式 $\vec{r} P$ 形式相同 $\therefore \nabla \times \vec{B}_P$ 为环向场由 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\vec{B} = \vec{B}_T + \vec{B}_P$$

$$= \nabla \times (\vec{r} T) + \nabla \times \nabla \times (\vec{r} P)$$

$$= \nabla \times (\vec{r} T - \vec{r} \times \nabla P)$$

$$= \nabla \times \vec{A}$$

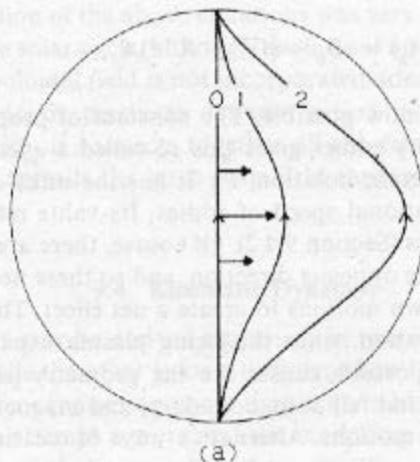
$$\therefore \vec{A} = \vec{r} T - \vec{r} \times \nabla P \quad (\because \vec{A} + \nabla \phi \text{ 也允许. 合理})$$

可见 $\vec{r} T$, $-\vec{r} \times \nabla P$ 相当于矢势

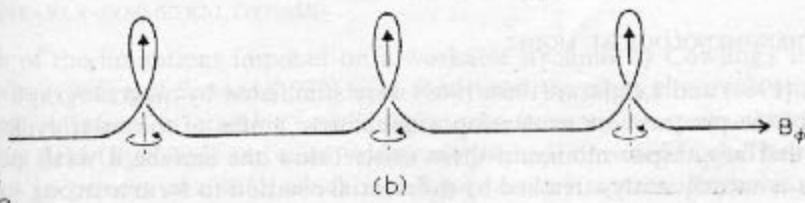
对于不可压缩流体 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. 也有 $\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_P$

3. 則應方程的环向和极向场方程

该方程对称 $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$. 极向分量化简后得 (5.8) 的方程. 球坐标中为 (r, θ) 的函数



(a)



(b)

Fig 9.6

Fig. 9.3. (a) The stretching out of an initially poloidal field line (labelled 0) to subsequent positions (1 and 2) by differential rotation (solid-headed arrows). (b) The creation of poloidal flux from toroidal flux by rising and twisting motion.

下述速度系数

① 速度系数： $\vec{T} = T(r, \theta)$, $\vec{P} = P(r, \theta)$

$$\vec{B}_T = -\vec{r} \times \nabla T$$

$$\nabla T = \hat{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\vec{B}_T = -\vec{r} \times \left(\hat{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$$

$$= -\hat{\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} = (0, 0, B_\varphi)$$

$$B_\varphi = -\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\vec{B}_P = \nabla \times \nabla \times (\vec{r} \vec{P})$$

$$\nabla \times (\vec{r} \vec{P}) \text{ 为纯向量 } \vec{A}_T = \nabla \times (\vec{r} \vec{P}) = -\vec{r} \times \nabla P$$

$$\text{类同于 } \vec{B}_T \text{ 可得 } \vec{A}_T = -\hat{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = (0, 0, A_\varphi)$$

$$A_\varphi = -\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$\vec{B}_P = \nabla \times \vec{A}_T = \nabla \times (A_\varphi \hat{\theta})$$

$$= \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r A_\varphi), -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), 0 \right)$$

3. 速度系数 $\psi(r, \theta) = -r \sin \theta A_\varphi$

$$\vec{B}_P = \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, 0 \right)$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

$$\vec{B}_P \cdot \nabla \psi = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

② 纯向流动机
极向流动机
极向场强
威拉方程

$$\therefore \nabla \psi = 0, \psi = \text{const.}$$

代表极向场的不可压缩流体

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_T, \text{ 令 } \vec{B} = \vec{B}_P + \vec{B}_T \text{ 代入磁感应方程}$$

$$\text{或 } \vec{V} \times \vec{B} = (\vec{V}_P + \vec{V}_T) \times (\vec{B}_P + \vec{B}_T)$$

$$= (\vec{V}_P \times \vec{B}_T) + (\vec{V}_T \times \vec{B}_P) + (\vec{V}_P \times \vec{B}_P) + (\vec{V}_T \times \vec{B}_T)$$

(极向) (极向) (纯向) (0)

(判断极向 $F(r, \theta)$ 和纯向 $\vec{F}(\psi)$ 时, 利用 $\vec{V}_P = (0, 0, V_P)$, $\vec{V}_T = (V_T, V_\theta, 0)$
及 \vec{B}_T, \vec{B}_P 类似关系进行分类)

磁感應方程不包含矢量場的二階導數方程。

$$\frac{\partial \vec{B}_p}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_p \times \vec{B}_p) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_p \quad (9.4)$$

$$\rightarrow (\text{只考慮} \vec{V}_p \times \vec{B}_p \text{ 的交換為不以向量}, \nabla^2 \text{ 不含} \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \text{ 並由對稱})$$

$$\frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_p \times \vec{B}_T + \vec{V}_T \times \vec{B}_p) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_T \quad (9.5)$$

$$\vec{B}_p = \nabla \times \vec{A}_T \quad \text{代入 (9.4) 式}$$

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} = \nabla \times [\vec{V}_p \times (\nabla \times \vec{A}_T)] + \eta_m \nabla^2 (\nabla \times \vec{A}_T) \quad (9.6)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial r_j}, \quad \nabla^2 \vec{A} = \frac{\partial^2 A_k}{\partial r_k \partial r_k}$$

$$\nabla^2 (\nabla \times \vec{A}) = \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} (\epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial r_j}) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} \left(\frac{\partial^2 A_k}{\partial r_k \partial r_k} \right) = \nabla \times \nabla^2 \vec{A}$$

(9.6) 式化簡

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} = \vec{V}_p \times \nabla \times \vec{A}_T + \eta_m \nabla^2 \vec{A}_T \\ \frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_p \times \vec{B}_T + \vec{V}_T \times \vec{B}_p) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_T \end{array} \right. \quad (9.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} = \vec{V}_p \times \nabla \times \vec{A}_T + \eta_m \nabla^2 \vec{A}_T \\ \frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_p \times \vec{B}_T + \vec{V}_T \times \vec{B}_p) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_T \end{array} \right. \quad (9.8)$$

③ T 不以向量形式與 B 同場用柱坐標表示。 $\vec{V}_p = (V_{pr}, 0, V_{p\theta})$
 $\vec{A}_T = (0, A_\theta, 0)$

$$\begin{aligned} (9.7) \text{ 式: } \vec{V}_p \times \nabla \times \vec{A}_T &= (\hat{r}^\circ V_{pr} + \hat{\theta}^\circ V_{p\theta}) \times \left[\hat{r}^\circ \left(-\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) + \hat{\theta}^\circ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right] \\ &= -\hat{\theta}^\circ V_{pr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \hat{\theta}^\circ [V_{p\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r A_\theta)] \\ &= -\hat{\theta}^\circ \frac{1}{r} \vec{V}_p \cdot \nabla (r A_\theta) \end{aligned}$$

$$(9.7) \text{ 式: } \nabla^2 \vec{A}_T = \nabla^2 (A_\theta \hat{\theta}^\circ) = \hat{\theta}^\circ \nabla^2 A_\theta + A_\theta \nabla^2 \hat{\theta}^\circ$$

$$\nabla^2 \hat{\theta}^\circ = \nabla \cdot \nabla \hat{\theta}^\circ = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{r} \hat{\theta}^\circ \hat{r}^\circ \right) \quad (\nabla \hat{\theta}^\circ \text{ 有問題})$$

$$\nabla \cdot \hat{r}^\circ \hat{\theta}^\circ = -\frac{1}{r} \hat{\theta}^\circ \hat{r}^\circ, \quad \text{Tr} \hat{\theta}^\circ = -\frac{1}{r} \quad (= T_{pr})$$

$$\nabla^2 \hat{\theta}^\circ = \nabla \cdot \hat{r}^\circ$$

$$(\nabla^2 \hat{r}^\circ)_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \text{Tr} \hat{\theta}^\circ) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot -\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^2}$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{A}_T = \hat{\theta}^\circ \nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} \hat{\theta}^\circ = \left(\nabla^2 \frac{1}{r^2} \right) A_\theta \hat{\theta}^\circ *$$

$$\hat{\theta}^\circ \hat{r}^\circ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1, 0, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{r}^\circ \hat{\theta}^\circ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (0, 1, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

且有時

(9.8) 式即得
1.0.7b), $A_\varphi \rightarrow \vec{A}$

$$(9.7) \text{ 式中 改寫 } \vec{A}_T = A_\varphi \hat{\varphi}$$

$$\frac{\partial \vec{A}_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} \vec{V}_p \cdot \nabla (r A_\varphi) = \eta_m (\nabla^2 \frac{1}{r^2}) A_\varphi \quad (9.8)$$

(見 PP Priest 著 9.5) 式

$$\begin{aligned} \text{由 } 7.2 \text{ 及 } (9.5) \text{ 式 } \text{ 得 } \nabla \times (\vec{V}_p \times \vec{B}_T) &= \vec{V}_p \nabla \cdot \vec{B}_T - \vec{B}_T \nabla \cdot \vec{V}_p + (\vec{B}_T \cdot \nabla) \vec{V}_p - (\vec{V}_p \cdot \nabla) \vec{B}_T \\ &= (\vec{B}_T \cdot \nabla) \vec{V}_p - (\vec{V}_p \cdot \nabla) \vec{B}_T \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{B}_T = B_\varphi \hat{\varphi} \quad \vec{V}_p \text{ 在 } \hat{\varphi} \text{ 方向} \quad \therefore [\nabla \times (\vec{V}_p \times \vec{B}_T)]_q = -(\vec{V}_p \cdot \nabla) B_\varphi \hat{\varphi}$$

$$[\text{由 } 7.2 \text{ 及 } (9.5) \text{ 式 } \text{ 得 } \nabla \times (\vec{V}_T \times \vec{B}_p) = -(\vec{B}_p \cdot \nabla) \vec{V}_T - (\vec{V}_T \cdot \nabla) \vec{B}_p]$$

$$\vec{V}_T \text{ 在 } \hat{\varphi} \text{ 方向}, \vec{B}_p \text{ 在 } \hat{\varphi} \text{ 方向} \quad \therefore [\nabla \times (\vec{V}_T \times \vec{B}_p)]_q = (\vec{B}_p \cdot \nabla) \vec{V}_T = (\vec{B}_p \cdot \nabla) V_\varphi \hat{\varphi}$$

繼續 (9.5) 式 \rightarrow (9.5-1)

$$\frac{\partial \vec{B}_\varphi}{\partial t} = -(\vec{V}_p \cdot \nabla) B_\varphi + (\vec{B}_p \cdot \nabla) V_\varphi + \eta_m (\nabla^2 \frac{1}{r^2}) B_\varphi$$

此式右邊第 3 項與前項相比， $\nabla^2 \vec{A}_T$ 之值極小。

$$\therefore \frac{\partial \vec{B}_\varphi}{\partial t} = -V_{pr} \frac{\partial}{\partial r} B_\varphi - V_{pz} \frac{\partial}{\partial z} B_\varphi + B_{pr} \frac{\partial}{\partial r} V_\varphi + B_{pz} \frac{\partial}{\partial z} V_\varphi + \eta_m (\nabla^2 \frac{1}{r^2}) B_\varphi \quad (9.5-1)$$

$$\therefore -r \vec{V}_p \cdot \nabla \frac{\vec{B}_\varphi}{r} = -r V_{pr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\varphi}{r} \right) - r V_{pz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_\varphi}{r} \right)$$

$$= -V_{pr} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} V_{pr} B_\varphi - V_{pz} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \quad (9.5-2)$$

$$r \vec{B}_p \cdot \nabla \frac{V_\varphi}{r} = B_{pr} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} B_{pr} V_\varphi + B_{pz} \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \quad (9.5-3)$$

$$\text{又 } \nabla \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} = 0. \quad \therefore \vec{B} \parallel \vec{V}, \quad \vec{B}_p \parallel \vec{V}_p, \quad \vec{B}_T \parallel \vec{V}_T$$

$$\therefore \frac{B_{pr}}{V_{pr}} = \frac{B_T}{V_T} = \frac{B_\varphi}{V_\varphi}$$

$$B_{pr} V_\varphi = B_\varphi V_{pr} \quad (9.5-2) + (9.5-3) \text{ 代入 } (9.5-1) \text{ 左邊}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{B}_\varphi}{\partial t} = -r \vec{V}_p \cdot \nabla \frac{\vec{B}_\varphi}{r} + r \vec{B}_p \cdot \nabla \frac{V_\varphi}{r} + \eta_m (\nabla^2 \frac{1}{r^2}) B_\varphi \quad (9.9)$$

(PP Priest 著 9.4) 式

通常表示 \vec{A} 在直角座標下為 $\vec{A} = -r A_\varphi \hat{\varphi}$ (即 $\vec{A} \parallel \vec{V}_T$ 且 $\vec{A} \perp \vec{V}_p$)
代入 (9.8) 式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{A}_q}{\partial t} &= -r \frac{\partial \vec{A}_q}{\partial r} = -r \left[-\frac{1}{r} \vec{V}_p \cdot \nabla (r A_q) + \eta_m (\nabla^2 \frac{1}{r}) A_q \right] \\ &= \vec{V}_p \cdot \nabla (-4) + \eta_m (\nabla^2 \frac{2}{r}) A_q\end{aligned}$$

(9.8) 式用通量系数 ψ 和表达式:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{V}_p \cdot \nabla \psi = \eta_m (\nabla^2 \frac{2}{r}) \psi$$

以上式或从 (9.8) 式可以得到右边为耗散项: $\therefore A_q$ 和 A_T 都不新衰减 $\vec{B}_p = \nabla \times \vec{A}_T$, $\therefore \vec{B}_p$ 也不衰减

结论:

- i. 因为 A_T 处于新衰减状态, 极向场 B_p 必须维持
- ii. 利用 $\omega = V_q/r$ 代入 (9.9) 式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \vec{B}_q}{\partial r} + \vec{V}_p \cdot \nabla \frac{\vec{B}_q}{r} = \vec{B}_p \cdot \nabla \omega + \frac{\eta_m}{r} (\nabla^2 \frac{1}{r}) \vec{B}_q$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{B}_q}{r} \right) = \vec{B}_p \cdot \nabla \omega + \frac{\eta_m}{r} (\nabla^2 \frac{1}{r}) \vec{B}_q$$

若 $\vec{B}_p \cdot \nabla \omega > 0$ 意味着作用, 磁场移动通过而产生 \vec{B}_q . 但由 \vec{B}_p 不新衰减力 (结论 i) 耗散以后也不消失 [由], 稳定发电机过程维持.

iii. 为了维持自激发电机过程, 需寻求将极向场 \vec{B}_p 与不向场的机制, 使二者磁场强度都有满足一些简单关系的效应.

9.3 运动学发电机

发电机可分为两类. 一类是直流发电机 (例机弱和对称发电机), 另一类是交流发电机. 这一类发电机所不防的美德更为密切. 由于高流的问题显得比较复杂. 高流状态的基本特点是存在不同尺度的涡旋系列. 为这而且的强度密切相关. 主要问题是大尺度的轴向和尺度转换, 最后通过粘性和消耗. 不考虑力学高流是复杂的, 除了流体力学的强度交换外, 还有磁场所引起的, 磁流和磁场的相互作用.

9.3.1 平均下步和磁场方程

对于高流问题求得平均场和磁场方程基本重要

1. 平均场

我们前面的问题是速度 \vec{v} 和磁场 \vec{B} ，由平均和湍流两部分不同。湍流或者说随机速度场可以走通常意义的高动态场，相对流场稳定性引起的高动态也可以走随机速度场。湍流内部以及边界有随机化，叫做重力波场。

假定随机运动由特征长度 L_0 表示， $L_0 \ll a$ 表示平均变化的尺度 $L \ll L_0$ ， L 通常与流体半径 R 成正比或以 $L = O(R)$ 。在高流的情况下，如可利用定义为具有修正的高流的尺寸。对于随机速度场可以认为是十分集中且重力大的湍流速度。

对于中间尺度 a ， $L_0 \gg a \gg L$ ，平均速度梯度 $\partial u / \partial r$ 和平均速度和平均磁场可以认为是均匀的。平行于速度 $u(\vec{r}, t)$ 的平均速度为

$$\langle u(\vec{r}, t) \rangle_a = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|r| < a} u(\vec{r} + \vec{\xi}, t) d\vec{\xi}$$

在满足上述不等式的条件下，平均值对于 a 是其本征函数，故而，因此，速度场的平均梯度，在尺度 a 范围内改变很多，可得均值 $\langle u \rangle_a$

同样可用时间尺度来定义平均量。设 T 是速度场变化的时标， t_0 是该尺度的时标， $t_0 \ll T$ 。对于中间时标 T ，满足 $t_0 \ll T \ll T$ ，有

$$\langle u(\vec{r}, t) \rangle_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(\vec{r}, t + t') dt'$$

在 T 大于 t_0 ， t_0 为常数的条件下， $\langle u \rangle_T$ 对于 T 是恒定的，故而。

还可以计算湍流平均

$$\langle u(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\int u f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}}{\int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}}$$

系常数 ∞ ，到满足 $t_0 \ll 1$ ， $\log \infty$ 。

三种平均值一致，因此平均值可以用 $\langle \cdot \rangle$ 表示。

2. 湍流场

物理量 3 种平均值的表示法： \vec{B}_0 ； \vec{V}_0 ； \vec{b}

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$$

\vec{B}_0 ， \vec{V}_0 为平均场， \vec{b} 为随机场（或随机场）部分，有 $\langle \vec{b} \rangle = \langle \vec{v} \rangle = 0$

$$\vec{V} \times \vec{B} = (\vec{V}_0 + \vec{v}) \times (\vec{B}_0 + \vec{b}) = \vec{V}_0 \times \vec{B}_0 + \vec{v} \times \vec{B}_0 + \vec{V}_0 \times \vec{b} + \vec{v} \times \vec{b}$$

$$\langle \vec{V} \times \vec{B} \rangle = \vec{V}_0 \times \vec{B}_0 + \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle + \langle \vec{v} \times \vec{B}_0 \rangle + \langle \vec{V}_0 \times \vec{b} \rangle$$

代入磁感应方程

$$\frac{\partial (\vec{B}_0 + \vec{b})}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{b}) + \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{b}) + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 (\vec{B}_0 + \vec{b}) \quad (9.10)$$

$$\langle \vec{b} \rangle = \vec{B}_0, \quad \langle \vec{v} \rangle = \vec{V}_0$$

平均场方程：

$$\langle \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \rangle = \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times \langle \vec{V} \times \vec{B} \rangle + \eta_m \nabla^2 \langle \vec{B} \rangle$$

$$= \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{b}) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_0 \quad (9.11)$$

二式相减 得到湍流场方程

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{b}) + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{b} - \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle) + \eta_m \nabla^2 \vec{b} \quad (9.12)$$

若速度场 \vec{V}_0, \vec{v} 已知，方程关于 \vec{b} 为线性方程，可以求解。

9.3.2 一阶半精度似

$$\text{令 (9.12) 式中由 } \vec{I} = \vec{v} \times \vec{b} - \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle$$

估计计算方程 (9.12) 的一次系数以， b_0, \vec{b}_0 为流场速度场的特征长度和特征时间。定义 $V_0 = \langle \vec{v}^2 \rangle^{1/2}$, $b_0 = \langle \vec{b}^2 \rangle^{1/2}$.

$$O\left(\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}\right) = \frac{b_0}{t_0} \quad (a)$$

$$O[\nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{b})] = \frac{V_0 b_0}{t_0} \text{ 和 } \frac{V_0 b_0}{L} \quad (b)$$

$$O[\nabla \times (\vec{B}_0 \times \vec{v})] = \frac{B_0 V_0}{t_0} \text{ 和 } \frac{B_0 V_0}{L} \quad (c)$$

$$O[\nabla \times \vec{I}] = \frac{V_0 b_0}{t_0} \quad (d)$$

$$O(\eta_m^2 \vec{b}) = \frac{\eta_m b_0}{t_0} \quad (e)$$

如果 (c) 式量级次大于 (b), 即 $B_0 V_0 \lesssim V_0 b_0$, $O\left(\frac{V_0}{t_0}\right) \lesssim O\left(\frac{b_0}{B_0}\right)$ (9.13)

(d) 式量级次相等且 (d) < (b). 因此在方程中

可忽略 $\nabla \times \vec{I}$ 项，成为一阶半精度似。该近似不仅是一种数学近似，还有物理方面的意义。

$$\frac{(d)}{(c)} = \frac{O(\nabla \times \vec{I})}{O[\nabla \times (\vec{B}_0 \times \vec{v})]} = \frac{b_0}{B_0} \ll 1$$

由 (9.13), 可推得 $\frac{V_0}{t_0} \ll 1$

一阶半精度似要求流场中的场强为一个数量级。

利用一阶半精度似，将原方程 (9.12) 简化为

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{b} - \vec{B}_0 \times \vec{v}) + \eta_m \nabla^2 \vec{b} \quad (9.14)$$

当平均速度 $\vec{V}_0 = 0$ 时，有

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 \vec{b} \quad (9.15)$$

(9.14), (9.15) 为流场中的线性方程

进-引计论(9.15)式

i. 如采油高速度的量级为 $\frac{b_0}{\eta_m}$

$$O(\nabla b) = \frac{b_0}{\eta_m}, 2.1(9.15)式左边的量级为 \frac{\partial b}{\partial t} \sim O\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right) \sim \frac{b_0}{\eta_m}$$

$$\text{根据(9.15)式 } O(\nabla \vec{B}) \sim \frac{V_0 b_0}{\eta_m} \sim \frac{b_0}{\eta_m} \quad (\because V_0 \sim \frac{b_0}{\eta_m})$$

可见 $O(\frac{\partial b}{\partial t})$ 和 $O(\nabla \vec{B})$ 为同量级。当小尺度磁雷诺数

$$R_m = \frac{V_0 b_0}{\eta_m} = O\left(\frac{b_0}{\eta_m}\right) \ll 1 \text{ 时, } \frac{\partial b}{\partial t} \text{ 和 } \nabla \vec{B} \text{ 次相比较于 } \eta_m \sqrt{b}$$

$$+ \text{由 } 2.1(9.15) \text{ 式简化为 } \nabla^2 \vec{b} = -\frac{1}{\eta_m} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) \quad (9.16)$$

显然 $\frac{V_0 b_0}{\eta_m} = O(1)$, 这是物理上高流高流的关系。也就是说
(9.16)式描述的是高流高流。

(9.15), (9.16) 描述的物理过程不同, 但它们上都有相似的条件: 除了 $\nabla^2 \vec{b}(r, t)$
外, \vec{v} 中的场 \vec{B}_0 相互作用的强度。 (9.16) 表示散度的量级相同, 相互作用
比 (9.15) 强。而 (9.15) 式中, 散度 $b(t, r)$ 与 $V(r, t)$ 的历史有关, 也即与
 $\vec{v}(r, t')$, $t' < t$ 有关。(这与 (9.16) 强)。可以期待当小尺度磁雷诺数 R_m
 $\ll 1$ 时, (9.15) 的解近似于 (9.16) 的解。 (9.15) 的解是更为一般的解。但
须记得对于高流的情况 (如无源机理) 和 (9.16) 需求 $R_m \ll 1$ 。

$$ii. \text{ 且 } O(V_0) \ll \frac{b_0}{\eta_m}, \text{ 即 } \frac{V_0}{\eta_m} \ll 1 \quad (9.17)$$

这允限机理高流的类型 (单向流动, 高流 $V_0 \ll \text{相速 } \frac{b_0}{\eta_m}$)

$$O(\nabla \vec{B}) \sim \frac{V_0 b_0}{\eta_m} \ll \frac{b_0}{\eta_m} \frac{b_0}{b_0} = \frac{b_0}{\eta_m} \sim O\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)$$

$$\text{已利用关系 } V_0 \ll \frac{b_0}{\eta_m}.$$

$$\therefore O(\nabla \vec{B}) \ll O\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)$$

$$(9.12) \text{ 式左边 } \frac{\partial b}{\partial t} \text{ 次 } 2.1(9.15) \text{ 式化为 } \frac{\partial b}{\partial t} \sim O\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right) \quad (9.15) \text{ 式}$$

$$O\left(\frac{17_m \nabla^2 \vec{b}}{|\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0)|}\right) = O\left(\frac{b}{B_0}\right) \cdot \frac{\eta_m}{V_0 b_0}$$

$$\text{考虑到 } \frac{b_0}{B_0} \ll 1, \text{ 和小尺度磁雷诺数 } R_m = \frac{V_0 b_0}{\eta_m} \text{ 2.1(9.15)}$$

2.1(9.15) 式化为

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) \quad (9.18)$$

iii. 当磁雷诺数 $R_m \sim 1$ 时, 磁散度应满足的方程 (9.15)

7.支.式中三次判) 2月.名古屋, 売付(9.1) 業務機関運営の条件。
元-阪神電鉄近畿下.特例法付託(9.15)に付せられ, 並びに
可成り満足也。<販>

9.3.3 α 效应和 β 效应

1. 方程(9.14)和(9.15)表明平均场 \vec{B}_0 和流动场 \vec{v} 之间有线性关系，如果知道流动场的性质，一般可将流动场表示为

$$\langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle_i = \alpha_{ij} B_0 j + \beta_{ijk} \frac{\partial B_0 j}{\partial x_k} + \gamma_{ijkl} \frac{\partial^2 B_0 j}{\partial x_l \partial x_k} + \dots \quad (9.19)$$

其中的系数 $\alpha_{ij}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijkl} \dots$ 由流动速度 \vec{v} 的统计特性决定，但与平均磁场 B_0 无关。因为速度是极向矢量（反演变换下，改变方向），磁场是轴向矢量（反演下不改变方向）。所以 $\langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle$ 为极向矢量，为臂矢量。
特别

这样 $\alpha_{ij}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijkl} \dots$ 均为臂矢量，若平均速度 $\vec{v} = 0$ ，而因高流速均匀和轴向对称，则有

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$$

$$\beta_{ijk} = \beta \epsilon_{ijk}$$

其中 α 为臂矢量， β 为纯标量 ($\because \beta_{ijk}$ 和 ϵ_{ijk} 均为臂矢量)
臂矢量化简后反演时，改变符号。如果高流速有轴向对称性，即

注脚：

反演变换 (inversion transformation)：同时改变所有坐标轴的符号，左旋坐标系变为右旋系。反演不变表明空间的对称性，无旋算力学中，不引入守恒定律，但遵守守恒律。其标量反演不变，臂矢量（包括臂矢量、臂矢量）反演变号。

矢量 \vec{A} ，矢乘 $(\vec{A} \times \vec{B})_k = \sum_j \epsilon_{ijk} A_j B_j$ 。臂矢量 ($\because \epsilon_{ijk}$ 是臂矢量。
 $\therefore \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle$ 为臂矢量)

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \quad \text{臂矢量。}$$

δ_{ij} 哪章

反向层不变，有 $\alpha = -\alpha = 0$ 。所以只有非零的 α 时，安培流
具有矢量场 \vec{b} 可表示。

2. α 和 B 的估计

$$\text{由 (9.18) 式得 } \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) \quad \begin{array}{l} \text{沿磁场方向, 通量 } \lambda_m \approx 1 \\ , v_0 \ll \frac{\lambda_0}{t_0} \end{array}$$

$$\text{对时间积分 } \vec{b}(\vec{r}, t) = \vec{b}(\vec{r}, t_0) + \int_{t_0}^t \nabla \times [\vec{v}(\vec{r}, t') \times \vec{B}_0(\vec{r}, t')] dt'$$

当 $t-t_0$ 远大于关联时间， $\vec{b}(\vec{r}, t)$ 和 $\vec{b}(\vec{r}, t_0)$ 之间没有相关性， \vec{b}
上式右边第一次为零。

$$\text{考虑电场 } \langle \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{b}(\vec{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^t \langle \vec{v}(\vec{r}, t) \times \nabla \times [\vec{v}(\vec{r}, t') \times \vec{B}_0(\vec{r}, t')] \rangle dt'$$

全和为零， \because 有 $t-t_0$ 小于关联时间时 $\vec{b}(\vec{r}, t)$ 为零。 \therefore 加可取为 $-dt$ 。
作差分项 $t' = t-T$, $t' = -\infty$ 时, $T = +\infty$; $t' = t$ 时, $T = 0$
(T 作为积分变量) $dt' = -dT$

$$\langle \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{b}(\vec{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^t (-) (-dT) = \int_0^t \langle \vec{v}(\vec{r}, t) \times \nabla \times [\vec{v}(\vec{r}, t-T) \times \vec{B}_0(\vec{r}, t-T)] \rangle dT \quad (9.20)$$

(9.20) 式：有 $t-t_0$ 小于关联时间时，才不为零。平均场 \vec{B}_0 对关联
时间的变化不大，有 $\vec{B}_0(\vec{r}, t-T) \approx \vec{B}_0(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) &= (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}_0 \quad (\text{已利用 } \nabla \vec{B}_0 = 0, \nabla \cdot \vec{v} = 0) \\ &= B_{0m} \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial x_m} - v_m \frac{\partial B_{0k}}{\partial x_m} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$(9.20) \text{ 式 } \Rightarrow \int_0^t \epsilon_{ijk} \langle v_k(\vec{r}, t) \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_m} B_{0m} - v_m \frac{\partial B_{0k}}{\partial x_m} \right] \Big|_{(r, t-T)} \rangle dT$$

与前面的推导 (9.19) 相比较， ϵ_{ijk}

$$\alpha_{ij} = \int_0^t \epsilon_{ijk} \langle v_k(\vec{r}, t) \frac{\partial v_k(\vec{r}, t-T)}{\partial x_j} \rangle dT \quad (9.21)$$

(下标 i, j, k 为 x, y, z 轴； α_{ij} 为 α 下标或 i, j)

$$B_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \left(\int_0^t \epsilon_{ijk} \langle v_k(-) v_m \frac{\partial B_{0k}}{\partial x_m} \rangle dT \right)$$

$$= \int_0^\infty \varepsilon_{ijk} \left\langle \vec{V}_R(\vec{r}, t) \left(-\vec{V}_R \frac{\partial \vec{B}_{0j}}{\partial x_k} \right) \right\rangle dt$$

$$\beta_{ijk} = \int_0^\infty \varepsilon_{ijk} \lambda \left\langle \vec{V}_L \vec{V}_R \right\rangle dt = \int_0^\infty \varepsilon_{ijk} \lambda \left\langle \vec{V}_L(\vec{r}, t) \vec{V}_R(\vec{r}, t-T) \right\rangle dt \quad (9.22)$$

对于局部均匀流动向量是平行的。有

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} = 3 \alpha \quad (3 i=j)$$

$$\beta_{ijk} = \beta \varepsilon_{ijk} \lambda \left\langle \vec{V}_L(\vec{r}, t) \vec{V}_R(\vec{r}, t-T) \right\rangle dt$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \varepsilon_{ikl} \left\langle \vec{V}_R(\vec{r}, t) \frac{\partial \vec{V}_R}{\partial x_i} \right\rangle dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \left\langle \vec{V}_R \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \vec{V}_R}{\partial x_i} \right\rangle dt \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^\infty \left\langle \vec{V}_R \varepsilon_{kil} \frac{\partial \vec{V}_R}{\partial x_i} \right\rangle dt \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^\infty \left\langle \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \times \vec{V}(\vec{r}, t-T) \right\rangle dt \\ &= -\frac{1}{3} \left\langle \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \times \vec{V}(\vec{r}, t-T) \right\rangle t_c \quad \text{物理意义} \quad (9.23) \end{aligned}$$

定义高流速梯度 $h_{xx} = \left\langle \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{v} \right\rangle$

$$\text{可得 (9.23) 关于 } \alpha \text{ 的表达式} \quad \alpha = -\frac{1}{3} h_{xx} \cdot t_c \quad (9.24)$$

式中 t_c 为相关时间。 (9.24) 式表明高流速梯度是 α 及应系数的量度，因为 α 是质量，而 h_{xx} 是高流速梯度，当流速梯度为零时，高流速梯度 (即 t_c) 为零， α 为零。

计入高流速梯度之律为 $j = \sigma / (\vec{E}_0 + \vec{V}_0 \times \vec{B}_0 + \left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle)$

$$\text{高流电场} \quad \vec{E} = \left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle = \alpha \vec{B}_0 + \beta \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \vec{B}_{0j}}{\partial x_k} + \dots$$

$$= \alpha \vec{B}_0 + \beta \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \vec{B}_{0k}}{\partial x_j} + \dots$$

$$= \alpha \vec{B}_0 - \beta \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \vec{B}_{0k}}{\partial x_j}$$

$$= \alpha \vec{B}_0 - \beta \nabla \times \vec{B}_0$$

$$= \alpha \vec{B}_0 - \beta \mu j \quad (9.25) \quad \text{物理意义} \quad (9.25)$$

代入边界条件: $\vec{j} = \sigma (\vec{E}_0 + \vec{V}_0 \times \vec{B}_0 + \alpha \vec{B}_0 - \mu \beta \vec{j})$

可求得等效电导率: $\sigma_{\text{eff}} = \frac{\sigma}{1 + \mu \beta \sigma}$ (9.25)

可见湍流的作用使电导率减小,
另外可以看作是应添上一个平均电流 $\alpha \vec{B}_0$, 并行于场。

9.3.4 Braginsky 的弱非轴对称理论

1. 根据 Cowling 定理, 完全轴对称的发电机过程不能维持轴对称磁场
现在讨论近似轴对称的过程, 由一个完全的轴对称磁场和一个弱非
轴对称场迭加而成。当电阻耗散较小时, 通过一个足够有限的速度可
使纵向场转换为轴向场, 再加上取之无禁, 则可以维持几乎轴对称
的发电机过程。在此过程中有三种不同尺度: 磁场的尺度和非
轴对称场的尺度。

2. 地球发电机

i. 在柱坐标 (r, θ, z) 中, 涡电流和磁场为

$$\vec{V}(r, \theta, z, t) = V_0(r, \theta, z) + \epsilon \vec{V}_1(r, \theta, z, t) \quad (9.26)$$

$$\vec{B}(r, \theta, z, t) = B_0(r, \theta, z) + \epsilon \vec{B}_1(r, \theta, z, t) \quad (9.27)$$

意味着 \vec{V}_1, \vec{B}_1
都为 $O(\epsilon)$, 其中 $\epsilon \ll 1$, 下面“ \circ ”的量表示对 ϵ 无关的量。

$$\vec{V}_0(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{V}(r, \theta, z) dz$$

下标“0”为非轴对称部分, 可中的平均为零。 $\langle \vec{V}_1 \rangle = \langle \vec{B}_1 \rangle = 0$

i. 喷射理论中我们将速度和磁场表示为平均场和扰动场之和
 $\vec{V}(9.26), \vec{B}(9.27)$ 相加, 形成上类同, 化物理意义更显而易见。

ii. 利用磁场无源 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, [流体不可压缩 $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, 将平均场表示为
纵向分量和横向分量之和]

$$\vec{V}_0(r, \theta, z) = V_\phi(r, \theta, z) \hat{\phi} + \vec{V}_\perp(r, \theta, z) \quad (9.28)$$

$$\vec{B}_0(r, \theta, z) = B_\phi(r, \theta, z) \hat{\phi} + \vec{B}_\perp(r, \theta, z) \quad (9.29)$$

代入平均场方程 (9.11)

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial z} = \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times \vec{E} + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_0$$

其中横向分量满足 (9.9) 式。即

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial z} + r (\vec{V}_0 \cdot \nabla \frac{\partial B_\phi}{\partial r}) = r \vec{B}_\perp \cdot \nabla \frac{V_\phi}{r} + (\nabla \times \vec{E})_\phi + \eta_m (\nabla^2 - \frac{1}{r^2}) B_\phi \quad (9.30)$$

(9.9) 式推导过程中未计从运动到旋进场 (9.30) 式中加入该次, 式中只

Laplace 方程 $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$
 平均电场 $\vec{E}(r, \theta) = \vec{E}_0 \langle \vec{y}_1 \times \vec{\theta}_1 \rangle$, $\langle \cdot \rangle$ 表示平均值.
 对于极向场 \vec{B}_p , 引入磁势 A_T , $\vec{B}_p = \nabla \times \vec{A}_T$, $\vec{A}_T = A_T \hat{\theta}^0$

$$\vec{B}_p = \nabla \times [A_T(r, \theta) \hat{\theta}^0]$$

极向场可用 A_T 表示

$$\frac{\partial A_T}{\partial t} + \frac{1}{r} (\vec{V}_p \cdot \nabla) (r A_T) = E_0 + \eta_m (\nabla^2 - \frac{1}{r^2}) A_T \quad (9.31)$$

式中 E_0 为平均场 \vec{E} 的 $\hat{\theta}^0$ 分量

方程 (9.30) 表明 侧速度 $w = \frac{V_p}{r}$ 与极向场 B_p 成正比 $B_p \cdot \nabla w$, 可以认为是向场的源, 或者说转子转动 诱发极向场产生侧向场 (9.31) 表示非饱和状态下转子的平均电场 E_0 可以度量侧向场, 而极向场通过转子产生侧向场 (9.30), 从而构成圆转的发电机过程.

iii 为了使极向场的强度与转子转速 w 相同, (9.31) 式右边第二项必须相同, 即要利用 η_m 为 E^2 的系数. 记 $\eta_m = \epsilon^2 / \eta_{m0}$, 则 $\eta_{m0} = O(1)$ 为 $\epsilon \rightarrow 0$ 时.

$$\text{磁阻系数} R_m = \frac{V_0 L_0}{\eta_{m0}} = \epsilon^{-2} \left(\frac{V_0 L_0}{\eta_{m0}} \right) \quad (9.32)$$

其中 V_0 为极向速度的典型值, L_0 为转子长度.

Braginskii 的方法对于还假设. 即平均速度的主要部分是极向速度 $V_p \hat{\theta}^0$, 而且 $\vec{V}_p = G^2 \vec{V}_{ip}$, $\vec{V}_{ip} = 0(1)$, $\vec{V} = V_p \hat{\theta}^0 + \vec{V}_i + \epsilon^2 \vec{V}_{ip}$

$$\text{这表示磁 Reynolds 数 } R_{mo} = \frac{V_0 L_0}{\eta_{m0}} = 0(1) \quad \vec{V}_i = V_p \hat{\theta}^0 + \vec{V}_{ip} = V_p \hat{\theta}^0 + \epsilon^2 \vec{V}_{ip}$$

$$\text{所以 } R_m = \epsilon^{-2} R_{mo} = \epsilon^{-2} 0(1).$$

可得当小参数 ϵ 的量级为 $\epsilon = O(R_m^{1/2}) \ll 1$

$$R_m \gg 1$$

表明弱非饱和情况下发电机过程是一类大磁穿深数问题, 其最高次贡献为磁场所需维持.

9.3.5 平均场电动势，湍流发电机

1. Parker 认为对于众多小尺度对流运动产生的净效果是生成大尺度电场 ($\alpha \vec{B}_0$, $\because \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle \sim \alpha \vec{B}$. 即流动电场 $\sim \alpha \vec{B}$), 从而有相对应的平均电场 ($\nabla \times \vec{A}_0$). 有序者研究过一些研究, 他们考虑为尺度的湍流运动 \vec{v} , 统计上稳定 (Steady) 和均匀 (homogeneous) 且各向同性. 将来在小尺度上产生 湍流磁感应强度 且维持大尺度上 平均磁感应强度, 因此不均匀为 $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$. 这样产生成为简单的速度加速度

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}_0 + \vec{b}) = \nabla \times [\vec{v} \times (\vec{B}_0 + \vec{b})] + \eta_m \nabla^2 (\vec{B}_0 + \vec{b}) \quad (9.33)$$

对于 x 和 L 之间的某一个尺度, 假设的. 但是湍流速度和湍流磁场的平均 $\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{b} \rangle = 0$. (9.33) 式变为

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{b}) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_0 \quad (9.34)$$

(9.33) 式减去 (9.34) 式, 得到用 \vec{B}_0 表示的 \vec{b} 的方程

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0 + \vec{v} \times \vec{b} - \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle) + \eta_m \nabla^2 \vec{b} \quad (9.35)$$

即 (9.11) 和 (9.12) 式

为使方程 (9.34) (9.35) 封闭 (现有 9 个变量 $\vec{B}_0, \vec{v}, \vec{b}$) 有必要 $\langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle$ 的形式, 以下将讨论

通常考虑 假想各向同性 流动 (pseudo-isotropic Turbulence), 即流动关于原点对称不再关心速度. 没有 (轴对称) 对称, 不可能发出与侧风相关联. 于是了.

$$1. \text{ 设 } \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle = \omega \vec{B}_0 - \beta \nabla \times \vec{B}_0$$

代入方程 (9.34)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} &= \nabla \times (\omega \vec{B}_0) - \beta \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_0 \\ &= \nabla \times (\alpha \vec{B}_0) + (\eta_m + \beta) \nabla^2 \vec{B}_0 \end{aligned} \quad (9.36)$$

可见湍流的 \vec{B}_0 由 ω (转动) 和 α (剪切电场 $\alpha \vec{B}_0$), 通过 $\beta \nabla^2 \vec{B}_0$ 和 η_m 以及 β 所加

$$\partial(\vec{v}_b) = \frac{\rho_b}{\rho} \vec{v}_b$$

7.1 同场合下 係數 α, β 的估計 可參考 Moffatt, 1978, Chapt. 7.

一般情況下 (9.35) 式的求解是困難的. (3) 若子代非線性次 $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{b}) - \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle$ 代表小尺度 (指的流場) 的 Reynolds 數 ($U_b L_m$) 小時 (表示擴散次 速率慢) 這些非線性次可忽略. 這是一種准線性近似 (或一阶半準確) (9.35) 可簡化為

$$\partial = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 \vec{b} \quad (9.16)$$

$\therefore \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$ 和 $(\vec{v} \times \vec{b})$ 同量級. 一併忽略. 即 \vec{b} 滿足 (9.16) 式.

Moffatt P. 162

假定不可逆流 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 和大尺度平均值 $\vec{B}_0 = \langle \vec{B} \rangle + \text{osc.}$, 则 $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}_0 = 0$ (9.16) 式改寫為 $\partial = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v} + \eta_m \nabla^2 \vec{b}$

這方程關於 \vec{v} 和 \vec{b} 是線性的. 可利用 Fourier 變換求解
 \vec{b} . 利用 \vec{v} 和 \vec{B}_0 求得 $\langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle$

2. 稳定随机矢量场的谱性质

为了求解方程(7.16), 我们需要理解随机速度场的一些性质.

随机速度场 $\vec{v}(\vec{r}, t)$. 从统计角度来讲, 在空间中均匀. 在时间而言, 稳定.

$$\vec{u}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \vec{v}(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{r} dt \quad (9.37)$$

$$\text{反变换 } \vec{v}(\vec{r}, t) = \iint \vec{u}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} d\omega \quad (9.38)$$

\vec{k} 为实数, \vec{v} 为复数, 对所有的 (\vec{k}, ω) 有

$$\vec{u}(-\vec{k}, -\omega) = \vec{u}^*(\vec{k}, \omega) \quad (9.39)$$

"*" 代表复共轭.

$$\text{假设不可压缩, 则 } \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = 0, \text{ 有 } \vec{k} \cdot \vec{u}(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (9.40)$$

$$\text{现在考虑平均量 } \langle u_i(\vec{k}, \omega) u_j^*(\vec{k}', \omega') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \langle \vec{v}_i(\vec{r}, t) \vec{v}_j^*(\vec{r}', t') \rangle \cdot$$

$$e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega t + \omega' t')} d\vec{r} d\vec{r}' dt dt' \quad (9.41)$$

$$\text{指数部分可写成: } -[\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') + (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}' - \omega(t - t') - (\omega\omega')t']$$

令 $\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}'$, $t = t - t'$, 重积分计算中, 先对 \vec{r} 积分; \vec{r}' 保持常数

$$d\vec{r} \rightarrow d\vec{s}$$

$$+ 19 = 7$$

(9.41) 式化成：

$$\langle u_i(\vec{k}, \omega) u_j^*(\vec{k}', \omega') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \langle v_i(\vec{r}, t) v_j^*(\vec{r}', t') \rangle e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-i(\vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t')} d\vec{r} dt d\vec{r}' dt' \quad (9.42)$$

统计上的独立和均匀，相关性仅限于空间位置上，即 $\vec{r} - \vec{r}'$ 和 $t - t'$ 也即仅限于 \vec{k} 和 \vec{k}' 。当 $\vec{k} = \vec{k}'$, $\omega = \omega'$ 时，上式简化为零。

$$\langle v_i(\vec{r}, t) v_j^*(\vec{r}', t') \rangle = R_{ij}(\vec{\xi}, \tau) \quad (9.43)$$

$$由(9.43)式得 \int d\vec{r} d\vec{r}' d\tau \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\omega - \omega') \int e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}'} e^{i(\omega - \omega') t'} d\vec{r}' dt' = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta(\omega - \omega')$$

因此(9.42)式可写成：

$$\langle u_i(\vec{k}, \omega) u_j^*(\vec{k}', \omega') \rangle = \bar{R}_{ij}(\vec{k}, \omega) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta(\omega - \omega') \quad (9.44)$$

$$其中 \bar{R}_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint R_{ij}(\vec{\xi}, \tau) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{\xi} - \omega \tau)} d\vec{\xi} d\tau \quad (9.45)$$

$$R_{ij}(\vec{\xi}, \tau) = \iint \bar{R}_{ij}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{\xi} - \omega \tau)} d\vec{k} d\omega \quad (9.46)$$

$\langle u_i(\vec{k}, \omega) u_j^*(\vec{k}', \omega') \rangle$ (9.43) 式中之 $R_{ij}(\vec{k}, \omega)$ 描述了两个空间运动的相互关联。

$$\Rightarrow \bar{R}_{ij}(\vec{k}, \omega) \\ \langle u_j(-\vec{k}, -\omega) u_i^*(-\vec{k}', -\omega') \rangle \bar{R}_{ji}(-\vec{k}, -\omega) \delta(-\vec{k} + \vec{k}') \delta(-\omega + \omega') = \langle u_j(-\vec{k}, -\omega) u_i^*(-\vec{k}', -\omega') \rangle$$

$$根据(9.39)式，上式 = \langle u_j^*(\vec{k}, \omega) u_i(\vec{k}', \omega') \rangle = \bar{R}_{ji}(\vec{k}, \omega) \delta(-\vec{k} + \vec{k}') \delta(\omega + \omega')$$

$$\therefore \bar{R}_{ij}(\vec{k}, \omega) = \bar{R}_{ji}(-\vec{k}, -\omega)$$

由(9.44)得：

$$\bar{R}_{ji}(\vec{k}, \omega) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta(\omega - \omega') = \langle u_i(\vec{k}, \omega) u_j^*(\vec{k}', \omega') \rangle$$

$$\bar{R}_{ji}^*(\vec{k}, \omega) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta(\omega - \omega') = \langle u_j^*(\vec{k}, \omega) u_i(\vec{k}', \omega') \rangle$$

$$= \langle u_i(\vec{k}', \omega') u_j^*(\vec{k}, \omega) \rangle$$

$$= \bar{R}_{ij}(\vec{k}, \omega) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta(\omega - \omega')$$

由以上两式，

$$\bar{R}_{ij}(\vec{k}, \omega) = \bar{R}_{ji}(-\vec{k}, -\omega) = \bar{R}_{ji}^*(\vec{k}, \omega) \quad (9.47)$$

根据 $\nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = 0$ ，由 Fourier 变换： $\vec{k} \cdot \vec{u}(\vec{k}, \omega) = 0$

$$\text{即 } k_i u_i = 0, k_i u_j^* = 0 \quad \therefore k_i \bar{R}_{ij} = 0 \quad (9.48-1)$$

$$\text{同理 } k_i u_j = 0 \quad \text{由上题}(k_j \text{ 为常数}) \quad k_j u_i^* = 0, k_j u_i u_j^* = 0 \\ k_j \bar{R}_{ij} = 0 \quad (9.48-2)$$

定义的语义学 E(t, w)

$$\bar{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{2} \int_{S_R} \bar{\Psi}_{\text{in}}^*(\vec{k}, \omega) dS \quad (7.49)$$

和文化空间。半径为大的城市上进行。

$$\frac{1}{2} \langle \vec{V}^2 \rangle = \frac{1}{2} R_{\phi}(0,0)$$

政治小説

$$= \frac{1}{2} \iint \bar{\mathbf{E}}_{ii}(k, \omega) dk d\omega = \iint E(k, \omega) dk d\omega \quad (9.50)$$

$$(7.50) \text{ 式的获得光谱为 } R_{ij}(\vec{k}, \omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_{ij}(k, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dk d\omega \right|^2$$

$$3. i=j \text{ 时, } \vec{z} = \vec{v} \cdot \vec{r} = 0, \quad \vec{t} = \vec{r} - \vec{k}^1 = 0.$$

$$\therefore \frac{1}{2} R_{\text{ff}}(0,0) = \frac{1}{\pi} \iint \tilde{P}_{\text{ff}}(\vec{k}, \omega) d\vec{k} d\omega = \iint \tilde{E}(R, \omega) dR d\omega$$

$d\tilde{R}$ 为 R 空间体积，当方向相同时有 $d\tilde{R} = 4\pi \tilde{R}^2 d\tilde{R}$ ，一般情况下 $d\tilde{R}$ 表示 $dR d\omega d\tilde{R}$ ，他的意义是 \tilde{R} 从零到 ∞ ， ρ 为质量密度，对 $\rho \tilde{R} (R, \omega) dR d\omega$ 为：没超过 $(R, R+dR)$ ，频率在 $(\omega, \omega+d\omega)$ 范围内的物质数（或者 9.501 式）

摘要至：对所有的 $k, m \neq 0$ (见(9.5)式)，因此有

$$E(k, \omega) \geq 0 \quad \text{对所有的 } k, \omega \text{ 成立} \quad (9.51)$$

对于向量场(vorticity) $\vec{\omega}(r, t) = \nabla \times \vec{U}(r, t)$, Fourier 变换后有 $\vec{\omega}(\vec{k}, \omega) = i \vec{k} \times \vec{u}(\vec{k}, \omega)$

$$\langle \omega_i(\vec{r}, \omega) \omega_j(\vec{r'}, \omega') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \omega_i(\vec{r}, \omega) \omega_j(\vec{r'}, \omega') \rangle e^{-i(\vec{r}-\vec{r'}) \cdot \vec{\delta}} \delta(\vec{r}-\vec{r'}) \delta(\omega-\omega')$$

$$\sum_{k=1}^n \langle \vec{w}_k, \vec{c} \rangle = \left\langle \vec{w}_1, (\vec{v}_1, x_1) \right\rangle + \left\langle \vec{w}_2, (\vec{v}_2, x_2) \right\rangle + \dots + \left\langle \vec{w}_n, (\vec{v}_n, x_n) \right\rangle.$$

$$\langle \omega_i(k, \omega) \omega_j^*(k', \omega') \rangle = \sum_{\text{all } j} \delta(k-k') \delta(\omega-\omega')$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ipq} k_p \bar{e}_{ij}(k, \omega) \delta(k - k') \delta(\omega)$$

$$\therefore \Omega_{ij}(\vec{k}, \omega) = \sum_{\sigma} \epsilon_{ik\sigma} \epsilon_{jk\sigma} k_i k_j \delta_{\omega \omega_g} \quad (9.52)$$

本長(9.458)式, $k_i \bar{z}_{ij} = 0$, $k_j \bar{z}_{ij} = 0$,

化 (9.52) 式中是含有 m 的 (若 $m=0$, 则 $E_{0km}=0$), 但 k_1 与 k_2 等于 \pm ($k_1=0$, 则 $k_2 \mp m \neq 0$), 于是 $P \neq 0$. 又 $P \neq m$.

主之時。 $\varepsilon_{km} = \varepsilon_{123}$. $\varepsilon_{jpf} = \varepsilon_{123}$. 由之 $k=2 \neq f=3$, $p=2 \neq m=3$

$$\therefore \omega = k \cdot \varphi(k, \omega) \quad (k \neq 0) \quad (9.53)$$

$$\text{从式(9.5-3), } \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}^2 \rangle = \frac{1}{2} \iint_{S_{R,\omega}} d\vec{k} d\omega = \iint_{k \in (R,\omega)} dR d\omega. \quad (9.5-4)$$

空间

类比传播速率 $E(k, \omega)$, 定义螺旋速率函数 (helicity spectrum function)

$$\bar{F}(k, \omega) = i \int_{S_k} E(k, \omega) k_R \bar{\epsilon}_{ij} (\vec{k}, \omega) dS \quad (9.55)$$

考虑运动学螺旋 $\vec{v} \cdot \nabla \times \vec{v}$ $\vec{\omega}(r, t) = \nabla \times \vec{v}(r, t)$

$$\begin{aligned} \langle V_i(\vec{k}, \omega) \omega_j^*(\vec{k}, \omega') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \langle V_i(\vec{k}, \omega) \omega_j(\vec{k}', \omega') \rangle e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \omega' dt} \delta(\vec{k}-\vec{k}') \delta(\omega-\omega') \\ &= \langle u_i(\vec{k}, \omega) u_j^*(\vec{k}', \omega') \rangle i \epsilon_{ijk} k_p \\ \therefore \langle V_i(\vec{k}, \omega) \omega_j(\vec{k}', \omega') \rangle &= i \epsilon_{ijk} k_p \langle V_i(\vec{k}, \omega) V_j(\vec{k}', \omega') \rangle = i \epsilon_{ijk} k_p \int \bar{\epsilon}_{ij}(\vec{k}, \omega) e^{ik \cdot r} dr \\ \text{且 } j=i, \vec{k}=\vec{k}', k=k' \text{ 时, 有} \\ \langle V_i(\vec{k}, \omega) \omega_i(\vec{k}, \omega') \rangle &= i \epsilon_{ijk} k_p \int \bar{\epsilon}_{ij}(\vec{k}, \omega) e^{ik \cdot r} dr, dk \text{ 和 } k \text{ 无关, } dk = dk' \text{ 且 } dk = dk' \\ &= \int \bar{F}(k, \omega) dk = \langle \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{v} \rangle \quad (9.56) \end{aligned}$$

[宏观上 $\vec{v} = \vec{v}(\vec{k}, \omega)$, $\nabla \times \vec{v} = \nabla \times \vec{v}(\vec{k}, \omega - c)$]

螺旋速率函数 $\bar{F}(k, \omega)$ 是实数。从上式表式 (9.55) 来看, $\bar{\epsilon}_{ij}(\vec{k}, \omega)$ 是虚数, 从 (9.47) 式可知, $\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}$, ϵ_{ij} 为厄密矩阵, 故 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 也是厄密矩阵, 其共轭转置为虚数。 ϵ_{ijk} 为偶数, 所以 $\bar{F}(k, \omega)$ 为偶数, 而速度场有反射对称时, $\bar{F}(k, \omega) = 0$ 。而已知, 在电机绕组中, 不仅有反射对称, 还有重要的条件, 因此 $\bar{F}(k, \omega)$ 可以认为是平行于不带电反射对称的随机速度场 \vec{v} 。利用平均螺旋速率函数的方法。

随机随机速度场 \vec{v} , 从统计上讲为各向同性 (这里指同向性的总和是旋转不变, 但是参考系做反射变换时, 并非让其不变), 且均匀, 利用函数 $E(k, \omega)$ 和 $\bar{F}(k, \omega)$ 以及完全相关 $\bar{\epsilon}_{ij}(k, \omega)$, 根据 (9.49), (9.50) 及 (9.56) $\bar{\epsilon}_{ij}(k, \omega)$ 第一式的表达式

$$\bar{\epsilon}_{ij}(k, \omega) = \frac{\bar{E}(k, \omega)}{4\pi k^4} (k \delta_{ij} - k_i k_j) + \frac{i \bar{F}(k, \omega)}{8\pi k^4} \epsilon_{ijk} k_k \quad (9.57)$$

推导:

① 各向同性介稳中, 单位质量的表达式。

\vec{v} 为速度, 取 \vec{v} 为子量, 对于各向同性介稳, 有流动, 流动随时间就是一个特殊方向。

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\text{由} \vec{k} = (0, 0, 1) \Rightarrow \vec{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \vec{I}_L + \vec{I}_T$$

$$\vec{I}_L = \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{k_i k_j}{k^2}$$

$$\vec{I}_T = \vec{I} - \vec{I}_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

② 不考虑 (9.50) 式

$$\frac{1}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{1}{2} \iint \bar{E}_{ii}(\vec{k}, \omega) dk d\omega \quad \text{各向同性假设。}$$

$$J_R = \frac{1}{2} \iint \bar{E}_{ii}(\vec{k}, \omega) 4\pi k^2 dk d\omega = \iint \bar{E}(\vec{k}, \omega) dk d\omega$$

$$\text{可得 } \bar{E}_{ii}(\vec{k}, \omega) = \frac{\bar{E}(\vec{k}, \omega)}{8\pi k^2}$$

③ 考虑 (9.56) 式

$$\langle \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \rangle = \langle v_i(\vec{r}, t) \omega_i(\vec{r}, t) \rangle = i \int \epsilon_{ijk} R_k \bar{E}_{ij}(\vec{k}, \omega) dk d\omega$$

$$= i \epsilon_{ijk} \int R_k \bar{E}_{ij}(\vec{k}, \omega) 4\pi k^2 dk d\omega \quad (\text{式 9.57})$$

$$= \int F(\vec{k}, \omega) dk d\omega$$

$$\therefore i \epsilon_{ijk} R_k \bar{E}_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{F(\vec{k}, \omega)}{4\pi R^4}$$

$$\bar{E}_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{F}{4\pi k^2 R_k i \epsilon_{ijk}}$$

$$\bar{E}_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{F}{4\pi k^2 R_k i \epsilon_{ijk}}$$

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} \quad \therefore \bar{E}_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{iF}{4\pi R^2 k_k k_k} \epsilon_{ijk} R_k = \frac{iF}{4\pi R^4} \epsilon_{ijk} R_k$$

取 k_k/k_i 为常数

$$\text{由} \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{B} \rightarrow \langle \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \rangle = 2 \langle v_i \partial_i \rangle \quad \text{作向同性假设}$$

$$\text{由} \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \vec{v} \quad \therefore \bar{E}_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{iF}{8\pi R^4} \epsilon_{ijk} R_k \quad (\text{由} \epsilon_{ijk} \langle v_i \partial_i \rangle)$$

④ 在流动或者随机流动场中没有反射对称，但在转动参考系内有了特殊方向，即西方向，相当于反射。 \vec{v} 在西方向投影为零， $\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = 0$ 。属于纵波部分。 $\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{k}^2$ 所以纵波部分、横波没有； $\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{E(k, \omega)}{2\pi k^4}$ ，纵波由 $\frac{E(k, \omega)}{4\pi k^4}$ 形成一般精简为 $\frac{E(k, \omega)}{4\pi k^4} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2})$ 。

$$\text{因此 } \bar{u}_{ij}(k, \omega) = \frac{E(k, \omega)}{4\pi k^4} (\delta_{ij} - k_i k_j) + \frac{iF(k, \omega)}{8\pi k^4} \epsilon_{ijk} k_k$$

因为在反射对称的流动（随机流动）场，在转动参考系中规定是自然的转动参考系，而且西的方向是特殊的方向，不会有关于反射对称性， \bar{u}_{ij} 就不再转动了，不等于零，但流动对称性不变。也就是说我们讨论的是非对称问题。（Prandtl 1934）

3. 一阶半角近似，随机速度场记为 \vec{v} ；
假定 \vec{v} 是 (r, t) 的函数且随时间变化。有 Fourier 变换

$$\vec{u}(k, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \vec{v}(r, t) e^{-ik \cdot r - i\omega t} dr dt \quad (9.37)$$

对于不可压缩流体 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 。一阶半角近似下，设平均速度 $\bar{v}_0 = 0$ ，平均加速度 $\bar{a}_0 = 0$ 。由动量守恒和动量矩守恒方程为

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 \vec{b} \quad (9.38)$$

$$= (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v} + \eta_m \nabla^2 \vec{b}$$

由 Fourier 变换后，有

$$(-i\omega + \eta_m k^2) \vec{b}(k, \omega) = i(\vec{B}_0 \cdot \vec{k}) \vec{u}(k, \omega) \quad (9.39)$$

现计算 $\langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle = \langle \vec{v}(r, t) \times \vec{b}(r, t) \rangle$

$$(9.39) \Rightarrow \vec{b}(k, \omega) = \frac{i(\vec{B}_0 \cdot \vec{k})}{-i\omega + \eta_m k^2} \vec{u}(k, \omega) = \frac{\vec{u}(k, \omega)}{\omega^2 + \eta_m^2 k^4} i(\vec{B}_0 \cdot \vec{k}) (\eta_m k^2 + i\omega)$$

$$\therefore \langle \vec{v}(r, t) \cdot \vec{v}(r', t') \rangle = R_{ij}(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$= \iint \bar{u}_{ij}(k, \omega) e^{i(k \cdot \vec{r} - \omega t)} dk d\omega \quad (9.40)$$

$$\bar{u}_{ij}(k, \omega) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta(\omega - \omega') = \langle u_i(k, \omega) u_j^*(k', \omega') \rangle \quad (9.41)$$

$$\therefore \langle \vec{v}(r, t) \cdot \vec{v}(r', t') \rangle = \iint \bar{u}_{ij}(k, \omega) u_j^*(k', \omega') dk d\omega$$

相對於(9,4)
之變換
→ 逆變換
逆變換
 $\vec{v}(x,t)$
 $b(x,t)$

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{v}(r, \tau) \times \vec{b}(r, \tau) \rangle = \iiint \frac{\langle \vec{u}(\vec{k}, \omega) \times \vec{u}^*(\vec{k}', \omega') \rangle i \vec{k} \cdot \vec{k}'}{-i\omega + \eta_m k^2} e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r} - i(\omega-\omega')\tau} d\vec{k} d\vec{k}' d\omega d\omega' \\
 & \xrightarrow{\text{using } \langle \vec{u}(\vec{k}, \omega) \vec{u}^*(\vec{k}', \omega') \rangle = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta(\omega - \omega')} \\
 & = \iiint \frac{\langle \vec{u}(\vec{k}, \omega) \times \vec{u}^*(\vec{k}, \omega') \rangle i \text{Re} j k_j (\eta_m k^2 + i\omega)}{(\omega + \eta_m k^2)} d\vec{k} d\omega \\
 & = \iiint \frac{i \epsilon_{ijk} \langle u_k u_l^* \rangle \text{Re} j k_j (\eta_m k^2 + i\omega)}{\omega + \eta_m k^2} d\vec{k} d\omega
 \end{aligned}$$

$\langle u_k u_{k'}^* \rangle = \bar{u}_{kk'}(\vec{r}, \omega)$, 是虛數, \therefore 並非實數. B, j, k, j' 均為實數
 $\bar{v}(\vec{r}, \omega), \bar{b}(\vec{r}, \omega)$ 也為實數. \therefore 方程則為虛數解

$$\vec{\Sigma}_i = (\vec{V} \times \vec{b})_i = i \eta_m^2 \epsilon_{ijk} \int \int (\omega + \eta_m^2 k^4)^{-1} k^2 k_j B_{0j} \bar{\Psi}_{Rk}(k, \omega) dk^2 d\omega \quad (9-59)$$

由試料得之

$$\xi_i = \alpha_{ij} \beta_{v_j}$$

$$\alpha_{ij} = i \eta_m \epsilon_{ijk} \int \int (\omega^2 + \eta_m^2 k^4)^{-1} k^2 k_j \tilde{E}_{k\omega}(k, \omega) dk d\omega \quad (9.60)$$

$$\text{从向量} \alpha_i \text{出发, } \alpha = \frac{1}{3}\alpha_{ii} \quad (-\alpha_j \neq \alpha_{ij} = \alpha_{ji})$$

$$\text{由(9.55)式 } \bar{f}(k,\omega) = i \int_{S_k} \sum_{i,j} k_i k_j \bar{\Xi}_{ij}(k,\omega) dS \quad (9.56)$$

4. 将(9.20)式中, 下标 j 改为 i

$$d_{ii} = i \gamma_m \sum_{k,l} \int \int (\omega + \eta_m k^+)^{-1} k^+ k_i \bar{E}_{kl} dk dk$$

将 E_{ikl} 变为 E_{kil} , $E_{kil} = -E_{ikl}$, 则 k 重, $\rightarrow k$ 重, 行合(9.5)式

$$\therefore \alpha = -\frac{1}{3} \eta_m \left| \int \frac{k^3 \tilde{F}(k, \omega)}{\omega + \eta_m k^2} dk d\omega \right| \quad (9.61)$$

由丁丁的定义(8.55)式, 端点规定表场为球面. 所以上式左边随
机速度修正项在各向同性都成立.

很显然， α 是螺旋谱函数 F 的常数系数。因此 $F(k, \omega)$ 可正亦可负。

假設 $F(k, \omega)$ 對於所有 k, ω 均為不變量，即 $\vec{k}, \vec{\omega} > 0$ (9.5b)

2.) 由(9.61)式可見, $\alpha < 0$, 對所有 $\omega > \omega_0$ $F(\omega) \leq 0$ 但不成立.

有270.

在湍流情况下，采用一阶差值法，有

$$O(7 \times \frac{1}{t}) = \frac{Vt}{t}$$

- 一个半径近似的条件是 $O(\vec{v} \cdot \vec{r}) \ll$ 其他项 $\sim O(\vec{v} \times \vec{r})$. 因此有

$$\frac{\eta_m b}{k_0} \gg \frac{v b}{k_0} \sim O(\vec{v} \cdot \vec{r})$$

$$\frac{\eta_m}{k_0} \gg v = \frac{k_0}{\tau_0} \Rightarrow \frac{\eta_m}{k_0} \gg \frac{1}{\tau_0} \Rightarrow \eta_m k^2 \gg \omega$$

因此 - 一个半径近似成立时有 $\eta_m k^2 \gg \omega$, $(\omega^2 + \eta_m^2 k^4)^{-1} \approx \eta_m^{-2} k^{-4}$
代入(9.61)

$$\alpha = -\frac{1}{3\eta_m} \int k^{-2} \tilde{F}(k) dk \quad (9.62)$$

$$\tilde{F}(k) = \int \tilde{f}(k, \omega) d\omega$$

Parker 1934
螺纹走小尺度流动的不稳定性的影响. 从(9.62)式可知 α 与应
归一化于半径的螺纹, 相应于绕转运动方向的扭转. 例如由于 Coriolis 力
作用的扭转. 在 Parker 的研究中正需要这种扭转. 但转向磁场通量
梯度不能正确地量. 非零螺度对于发电机理论的成功似乎
是十分重要的.

9.3.6 平均磁电动势の α^2 発电机

次一階を省略以下、平均磁电动势の高周波を発电机方程式

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times \vec{\xi} + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_0 \quad (9.11)$$

$$\vec{\xi} = \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle = \alpha_{ij} B_{0j} + \beta_{ijk} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} + \dots \quad (9.19)$$

- 26 -

对于均匀且无向量场的简单情况，有

$$\vec{\epsilon} = \alpha \vec{B}_0 - \beta \nabla \times \vec{B}_0 + \dots \quad (9.63)$$

代入(9.11)， $\frac{\partial \vec{B}_\varphi}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_p \times \vec{B}_0) + \nabla \times (\alpha \vec{B}_0) - \nabla \times (\beta \nabla \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_0 \quad (9.64)$

在柱坐标系下，将平均场分解为径向分量和极向分量，则

$$\vec{V}_p = r \omega \hat{\varphi} + \vec{V}_p \quad (9.65)$$

$$\vec{B}_0 = B_\varphi \hat{\varphi} + \vec{B}_p \quad (9.66)$$

(9.34) 式及(9.22)式代入得： $\vec{B}_\varphi = \vec{A}_\varphi \quad (9.30), (9.31)$

$$\frac{\partial \vec{B}_\varphi}{\partial t} + r(\vec{V}_p \cdot \nabla) \frac{\vec{B}_\varphi}{r} = r(\vec{B}_p \cdot \nabla) \frac{V_\theta}{r} + (\nabla \times \vec{\epsilon})_\varphi + \eta_m (\nabla^2 \frac{1}{r^2}) \vec{B}_\varphi \quad (9.30)$$

$$\frac{\partial \vec{A}_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} (\vec{V}_p \cdot \nabla) (r \vec{A}_\varphi) = \vec{\epsilon}_\varphi + \eta_m (\nabla^2 \frac{1}{r^2}) \vec{A}_\varphi \quad (9.31)$$

$$\nabla \times \vec{\epsilon} = \nabla \times (\alpha \vec{B}_0) - \nabla \times (\beta \nabla \times \vec{B}_0)$$

$$= \nabla \times (\alpha \vec{B}_0) + \beta \nabla^2 \vec{B}_0$$

$$(\nabla \times \vec{\epsilon})_\varphi = \nabla \times (\alpha \vec{B}_p) + \beta \nabla^2 \vec{B}_\varphi = \nabla \times (\alpha \vec{B}_p) + \beta (\nabla^2 \frac{1}{r^2}) \vec{B}_\varphi \hat{\varphi} \quad (9.67)$$

$$\vec{\epsilon}_\varphi = \alpha \vec{B}_p - \beta \nabla \times \vec{B}_p = \alpha \vec{B}_p - \beta \nabla \times (\nabla \times \vec{A}_\varphi \hat{\varphi}) = \alpha \vec{B}_p + \beta \nabla^2 (\vec{A}_\varphi \hat{\varphi})$$

$$= \alpha \vec{B}_p + \beta (\nabla^2 \frac{1}{r^2}) \vec{A}_\varphi \quad (9.68)$$

(9.67), (9.68)代入(9.30)及(9.31)，令 $\eta_{me} = \eta_m + \beta$ ，有

$$\frac{\partial \vec{B}_\varphi}{\partial t} + r(\vec{V}_p \cdot \nabla) \frac{\vec{B}_\varphi}{r} = r(\vec{B}_p \cdot \nabla) \omega + \nabla \times (\alpha \vec{B}_p) + \eta_{me} (\nabla^2 \frac{1}{r^2}) \vec{B}_\varphi \quad (9.69)$$

$$\frac{\partial \vec{A}_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} (\vec{V}_p \cdot \nabla) (r \vec{A}_\varphi) = \alpha \vec{B}_p + \eta_{me} (\nabla^2 \frac{1}{r^2}) \vec{A}_\varphi \quad (9.70)$$

η_{me} 称为等效磁导率系数。

(9.70)式表明 α 之应与运动向量变为极向场

(9.69)式中。如果忽略 $\omega = 0$ 的一次大得多，即

$$O\left(\frac{|r(\vec{B}_p \cdot \nabla) \omega|}{|\nabla \times (\alpha \vec{B}_p)|}\right) = O\left(\frac{L \omega}{\alpha}\right) \ll 1 \quad (9.71)$$

则 $\omega \approx \omega_0 \cos \theta$ 为 α 和 $|\nabla \omega|$ 的典型值。(9.71)式即为 α 等效
无极向场系数称为极向场的过量比或无极向场的等效化过量之常数。

α 等效系数极向场的定义([9.70]式，通过 $\alpha \vec{B}_p$ 定义)，无极向场的定义
([9.69]式，通过 $\nabla \times (\alpha \vec{B}_p)$ 定义)。发电机过量由 α 构成，称为
为 α^2 发电机。

和第 1320 页

α^2 发电机方程中 $\vec{V}_0 \times \vec{B}_0$ 可忽略。以 (9.64) 式简化后

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \alpha \nabla \times \vec{B}_0 + \eta_{me} \vec{J}^2 \vec{B}_0 \quad (9.72)$$

式中 α, η_{me} 为该处常数。

简单发电机方程
油井是
转动的发电机
发电机
向右运动
同时很慢地长

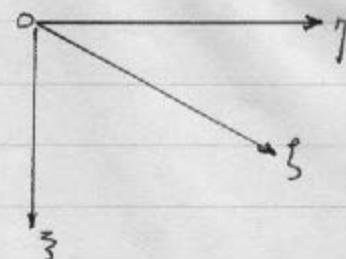
9.3.7. 发电机源

选取一个足够小的平行向场区域，因此场可看作均匀。该区域内
定义一个直角坐标系 (3.7.6)

x 平行场向场，指向左； y 指向外， z 垂直

南北子午圈相切。子午面平行于 x 轴。

通过运用带发电机方程，进一步研究磁场
的演变。



流元 固定相对流体的运动穿过该区域，因 Coriolis 力使 x
轴旋转。为简单起见，考虑流体流了半转运动。沿 x 轴方向，流体有
无限长，假设场向场在 x 方向为常数。 $\alpha = 0$ ，以上述假设后，流体
流体运动的场向场的相互作用。流体有无限长地带条件下，可严格
计算。

考虑地核附近分布有大量磁铁，即带 (r, θ, ϕ) ， $\theta = 0$ 代表地核的
转动方向，为了向带直角坐标系 (3.7.6) 的 x 轴平行方向， y 平行化 θ 方向
 z 轴为重力场。假设所有的磁铁位于子午面或经线面上。(第 9)

设 (R, θ, ϕ) 为子午磁化中心的球坐标， (P, Q) 相对于磁化中心

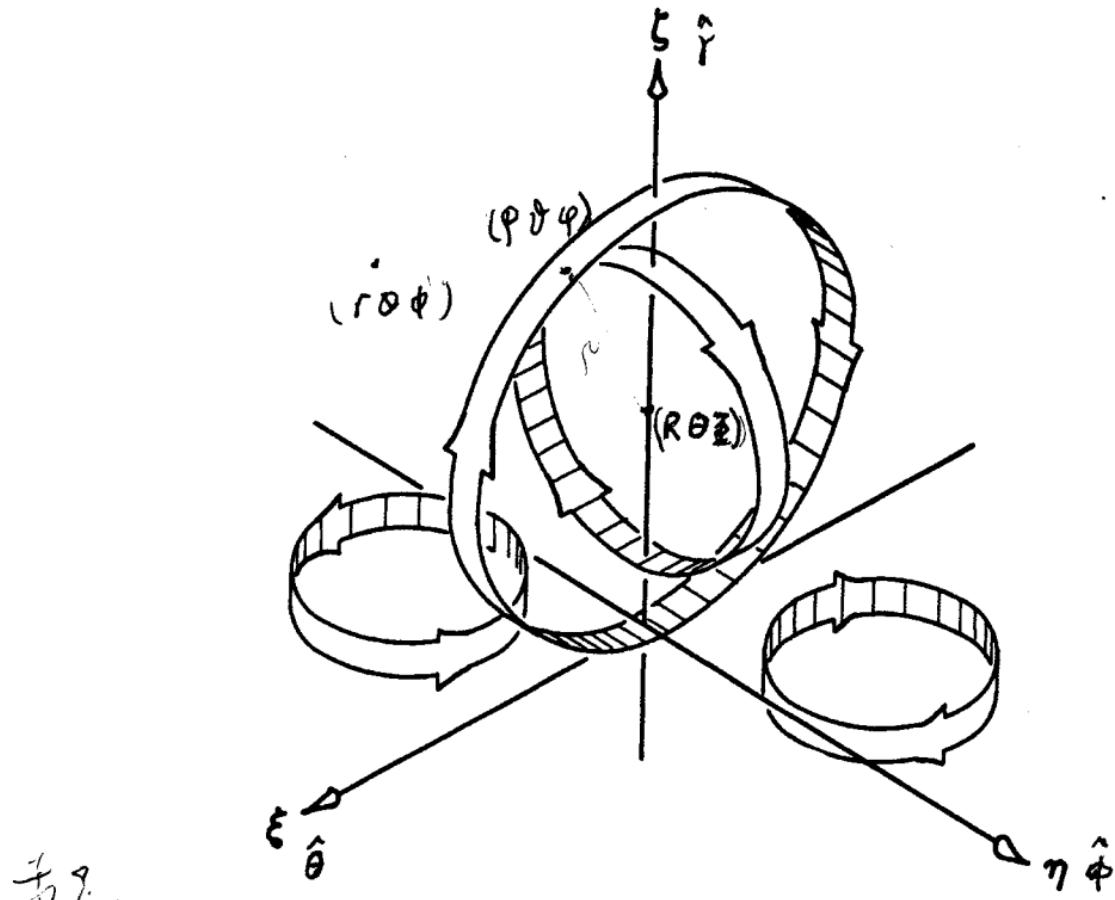


Fig. 4a.—Schematic drawing of the three sets of mutually perpendicular loops into which each closed line of force of a may be resolved.

的坐标系。某一点的坐标为 (r, θ, ϕ) ，坐标原点在地核中心。
该点与子午面 $\theta = 0$ 的距离为

$$r = R + \rho, \quad \theta = \Theta + \vartheta, \quad \phi = \bar{\phi} + \varphi$$

该点到地核的子午距离的 ρ 及其 α ，相对于地核半径 R 是什么，因此 ρ, ϑ, φ 为常数，可以为 ρ 分出来 r, θ, ϕ 。

当 $\alpha \rightarrow 0$ ，即子午距离的修正项 $\rho \sin \theta$ 相关，最终消失， $r \rightarrow \rho$ ， $\theta \rightarrow \vartheta$ ，这时 (r, θ, ϕ) 的关系为 $r \rightarrow \xi$ ， $\theta \rightarrow \eta$ ：有 $\rho \rightarrow \xi$ ， $\vartheta \rightarrow \eta$ 为方便起见用直角坐标系表示。

$$B_\rho \equiv B_\xi = -B_0 \frac{R}{\alpha} \vartheta \exp \left[-\frac{\xi^2 + R^2 \vartheta^2 + R^2 \sin^2 \Theta \eta^2}{\alpha^2} \right] \quad (9.73)$$

$$B_\vartheta = B_\eta = +B_0 \frac{R}{\alpha} \exp \left[-\frac{\rho^2 + R^2 \vartheta^2 + R^2 \sin^2 \Theta \eta^2}{\alpha^2} \right] \quad (9.74)$$

$$B_\varphi = B_\eta = 0 \quad (9.75)$$

$$(\xi = R\vartheta, \eta = R \sin \Theta \varphi, \xi = \rho, B_0 \text{ 为常数})$$

在直角坐标系 (ξ, η, ζ) 中，由 (9.73), (9.74), (9.75) 描述磁场 B ，可用矢势表示： $A_\xi = A_\eta = 0$ 。 (9.76)

$$A_\eta = \frac{1}{2} B_0 \alpha \exp \left[-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\alpha^2} \right] \quad (9.77)$$

注： $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ， $B_\xi, B_\eta \neq 0$ ， \vec{B} 有 $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ 三个分量
(因为不满足无散场子午面上 $\therefore \partial_\eta = 0$)，且 η 方向 (即平行于子午面) 无关。因此可引入通量函数 $A_\eta(\xi, \zeta)$ ，取 $A_\xi = A_\eta = 0$ 。

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \hat{\xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \zeta} \hat{\zeta} = \left(-\frac{\partial A_\eta}{\partial \xi}, 0, \frac{\partial A_\eta}{\partial \zeta} \right)$$

A_η 在 $\hat{\eta}$ 方向，在 $(R\vartheta, R \sin \Theta \varphi, \zeta)$ 坐标系中，高斯球壳 ζ 的平均高度设为 a 范围内 ζ 为零。

$$B_\xi = \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi}$$

$$A_\eta = \int -B_0 \frac{R}{\alpha} \vartheta \exp \left[-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\alpha^2} \right] d\xi$$

$$\xi = R\vartheta, \eta = R \sin \Theta \varphi, \zeta = \rho$$

$$\begin{aligned} \text{式} &= -B_0 \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2}\right) \int \xi e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi \\ &= \frac{1}{2} B_0 a \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2}\right) \end{aligned}$$

假设流体运动情况， A_η 应该是正比于 η ，向场 B_η 。考虑 η 方向，平均速度 A_η 。因此有

$$\frac{\partial A_\eta}{\partial t} = \alpha B_\eta \quad \begin{array}{l} \eta + \text{从风速平均值对大风速场} \\ \text{表示}, A_\eta \text{与风速} \alpha B_\eta \text{成比例} \end{array} \quad (9.78)$$

B_η 是 η 方向。 α 表示流场运动程度的量度，可以是任意常数。考虑耗散，有

$$\frac{\partial A_\eta}{\partial t} = \alpha B_\eta + \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 A_\eta \quad (9.79)$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \sim \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\mu \sigma} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{1}{\mu \sigma} \nabla \times \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \sim \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \vec{A}$$

B_η 和 A_η 为 η 方向分量。

假设流体运动情况， $\vec{v} = v \hat{\eta}$ ($\hat{\eta}$ 为风向的方向)

假设风均匀平行运动。 $\because A_\eta, v$ 在 ξ 方向 (33) 中无关， v 无关。

且 A_η 和 v 的方向平行于 $\hat{\eta}$ 方向。

磁感应方程可写成

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \cdot \vec{A})] + \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \vec{B} \quad (9.80) \quad \begin{array}{l} (\vec{A} \text{ 的上面} \approx A) \\ \text{即} A \approx A_\eta \end{array}$$

记 $\vec{A}_\eta, \vec{v}, \vec{B}_\eta$ 在 $\hat{\eta}$ 方向。 \vec{v} 无关 η 无关。 $A_\xi = A_\zeta = 0$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial A_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \right) \hat{\xi} + \left(\frac{\partial A_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial A_\zeta}{\partial \xi} \right) \hat{\eta} + \left(\frac{\partial A_\eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial A_\zeta}{\partial \eta} \right) \hat{\zeta}$$

$$= - \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \hat{\xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \zeta} \hat{\zeta}$$

$$\vec{v} \times \nabla \cdot \vec{A} = v \hat{\eta} \times \left(- \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \hat{\xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \zeta} \hat{\zeta} \right)$$

$$\therefore \vec{k} = \vec{v} \times \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\vec{k} = v \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \hat{\xi} + v \frac{\partial A_\eta}{\partial \zeta} \hat{\zeta}$$

$$\nabla \times \vec{K} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(V \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \right) \hat{z} + \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(V \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(V \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \right) \right] \hat{\eta} + \left[-\frac{\partial}{\partial \eta} \left(V \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \right) \right] \hat{\xi}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{K})_\eta &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(V \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(V \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} + V \frac{\partial^2 A_\eta}{\partial \xi^2} - V \frac{\partial^2 A_\eta}{\partial \xi^2} \\ &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial B_\eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 B_\eta \quad (9.81)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \right) B_\eta = \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi}$$

化直角坐标系的麦克斯韦方程组 (9.79), (9.81) 在球坐标系
有意义。因此考虑球对称场为矩形，而球坐标系 (9.72) 成为矩形
电场的直角坐标系。这一步将导致均匀带电非均匀的转动

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = H = \text{const.} \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0 \quad (9.82)$$

$$\text{代入 (9.81)}, \quad A = A_\eta$$

$$\frac{\partial B_\eta}{\partial t} = H \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 B_\eta \quad (9.83)$$

$$\text{式 (9.79)} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \right) A = \alpha B_\eta \quad \text{且 } \alpha \text{ 是 1 阶或 2 阶, 但是}$$

1 阶 (即球对称) 在空间均匀分布, 而 $\alpha = \frac{1}{2}$ 故. 式 (9.79) 和 (9.83)
是两个线性方程的解是 A, B_η 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \right) A = \alpha B_\eta \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \right) B_\eta = H \frac{\partial A}{\partial \xi} \end{array} \right. \quad (9.79)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \right) A = \alpha B_\eta \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \right) B_\eta = H \frac{\partial A}{\partial \xi} \end{array} \right. \quad (9.83)$$

$$\therefore A = A_0 \exp[i(\omega t + k_\xi)] \quad , \quad B_\eta = B_0 \exp[i(\omega t + k_\xi)] \quad (9.84)$$

代入 (9.79), (9.83)

$$A_0 \left(i\omega + \frac{k^2}{\mu_0} \right) - B_0 \alpha = 0$$

$$-A_0 (ikH) + B_0 \left(i\omega + \frac{k^2}{\mu_0} \right) = 0 \quad (9.85)$$

令 A_0, B_0 的系数进行归一化为零，得

$$(i\omega + \frac{k^2}{\mu\sigma})^2 - iRH\alpha = 0$$

对于 $i\omega$ 为实部的解，相位将衰减，时间过长时将消失的波有兴趣。即 $i\omega$ 为实部

$$i\omega = (\Omega - \frac{k^2}{\mu\sigma}) \pm i\Omega \quad (9.86)$$

式中 $\Omega = \left(\frac{|RH\alpha|}{2} \right)^{1/2}$ ， $RH\alpha$ 为泡利值。对于 $RH\alpha < 0$ 即

$$(9.86) \text{ 代入 } (9.85) \text{ 式, 得到}$$

$$A_0 = - \frac{B_0 \Omega}{RH} (i \mp 1) \quad \begin{cases} kH\alpha > 0, \text{ 对应 } (i-1) \\ kH\alpha < 0, \text{ 对应 } (i+1) \end{cases}$$

(Parker 式 (11F) 式) 为 $A_0 = -B_0 \frac{(i \mp 1)\Omega}{RH}$ ，似乎有误。

Parker, E.N., 1955, *Apophys. J.*, 122, 293)

发电机方程的式 (9.84) 变为移动的发电机波 (dynamo waves)

$$B_\eta = B_0 \exp \left[\left(\Omega - \frac{k^2}{\mu\sigma} \right) t \right] \exp \left[i(R\xi \mp \Omega t) \right] \quad (9.87)$$

$$A = -B_0 \frac{\Omega}{RH} (i \mp 1) \exp \left[\left(\Omega - \frac{k^2}{\mu\sigma} \right) t \right] \exp \left[i(R\xi \pm \Omega t) \right] \quad (9.88)$$

矢势 A 与磁场 B 相互 相位差 $\pi/4$ 。

(9.87) 式的指数部分可写成以下形式

$$pt + ik\xi = \left[-\frac{k^2}{\mu\sigma} + \Omega(i \pm 1) \right] t + iR\xi$$

$$P = -\eta_m k^2 + (i \pm 1)\Omega \quad , \quad \eta_m = \frac{1}{\mu\sigma} \quad (9.88)$$

$$B_\eta = B_0 \exp (Pt + iR\xi)$$

由 P 的实部可知，表面通过又效应会产生扰动，其中 $\eta_m k^2$ 为扰动耗散。

$$P \text{ 和式 (9.88) 中实部的二次项的平方: } \frac{\Omega^2}{(\eta_m k^2)^2} = \pm \frac{RH\alpha}{2\eta_m^2 k^4}$$

$$\pm \frac{\frac{2k^2}{\eta_m^2} \alpha}{2\eta_m^2 k^4} = \pm N_D \quad \begin{cases} +: kH\alpha > 0 \\ -: kH\alpha < 0 \end{cases} \quad (9.89)$$

N_D 称为发电机数

讨论：1. 波数 k = 太阳对流层中的环流和不稳定性传播速度，赤道附近弱，1度赤道附近，剪切（较差频率）强
太阳对流层厚度 10 km 因剪切频率 Ω 原因的环流传播速度。剪切频率 $(kH\alpha)$ 的范围在 $0.2\text{--}0.5\text{ rad/s}$ 之间，随纬度而变，随时间而变。
2. 太阳黑子对太阳风向南传播速度的影响：由图可知，随纬度增加，传播速度减慢。
3. 不计摩擦力，太阳黑子影响传播速度强弱，随向场强的区域化低纬地带
当波数 k 变化时，因此可以解释太阳黑子更多地出现在低纬区域。

3. 从 (9.87) 式可知

$$B_\eta \sim \exp[i(k\xi \pm \Omega t)] = \exp[i(k\xi \pm \Omega t)]$$

$$\Omega = \frac{\kappa L}{k}$$

$$\Omega = \left(\frac{kH\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{①} \quad \text{当 } kH\alpha > 0 \text{ 时, 有 } \Omega = \left(\frac{kH\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Omega > 0.$$

$$B_\eta \sim \exp[i(k\xi \pm \Omega t)] = \exp[i(\Omega t \pm k\xi)]$$

① 当 $k\xi - \Omega t$ 方向传播
② 当 $k\xi + \Omega t$ 方向传播

② 当 $kH\alpha < 0$ 时,

$$(9.86) \text{ 取之得: } i\omega = (\Omega - \frac{k^2}{\mu_0}) - i\Omega$$

$$(9.87) \text{ 式得: } B_\eta \sim \exp[i(k\xi - \Omega t)] \sim \exp[i(\Omega t - k\xi)]$$

① 当 $k\xi + \Omega t$ 方向 (南) 传播。

即 $kH\alpha > 0$ 时, $N_D > 0$ 波向 $-\hat{x}$ 方向 (北) 传播

$kH\alpha < 0$ 时, $N_D < 0$ 波向 $+\hat{x}$ 方向 (南) 传播。

$|N_D| > 1$

走坡走升。

4. 若 $\Omega > \frac{k^2}{\mu_0} = \eta_{mk}$ 则幅值随时间指教增加, 若 $\Omega > \eta_{mk}$

则 $B_\eta = B_0 \exp(\Omega t) \exp[i(k\xi \pm \Omega t)]$, 即经历 T 沿长 $2\pi/k$. 即
时间 T (经历 T 周期) $T = 2\pi/\Omega$. 幅值增大 $e^{2\pi}$ 倍, 即 500 倍。

5. 磁势 A 与磁场 B 相位差 $\pi/4$.

6. 发电机波的传播速度 $\Omega/k \sim \frac{k^2}{\mu_0} = k^{-2}$, 即传播速度随 k 增加而增加

7. 发电机数 N_D 与 $H = \frac{dV}{dx}$ 有关, V 在 \hat{x} 方向, 是纵向速度, \hat{x} 为
径向, 向外为正。纵波增加 波速 V 增加, 传播速度 N_D 增加。因纵向速
度随纬度增加, 即 $\frac{dV}{dx} < 0$, $N_D < 0$. 波向南, 向赤道方向传播, 又
 \hat{x} 方向极速。

8. $P = \lambda'(P) + i I(P)$

(9.90)

$$R(P) = -\eta k^2 + \Omega, \quad I(P) = \Omega, \quad \Omega \text{ 为重力加速度。}$$

$$P = \eta_{mk} R + (1+i) \Omega \quad (9.88)$$

$$= R(P) + i I$$

发电机数与传播速度 (因 $\alpha \propto \hat{x}$) 为常数 (以地球转动) $= \infty$

9. 若发电机波衰减，且有 $\eta_m^2 > \mu_2$ ，取 R_D “作为” 波长的特征值，速度的周期 $T \sim \frac{\eta_m^2}{\mu_2}$ 。才有了衰减时间。

从(9.9)式， $T \sim R_D \sqrt{\frac{1}{\mu_2}}$

$R_D \sim 7 \times 10^8 \text{ m}$, $\eta_m \sim 10^9 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ (未标准化的 η 典型值) 时
衰减时间为 $5 \times 10^8 \text{ s}$ ，而太阳活动周期的时间才多。

10. 以考虑：假设为 1° 方向的一维波。现在考虑 $1^{\circ} \times (0.05) \hat{y}$
(η) 方向的传播。

$$H = A_0 \exp [i(\omega t + k_x x + k_y y)]$$

$$B_y = B_0 \exp [i(\omega t + k_x x + k_y y)]$$

代入(9.80), (9.83)式中

$$\begin{cases} A_0 (i\omega + \frac{1}{\mu_0} (k_x + k_y)) - B_0 \alpha = 0 \\ -A_0 i k_x H + B_0 (i\omega + \frac{1}{\mu_0} (k_x^2 + k_y^2)) = 0 \end{cases}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad H = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial y}, \quad (\frac{\partial V}{\partial y} \neq 0, V \text{ 在 } \hat{y} \text{ 方向, 变化, } \nabla \neq 0)$$

$$\text{可求得 } i\omega = (\mu_2 - \frac{1}{\mu_0} k^2) \pm i\mu_2.$$

$$\text{式中 } \mu_2 = \left[1 \times k_x \frac{\partial V_y}{\partial y} / 2 \right]^2$$

$$B_y = B_0 \exp \left[(\mu_2 - \frac{1}{\mu_0} k^2) t \right] \exp [i(k_x x + k_y y \pm \mu_2 t)]$$

$$\text{记 } P = \left[-\frac{1}{\mu_0} k^2 + \mu_2 (1 \pm i) \right]$$

$$\text{实部} = 2P \text{ 的平方根} \Rightarrow N_D = \frac{x k_x}{2 \eta^2 k^4} \frac{dV_y}{dy}$$

$$\Rightarrow |N_D| > 1, R(P) > 0 \text{ 即 } \mu_2 - \eta_m k^2 > 0 \text{ 为稳定条件}$$

9.3.8. 太阳活动圆模型： $\omega \rightarrow$ 发电机

- 一个半径近似 ST ，半径场电动势 E 与流运动 v 使发电机方程变为

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial x} = \vec{v} \times (\vec{V}_0 \times \vec{B}_0) + \vec{v} \times \vec{E} + \eta_m \vec{v} \cdot \vec{B}_0 \quad (9.11)$$

其中 $\langle \vec{B} \rangle = \vec{B}_0$, $\langle \vec{v} \rangle = \vec{V}_0$ 为平均场

\vec{E} 为感应电场，均匀磁场条件下有：

$$\vec{E} = \alpha \vec{B}_0 - \beta \vec{v} \times \vec{B}_0 \dots$$

代入(9.11)式得

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_S \times \vec{B}_0) + \nabla \times (\alpha \vec{B}_0) - \nabla \times (\beta \nabla \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla \cdot \vec{B}_0 \quad (9.90)$$

左边第二项为转子及流体的对称速度引起的项， $\nabla \times (\alpha \vec{B}_0)$ 为高流速发电机效应，可以认为向场变化大于不对称向场，或者假设不对称向场变化大于对称向场。 $-\nabla \times (\beta \nabla \times \vec{B}_0)$ 为高流速散度项，类似于电阻散度项的表达式，可以并入 η_m ，有 $\tilde{\eta} = \eta_m + \beta$ ，高流速散度系数通过 $\tilde{\eta} > \eta_m$ ，大尺寸的场为 $\vec{V}_S = \langle \vec{V} \rangle$ ， $\vec{B}_0 = \langle \vec{B} \rangle$ ，大尺寸运动场的由流动散度系数和 α 系数表示。

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_S \times \vec{B}_0) + \nabla \times (\alpha \vec{B}_0 - \tilde{\eta} \nabla \times \vec{B}_0) \quad (9.91)$$

在不计转子下，将平均场分解为环向分量和纵向分量之和

$$\vec{V}_S = r\omega \hat{q}^0 + \vec{V}_P$$

$$\vec{B}_0 = B_P \hat{q}^0 + \vec{B}_T$$

3) 入矢量 A_T ， $B_P = \nabla \times (A_T(r, \theta) \hat{q}^0)$ ，仿照方程(9.8), (9.9) 的推导
(9.91) 可化为

$$\frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} + r(\vec{V}_P \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{B}_T}{r} \right) = r(B_P \cdot \nabla) \omega + \nabla \times (\alpha \vec{B}_P) + \tilde{\eta} \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) \vec{B}_T \quad (9.92)$$

$$\frac{\partial A_T}{\partial t} + \frac{1}{r} (\vec{V}_P \cdot \nabla) (r A_T) = \alpha B_P + \tilde{\eta} \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) A_T \quad (9.93)$$

($A_T = A_\varphi$, $\tilde{\eta}$ 高流速散度系数)

1) 在(9.91) 式中多了一次 $\nabla \times (\alpha \vec{B}_0) = \nabla \times (\alpha B_P \hat{q}^0 + \alpha \vec{B}_T)$ ，3) 与(9.92), (9.93) 式中类似。

从(9.93)式中可见 $\frac{\partial A_T}{\partial t} \sim \alpha B_P$ 。这便是(9.79)式的结果。
方程(9.92)和(9.93)类似于(9.9)和(9.8)式。 \therefore 大约在考虑了流动
散度系数，总计入 α 系数。 (9.92) 式右边有二次进源项，经过通过
 \vec{B}_P 而是 B_P 。

取 α_0 为 α 的典型值。 ω' 是 $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ 的典型值（即设 $\omega = \omega' r$ ）
当转动速度 ω' 很小时 $O\left(\frac{|r B_P | \nabla \omega|}{|\nabla \times (\alpha B_P)|}\right) = O\left(\frac{L \omega'}{\alpha_0}\right) \ll 1$ 。即无持经系数。

若 $|\alpha_0| \gg |\omega'| L^2$ ，而转动有关的项可以忽略，环向场和纵向场
仅由 α 产生，发电机进气由 α 效应构成，称为 α 发电机

产生的磁场稳定而限局，接近于地磁发电机

$$\text{对于太阳，转动的影响较大。 } O\left(\frac{L^2 \omega_0'}{\alpha_0}\right) \gg 1, \quad |\alpha_0| \ll L^2 \omega_0'$$

(9.92) 式在边界二次可忽略，即向场由耗散运动维持，故向场由 α_0 应该平行，称为 α - w 发电机。

场的转动和发电机的存储取决于发电机数，这里定义为 $X = \alpha_0 \omega_0' R_0^3 / \eta$ ， ηN_0 表示场的存储与耗散之比。

因为 (9.92) 和 (9.93) 之 B_θ 和 A_T 的线性方程有形式 e^{pt} 的解。

因此需要确定 P 作为 X 的函数形式，特别地， $\frac{dP}{dt} \ll X$ 很大时，化 X 为 $\alpha_0 \omega_0' R_0^3$ ， α_0 可以克服耗散而有增长模式，也许 $R(P) > 0$ ，式中 $R(P)$ 为 P 的实部。 i $I(P)$ (虚部) $\neq 0$ 时的振荡模式或者 $I(P) = 0$ 的无耗散模式。当 $\alpha_0 \frac{d\omega}{dt} = \alpha_0 \omega_0' < 0$ 时，(也就是说 $X < 0$)，Roberts (1972) 发现振荡模式的发电机成为

单极子的偶极子。 B_θ 单极子的奇极子) 为偶极型， $|X| > 74$

和 206 之间，发电机运动从极区向赤道过渡，就像 Parker 的发

电机一样。当 $\alpha_0 \frac{d\omega}{dt} > 0$ 时，在 X 较小值时，振荡模式消失。 X 在

76 和 212 之间，它是四极子型 (A_T 为奇， B_θ 为偶)，发电机向

极区过渡。发电机数的符号 2.1 时，发电机运动的移动方向 2.1 时。

加入一个大的子午流向 v_ϕ ，发现有一个临界 X 值存在，且改变原之优先模式的 (四极型) 特性为偶极型的特征。

Roberts (1972) 的 α - w 发电机模型的周期为 $2\pi R_0^2 / (100\eta)$ ，由于 9.3.7 节中取的行进值 R_0/η ，当圆度为尺度大于 R_0 时，已经有耗散发生了。这个周期依赖于流动参数能表示为 $\tilde{\tau}$ ，对于某柱坐标系， $\tilde{\tau} \approx 10^9 \text{ s}^{-1}$ 周期仅有一年 (因为在半径不能维持这么久，平均寿命为 8 m)。因此，通过 Coriolis 力得到更多的耗散。还未指出此张可使产生此效应，流动耗散系数稍大一些，周期过短，为了得到相干于 22 年的周期必须取 $\tilde{\tau} \approx 10^8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 。这便送 $\alpha_0 > 0$ ， $\frac{d\omega}{dt} < 0$ ，水流速度随时间增加 (从高纬发电机流向赤道过渡)，且子午流向之差，且此也称了高纬带得之项。 $\frac{d\omega}{dt} < 0$ 的假设并不完全成立。

对于不考虑运动的一些特征，如带的研究叫做蝴蝶面，引之作者利用更复杂的 α - w 发电机进行探讨，和 α 反应存在一个或两个向

取次元
的 α 和 ω
的值

Character
二进制向

房内。布进入的随日变化，甚至全山和随风和日变化以及在某些情况下反向。

9.4. 发电机理论的困难

发电机理论首先对太阳磁场的随太阳活动周的变化提供一个怎样才能解决时，有些问题有待克服。

1. 对流区中磁通量的汇聚以及磁场可逆进行推断的因素如何需要加以考虑。

2. 利用一阶半周期似稳态地提高发电机方程组封闭条件了。

但是当 $\Omega(V_0) \ll \frac{1}{R_m}$ 时，其中 Ω 和 R_m 分别为特征长波和时间（也可以作为相关长波和时间），有 $\Omega(\text{相关}) \ll \Omega(\frac{1}{R_m})$ ，在半周期时。

$R_m \gg 1$ （该条件在对流区成立）。则磁场方程变为

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) \quad (9.15)$$

$$3 R_m \sim 1 \text{ WT. 为 } \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 \vec{b} \quad (9.15)$$

② 如果流速级的量级为 $\frac{1}{R_m}$ ， $\Omega(V_0) = \frac{1}{R_m}$ 。 V_0 是均方根流速，可以利用修正方程 (9.12) 中 $\frac{1}{R_m}$ 和 ∇^2 为同量级，但和 Ω 之比为 $R_m = \frac{V_0 \log \eta_m}{\eta_m} = \Omega(\frac{1}{R_m}) \ll 1$ ，上述二项均可忽略。方程简化为 $\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) + \eta_m \nabla^2 \vec{b} \quad (9.16)$

若 $R_m \ll 1$ 不成立，表示扩散次数增加， $\nabla^2 \vec{b}$ ， $\eta_m \nabla^2 \vec{b}$ 将是唯一的主要不协调项。

太阳上情况是 $V_0 = \frac{1}{R_m}$ ， $R_m \gg 1$ 。

3. 通过 B_p 而 B_p 可以估计 α 的数量级，在 $1-10 \text{ cm s}^{-1}$ 之间。18 秒 (混合长波) 计算所得的 α 宽大得多 (典型值为 100 m s^{-1})。换言之，稍目前的理论，流动对磁场的影响不大。但是考虑 Lorentz 力的作用以后磁通量聚合成磁通带的过程，可减弱这种影响。 α 的修正性质，需要详细计算，可能会产生不确定。

4. 根据混合长理论估计或通过流动已消散的规则估计。9.4.1 所示典型速度以 10^9 m s^{-1} 比某些运动学模型所要求的 $\tilde{\eta} \approx 10^{12}$ 倍的严格地高出重要的。

5. 鉴于 $\frac{d\omega}{dt}$ 的符号在发电机理论中的重要性，通过观测可靠地确定 $\frac{d\omega}{dt}$ 的正负为重要。观测到磁极的转动比光球带高子体快百分之几，将含某些发电机模型支数 $\frac{d\omega}{dt} < 0$ (即) 使磁场向赤道漂移。(磁极在光球之下) 而较亮的转动模型倾向于 $d\omega/dt > 0$ 。同样重要的 是 观测到赤道表面速度及其随太阳活动周的变化。
6. 整个磁场高动态散射效应需要着手为之坚实的基础设施。因为通过西经排列全部磁通量以及一个简单的散射仪磁极无法完成这需要较长的时间。首先需要学会快速磁变颗粒效应。

9.5 将来需要研究的问题

1. 尚未很好地理解某些冕洞和观测的圆柱形移动，可能代表一种发电机波沿纬度线的传播，或者反映一种大尺度变化的对流带。
2. 不仅对于赤道流动区，发电机理论需要考虑大量磁通的消长观，或称瞬时流动区(即 X 射线亮带)。需要材料 太阳不规则时，总磁通量随时间的带宽，而亮带数量最大。
3. 识别不随活动周的其他观测现象：太阳半径、光度和表面温度的变化。

总之，发电机理论首先有上述困难，但待到了以后的发展，不失为太阳磁场理论取得成功的分支之一。仍将是令人感兴趣的课题。

9.3.9. α - ω 发电机的发电机波

对流速度约 20m/s , 比转高, 可认为是平流层。因此可用静止坐标系来讨论发电机波。

平均场方程方程

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times \vec{\xi} + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_0 \quad (9.11)$$

$$\vec{B}_0 = \langle \vec{B} \rangle, \quad \vec{\xi} = \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle, \quad \vec{V}_0 = \langle \vec{v} \rangle$$

假设方向同性, 有 $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$, $\beta_{ijk} = \beta \epsilon_{ijk}$, $\therefore \vec{\xi} = \alpha \vec{B}_0 - \beta \nabla \times \vec{B}_0$
(如果流动或随波速度的成因有异, 该方向异性, 则上式不成立)

$$\text{设 } \vec{V}_0, \vec{B}_0 \text{ 和 } \vec{\xi} \text{ 为平面可积, 则} \quad \vec{V}_0 = r \omega(r, \theta) \hat{\varphi}^0 + \vec{V}_p \\ \vec{B}_0 = B_p(r, \theta) \hat{\varphi}^0 + \vec{B}_p \\ \vec{\xi} = \xi_p \hat{\varphi}^0 + \vec{\xi}_p$$

$$\vec{B}_p = \nabla \times A_p(r, \theta) \hat{\varphi}^0$$

平均场的方程方程可用平面的径向方程和极向方程表示

$$\frac{\partial \vec{B}_p}{\partial t} + r(\vec{V}_p \cdot \nabla) \left(\frac{B_p}{r} \right) = r(\vec{B}_p \cdot \nabla) \omega + \nabla \times (\vec{\xi}_p) + \eta_m \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) B_p$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} + \frac{1}{r} (\vec{V}_p \cdot \nabla) (r A_p) = \xi_p + \eta_m \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) A_p$$

利用 $\vec{\xi}$ 的表达式, 上式化简

$$\frac{\partial \vec{B}_p}{\partial t} + r(\vec{V}_p \cdot \nabla) \left(\frac{B_p}{r} \right) = r(\vec{B}_p \cdot \nabla) \omega + \nabla \times (\alpha \vec{B}_p) + \eta_{me} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) B_p$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} + \frac{1}{r} (\vec{V}_p \cdot \nabla) (r A_p) = \alpha B_p + \eta_{me} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) A_p$$

式中 $\eta_{me} = \eta_m + \beta$ 为等效粘滞系数。以上为柱坐标。

在圆柱坐标中, 平均场方程 (9.11) 变为, 向和极向方程方程为

$$\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} = \vec{V}_p \times \nabla \times \vec{A}_T + \vec{\xi}_T + \eta_m \nabla^2 \vec{A}_T \quad (9.7')$$

$$\frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_p \times \vec{B}_T + \vec{V}_T \times \vec{B}_p) + (\nabla \times \vec{\xi}_p) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}_T \quad (9.5')$$

式中 \vec{A}_T 和 \vec{B}_T 分别为 (9.7') 式中 (添加后) 方向场 $\vec{\xi}$

下标 T 为轴向, 极向方向。"p" 则为极向由 $0^\circ, 90^\circ$ 方向组成

$$\text{立向坐标下: } A_T = (0, A_y, 0)$$

$$V_T = (0, V_y, 0)$$

$$B_T = (0, B_y, 0)$$

$$\text{速度 } \vec{V} = V_y \hat{j} + \vec{V}_p, \quad \vec{B} = B_y \hat{j} + \vec{B}_p. \quad \vec{B}_p = \nabla \times (A_y \hat{j})$$

(9.7') 在立 $\vec{B} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{V}_p \times \nabla \times \vec{A}_T &= (V_y \hat{x} + \vec{V}_p \hat{x}) \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{z} \right) \\ &= -V_x \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{y} - V_z \frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{y} \\ &= -(\vec{V}_p \cdot \nabla) A_y \hat{y} \end{aligned}$$

(9.7') 在立 $\vec{B} = \vec{0}$

$$\nabla \vec{A}_T = (\nabla^2 A_y) \hat{j}$$

(9.5') 在立 $\vec{B} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{V}_p \times \vec{B}_T) \Big|_{\hat{y}} &= -(\vec{V}_p \cdot \nabla) B_y \hat{y} \\ \nabla \times (\vec{V}_T \times \vec{B}_T) \Big|_{\hat{y}} &= (\vec{B}_p \cdot \nabla) V_y \hat{y} \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{(参考讲稿第 8 页)}$$

(9.7') 式化简

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \alpha B_y - \vec{V}_p \cdot \nabla A_y + \eta_{me} \nabla^2 A_y \quad (9.94)$$

(9.5') 式化简

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -(\vec{V}_p \cdot \nabla) B_y + (\vec{B}_p \cdot \nabla) V_y + \nabla \times (\alpha \vec{B}_p) + \eta_{me} \nabla^2 B_y \quad (9.95')$$

$$\vec{V} + \eta_{me} = \eta_m + \beta$$

(9.95') 式在立有 β 次均含有 \vec{B} . 仅取向量平行化为驻向量. V_y 代表驻向速度, 可以是旋转转动, 对于 ω 发电机. 驻向转动是定地挂. 所以 $\nabla \times (\alpha \vec{B}_p)$ 可忽略.

(9.95') 式 简化为

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -(\vec{V}_p \cdot \nabla) B_y + (\vec{B}_p \cdot \nabla) V_y + \eta_{me} \nabla^2 B_y \quad (9.95)$$

求解 (9.94) (9.95) 方程, 且向量 A_y, B_y 有下列形式的解:

$$(A_x, B_y) = (A_0, B_0) \exp(pt + i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (9.96)$$

$\vec{k} = (k_x, 0, k_y)$. 這裏 p 前 t, θ, ϕ "i"

$\vec{V}_p \propto \vec{k}$ ∇V_g 在 (x, y) 內 可看作 "i" 向

(9.96) 式 代入 (9.94) 式:

$$p A_0 + i \vec{k} \cdot \vec{V}_p A_0 = \alpha B_0 - \eta_{me} \vec{k} \cdot \vec{A}_0$$

$$\therefore \tilde{p} = p + \eta_{me} \vec{k}^2 + i \vec{V}_p \cdot \vec{k}, \quad (9.97)$$

$$p A_0 + \tilde{p} A_0 = \alpha B_0$$

(9.96) 式 代入 (9.95) 式:

$$p B_0 + i \vec{V}_p \cdot \vec{k} = \vec{B}_p \cdot \nabla V_g (\exp(pt + i\vec{k} \cdot \vec{r}))^{-1} - \eta_{me} \vec{k}^2 B_0$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_p \cdot \nabla V_g &= (\nabla A_g \hat{g}_0) \cdot \nabla V_g \\ &= i(\vec{k} \times A_0 \hat{g}_0) \cdot \nabla V_g \cdot \exp(pt + i\vec{k} \cdot \vec{r}) \\ &= i(k_x \frac{\partial V_g}{\partial y} - k_y \frac{\partial V_g}{\partial x}) A_0 \cdot \exp(pt + i\vec{k} \cdot \vec{r}) \\ &= -i(\vec{k} \times \nabla V_g) \hat{g}_0 A_0 \cdot \exp(pt + i\vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 得到 } \tilde{p} B_0 = -i(\vec{k} \times \nabla V_g) \hat{g}_0 A_0$$

$$\begin{cases} \tilde{p} A_0 - \alpha B_0 = 0 \\ i(\vec{k} \times \nabla V_g) \hat{g}_0 A_0 + \tilde{p} B_0 = 0 \end{cases} \quad (9.98)$$

$$\tilde{p}^2 + i\alpha(\vec{k} \times \nabla V_g) \hat{g}_0 = 0$$

$$\therefore \gamma = -\frac{1}{2} i\alpha(\vec{k} \times \nabla V_g) \hat{g}_0$$

$$\tilde{p}^2 = 2i\gamma \quad (9.99)$$

解的性質 諸如 取決于 γ 的行子。

$$\begin{aligned} 1. \gamma > 0 &: \frac{\pi}{4} \\ \tilde{p} &= \pm \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \gamma^{1/2} \\ &= \pm (1+i) \gamma^{1/2} \end{aligned}$$

代入 \tilde{p} 的形式 (9.97). 結果 p

$$\begin{aligned} p &= -\eta_{me} \vec{k}^2 - i \vec{V}_p \cdot \vec{k} + \tilde{p} \\ &= -\eta_{me} \vec{k}^2 \pm \gamma^{1/2} + i(\gamma^{1/2} - \vec{V}_p \cdot \vec{k}) \end{aligned} \quad (9.100)$$

1. 从 $Re P \geq 0$, $\Re(\eta_{mc} R^4)$ 或 $\Im(\eta_{mc} R^4)$ 取 "+" 号. : 安
 $\gamma \geq \eta_{mc} R^4$. 由于满足 $Re P \geq 0$, 即

$$-\alpha (\vec{k} \times \nabla V_y) g_0 \geq \beta \eta_{mc} R^4 \quad (9.101)$$

iP 的符号与 γ 符号 (即 γ 的正负) 相同.

$$\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} + i(\gamma^x - V_p \cdot \vec{k})t]$$

代入方程 (9.94), (9.95) 的右端中, 可得到

$$P_t + i\vec{k} \cdot \vec{r} = (-\eta_{mc} R^4 + \gamma^x) t + i(Y^x - V_p \cdot \vec{k}) t + i\vec{k} \cdot \vec{r}$$

在 $t=0$ 时 P 为根幅的增减, 其余项构成流的不稳定性. 因此流
 的传播方向可以确定. $\gamma^x - V_p \cdot \vec{k} < 0$: 沿 $+\vec{k}$ 方向传播
 $\gamma^x - V_p \cdot \vec{k} > 0$: 沿 $-k$ 方向传播.

2. $\gamma < 0$

$$\tilde{P}^2 = 2i\gamma = -2i|\gamma|$$

$$\tilde{P} = \pm \sqrt{-2i|\gamma|}$$

$$= \mp(1-i)|\gamma|^{\frac{1}{2}}$$

代入 (9.97). 有

$$\begin{aligned} P &= -\eta_{mc} R^2 - iV_p \cdot \vec{k} + \tilde{P} \\ &= -\eta_{mc} R^2 - iV_p \cdot \vec{k} \mp (1-i)|\gamma|^{\frac{1}{2}} \\ &= -\eta_{mc} R^2 + |\gamma|^x + i(I|\gamma|^x - V_p \cdot \vec{k}) \end{aligned} \quad (9.102)$$

注意 $(Y^x - V_p \cdot \vec{k})$
 行数取 "0"

上述结果可这样理解: 子向赤道方向的传播.

• 对流层的外部, 在北半球, 取直角坐标 OX 向南, OY 向东.
 OZ 垂直向外.

假设环向流动 (在 \hat{y} 方向) 取决于垂直方向的剪切 ($\frac{\partial V_y}{\partial z}$)
 (这是假定转动, \hat{y} 方向即为球坐标中的经向)

$$\gamma = -\frac{1}{2}\alpha(\vec{k} \times \nabla V_y) g_0$$

$$\approx \frac{1}{2}\alpha k_x \frac{\partial V_y}{\partial z} \quad (9.103)$$

磁扰动向赤道平面传播时 $\alpha \frac{\partial V_y}{\partial z} < 0$ 或 > 0 .

• 当 $\alpha \frac{\partial V_y}{\partial z} < 0$, $\Re(\gamma) < 0$ (为 1/2,)

$$\text{从波的相位考虑 } \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\gamma^x] \quad (\text{令 } V_p = 0)$$

见图和方向。 $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x$

$$(9.102) \text{ 式中, 若取 } P = -\eta_{me} k^2 - |Y|^{\frac{1}{2}} + i(|Y|^{\frac{1}{2}})$$

因为波阻抗的衰减, 波会消失。因此应该取

$$P = -\eta_{me} k^2 + |Y|^{\frac{1}{2}} - i|Y|^{\frac{1}{2}}, \text{ 波有可能增长。}$$

这时, 波的相位: $e^{i(k_x x + |Y|^{\frac{1}{2}})} = e^{i(k_x x - |Y|^{\frac{1}{2}})}$

沿 x 方向传播

设 $Y > 0$, 即 $|Y|^{\frac{1}{2}} > 0$, 同样 (9.100) 式中 $|Y|^{\frac{1}{2}}$ 取正数。

波的相位为 $e^{i(k_x x + |Y|^{\frac{1}{2}})}$, 波 $|Y|^{\frac{1}{2}} - x$ 方向传播。

以上均为光半球讨论。

直角坐标中的 $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ 与球坐标中的 $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ 相等。Parker 认为

$$\Omega = Y^{\frac{1}{2}}$$

环向场通过磁浮力形成离子。离子向赤道方向迁移, 即环向场向赤道方向的迁移。作为 ω 变化的结果 (α 速度和较差转动的共同作用) 被数值进行分析。

若 (9.100) 或 (9.102) 式中 $i\vec{V}_p \neq 0$, 则发电机波相速度将随时间变化。

例如 $|Y|^{\frac{1}{2}} = \vec{V}_p \cdot \vec{k}$, (9.100) 式中 $|Y|^{\frac{1}{2}}$ 取 "+" 时, 有 $P = -\eta_{me} k^2 + |Y|^{\frac{1}{2}}$ 。

因此此次没有虚部, 表示没有尾迹 (无限高), 波不衰减。

(9.102) 式中, 当 $|Y|^{\frac{1}{2}} = -\vec{V}_p \cdot \vec{k}$, 且 $P = -\eta_{me} k^2 + |Y|^{\frac{1}{2}}$ ("+" 时) 波不衰减, 也是尾迹。

推论之: 逆向的环向平均速度可以把它和速度维持的振荡 $B(x)e^{i\omega t}$ 看为一个定速发电机 $B(x)$ 。

至于逆向 \vec{V}_p 不同于所散发的磁场尾流模式或振荡模式。

• $i\vec{v}(\vec{k} \times \nabla V_p)_{\phi 0} = k G$. G 代表平均剪切率

$Re P = -\eta_{me} k^2 \pm |Y|^{\frac{1}{2}}$. 由 $|Y|^{\frac{1}{2}} = \eta_{me} k^2$ 时, 有 $Re P = 0$, 可求出该带
波数 $k_c = \left(\frac{|G|}{2\eta_{me}} \right)^{\frac{1}{2}}$

波增长率为, 即 $Re P > 0$ 也可求得。 $Re P = -\eta_{me} k^2 + \frac{1}{2} \alpha k G |Y|^{\frac{1}{2}}$
为逆向波的衰减, $|Y|^{\frac{1}{2}}$ 应取 "+"

$$(Re P)' = -2\eta_{me} k + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \alpha G \right)^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} \alpha G \right| = 0$$

if $k_{max} = 2^{-\frac{1}{3}} k_c$

从以上条件可知，以及 k_{max} ，可求得前21稳定性判据

$$L \sim k_{max}^{-1} \sim k_c^{-1} \sim \left(\frac{\eta_{me}}{12G} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9.104)$$

- 随机运动的波动方程 $\lambda, L \gg \lambda$, $L \gg \lambda$, $\lambda \ll \lambda$

$$\frac{\eta_{me}}{12G} \gg 1 \quad (9.105)$$

(式中 α 为 α 稳定性的系数)

- 对于湍流扩散，我们取值为

$$|\alpha| \sim 6.0 \quad (\text{随机速度的平均值}), \quad \eta_{me} \sim 400 \quad (9.106)$$

$$(9.105) \text{ 成立时 } \frac{u_0}{L} \gg G \quad (9.107)$$

可见随机剪切 ($\frac{u_0}{L}$) 大于平均剪切 (G)

在流动领域，通常条件 (9.107) 是满足的。

- $\alpha \omega$ 模型适用的条件是环向速度由转动引起。应该满足 $\alpha \ll L^2 \omega'$, α, ω' 为 α 和 ω 的典型值。 $(\omega = \omega_0' r)$ 上述条件即 (9.71) 式。对于 $L \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} - L \frac{\partial V}{\partial r} \sim L |G|$

即 \rightarrow 环向平均剪切。 $\alpha \omega$ 模型适用的条件为 $|\alpha| \ll L |G|$

$$\Rightarrow |\alpha| \sim 6.0, \text{ 该条件为 } \frac{u_0}{L} \ll \frac{|G| L}{\alpha} \quad (9.108)$$

第十一章 太阳耀斑

- 本章主要讨论：
1. 为什么会产生耀斑？
2. 耀斑的释放和何运动？

一般认为耀斑的能量来自磁场，释放能量的主要方式是磁重联。

1. 单环耀斑 (Simple-loop flare)：单-线型磁环，亮斑增加和衰减理论模型：

- 浮现磁通模型 (emerging flux model)，从光球下方浮现的磁通管与上方的磁通重联 ($\S 10.2.1$)
- 冷斑、热斑、热平衡阶段、加热 ($\S 10.2.2$)，该机制精细而成分最多，需要更多的工作以确定其可行性。
- 扭折不稳定性 (或电阻扭折不稳定，resistive kink，参见 $\S 7.5.5$) ($\S 10.2.3$)

2. 双带耀斑 (two-ribbon flare)

爆发，包含有暗流 (filament) 的磁扭折带。主相 (main phase) 期内，磁重联，形成双带耀斑 ($\S 10.3.3$)

10.1 磁重联

试着建立稳态磁重联过程模型，基本方程是 Ohm's 定律

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \nabla \times \vec{B}_{\mu} \quad (10.1)$$

运动方程：

$$\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \nabla \times \vec{B} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.2)$$

[因为考虑的是定速过程， $\therefore \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$]

连续性方程：

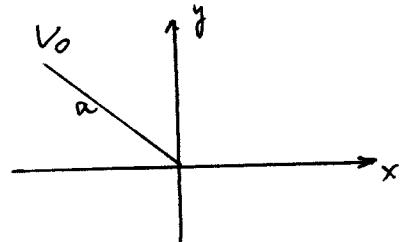
$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (10.3)$$

1. 即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

10.1.1 单向场

由于扩散，电流密度变宽，和未流过的磁通量增加加入，可以平衡向外的扩散速度。随着磁通量的进入，带出了等离子体，因此等离子体必须以与电流密度一致的速度流动，否则北半球附近就形成停滞点。该过程可以用不可压缩流体在驻点附近的速度流 (stagnation point flow - 驻点流) 描述。

$$V_x = -V_0 \frac{x}{a} \quad , \quad V_y = V_0 \frac{y}{a} \quad (10.4)$$



$$\vec{B} = B \omega \hat{j} \quad (\text{单向场}) \quad (10.5)$$

式中 V_0, a 为常数。

2. 由运动方程确定速度

是怎样的运动方程： $\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + (\nabla \times \vec{B}) \times \frac{1}{\mu} \vec{B}$

为简单起见，仅取 x 分量， $\vec{B} = B \omega \hat{j}$

$$\begin{aligned} \rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{j} \times \frac{1}{\mu} B \hat{j} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{B}{\mu} \frac{\partial B}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \rho V_x^2 + \frac{1}{\mu} B^2 = -p + \text{const.} \quad (10.6)$$

- 并设可写成： $p = \text{const.} - \frac{1}{2} \rho V^2 - \frac{1}{\mu} B^2$ (流体力学中的伯努利积分的应用，伯努利积分在流体静力学下获得)

3. Ohm's 法律

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \nabla \times \vec{B} / \mu$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{j} = \frac{\partial B}{\partial x} \hat{j}, \quad \vec{B} = B \omega \hat{j}$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \left(-V_0 \frac{x}{a} \hat{x} + V_0 \frac{y}{a} \hat{y} \right) \times B \omega \hat{j} = -V_0 \frac{x}{a} B \omega \hat{j}$$

$$\vec{E}_z - \frac{V_0 x}{a} B = \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (10.7)$$

当 $E_z = \text{const.}$ 时，(10.7) 式可得：见图 10.2

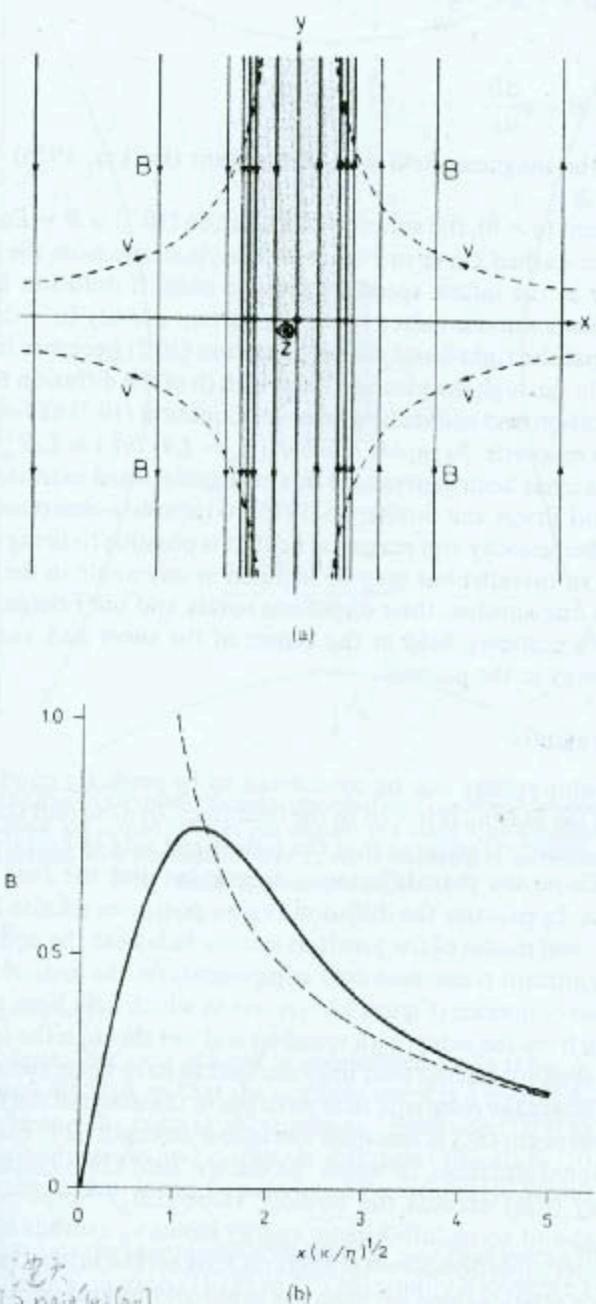


Fig. 10.2. Magnetic annihilation in a current sheet. (a) Oppositely directed magnetic field lines (—) are carried in from two sides by a stagnation point flow with streamlines (----). In the diffusion region [shaded] the field is no longer frozen to the plasma and magnetic energy is converted into heat by ohmic dissipation. (b) The field strength (B) as a function of x with $k = V_0/a$, expressed in units such that dB/dx is unity at $x = 0$ (from Priest and Sonnerup, 1975).

- i. 若 η 不为零，即 $\eta \neq 0$ ，(10.7) 式的解为 $B = \frac{\eta a}{V_0 x}$ ，而 $x=0$ 时， B 用虚线表示。当内流 (inflow) V_0 速率及减小时，磁场强度增加。
- ii. 若 η 为零化 $\eta=0$ ，当电流密度 a 增大，(10.7) 式右边次项得重要，于是磁场就会在高处中增强 (饱和)，磁场的强度过饱和情况。

扩散区的宽度 λ 通过扩散 (耗散磁场) 而内流 (靠近磁场) 平衡而求得。

$$\text{扩散的特征时间 } \tau_d = \frac{l^2}{\eta} , \text{ 内流的特征时间 } \tau_i = \frac{\lambda}{V_0 a}$$

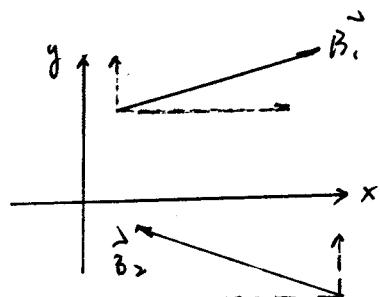
$$x=l, \quad \tau_i = \frac{a}{V_0}$$

$$\frac{l^2}{\eta} = \frac{a}{V_0} \quad \therefore l = \left(\frac{\eta a}{V_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\eta}{V_0 a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a$$

利用磁 Reynolds 数来表示。 $R_m = \frac{LV_0}{\eta}$ ，上式中 a 为特征长度

$$a=L, \quad l = \left(\frac{\eta L}{V_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{R_m^{\frac{1}{2}}}$$

- iii. 当磁场与速度场的反向平行，向左流动时，磁场相对速度场的方向会移动，大小会改变，在电流片的中心部分有非零场，靠墙的过程有一部分磁场消失。



10.1.2 扩散区

太阳大风的绝大部分可以认为是磁感应电， $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \approx 0$ 。

磁冻结成立。电流片或扩散区内，电流密度很大， $\propto t^{(10.1)}$ 式：

$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \nabla \times \vec{B}/\mu$ ，磁场不再起重要作用，扩散变得重要。实际上扩散区的长度有限的。先讨论一维模型：扩散区的湍流附近，再通用，设磁场 B_0 方向，现在有 x 方向的分量出现。

第 10.3. 磁力线从上侧被带入扩散区，速度是 V_i 。

通过顶部和底部离开扩散区，速度为 V_o ，在这过程中。

认为在中性线附近，磁场消失，磁力线已紊乱，外流磁场。

由于内流场 B_i ，速度 V_i ，电流已为常数的情况下，内流磁场 $E B_i$ 大于外流磁场 $E B_o$ ，部分内流的磁能转化为热能和动能 ($\because V_o > V_i$)。

对于边界，可压缩流动，Sweet (1958) 和 Parker (1963) 研究输入和输出之间的量级关系

$$\text{流动速度 } V_o = V_A^* = \frac{B_0}{(\mu \rho_c)^{1/2}} \quad (10.8)$$

ρ_c 为扩散区内的密度。

事实上输入流量为 $\frac{1}{2} \rho_c V_i^2 + \frac{1}{2} B_i^2$ ，输出为 $\frac{1}{2} \rho_c V_o^2 + \frac{1}{2} B_o^2$ (平行和垂直于输出管轴)。扩散区 N 附近 $B_o < B_i$ 。

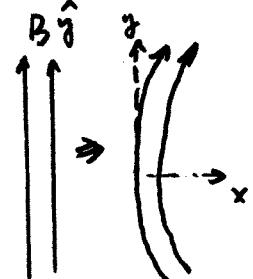
$$V_o > V_i \text{ 且 } \frac{1}{2} B_i^2 \approx \frac{1}{2} \rho_c V_o^2, \quad V_o = \frac{B_0}{(\mu \rho_c)^{1/2}} = V_A^*$$

V_A^* 称为 Alfvén 速度，由内流的磁场和电流片内的速度组成。

当扩散 (耗损磁能) 的内流 (带入磁能) 平衡时，有 $T_d = \frac{l^2}{\eta} = \frac{l}{V_i}$

$$V_i = \frac{l}{T_d} \quad (10.9)$$

T_d 为 扩散区长度。



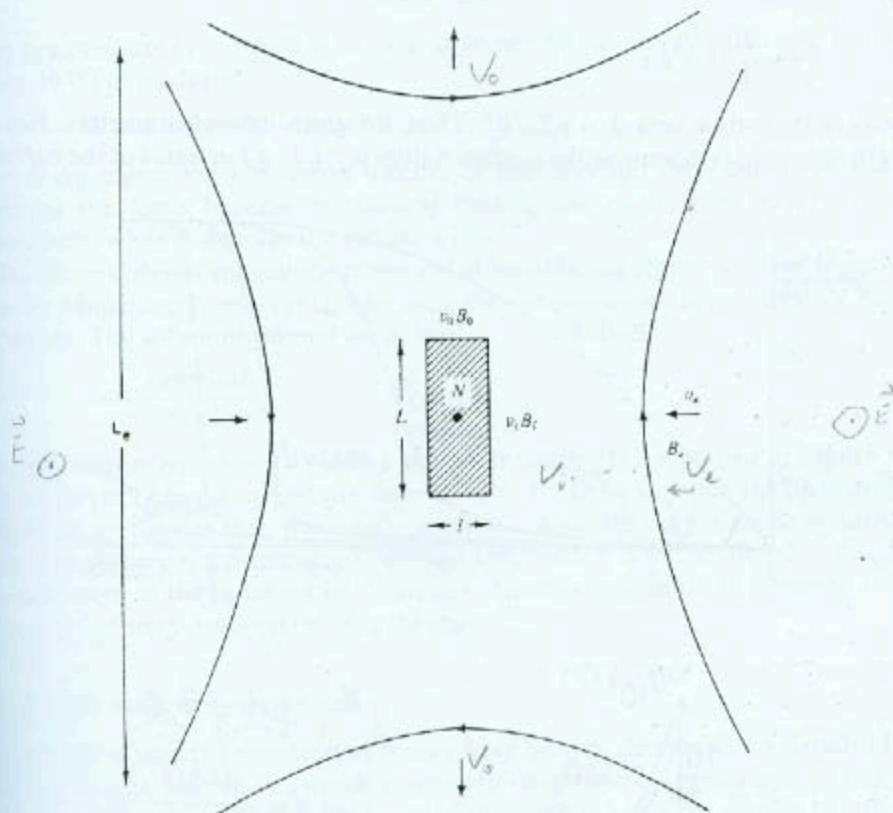


Fig. 10.3. The configuration for steady magnetic reconnection. Oppositely-directed field lines of strength B_0 , frozen to the plasma, are carried towards one another at a speed v_e by a converging flow. They enter a diffusion region (shaded) with dimensions i and L , are reconnected at the neutral point (N), and are finally ejected from the ends.

$$\text{质量守恒 } P_i V_i L = P_c V_{cl} \quad (10.10)$$

L : 磁感应强度。

$$V_i = P_c V_{cl} l / (P_i L) \quad \text{当 } \frac{l}{L} \ll 1, \text{ 有 } V_i \cdot \frac{L}{l} = \frac{P_c}{P_i} V_{cl}$$

$$\therefore V_i \ll \frac{P_c}{P_i} V_{cl}$$

$$\text{利用 (10.8) 式 } V_i \ll \frac{P_c}{P_i} V_{cl}$$

- 1) 大多数应用中，为简单起见，采用不可压缩假设 $P_c = P_i$ ，从方程 (10.8) 及 (10.10) 式 可以立即得 V_{cl} ，且利用给定的输入量 V_i, B_i, η 及 扩散系数 λ 及 (l, L) 。例如，设已知 V_i, B_i, P_i, η ，由 (10.8) 式 $\Rightarrow V_{cl}$ ，
 $(10.9) \Rightarrow l$ ， $(10.10) \Rightarrow L$ 。当扩散系数固定时，无须考虑 P_c/P_i ，等于 1。
- 2) 对于薄扩散层 $\lambda \ll L$ ，扩散系数与周围压强无关，即

$$P_c = P_i + \frac{1}{2\mu} B_i^2$$

可以认为扩散层内的磁场是不变的。

$$P_c k_B T_c = P_i k_B T_i + \frac{1}{2\mu} B_i^2 m \quad m: -\text{等高流体质量}$$

也得 $V_{cl} \sim P_i k_B T_i$

$$\begin{aligned} \frac{P_c}{P_i} &= \frac{T_i}{T_c} \left(1 + \frac{1}{2\mu} \frac{B_i^2}{P_i} \right) \\ &= \frac{T_i}{T_c} \left(1 + \beta_i^{-1} \right) \end{aligned} \quad (10.11)$$

$$\text{均流系数 } \beta_i := \frac{P_i}{\frac{1}{2\mu} B_i^2}$$

因此若内流系数 $(V_i, B_i, P_i, \eta, T_i, \beta_i)$ 已定，可利用 (10.11) 式
求出的外流系数 $(V_{cl}, \lambda, L, P_c)$ ，进而由质量方程确定

$$\bar{E} = \bar{J} + \bar{H} + \bar{K} - \bar{R} \quad (10.12)$$

E: - 通过电流片弱磁场的热耗

J. H. K.: - Joule 加热，机械加热，何等对流片的能量

R: - 辐射损失。

3, Milne 和 Priest (1981) 通过研究等离子体内的流动方程, 改进了对等离子区的重力理论. 内流速度和电流片宽度成比例 (高电流片中 β 变高). β : 比更像布丁 ≈ 10.4 .

① 电流片必须满足热力学平衡状态

② 存在 $\rightarrow \beta$ 的限制. β 不规则无时, 走向于辐射损失达到了极点.

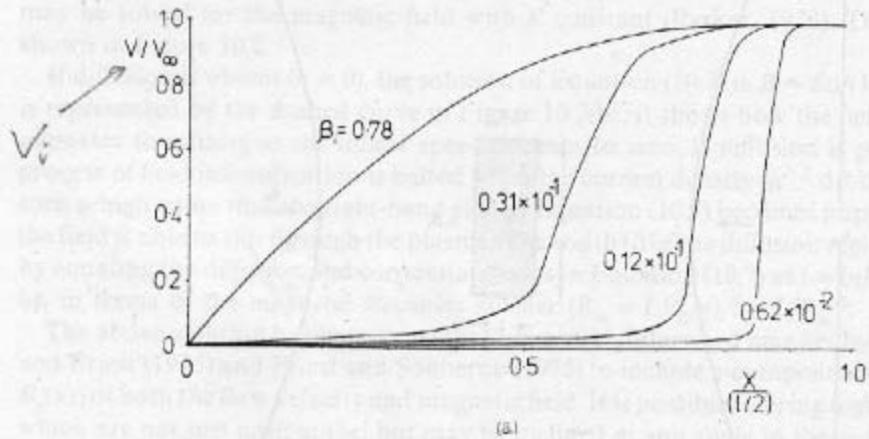
③ 低 β 时, 电流片内速度有极陡的梯度 (布 10.4. (a))

(10.1.3 Petscheck 机制)

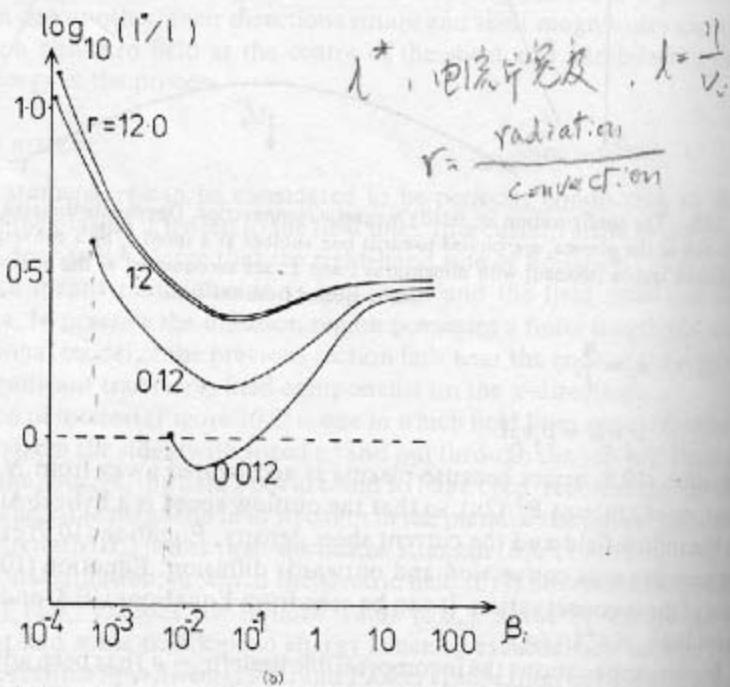
电流片定义为: ① 高密度流向的不动边界, 磁场的边界运动. 换言之可视为地磁场的切向间断. 通过间断面没有物质流动, 而两侧的磁感应切向分量是守恒, 只要满足 $P_2 + \frac{1}{4\pi} B_2^2 = P_1 + \frac{1}{4\pi} B_1^2$, 切向运动 \rightarrow . 方向: Alfvén 波的传播 像于中间层的传播 (参见图 4.3). ② 磁场切向分量的翻转. 在磁感应线: 磁场不变, 这是有限振幅的 Alfvén 波 (传播过程中磁感应线各幅值不变) 逆向的传播. 当此电流片可以弯曲时, 因为它多次对应扭曲度, 扭曲.

电流片侧面的磁场很强. 因此电流片侧面的压强 P_1, P_2 可忽略, 侧面的磁场强度相同, 但方向可以不同 (这是电流片作为切向间断, P, P_1, B_1, B_2 均为间断面两侧的量, 不是电流片边缘两侧的量). 参见图 2.11. 令 X 轴垂直电流片平面, Y 轴平行于磁感应线的平均分布线上. 为穿过电流片时 B_y 可以保持不变, 而 B_x 将换了方向.

电流片的中心的等离子体压强会增强, 增强量而 $P_0 = \frac{1}{4\pi} B_{y1}^2 = \frac{1}{4\pi} B_{y2}^2$ 即壁处的磁场将被压缩. 若是 $B_y = 0$, 则在中心部分磁场为零. 从电



(a)



(b)

Fig. 10.4. The model of Milne and Priest (1981) for the central diffusion region. (a) The inflow speed as a function of distance (x) from the sheet centre for various values of β_i and $r = 0.012$ (β_i is the ratio of plasma to magnetic pressure for the inflow and r is the ratio of radiation to convection.) (b) The width (l') of the region in terms of its order-of-magnitude value ($l = \eta/v_\infty$).

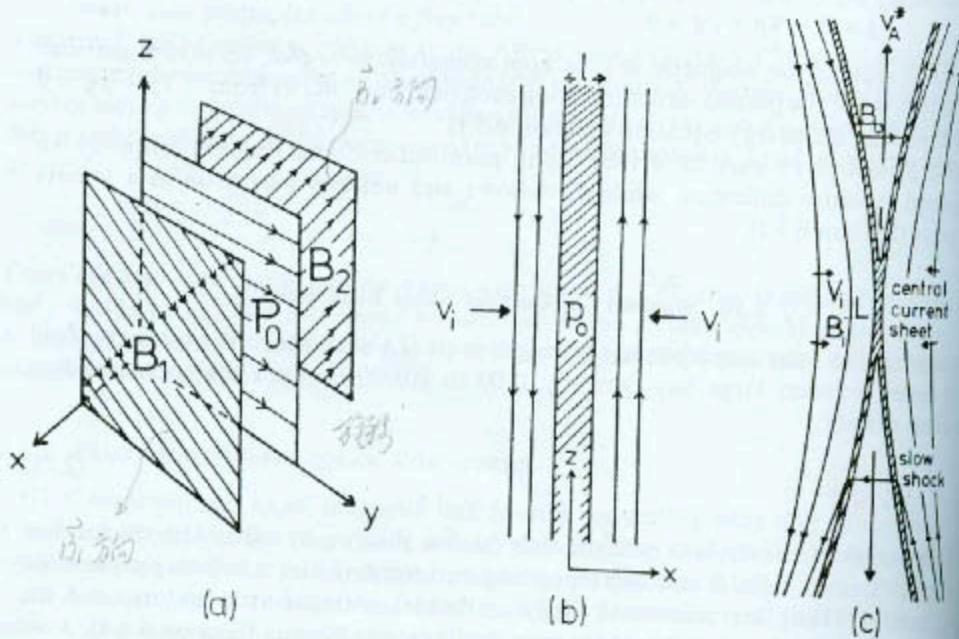


Fig. 2.11. (a) A current sheet in the yz plane across which the magnetic field rotates from B_1 to B_2 . (b) A section across a neutral current sheet, in the centre of which the magnetic field vanishes and the plasma pressure is p_0 . (c) The reconnection of magnetic field lines by their passage through a current sheet. The central sheet bifurcates into two pairs of slow shocks.

[bifurcation]

$\sqrt{\text{慢}} \approx \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

电流片一侧穿过，另一侧不穿，磁场方向相反（2.11.b），这就是中性片。

“当平行于穿越中性片时，所有的磁场变化，且与平行于磁感应线的方向无关”。

电流片平行于激波，可看作向右运动。速度和内部过程由撞散过程决定，不过所谓相对速度也起到一定作用。因为电流片不像激波可以传播，电流片只有撞散和导离两种以（10cm） μ from 速度从头部喷出。

下面我们将简述 Petscheck 模型

一、中性片作用的区域——撞散区

撞散区 + 反转区 = 磁场反转区

(field reversal region)

反转区外，电流不分离，电流集中于反转区内。

二、撞散区是反转区很小的一部分，大部分是

重联区，重联区与外部的尾部形成慢激波

（慢激波有关係式 $[B_0] < 0$ ，这时 $B_{C_0} - B_{C_1} < 0$ ， B_{C_1} 为重联区切向场）

从二侧来的气流会通过慢激波到重联区，磁场减弱，流速将加速。

若要产生慢激波，流速要大于慢磁声速， $\sqrt{P_-} = \frac{C_s^2 V_A^2 \cos \theta_B}{C_s^2 + V_A^2}$ ，

重联磁场的速度更快些，因此在中央重联区速度更快，从而重联区外的

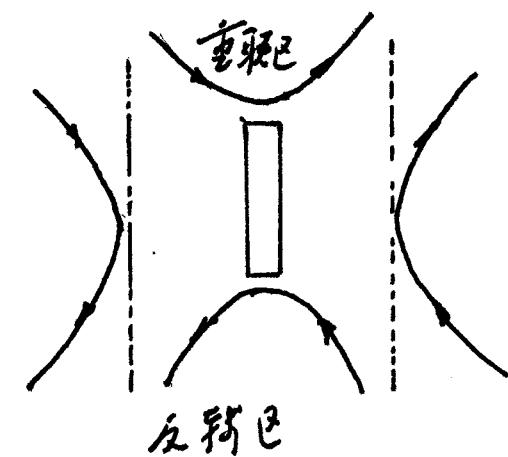
反转区形成与之速度慢激波

Petscheck 模型中，磁场和流场的分布如图 7.5 (“慢激波”) 所示。

实线为磁力线，虚线为流线，有对称慢激波。

三、Vasyllinas 模型

考虑不可压缩流体在磁场中运动的稳定性问题，所能成立的是 Maxwell 方程，运动方程和连续性方程，必须满足源项条件，即 $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$ 。反转区满足下列形式的度量张量的逆矩阵



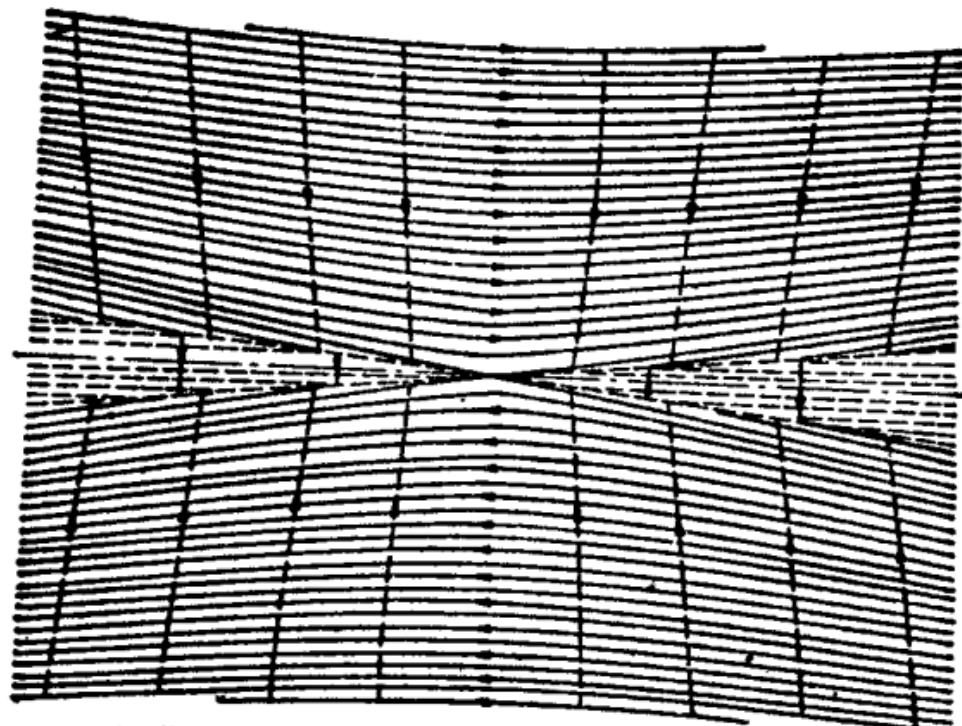


图 7.5 Petschek 机制的磁力线和流线分布

行了计算。虽然计算中仍然作了许多近似，但可以看

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{mc}{ne^2} \nabla \cdot (\vec{j} \vec{v} + \vec{v} \vec{j}) + \frac{1}{ne} \nabla \cdot \vec{P}(e) + \frac{1}{ne} \vec{j} \times \vec{B} \quad (7.11)$$

式中 η 是电阻率, m_e , e 是电子的质量, 电量, n 是电子或离子的数密度. $\vec{P}(e)$ 是电场的应变张量. η 可以是由简单碰撞产生的摩擦系数, 也可以是流体和管道壁的摩擦系数. 在边界层中, 由于电子对流产生的电场强度较大, 故后一个系数往往比前一个大. 我们考虑的是维恩方向流.

$$(7.12) \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

E_y 与 x, z 无关 (否则成为

三维问题) $\therefore E_y = \text{常数}$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}, \quad \nabla \times \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

磁力线化 $x-z$ 平面上. $\therefore B_y = 0$, 从上式可得只有 $j_y \neq 0$

$$\vec{j} = (0, j_y, 0)$$

1. 重叠区

重叠区是反转区的中央部分, 这是 $\vec{v} \times \vec{B} \approx \vec{E}$ 相比可以忽略, \therefore 重叠区中 $B \approx 0$. 通常把重叠区看作长 $2x^*$, 宽 $2z^*$ 的长方形, 假设无穿通处的流速和磁场均匀. 上下二面即为外下方的流速和磁场 (流向重叠区), 左右为重叠区的流速和磁场 (流向非重叠区)

对长方形应用质量守恒定律

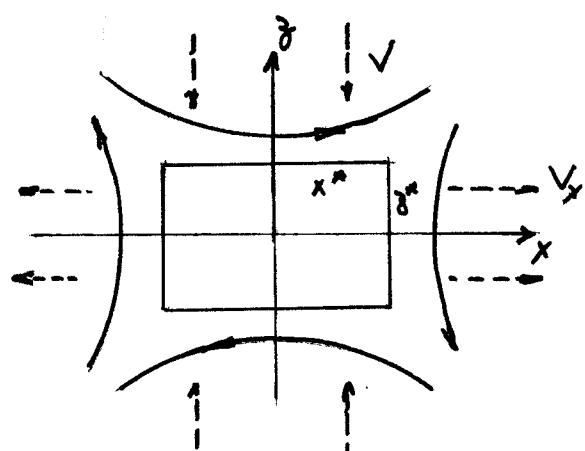
$$V x^* = V_x z^* \quad (7.12)$$

V — 外场流速, 平行于 z 轴

V_x — 重叠区流速的 x 分量.

对长方形第一象限部分应用安培定律

$$\mu \iint_{\text{I}} j_z dx dz = \iint \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) dx dz = B_x x^* - B_z z^* \quad (7.13)$$



B_x : 外磁场 (平行于 x 轴)

B_y : 垂直于磁场的分量，面积分也对第一象限进行。

(1) 由 Ohm 定律 (1.1) 式， $\vec{E} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ ，因此带入

$$\vec{j} \times \vec{B},$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j}^* \delta^* = \eta \iint j \, dz \, dx + \frac{mc}{ne^2} V_x \int_0^{\delta^*} j \, dz - \frac{\delta^*}{ne} P_{xy}^{(e)}$$

$$\nabla \cdot (\vec{j} \vec{v} + \vec{v} \vec{j}) = (\nabla \cdot \vec{j}) \vec{v} + (\vec{j} \cdot \nabla) \vec{v} + (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{j} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{j}$$

$$= \partial_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_x \frac{\partial}{\partial x} j_y \hat{i}$$

$$= V_x \frac{\partial j_y}{\partial x} \hat{i}$$

$$\text{由面积分, } V_x \text{ 为常数} \quad \iint V_x \frac{\partial j_y}{\partial x} \, dx \, dz = V_x \iint \partial j_y \, dz = V_x \int_0^{\delta^*} j_y \, dz$$

② 认为外场的压力 $\vec{P} = \rho \vec{v} v$, $\nabla \cdot \vec{P} = \rho \vec{v} \cdot \vec{v}$

③ 中心轴为 \hat{y} 方向, $x^* \delta^*$ 方向也可认为在 \hat{y} 方向 $\frac{dp}{dy} \hat{y} = 0$, P 为化
学平衡常数或为零。

$$\therefore \vec{E} \cdot \vec{j}^* \delta^* = \eta \iint j \, dz \, dx + \frac{mc}{ne^2} V_x \int_0^{\delta^*} j \, dz \quad (7.14)$$

$B_y \ll B_x$, B_y 为垂直于磁场的分量, B_x 为外磁场, 外磁场的垂直分量
可忽略不计。∴ $B_y \ll B_x$ (同 D.13) 式可近似为

$$\iint j \, dz \, dx \approx B_x x^*$$

对 x^* 整之商, $\int j \, dz \approx \frac{1}{\mu} B_x$

代入 (7.14) 右边, (外电场) $\vec{E} = E_y \hat{j} = -V \hat{y}$, $\vec{v} = B_x \hat{x}$

外电场 (外场) 作用 $\vec{E} = V B_x \hat{x}$ 代入 (7.12) 式, 可得

$$VB_x x^* \delta^* = \frac{\eta}{\mu} B_x x^* + \frac{mc}{ne^2} V_x \frac{1}{\mu} \partial_x$$

(利用 (7.12) 式)

$$V_x \delta^* = \frac{\eta}{\mu} \frac{V_x}{V} \delta^* + \frac{mc}{ne^2 \mu} V_x$$

$$\bar{\delta}^* - \frac{1}{\mu v} \bar{\delta}^* - \frac{m_e}{ne^2 \mu} = 0$$

令 $\lambda = \frac{1}{\mu v}$, $\lambda_e = \left(\frac{m_e}{ne^2 \mu}\right)^{\frac{1}{2}}$, 上式简化为

$$\bar{\delta}^* - \lambda \bar{\delta}^* - \lambda_e^2 = 0 \quad (7.15)$$

λ 称为电阻长度, λ_e 为电子碰撞长度

由 (7.15) 式可求得碰撞长度的厚度

$$\bar{\delta}^* = \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{\lambda}{4} + \lambda_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.16)$$

i. 当 $\lambda \gg \lambda_e$ 时, $\bar{\delta}^* \approx \lambda$ 碰撞长度等于电阻率成正比. 外场流速成反比. (这是 Sweet 和 Parker 的结论, 他们没有考虑电子碰撞次数 $\eta \rightarrow 0$, 则碰撞长度厚度 $\bar{\delta}^* \rightarrow 0$.)

ii. $\lambda \ll \lambda_e$ 时. $\bar{\delta}^* \approx \lambda_e$, 这时碰撞长度不随外场流速而变.

把 $\bar{\delta}^*$ 代入 (7.12) 式, 可得到 V_x 和 x^* 满足的关系

$$Vx^* = V_x \bar{\delta}^*, \quad \frac{V}{V_x} = \frac{\bar{\delta}^*}{x^*} \Rightarrow \left(\frac{V}{V_x} \right)^2 = \frac{\bar{\delta}^{*2}}{x^{*2}}$$

由 (7.15) 式可得 $\bar{\delta}^{*2} = \lambda \bar{\delta}^* + \lambda_e^2$ 代入上式

$$\left(\frac{V}{V_x} \right)^2 = \frac{\lambda \bar{\delta}^* + \lambda_e^2}{x^{*2}} = \lambda \frac{V}{V_x} \cdot \frac{1}{x^*} + \frac{\lambda_e^2}{x^{*2}}$$

$$\text{定义 } \lambda^* = \frac{1}{\mu v_x} \left(= \frac{1}{\mu v} \cdot \frac{V}{V_x} = \lambda \frac{V}{V_x} \right)$$

$$\left(\frac{V}{V_x} \right)^2 = \frac{\lambda^*}{x^*} + \frac{\lambda_e^2}{x^{*2}}$$

$$\therefore \frac{V}{V_x} = \sqrt{\frac{\lambda^*}{x^*} + \frac{\lambda_e^2}{x^{*2}}} \quad (7.17)$$

设 v_x (空间流速的 x 分量), 根据 λ^* 的定义, 由 (7.17) 可求出碰撞长度 x^* (外场流速 V , η 为已知量). 关于 V_x 的计算需考虑运动方程.

当电阻率已知时, $\lambda^* \gg \lambda_e$, $\frac{V}{V_x} \approx \left(\frac{\lambda^*}{x^*} \right)^{\frac{1}{2}}$; 当电子碰撞率已知时, $\frac{V}{V_x} \approx \frac{\lambda_e}{x^*}$.

如果取 $V_x = V_A$ ($= \frac{B_0}{(\mu P_e)^{\frac{1}{2}}} L$), 及碰撞长度 L (即 x^*), 则会得到 (和前分析的快慢 $M_A = \frac{V_A}{V}$), $\frac{V}{V_A} = \left(\frac{\lambda^*}{x^*} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\mu} \frac{L}{V_A} \right)^{\frac{1}{2}}$

因为来流速度 V_1 一并加于外流速度 V_A ，所以分离半 $M_A < 1$ 。理由

式 $\frac{V}{V_A} = \left(\frac{\Delta^2}{X^2}\right)^{1/2}$ 有错的原因，因为在实际情况是 $X^2 \ll L$ ，计算中令 $X^2 = L$ 。

L 2 约分当中， \therefore 分离半 $M_A = \frac{L}{V_A}$ 不小。

因此力求 V_X 时，不仅应考虑分离点，还要考虑重联点。

③ 分离点在及 X^2 不符，只从分离点求 V_X ，而是依赖于修正项。

2. 外场和重联区的计算

外场和重联区的计算是以全解 M_A^n 作为参数展开后进行.

$$① \text{外场:} \quad \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0 \quad (7.1)$$

$$\text{动量方程: (定态)} \quad \rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \nabla P = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \times \vec{B} \quad (7.18)$$

考虑: 维不可压缩的 $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. (7.18) 式: 没取速度

$$\mu \rho \nabla \times (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = \nabla \times \left[(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{\mu} \nabla B^2 \right] = \nabla \times [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}]$$

$$\text{上式左边 } \nabla \times (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} V_k \frac{\partial}{\partial x_k} V_i$$

$$= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} + V_k \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_j \partial x_k} \right)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} + V_k \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_j \partial x_k} \right)$$

$$\text{不. 可压流: } \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0, \quad \therefore \vec{V} = \varepsilon_{ijk} V_k \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_k \partial x_j}$$

$$\text{而 } (\vec{V} \cdot \nabla) \nabla \times \vec{V} = V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} V_i = \varepsilon_{ijk} V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} V_i$$

$$\therefore \mu \rho \nabla \times (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = \mu \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \nabla \vec{V}$$

$$\text{问题 } \nabla \times (\vec{B} \cdot \nabla \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \nabla \vec{B}$$

$$\mu \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \nabla \vec{V} = (\vec{B} \cdot \nabla) \nabla \vec{B} \quad (7.19)$$

\therefore 全解 M_A^n 为 \vec{V} 和 \vec{B} , $\vec{V} \perp \vec{B}$

$$\left(\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' M_A^n + \frac{1}{2} \vec{B}'' M_A^{2n} + \dots \right) \quad \dots = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \dots$$

其中 \vec{B}_n 和 \vec{V}_n 为 $O(M_A^n)$ 量级.

($O(M_A^n)$ 表示 n 次项的量级. 以之为 M_A^n 的进率, 即 M_A^{n+1} , 而且它的项中所保留的项 (进率的量为 M_A^n) 相比, 可以忽略.)

\vec{B}_0 为 \vec{V} 反向的均匀场, 即无磁场时的 \vec{V} .

$$\begin{cases} \vec{E} + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 = 0 & (7.20a) \\ (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \nabla \times \vec{B}_1 = 0 & (7.20b) \end{cases} \quad (7.19) \text{式两边 } (\nabla \cdot \vec{B}_1 - \mu_0 I) = 0$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \times \vec{B}_1 + \vec{v}_2 \times \vec{B}_2 = 0 & (7.21a) \\ (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \nabla \times \vec{B}_2 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \nabla \times \vec{B}_1 = \mu_0 \rho (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \nabla \times \vec{v}_1 & (7.21b) \end{cases}$$

以此类推，由(7.18)得 $\vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \rho \vec{v}_1 \times \vec{B}_0$ 为零。即 $\vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \rho \vec{v}_1 \times \vec{B}_0$

$$\text{从(7.20a)可得 } \vec{E} = -\vec{v}_1 \times \vec{B}_0$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \vec{B}_0 &= \vec{B}_0 \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \\ &= \vec{v}_1 \vec{B}_0 - \vec{B}_0 (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1) \end{aligned}$$

设 $\vec{v}_{1\perp}$ 为 \vec{v}_1 垂直于 \vec{B}_0 的分量，则必有 $\vec{v}_{1\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}_0}{\vec{B}_0^2}$
 $\therefore \vec{E} \cdot \vec{B}_0$ 为常量。 $\therefore \vec{v}_{1\perp}$ 为常量。

又不可压缩流体 $\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$ ， $\nabla \cdot \vec{v}_{1\parallel} + \nabla \cdot \vec{v}_{1\perp} = 0$ ， $\therefore \vec{v}_{1\parallel} = \text{const}$ 。

\vec{v}_1 为流入速度的展开式。 \vec{v}_1 为平行流动。以下不再分析。 $\therefore \vec{v}_{1\parallel} = 0$ 。

$$\text{因此 } \vec{v}_1 = \vec{v}_{1\perp}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{E} \times \vec{B}_0}{\vec{B}_0^2} \quad (7.22)$$

从(7.20b)可知， $\nabla \times \vec{B}_1$ 为磁力线 \vec{B}_0 方向不变。 $(\vec{B}_0 \cdot \nabla)(\nabla \times \vec{B}_1) = 0$ 为方向导数 = 0

Petsochek 例题，所考虑区域边缘 $x \approx IL$ 时。

磁场保持均匀，即边缘 $\nabla \times \vec{B}_1 = 0$ (忽略弯曲)

$$(7.20b) \text{ 式对整个边缘适用, } \therefore \lambda = -\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0$$

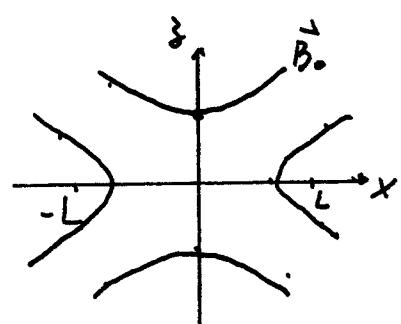
\vec{B}_1 是无电流的影响。由于 $\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\perp} = \frac{1}{\mu_0} \rho \vec{v}_1 \times \vec{B}_0$ 。从(7.21b)

可知在边界上及在边缘内，可推出 $\nabla \times \vec{B}_2 = 0$ 。

还可进一步讨论 $\nabla \times \vec{B}_3 = 0$ ，这样在磁场中的电流密度是平行于上加速度。

电流都集中在矩形区内形成集中电流片。

③ 定理已



\vec{B}_0 平行于 x 轴, $\vec{V}_i (= \vec{V}_{i\hat{x}})$ 平行于 z 轴. 由此可知反平行磁场 $(\vec{B}_0 \parallel \hat{x}, \vec{V}_i \parallel \hat{z})$

i) Petscheck 把狭窄的反平行磁场区称为边缘. 重取已知边缘, 即边缘速度为零.

$z = z(x)$ 是未知数. 因为电流片 $\pm z$ 宽, 应该是 z 的一阶量

仍先假设 V_x (反平行区内速度的 x 分量) B_0 和磁流密度 B_z 方向上的变化率 $\frac{d}{dx}$, 近似都与 z 无关.

考虑第 1 部分: $0 \leq z \leq z(x')$, $0 \leq x' \leq x$

该区域不再太长 \Rightarrow 上边界为 $z = z(x)$

质量守恒 $V_i x = V_x x + z(x)$

$$(\vec{V} \approx \vec{V}_i, \vec{V}_0 = 0)$$

Ampere's law $\mu \vec{j} = \nabla \times \vec{B}$ (1) 于第 1 部分

$$\mu \int_0^x dx' \int_0^{z(x')} j \cdot dz = \int_0^x dx' \int_0^{z(x')} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) dz \quad (\vec{j} \parallel \hat{z} \text{ 方向})$$

$$B_x = B_0 \quad \text{上式} = \int_0^x B_0 dx' - B_z(x) z(x) \quad (\text{已利用 } B_0 \text{ 与 } z \text{ 无关})$$

$$= \int_0^x B_0 dx' \quad (7.24)$$

B_0, B_z 同理, $\therefore z$ 为常数, 有解.

$$\mu \int j \cdot dz = \int \nabla \times \vec{B} \cdot dS = \int_0^x B_0 dx'$$

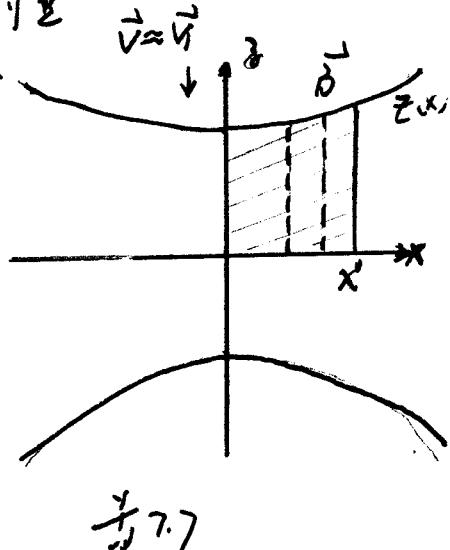
$$= \text{边界 } x \text{ 乘以 } \mu \int j \cdot dz \approx B_0 \quad (7.25)$$

ii) 重取已知对高次 Ohm 法律积分时, 还必须考虑 $\vec{V} \times \vec{B}$ (边缘假设 $\vec{B} = 0$, 该次可以忽略)

$$\begin{aligned} \vec{V} \times \vec{B} &= (V_i \hat{z} + V_x \hat{x}) \times (B_x \hat{x} + B_z \hat{z}) \\ &= (V_i B_x - V_x B_z) \hat{y} \end{aligned}$$

$\vec{V} \times \vec{B}$ 在第 1 部分积分, 利用质量守恒 $V_i x = V_x x + z(x)$

$$\int (V_i B_x - V_x B_z) dx' dz = \int_0^x \int_0^{z(x')} \frac{V_i(x) z(x)}{x'} B_x dx' dz - \iint_0^x B_z \frac{V_i x'}{z(x')} dx' dz$$



第 7.7

而已證得 V_1 為常量 $\therefore V_1 = \frac{V_x z}{x} = \text{const.}$

$$\int_0^x dx' \int_0^{z(x')} \frac{V_x z}{x} B_x d\delta = \int_0^{z(x')} B_x V_x z(x) d\delta$$

$$\int_0^x \int_0^{z(x')} B_\delta \frac{V_1 x'}{z(x')} dx' d\delta = \int_0^{z(x')} \frac{1}{z(x')} d\delta \int_0^x B_\delta V_1 x' dx' = \int_0^x B_\delta V_1 x' dx'$$

B_δ 之值為零.

$$\int (V_1 B_x - V_x B_\delta) dx' d\delta = \int_0^{z(x')} B_x V_1 x' z(x') d\delta - \int_0^x B_\delta V_1 x' dx'$$

B_x 之反向即為 V_1 之反向，故 B_δ 之值為零

$V_x \leq V_1$ ，取形如 $\vec{v} = \vec{p}_j - \vec{p}_i$ ， $\vec{V} = \vec{p}_i - \vec{p}_j$ ， $\vec{B} = \vec{B}_0$ ， \vec{B}_0 之反向

$$\therefore B_x V_x < B_\delta V_1 x$$

$$\therefore \text{有 } \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \int_0^x dx' \int_0^{z(x')} \vec{p} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) d\delta \approx - \int_0^x B_\delta V_1 x' dx'$$

iii. 電場與磁場之關係

$$① \vec{E}_z \text{ 為常量, 可由 (1) 式知 } (\vec{j}, \vec{B}) \text{ 未定, } \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -(-V_1 \hat{\delta}) \times \vec{B}_0 \hat{x}$$

$$= V_1 B_0 \hat{y}$$

$$\vec{E} \int_0^x dx' \int_0^{z(x')} d\delta = V_1 B_0 \int_0^x z(x') dx' = V_x \frac{V_1 z}{x} B_0 \int_0^x z(x') dx'$$

$$= V_x B_0 \frac{z(x)}{x} \int_0^x z(x') dx'$$

$$② \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{mc}{ne^2} \nabla \cdot (\vec{j} \vec{v} + \vec{v} \vec{j}) - \frac{1}{ne} \nabla \cdot \vec{p} + \frac{1}{ne} \vec{j} \times \vec{B}$$

(1) (2) (3)

(4)

\vec{j} 與 \vec{B} 方向相同

$$(1) \text{ 若 } \vec{j} \parallel \vec{B} \text{ 則 } \int_0^{z(x')} \vec{j} d\delta = \frac{1}{\mu} B_x, \mu \int_0^x \vec{j} dx' d\delta \approx B_x x$$

$$(2) \frac{mc}{ne^2} V_x \int_0^{z(x')} \vec{j} d\delta = \frac{mc}{ne^2} V_x \cdot \frac{1}{\mu} B_x$$

综合以上方程得：积分得：

$$V_x(x) B_0 \frac{Z(x)}{x} \int_0^x Z(x') dx' - \int_0^x B_0 V_1(x') dx' = \frac{\eta}{\mu} B_x x + \frac{mc}{ne^2 \mu} V_x B_x \\ = \frac{\eta}{\mu} B_x \frac{V_x Z}{V_1} + \frac{mc}{ne^2 \mu} V_x B_x$$

$$\frac{Z(x)}{x} \int_0^x Z(x') dx' = \frac{\eta}{\mu V_1} \frac{B_x}{B_0} Z + \frac{mc}{ne^2 \mu} \frac{B_x}{B_0} + \frac{V_1}{V_x} \int_0^x \frac{B_x}{B_0} x' dx'$$

$B_x = B_0$, V_1 为常量；其他条件不变，把 $V_1 = \frac{V_x Z}{x}$ 代入上式，整理后得

$$\frac{Z(x)}{x} \int_0^x Z(x') dx' - \lambda Z - \lambda_e^2 - \frac{Z(x)}{x} \int_0^x \frac{B_x}{B_0} x' dx' = 0 \quad (7.27)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时， $Z \rightarrow Z^*$. (7.27) 式即为 扩散的 (7.15) 式

∴ 这时 (7.27) 式变成

$$\frac{Z^*}{x} \cdot x - \lambda Z^* - \lambda_e^2 = 0$$

由于方程 (7.27) 式中有 B_x , 似乎从 (7.27) 式中和去 B_x (这即为慢波的形状), 必须考虑运动学方程, 为此我们把运动学方程 \dot{x} 作用于 P.142 节中的虚线区域 (若 7.7), $(x', x' + dx')$ 以 $\delta \leq \delta(x', t)$ 为半径的圆域. 在这个条件下, 由流入该区域 x 方向的运动量 | 先为 $\int \frac{d}{dx} (\rho V_x V_z) dx$ | 化入可压缩近似下, 得到慢波源 (为耗弱而耗无初速流动), 压压缩率, 而外场的压缩率为常量 (即对初速的改变) 之有贡献 ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \sim -\nabla(p + \frac{B^2}{8\pi})$)

∴ 有磁源才有贡献

$$\int \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) dx = \frac{1}{\mu} \int \nabla \cdot (\vec{B} \vec{B}) dx \\ = \frac{1}{\mu} \int \vec{B} \vec{B} \cdot dS \quad \text{且 } B_n = B_0 \text{ 为常数} \\ = \frac{1}{\mu} \int \vec{B} \vec{B}_0 dx dy$$

x 方向:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d}{dx} (\rho V_x^2) dx dy = \int \frac{d}{dx} (\rho V_x^2) \cdot \dot{x} dx dy \\
 &= \int \left[\frac{d}{dx} (\rho V_x^2) - \rho V_x^2 \frac{d}{dx} \dot{x} \right] dx dy = \int \frac{d}{dx} (\rho V_x^2 \dot{x}) dx dy \\
 &\quad \stackrel{\text{由 } \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx}}{=} = \frac{1}{\mu} \int B_0 B_3 dx dy, \quad (B_3 \partial B_0) \\
 & \therefore \frac{d}{dx} (\rho V_x^2 \dot{x}) = \frac{1}{\mu} B_0 B_3 \quad (7.28) \quad \dot{x} = \ddot{x} + \ddot{z}' M_A + \frac{1}{2} \ddot{z}'' M_A^2 + \dots
 \end{aligned}$$

由上式可得下述方程

$$V_i x = V_x(\lambda) \dot{x} \quad (7.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ddot{z}(x)}{x} \int_0^x \dot{z}(x') dx' - \lambda \ddot{z}(x) - \lambda_e^2 - \frac{\ddot{z}(x)}{x} \int_0^x \frac{B_3}{B_0} x' dx' = 0 \quad (7.27) \end{array} \right.$$

$$\frac{d}{dx} (\rho V_x^2 \dot{x}) = \frac{1}{\mu} B_0 B_3 \quad (7.28)$$

可以求得 V_x, B_3, \dot{x} .

从 (7.23) | (7.28) 得 V_x (记得 ρ, V_i 为常量)

$$V_i^2 \rho \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{\dot{x}} \right) = \frac{1}{\mu} B_0 B_3, \quad M_A = \frac{V_i}{V_x}$$

$$\frac{B_3}{B_0} = \frac{\mu \rho V_i^2}{B_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{\dot{x}} \right) = M_A^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{\dot{x}} \right) \quad (7.29)$$

$\dot{x}(x)$ 为一个量, $\therefore B_3$ 为一个量. (7.29) 中的 B_3 代入 (7.27), 可得到 $\ddot{z}(x)$

1. 高阶的方程: $\frac{\ddot{z}(x)}{x} \int_0^x \dot{z}(x') dx' - \lambda \ddot{z}(x) - \lambda_e^2 - \frac{\ddot{z}(x)}{x} \int_0^x M_A^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{\dot{x}} \right) x' dx' = 0$

$$\text{令 } \chi = M_A x / \dot{x}, \quad \xi = M_A x$$

有 $\frac{\ddot{z}(x)}{x} = \frac{M_A}{\chi}$, $d\chi = \frac{1}{M_A} d\xi$ 代入上式

$$\frac{M_A}{\chi} \int \frac{1}{M_A^2} \frac{\xi}{\chi} \cdot \frac{1}{M_A} d\xi - \lambda \frac{\xi}{\chi} - \lambda_e^2 - \frac{M_A}{\chi} \int M_A^3 \frac{d}{d\xi} (\xi \chi) \frac{1}{M_A^2} \cdot \xi d\xi \cdot \frac{1}{M_A^2} = 0$$

$$\frac{1}{\chi} \int \frac{\xi}{M_A^2} d\xi - \lambda \frac{\xi}{\chi} - \lambda_e^2 - \frac{1}{\chi} \int \frac{d}{d\xi} (\xi \chi) \xi d\xi = 0$$

$$\int \frac{\zeta}{x} d\zeta - \lambda \zeta - \lambda_e^2 x - \int \left(x \zeta + \zeta^2 \frac{dx}{d\zeta} \right) d\zeta = 0$$

$$\int \left(\frac{x}{\zeta} - x \zeta - \zeta^2 \frac{dx}{d\zeta} \right) d\zeta - \lambda \zeta - \lambda_e^2 x = 0$$

对 \$\zeta\$ 积分 $\frac{x}{\zeta} - x \zeta - \zeta^2 \frac{dx}{d\zeta} - \lambda - \lambda_e^2 \frac{dx}{d\zeta} = 0$

边界条件: $(\zeta + \frac{\lambda_e^2}{\zeta}) \frac{dx}{d\zeta} + x - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\lambda} = 0 \quad (7.30)$

边界条件是 \$x=0\$, 即 \$z=z^*\$, 根据 \$x \rightarrow \infty\$, 从 \$(7.23), (7.28)\$ 可得 \$V_x(3)\$.

a, 高音速区近似速度 \$(M_A x \gg z^*)\$, \$(7.30)\$ 变形为

$$\zeta \frac{dx}{d\zeta} + x - \frac{1}{\zeta} = 0 \quad (7.30)$$

$$\zeta \frac{dx}{d\zeta} + x^2 = \frac{\text{const}}{\zeta^2}$$

$$x^2 = 1 - \frac{\text{const}}{\zeta^2}$$

$$\text{设 } M_A x \rightarrow \infty, \text{ 即 } \zeta \rightarrow \infty \text{ 有 } |x| \rightarrow 1 \quad \therefore z = M_A |x| \approx M_A x =$$

且 \$x\$ 是慢流动的形状, 近似率为 \$M_A \approx 1\$

$$\text{由 } (7.23) \text{ 得}, V_x = \frac{V_1 x}{z^*} = \frac{V_1}{M_A} = V_{A*} \quad (\text{高音速区 } (100 \text{ m/s}) \text{ Alfvén 速度})$$

$$\text{从 } (7.28) \text{ 式可得: } \frac{d}{dx} (\rho V_x^2 z^*) = \frac{d}{dx} (V_A^2 M_A x)$$

$$\int V_A^2 M_A = \frac{1}{\mu_0} B_0 B_3$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 V_A^2 M_A}{B_0} = \sqrt{\mu_0} V_A M_A = V_A \sqrt{\mu_0} \frac{V_1}{V_A} = V_1 \sqrt{\mu_0} \approx$$

b, \$3 \ll \lambda \ll \lambda_e\$ 时, \$\omega \approx \frac{\lambda}{\zeta}\$

$$(\zeta + \frac{\lambda_e^2}{\zeta}) \frac{dx}{d\zeta} + x - \frac{1}{\zeta} = 0$$

$$x^2 = 1 - \frac{c}{\zeta + \lambda_e^2} \quad c \text{ 为常数}$$

$$X = \frac{M_A X}{Z} = \frac{\zeta}{Z}$$

$$\therefore \frac{\zeta^2}{Z^2} = 1 - \frac{c}{\zeta^2 + \lambda_e^2}, \quad Z^2 = \frac{\zeta^2(\zeta^2 + \lambda_e^2)}{\zeta^2 + \lambda_e^2 - c}$$

$$\therefore c = \lambda_e^2.$$

$$Z^2 = \zeta^2 + \lambda_e^2, \quad Z = (M_A X^2 + \lambda_e)^{\frac{1}{2}} \approx$$

$$\text{从(7.23)得} \quad V_x = \frac{V_A X}{Z} = \frac{M_A V_A \cdot X}{Z}$$

$$V_x = V_A \frac{M_A |X|}{Z} \approx$$

再从(7.28)得 \$B_3\$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\rho V_x^2 Z) &= \frac{d}{dx} \left(\rho V_A^2 \frac{M_A^2 X^2}{Z^2} \cdot Z \right) \\ &= \rho V_A^2 M_A^2 \left(\frac{2X}{Z} - \frac{M_A^2 X^3}{Z^3} \right) \\ &= \frac{1}{\mu} B_0 B_3 \end{aligned}$$

$$B_3 = B_0 M_A \left(\frac{2M_A X}{Z} - \frac{M_A^3 X^3}{Z^3} \right) \approx$$

(若 \$x \gg 1\$, 则 \$B_3 \approx 0\$) 由 \$Z = (M_A X^2 + \lambda_e)^{\frac{1}{2}}\$ 知道

$$\bullet \text{当 } M_A X^2 \ll \lambda_e^2 \text{ 时, } V_x = V_A \frac{M_A |X|}{Z} = V_A \frac{M_A |X|}{(M_A X^2 + \lambda_e)^{\frac{1}{2}}} \approx V_A \frac{M_A}{\lambda_e} |X|$$

$$B_3 \approx B_0 M_A \cdot \frac{2M_A}{Z} X = \frac{2B_0 M_A^2}{\lambda_e} X$$

\$V_x, B_3 \propto X\$ 为线性关系

$$\bullet \text{当 } X \gg M_A \text{ 时, } V_x \approx V_A \frac{M_A |X|}{M_A |X|} = V_A$$

$$B_3 \approx B_0 M_A \left(2 - \frac{M_A^3 X^3}{(M_A X)^3} \right) = B_0 M_A$$

\$V_x, B_3\$ 均为常数

上述结果对于 \$X\$ 大时, 误差较大. \$X\$ 越小, 误差越小

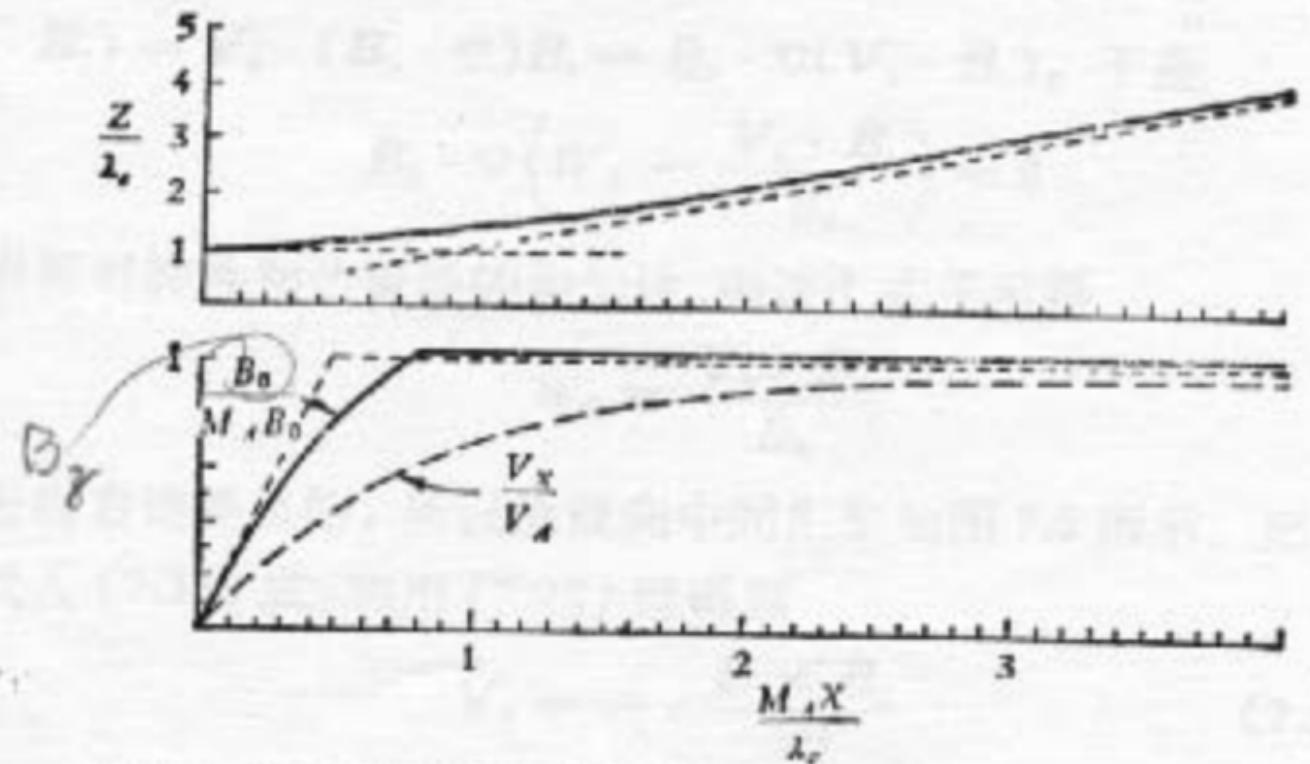


图 7.8 反转区的性质与至中心线距离的变化关系。虚线是 Petschek 得到的当 x 大或小时的渐近结果

10.2. 单环耀斑 (Simple-loop flare)

10.2.1 磁通量耗散模型

Heyvaerts 等人 (1977) 描述的模型是磁通模型，光球下层说为新的磁通。该模型是建立在 (1977) 描述的模型基础上的。光球中的类型取决于出现在磁通区域的磁通密度，通常情况下是单极子附近出现的磁通，或者在运动区边缘附近，当现在单极子区域内的磁通可以形成单极子耀斑。例如新磁通与现有运动区 (filament) 周围剪切带附近，则可能会产生双极耀斑。浮现的新磁通与现有运动区附近的猝放。

如果新磁通系统演化时，磁场壳的支持向心力形成电流片，光球中的半径运动与垂直运动一样，也会形成电流片。

应该指出的是，并非所有浮现的新磁通都产生耀斑。只有足够强的磁通浮现，产生了新旧磁通的不均匀的电流片位置，当达到临界值（该速度与浮现速度及磁场强度有关）时，才有单环耀斑的爆发。（双极耀斑也需要大尺度磁场的深度剪切，但它没有单极子耀斑那么强）

磁通浮现模型提出：浮现磁通与原有磁场的相互作用，发生单极，光耀斑，可分为三个阶段 (见 10.7)

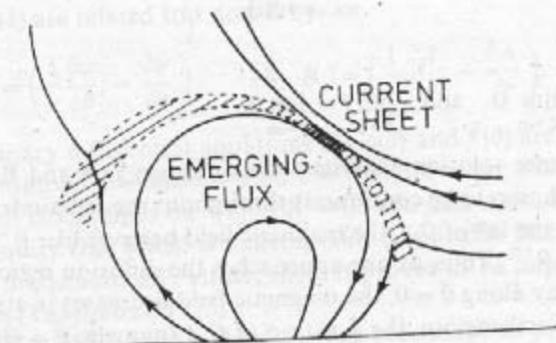
单极光耀斑 (小光耀斑) 及不完全 (浮现机制)

a. 光耀斑前阶段：浮现磁通的上方光带附近的磁场不强且联，以一小电流片形成激波 (实质为电流片的厚度，类似于喷流)，加热等离子体。(阴极区域)

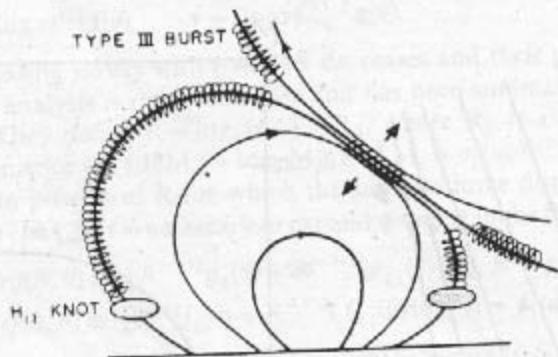
b. 释放冲程 (在 X 射线、硬 X 射线、宽波段)

电流片内开始运动，引起快速扩增，电场加速粒子，粒子速度增加，带电粒子带电场逃逸，产生脉冲激波爆发，向下运动的部分，通过磁重联激发，产生硬 X-ray (如果可能有 H₂ 话)，向上运动到还未放热的粒子，产生正负粒子电爆。

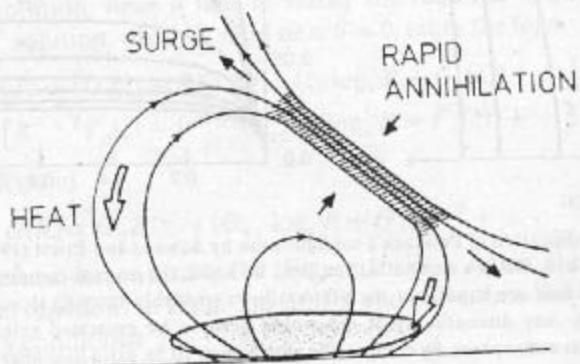
c. (n) 相和主相 (H₂ 放热，软 X-ray，分子波段)



(a) Preflare Heating



(b) Impulsive Phase



(c) Main Phase

电流片达到稳定速度 v_{crit} 后，流动电阳测速的灵敏度降低。该电阳必须 (平均值) 大得多，否则在向后传播时低速区域将无法探测。

当磁场进入 (扁平) 稳定的周围，电流片被移去，达到稳定速度 v_{crit} 时，电流密度超过发生湍流运动的阈值，触发声壁破。该条件可用电流片速度 T_c 近似地写成 $T_c^2 > T_{turb}^2 \equiv 1.8 \times 10^{16} \frac{B_0^2}{V}$

T_c 为电流片速度，流入磁场场 B_0 的 Tesla 单位，向内流动的速度 V ，单位为米/秒。

为确定 T_c ，必须研究电流片内的能量平衡。方程 (10.12 式)： $E = J + H + K - R$ E : 绕对流通过电流片耗散的能量， J : 但耳阻力， H : 通过电流片的机械加热， K : 热传导 (进入电流片)， R : 热辐射损失。假定 $T_c = T_c(v)$ 是无量纲化的速度 (忽略次方项)

求解的结果是：“低速无量 磁重方程有唯一解，主要是辐射和 Joule 加热的平衡”。 $T_c < T_{turb}$ 。对于高音波时，不存在热平衡，因为电流片是处于亚 (暂) 稳态，迅速加热，电流密度超过 T_{turb} ，就将发声壁破。由于流动电阳的出现，电流片迅速变宽，产生强电场，将粒子加速到音速。

形成脉冲波。(电流片宽度 $\lambda = \frac{V}{J}$ ，且 $J \propto I$ ； $E = I \frac{d\lambda}{dx} + \frac{V \lambda}{a} B_0$ ，且 $E \propto I$ ，参见 §10.1.1)

Milne 和 Priest (1981) 对于背景区的研究表明 (§10.1.2) 高音波及 v_{crit} 随 B_0 增加而减少。(参 10.9)。 B_0 太低不能得到平衡解 (参 B10.2 及 §10.1.2)

进一步需要指出的是：1. 理论上，寻找耗散平衡解的过程，动力学理论已需更详细的修正。2. Mercier 和 Heyvaerts (1980) 简化了背景的非绝热问题 (即随时间变化的方向)，或先研究色散动力的性质问题。3. 规则二：迫切需要探测器，当此碰撞的密度高，速度高时，则重。

numerical and observational, is needed to set the emerging

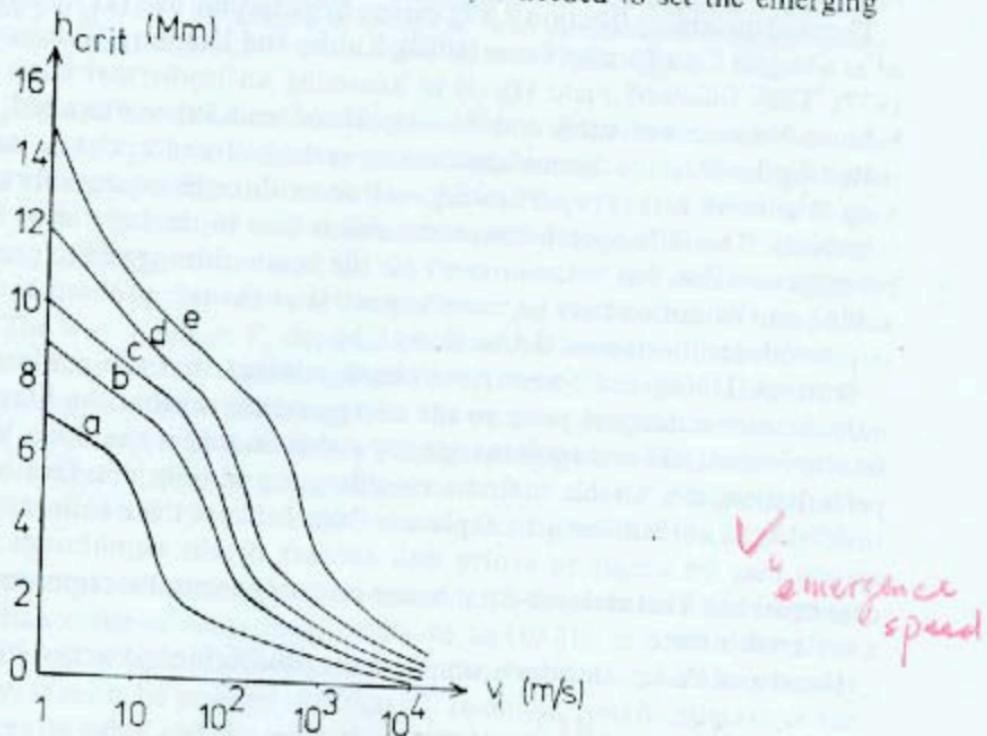


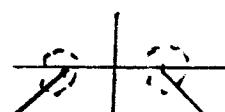
Fig. 10.9. The variation of the critical height (h_{crit}) in Mm ($1 \text{Mm} = 10^6 \text{m}$) for simple-loop flare onset with the emergence speed (v) for several values of the ambient magnetic field (B_0) in tesla. a, b, c, d, e refer to $B_0 = 10^{-1}, 10^{-1.5}, 10^{-2}, 10^{-2.5}, 10^{-3}$, respectively. (A weakly turbulent diffusivity that is a 100 times larger than the classical value has been adopted) (from Milne and Priest, 1981).

10.2.2 非热平衡

通常认为磁场是热平衡的能量来源，但 Hood 和 Priest (1981a) 认为当运动区的磁场冷却若不再处于热平衡状态时，可能发生单极能量耗散。通过他们求解质量平衡方程可以说明在非热平衡的可能性。假设太阳风处子 10^4 K 质量恒定下的热平衡，逐渐加热或递减风的速度，最后达到亚平衡的状态。超越临界速度后，热平衡被破坏，等离子体剧烈升温，在典型温度及 10^7 K ，到达新的准平衡状态。在这种热耗散过程中，包含等离子体的磁通量，保持不变。来的加热则必须更加快速。(注： 10^7 K 为临界温度， 10^4 K 为低度耗散是较低质量的风以现象一“不向物理学家” P. 462)

非热平衡是某些单极能量耗散的本质特征。另外，非热平衡也可能引发双带耗散，其过程是：流动区首先出现“耗散带”，强度上升，等离子体的温度膨胀，喷射速度上升至临界速度，磁通量变成 MHD 不稳定，随后剧烈向外爆发。

由高斯驱动的热力学稳定性 (§ 7.5.7)，先前认为会随磁耗散降低。布 Field (1960) 的假设：辐射和加热还叫等离子体。此后 Hood 和 Priest 进一步化简，引入了等离子体的辐射和加热的影响。结果是通过非热平衡过程，可能发生快速的加热，而不会通过不稳定性升温。二者的主要区别在于后者 (即稳定性) 是平衡型变成不稳定，而前者是非平衡型风不加热，随时间变化为激烈的变化。

Sturrock (1966) 和 Sweet (1969) 强调等离子体的不稳定性} 必须立即大于等离子体的耗散率，因此耗散是一个爆发过程。换言之，系统运行线性部分之上的是一个耗散过程 ，但是受到有限扰动后，头部运行到非平衡状态。线性不稳定性不是等离子体耗散，因为系统如非线性行为可能会从演化到静止的另一个平衡点，而不伴有所谓的耗散过程。非热平衡确实满足能量转移的条件。

Hood 和 Priest 考虑了简单的静磁平衡

$$\frac{d}{ds} \left(K_0 T^{\gamma_{\mu}} \frac{dI}{ds} \right) = n_e^2 Q(T) - H \quad (10.21)$$

式中 $n_e = \frac{P}{2k_B T}$ ($n_0 = n_s$), 应该均匀; γ_{μ} : I_n^{μ} 磁场强度的升高. $\frac{d}{ds} (K_0 T^{\gamma_{\mu}} \frac{dI}{ds})$ 表示 I_n^{μ} 磁场的热速率 ($\S.2.33$). $n_e^2 Q(T)$ 是电子源率的辐射 ($\S.2.35c$) H 是单位体积的加热, 也是均匀. 第一次温度 T_1 , 压强 P , 加热次 H 和 L 长 $2L$ 有关. 对于确定的 P , T_1 对 H, L 的依赖关系如图 10.10, 其中 1 表示近似圆柱形半径: $\frac{d}{ds} (K_0 T^{\gamma_{\mu}} \frac{dI}{ds}) = n_e^2 Q - H \Rightarrow \frac{1}{L} (K_0 T^{\gamma_{\mu}}) \approx n_e^2 Q - H$

$$\Rightarrow \frac{(P n_e^2)}{K_0 T^{\gamma_{\mu}}} \cdot L^2 \Rightarrow \left(\frac{P}{K_0 T^{\gamma_{\mu}}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot n_e L = \bar{L} \quad (\text{下标方中的参数})$$

当加热速率慢慢增加时, 辐射强度以及这一系列半径将增加, 由下面的分析可知. 在加热过程中通过平衡值 H_{crit} , 附近就不再有平衡, 导高磁场强度迅速升至饱和. 已经得到饱和温度 T_f , 大于 $10^6 K$ (以 $10^6 K$ 表示. 此时强度取决于 \bar{L} 但加热功率的大小)

其他例子也得用类似的方法. 这些例子中可以看 i. 不同的加热形式. ii. (10.21) 的完全解 (而不走圆柱形半径) iii. 包括引力.

如果减小压强, 也会产生共振频率的降低.

需要指出的是 T_1 作为共振频率的粗略估计. T_f 的数值必须由详细问题的过渡辐射和高频率动力学的详细过程.

10.2.3 折折 (kink) 现象

现例举的是研究一种相对稳定的结构, 但局部会不稳定. 产生振荡. 根据 MHD 稳定性的分析, 当磁通量扭旋时, 有不稳定性存在, 但加入磁场约束, 则可以使磁通量稳定, 但运动的约束因属于稠密的光球中, 由于光球等离子体的惯性大, 日冕中的任何运动, 例如环的运动, 不仅对等离子体扰动, 而且对附近的物质也产生影响, 且对影响区域的稳定性.

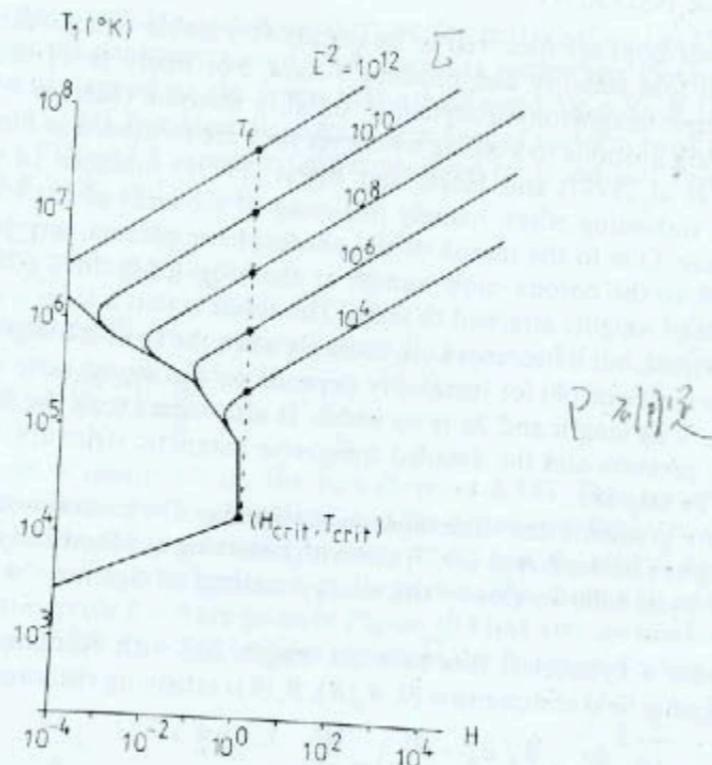


Fig. 10.10. The equilibrium summit temperature (T_1) of a loop as a function of the heating H (expressed in units of the radiative loss at $T = 2 \times 10^4$ K and $n_e = 5 \times 10^{14} m^{-3}$), for various values of the dimensionless half-length ($\bar{L} = (Q/(k_B T^{7/2}))^{1/2} n_e L$) (from Hood and Priest, 1981a).

where $n_e = p/(2k_B T)$, and the pressure p is given by

化扭流时，流场扭转的稳定性

扭流固有频率，不稳定性叫涡度，取决于环的纵径 $\pi L/a$ ($2L$ 为环长, $2a$ 为环宽(直径)). 随着 β_0 、 β_1 而改变. 扭转模态
对应的固有频率，它的典型值在 $2\pi/a$ 和 $b\pi/a$ 之间.

压强梯度有时引起扭转作用. Hood 和 Priest (1979b) 考虑加入压强
梯度, 在圆管的情况下, 扭流是稳定的稳定性问题, 与垂直壁是否有利.

考虑在有 $2L$ 的圆柱管道内, 处于平衡时, 压强 $P(R)$, 破坏率为
($\sigma, \beta_0(R), \beta_1(R)$), 满足力平衡关系.

$$\sigma = \frac{dP}{dR} + \frac{d}{dR} \left(\frac{\beta_0 + \beta_1}{2\mu} \right) + \frac{\beta_0}{\mu R} \quad (10.22)$$

(参见 Priest, P. 111)

设奇数项的扰动

$$\vec{\xi} = [\vec{\xi}^R(R), -i \frac{\beta_2}{\beta_1} \vec{\xi}^0(R), i \frac{\beta_2}{\beta_1} \vec{\xi}^0(R)] (\cos \frac{\pi r}{2L}) \cdot e^{i(m\phi + k_z)} \quad (10.23)$$

(参见 (2.4.4) 式, $\cos \frac{\pi r}{2L}$ 不等于 f . $f(r) = f(2L) \Rightarrow$ 在图中 $\vec{\xi} = \pm \vec{L}$ 时, $\vec{\xi} = 0$
当 $r = 0, \vec{\xi} = 0$. 取在图中间位置)

(10.23) 式, 对 $\vec{\xi}^0$, 令 $\vec{\xi}^0 = \pm \vec{L}$ 又 $\vec{\xi}^0$ 为速度零. 体重以改变量:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int [\frac{\beta_1^2}{\mu} - \vec{j}_0 \cdot (\vec{B}_1 \times \vec{\xi}) + \frac{Y P_0}{\beta_1} \nabla \cdot (\vec{P}_0 \vec{\xi}) (\nabla \vec{\xi}) + (\vec{\xi} \cdot \vec{g}) \nabla \cdot (\vec{P}_0 \vec{\xi})] dV \quad (7.39)$$

\vec{B}_1 为 \vec{B}_0 的扰动量.

若 $\vec{g} = 0$ 时,

$$\delta W = \frac{1}{2} \int [\frac{\beta_1^2}{\mu} - \vec{j}_0 \cdot (\vec{B}_1 \times \vec{\xi}) + \frac{Y P_0}{\beta_1} \nabla \cdot (\vec{P}_0 \vec{\xi}) \nabla \cdot \vec{\xi}] dV$$

关于 $\vec{\xi}^0$ 重以 (参见 §7.4.1)

$$\delta W = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \left[\tilde{F} \left(\frac{d\vec{\xi}^R}{dR} \right) - G \vec{\xi}^{R^2} \right] dR \quad (10.24)$$

式中 F, G 为 R, P, B_p, B_g 和 m 的函数，由(7.50)(7.51)式得 m, R 与 P 的关系式。为了求关于径向运动 \dot{R} 的方程，由 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dR} \left(F \frac{d\dot{R}}{dR} \right) + G \dot{R}^2 = 0 \quad (10.25)$$

边界条件： $\dot{R} = 1$, $\frac{d\dot{R}}{dR} = 0$ ($\text{对 } R=0 \text{ 时}$), $m=1$. (参考书 2. 径向运动和 P.36)
(书中 P.362 给的方程是 $\dot{R} = \frac{1}{R}$ 的形式，即 \dot{R} 为常数的解，) 是一个自然的边界条件。

对于方程(10.25)式的讨论初， \dot{R} 从 R 变化到空，对 R 稳定， \dot{R} 为负且渐变，对 R 不稳定 (§7.4.1 和 7.7)

详细计算， $P(R), B_p(R), B_g(R)$ 的表达形式有关，但以 m :

1) 均匀扭绞 (§7.5) 为例，稳定性由 §7.8 表示

2) Hood 等考虑均匀转动场 $B_p = B_g$ ，扭绞为

$$\bar{\omega}(R) = \frac{2L B_p}{R B_g} = \frac{\bar{\omega}_0}{1 + \frac{R^2}{L^2}} \quad (10.2.3-1)$$

庄强均

$$P(R) = P_0 + \left(\frac{\bar{\omega}_0}{2L} \right)^2 \cdot \frac{B_0}{R^2} \quad (10.2.3-2)$$

(上式即为 Priest 在 P.30 所列的式子)，轴中 $L, R=0, \bar{\omega}, P$ 为常数。

随 R 增大而减小，扭绞有变化的场 ($\bar{\omega}(R)$ 的变化情况由(10.2.3-1)所示)

可用以表示向轴转动对扭转的影响，其稳定性由 §7.8 表示有关：

$L, m, \frac{1}{a}, \bar{\omega}$ 和 B (最高轴心的无量纲值 $= 2\mu \frac{P_0}{B_0}$)，由 §7.11(a)

计算所得的 $\beta = 0$ 的稳定性曲线，类似于无转动情况下 §7.8，虚线代表

Kruskal-shafranov 极限 (对于任何扭绞，当波数 $k \geq -\frac{\bar{\omega}}{2L}$ (7.59))。

磁通量对于螺旋扭绞态不稳定，式中 $\bar{\omega} = 2L B_p / (R B_g)$ ，写成

$$\frac{1}{2} \bar{\omega} R = -\frac{2L}{a} \bar{k}, \quad \bar{k} = ka \quad (\text{对 } k=a \text{ 时})$$

(上式类如 $2L R = \frac{1}{2} \bar{\omega} R = \bar{\omega}(a)$ ， $k = -\frac{\bar{\omega}(a)}{2L}$ ， $\bar{\omega}(R) > \bar{\omega}(a)$ ， $\therefore R \leq -\frac{\bar{\omega}(a)}{2L}$)

该极限 (虚线所示) 对无压缩程度和圆柱情形 \bar{k} ， $\bar{\omega}(R)$ 稳定性的影响扭绞。

CHAPTER 3

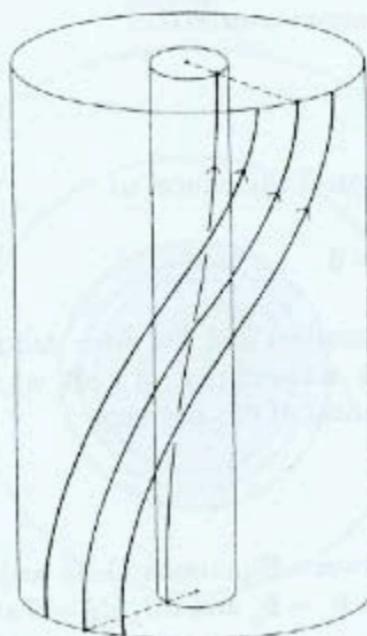


Fig. 3.5. Magnetic field lines at two radii for the uniform-twist field

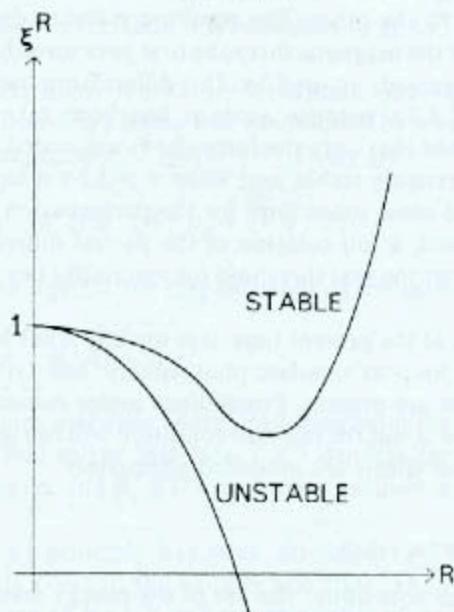


Fig. 7.7. Typical solutions to the Euler-Lagrange equation for the radial component (ξ^R) of the minimising perturbation for a flux tube.

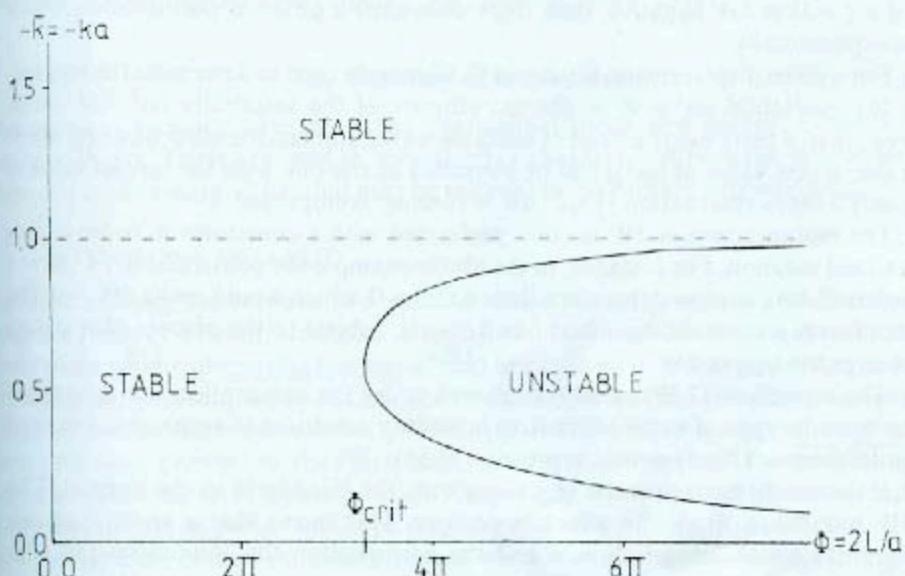


Fig. 7.8. The stability diagram for a uniform-twist force-free flux tube of length $2L$ and effective width $2a$, where k is the wavenumber of the perturbation along the tube and ϕ is the twist (from Hood and Priest, 1979b).

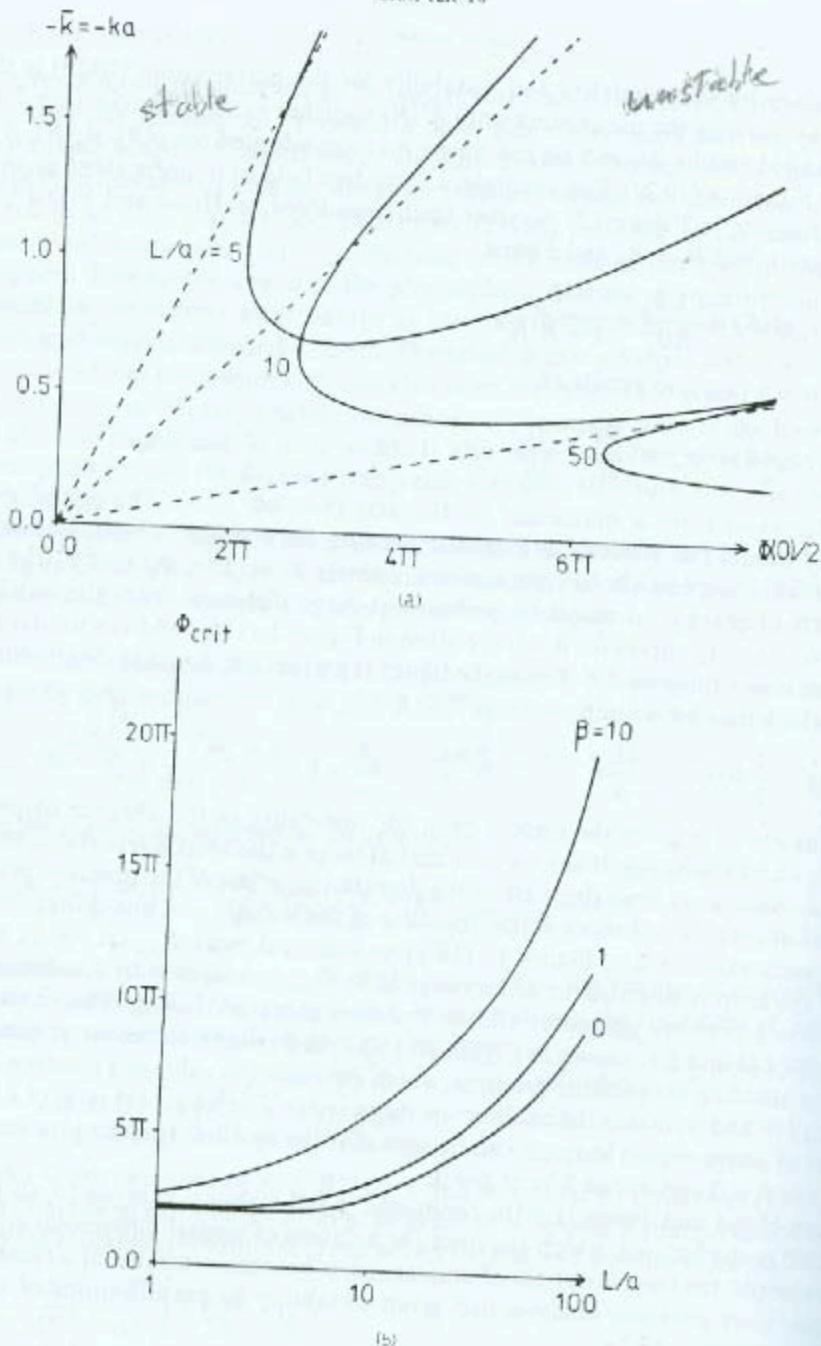


Fig. 10.11. Kink instability ($m = 1$) of a variable-twist field, with $\beta = 2\mu p_\infty/B_0^2$, where p_∞ is the coronal pressure and B_0 is the uniform axial field. (a) The stability diagram for $\beta = 0$ and for different values of the aspect ratio (L/a). The equilibrium is stable to the perturbation (10.23) to the left of each curve and unstable to the right. $\frac{1}{2}\Phi(0)$ is the twist at $R = a$, the 'edge' of the loop. (b) The variation of the critical twist (Φ_{crit}) at $R = a$ with L/a and β (from Hood and Priest, 1979b).

可以看成对于大的半径，或者认为 K-S 极限，磁场不变，稳定（实际上已为不稳定的实线的虚线），小的半径更稳定，因为圆柱壳的作用。

对于 $\frac{L}{a}$ 值，有一个临界值 α_{crit} ($\pi r = \alpha L$)，大于该值，磁场禁锢在壳内，磁场不稳定性。当 α_{crit} 超过 $\frac{L}{a}$ 增加，从而稳定区域变大，系统之稳定性 α_{crit} 随 $\frac{L}{a}$ 和 β 的变化而变 (10.11 b)。当 β 增大，庄强增加，即 β 为 SW 中的半径 (参见 10.2.4, (e)) 及之更为稳定。典型波动区的磁流，纵模 $\frac{L}{a} = 10$ 。守恒不稳定性时的最小半径为 2.8π ($\beta=0$)，当 $\beta=1$ 时，变为 3.3π (K-S 稳定条件: $\frac{\beta_0}{\beta_3} < \frac{2\pi a}{L}$)

将来研究 2. 稳定性有三个方向需要进一步研究 ①非线性发展 ②磁场弯曲的影响 ③有限电导率。有限电导率时，扭折模式为电阻扭折或往复螺旋模，光下部。Spicer 强调拉普拉斯模对螺旋振荡，化简双螺旋模的增加弯曲的撕裂模。计入非线性效应以增加耗散，但没有考虑回流的影响。

10.2.4 电阻扭折 2. 稳定性

上一节讨论的是磁场线围绕对扭折稳定性的影响。在非线性发展过程中，磁场带可能向局部弯曲，当它有限电导率时影响横向电流流动中变得重要。因此有可能把扭折 2. 稳定性发生限制，磁场可产生电阻不稳定性。

计入电阻后，(10.2.4) 方程已的修正形式为：

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial x} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) - \nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B}_1)$$

$$(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = -\nabla \times (-\vec{v} \times \vec{B} + \vec{J}/\rho) = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B})) \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ -\epsilon \end{matrix} \text{ singular layer}$$

在奇点层 (singular layer, 电场中的突起，靠近中心，有限电导率区域 — Priest, 1981) 中，第二次获得重要不稳定性。第一次可以忽略

$$\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 - \vec{B}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1) = 0 \quad (10.2.4-1)$$

(撕裂模的研究中，有限电导率 (singular layer) $\vec{B}_0 = 0$ ，不可压缩条件被满足)， $\vec{v}_1 = 0$

$\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}_0)$ 不再可降半阶。

[奇偶，一阶数和该类不可微，无泛函泛函。奇偶层（有对称）：- 球对称的条件不能延拓到有对称域]

该运动形式为 $\vec{V} \sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}$. 对于可压缩流体 $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, 奇偶层 (10.2.4-1)

式. $\therefore (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{V} = B_{0x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{V} + B_{0y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{V} + B_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{V} = i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{V} = 0$, 奇偶层的垂直由 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ 确定。

对于柱体 $\vec{V} \sim e^{i(m\phi + k_z)}$ (频率不是 r 的函数, $m\phi + k_z$ 不是 $\vec{k} \cdot \vec{r}$). 利用 $\vec{B} \cdot \nabla = (B_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} B_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + B_z \frac{\partial}{\partial z})$ 可得

$$k B_{0z}(R_s) + \frac{m}{R_s} B_{0\phi}(R_s) = 0 \quad (\text{即奇偶 } \vec{k} \cdot \vec{B} = 0)$$

在牛顿中性简单流无磁场平衡是常数场

$$B_z = B_0 J_0(\alpha R), \quad B_\phi = B_0 J_1(\alpha R) \quad (\text{Priest: P.125. (3.22) 式})$$

为研究稳定性问题, 对 (线性化) 有电化 MHD 方程化, 寻找形如

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_1(R) e^{i(\omega t + m\phi + k_z)} \quad \text{其中 } \omega \text{ 为增长率.}$$

假设理想情况下, 扭折是稳定的, 则无关也无周期. 那么研究带含发生拉撕裂模 (cylindrical Tearing mode, or resistive internal kink mode) 为不稳定. 在 m=1, 长波条件下 $R_s \ll 1$, 增长率为

$$\omega \approx [R_s^2 |(\vec{k} \cdot \vec{B})'_s| / B_0]^{1/3} T_d^{-1/3} T_A^{-1/3}, \quad R_s \text{ 为特征长度}$$

$$T_d = \frac{R_s^2}{\eta} \text{ 电阻加热时间; } \quad T_A = \frac{R_s}{V_A} \text{ Alfvén 波传播时间.}$$

$$\text{按此, } \omega \sim T_d^{-1/3} T_A^{-1/3}. \text{ 对于 Reynolds 数大 = 1/2 次, 令 } R_m = \frac{L}{\eta}$$

$$= \frac{R_s V_A}{\eta} = \frac{R_s k_A}{R_s^2 / G} = \frac{V_A}{R_s} \cdot \bar{T}_d = \frac{\bar{T}_d}{T_A} \gg 1$$

$$\text{增长率 } \bar{T}_d^{-1} < \omega \ll T_A^{-1/3} T_A^{-1/3} < T_A^{-1}$$

$$\therefore \frac{\bar{T}_d^{-1}}{T_A^{-1/3} T_A^{-1/3}} = \left(\frac{T_A}{\bar{T}_d} \right)^{2/3} \ll 1, \quad \frac{T_A^{-1}}{T_d^{-1/3} T_A^{-1/3}} = \left(\frac{T_d}{T_A} \right)^{1/3} \gg 1$$

拉赫裂模增长率 $\omega \approx \tau_d^{-\frac{1}{3}} \tau_A^{-\frac{2}{3}}$ 大于单向撕裂模的增长率
 $(\tau_d \tau_A)^{-\frac{1}{2}}$ ($\frac{1}{12}$ 次的增长率)

(详细内容可参考 Furth, 1963)

撕裂模形成速度的两个特点:

1. 20-30% 增长率的磁弛豫在 3-4 个增长时间 (增长率 = 10%) 内耗散, 此后 2. 磁弛豫发展达到饱和. 动能消耗部分.

2. 双撕裂模 ($=$ 附近奇偶层, $1/2 + k \cdot B_0 = 0$, 奇-偶) 增长率更快 ($\omega \approx \tau_d^{-\frac{1}{4}} \tau_A^{-\frac{3}{4}}$)

3. 未饱和度的磁弛豫相互作用. (共振衰耗) - 对耗散作用

4. 第二撕裂模作用: 撕裂模与 2.1 间磁波的耦合 (Waddell et al., 1979)
 12 质量的增長率比电阻型模的增长率小得多 (可用以解释
 2.1 模耗散的时标)

以上特征对撕裂模分析均入. 包括 1.3) 例 1-17)

10.3 双带耀斑理论

一般认为双带耀斑理论：通过一系列无加热平衡的演化，磁环在太阳风足点的缓慢移动，磁环（支撑耀斑喷发）发生相应演化。当剪切达到某一个临界值，磁环形成不稳定，向外喷发。第10.12节对10.12的说明如下：双带耀斑中的磁环的行为

- 可能是因为热不平衡 (thermal nonequilibrium)，磁通量比或者某种MHD不稳定性没有被平衡，喷发的起兆耀斑强度上升。
- a的上方太阳风场不均衡受到剪切
- 下方处可以有一个磁岛，喷发从磁通量分布。
- b. 磁环和喷发的喷发不稳定
- c. 喷发下的磁力线延伸直立磁重联间柱。
- d. 当磁重联结束进行时，螺旋后弧 (post-flare loops) 上升， H_{α} 双带偏离，喷中性线向外运动。

耀斑爆发后，磁力线闭合在磁环系和 H_{α} 带，但主要的问题是待解喷发不稳定性 (eruptive instability)。有两种方法可试用。①寻找相变而不言声下，无加热方式的平衡解及其不稳定性，增加附近 (至10.3.1)

过一化平衡险峻演化，为射出平衡解的衰减或附近的平衡解去稳定化，就有可能爆发。②构造各种磁环，在研究MHD不稳定性 (至10.3.2)

两种方法不互相补充的，对于不计向简单的平衡问题，两种方法都有效。第一种方法可处理平变为复杂的平衡解，可以假设平衡解发生快速的演化。第二种方法的优点是可以证明低阈值下的不稳定性。而另一种方法的优点是构高不平衡状态 (或指非平衡) 稳定性 (用第3种方法证明是稳定的)

喷发不稳定性可能自发发生，或由其他机制触发，如热平衡 (thermal nonequilibrium) (§.10.2.2)。斯密特、磁通度说 (MHD近似说) 快速

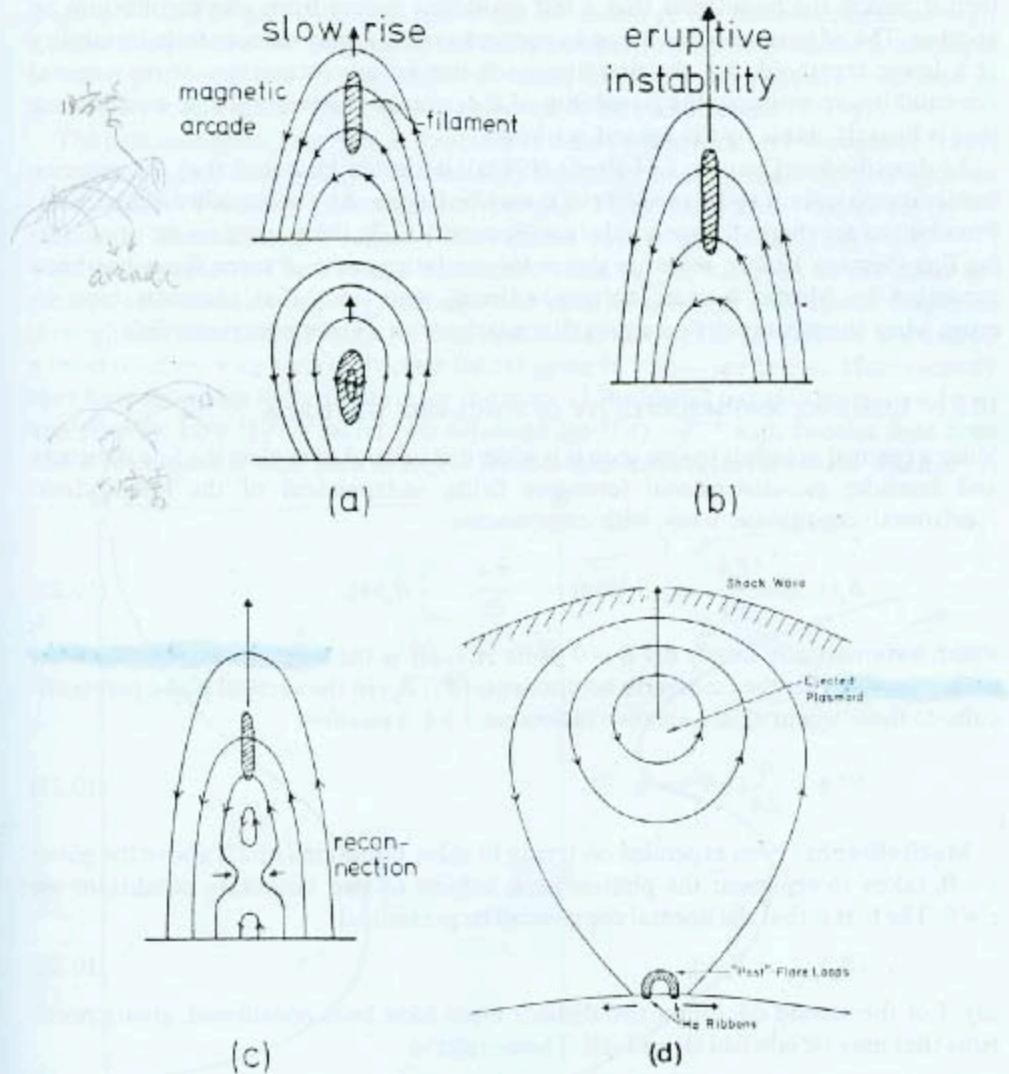


Fig. 10.12. The overall magnetic behaviour in a two-ribbon flare, as seen in a section through the magnetic arcade. (a) Slow preflare rise of a filament, possibly due to thermal nonequilibrium, emerging flux or the initial stages of an MHD instability. The surrounding field may just be sheared (upper diagram) or it may contain a magnetic island so that the filament lies along a flux tube (lower diagram). (b) Eruptive instability of a magnetic arcade and filament. (c) Field lines below the filament are stretched out until reconnection can start. (d) As reconnection proceeds, 'post'-flare loops rise and H_x ribbons move apart.

(理论的研究逆通，将系向于太暴发).

10.3.1 磁力平衡的假设及角的垂直性

是磁的长度与宽度，因此可忽略精细结构，考虑沿运动场 (即平行方向忽略无关)

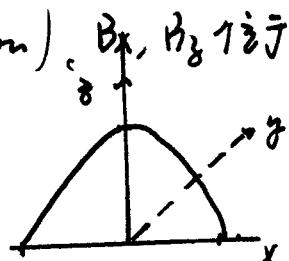
$$B_x(x, \delta) = \frac{\partial A}{\partial \delta}, B_y(x, \delta) = -\frac{\partial A}{\partial x}, B_z(4) \quad (10.26)$$

$$\text{运动满足 } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial \delta} + \frac{\partial^2 A}{\partial \delta^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \delta \partial x} = 0, B_z(4) \text{ 是 } y \text{ 的函数} \right]$$

这里的 $A = A_y(x, \delta)$, $\vec{B} = -\nabla \times \vec{A}$ (由电动势中的定义, 第一章). 不再用向量表示

$\vec{A} = A(x, \delta)$ 为磁势或称磁通函数 (flux function), B_x, B_y 为平行垂直场与平行的平均值, B_z 为 A 的函数, 满足

$$\nabla^2 A + \frac{d}{dA} \left(\frac{1}{2} B_y^2 \right) = 0 \quad (10.27) = (3.55) \text{ (§3.5(iv))}$$



已作过关于努力求解该方程, 可得到磁势的位形.

$\delta = 0$ 中的临界点, 即 $(\delta = 0)$ 条件为: “垂直分量 $(B_z)_{\delta=0} = B_0(x)$ ”

2, 第二部分中考虑两种类型:

① $B_z = f(A)$

轴向场 (沿磁场的轴, 即子轴), 函数形式 $f(A)$ 未知

② 指定壳面上磁感应线的连接状况, 即 $d = d(x)$

表示从壳偏高 x 轴的位置 $d(x)$ 之间. 见第 3.10. 磁力线原点位于 $x-\delta$ 中心, 是半偏高 x 平面 (即子轴上, 且再对于 $\delta = 0$ 偏高), 因此通过 走经运动, 经历一系列的半偏高, 依循运动的演化.

早期对不同形式 B_z 和 $f(A)$ 求解该方程可参考 §3.5.6

本节只讨论方程的数值解 (数值解) 行.

10.3.2 太暴发 (eruptive) 不稳定性

Hood 和 Priest (1980b) 在会磁力线上选取同心圆周 (以德), 分析磁势 位形. 通过对附近的考察, 爆发前的磁场场强和方向已十分清楚. 说

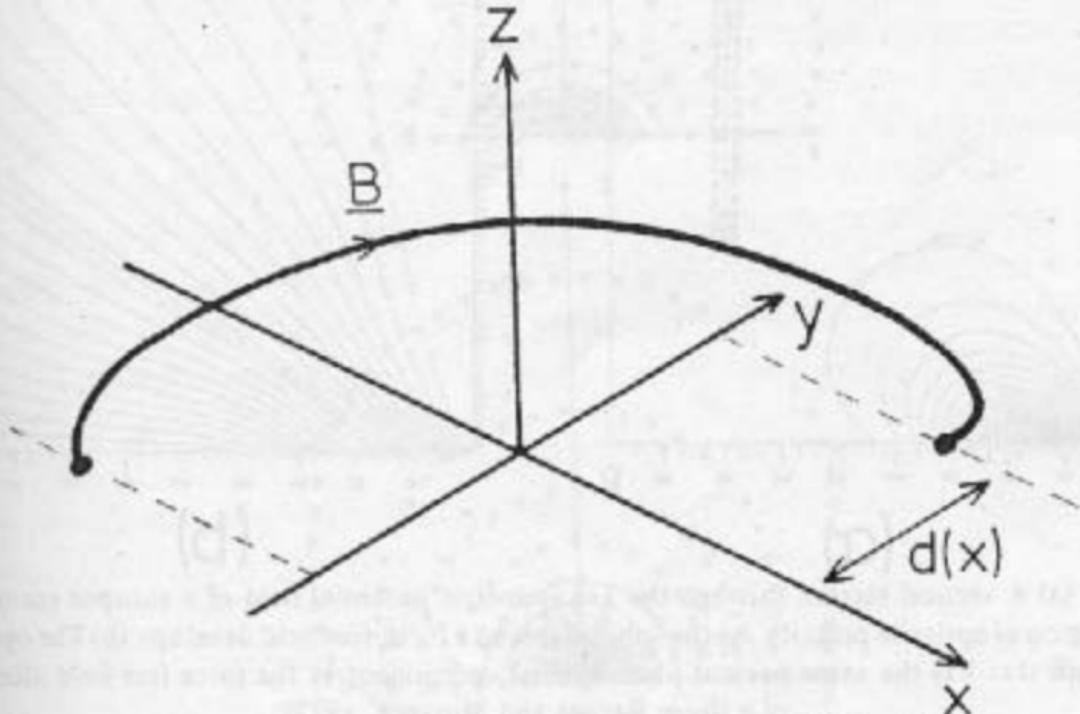


Fig. 3.10. Schematic representation of the photospheric displacement ($d(x)$) of the footpoints of a force-free magnetic field line. Initially, the field is potential and the field line lies in the $x-z$ plane with $d = 0$.

考慮兩種類型：

(I) 同軸的剪切磁鐵，类似于圖 10.16(a)，在 $\alpha = 0$ ，半徑 $R < a$ 下，
或类似于圖 10.12(a)，有磁力線穿正時。

(II) 磁鐵包含有磁迴路，如圖 10.17(a) 或圖 10.12(a) 的下部，情形依着磁
迴路分佈。

对于這二種磁鐵形狀，选取柱對稱，元力場答應 $\vec{B} = (0, B_\theta(R), B_\phi(R))$ 。
利用麥克爾遜分析運動的影響。(假定 $\alpha = 0$ ，转动副在左)。但考慮一
些特殊的運動形式，確實有不稳定性化。对于單工業的磁鐵剪切，
Hood 和 Priest 沒有找到不稳定性。

亞类属于光拋離離的磁鐵形狀，磁鐵位于槽中，色圓時，磁鐵的
磁力線固定，磁鐵主要沿磁鐵方向，視圖上常看到有沿著磁鐵的運動
和叫這種磁鐵不單純荷合情況，通過一個亞類的模型。

才立对稱磁場，長為 $2L$ ，二端固接，均勻扭轉，被磁鐵色圓。
磁軸位於光拋離點($\rho = 0$)以上 a 处，类似于圖 10.16(b)

$$B_\theta = \frac{B_0(\rho/a)}{1 + R^2/a^2} \quad , \quad B_\phi = \frac{B_0}{1 + R^2/a^2} \quad , \quad R \leq a \quad (10.39)$$

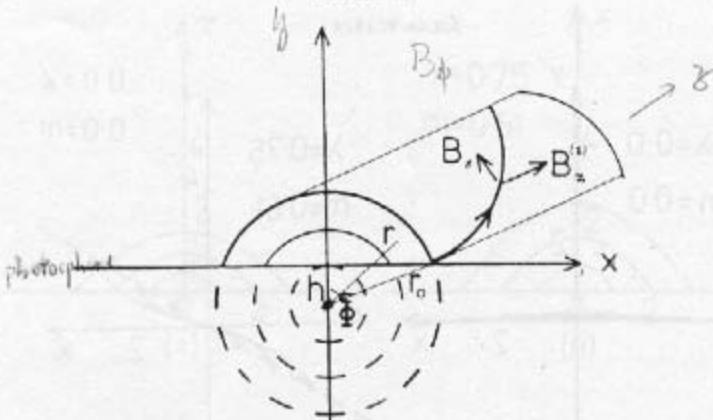
(註 H: §3.3.4 中，对方程 $\frac{dP}{dR} + \frac{d}{dR}(\frac{B_\theta^2 + B_\phi^2}{\mu}) + \frac{1}{\mu R} B_\phi^2 = 0$ ，有一簡單解
 $B_\phi = \frac{B_0}{1 + R^2/a^2}$ ，以而 $B_\theta = \frac{\bar{B} R B_\phi}{2L}$ 。該方程不是光拋離方程：有 $\frac{dP}{dR} \neq 0$)

均勻扭轉，元力的方程有解

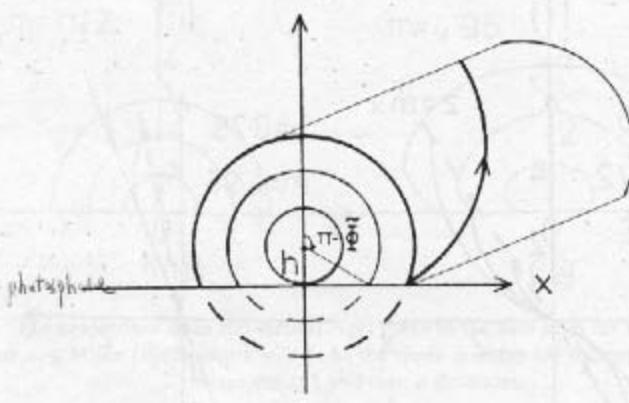
$$B_\theta = \frac{B_0 \bar{B} R^2 L}{1 + \bar{B}^2 R^2 L^2} \quad , \quad B_\phi = \frac{B_0}{1 + \bar{B}^2 R^2 L^2} \quad (3.26)$$

(10.39) 著錄得說光拋離，可取 $B_\phi = \frac{B_0}{1 + R^2/a^2}$ 。但均勻扭轉，类似于
(3.26) 取 $\bar{B} = \frac{1}{aL} \rightarrow \frac{1}{a}$)

式中 a 为磁迴路半徑，長 $2L$ ，可達到 $\frac{2L}{2\pi a}$ 圈。均勻扭轉角反
 $\bar{B} = 2\pi \cdot \frac{2L}{2\pi a} = \frac{2L}{a}$ ， $B_\theta = \bar{B} \cdot \frac{R}{2L} B_\phi = \frac{R}{a} B_\phi = \frac{B_0 R/a}{1 + R^2/a^2}$ $(0 < R \leq a)$



(a)



(b)

Fig. 10.16 Cylindrically symmetric magnetic arcades whose axis of symmetry (Z) is (a) a distance h below the photosphere ($z = 0$) and (b) a distance h above the photosphere. The projections of field lines onto the vertical x - z plane are arcs of circles (from Priest and Milne, 1980).

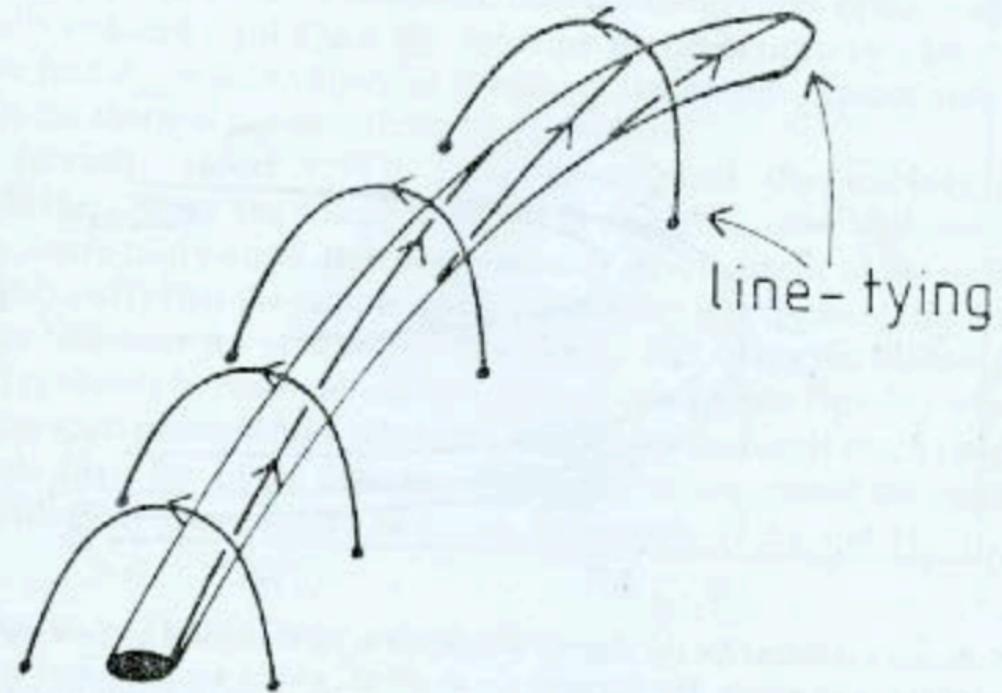


Fig. 10.17(a). A possible preflare configuration consisting of a weakly twisted flux tube anchored at its ends and located within a magnetic arcade. The plage filament is assumed to be located along the flux tube.

因为处理的问题不走运动场，而是用 θ 表示的方程，所以此方程类似于 ξ 的 ξ_{θ} ，即 Kink instability，但表达式是 (10.25) 式类似 ξ in Euler-Lagrange 方程

$$\delta W = \frac{1}{\mu} \int_0^{\pi} [F(\frac{d\xi^R}{dR})^2 - G\xi^R] dR, \quad (10.25)$$

得到 2. 稳定性的充分条件：

产生稳定性的两个主要条件是：依赖于平行波数大，磁轴半径和
环向半径的比值 d ，以及常数 a ，首先有 $10.17.6$ ，且 $> \bar{\omega}_{crit}$ ， R 的值
就有一定范围，超出范围后不稳定，对于转动

$$\xi = \begin{cases} [\xi^R(R), -\frac{iB_0}{B}\xi^0(R), \frac{iB_0}{B}\dot{\xi}^0(R)] \sin \frac{\pi R}{L} e^{i(m\theta + k_z)} \\ 0, \quad R > d \end{cases}, \quad R \in [3] \text{ (在中心附近)}$$

若 $10.17.6$ 中取 $L=4\pi$ ，肯定不稳定。但若 $d=3b$ ，且 $> 4.2\pi$
磁性形肯定要成为稳定。当 $\bar{\omega} \leq 2\pi$ ，对所有扫描环转动，不论 d 多大
不稳定。

(说明：磁通带半径与扫描半径 d ，磁场为圆柱中心高斯分布时高。

因此可取 a 为扫描半径 d ， d 取 2π 时 $b=2b$ ， $5b$...才可取 a 取这些值)

至于上述分析，就两类：磁极化历简单的影响，似乎总不稳定。对于第二类，增加长波，扭矩或磁带宽度大大增加，会变成稳定。 \therefore ① 但若磁
通带宽度或扭矩增加，而 d 固定，扫描的圆周速度应逐渐减小，直至无法
发生不稳定。例如 $d=5b$ ， $\bar{\omega}_{crit}=3.6\pi$ ，($\leq \bar{\omega}_{crit}$ 为稳定)，增加至 (假设加扭
矩) 就进入不稳定区。② 这个 d 增加，而长波和扭矩固定，扫描的圆周速度
的稳定性由扭矩作用逐渐减小，首先也是不稳定的，如 $\bar{\omega}=5\pi$ ， $d_{crit}=2.2b$
当 d 增加大于 $2.2b$ ， $\bar{\omega}=5\pi$ 时应已成立不稳定性

对于普通情况 (造成磁场翻转) 和宁静状态爆发有更的强不稳定性
很可能完全不同。因此通过宁静状态的爆发，很可能获悉双带模型的性质。
宁静状态的磁结构比正常情况简单得多，且能描述大的空间尺度。

$$-\bar{k} = -kb$$

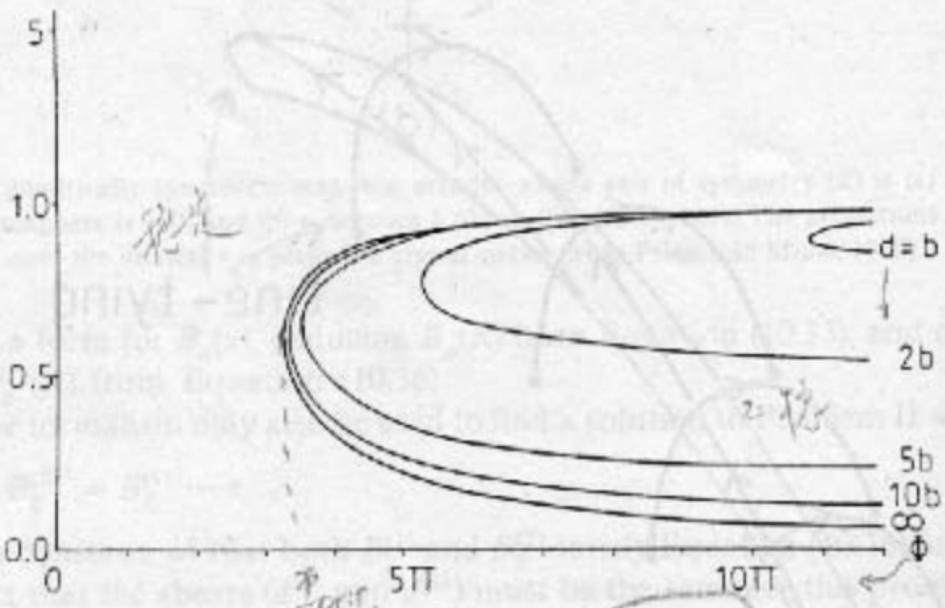


Fig. 10.17(b) Sufficient conditions for the amount of twist ($\Phi = 2L/b$) required to produce instability of a flux tube embedded in an arcade. The flux tube has length $2L$, and its axis is situated at a height d above the photosphere. For Φ greater than some critical value (i.e., to the right of each curve), the equilibrium is unstable for a range of wavenumbers (k) (from Hood and Priest, 1980b).

10.3.3 主持: 光耀波之父 Z. (Kopp & Pneuman, 1976, Solar Physics 52, 85)

包含有暗带的碳颗粒炭炭火，而颗粒的运动由上升的气流驱动而产生扩散。
起初速度上升 ($10-50 \text{ cm s}^{-1}$)，随时间推移，在一天或更长的时间内，上升速度
为 $0-1 \text{ km s}^{-1}$ 。混合物之间（内有强的向下流动）平行热 X 线扫描之下。
H₂ 的浓度小于 10^5 ppm ，X 射线强度为 10^5 rad 。混合物平行成发射到双第
中，引起上升的双带之运动。早期阶段，温度为 1 度 10^7-10^8 K ，密度 10^{16} m^{-3} 。
当颗粒离开炭炭火时，不发生 H₂ 转化，但大颗粒与较小的颗粒相同。

Kopp and Peltzman (1976) 模型，利用破窗理论说明犯罪泛化。该模型指出，先是破坏或打洞，而后又形成新的犯罪点。

1. 环状日珥常先于主要耀斑大爆发而先。为耀斑开始后的几分钟，可见Hα发射。环内发光物质沿环之侧以自由落体速度向下流向色球，环之速度 $10-20 \text{ km s}^{-1}$ 向上扩散。通常位于热的曰冕物质凝聚带中。典型的耀斑爆发后，保持约19小时，进入色球的厚度 $10^{15}-10^{16}$ 克。Kopp等认为耀斑后环状日珥是为耀斑大爆发后的带放磁场重新联结的结果。

光的传播是：热的物质吸收后，立即包围自身。

这种叶群的问想是： i) 观测到的向下流动的悬浮物超过沉积物的
易物质的数量很多 ii) 磷藻带以离地表含磷砾石带进入日耳

b. 烟草丝区域发出的悬浮粒子与同室中的烟雾污染程度还计划

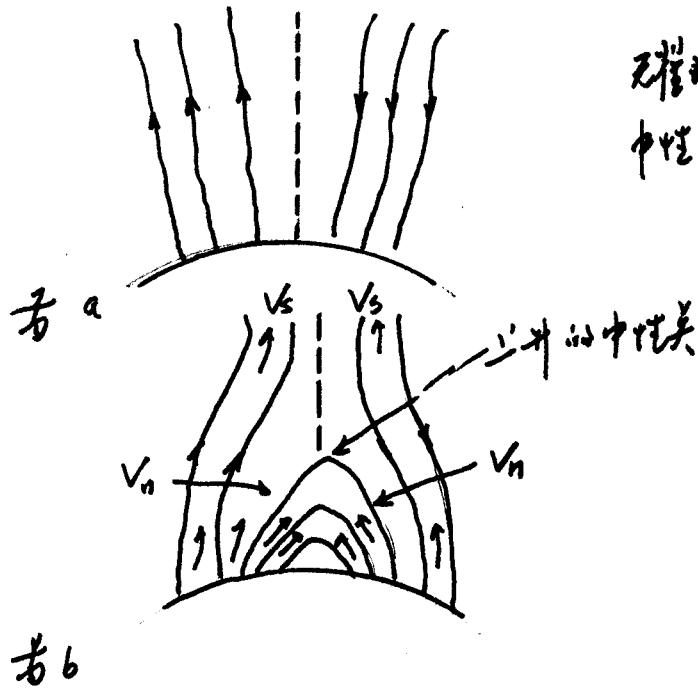
(2) 計算範圍。即需要日曆中有計劃地進行施工的生產週期。

④细加观察系：因太离风向水流的烹煮，为破坏纤维组织，再以间合，中性关下，由之物质被捕获在间合内。

2. 系统的扩散是克服迁移的一种方式，向以进入口进，把通道形成扩散的闭合。

因此遊戲而成功的研究性形。通過重取板後原初形態，提供所當注意
便日進化其將命形內持陳化形。

2. 下面为磁成环的三个阶段



磁通爆发后的开放磁力线，中间（虚线）有中性片。

磁通爆发、磁重联期间，磁力线向上升。

v_s : - 1m 开放磁力线的太阳风速度

v_n : - 磁力线本身向中性片运动速度。

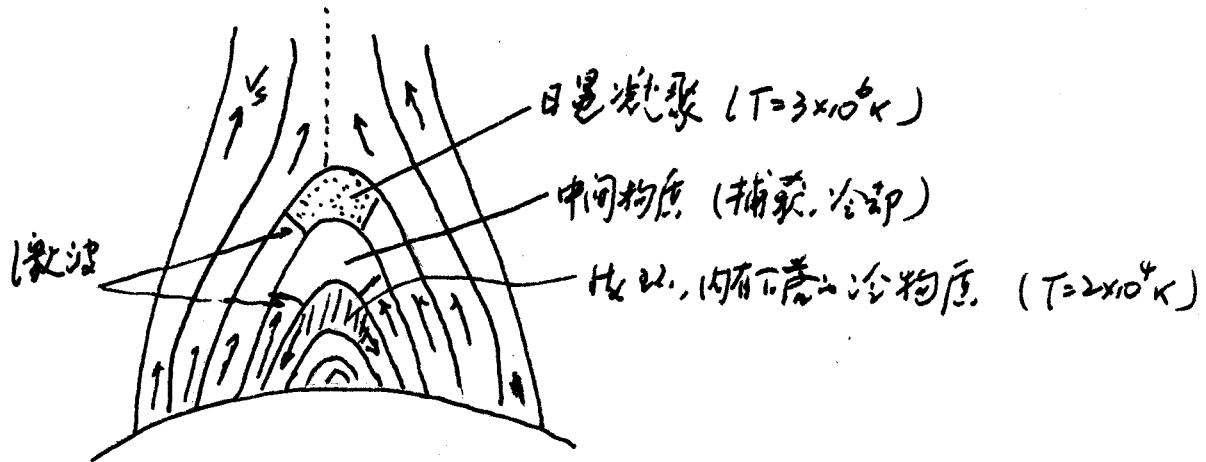
中性片隔离了方向相反的流动场。

耀斑爆发后，有太阳风吹出，吹向于减弱，但压强小于爆发时的压强。当流向着中性片方向的磁通量与太阳风速度再平衡，驱动磁力线向中性片方向运动，从而从日冕底部向上，开始发生磁重联。即当 b. 开放磁力线在上方的中性带附近闭合，中性带遂向上升，直至被侵入到磁通爆发前的位置。

考虑这一磁通带在此过程中变化，可以得到几何形状和时间的变化。变化大，几何形状的变也对磁通带内的流体动力学过程有深刻影响。

开始时，为近似它的外流（ v_{∞} ），他流动受离心力，Coriolis 力的影响，另外，磁通带向中性带靠近时，又受到磁场变化的影响。向外运动的速度，特别在磁通带将闭合的时刻，明显增加。当磁通带闭合，中性带以下的所有物质，被捕获在闭合区内，而物质继续向上流动，进入闭合区，直到它声速时（即声波）或者说声速微波，这时中性带向日冕底部传播，这可以上升运动终止。该系统以及日冕温度恢复到 $3-4 \times 10^6 K$ ，也因为微波，形成凝聚带，接着回撤，温度降低，气体冷却而冷却，直至归零。然而在之后 1 小时的磁场内，产生新的凝聚物质。

3. 讨论



3C 冷物质的凝聚和下落

重联过程中的日珥系统，每一个闭合区域，逐演进分为三个阶段：1. 受压缩的过程
位于最近闭合的磁通管内。（即“日冕凝聚”阶段） 2. 中间阶段。这时物质述
实通过辐射而冷却，并往下落 3. H_2 分解 物质温度降低 $10^4-10^5 K$
逐演进朝球形方向下落。

箭头指流动方向。

① 日冕凝聚

在被封闭闭合的磁通管内，有日冕凝聚。一旦磁力线重新闭合，形成向下的
辐射激波，加热压缩微波后的气体。半衰期约 $10^4 K$ 。日冕温度 $1.5-2 \times 10^6 K$
激波温度 $3-4 \times 10^6 K$ 。在此受压缩气体冷却后，死亡的上方有射出激波带，
激波温度 $3-4 \times 10^6 K$ 。

在磁通管内

② 中间阶段

当磁重联逐演进时，气体逐渐压缩和往下降沉而进入磁通管内，在此激
波到达日冕底部，气体从激波处被加热辐射而冷却，但仍然辐射一些
光，即 H_α

③ H_α 分解

该阶段物质此时仍在日冕附近，温度已降至 $10^4-10^5 K$ ，可以观测到 H_α ，物质已往下落。
 H_α 的光被观测到与捕获物质的温度有关，有些条件可能没有发射，有些也可能在
其附近（冕雨），恰当地预测是困难的。

第十一章 日珥 (暗流)

本章主要讨论宁静日珥的磁性质。(辐射带径，磁场平衡起着本节范围，活动日珥也不在此讨论)。活动区(或喷发)日珥的爆发通常是很强烈的，可称喷发日珥(spray)。通常引起双带耀斑，宁静日珥尺度更大，磁场更弱，爆发形式为平静的，通常不产生耀斑，但是冬季的不稳定性可能相同。

日珥是冷而稠密的等离子体，位于日冕内，温度比周围低，密度100倍，密度约 10^3 - 10^4 倍。观测结果罗列如下：(取自§1.4.3)

i. 宁静日珥

1. 宁静日珥

i. 流向非常稳定，可持续许多年。

ii. 位置：多数期为比较小的活动区(或喷发)附近，位于活动区附近或极性相反区之间的磁反转线上，或位于活动区边缘，与极性相反的区域相邻。有时可能从一侧进入另一侧。当活动区分时，常常变化，变长成为宁静日珥，可能连续增大数月，长達 10^6 km。增长过程中，向最靠近的磁极慢慢移动。

IV. 典型参数：

密度(n_e)	10^{17} m^{-3}
温度(T_e)	$7 \times 10^3 \text{ K}$
磁场(B)	$5-10 \text{ G}$
半径	$2 \times 10^5 \text{ km}$
宽度	$5 \times 10^4 \text{ km}$
高度	$6 \times 10^3 \text{ km}$

2. 活动日珥

i. 位于活动区内，常与耀斑相伴生

ii. 具有剧烈运动的动力学结构，寿命仅数分钟数小时。

iii. 有三种的类型：湍流（surges），喷雾（sprays）（湍流是喷发的持续时间），和脉冲状态（强度约100G，以频率f）（强度相对宁静状态的倍数）

11.1 形成

考虑热的且是等高分布，以及 P_0 ，单位质量（密度）的加热(h)和辐射($\tilde{X}P_0$)率。热平衡状态下有

$$\sigma = h - \tilde{X}P_0 \quad (11.1)$$

压强 P ，不变的情况下，半径 r ，通过 ρ ，单位质量（密度）的式前已推得，为压强的常数 α ，由(2.30a)表示

$$\rho C_p \frac{dT}{dr} = -\mathcal{L} \quad (2.30a)$$

2. 质量耗损系数 $\mathcal{L} = \nabla \cdot \vec{g} + L_r - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T +$

扰动后： $T = T_0 + T_1$ ， $P = P_0 + P_1$ ， $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_1$ ($\vec{v}_0 = 0$)

$$(2.30a) \text{ 左边: } \rho_0 \left(1 + \frac{P_1}{P_0}\right) C_p \left[\frac{\partial(T_0 + T_1)}{\partial r} + \vec{v}_1 \cdot \nabla(T_0 + T_1) \right] = \rho_0 C_p \frac{\partial T_1}{\partial r}$$

\because 热平衡时，热的系统温度为 T_0 ， $\therefore \nabla T_0 = 0$

$$\text{热传导: } \vec{g} = -K \nabla T \approx -K_{II} \nabla T \quad s: -1 \text{ 磁场方向: 高}$$

$$\nabla \vec{g} = -K_{II} \frac{\partial^2}{\partial r^2} T, \text{ 扰动后 方程变为 } \nabla \vec{g}_1 = -K_{II} \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2}$$

辐射损失: 对于光子而言 $L_r = n_e n_p Q(T)$

式中 n_e —电子密度， n_p —质子密度 (对于完全电离有 $n_e = n_p$)

$L_r \sim P^2 T^4$, 且 $Q = \tilde{X}T$, $\therefore L_r = \tilde{X}P_0^2$, 单位质量(密度) $\Rightarrow \tilde{X}P$
辐射损失和加热半径 r : $\tilde{X}P_0 - h = 0$. 扰动后, $\tilde{X}(P_0 + P_1) - h = \tilde{X}P_1$

压强不变时的热量方程: $\rho_0 C_p \frac{dT}{dr} = -\mathcal{L}$

$$(2.30a) \begin{aligned} &= -\nabla \cdot \vec{g} + h \tilde{X} P_0^2 \\ &= K_{II} \frac{\partial^2}{\partial r^2} T + h \tilde{X} P_0^2 \quad (11.2) \end{aligned}$$

扰动后:

$$C_p \frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{K_{II}}{P_0} \frac{\partial^2}{\partial r^2} T_1 - \tilde{X} P_1 \quad (11.2')$$

->-

$$\rho = \frac{m P_0}{k_B T_0} \quad (11.3) \quad \text{流体 (压强不变)}$$

$$\rho_0 + \rho_1 = \frac{m P_0}{k_B T_0} \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) = \rho_0 - \rho_0 \frac{T_1}{T_0}$$

$$\therefore \rho_1 = -\rho_0 \frac{T_1}{T_0} \quad \text{代入 (11.2')}$$

$$C_p \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{K_{11}}{\rho_0} \frac{\partial^2 T_1}{\partial s^2} + \tilde{x} \frac{\rho_0}{T_0} T_1 \quad (11.4)$$

设等高线与长边为 L 的弦平行中，弦振动的初值，振动前

$$\therefore \text{可以取 } T_1 \sim \exp(\omega t + 2\pi i \frac{s}{L})$$

$$\text{代入 (11.4) 式} \quad \omega = \frac{\tilde{x} \rho_0}{C_p T_0} - \frac{K_{11}}{C_p \rho_0} \cdot \frac{4\pi^2}{L^2} \quad (11.5) \quad (\text{与第 3 次 / 第 } C_p)$$

振动频率为零，即 $K_{11}=0$ ，则 $\omega > 0$ ，系统是热力学稳定。

越低等次可以帮助等高线稳定。令 $\omega < 0$ ，从 (11.5) 可知当

$$L < L_m = 2\pi \left(\frac{K_{11} T_0}{\tilde{x} \rho_0} \right)^{1/2} \quad (11.6)$$

(书中：(11.5) 的结论，认为等高线由 C_p 、 ρ_0 和 T_0 确定， L_m 由 P_{crit} (1927) 式中无 C_p)

当 $L > L_m$ 等高线不稳，因此要求等高线的 T_0 下降，以达到新的平衡，形成类似喷嘴的流动特性。

结合前述通过辐射的损失的恒定项，可将上述 L_m 重新估计进行修正。

$$\text{已知热平衡时 } T_0 = h - \tilde{x} \rho_0 T_0^\alpha \quad (11)$$

$$\text{纯流动时 } C_p \frac{\partial T}{\partial x} = h - \tilde{x} \rho_0 T^\alpha \quad (\rho = \rho_0 + \rho_1, T = T_0 + T_1) \quad (12)$$

$$\text{由 (11) 将 } h \text{ 代入 (12), } C_p \frac{\partial T}{\partial x} = \tilde{x} \rho_0 T_0^\alpha \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T^\alpha}{T_0^\alpha}\right)$$

$$\rho_0 = \frac{m P_0}{k_B T_0} \quad \text{由压强不变 可求得 } \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T}$$

$$\therefore C_p \frac{\partial T}{\partial x} = \tilde{x} \rho_0 T_0^\alpha \left(1 - \frac{T_0^{\alpha-1}}{T^{\alpha-1}}\right) \quad (13)$$

当固流动 $T < T_0$, $\lambda \tau^{\alpha-1} < 1$ 时, 可见 $\frac{\partial T}{\partial x} < 0$, 于是有热力学稳定。

将各式中的 $T = T_0 + T_1$, 代入(3). 有

$$C_p \frac{\partial T_1}{\partial R} = \tilde{X} P_0 T_0^\alpha \left[1 - \frac{T_0^{\alpha-1} \left(1 + \frac{T_1}{T_0}\right)^{\alpha-1}}{T_0^{\alpha-1}} \right]$$

$$\approx \tilde{X} P_0 T_0^\alpha \left[1 - \left(1 - (\alpha-1) \frac{T_1}{T_0}\right) \right]$$

$$= - \tilde{X} P_0 T_0^\alpha \cdot \frac{T_1(\alpha-1)}{T_0}$$

$$= - \tilde{X} P_0 T_0^{\alpha-1} (\alpha-1) T_1$$

i. 令 $\alpha=0$. $\frac{\partial T_1}{\partial R} = \frac{T_1}{C_p}$, 此时 $T_{rad} = \frac{C_p}{\tilde{X} P_0 T_0^{-1}}$

(参见 Smith-Priest (1977) (第1次, 1975) “辐射驱动热不稳定性”)

$$T_{rad} = \frac{C_p}{\tilde{X} P_0 T_0^{\alpha-1}} \text{ 为无光度, 仅考虑辐射时 } (P. 74)$$

ii. $\alpha \neq 0$. $T_{rad} = - \frac{C_p}{(\alpha-1) \tilde{X} P_0 T_0^{\alpha-1}} \quad (\alpha < -2 \rightarrow +2)$

iii. 引入热传导, 即加 λ -项 $\frac{K_0}{P_0} \frac{\partial^2 T}{\partial S^2}$. 一般情况下热传导比辐射散热快. ∴ 有 $C_p \frac{\partial T_1}{\partial R} \sim \frac{K_0}{P_0 L} T_1$, 其中 L 为石英的特征长度

$$\therefore K_0 = K_0 T_0^{\frac{1}{2} \alpha}, K_0 \text{ 为常数}$$

$$C_p \frac{\partial T_1}{\partial R} \sim \frac{K_0 T_0^{\frac{1}{2} \alpha}}{P_0 L} T_1$$

$$\text{热传导项为 } T_c = \frac{C_p P_0 L}{K_0 T_0^{\frac{1}{2} \alpha}}$$

当 L 很小时, “ \therefore ” $T_c < T_{rad}$. 然而, T_c 表示热传导快. 热传
导有物理意义. 而已提及 L 小时, $w < 0$ 矛盾.

$$L \text{ 的取值见 } 2p(11.6) \text{ 页. } L_m = 2\pi \left[\frac{K_0 T_0}{\tilde{X} P_0} \right]^{\frac{1}{2}} = 2\pi \left[\frac{K_0 T_0}{\tilde{X} P_0} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{或者令 } T_c = T_{rad}, \text{ 则 } L = \left[\frac{K_0 T_0}{\tilde{X} P_0} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ 为常数.}$$

主要误差: 1. 热传导在强辐射中心起主导作用, 一般而言
物体的平衡温度是均匀的. 2. 微量失衡, 和吸收辐射 (损失)

和热保持同様変化、因此(热)平衡状态的与之对应的温度将随时间而变化。当 L 增加 (L: 热传播的长度, 和 λ : 热导率, 电流的长度) 达到热不平街度 (thermal nonequilibrium), 而不是不稳定 (热不平街度, 即没有同一温度; 不稳定的热空间中形状变化)。而且不再有热平衡时, 导热体冷却趋向一个新平衡阶段。冷却速率可比无线性不稳定性时增长快得多。上述机制可以次半期端点形成模型中的一个困难, 即观察室在一天左右的时间内, 将完全形成。

本节要描述三种磁流形中, 特别地开始于 β 时, 即 $\beta \gg 1$, 不稳定和电流流。

11.1.1 活动磁场在磁中的形成

§ b.5.1 中 Hood 和 Priest 已求得了热不平街度方程

$$\frac{d}{ds} \left(K_0 T^{\frac{1}{2}} \frac{dT}{ds} \right) = P^2 \tilde{X} T^{\frac{1}{2}} - \eta P \quad (11.7)$$

在这里 η 为辐射损失, P 为加热项。

(11.7) 式的解为 $\frac{1}{A} \frac{d}{ds} \left(K_0 T^{\frac{1}{2}} \frac{dT}{ds} A \right) = X \eta e^{-T^{\frac{1}{2}}} H$. $\eta e^{-T^{\frac{1}{2}}} \rightarrow P^2$, $X \rightarrow \tilde{X}$, 且此方程是 $T^{\frac{1}{2}}$ -依赖的均匀的解 $\therefore A = \text{const}$)

$$P = \frac{m P}{K_0 T} \quad (11.8)$$

这是远强弱的。
他们发现恒定应力 P 或磁场的长度 $2L$ 过大, 或者加热功率太小 (前半节 p.3, 热传导有助于导热与传播) 就会失去热不平街度的性质。(P 大, 如果 P 对应于 T_0 , 则 $T < T_0$ 为满足, 故不热不平街度) 相应地热不平街度 (若 β), 以及陡降, 不流动之外, 走向新平衡阶段, 以及即刻的喷射的性质。这了喷射的形成机制, 对于众多的加热形式都适用, 加入引力后也可用, 不过这时喷射的压强不再均匀。

上述关于简单磁流形的恒定一维 (平行的分析可以应用到带电磁流形), 其中的压强在 2.1 同的磁力线上递减) 和, 例如我们可以又得连接 (§ 11.1.2 节中讨论). 可以知道类似, 特此者“作为拉对称

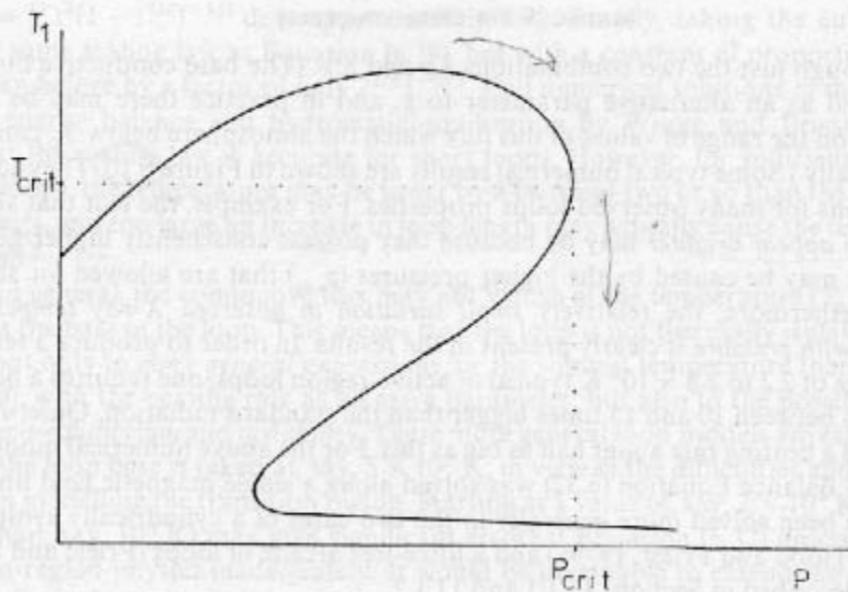


Fig. 6.11. The summit temperature (T_1) for a static coronal loop shown schematically as a function of its pressure (p). When p_{crit} is reached, the plasma cools along the dotted line to a new equilibrium well below T_{crit} .

结构，使压强梯度和 Lorentz 力达到平衡

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{d}{dR} \left(\frac{B_\theta^2 + B_\phi^2}{\mu R} \right) - \frac{B_\theta^2}{\mu R} \quad (11.9)$$

扭转变形为 $\Theta(R) = \frac{2LB_\theta}{R^3\beta}$ (11.10)

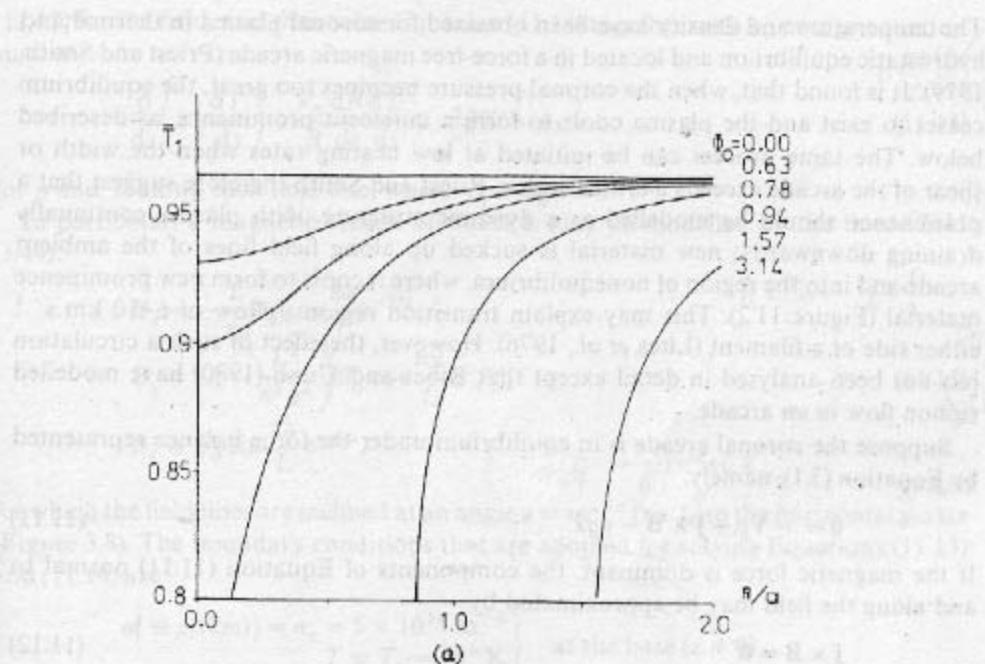
当通流圆是匀速运动而扭折时，可以期望磁场向外部弯曲，为简单起见，也因为通流的磁场和轴向磁场对称，以及通流含有相对的轴向压强改变，我们可忽略这种变形。

给定轴向场 B_ϕ 和扭折量，从 (11.9) 和 (11.10) 可以计算 $P(R)$ ，从 (11.7) 和 (11.8) 可以求对于半径一定的情况下磁力线 $T(S)$ 和 $N(S)$ (参见)，因为给出 $P = P(R)$ ，为确定扭折对磁场的热力学的影响，已利用上述所要求的过场的扭折末端和扭转有变化的场 (§3.3.4 讨论 P.311) 可以求出 P 和 Θ 。轴向压强增加，压强梯度可以单独增加或向内或向外。当一些带电辐射，会产生一些鞘层 (sheath)，当辐射超过加速度时，辐射损失加强会降低温度，最后饱和，由此达到热平衡。当带电粒子的等离子体温度下降到临界值时，增加速度的辐射功率就会耗尽 (见 §11.1)

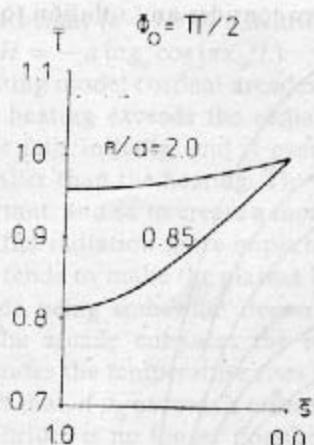
上述分析可归结于随着磁通带的活动区暗带部分形成有关。这时的磁通带已被拉长很多，因此热得与再压缩聚过程无关地工作。这种磁通带形状的暗带：端位于极区相反的区域才相一致，很有可能用束缚暗带爆发。对于由扭折 (twist) 不规则的集合构成的宁静暗带，上述分析也可应用。但这种暗带状可能位于河岸的冕带中，下面将要讨论。

11.1.2 旋转中形成的暗带

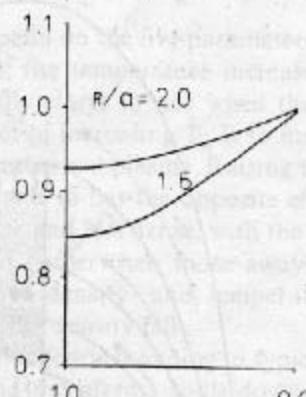
由于无场的磁环中，如了热和静力学平衡的等离子体的密度和密度已增加。但是当且是气体的压强过大，平衡就不可能。等离子体冷却形成宁静日珥，当冕环的密度或者剪切速度降低时，在压缩率的情况下，上述的等离子体冷却过程也会发生。因此 Priest 和 Smith 认为暗带的模型应该有一种动力学模型，其中的等离子体不断地下落，当磁环的磁场收入，进入非平衡状态的区域，然后冷却形成



(a)

 $\bar{h} = 0.5$ 

(b)

 $\Phi_0 = \pi$ 

(b)

Fig. 11.1. Prominence formation in a twisted loop, showing the effect of increasing the twist (Φ_0) on the temperature structure. (a) The temperature ($\bar{T} = T/T_0$) as a function of radial distance (R) along the loop from the summit ($\bar{s} = 1$) to the footpoint ($\bar{s} = 0$). As Φ_0 increases, so the temperature falls and creates a cool core, which broadens to a radius $0.75a$ for $\Phi_0 = \frac{1}{2}\pi$ and $1.5a$ for $\Phi_0 = \pi$. In this particular loop $B_0 = 10$ G, $L = 5 \times 10^7$ m, $a = 10^7$ m, $T_0 = 10^6$ K, $n_0 = 5 \times 10^{14}$ m $^{-3}$, and the dimensionless heating is 0.5 (from Hood and Priest, 1979a).

运动的磁感应强度 (参见 11.2). 这可能用以解释过渡层中速度的上升速率
 $6-10 \text{ km s}^{-1}$. 不过尚未详细分析. Ribes 和 Ullmo 认为是磁场梯度
 $\approx 2 \text{ mT/km}$.

假设流动趋于外力平衡的状态, 即

$$\mathbf{0} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} - \rho g \hat{z} \quad (11.11)$$

假如磁场没有垂直分量, 则垂直于磁场方向的力必须近似为

$$\vec{j} \times \vec{B} = 0 \quad (11.12)$$

若磁场的力的分量不近似为

$$\frac{dP}{ds} = -\rho g \quad (11.13)$$

(磁场和 \hat{z} 方向, $(\vec{j} \times \vec{B}) \perp \hat{z}$, 且 \hat{z} 方向, $\vec{j} \times \vec{B} = 0$, $\therefore \frac{dP}{ds} = -\rho g$)

$$P = \frac{k_B}{m} \rho T.$$

可以从 (11.12) 式求得磁感应; 利用质量方程 和 (11.13) ((11.13) 式中的 P
与 T 相关. 因此可以将此方程? 质量方程?) 和

$$\frac{d}{ds} \left(K_{||} \frac{dI}{ds} \right) - \frac{K_{||}}{B} \frac{dI}{ds} \frac{dI}{ds} = \rho^2 \tilde{x} T^2 - hP \quad (11.14)$$

(可参见 Priest P. 86 及 (6.32) 式)

设 T 为 1 " 时 $K_{||}$ 和 B 的值. $K_{||} = K_0 T^{5/2}$

设磁感应为 L , 用常数的无量纲来描述. (3.44) 式.

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{L}{\pi a} B_0 \cos \frac{\pi x}{L} e^{-\beta/a} \\ B_y &= \left(1 - \frac{L^2}{\pi^2 a^2}\right)^{1/2} B_0 \cos \frac{\pi x}{L} e^{-\beta/a} \\ B_z &= B_0 \sin \frac{\pi x}{L} e^{-\beta/a} \end{aligned} \quad (11.15)$$

(由 (3.44) 式得. $\beta = \frac{\pi}{L}, \lambda = \frac{1}{a}$)

$$\tan \gamma \text{ 相对于水平方向 } \hat{x} \text{ 的角度}: \tan \gamma = \frac{B_y}{B_x} = \frac{\left(1 - \frac{L^2}{\pi^2 a^2}\right)^{1/2}}{-\frac{L}{\pi a}} = -\left(\frac{\pi^2 a^2}{L^2} - 1\right)^{1/2}$$

$$\sec^2 \gamma = 1 + \tan^2 \gamma = \frac{\pi^2 a^2}{L^2} \quad \therefore \gamma = \sec^{-1} \left(\frac{\pi a}{L} \right)$$

和 (11.13) 和 (11.14) 式的两个条件:

$$n (\equiv P/m) = n_0 = 5 \times 10^{14} \text{ m}^{-3} \quad \left. \begin{array}{l} \text{在底部 } z = 0 \text{ 处,} \\ T = T_0 = 10^6 \text{ K} \end{array} \right\}$$

$$\frac{dI}{ds} = 0 \quad \text{在顶部 } z = H \text{ 处.}$$

respectively, where $\rho = \rho_0 g^{-n}$.

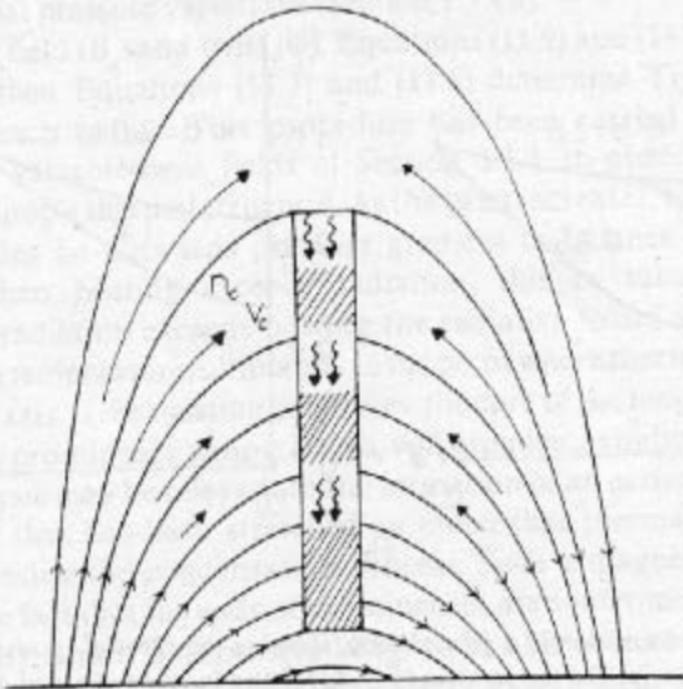


Fig. 11.2. A dynamic model for a prominence in which coronal plasma enters the prominence from the sides and then slowly dribbles through the magnetic field (from Priest and Smith, 1979)

于是可求出逆温的高度 H . 设逆温高度与地面上的距高为 x_0

已求得 x_0 平面上，破界线的形状 (见前节第 17.320)

为 $\bar{z} = \frac{1}{\lambda} \ln \cos kx + C$.

当 $x = \pm x_0$ 时, $\bar{z} = 0$, $\therefore C = -\frac{1}{\lambda} \ln \cos kx_0$

$\bar{z} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\cos kx}{\cos kx_0}$

换用本节符号 $\frac{1}{\lambda} = a$. $\bar{z} = a \ln \frac{\cos kx}{\cos kx_0}$

逆温顶部位于 $x=0$, $H = -a \ln \cos kx_0 = -a \ln \frac{\pi x_0}{L}$. ($k=\frac{\pi}{L}$)

逆温模型取次于 57 参数 P_0, T_0, h, L, Y

1. 增加谷底 (逆温底部) 加热超过辐射 ($P > P^* x T^2$), 逆温厚度增加, 在初加热时, 温度下降. 后来平衡时变得小于加热时, 温度最高. 增加谷底温度 T_0 的影响是使得逆温厚度变得更为重要, 从而有更高的等高体通过逆温层向逆温层上方运动. 反之, 等高体通过逆温层向逆温层下方运动.
2. 谷底加热 P 的减小, 使辐射变得更重要, 温度的影响与 1. 相反.
3. 增加加热次数 h , 使等高体更远, 而温度有所下降. 逆温中心区域比逆温带的区域要更远一些, 温度则低一些.
4. 逆温加宽 ($L=2x_0$) 加大了密度梯度的相对差值, 由此, 温度上升, 密度下降.

- 发现当 P 超过临界值 (典型值 $10^{15} \text{ m}^{-3} = n_0$). 热平衡 (hot equilibrium) 不再可能. 等高体冷却形成湍流, 过程中吸收热量, 使温度降低到零度以上.

- 当逆温宽度或者剪切 Y 增加时, 温度密度减小. 在加热速率一定情况下, 这是建立热平衡的一种方法. 但加热速率 (h 小于谷底的辐射) 时, 造成热的不平衡. 宽度 L 或剪切 Y 增大时, (热不平衡时, 可能形成)
变成热的不平衡.

- | | | |
|------|--------------------------|-------------------------------------|
| 热不平衡 | 1. $P_0 >$ 临界值 | 逆温 |
| | 2. 较低临界值
(仅 L 变得满足) | $L \downarrow$ 或 $Y \uparrow$ (因降温) |

场的剪切系数不单独的理由是，因为剪切增减了磁场，使磁力线变长，降低了热传导的稳定性（热传导可以被作用，磁场线伸长，即 $\frac{d\delta}{ds}$ 增加，热传导变大）

磁场中，随着 δ 的增加，磁力线长度增加。方程(11.14)式中的热传导项便向于减小（不利于稳定），同时密度减小（高的地方，密度小）降低了辐射损失（有利于稳定）。看故事的结果，决定某一波数是否属于类型的不平流。假如热传导心“超过辐射，替了磁损耗而推向稳定的等高线，当 δ 超过 $10^4 K$ ，便足某一波数范围，辐射起主导作用，等高线将冷却形成暗带。当 δ 下，磁力线足够长，阻止了能量不平流，从而在暗带之上，等高线较低（辐射减小），阻止了不平流的出现，这些特征可用下面的量以理论证实。

忽略加速度，热传导近似为

$$k_B T_1 \frac{\partial \ln \frac{T_0 - T_1}{H}}{\partial \delta} = - \tilde{\chi} \rho^2 T_1^\alpha \quad (11.16)$$

式中 ρ, T_1 是位于磁力线顶部 $\delta = H$ 处的值，由上式可确定 T_1 作 H 的函数。根据 (11.13) 式： $\frac{dP}{d\delta} = -\rho g$ ， $P = \frac{k_B}{m} \rho T$ ，

有： $\frac{d(\rho T)}{d\delta} \cdot \frac{k_B}{m} = - \frac{\rho T}{T} g$
 $= - \frac{mg}{k_B T} \delta$

$$\rho T = A e^{-\frac{mg}{k_B T} \delta} \quad \therefore \rho = \frac{\rho_0 T_0}{T} e^{-\frac{mg}{k_B T} \delta}$$

$$\text{令 } \rho_0 \rho_1 \text{ 时有 } T = T_1, \quad \rho_1 = \frac{\rho_0 T_0}{T_1} e^{-\frac{HT_0}{k_B T_1}}, \quad A_0 = \frac{k_B T_0}{mg} (T_0 + \delta) \quad (11.17)$$

从 (11.16) 式可得：

$$\begin{aligned} T_1^{\frac{1}{2}-\alpha} (T_0 - T_1) &= - \tilde{\chi} \cdot \frac{1}{k_B} \rho_1^2 H^\alpha \\ &= - \tilde{\chi} \frac{1}{k_B} \frac{H^\alpha}{T_1} \rho_0^2 T_0^2 \cdot e^{-\frac{2T_0}{A_0} \frac{H}{T_1}} \end{aligned}$$

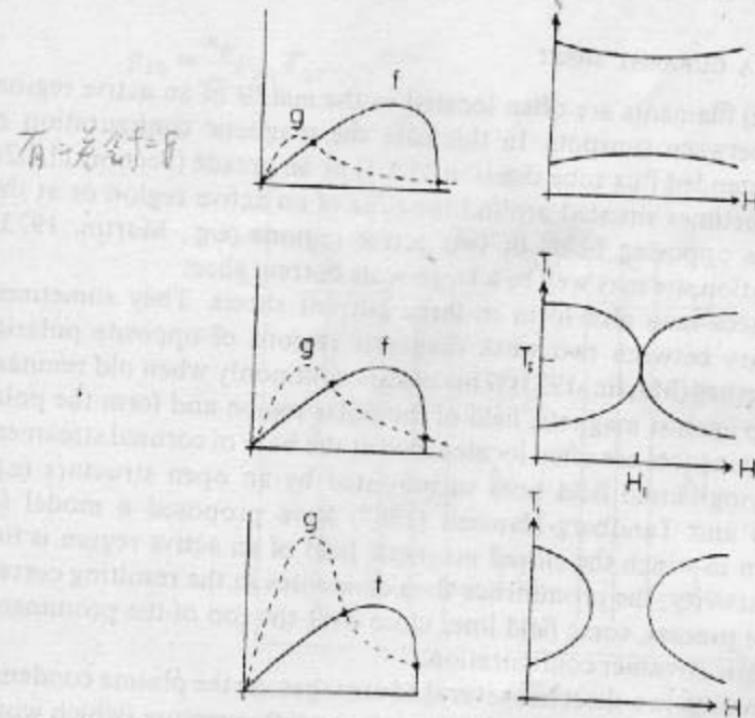


Fig. 11.4. Sketches of the functions f and g and the corresponding summit temperature (T_s) in an arcade as a function of altitude (H) (from Priest and Smith, 1979).

$$\text{令 } f(T_1) = T_1^{\frac{8-\alpha}{\alpha}} (T_0 - T_1) \quad \xi = \frac{T_1}{T_0}$$

$$\text{有 } f(T_1) \sim P_0 \xi^\alpha e^{-\frac{2T_0}{T_0}\xi} = g(\xi)$$

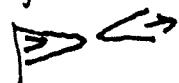
第 1.4 节当三种类型的时。 $T_1 = T_1(H)$, 为破碎顶点 H 的函数。
右边是 f , 左边是 $T_1(H)$ 对于确定的 H , 若 $f=g$, 则有二下式。
当 η_0 很大 时: $\eta_0 > 1.8 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$, g 的不太大且超过 f 不很大, 可以发现
有一区域, 其中没有相干湍流, 这种情况首先在 $H_1 = 45000$ 时出现。
等离子体中的磁力线流入暗带类似 Pickelner 的虹吸流动, 但
过驱动不例外且不一样。Pickelner 认为磁力线由圆柱中心向热气
减少, 并以流动方向, 本例中由于日冕中微粒的运动, 形成停靠叶 (冷)
凝聚过程中, 与驱动流动。一旦暗带形成, 暗带中沿向下流动就以暗带
两侧吸入新的物质。向上流动的典型速度为 5 km s^{-1} .

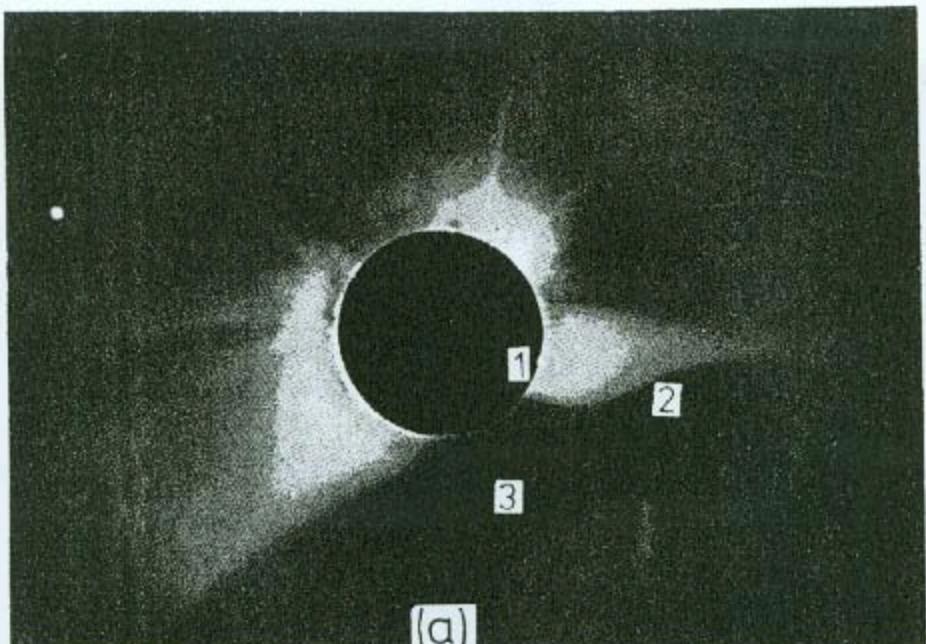
1.1.1.3 在电流产中形成的暗带

活动区 (或喷流) 暗带常位于活动区中部, 在其间穿行。这种情况下
磁力线形化可能是一个严重的磁通量, 或者是磁场。但有时 暗带位于活动
区边缘或是磁场方向相反的两个活动区之间的边界上。这时 暗带降低
长度可能就是大尺度的电流产。

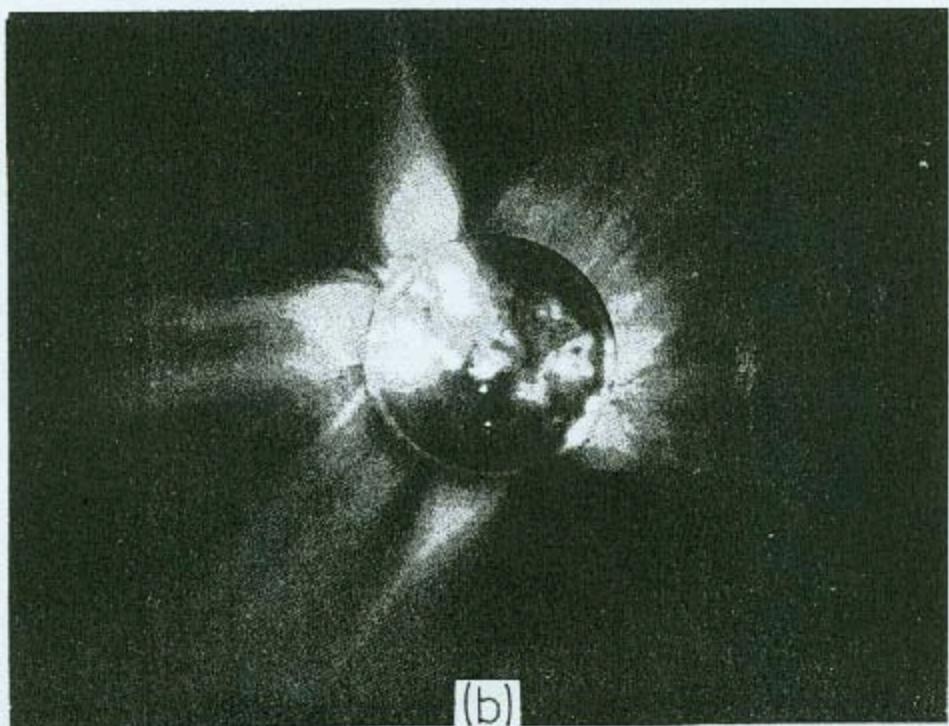
宁静暗带也可以在电流产中形成, 有时演化为一个极性倒置的
磁流区间的边界附近。进行了猛烈、急速运动。这种情况通常发生在
老的活动区遭遇向极区磁场折返形成极性的时候。宁静暗带也常
位于冕壳的底部 (Fig. 1.4)。Kuperus (1967) 曾绘出了暗带形成模型
型: 活动区的闭合磁力线首先通过耀斑流动而分开, 将常态化电流产
中凝聚殆尽, 在此过程中有些磁力线在暗带上方闭合, 产生流动。

在电流产中形成暗带的理论有了进展。当等离子体凝聚并随流动
运动时, 磁带束缚的磁束 (磁通量) 重新分布 (磁通量重组), 通过撕
裂模和耗散模开始向下降, 形成磁环, 磁环可以升高等离子体。此外
重粒子电流产底部产生闭合磁力线, 有助于支撑凝聚的等离子体





(a)



(b)

Fig. 1.4. White-light eclipse photographs of the corona taken during the eclipses of (a) 12 November 1966 and (b) 7 March, 1970, showing (1) prominence, (2) streamer, (3) coronal hole (courtesy G. Newkirk, High Altitude Observatory). Superimposed on the 1970 eclipse is a soft X-ray photograph of the inner corona from Skylab (courtesy A. Krieger, American Science and Engineering).

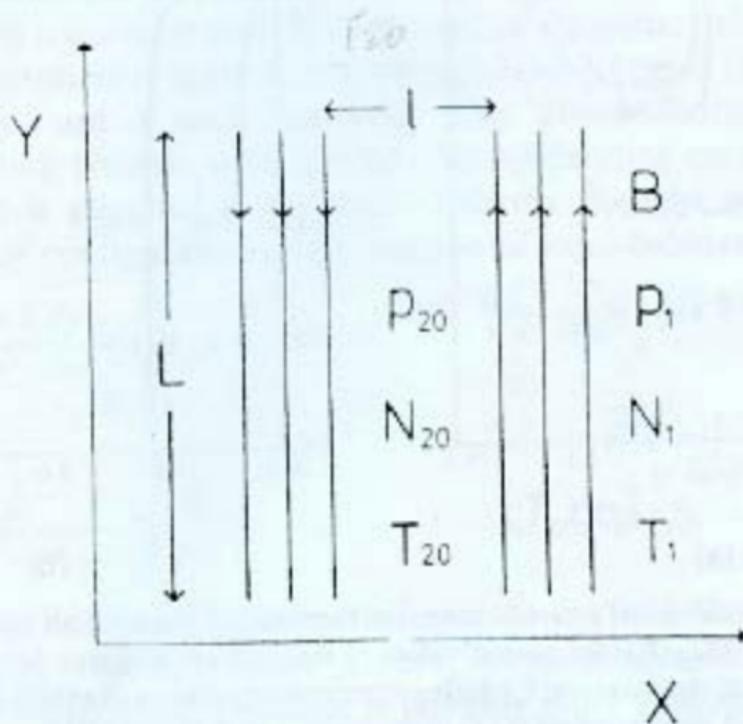


Fig. 11.6. The notation for an equilibrium neutral sheet of length L .

11.1.3A 热不平街 (Thermal Nonequilibrium)

(11.6) 式: $L < L_m = 2\pi \left(\frac{K_0 T_0}{\tilde{\chi} \rho_0} \right)^{1/2}$, 表明在低层热不平街和热流条件下, 当中性片长度 L 大于约 100,000 km 时, 有型 II 热不平街。考虑中性片的垂直平衡, 可得之之下的计算值。(Smith + Priest, 1977)

该中性片内为平衡热 (辐射热的平衡), 密度 ρ_{20} , 压强 P_{20} , 温度 T_{20} , 其中的磁场消失, 中性片外的相应量为 P_1, ρ_1, T_1, B (Fig. 11.6) 为简单起见, 不考虑中性片的结构, 惯性力, 与水平方向的力平衡以及热平衡时, 有

$$P_{20} = P_1 + \frac{1}{2} B^2 \quad (11.18)$$

$$\frac{d}{dx} \left(K_0 \tilde{\chi} \frac{dT}{dx} \right) - \rho^2 \tilde{\chi} T^2 + h \rho = 0 \quad (11.19) \quad (\text{中性片内无磁场})$$

式中 $P_{20} = \frac{k_B}{m} \rho_{20} \bar{T}_{20}$ (11.20)
 其他 (机械) 仅适用于热不平街, 即 $h = \rho_1 \tilde{\chi}_1 T_1^2$. 式(11.19) 中的 $\frac{dT}{dx}$
 加型率, 伸缩系数, 伸缩系数
 伸中性片内
 外: 由材料
 (11.19) 式变为:

$$K_0 \bar{T}_{20} \frac{d}{L} \left(T_1 - T_{20} \right) - P_{20}^2 \tilde{\chi}_{20} T_{20}^2 + h \rho_0 = 0 \quad (\text{对于中性片内})$$

(注意: $T = T_1$). 上式已假定中性片上下边, L 之外的温度为 T_{20} 。
 根据中性片外: 严格而加热的平衡条件由 h 代入, 方程可简化为 P_{20} 为:

$$K_0 \bar{T}_{20} \frac{d}{L} \left(T_1 - T_{20} \right) - P_{20} \tilde{\chi}_{20} T_{20}^2 + P_1 \tilde{\chi}_1 T_1^2 = 0 \quad (11.21)$$

中性片内外的 $\tilde{\chi}, \tilde{\chi}_1, L$.

从 (11.18), (11.20), (11.21) 三个方程可解出 $P_{20}, \bar{T}_{20}, T_{20}$, 全部用 L, B 表示。
 在通常条件下, $T_1 = 10^6 K$, 散热率为 $10^{14} m^{-3}$ (参见于图 11.7(a)). 由此可见, 当中性片长度增加 ($\sim B=1.0$ Gaus 为例), 从右下方的平衡曲线移动, 以及从由光的温度作 $10^6 K$ 起, 随后下降. 但片长超过极不伦 L_{max} , 热平衡不再存在, 密度的临界值 (或称为 T_{crit} 和 T_{prom} 达到时的平衡). 例如
 在 $B=1 G$, 极大长度 $50,000$ km, 这时等于宇宙暗带的温度.

$T_{prom} = 10^4 K$
 (暗带温度
 $7000 K$)

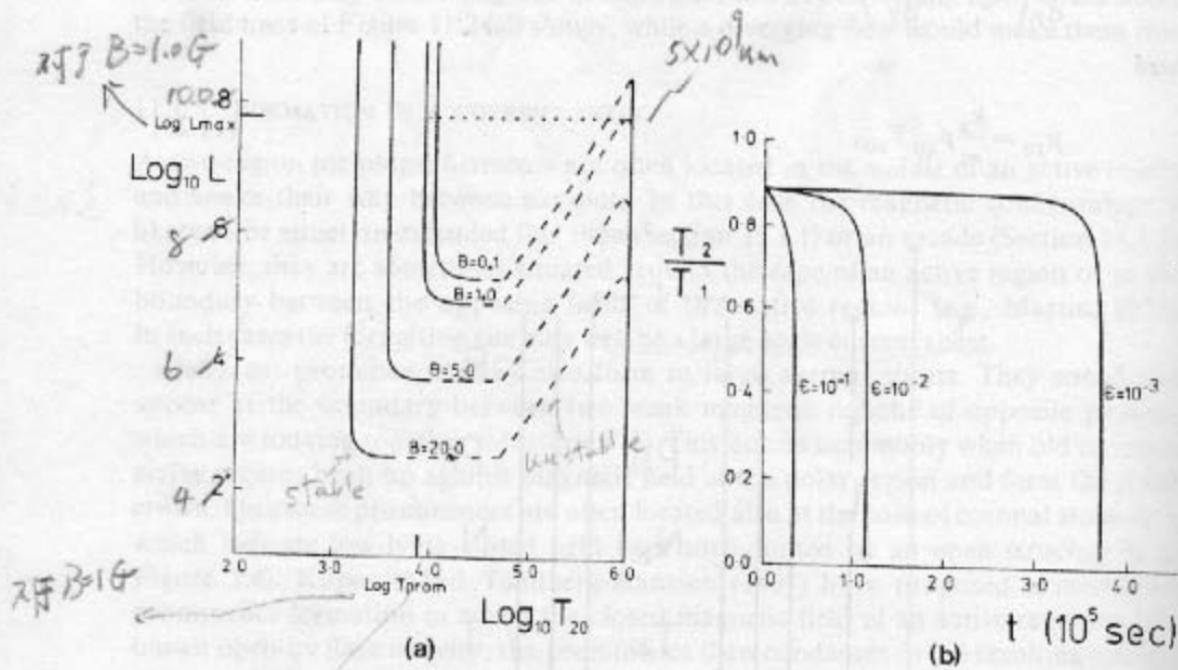


Fig. 11.7. Prominence formation in a neutral sheet. (a) The length L (in m) of an equilibrium sheet as a function of its temperature (T_{20} (K)) for several values of the external magnetic field (B in G). (b) The time-development of the sheet temperature (T_2) during prominence formation in a sheet of length $L_{max}(1 + \epsilon)$ and magnetic field 0.8 G (from Smith and Priest, 1977).

T Prominence

热不导体，问移后，电流序的之却可用下述粗略模型计算：因为冷却过程比磁流体力学的波传播慢得多，因此中性片以周围环境，仍可保持差应能产生。

$$P_1(t) = P_1 + \frac{1}{\rho} \mu B^2, \quad P_2(t) = \frac{k_B}{m} P_2(t) T_2(t)$$

我们不考虑中性片的运动，即不考虑 T_2 的变化的条件，稳定性方程中 $C_p \frac{\partial T_2}{\partial t}$ 可简化为 $C_p \frac{\partial T_2}{\partial x}$ ，∴有

$$C_p \frac{\partial T_2}{\partial x} = P_1 \tilde{x}_1 T_1 - P_2 \tilde{x}_2 T_2 + K_0 T_2 \frac{s_h}{P_2 L} \frac{T_1 - T_2}{T_2 L} \quad (11.22)$$

若 (11.21) 式相加， $P_{20} \rightarrow P_2(t)$ ， $T_{20} \rightarrow T_2(t)$ ，(11.22) 式中已利用了这个近似表示热的等效， $P_2(t)$ 的表达式以从 (11.22) 式，可用来研究在 11.20 中平衡曲线的热稳定性，其中实线代表稳定的平衡，虚线则为不稳定的 (11.22) 式中可得 $H'(L, T_2)$ 表示石。则

$$C_p \frac{\partial T_2}{\partial x} = H'(L, T_2)$$

将常数 C_p 移入右边，记为 H ，则 $\frac{\partial T_2}{\partial x} = H(L, T_2) \quad (11.22')$

当 $T_2 = T_{20}$ ， $L = L$ 时，满足 (11.21) 式，即平衡条件为 $H(L, T_{20}) = 0$ 。

假设在平衡位置 T_{20} 时，受到扰动

$$T_2 = T_{20} + A e^{rt}, \quad A \text{ 为常数}$$

设 $r > 0$ 为不稳定的， $r < 0$ 稳定

(11.22') 式在 $T_2 = T_{20}$ 展开成 Taylor 以数

$$H(L, T_2) = H(L, T_{20}) + \frac{\partial H}{\partial T_2}(T_2 - T_{20}) + \dots$$

$$= \frac{\partial H}{\partial T_2}(T_2 - T_{20})$$

将 T_2 的扰动式代入上式，有 $\sigma = \frac{\partial H}{\partial T_2} \Big|_{T_2=T_{20}}$

由 11.2(a) 是推导 (11.21) 式得到，即此平衡位置，从平衡中和 ∞ 取可

$$\text{且} \quad k = \frac{\partial \lg L}{\partial \lg T_2}, \quad \frac{dL}{dT_{20}} = k \frac{L}{T_{20}} \Rightarrow \text{大数有 } = 37 \text{ 亿}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{1}{T_1} \frac{dT_2}{dt} \xrightarrow{\text{解算}} \text{也有二个值，而上述相反。} \quad (T_1 = \text{const.})$$

$$\text{因此有 } \frac{\partial T_2}{\partial t} = H = \left. \frac{\partial H}{\partial T_2} \right|_{T_2=T_{20}} (T_2 - T_{20})$$

$$\frac{1}{T_1} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \left. \frac{\partial H}{\partial T_2} \right|_{T_{20}} (T_2 - T_{20}) \cdot \frac{1}{T_1} \quad \text{即} \quad \frac{dL}{dT_{20}} = k \frac{L}{T_{20}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial T_2} \parallel \frac{dL}{dT_{20}}$$

$$\text{且 } L=L_{\max} \text{ 时}, \text{ 有 } \frac{dL}{dT_{20}}=0. \quad \because \text{ 不大} \therefore \left. \frac{\partial^2 H}{\partial T_2^2} \right|_{T_{20}} < 0$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \left. \frac{\partial H}{\partial T_2} \right|_{T_{20}} (T_2 - T_{20}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial T_2^2} \right|_{T_{20}} (T_2 - T_{20})^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} (T_2 - T_{20})^2 \left. \frac{\partial^2 H}{\partial T_2^2} \right|_{T_{20}}$$

$\therefore T_2 > T_{20}$ 时, $\frac{\partial T_2}{\partial t} < 0$, \therefore 不稳定.

$\therefore T_2 < T_{20}$ 时, 有 $\frac{\partial T_2}{\partial t} < 0$ \therefore 不稳定.

不稳定性使 $L=L_{\max}$

产生不稳定 $\frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$, $\frac{dw}{dx} \Big|_{x=0}$

由(11.21)式, 有 $\frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0$, 由(11.22)

由(11.21)式, 有 $\frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$, 由(11.22)

由(11.21)式, 有 $\frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$, 由(11.22)

在长度不变处 $L=L_{\max}$, 某些线性理论已经证明有中性稳定 (mentally stable) 临界点之首次, 在最高冷却部位时, $T_2 < T_{20}$. 是不稳定.

假设中性点逐渐增加长度, 冷却过程实际上依赖 $L_{\max}(1+\varepsilon)$, 随时间的变化可通过(11.22)式的方程求解. 令 $L=L_{\max}(1+\varepsilon)$, 且假设 ε 变. 随后 ε 变为 ε_1 , 再令 L 不变, 如此就可得到 $2.1(\varepsilon_1)\varepsilon$, 即 $2.1(\varepsilon_1)L$ 的曲线如图 11.7(b) 所示. 且该库伦临界温度 (T_{crit}) $\sim 10^4 \text{ K}$. $T_1=10^6 \text{ K}$ 和 $2.1(\varepsilon_1)$ 中有 $\frac{T_2}{T_1}=10^{-2}$. 观测到的时间为 10^5 s (1 天), 应选取 $\varepsilon=10^{-2}$ 对于 $2.1(\varepsilon_1)\varepsilon$. 开始阶段冷却率缓慢 (曲线 A 部分). 为大程度下降而刻而下. 完毕下降. 上述分析是对冷凝过程的粗略模型, 将来应详细研究冷却过程的偏微分方程. Semov & Syrovatsky (1980, 1982) 已考虑了中性点内, 中性点位置随时间变化的问题. Chindri & Von Hoven (1979) 研究了一维无对流, 有对流时形状和流动动力学影响.

11.1.3B 固结 (Line-Tying)

垂直电流片中，等离子体的凝聚过程中，因为磁力线被水平于圆周的光束。Lorentz力使向了质点横向运动。磁力线张开的运动，因深浅其心的密度梯度大，而加深阻止。凝聚过程使磁力线弯曲，形成磁感应场环流聚，应力的影响是 Alfvén速度传播。因此凝聚过程必须考虑磁力线固结效应的影响。

考虑凝聚过程，中性片附近均匀垂直磁场，假设：

1. 纯水平运动，力平衡，无限大电导率，绝热

2. 物质时刻的运动和密度均匀，且属牛顿动力学，冷却忽略不计

3. 临近时刻水平的特征长度与厚度无关

~~磁力线~~ 在壳层中的固结阻碍任何凝聚过程。假设假设：可认为凝聚壳层随磁力线增加，所有质量(ρ, P, η)仅与 x, θ 有关，极坐标下则为 θ 和大的半径。在这种凝聚形式为扩散楔形 (diffusive wedge)，一边是而高边分离完全/部分分明的。即也不完全平行的。凝聚过程假设低而扩散非常缓慢，因此磁感应水平方向力平衡的条件。经历一系列的步骤之后

$$-\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} = 0$$

$$\text{水平方向 } \hat{x}: -\frac{\partial P}{\partial x} - j_z B_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$-\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - j_z B_y = 0 \quad (11.23)$$

(Priest 和 (11.23) 式符号有错)

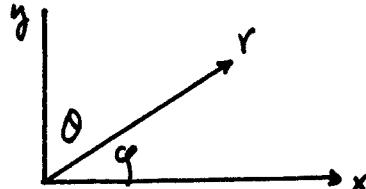
$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times \vec{B}, \quad j_z = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right)$$

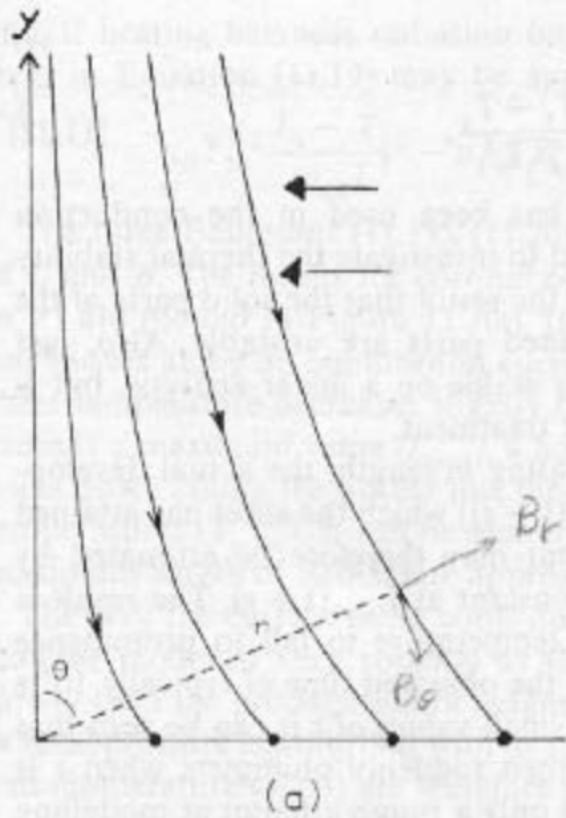
从 11.8(b) 可见，虚线上 $B_x = 0$ ，虚线下， B 平行，可以认为 $B_x \approx \frac{\partial \theta}{\partial y} \approx$

$$\therefore j_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad x = r \cos \varphi = r \sin \theta, \quad dx = r \cos \theta d\theta$$

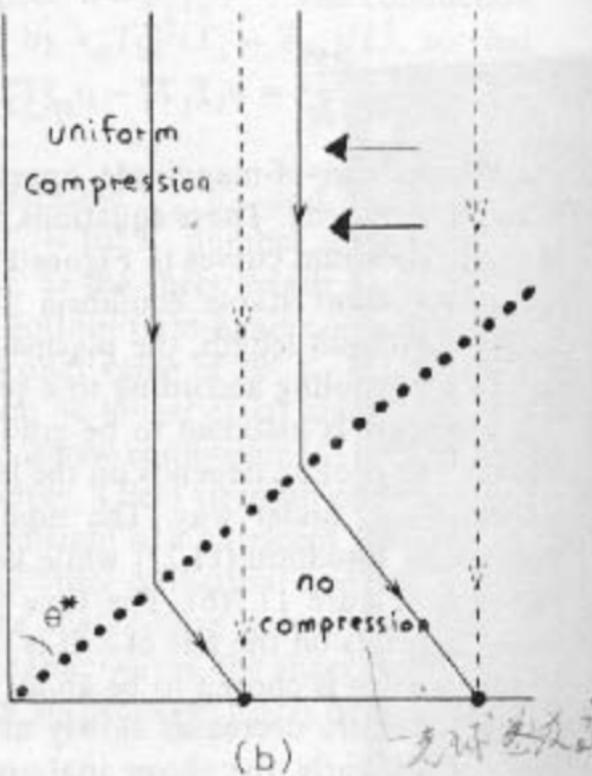
$$= \frac{1}{\mu_0 r \cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \theta}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - j_z B_y = 0 \Rightarrow -\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{B_0}{\mu_0 r \cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (11.23')$$





(a)



(b)

Fig. 11.8. The effect of line-tying on prominence formation in a neutral sheet, one half of which is shown.
 (a) The notation and the form of the field lines for a diffuse condensation. (b) Condensation in a wedge with an initially vertical field (dashed) (after Raadu and Kuperus, 1973).

Coordinate system

AF

因为液体冻结，所以 $\frac{P}{P_0} = \frac{B}{B_0}$ ，下标“0”，表示初状态时的物理量。液体的密度 ρ 在重力场中，仅大商（指的是一般情况下液体的密度）随压力和温度而变化的（忽略热膨胀），则有

$$\frac{DP}{P} - \frac{Y}{P} \frac{D\rho}{Dx} = -(Y-1) \alpha \quad (2.28+)$$

$$= (Y-1) P [h - \tilde{Q}(T, P)] \quad (11.24)$$

但是物理量没有单位。 $(P=P_0, T=T_0)$ ， \therefore 有 $h = \tilde{Q}(T_0, P_0)$ 。

下面的内参订正由图中热力学稳定性增长。

该平衡状态，净输入热量 $\bar{E} = \bar{E}(P, P)$ ，初状态时，因热平衡，有

$$\bar{E}(P_0, P_0) = 0$$

定义：定压时，热不稳定性增长率为 $\Omega_p = -\frac{1}{C_p T} \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P$ ($P \neq P_0, T \neq T_0, \bar{Q}_p$)

等容度时，热不稳定性增长率为 $\Omega_p = \frac{1}{P C_v T} \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P$

式中 C_p, C_v 为定压和定容吸热量。

$$\bar{E} = P[h - \tilde{Q}(T, P)]$$

$$P = PRT$$

代入得 Ω_p, Ω_p

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial P} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \tilde{Q}} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \tilde{Q}} = -P^2, \quad \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{1}{PR}$$

$$\therefore \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} = -P^2 \cdot \frac{1}{PR} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T}$$

$$\Omega_p = \frac{P}{P C_v T} \left(-\frac{1}{R} \right) \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} = -\frac{P}{C_v} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} \quad (\text{由 } P \neq P_0 \Rightarrow \tilde{Q} \neq \tilde{Q}_p)$$

(Ω_p 为等容度增长率，应有 $P=P_0, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T}|_{T_0}$)

Ω_p 中有 $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T}$ 项

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T}|_P = h - 2P\tilde{Q} - P^2 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T}$$

等压条件下： $P=PRT, \quad \sigma = RT \partial P + PR \partial T$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{1}{P}, \text{ 代入 } \frac{\partial E}{\partial P}|_P \text{ 表式}$$

$$\frac{\partial E}{\partial P}|_P = h - 2\tilde{Q}P + P_T \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T}$$

$$L_P = -\frac{1}{C_P T} (h - 2\tilde{Q}P + P_T \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T})$$

L_P 为等压功耗 $\therefore P=P_0, h=h_0, P_0=P_0, T=T_0, \tilde{Q}(T)=\tilde{Q}(T_0)$

$$h - 2\tilde{Q}P = \tilde{Q}(T_0)P_0 - 2\tilde{Q}P = -\tilde{Q}P$$

$$L_P = -\frac{P}{C_P} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} + \frac{P \tilde{Q}}{C_P T}$$

(L_{P_0}, L_P 为 2(1) 项的 T 值, 应该得为由中解得的值)

$$\text{设 } n = \frac{T}{\tilde{Q}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} > -\frac{1}{r-1}, \text{ 则有 } L_P > L_{P_0}$$

说明: 如果 $L_P > L_{P_0}$ 成立, 即即

$$-\frac{P}{C_P} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} + \frac{P \tilde{Q}}{C_P T} > -\frac{P}{C_P} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T}$$

$$-\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} + \frac{\tilde{Q}}{T} > -r \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T}$$

$$(r-1) \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} > -\frac{\tilde{Q}}{T}$$

$$\frac{1}{\tilde{Q}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} > -\frac{1}{r-1}, \text{ 可见左式成立. 所有 } L_P > L_{P_0}$$

对于完全电离的单原子气体 $r=\frac{5}{3}$, n 必须大于 -1.5 .

设 P_0, P_1 为 T 中解得压强和密度的增加量, 则此可求得 1 个输入 T 值的耗功 L , 耗功后总输入功量为

$$E = E_0 + \frac{\partial E}{\partial P}|_P P_1 + \frac{\partial E}{\partial P}|_P P_1, \quad E_0 \text{ 为平衡时的输入功量}$$

$$\text{耗功量 } E_1 = E - E_0 = \frac{\partial E}{\partial P}|_P P_1 + \frac{\partial E}{\partial P}|_P P_1$$

$$= r \cdot (r-1), \quad (r-1) E_1 = (r-1) \frac{\partial E}{\partial P}|_P P_1 + (r-1) \frac{\partial E}{\partial P}|_P P_1$$

$$\therefore \frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{1}{C_P T} \frac{\partial E}{\partial P}|_P = \frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{1}{r-1} \frac{\partial E}{\partial P}|_P = (r-1) \frac{\partial E}{\partial P}|_P, \text{ 利用 } P = PRT$$

$$\text{ii) } \frac{P_0}{\rho c_v T} \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P = \frac{P_0}{\rho_0} \cdot \frac{1}{\frac{1}{Y-1} RT} \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P = (Y-1) \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P$$

根据方程 i. $\Delta P = -\frac{1}{c_v T} \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P$, $\therefore \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P = -\Delta P c_v T$ (P.T. 方程的推导)

$$\text{i. 由 i. } \Delta P = -\frac{1}{c_v T} \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P = -\Delta P (Y-1) c_v T = -\Delta P \frac{Y}{Y-1} RT = -\Delta P \frac{Y P_0}{\rho_0}$$

$$\text{ii) 由 i. } \Delta P = \frac{P}{\rho c_v T} \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P, \quad \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P = \Delta P \frac{\rho}{P} c_v T = \Delta P \frac{1}{Y-1}.$$

$$(Y-1) \frac{\partial \bar{E}}{\partial P} |_P = \Delta P$$

$$\therefore (Y-1) \bar{E}_1 = -\Delta P \frac{Y P_0}{\rho_0} P_1 + \Delta P P_1 \quad (*)$$

现在我们已将方程整理为形式方程 + L. 问题

$$\text{令代入 } P = P_0 + P_1(\theta) e^{\sigma x}, \quad B_0 = B_0(1 + \varepsilon(\theta) e^{\sigma x})$$

$$P = P_0 + P_1(\theta) e^{\sigma x}, \quad \Delta P = P_0 \varepsilon(\theta) e^{\sigma x}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_1$$

代入 $(11.23')$

$$-\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_0 + P_1(\theta) e^{\sigma x}) - \frac{1}{\mu r \cos \theta} B_0 (1 + \varepsilon(\theta) e^{\sigma x}) \frac{\partial}{\partial \theta} B_0 (1 + \varepsilon(\theta) e^{\sigma x}) = 0$$

$$\text{即 } -\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} = \frac{1}{\mu r \cos \theta} \frac{\partial B_0}{\partial \theta} = 0$$

$$-\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial P_1(\theta)}{\partial \theta} - \frac{B_0^2}{\mu r \cos \theta} \frac{\partial \varepsilon(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$\cos^2 \theta \frac{\partial P_1(\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu} B_0^2 \frac{\partial \varepsilon(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (**) \quad (11.24)$$

\bar{E}_1 的表达式

$$\frac{D \bar{P}}{Dx} - \frac{Y^2}{P} \frac{D P}{Dx} = (Y-1) \int^P P_0 \bar{E}$$

即代入 \bar{P} :

$$\frac{D}{Dx} (P_0 + P_1) - \frac{Y(P_0 + P_1)}{P_0 + P_1} \frac{D}{Dx} (P_0 + P_1) = (Y-1) (\bar{E}_0 + \bar{E}_1)$$

$$\frac{D}{Dx} (P_0 + P_1) - Y \frac{(P_0 + P_1)}{P_0} (1 - \frac{P_1}{P_0}) \frac{D}{Dx} (P_0 + P_1) = (Y-1) (\bar{E}_0 + \bar{E}_1)$$

其中 $\frac{DP_0}{DX} - \frac{Y P_0}{P_0} \frac{DP_0}{DX} = (r-1) E_0$, 忽略阶数后有

$$\frac{DP_1}{DX} - \frac{Y P_0}{P_0} \frac{DP_1}{DX} = (r-1) E_1$$

利用 P.17 中的 (*) 式

$$P_1(\theta) \sigma e^{\sigma x} - \frac{Y P_0}{P_0} P_0 \epsilon(\theta) \sigma e^{\sigma x} = - \frac{Y P_0}{P_0} \sigma_p P_1 + \sigma_p P_1$$

(液体导热系数和密度都与温度无关, 因为液体几乎没有温度)

P_1, P_0 代入左边, 上式成为

$$P_1(\theta) \sigma - Y P_0 \epsilon(\theta) \sigma = - Y P_0 \sigma_p \epsilon(\theta) + \sigma_p P_1(\theta)$$

$$(\sigma - \sigma_p) P_1(\theta) = Y P_0 \epsilon(\theta) (\sigma - \sigma_p)$$

$$P_1 = Y P_0 \epsilon \frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma - \sigma_p}$$

P_1 和 P_0 代入 P.17 (**) 式中.

$$\cos^2 \theta Y P_0 \frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma - \sigma_p} \frac{d \epsilon(\theta)}{d \theta} + \frac{\beta_0^2}{\mu} \frac{d \epsilon(\theta)}{d \theta} = 0$$

$$[Y P_0 (\sigma - \sigma_p) \cos^2 \theta + \frac{\beta_0^2}{\mu} (\sigma - \sigma_p)] \frac{d \epsilon(\theta)}{d \theta} = 0 \quad (11.25)$$

上式的结果通常是非齐次方程。令中括号内乘以 0, 得到

$$\cos^2 \theta_x = - \frac{\beta_0^2}{\mu Y P_0} \frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma - \sigma_p}$$

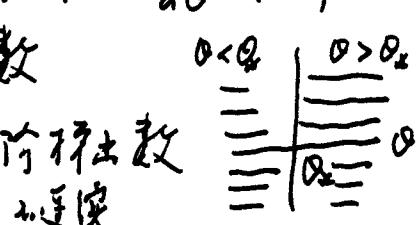
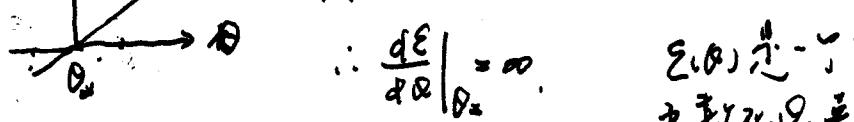
① 当 $\theta = \theta_x$ 时, (11.25) 式成立. $\frac{d \epsilon}{d \theta}$ 可以取任意值

② 当 $\theta > \theta_x$ 时 $\epsilon(\theta) = C_1$ (常数)

$\theta < \theta_x$ 时 $\epsilon(\theta) = C_2$ (常数)

③ 由 $\frac{d \epsilon}{d \theta}$ 及 $\theta = \theta_x$ 时, 为 ∞ , 又因为其他未知数 $\frac{d \epsilon}{d \theta}$ 为常数, 故 $\frac{d \epsilon}{d \theta} = k$ 且

ϵ 为 θ 的线性函数, 且过 θ_x 时为常数



从 $\cos^2 \theta_x$ 看起来, 在 θ_x 时非齐次

$$\sigma = \frac{\sigma_p + (Y P_0 \frac{\mu}{\beta_0^2}) \sigma_p \cos^2 \theta_x}{1 + \frac{Y P_0 \mu}{\beta_0^2} \cos^2 \theta_x} \quad (11.26)$$

由于液体在 θ_x 时膨胀系数为零, 因此液体在 θ_x 时无运动

也即 $\theta > \theta_x$ 时, $\varepsilon = 0$, 而 $\theta < \theta_x$ 时, $\varepsilon \neq 0$ (见图 11.8(b)), 以下的分析
 $\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0, & \theta < \theta_x \\ 0, & \theta > \theta_x \end{cases}$ 相应于均匀压缩, 对应有大于 θ_x 的 θ 为
 压缩, 无压缩

由(11.26)式可知 σ 为常数(ε) ($\theta_x = \text{const.}$), ∴ [随时间] σ 为 $P_0 = P_0(1+\varepsilon e^{\frac{\sigma}{\rho}})$
 越来越大 ($\varepsilon \neq 0$), 即单位面积上的压力将增加. 从图 11.8(b) 可见, $\theta < \theta_x$
 时, $\varepsilon \neq 0$ 不需力才能使单位面积不变, (即没有向后的反冲). (若果等高线
 没聚成簇?)

• (11.26)式还可以写成 $\sigma = \frac{\sqrt{\frac{c_s^2}{4} \Omega_p + c_s^2 \cos^2 \theta_x \Omega_p}}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}} + c_s^2 \cos^2 \theta_x}$ 在 σ 为常数时.

$$\frac{d\sigma}{d\theta_x} = -2 \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \Omega_p \cos \theta_x \sin \theta_x \left(1 + \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \cos^2 \theta_x \right)^{-1} \left(\Omega_p + \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \Omega_p \cos^2 \theta_x \right).$$

$$\cdot \left(1 + \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \cos^2 \theta_x \right)^{-2} \cdot 2 \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \cos \theta_x \sin \theta_x = 0$$

$$\Omega_p \left(1 + \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \cos^2 \theta_x \right)^{-1} - \left(\Omega_p + \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \Omega_p \cos^2 \theta_x \right) \left(1 + \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \cos^2 \theta_x \right)^{-2} = 0$$

$$\Omega_p + \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \Omega_p \cos^2 \theta_x - \Omega_p - \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \Omega_p \cos^2 \theta_x = 0$$

有 $\Omega_p = \Omega_p$ 该解不合理.

$1 + \frac{c_s^2}{\sqrt{\frac{c_s^2}{4}}} \cos^2 \theta_x \neq 0$, ∴ 只可能满足 $\sin \theta_x = 0$. ∴ $\theta_x = 0$ 有不合理

• 已求得当 $\Omega_p > \Omega_0$ 时, 有 $\frac{T}{\tilde{Q}} \frac{d\tilde{Q}}{dT} > -\frac{1}{r-1} = -\frac{3}{2}$

$\tilde{Q} = \chi T^{\alpha}$ 量纲为 ($\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^3$), 功率与初速度有关

① 若果 $\Omega_p < \Omega_0$, 有 $\frac{T}{\tilde{Q}} \frac{d\tilde{Q}}{dT} < -\frac{3}{2}$, 可见 T 增加, 热力学能的损失
 将更甚. (T, \tilde{Q} 本非正, $\frac{d\tilde{Q}}{dT} < 0$)

② 为 $\Omega_p > \Omega_0$ 时, 有 $-\frac{3}{2} < \frac{T}{\tilde{Q}} \frac{d\tilde{Q}}{dT} < 0$, 表示相对而言, T 增加, 热
 力学能的损失不甚明显.

• 为“后坐”和 $\Omega_p > \Omega_0$:

∴ $\frac{d\sigma}{d\theta_x} = 0$, $\theta_x = 0$ 时有不合理之可能

$$\frac{d\sigma}{d\theta_x} = - \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} s_p \sin 2\theta_x \left(1 + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \cos^2 \theta_x \right)^{-1} + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \sin 2\theta_x \left(s_p + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} s_p \cos^2 \theta_x \right) \cdot \left(1 + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \cos^2 \theta_x \right)^{-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\theta_x^2} &= -2 \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} s_p \cos 2\theta_x \left(1 + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \cos^2 \theta_x \right)^{-1} - \left(\frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \right)^2 s_p \sin^2 2\theta_x \left(1 + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \cos^2 \theta_x \right)^{-3} \\ &\quad + \left[\frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \sin 2\theta_x \left(s_p + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} s_p \cos^2 \theta_x \right) \right] \left(1 + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \cos^2 \theta_x \right)^{-2} + \\ &\quad + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \sin 2\theta_x \left(s_p + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} s_p \cos^2 \theta_x \right) \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \cos^2 \theta_x \right)^{-3} \cdot \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} \sin 2\theta_x \end{aligned}$$

$$\theta_x = 0 \text{ 代入 } \frac{d^2\sigma}{d\theta_x^2} \text{ 有}$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta_x^2} = -2 \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} s_p + 2 \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} s_p$$

$$1 + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}}$$

要求 σ 有极大，即 $\frac{d^2\sigma}{d\theta_x^2} < 0$ ，且 $s_p > s_p$

$$\theta_x = 0 \text{ 代入 } (1) > 0 \text{ 得 } \sigma_{max} = \frac{s_p + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}} s_p}{1 + \frac{C_s^2}{\sqrt{A}}}$$

结论：随着 θ_x 的增大， σ 先减小后增加， $\tilde{\sigma}$ 的减小不是很快，从而有 $s_p > s_p$ ，有 $-\frac{3}{2} < \frac{1}{\tilde{\sigma}} \frac{d\tilde{\sigma}}{d\theta_x} < 0$ ，即当 $\theta = \theta_x = 0$ 时， $\tilde{\sigma}$ 不是 σ 的 $\sigma_{max}|_{\theta_x=0}$ ，而是 $\tilde{\sigma}$ 向 $\theta_x \rightarrow \pi$ 时的 $\tilde{\sigma}$ 。

如果引入热力学势、引力、重力运动，问题就变得更加困难。

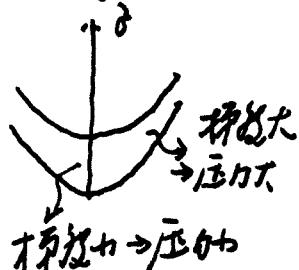
11.2 简单磁梯的静力学支撑

11.2.1 Kippenhahn-Schlüter 模型.

Kippenhahn-Schlüter 模型是：暗室是一等距薄片，所有的壁连成一个整体 x ，由此端连为一维。因为暗室中的等高与体积相容，以及磁力线向下弯曲，如图 11.9 所示，下垂的磁力线有三个作用：一是磁感应强度 B 向上的力，以平衡重力，支撑暗室；二是随着离开子平均距离增加，磁压力增加，平衡；三是等高气体的压强减小。

情况如图所示：

$$0 = -\nabla P - \rho g \hat{z} - \nabla \frac{1}{2\mu} B^2 + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} / \mu \quad (11.27)$$



状态方程：

$$\rho = \frac{mP}{k_B T} \quad (11.28)$$

以上二式中 T 和 \vec{B} 的水平分量 B_x, B_y 均假定为均勻，压强 $P(x)$ ，密度 $\rho(x)$ 和垂直方向的磁感应 $B_z(x)$ 假定只随 x 轴而变， $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，方程 (11.27) 可以写成

$$\hat{x}: \quad 0 = -\frac{\partial}{\partial x} (P + \frac{1}{2\mu} B^2) \quad (11.29)$$

$$\hat{z}: \quad 0 = -\rho g + \frac{1}{\mu} B_x \frac{\partial}{\partial x} B_z \quad (11.30)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z), \quad B_x, B_y \text{ 均匀}, \quad B_z \text{ 随 } x \text{ 变化}$$

$$\text{边界条件: } \begin{cases} x \rightarrow -\infty \text{ 时, } P \rightarrow 0, \\ B_z \rightarrow \pm B_{z0} \end{cases} \quad (B_{z0} \text{ 为 } x \text{ 的函数}) \quad (11.31)$$

$$\text{一般 } \frac{d B_z}{dx} \neq 0, \quad \text{且不为零时, } \text{在 } x=0 \text{ 时, } B_z = 0 \quad (11.32)$$

$$(11.29) \text{ 式积分: } P + \frac{1}{2\mu} B_z^2 = C$$

$$\text{利用边界条件 (11.31), } C = \frac{1}{2\mu} B_{z0}^2$$

$$\therefore P = \frac{1}{2\mu} (B_{z0}^2 - B_z^2) \quad (11.33)$$

$$(11.33) \text{ 式代入 (11.28), 并后代入 (11.30) 式, 得}$$

$$0 = -\frac{m g}{k_B T} \cdot \frac{1}{2\mu} (B_{z0}^2 - B_z^2) + \frac{1}{\mu} B_x \frac{d B_z}{dx}$$

$$\lambda = \frac{k_B T}{mg} \text{ 为常数}$$

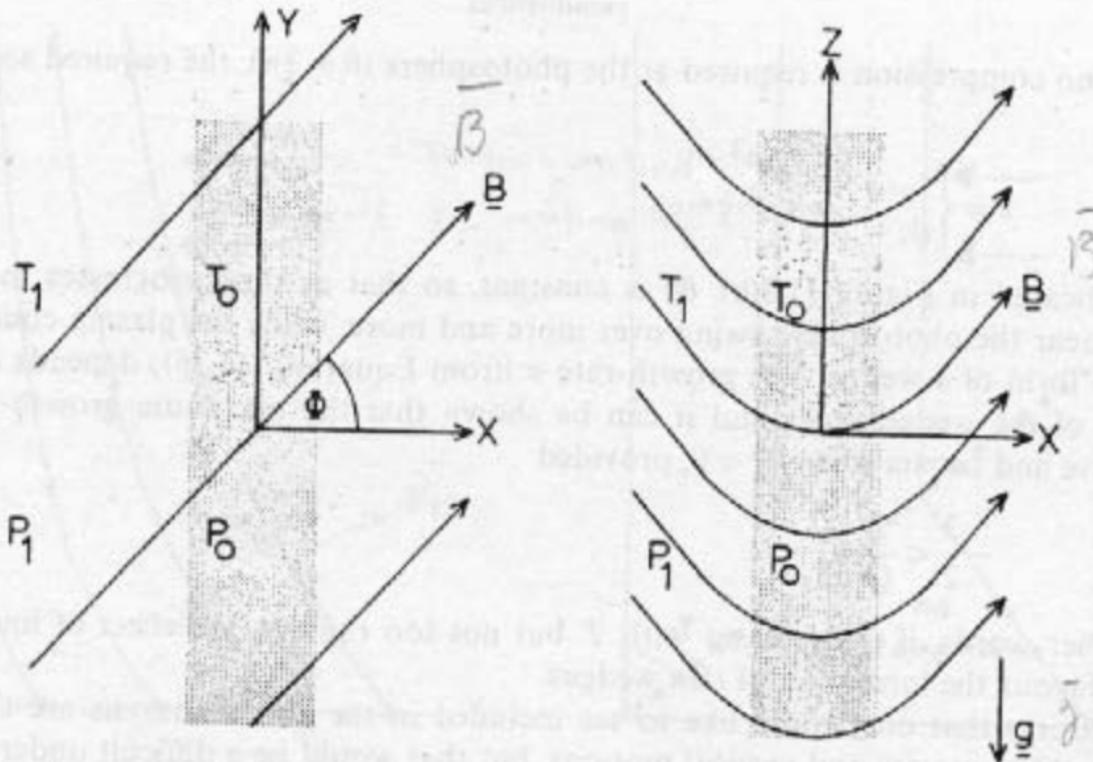


Fig. 11.9. The notation for the support and compression of a prominence represented as a sheet. The z -axis is directed normal to the solar surface, and the y -axis runs along the length of the prominence. For the basic Kippenhahn-Schlüter model the temperature is uniform ($T_1 = T_0$) and the shear angle ϕ (between the prominence normal and the horizontal field) is zero.

$$O = -\frac{1}{2\lambda} (\beta_{B\infty}^2 - \beta_B^2) + \beta_X \frac{d\beta_B}{dx}$$

$$\frac{1}{\beta_{B\infty}} \tanh^{-1} \frac{\beta_B}{\beta_{B\infty}} = \frac{x}{2\lambda \beta_X}, \text{ 和分常数}=0, \text{ 于 } x=0 \text{ 时, } T_A \beta_B = 0.$$

$$\beta_B = \beta_{B\infty} \tanh \frac{\beta_{B\infty} x}{2\lambda \beta_X} \quad (11.34)$$

↑ 与书中相比较.

代入(11.33)式

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\mu} \beta_{B\infty}^2 - \frac{1}{2\mu} \beta_{B\infty}^2 \tanh^2 \frac{\beta_{B\infty} x}{2\lambda \beta_X} \\ &= \frac{1}{2\mu} \beta_{B\infty}^2 \operatorname{sech}^2 \frac{\beta_{B\infty} x}{2\lambda \beta_X} \end{aligned} \quad (11.35)$$

见图 11.10.

① 从(11.35)式可以看出来, 等高处中的压强等于等高处体外的磁场垂直分量产生的压强 (当 $x=0$ 时, $\operatorname{sech}(x=0)=1$)。随着半宽度的增加而 $\beta_{B\infty}$ 增加, 压强也增加 (等高处压强从中心部位到边缘呈下降, 可令 $\operatorname{sech} \frac{\beta_{B\infty} x}{2\lambda \beta_X} = 1.75$ 计)

② 从(11.34)式可知, $\beta_B \neq 0$ 影响该模型的结构, 对这个模型的限制之一

是 磁场周围的压强必须为零 (从图 11.11 式可以看出来), 因此需要有垂直方向的力来维持磁场外部物质, 限制之二: 磁场必须保持垂直的磁场差未在体内, 而且必定应是均匀。

11.2.2 Kippertahn-Schlüter 的普遍模型

Milne 等(1979) 提出利用磁流体静力学平衡和能量平衡处理日冕中的垂直的简单平衡模型。主要目的为确定水半高和剪切对垂直压强不同的影响。因此能量平衡不再由 Hosking-Mihalas 那样取很多方向 (辐射转移和扩散方程(11.28),(11.29)和(11.30)), 加上热平衡条件 ($L=0$)

$$\frac{d}{dx} \left(K_0 T^{-5/2} \frac{dT}{dx} \frac{\beta_X^2}{B_z^2} \right) = \tilde{\chi} \rho^2 T^\alpha - h \rho \quad (11.36)$$

式中 $\frac{\beta_X^2}{B_z^2}$ 为 0, 这是因为考虑了热传导主要是沿磁场线传播, 并非垂直于 x 方向传播。说明如下: 热平衡方程式为 $\nabla \cdot (K \nabla T) = \tilde{\chi} \rho^2 T^\alpha - h \rho$

$$\because K_\perp \ll K_\parallel, \text{ 上式变为 } \nabla_\parallel \cdot (K_\parallel \nabla_\parallel T) = \tilde{\chi} \rho^2 T^\alpha - h \rho$$

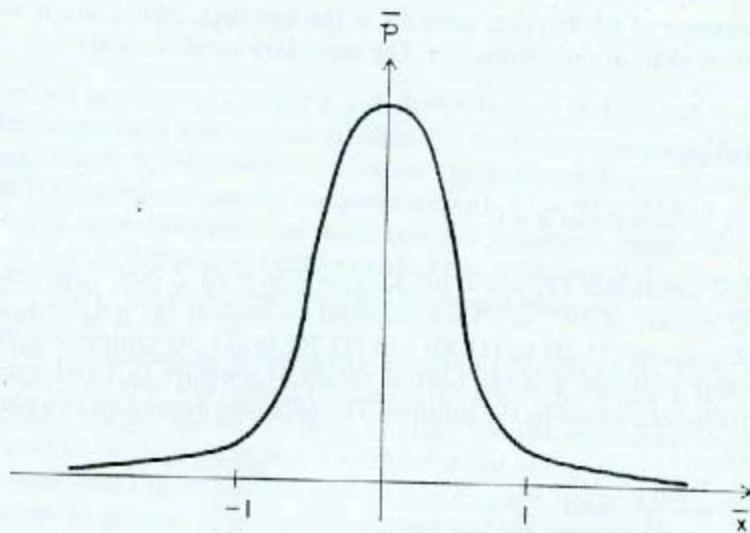
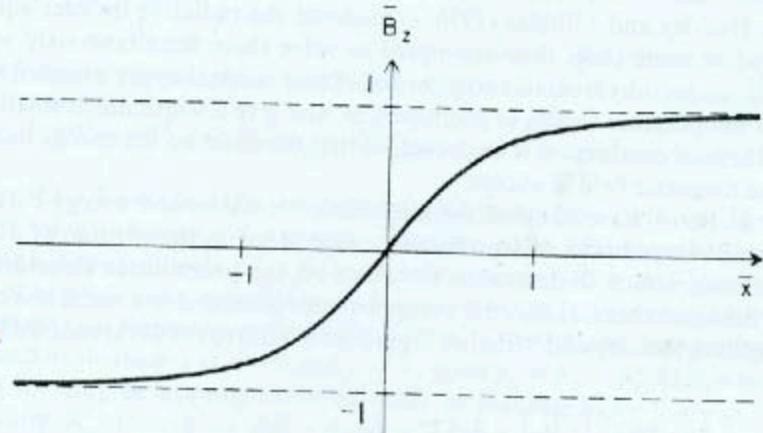


Fig. 11.10. The vertical magnetic field (B_z) and plasma pressure (p) for the Kippenhahn-Schlüter model, shown schematically as functions of distance (x) across the prominence. \bar{B}_z is defined as $B_z/B_{z\infty}$, \bar{p} as $p2\mu/B_{z\infty}^2$, and \bar{x} as $B_{z\infty}x/(B_{z\infty}A)$.

$$\text{II 表示流体运动方向, } \vec{v}_T = \frac{\partial}{\partial s} \vec{T}, \quad \vec{s} = \frac{\vec{B}}{B}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{T}}{\partial s} &= \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \cos \beta \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \cos \gamma \hat{k} \\ &= \frac{\partial T}{\partial x} \frac{B_x}{B} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{B_y}{B} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{B_z}{B} \hat{k}\end{aligned}$$

$$\nabla_{\vec{v}_T} \cdot (K_1 \nabla_T \vec{T}) = \frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha \cdot K_1 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{B_x}{B} = \frac{\partial}{\partial x} (K_1 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{B_x^2}{B^2}) = \tilde{x} \tilde{P}^2 T - k \tilde{P}_{xy}$$

物理量 Kippenhahn-Schlieterius 法則: $\tilde{x} \tilde{P}^2 T - k \tilde{P}_{xy} = 0$

$$\text{I. 方程: } \partial = - \frac{d}{dx} (P + \frac{1}{m} B_x^2)$$

$$\partial = - \tilde{P} g + \frac{1}{m} B_x \frac{d B_x}{dx}$$

$$P = \frac{m P}{k_B T}$$

$$\frac{d}{dx} (K_1 \frac{d T}{d x} \frac{B_x^2}{B^2}) = \tilde{x} \tilde{P}^2 T - k \tilde{P}$$

$$\text{边界条件: } x = \pm \lambda_1, \tilde{x}^n, P = P_1, T = T_1 \quad (\lambda_1 = \frac{R T_1}{g} = \frac{R B T_1}{m f})$$

$$\text{补充条件: } \text{对称 } T_1, \text{ 对称 } x=0 \text{ 处, } B_x = \frac{d T}{d x} = 0$$

T. 不变: “未变”指温度上不变 (不变的 T_1 和 B_1)。典型值为: $T_1 = 2 \times 10^6 \text{ K}$,

$$P_1 = 1.67 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad (n_1 = 10^2 \text{ m}^{-3}, m_1 = 1.67 \times 10^{-2} \text{ kg}), \quad P_1 = 2.76 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-2}$$

$$g = 2.74 \times 10^3 \text{ m s}^{-2}, \quad \lambda_1 = \frac{R T_1}{g} = \frac{P_1}{P_1 g} = 6.02 \times 10^7 \text{ m}$$

II. 元素化处理

$$P = \bar{P} P_1, \quad T = \bar{T} T_1, \quad \rho = (\frac{P_1}{R T_1}) \bar{P}, \quad x = (\frac{R T_1}{g}) \bar{x} = \bar{x} \lambda_1, \quad \vec{B} = \bar{B} \vec{B}_1$$

$$\text{式中 } B_x = \bar{B}_x.$$

元素化处理方程化:

$$\beta \frac{d \bar{P}}{d \bar{x}} = - 2 \bar{B}_x \frac{d \bar{B}_x}{d \bar{x}} \quad ①$$

$$\frac{d \bar{B}_x}{d \bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}} \beta \bar{P} \quad ②$$

$$\bar{P} = \bar{P} \bar{T} \quad ③$$

$$\frac{d}{d \bar{x}} \left(\frac{\bar{T}^{5/2}}{\bar{B}^2} \frac{d \bar{T}}{d \bar{x}} \right) = C \bar{P}^2 \bar{T}^{\alpha} - C_1 \bar{P} \quad ④$$

$$K_0 = K_0 T^{5/2}, \quad \beta = \frac{2 K_0 P_1}{B_0} \quad (\text{是等高与密度随高度变化的水头修正系数})$$

8) 式的推导:

$$\frac{d}{dx} \left(K_{11} \frac{\bar{B}_x^2}{\beta_x^2} \frac{dT}{dx} \right) = \tilde{x} \bar{P}^2 T^\alpha - h \bar{P}$$

$\vec{B} = [B_0, B_y, B_z(x)]$, B_0, B_y 为常数 ($B_0 \ll B_x$)

$\vec{B} = B_0 \vec{B}$, $B^2 = B_0^2 + B_y^2 + B_z^2 = B_0^2 \vec{B}^2$, 且 $\vec{B}^2 = 1 + \vec{B}_y^2 + \vec{B}_z^2$

$K_{11} = K_0 T^{g_2}$

$$\frac{1}{\lambda_1} \frac{d}{dx} \left(K_0 T_1 \tilde{T} \frac{g_2}{\beta_x^2} \frac{B_0^2}{B_0^2 \vec{B}^2} \frac{dT}{dx} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \right) = \tilde{x} \left(\frac{P_1}{RT_1} \right)^2 \bar{P}^2 T_1^\alpha \tilde{T}^\alpha - h \left(\frac{P_1}{RT_1} \right) \bar{P}$$

$$\text{令 } C = \frac{\tilde{x} P_1^2 T_1^{\alpha-3.5}}{K_0 g_2} \quad (\text{辐射的系数为热传导系数之比})$$

C, 且 $\tilde{T} = \bar{P} = 1$ 时的 C 值, 且 $\tilde{T} = \frac{T}{T_1} = \bar{P} = \frac{P}{P_1} = 1$, $T = T_1$, $P = P_1$

P_1 为恒定值, T_1 为绝对温度 Milne's 问题和 $C = 1$ 时, $T_1 \geq 8 \times 10^5 \text{ K}$ 时, 辐射强度为 4, 根据对称性可知, 1 及 2 不受外磁场的影响, 在垂直于壁面 $x=0$ 处, 即 $\bar{x}=0$ 处, 有:

$$\bar{B}_z = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{at } \bar{x}=0 \quad (27)$$

$$\bar{P} = \bar{T} = 1 \quad \text{at } \bar{x}=1 \quad (x=1 \text{ 时}) \quad (27)$$

即水平方向离壁面 $x=0$ 距离 $|x|=1$, ($= k_B T / mg$). 1 为辐射强度, 且 $\bar{P} = 1$. $T_1 = 2 \times 10^6 \text{ K}$, 粒子数 10^{14} m^{-3} , 方程的物理量为 $\beta = \frac{2 \pi \bar{P}_1}{\bar{B}_x^2}$ 和 $\frac{B_0^2}{\beta_x^2}$ ($B_x = B_0$) 无关, 以及 β 与 x 的变化水平无关, 则 \bar{B}_z 为常数 (B_x), 且 \bar{B}_z 随 β 增加而增加, 保持等高, 气体密度不变, 变化 $\frac{\bar{B}_z}{\bar{B}_x}$ 等效于改变 \bar{B}_y 的方向. 从充气简化关系 $\vec{B} = \vec{B}_x \vec{B}$ 可知 $B_y = B_x \bar{B}_y$, 故 $\bar{B}_y = \bar{B}_x \bar{B}_y$, 由 (27) 式得 $\bar{B}_z = \bar{B}_y \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{x}} = \bar{B}_y \bar{B}_y = \bar{B}_y^2$ (27.9)

III. 特例 (半无限长壁)

由方程 (2) $\frac{d \bar{B}_z}{d \bar{x}} = \frac{1}{2} \beta \bar{P}$, 由 (2) 式代入: $\bar{T} \frac{d \bar{B}_z}{d \bar{x}} = \frac{1}{2} \beta \bar{P}$

上式对 \bar{x} 不变, $\frac{d}{d \bar{x}} \left(\bar{T} \frac{d \bar{B}_z}{d \bar{x}} \right) = \frac{d}{d \bar{x}} \left(\frac{1}{2} \beta \bar{P} \right) = \frac{1}{2} \beta \frac{d \bar{P}}{d \bar{x}}$

(2) 式代入上式左边, $\frac{d}{d \bar{x}} \left(\bar{T} \frac{d \bar{B}_z}{d \bar{x}} \right) = - \bar{B}_y \frac{d \bar{B}_z}{d \bar{x}}$

$$\frac{d}{dx} \left(\bar{T} \frac{d\bar{B}_3}{d\bar{x}} \right) + \bar{B}_3 \frac{d^2\bar{B}_3}{d\bar{x}^2} = 0 \quad (9)$$

待方程⑨：积分一次

$$\bar{T} \frac{d\bar{B}_3}{d\bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{B}_3^2 = C \quad (10)$$

不用选择常数C.

$$对⑩式积分: \bar{\beta} \bar{P} = -\bar{B}_3^2 + K$$

$$\bar{B}_3^2 = -\bar{\beta} \bar{P} + K$$

在 $\bar{x}=0$ 处, 有 $\bar{P} = \bar{P}_0 = \bar{P}(0)$ (注: 该条件应从边界条件中去掉)
在该条件下, $\bar{B}_3^2 = -\bar{\beta} \bar{P}$ (边值条件)

$$\therefore K = \bar{\beta} \bar{P}_0, \bar{B}_3^2 = -\bar{\beta} \bar{P} + \bar{\beta} \bar{P}_0 \quad (11)$$

$$(11) 式代入 (10) 式: \bar{T} \frac{d\bar{B}_3}{d\bar{x}} + \frac{1}{2} (-\bar{\beta} \bar{P} + \bar{\beta} \bar{P}_0) = C \quad (12)$$

在 $\bar{x}=1$ 处, 有 $\bar{T} = \bar{P} = 1$. 代入 (12) 式, 则有 $\bar{P} = 1$, (12) 式变为 $\frac{d\bar{B}_3}{d\bar{x}} = \frac{1}{2} \bar{\beta}$
(at $\bar{x}=1$), \therefore 在 $\bar{x}=1$ 处, (12) 式变为

$$\frac{1}{2} \bar{\beta} - \frac{1}{2} \bar{\beta} = C - \frac{1}{2} \bar{\beta} \bar{P}_0$$

$$\therefore C = \frac{1}{2} \bar{\beta} \bar{P}_0$$

$$(12) 式成为: \bar{T} \frac{d\bar{B}_3}{d\bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{B}_3^2 = \frac{1}{2} \bar{\beta} \bar{P}_0 \quad (13)$$

待求 (13), 令 $D^2 = \bar{\beta} \bar{P}_0$

$$\bar{T} \frac{d\bar{B}_3}{d\bar{x}} = -\frac{1}{2} \bar{B}_3^2 + \frac{1}{2} D^2$$

$$\frac{d\bar{B}_3}{D^2 - \bar{B}_3^2} = \frac{1}{2\bar{T}} d\bar{x}$$

$$\frac{1}{D} \tanh \frac{\bar{B}_3}{D} = \frac{1}{2} \int \frac{d\bar{x}}{\bar{T}} \quad (\because \bar{B}_3 < 0 \text{ 且 } D > 0)$$

$$\therefore \lambda(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{\bar{T}}$$

$$\tanh \frac{\bar{B}_3}{D} = \frac{D}{2} \lambda(\bar{x}) + H$$

$$at \bar{x}=0, \bar{B}_3=0, \lambda(0)=0 \therefore H=0$$

$$(1) \text{ 设 } \frac{\bar{B}_\delta}{D} = \tanh \frac{1}{2} D l(\bar{x})$$

$$\bar{B}_\delta = (\beta \bar{P}_0)^{1/2} \tanh \left[\frac{1}{2} (\beta \bar{P}_0)^{1/2} l(\bar{x}) \right]$$

(2) 则有 δ 的表达式。

$$\frac{B_\delta}{B_0} = \left(\frac{2\mu P_1}{B_0^2} \cdot \frac{P_0}{P_1} \right)^{1/2} \tanh \left[\frac{1}{2} (\beta \bar{P}_0)^{1/2} l(\bar{x}) \right]$$

$$B_\delta = (2\mu P_0)^{1/2} \tanh \left[\frac{1}{2} (\beta \bar{P}_0)^{1/2} l(\bar{x}) \right] *$$

$$(1) \text{ 由 Priest 式得 } l(x) = \frac{T_1}{\lambda_1} \int_0^x \frac{dx}{T}$$

由(1)式得：

$$\bar{P} = \bar{P}_0 - \frac{1}{\beta} \bar{B}_\delta^2$$

$$= \bar{P}_0 - \frac{1}{\beta} (\beta \bar{P}_0)^{1/2} \tanh \left[\frac{1}{2} (\beta \bar{P}_0)^{1/2} l(\bar{x}) \right]$$

$$= \bar{P}_0 \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} (\beta \bar{P}_0)^{1/2} l(\bar{x}) \right]$$

(3) 则有 δ 的表达式

$$\bar{P} = \bar{P}_0 \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} (\beta \bar{P}_0)^{1/2} l(\bar{x}) \right] *$$

由 \bar{P} 在 $x=0$ 时， $B_\delta(0)=0$ 知 δ 在 $x=0$ 时为零。即 δ 在 $x=0$ 时为零。

$$P = \rho R T, \Rightarrow P_1 \bar{P} = \frac{P_1}{R T_1} \bar{P} \cdot T_1 \bar{T} \cdot R \therefore \bar{P} = \bar{P} \bar{T}$$

又 $\bar{x}=1$ 时，有 $\bar{P}=\bar{T}=1$ 。 $\therefore \bar{P}(\bar{x}=1)=1$ 。代入 \bar{P} 表达式

$$1 = \bar{P}_0 \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} (\beta \bar{P}_0)^{1/2} l(1) \right]$$

$$\bar{P}_0^{1/2} = \cosh \left(\frac{1}{2} (\beta \bar{P}_0)^{1/2} l(1) \right) \quad (14)$$

$$\text{又 } \bar{P}_0^{1/2} = P_1^{1/2} \cosh \left[\frac{1}{2} (\beta \bar{P}_0)^{1/2} l(1) \right]$$

$$l(1) = \int_0^1 \frac{dx}{\bar{T}} = \frac{T_1}{\lambda_1} \int_0^1 \frac{dx}{T} \quad (l(x) = \frac{T_1}{\lambda_1} \int_0^x \frac{dx}{T})$$

因此常数 P_0 可以确定。

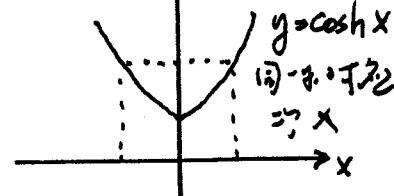
(14) 式为 \bar{T} 与 $\bar{x} = \cosh l(1)$ 的方程， $\bar{x} = \bar{P}_0^{1/2}$ ， $\lambda = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\beta}{P_1} \right)^{1/2}$ ，

得 λ_{\max} ，

i, 若 $\lambda < \lambda_{\max}$ ，有 $\bar{x} = \bar{P}_0^{1/2}$

ii, 若 $\lambda = \lambda_{\max}$ $\bar{x} = \bar{P}_0^{1/2}$

iii, 若 $\lambda > \lambda_{\max}$ $\bar{x} = \bar{P}_0^{1/2}$



入插脊泡 λ_{\max} 的情况. 质点运动

$$\cosh \lambda \beta = \gamma \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\beta} \cosh \lambda \beta = 1 \quad (2) \\ (\text{由式1, 可得质点速度表达式}) \end{array} \right.$$

$$\text{从(2)式解得: } \sinh \lambda \beta = \frac{1}{\lambda}, \quad \therefore \cosh \lambda \beta = (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \beta = (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{代入(1):}$$

$$\cosh[\lambda(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}] = \cosh(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} = \gamma$$

$$\cosh(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

λ_{\max} 为(3)式的解. 通过数字计算 $\lambda_{\max} \approx 0.66$

$$\text{前述 T(x). } L_1(\bar{x}=1) = \int_0^1 \frac{dx}{T} \Rightarrow L_1(x) = \frac{\pi}{\lambda_1} \int_0^x \frac{dx}{T(x)}, \quad \text{可得 } L_1(x=\lambda_1)$$

$$\text{根据 } \lambda = \frac{1}{2} L_1 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{对应于 } \lambda_{\max}. \quad \text{而 } \beta_{\max} = 4 \lambda_{\max}^2 \frac{P_1}{\lambda_1^2} \approx 1.74 \frac{P_1}{\lambda_1^2}$$

(P_1 为日落时的压强值). (当此有解时) 计算得 $\beta < \beta_{\max}$ 时, 有 $\beta \propto \sqrt{\frac{P_1}{P_0}}$. $\beta > \beta_{\max}$ 时, 无解
即加速度非单值的. 但 $\beta < \beta_{\max}$ 时, 有 $\beta \propto \sqrt{\frac{P_1}{P_0}}$.

特别地, 考虑到临界情况 $T = T_1$, 对(3)式: $\beta \frac{dP}{dx} = -2 \bar{B}_g \frac{dB_g}{dx} = \text{左边}$
从 $0 = \lambda_1$, 得到有重力的表达式.

$$\begin{aligned} P(\lambda_1) - P(0) &= -\frac{1}{2\mu} [B_g^2(\lambda_1) - B_g^2(0)] \\ &= -\frac{1}{2\mu} B_g^2(\lambda_1) \quad \because \text{对 } x=0 \text{ 时, } B_g(0)=0 \end{aligned}$$

$$\text{由式(4)有重力的表达式: } 0 = -\rho g + \frac{1}{\mu} B_0 \frac{dB_g}{dx} \quad (B_g = B_0)$$

$$\text{作差级数后有 } 0 \approx -\rho g + \frac{1}{\mu} \frac{B_0 B_g}{\lambda_1}, \quad \text{式中 } \lambda_1 = \frac{P_1}{P_0 g}$$

$$0 \approx -\mu \frac{\rho g}{P_0 g} P_1 + B_0 B_g \quad . \quad P_1 = P_0 R T_1 = P_0 R T_0, \quad \text{且} \quad$$

$$0 \approx -\mu \rho R T_0 + B_0 B_g = -\mu \rho + B_0 B_g$$

$$\therefore B_g = \frac{\mu \rho}{B_0}$$

代入 $P(\lambda_1) - P(0)$ 表达式:

$$P_1(\lambda_1) - P_0 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\mu^2 P_0^2}{B_0^2} = -\frac{1}{2} \frac{\mu P_1 P_0^2}{B_0^2 P_1} = -\frac{1}{4} \beta \frac{P_0^2}{P_1}$$

(β 的定义见 P.24)

$$4P_1^2 - 4P_1 P_0 = -\beta P_0^2 \Rightarrow \beta P_0^2 - 4P_1 P_0 + 4P_1^2 = 0$$

$$P_0 = \frac{2P_1}{\beta} [1 \pm (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}] \quad (11.42)$$

P_0 为中心 ($x=0$) 处的压强, 上式成立要求 $\beta < 1$

- 上述通过重力场的粗略近似也可被看作 β 大于某一大值时, 即 $\beta \gg 1$ 时, 只是 β_{max} 不同上述的 $\beta_{max} = 1.74 \frac{P_1}{B_0}$, 而是 $\beta_{max} = 1$ 时 β 是多少 ($\beta < 1$) 时, 才不成立:

$$\textcircled{1} \quad P_0 \approx \frac{2P_1}{\beta} [1 - 1 + \frac{1}{2}\beta] = P_1$$

$$B_0 = \frac{\mu P_0}{B_0} \approx \frac{\mu P_1}{B_0} = \frac{1}{2} \beta B_0$$

或者这样分析:

$$\textcircled{2} \quad P_0 \approx \frac{2P_1}{\beta} [1 + 1 - \frac{1}{2}\beta] \approx \frac{4P_1}{\beta}$$

$$B_0 = \frac{\mu P_0}{B_0} = \frac{4\mu P_1}{\beta B_0} = 2B_0$$

i. 当磁感应强度 $\frac{B_0}{B_0} \sim \beta^2$ (见①), $\beta \gg 1$. 有等高处压强 P_0 (中心) = P_1 (边缘). 或者有

ii. 当磁感应强度 $\frac{B_0}{B_0} \sim 1$ (见②), 等高处压强 $P_0 \sim \frac{1}{\beta}$ 很大.

许①才对于问题是很有用的偏高. 许②包括了更复杂的类型方程的解

i. 在太陽大氣中通常 $\beta < 1$, 考慮特別 $\beta (= \frac{2\mu P}{B_0^2 (\beta B_x)}) \rightarrow 0$, 則有 B_0 , 但 B_x 方向的磁場分量 $B_0 \rightarrow \infty$. 這令 $B_\beta = 0$, 壓強 $P = \text{常數}$. 印證因 $P = P_1$ (即 P 常數) Milne 給予方程(11.36)數值解表明: $\beta = 0$, $B_y = B_\beta = 0$ 即 $\bar{x} = 0$, 使得 x 有唯一值 x_1 位處 T_0 , 実際上 $T = T_1$ (即 T 常數) 的非等溫解 (即 $T_0 \neq T_1$), 諸高中心點的距離 $x = 7.6 \lambda_1$.

ii. 考慮 $\frac{B_y}{B_0}$ 的情形.

$$\because B^2 = B_0^2 + B_y^2 + B_\beta^2 = B_0^2 + B_y^2 = B_0^2 \left(1 + \left(\frac{B_y}{B_0} \right)^2 \right) = \text{const.} \quad (B_\beta = 0)$$

這次考慮化簡得 x' 的方程 (即 (11.36)), 得到 x' :

$$x' = \left[1 + \left(\frac{B_y}{B_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} x .$$

Milne 給予 (亦予圖 4) 有條件 B_y 成立, 可求 $x \rightarrow x'$. 所以為了便 $x = \lambda_1$, 令 $T = T_1$, 由 $x' = 7.6 \lambda_1$, 即可. 將 $x = \lambda_1$, $x' = 7.6 \lambda_1$ 代入 x' 的方程, 可求得 $\frac{B_y}{B_0} \approx 7.54$

iii. 以 \bar{x} 可以表示 諸高中心點的溫度 T_0/T_1 (即 T_0 時 $T = T_1$)
對於 \bar{T}_0

(由 X 軸表示), 可以求得 $\bar{x}_{T_1} (= \bar{T})$, 分別為 $1.0, 0.9, 0.8, \dots$
可見諸高中心點溫度低, 高中心速度高 ($\bar{x} = \frac{x}{\lambda_1}$), \bar{x} 大, 速度越快.

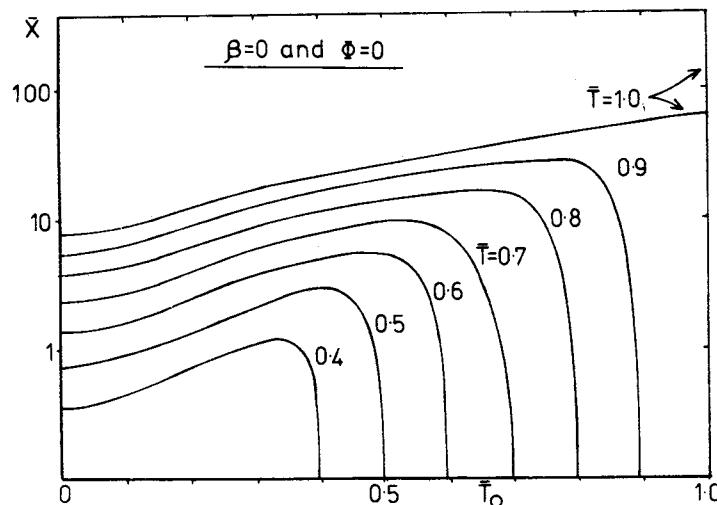


FIG. 4.—The value of \bar{x} at which the temperature T reaches $1.0, 0.9, 0.8, \dots$ as a function of the central temperature T_0 for the special case, $\beta = 0$, and $B_y = 0$. T is defined to be T/T_1 , where $T_1 = 2 \times 10^6$ K is the coronal temperature.

iv. 在中心区域下垂较少，当边缘处达到 $\bar{T}=1$ ，即 $\frac{T}{T_1}=1$ ， $T=T_1$ (指离圆周的任意点处)。离开中心的距离 $\bar{x} \approx 7.6$ ，设 $x \approx 7.6\lambda_1$ ，又 $\left[1 + \left(\frac{B_y}{B_x}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = x'$ 约 7.6， $\therefore \frac{B_y}{B_x} \approx 7.54$ ，剪切角 82.5° 。当 $\beta \rightarrow 0$ 时，剪切角 β 增大，剪切角 β 大于 82.5° 。

磁场有二作用：①反抗重力支撑物体，②水平方向的未物质。
当水平方向磁场 $B_0 (= B_x)$ 固定， β 就成了日冕高度的量度，存在着 β_{max}
即日冕有一个极大的气体压强 P ，如果日冕的气体压强超过 $max P$ ，磁
场将失去上述的作用。因为日冕的压强随高度而减少，因此，当 $\beta < \beta_{max}$
低于某一个值时形成。当磁场强度 B_x 大，允许的 P 极大值可以更大
(假设同样的 β_{max})，这表明可以在较低的压强时形成 (\because 允许的压强大)
宇宙暗带对离子束的阻力。

v. $\beta_{max} \approx 1.7$

宇宙暗带		运动区	
B	$1-10 G$		
$max P$	$6.6 \times 10^{-3} - 6.7 \times 10^{-1} N m^{-2}$		$66 N m^{-2}$
h_{min}	$4 \times 10^4 - 8.4 \times 10^5 km$	运动区中部	

vi. 像物 P 固定， β_{max} 对应于 $min B_x$ ，当 $B_x < min B_x$ ，磁场就不再能
支撑住等离子体，等离子体就沿着磁力线下垂，生成“flip”(feet)，简化
宇宙暗带中型态 [3]。

vii. 剪切是一个严重问题，增加剪切 ($B_y \uparrow, B_x \downarrow$)，想像等离子 $\frac{B_x^2}{B^2}$
 $= \frac{1}{1 + \left(\frac{B_y}{B_x}\right)^2 + \left(\frac{B_z}{B_x}\right)^2}$ 下降，传入的能量减少，因此要等到没有冷却 (加热)
可以计算时，温度不升，当剪切过大时，尚未进加热，而剪切的压强
必须减小，同时磁力线上弹弓效应增高爆发。

将来可以展开的研究工作：①考虑：准线、准流、环流、 $x=1$ ，
又 x 的边界条件，(即为是否清楚那两个条件是否可合并在一个方程中)
以及某些磁场情形和磁流相匹配。②更仔细地考虑辐射损失和加热，但是
期望条件的各特性的详细研究。③对于暗带内，外磁场情况加以更多的

观测到，从而暗带特征随剪切，水平磁场强度的变化可与理论相比较。

11.2.3 磁场

Anzer (1972) 的模型：磁场是圆的暗带，认为暗带是无限薄的电流片，从原点沿子午线（垂直方向）延伸至 $H \approx 1$ (参见 11.2). 假定周围一切在子午面上，问题就简化为一维场。 $\therefore \nabla \times \vec{B} = 0$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B} = 0$$

问题归结为求解方程 $\nabla^2 \vec{B} = 0$ (11.43)

X-子午面中的一维场

边界条件：

$$B_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x=0 \text{ 和 } \bar{z} > H \text{ 时} \\ 0 & \text{若 } \bar{z}=0 \text{ 且 } x > \sqrt{a} \text{ 时} \\ f(x) & \text{若 } \bar{z}=0, 0 \leq x \leq \sqrt{a} \text{ 时} \end{cases}$$

Anzer 的解为：
 $x > a,$
 $0 \leq x \leq a,$
 $0 \leq \bar{z} \leq a, (a=H)$

$$B_x = g(\bar{z}), \quad \text{若 } x=0, 0 \leq \bar{z} \leq H \quad (11.44)$$

函数 $g(\bar{z})$ 可通过观测太阳黑子的日期而确定。 f 可以对光球上位于太阳中心 $(0,0)$ 处的暗带近似地由 $1/a$ 而推得 (假设暗带从太阳中心延伸到中心，条件保持不变)。

我们用通量法求未知数 B_y . $B_x = \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}$ (10.26)

方程式，写出

$$B_x = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \quad B_y = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (11.45)$$

问题归结为确定 $(u+iV)$ 作为 $(x+i\bar{z})$ 的解析函数。若 $x-\bar{z}$ 平面上有一条 Γ_{ab} ，在子午面上， $0 \leq H$ 时，规定 $V=0$ 。若 x 和 \bar{z} 平面上其余部分， u 取常数值。现在问题归结为求解方程 $\nabla^2 u = 0$ ，若 $\bar{z}=0, x \geq 0$ 时和 $x=0, x \leq H$ 时为 u 给定。若 $x=0, H < \bar{z}$ 时， $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 。通过复变函数求解。

在复平面上 $\zeta = \bar{z} + i\eta$ 上，寻找复函数 $U(\zeta) = u(\bar{z}, \eta) + iV(\bar{z}, \eta)$ 对于 $\eta > 0$ 是解析的，满足边界条件。

$$U^+(\zeta, 0) = f(\bar{z}), \quad a \leq \bar{z} \leq b, \quad \zeta \in I_{ab}$$

$$V^+(\zeta, 0) = g(\bar{z}), \quad \begin{array}{l} \bar{z} < a, ? \\ \bar{z} > b, ? \end{array} \quad \zeta \in \bar{I}_{ab}$$

Complement

$$\begin{aligned} \zeta &= \bar{z} + i\eta \\ \zeta' &= \sqrt{\zeta} \\ x + i\bar{z} &= \zeta' \end{aligned}$$

$u = 0$, for $\xi > a$.

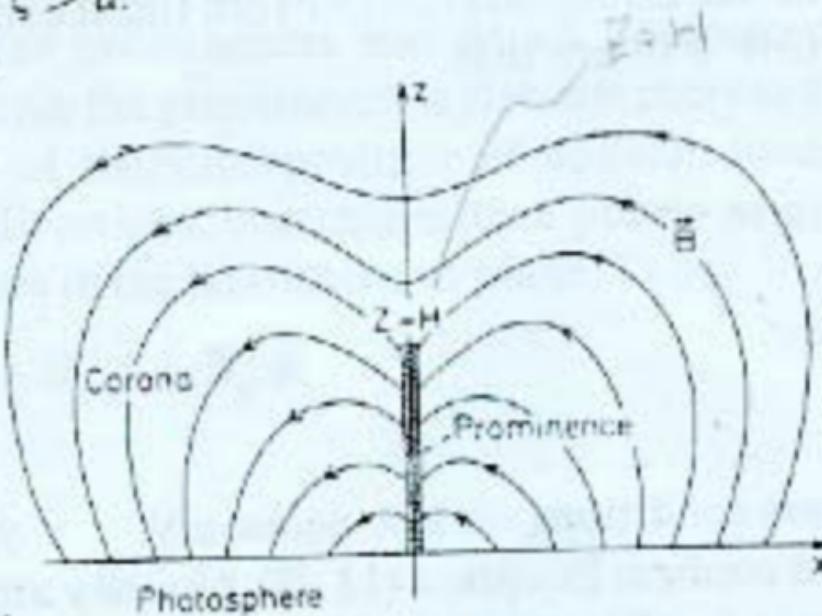


Fig. 11.12. A two-dimensional model of the magnetic field in the neighbourhood of a quiescent prominence (from Anzer, 1972).

Priest 把边界条件写成正负形式，之后推导

$$v=0, \quad \text{if } \xi < h = -H^2$$

$$u = f(\xi) \quad \text{if } h < \xi < a$$

$$\kappa = 0 \quad \text{if } \xi > a$$

Priest Anger

$$(h \rightarrow a, a \rightarrow b)$$

(\bar{I}_{ab} 为 ξ 在 (a, b) 间的积分)

Muskhelishvili: 特别问题的解法

$$\bar{\pi}(\xi) = u + iv = \frac{1}{\pi i} \frac{(\xi-a)^{\frac{1}{2}}}{(\xi-b)^{\frac{1}{2}}} \int_R \frac{(t-b)^{\frac{1}{2}} h(t)}{(t-a)^{\frac{1}{2}} (t-\xi)} dt + C \frac{(\xi-a)^{\frac{1}{2}}}{(\xi-b)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{其中 } h(t) = \begin{cases} f(t) & t \in \bar{I}_{ab} \text{ 且 } a \leq t \leq b \\ i g(t) & t \notin \bar{I}_{ab} \text{ 且 } t < a, t > b \end{cases}$$

ξ 为实轴， C 为任意常数。一般 $\xi \rightarrow (\xi + i\eta) \rightarrow a$ 时， $\bar{\pi}$ 有限。但 $\xi \rightarrow b$ 时， $\bar{\pi}$ 发散。
（为什么？）

$$C = -\frac{1}{\pi i} \int_R \frac{h(t)}{(t-a)^{\frac{1}{2}} (t-b)^{\frac{1}{2}}} dt$$

i) $\xi \rightarrow b$ 时， $\bar{\pi}$ 亦为有限。于是有

$$\bar{\pi}(\xi) = \frac{1}{\pi i} (\xi-a)^{\frac{1}{2}} (\xi-b)^{\frac{1}{2}} \left(\int_R \frac{h(t)}{(t-a)^{\frac{1}{2}} (t-b)^{\frac{1}{2}} (t-\xi)} dt \right)$$

ii) 取 $b \rightarrow \infty$ 时， $f(t) \equiv 0$ ，($t > a_1$)

$$\{ f(t) \neq 0 \quad (a \leq t \leq a_1) \}$$

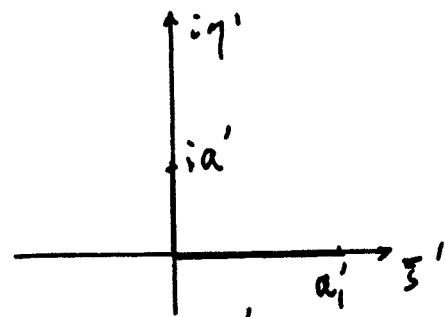
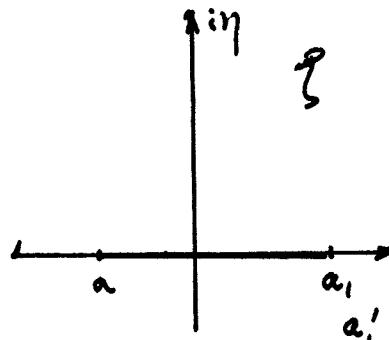
$$\bar{\pi}(\xi) = \frac{1}{\pi i} (\xi-a)^{\frac{1}{2}} \int_R \frac{f(t)}{(t-a)^{\frac{1}{2}} (t-\xi)} dt \quad (11.46)$$

[注意到 a 附近 $f(t)$ 为有限， $f(t)$ 为 t 的 $\bar{F}(t)$]

若 $t < a$ (大半圆弧可略去取，突出部分上半圆弧上 $t < a$ ， $t < a$ 时 $\xi < h = -H^2$) 且 $g(t) \equiv 0$ (此时 $V=0$)， $\bar{\pi}$ 为

$$\bar{\pi}(\xi) = u + iv = \frac{1}{\pi i} (\xi-a)^{\frac{1}{2}} \int_a^a \frac{f(t)}{(t-a)^{\frac{1}{2}} (t-\xi)} dt$$

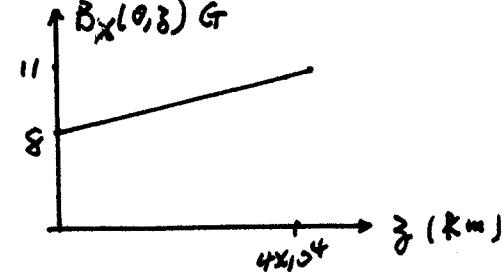
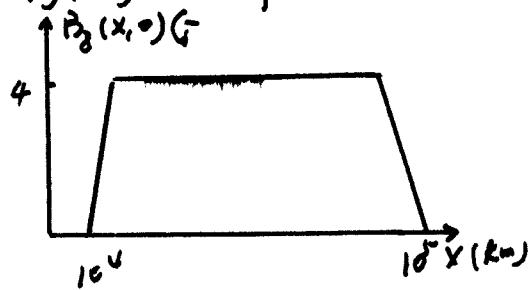
利用保角变换 (Conformal Transformation) $\zeta' = \bar{f}(\bar{\zeta})$



$$\bar{\zeta}'(\zeta') = \frac{1}{\pi i} (\zeta'^2 - a'^2)^{-1/2} \left\{ \int_{a'}^{\zeta'} \frac{f(\tau^2) \tau d\tau}{(\tau^2 + a'^2)^{1/2} (\tau^2 - \zeta'^2)} + \int_0^{a'} \frac{f(-\tau^2) \tau d\tau}{(-\tau^2 + a'^2)^{1/2} (-\tau^2 - \zeta'^2)} \right\}$$

代入再整理 $(x-\bar{z})$ 里面，可求得 u . 通过 u 就可求出 B_x, B_y . 具体计算可参考 Anzer (1972) \hookrightarrow 附录数

Anzer 2022-11-11 例题的解答
平均磁场强度为 $4G$ 。对 x 有 $\mu_0 H = 4G$ ，即 $H = 40,000 \text{ nT}$
起过该距离，设为 0 ，即 $0 \leq x \leq a_1 = 10^5 \text{ km}$, $f(x) = 4G$, $x > 10^5 \text{ km}$, $f(x) = 0$



对太阳边缘的磁场强度如图表示，磁场强度随 x 增加，因此可先取平行运动强度为 $8G$ ，线性增加，到 $4 \times 10^4 \text{ km}$ 时到达最高点，进而增加到 $11G$

无限薄的电流片位于 $x-z$ 平面内，厚度为 d (平行方向)，电流片内存电流在 y 方向 j_y . 无限薄片内的面电流可写成 $J = \lim_{d \rightarrow 0} j_y d$. Lorentz 力：

$$\bar{F}_L = \lim_{d \rightarrow 0} j_y d B_z = J B_{x0} \quad (11.47)$$

$$\mu_0 j_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial x} \approx - \frac{B_{zd}}{\frac{1}{2} d}, \quad B_{zd} \approx x = \frac{1}{2} d \text{ 附近 } B_z.$$

$$J = \frac{2 B_{zd}}{\mu} \quad (\text{通过面电流} \rightarrow \text{电流} J, B_{zd} \text{ 由方程解得})$$

薄片厚度为 d , $x = -\frac{1}{2} d$ 和 $x = +\frac{1}{2} d \rightarrow B_{zd} d$ 为常数，则 J 为常数，和 $\frac{1}{\mu}$ 成正比 ($x \ll 2 \sim 3 B_x$)。

$$\bar{F}_L = \frac{1}{\mu} 2 B_{zd} J B_{x0}$$

Anger 通过证明, 对于 $z \geq 17000 \text{ km}$, Lorentz 力大于重力, 可以支撑而带电
 $n d \approx 1.8 \times 10^{-4} \text{ m}^{-2}$ (带密度) 的等离子体。而对于 $z < 17000 \text{ km}$, Lorentz 力
 为负, Anger 通过 $\frac{d\vec{B}}{dt}$ 的符号和等离子体的符号, 可能的解决方法是化简
 上述等式并底部修正, 低于该位置, $B_z = 0$ 。

11.2.4 磁流体力学稳定性

Anger (1969) 利用能量原理研究 Kippenhahn-Schlüter 模型的稳定性。
 把等离子体看作垂直的等离子体片, 电子方向, 周波为 ω , 电流 $J = \frac{eB_0}{\mu}$
 (电子方向), 当 $\omega \rightarrow 0$, 由扰动引起的等离子体为:

$$\delta W = \frac{1}{2} \iint (J \frac{dB_{x0}}{\partial z} \bar{x}_x^2 - B_{x0} \frac{dJ}{\partial z} \bar{x}_x^2) dy dz + G$$

G 为 δW 表达式中的其余项, 为正。

系统稳定的充分条件是 ($\delta W > 0$)

$$J \frac{dB_{x0}}{\partial z} \geq 0 \quad (11.48)$$

$$B_{x0} \frac{dJ}{\partial z} \leq 0 \quad (11.49)$$

Anger 通过证明上述条件也是必要条件。

现将(11.48)和(11.49)代入(11.47)式进行证明。利用(11.49)式之后成立的过程将复杂
 不过可得一些推论。例如:

1. 带电等离子体仅由 Lorentz 力支撑。即

$$\rho_0 g = B_{x0} J \quad (11.50)$$

(J 为电流, ρ_0 为密度)

(11.50) 式左边是正, $\therefore B_{x0} J > 0$, 表明 B_{x0} 和 J 的符号相同。结合
 (11.49) 式, 有 $J \frac{dJ}{\partial z} \leq 0$, $\frac{dJ}{\partial z} \leq 0$, (因此对于稳定的等离子体 (因为已证明))
 了稳定性条件(11.49), 电流的值随高度而减小。

2. (11.50) 式关于 z 不变

$$\frac{dP}{dz} dz = J \frac{dB_{x0}}{\partial z} + B_{x0} \frac{dJ}{\partial z}$$

根据(11.48)和(11.49)式, 左边二项的符号相反, 因此等离子体中的总压 P

有可能随角度增加而减少，或随角度增加而增加，取决于哪一次的斜坡地。

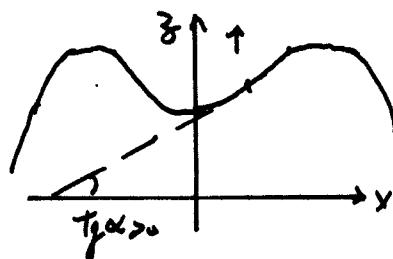
3. 假设 B_{x0} 和 \bar{J} 均为常数（不共一极性），且斜坡带边缘 $x = \frac{1}{2}d$ 处的 B_x 为 B_{xd} ， \bar{J} 为 \bar{J}_{xd} 时也成立，则由 $B_{x0} \approx B_{xd}$ ，(11.48) 式表示 $\frac{\partial B_{xd}}{\partial \bar{J}} > 0$ 。
($\because \bar{J}$ 为正)。进一步假设斜坡带外的场是无场的（势能 $\psi = 0$)

$$\therefore \text{在 } \hat{y} \text{ 方向: } \frac{\partial B_{xd}}{\partial x} - \frac{\partial B_{xd}}{\partial \bar{J}} = 0 \quad (\nabla \times \vec{B} = 0)$$

$$\therefore \frac{\partial B_{xd}}{\partial \bar{J}} > 0, \therefore \frac{\partial B_{xd}}{\partial x} > 0$$

对于 \bar{J} 增加的情形， B_x 随 x 增加，而外部磁场线向右弯曲，凸面向上。

对于斜坡的研究，考虑到斜坡的内部场不同，外部磁场高，以及斜坡带外场的固有场，试图对斜坡带的全貌进行分析是重要的。这方面的工作已很多，Brown 已考虑纯水平或比重直带的传播，Nakagawa 通过水峰剪切波的研究。



11.2.5 螺旋结构 (Helical structures)

Anger 和 Tandberg-Hanssen (1970) 提出一个简单模型来描述某些暗带中可能存在的螺旋结构。这种结构在爆发时可以看见 (图 1.33)。Anger 等认为这种结构在宁静日珥和喷发带中也是常见的。在 1970 年时代 [注] 仅见于部分日珥，不认为年轻螺旋结构存在，形状要突显些，日珥的磁场往往不清楚。

宁静日珥带螺旋化 / 盘旋 / 旋转

[注]: 盘旋: - 位于暗带上方 (活动区流位于流动区上方), 由磁力线闭合底部 (或磁环) 及覆盖其上的开放磁力线构成, 以侧向者为宜, 从底端看头部, 磁力线闭合区域的等高线是螺旋形的, 一旦打开了磁力线时, 就有盘旋产生。

盘旋上部以壳球状起一个或多太阳半径处, 磁场主要往向 12 度低高度处, 在太阳边缘上约 5000 公里处, 他们假设暗带中心是由水平约束支撑的。

$$\vec{B}_0 = (B_x^0, B_y^0, 0) \quad ①$$

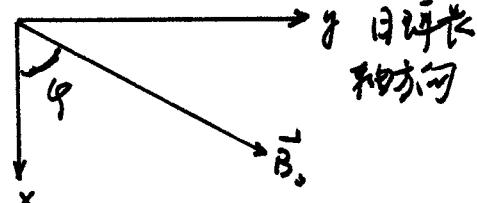
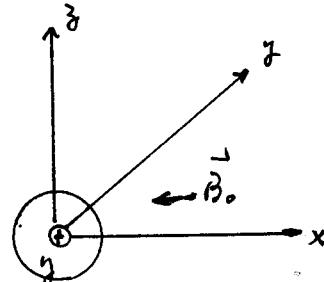
x 轴: 水平方向, 垂直日珥的长轴, y 轴: 日珥方向, 日珥为圆柱, 半径 R, z 轴: 垂直方向, 与 Kippenhahn-Schlüter (1957) 模型相反, 则认为设为沿暗带日珥的轴的方向为 z 轴。

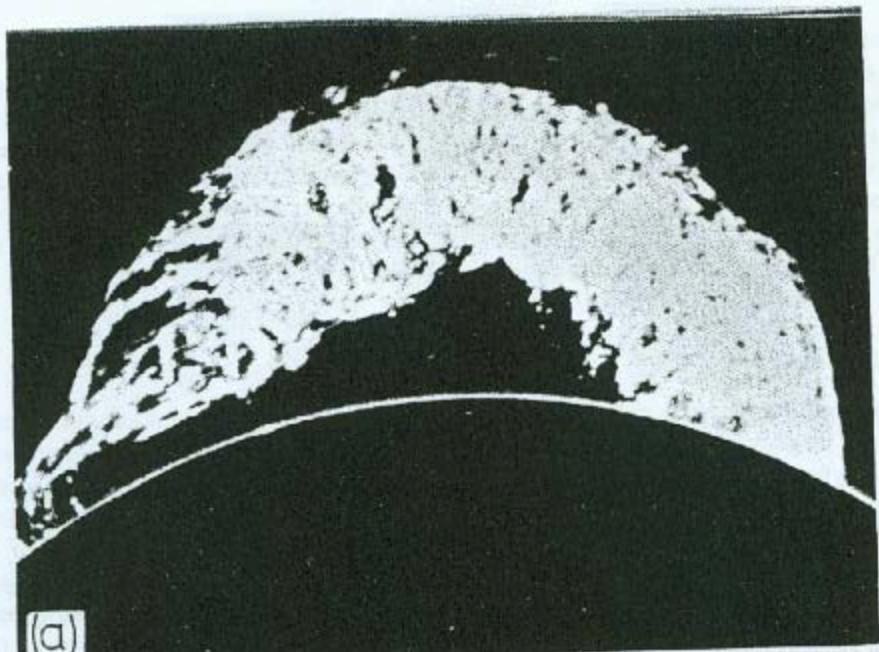
日珥中有电流 $\vec{j} = (0, j_y, 0)$ 作用于流动, 应该是磁场 \vec{B} , 再假设引力和 Lorentz 力平衡, 这样就是可逆运动, 但有助于表达磁偏转的运动方程, 这是 Anger 等人的主要目的。

磁偏转的计算:

假设所有磁偏转都与无关, 分量成正交, B_0^y 的所有分量都用 B_x^0 表示, q : x 的磁场方向夹角

$$B_y = B_x \tan \varphi$$





4 JUNE, 1946

HIGH ALTITUDE OBSERVATORY

SOLAR PROMINENCE

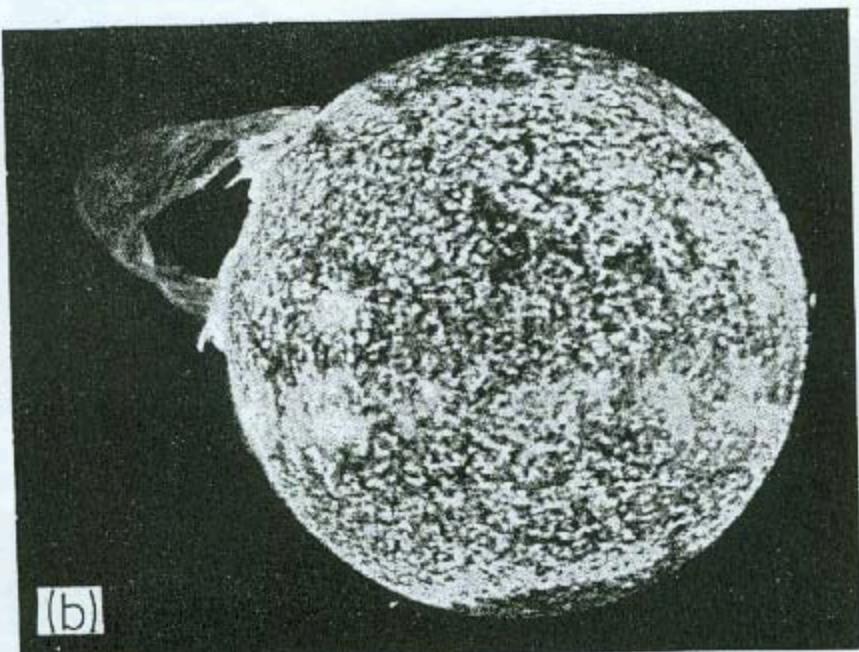


Fig. 1.33. Examples of erupting prominences: (a) 4 June 1946 in H α (courtesy G. Newkirk, High Altitude Observatory), (b) 19 December 1973 in He II 304 (courtesy R. Tousey, Naval Research Laboratory).

$$\vec{B}_0 = (B_x^0, B_y^0, 0) = (B_x^0, B_x^0 \tan \varphi, 0)$$

$$= B_x^0 (1, \tan \varphi, 0) \quad \textcircled{2}$$

恒定电流的分布为

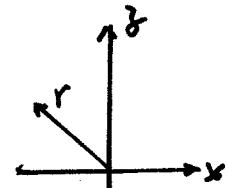
$$j_y = \begin{cases} j_0 & \text{if } r \leq R \\ 0 & \text{if } r > R \end{cases} \quad \textcircled{3}$$

j_0 为常数，圆环中的总电流 $I = \pi R^2 j_0$. $\textcircled{4}$

$$\text{若无铁磁质, } B_{1\phi} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & \text{if } r \leq R \\ \frac{\mu I}{2\pi r} & \text{if } r > R \end{cases} \quad \textcircled{5}$$

上述表达式中 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. 也可改写为

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 j_0}{2} \begin{cases} (0, 0, -x) & \text{if } r \leq R \\ \left(\frac{x^2}{r^2} \hat{x}, 0, -\frac{x^2}{r^2} x\right) & \text{if } r > R \end{cases} \quad \textcircled{6}$$



$$\frac{\mu I}{2\pi r} = \frac{\mu j_0 \pi R^2}{2\pi r^2} \cdot r = \frac{\mu j_0}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} \hat{x}, 0, -\frac{R^2}{r^2} x \right), (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \text{ 和 } (\vec{B}_1, \hat{\phi})$$

$$\text{引入无量纲量: } \hat{x} = \frac{x}{R}, \hat{y} = \frac{y}{R}, \hat{z} = \frac{z}{R}, \hat{r} = \frac{r}{R}, \hat{B}_1 = \frac{\vec{B}_1}{B_x^0}.$$

$$\text{定义无量纲参数 } C = \frac{\mu j_0 R}{2 B_x^0} = \frac{\mu I}{2\pi R B_x^0} \quad \textcircled{7}$$

即圆环中的电流和 $r=R$ (边缘) 处产生的磁感应强度 $B_{1\phi}$ 与无量纲参数 C 的关系 $B_1 = C \hat{B}_1$.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1, \quad \hat{B} = \frac{\vec{B}}{B_x^0}. \quad \textcircled{8}$$

利用对称性分析 $x-y$ 平面上的矢量场分布.

利用通量法计算磁力线. Ampere 定理表达式为

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = \int_{\text{闭合回路}} \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} \quad (= \int \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{l}) \quad \textcircled{9}$$

$d\vec{s}$ 为 L 上的线元, \vec{l} 为 L 的积分路径.

\rightarrow [Ampere 定理中的该式 \vec{A} 应该是通量, 而是电流] $\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \approx \int \vec{j} \cdot d\vec{s} = I$

$$1' \text{ 且 } \bar{F}(\hat{x}=0, \hat{y}=0) = 0. \text{ 且 } \bar{f} = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 \quad (1)$$

$$\beta'_x = \frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \hat{y}}, \text{ 且 } \beta'_y = \frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \hat{x}}, \therefore \bar{f}_0 = \hat{y} + K \quad (K \text{ 为任意常数})$$

$$\therefore \text{且 } \bar{F}(\hat{x}=0, \hat{y}=0) = 0. \text{ 可得 } K=0$$

$$\bar{f}_0 = \hat{y}$$

$$\text{利用(2)式, 得 } \hat{\beta}_{1x} = -C\hat{y}, \quad \hat{\beta}_{1y} = \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \hat{x}}, \text{ 且 } \bar{f}_1 \text{ 有, 有}$$

$$\bar{f}_1(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{C}{2}\hat{y}^2 + M(x)$$

$$\therefore \hat{\beta}_{1y} = -\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \hat{x}}, \text{ 由(2)式, } \hat{\beta}_{1y} = C\hat{x}, \text{ 代入 } \bar{f}_1(x, y) \text{ 表达式, 得}$$

$$-C\hat{x} = \frac{\partial M(x)}{\partial x}$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}C\hat{x}^2 + Q$$

$$\text{且 } \hat{x}=0 \text{ 时, } M(\hat{x})=0, \therefore Q=0$$

$$\bar{f}_1(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{C}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) = -\frac{C}{2}\hat{r}^2 \quad (\hat{r} \leq 1) \quad (1)$$

2. $\hat{r} > 1$.

$$\text{根据(2)式, 可得 } \hat{\beta}_{1x} = -C\frac{\hat{y}}{\hat{r}^2}, \quad \hat{\beta}_{1y} = C\frac{\hat{x}}{\hat{r}^2}.$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{1x} = \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \hat{y}} \Rightarrow \hat{\beta}_{1x} = \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \hat{y}} \Rightarrow \bar{f}_1 = -C \int \frac{\hat{y}}{\hat{r}^2} d\hat{y} = -C \int \frac{1}{2} \frac{\partial(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)}{\hat{r}^2} \\ = -\frac{1}{2}C \ln \hat{r}^2 + M'(x), \text{ 代入 } \hat{\beta}_{1y} \text{ 和式} \end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_{1y} = C\frac{\hat{x}}{\hat{r}^2} = -\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \hat{x}} = -\left[-\frac{1}{2}C\frac{1}{\hat{r}^2} \cdot 2\hat{x} + \frac{\partial M'(x)}{\partial x}\right] = C\frac{\hat{x}}{\hat{r}^2} - \frac{\partial M'(x)}{\partial x}$$

$$\therefore C\frac{\hat{x}}{\hat{r}^2} = C\frac{\hat{x}}{\hat{r}^2} - \frac{\partial M'(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M'(x)}{\partial x} = 0, \quad M'(x) = \text{const.} \quad (\text{设 } x \in \mathbb{R}) = N$$

$$\text{已求得 } \bar{f}_1 = -\frac{1}{2}C \ln \hat{r}^2 + N$$

$$\text{且 } \hat{x}=1, \hat{y}=1, \text{ 且 } \hat{r}=1 \text{ 时. 由表达式(1). "已知" } \bar{f}_1(\hat{x}=1, \hat{y}=1) = -\frac{C}{2} \\ \text{代入 } \hat{r} > 1 \text{ 时, } \bar{f}_1 \text{ 和式, 得 } N = -\frac{1}{2}C$$

$$\therefore \hat{r} > 1 \text{ 时. } \bar{f}_1 = -\frac{1}{2}C[1 + \ln \hat{r}^2]$$

$$\bar{F}_1 = -\frac{C}{2} \begin{cases} \hat{r}^2 & \hat{r} \leq 1 \\ 1 + \ln \hat{r}^2 & \hat{r} > 1 \end{cases}$$

[矢势 \vec{A} 和磁通量的连接，通过比较：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I \Rightarrow B_\varphi \cdot 2\pi r = \mu I, B_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (\text{对 } \hat{r} \text{ 为常数})$$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \bar{I} \Rightarrow A_\varphi \cdot 2\pi r = \bar{I}, A_\varphi = \frac{\bar{I}}{2\pi r}$$

计算得： $B_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial (A_\varphi r)}{\partial r}$

$B_\varphi r dr = \partial (A_\varphi r)$, 即边界的：

$$\int B_\varphi r dr = \int \partial (A_\varphi r) = 2\pi A_\varphi r$$

注意， A_φ 与 B_φ 对应，而 $A_\varphi = \frac{\bar{I}}{2\pi r}$ 的通量在
右侧关，此才使得 $B_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi r}$ 。不通过右侧， B_φ
将倒转-2倍的 r 时变为 $-B_\varphi$ 。这其中的 \bar{I} 与 I 中的 I 不同。

利用此式： $B_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial x} \Rightarrow B_\varphi dx = dA \Rightarrow B_\varphi dx dy = dA dy$

$\rightarrow A = A_y - A_y dy$ (2.13) → 磁通量由磁力线的闭合度决定。A 与 \bar{I} 不同

$\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{F}_1$ 代表磁力线 (2.3)，磁力线密度过代表磁场强度。

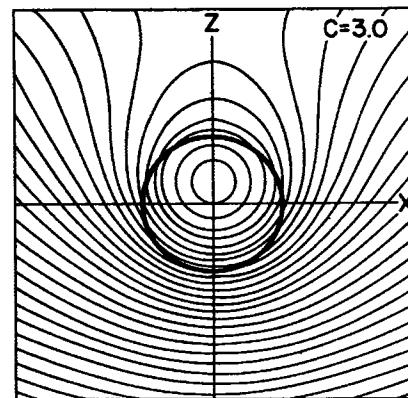
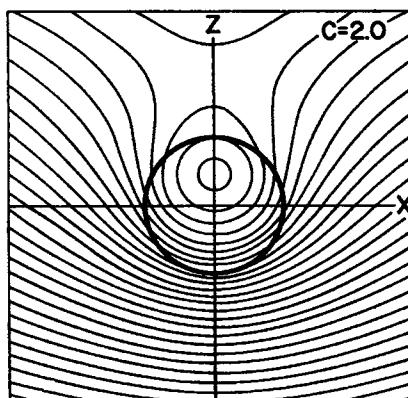
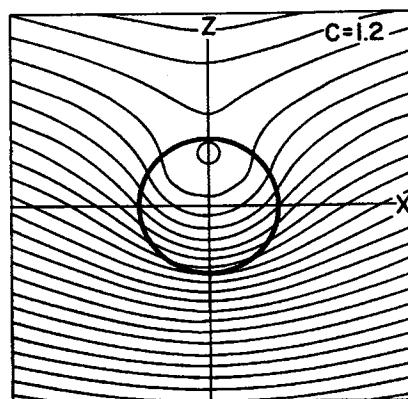
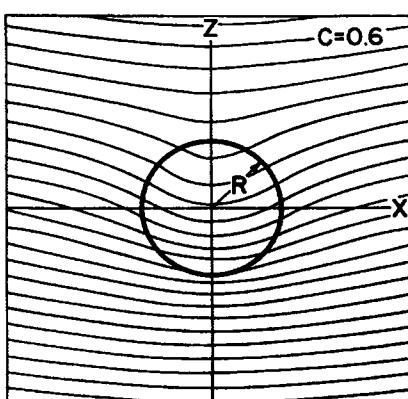


Fig. 3. Projection of the magnetic field lines in the x - z plane in and around the model prominence (heavy circle), for different values of the parameter C .

取值 $C: 0-1$ 之间, 磁力线开放

$C > 1$ 封闭的磁力线越来越多.

因为我们假设 B_0 有分量, 所以在南北端会封闭的磁力线, 实际上为南北轴的螺旋.

11.3 对称螺线场和磁位形的支持

11.3.1 电流片的支持.

Kuperus 和 Raadu (1974) 考虑电流片中形成的磁位和支持问题. 按照模的方程应当导致电流暗带 (current filament) 形成.

(参见 11.3.2), 电流暗带位于中性片中, 电流从底面向内流动, 支撑力来自

电流片 (即磁力线)
Lorentz 力, 向上 (参见 11.3.6). 这种位形可以看作电流片的垂直方向的场
和电流暗带的场迭加. 电流暗带由一系列闭合的磁力线构成.
电流暗带的场又可看作是平行电流产生的场, 即类似于运动在处
的电流 I 和是垂直于 I 处的电流 I . 支撑力就是源电流的排斥力
(电流方向相反, 并且平行)

二根无限长的平行导线间的相互作用力.

导线①在导线②处产生的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi r}, \text{ 方向从底面向内, } \uparrow$$

导线②的一段 dL_2 受到的力的大小为

$$\bar{F}_{12} = I_2 dL_2 B_1 = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r} dL_2$$

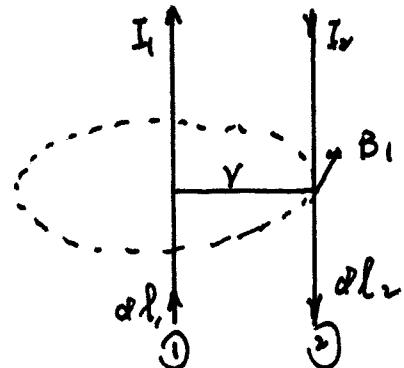
反过来, 导线②产生的磁感应作用在导线①的一段 dL_1 上的力的大小为

$$\bar{F}_{21} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r} dL_1$$

导线单位长度上的作用力大小为 $f = \frac{\bar{F}_{12}}{dL_2} = \frac{\bar{F}_{21}}{dL_1} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r}$

当 $I_1 > I_2 = I$, $r = 2h$ 时, 作用在南北两个的电流暗带的力为 $\frac{\mu I^2}{4\pi h}$

是并行的方向. 记为 B_{sp} , 由 $B_{sp} = \frac{\mu I}{2\pi r}$, 得出 $I = \frac{2B_{sp}\pi r}{\mu}$. 这个力因
为电流方向相反, 大小为, 可正支撑.



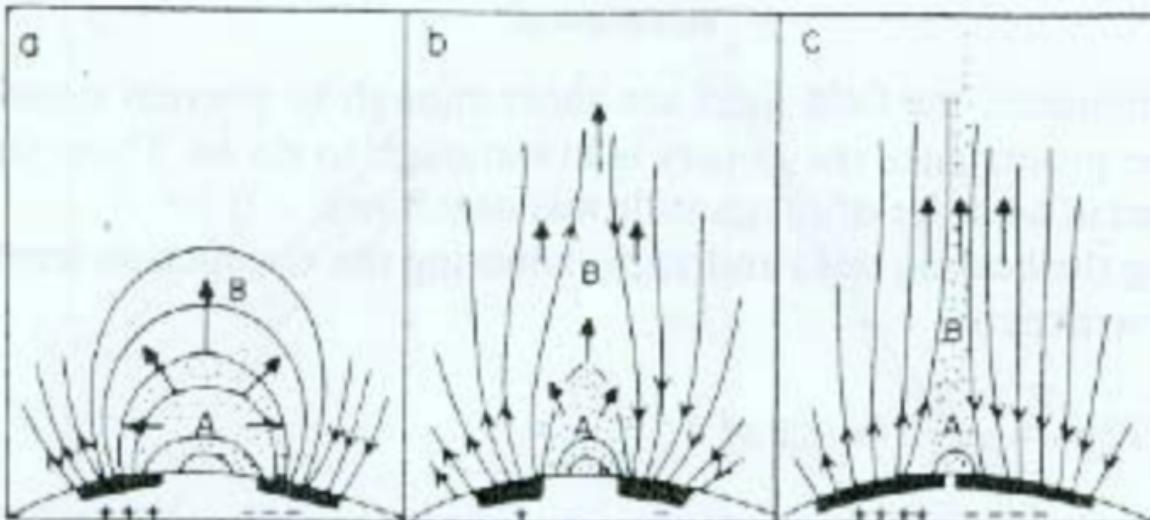


Fig. 11.5. Prominence formation in a current sheet: the magnetic field overlying an active region during (a) the early phase of activity; (b) the main phase of activity; (c) the post-active stage (from Kuperus and Tandberg-Hanssen, 1967).

current filament embedded
in a neutral sheet \rightarrow

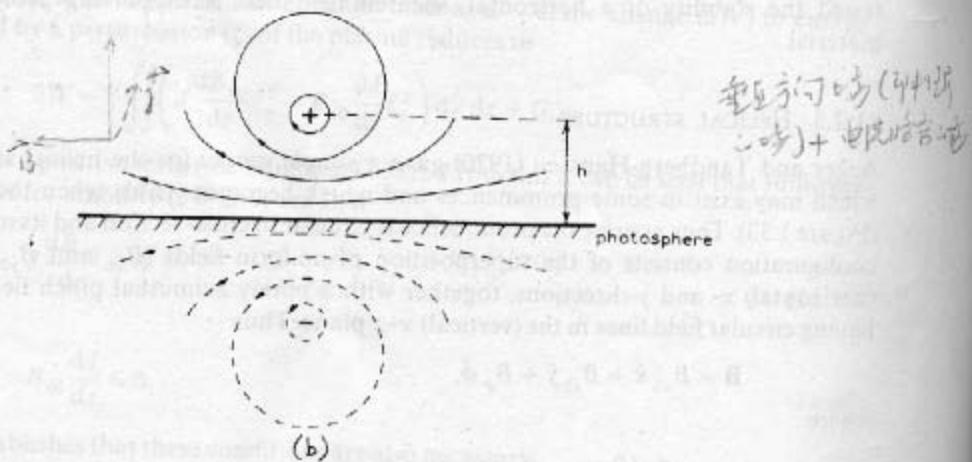
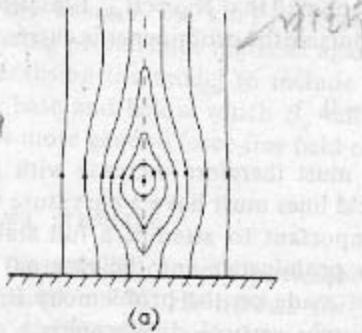


Fig. 11.13. The support of a prominence formed in a current sheet. (a) The magnetic field configuration due to a current filament in a neutral sheet. (b) The field (solid) due to a filament located a distance h above the photosphere (from Kuperus and Raadu, 1974).

电流时若单位长度的厚度为 $m = \pi r^2 \rho$, 平衡时有

$$\frac{mI^2}{4\pi h} = mg \quad (11.51)$$

将 I 的表达式代入，式中的 m 和式中的 r 均用 h 代入，得

$$\frac{B_p^2}{\mu h} = \rho g \quad (11.52)$$

$\rho: 10^{-10} \text{ kg m}^{-3}$, $h: 10^4 \text{ km}$, 我算的 $B_p \approx 6 \text{ G}$. 可见合理.

为证明上述模型的可行性，必须根据穆斯卡特模型进行计算。一个简化的原则是：等离子体应沿一弓形面，充满附近的所有空间而平行于中性片方向倾斜，而不是离开中性片而崩塌。从图 11.3(a) 等离子体被压缩到电流片的底部，该处电流密度应沿一封闭磁力线，具有与电场垂直平行的磁力线，产生的 Lorentz 力向上，可支撑等离子体。由 Kippenhahn - Schlueter 模型可知，若 11.3(a) 中的电流，因激进就会通过激进颗粒而受到阻碍。

Kupferns 和 Rauchn 考虑了电流密度变化方向和平衡位置的运动方程为

$$\rho \ddot{\bar{x}} = - \frac{B_p^2}{\mu h^2} \cdot \bar{z}$$

若：平衡时的 \bar{z} 由 (11.52) 式描述， \bar{z} 方向有偏高大于之力 $P \ddot{\bar{z}}$

$$\rho \ddot{\bar{z}} = \frac{B_p^2}{\mu(h+\bar{z})} - \rho g = \frac{B_p^2}{\mu h} \left(1 - \frac{\bar{z}}{h}\right) - \rho g = - \frac{B_p^2}{\mu h^2} \bar{z}$$

这与利用 (11.52)，上式变为

$$\rho \ddot{\bar{z}} = - \frac{\rho g \bar{z}}{h}$$

$$\ddot{\bar{z}} = - \frac{g}{h} \bar{z}$$

表明等离子体被吸引， \therefore 方程 $\ddot{\bar{z}} + \frac{g}{h} \bar{z} = 0$ 为振荡方程。振荡频率稳定。振荡频率 $\omega = (\frac{g}{h})^{1/2}$ ，周期 $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi(\frac{h}{g})^{1/2}$ 为 $h = 10,000 \text{ km}$ ，周期 $T \sim 20 \text{ s}$

我们已讨论过三种模型，将探讨垂直方向的平衡。

① Kippenhahn-Schlüter 模型。

磁场中的均匀流动向下的引力作用。因为暗带中有电流和水平方向磁场的交切，所以有向下的 Lorentz 力，二者达到平衡。磁场均带中的势场和暗带电流产生的场的迭加，使电流带垂直于比水中的更深。这种不模型也有傍从电流的迴路问题。

② Kuperus-Raadu 模型

暗带以其电流（电流暗带）位于电流带内（图 11.5）。磁场由电流带的垂直分量的暗带电流产生的磁场迭加，而暗带电流的场是由暗带电流及其镜象电流产生的，产生的力，平衡引力。

Van Tend 等人（1978, 1981）提出一个普遍模型。通过中心的电流密度到三种力的作用下达到平衡。设日冕电流带有厚度，每单位长度的质量大于周围气体的质量，这些力是：

i. Lorentz 力，仅用于势场内。在日冕电流附近水平方向，这可以由磁场中计算得出。如果取向上为正方向，日冕电流取正方向
 \Rightarrow i. Lorentz 力向上（ \hat{y} 方向）

ii. 位于高度 $-h$ 处的镜象电流引起的 Lorentz 力

镜象电流不日冕位置处的磁场强度 $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$

$$r=2h \Rightarrow B = \frac{\mu I}{4\pi h}, \text{ Lorentz 力} = \frac{\mu I^2}{4\pi h} \text{ 与 (11.5) 式一致。} \text{ ② 镜象电流。}$$

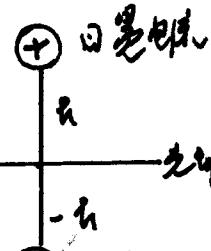
iii. 垂直于单位长度的引力 mg ，方向向下。

Kippenhahn-Schlüter 利用的力为 i, iii. Kuperus-Raadu 利用 ii, iii.

垂直方向平衡： $\frac{\mu I^2}{4\pi h} = IB + mg \quad (11.53)$

求解关于 I 的一元三次代数方程

$$I = \frac{2\pi h B}{\mu} \pm \frac{2}{\mu} \left[(\pi h B)^2 + \pi h m g \mu \right]^{\frac{1}{2}}$$



显然方程有误解之说. 考虑根据流动方向电流以反相的磁感应.
这与方程所给 +I (顺着流动) 起码是错. -I 会从磁场的位移
完全改变. 是正确的.

式中的磁场强度为流动的表达式:

i. 高度低的地方, 水平尺度大于中性线延伸及 h .

$h > h_1$. 磁场平行水平 $\therefore B < B_0$ 时, 有力 = 0.

h_1 — 垂直方向, 中性线 (或球面) 处的平行的磁场

磁场的宽度

ii. $h_1 < h < h_2$ 相应的区域

磁场强度为电流线附近的场相似, $B \sim \frac{1}{h}$ ($\because B \sim \frac{I}{h}$)

\therefore 在 $h_1 < h < h_2$ 范围, $B = B_0 \frac{h_1}{h}$

h_2 — 与流动已无关相当的经典区域

iii. $h > h_2$

场有与极场的特征. 即远离有电流区域看到的场.

偶极场 $B \sim \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}_0}{R_0^3} \sim \frac{IS}{R_0^3}$, $\vec{m} = IS \vec{n}$ 是磁矩. I — 电流, S — 截面

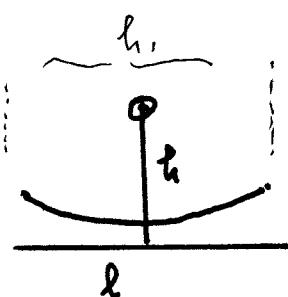
流动区的极化只效为 R_0^2 , 由于电流所处位置叫半径 $\sim R_0$, $B \sim \frac{I}{R_0}$ ($\sim h_1$)

$I \sim h_1 B$, R_0 为球和 B 的距离 $\sim h$

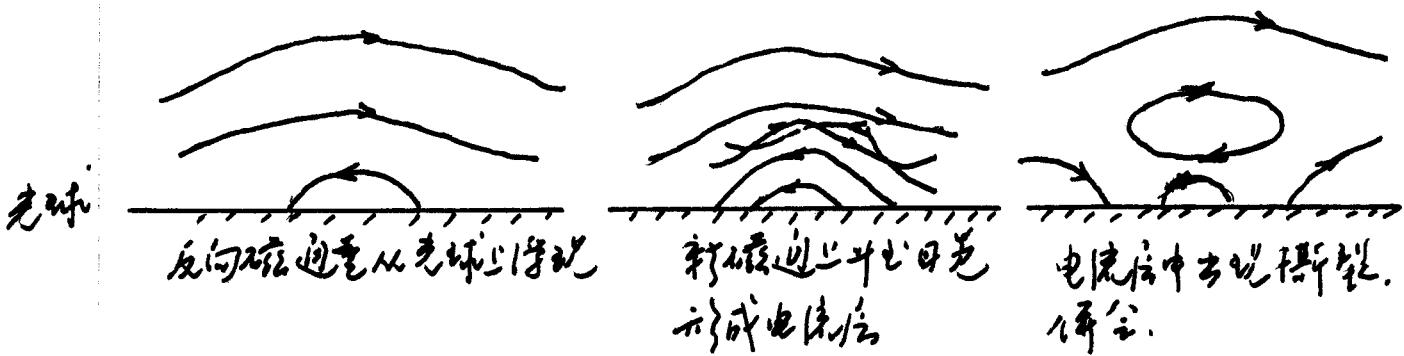
$$\therefore B \sim \frac{h_1 h_2}{h^3}$$

$$B(h) = \begin{cases} B_0, & h < h_1 \\ B_0 \frac{h_1}{h}, & h_1 < h < h_2 \\ B_0 \frac{h_1 h_2}{h^3}, & h_2 < h \end{cases}$$

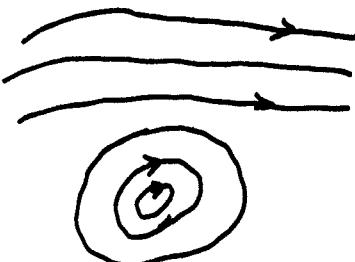
在流动区以外 (流动平行流动区上方), $h = h_2$ 时有最大的极化值, $B_0 \frac{h_1}{h_2}$
从代数方程可知 $I_{\text{ext}} = \frac{2\pi h}{\mu_0} B$ 有 I_{max} . 也即当 $h = h_2$ 时, 有电流不为
值. $h_2 \sim a \text{ few} \times 10^4 \text{ m}$. 这意味着电流超过 I_{max} 后会向小球发
寻找另一个平衡位置.



日冕磁场的简化：



最后成为：



背景场为水平，唯有带状磁场，且是电流传媒电流场的迭加

(from Van Tend et al., 1978)

11.3.2 在水平场中的支撑

Lerche 和 Low (1980) 和 Kupers + Raadu (11.3.1章) 模型普遍地分析光球和下凹处，由水平场支撑的柱状暗带和静力学问题

1. Lerche & Low (1980) 提出的摘要

① 水平柱状带内有电流的分支 (Lorentz 力和引力平衡) 的正解 (不计电荷)
特征与 Van Tend 等人提出的光球下凹处 (Van Tend 考虑了带电
柱状暗带) 相符合。

② 考虑有限半径的暗带，高处静力学平衡，(即) 形成下凹处，且强度
强，磁场的方向切向分量连续。

③ 很可能有多条。

2. Van Tend 个人的模型中，电流回路必须通过光球的表面以流完成，因
此半径光球引，反向的它家电流。该模型忽略了柱状暗带的
半径。有限半径的支撑过多斗争有待解决的问题。

3. 孤立等离子体柱的静力学平衡。

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \times \vec{B} - \nabla P - \rho g \hat{z} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$P = \rho \frac{A}{m}$$

$$\text{取磁场矢量式为 } \vec{B} = \left(\frac{\partial A}{\partial z}, B_y, -\frac{\partial A}{\partial x} \right)$$

(x-z)平面上的法线方向，该处有垂直轴(\hat{x} 的方向)， B_y 均匀，且垂直半径为 R_0 ，垂直轴在 $x=0, z=h$ 处，平行于 $z=0$ 平面圆柱面上取坐标， $z = h + R_0 \cos \varphi$

(3) 中心点： $x = R_0 \sin \varphi$
半径 $R_0 < h$ 。(保证该点不在圆柱内)

4. 边界条件

沿壳外面的磁场均势为零，有 $\nabla^2 A = 0$ 。A 必须与水平场 \hat{x} 及 \hat{z} 相垂直方向相反
边界条件：

$$\text{i. 元速 } B_x \rightarrow B_0 \quad \left. \begin{array}{l} z \rightarrow \infty \\ B_z \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad (11.55)$$

$$\text{ii. 球面 } B_z = 0, \quad z = 0 \quad (11.56)$$

$$\text{iii. 壳内 } B_R, B_\theta \text{ 和壳面连通. } \mathbf{B}(r, \varphi) = (R_0 \sin \varphi, h + R_0 \cos \varphi) \quad (11.57)$$

$$\text{由 } \frac{\partial A}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = \frac{\partial A}{\partial r} \Big|_{r=R+0}, \quad A(r=R_0) = A(r=R+0)$$

As is well known, 由于守恒律 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\hat{z} = a \hat{x} + b \hat{y}$ 使电流密度 \mathbf{J} 为 \bar{F}_0

$$\text{且 } \bar{F}_0 \text{ 为 } \bar{F}_0 = \bar{F}_x \ln \frac{(z-a)^2 + x^2}{(z+a)^2 + x^2}$$

\bar{F}_x 是常数。势 \bar{F}_0 满足在壳面上的边界条件。

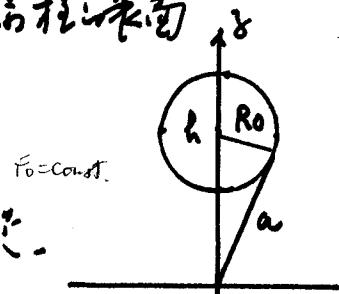
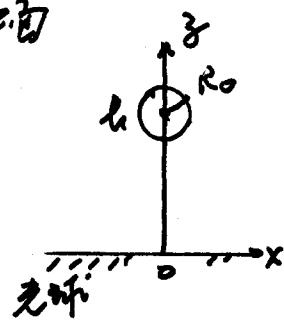
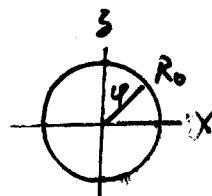
取水平方向(\hat{x} 方向)磁场均势为 $B_0 \hat{x}$ 。 $\therefore B_0 = \frac{\partial A}{\partial z}$, B_0 为常数
有 $A = \bar{F}_0 + B_0 z$ —— 水平方向的势

在壳中 z 坐标为 $z = h, x = 0$ 。取 $a = (h^2 - R_0^2)^{1/2}$, 表示柱侧面

$$\text{势场 } A \text{ 和 } F_0 \rightarrow F_0 = F_x \ln \frac{h - (h^2 - R_0^2)^{1/2}}{h + (h^2 - R_0^2)^{1/2}} = \text{const.}$$

对于表面, $z = h + R_0 \cos \varphi, x = R_0 \sin \varphi$ 时 F_0 为常数。
由 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 知 11.14.

(3) 在柱壳内部, 为 δ 半径时可由 (3.65) 式 (Procst)



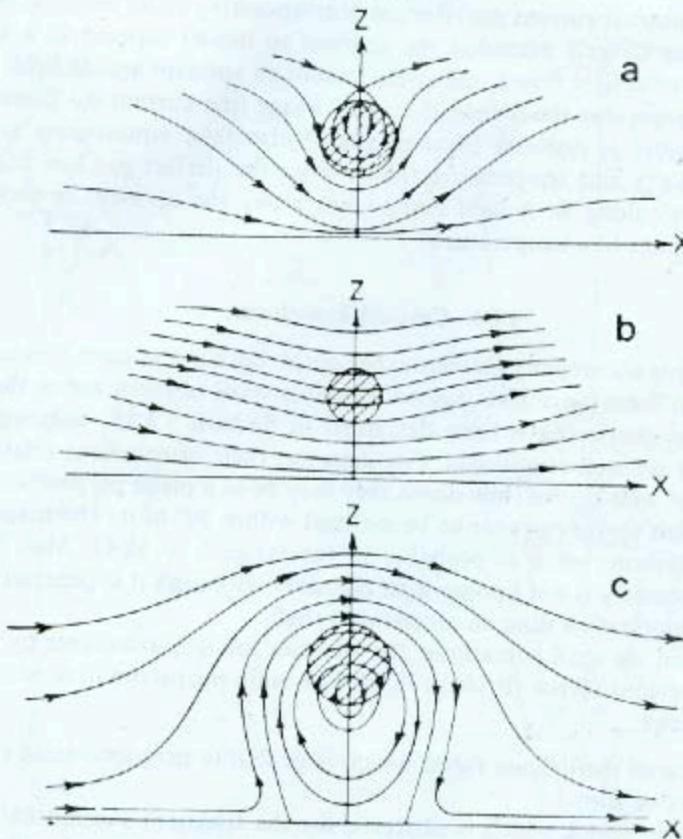


Fig. 11.14. Models for a cylindrical prominence with (a) a neutral point above the prominence ($B_0 R_0 / F_* < -1$), (b) no neutral point above ($-1 < B_0 R_0 / F_* < 0$), and (c) a neutral point below ($0 < B_0 R_0 / F_* < 1$) or no neutral point below ($1 < B_0 R_0 / F_*$) (from Lerche and Low, 1980).

$$\text{表示}, \nabla^2 A + \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{2} B_j^2 \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial A} P(A, \theta) \quad (3.65)$$

右边第二次是电流密度 $J(A) = \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{2} B_j^2 \right)$ (P.370). 因此右边次
也是电流密流, 设 B_j 均匀, $\propto |A|$

$$\nabla^2 A = \mu J \quad (11.58) \quad (\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \text{ 为矢量式})$$

$$J = -\frac{\partial P}{\partial A} \quad (11.59)$$

Lerche and Low 1973 认为 J 为已知, 得到

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} j_n R^n \cos n\varphi \quad (11.60)$$

也有一个等价
内部势 A 的
表达式

代入求解方程 (11.58), 利用边界条件 (11.57), 可以通常形式, 得到结果

$$\text{为 } J = \frac{4F_0 (1 - 24_0^2 R^2)}{R_0^2 (1 + 4_0^2 R^2 + 24_0 R \cos \varphi)^2}$$

$$\text{式中 } \psi_0 = \frac{h - (h - R_0^2)^{1/2}}{R_0^2}$$

从 (11.59) 式可推出应强 P . 为保证电流 J 不为零, 要求 $24_0 R^2 \leq 24_0 R_0^2 \leq 1$,
从该式中可得出 $R^2 \geq R_0^2/9$. 取 $R = 0$, 充分支撑等离子体.

可以将方程 (11.60) 改为一般的形式:

$$J = \sum_{m,n=0}^{\infty} j_{mn} R^m \cos n\varphi$$

因此电流是 $J = \sum j_m \cos m\varphi$ 的边界条件 $j_m = 0$ 时, 也不再有额外的边界条件帮助
确定双曲元阵列 j_m 的常数 j_m . 也就是说相等于给定的外场, 等离子
内的电流分布不唯一, 内部的磁场分布也不唯一.

11.4. 1) 日冕瞬变现象 (coronal transients)

观测表明日冕中存在着频繁的日冕瞬变现象, 主要是日冕物质抛射
即 CME (coronal mass ejection). 日冕瞬变现象伴随着爆发的
日珥 (暗带). 表现为向外运动的弧或蓬云状物质. 这些物质球团可能
来自底层日冕, 位于日珥之上. 不象是暗带内部的物质, 形态复杂
多样, 典型的形貌是膨胀的泡状体, 表面为亮弧面, 中间是暗腔.
最后是亮核, 亮核往往非常不稳, 且形状丰富, 互相错落其间

小于 20° (?)。Skylab 在观测期内(即不活动的下降期-段), 观测到 110 个日冕物质抛射, 发生率约为每天一次。

至少有 70% 的日冕物质抛射(喷雾阶段或全部抛出)相关, 剩下部分大都^在日喷(spray)和大耀斑中发生。可能所有的日冕物质抛射都是喷雾伴生, 其中仅一部分产生耀斑。CME 和耀斑是否是因果关系不清楚。

日冕物质抛射从运动体可能是一个太阳风辐射带的二倍, 可见日冕物质抛射现象的重要性, 而且日冕物质抛射引起日冕尺度结构的改变以及日冕物质的消耗。所涉及的质量典型值是暗物质的十倍, 或者说太阳质量损失的 5%。

日冕物质加速现象大多发生在 $2R_{\odot}$ 以下, 即“ $2-6 R_{\odot}$ ”范围内。日冕物质抛射的速度是常速或者逐渐增加。日冕物质抛射(和 CME)的速度有一个大的范围, 从 100 km s^{-1} 到 1200 km s^{-1} 。在天空实验室(Skylab)和仪④光谱范围内, 平均速度为 470 km s^{-1} 。而太阳风辐射带的日冕物质抛射速率则快得多, 平均值分别为 775 km s^{-1} 和 330 km s^{-1} 。速率大于 400 km s^{-1} 的大部分事件近似 V 型或 W 型射线暴射线, V 型爆发由 1 射线测定。(各种统计结果尚不一致, 有关数据仅供参考)

假设为同步辐射, 与电荷数表示磁场强度甚大, 在 $3-5 R_{\odot}$ 距离内为 $4-5 \text{ G}$ 。反过来表明 β 仅为 0.1, 因此驱动必须是磁重联。

CME 的各种特征参数本身的演化范围很大, 如速度、加速度、质量和能量的变化。范围可达 2 到 3 量级。根据 Solwind 的资料, CME 的质量为 $10^{14}-10^{16} \text{ 克}$, 能量为 $10^{29}-6 \times 10^{31} \text{ 焦耳}$ 。过去常把观测到的曰地空间和地球物理现象, 按行星际模型划分, 这些粒子事件、磁暴、闪电和电离层扰动几乎全归于耀斑类。近期的研究表明 CME 造成的曰地空间及地球物理效应并不亚于太阳耀斑。二者产生的效应有不同的特征。太阳风对粒子的加速是冲击式的, 质量不大, 而 CME 则驱动 T 形速度波, 通过该速度波加速大质量的宇宙粒子。

日冕瞬变与爆发喷流相关，许多喷流和活动区均会发生。大约 $\frac{1}{3}$ 的事件为环状，性质类似而已叙述，不过有些性质尚未确定，如：相对于喷流的方向尚未确定；磁场强度未确定，(可以达 $1\text{-}10 \text{ G}$ 之间)；三者的位置并不确切知道。一般认为是环状，不是环状或壳状。

本节着重环状日冕变的理论，需要解释的主要性质：

(1) 与日动力，(它可认为是磁力，因为 B 是 0.1 或更大)

(2) 速度均匀，瞬变区域的速度[观测到]：在 $3R_\odot - 5R_\odot$ 之间，苏宁等测得相关的典型值为 $300 - 400 \text{ km s}^{-1}$ ，在喷流附近 22° 带测得喷流的速度为 $700 - 800 \text{ km s}^{-1}$

(3) 太阳中心与瞬变附近所“处”的角度固定

(4) 环宽(R)随距离 R 的增加而减小 $R^{0.8}$

(5) 环的曲率半径 R_c 随增加而 $\propto R^{1.6}$

(6) 在周围日冕密度相加，环附近密度强 $5\text{-}10$ 倍，而瞬变下方密度减少 2 倍

1.4.1. 扭转环模型 (Twisted Loop Models)

Mouschovias & Polanet (1978) 提出环状日冕变看作扭曲的磁通管，一种简单但考虑的模型。

I. 假设

i. 白光环状日冕 (coronal loop transient) 是一个磁环，升起于日冕等离子体背景及磁场中。因为喷流起源于环内等离子体部分，所以喷流的性质，磁场的疏密比背景磁场强，所以喷流背景日冕对环的拖曳

ii. 环内及其端部存在纵向场分量 B_z 和横向场分量 B_{az} ，即假设环内的场为螺旋形的，穿越表面是连续的。(见 II.15(a))

iii. 环内磁力 (或热压) 起主要地位

IV. 磁场之于环状喷流

v. 假设环内磁场化垂直于环的轴的方向的变化有了特征尺度。取环的宽度也就是环截面的直径作为特征长度。(我们以

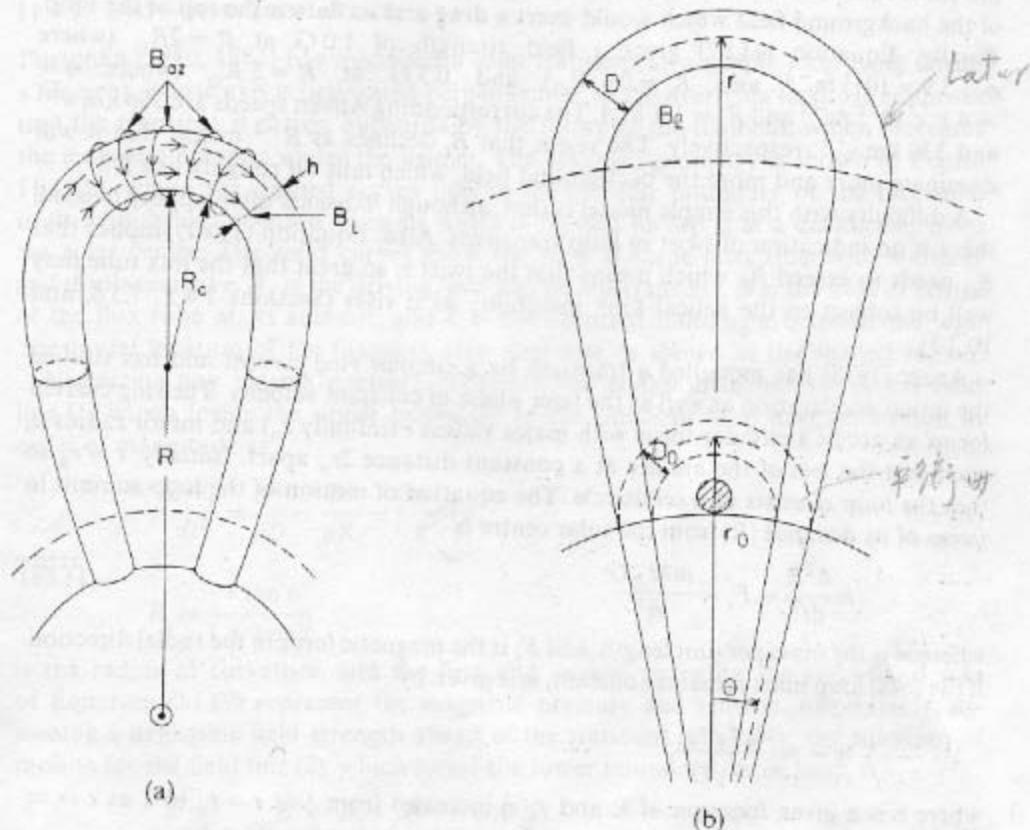


Fig. 11.15 Transient geometry for the models of (a) Mouschovias and Poland (1978) and (b) Pneuman (1980).

where the first term on the left represents the outward

Tension

把特征长度取得为 h . 磁场 B 会变得十分分散, 而成其状.) (见图 11.15(a))

R : 一太阳中心磁场的半径; h : - 磁带 (磁的直径); R_c : - 磁带
曲率半径; 磁带厚度 (厚度) 和其相等.

从理论研究的方面, 主要是心瞬变 (loop transient) 和顶部及其动力学行为, 磁心确定的向日葵花圈部分的环 (典型值为 10°), 亦即 $11.15(b)$. 该花圈内的质量 (10° 范围内) 在瞬变运动过程中,
(在日冕处视场 $1.6-6.0 R_\odot$ 范围). 其不变, 但变化可变. 由前两节清楚
知道, 该形状瞬变 (loop transient) 是一个过程, 又见图 11.15(c). 在此
中变化化 $\sim 10\%$ 的, 可看作不变. 像如克服太阳引力而维持等离子体膨胀
之力的性质清楚, 那么维持引力的性质也就相对简单.

2. 考虑磁环等离子向外运动.

引力 P_g 向下. P 为场内的总差密度, 形成向上的力平衡. 向上的力
是由磁场的环向密度产生的向上的力 $\delta \vec{B}_{az}$ 纵向于等离子的 \vec{B} 和 \vec{v} 之差

$$\frac{1}{h} \delta \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{az}^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \frac{\vec{B}_{az}^2}{R_c} \quad (1)$$

该式等价于 MHD 运动方程. 根据前述 $i - v \rightarrow \bar{v}$ 的简化.

$\delta \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{az}^2 \right)$ 表示磁环和磁波间的磁感应强度. 相应地 $\delta \vec{B}_{az}$ 表示
“-” (har) 表示环内物理总量对于环密度的平均

计算公式左边 \sim

$$\begin{aligned} \delta \left(\vec{B}_{az}^2 \right) &= \vec{B}_{az}^2 \left(\frac{1}{R_c} \right) - \vec{B}_{az}^2 \left(\frac{1}{R_c} \right) \\ &= \left[\bar{B}_{az} \cdot \frac{\bar{R}_c}{R_c \left(\frac{1}{R_c} \right)} \right]^2 - \left[\bar{B}_{az} \cdot \frac{\bar{R}_c}{R_c \left(\frac{1}{R_c} \right)} \right]^2 \quad (\text{由于 } \bar{B} \cdot \bar{R}_c = B_{az} \cdot R_c \left(\frac{1}{R_c} \right)) \end{aligned}$$

$$\text{利用 } 2\bar{R}_c = R_c \left(\frac{1}{R_c} \right) + R_c \left(\frac{1}{R_c} \right)$$

$$h = R_c \left(\frac{1}{R_c} \right) - R_c \left(\frac{1}{R_c} \right)$$

$$\bar{R}_c \left(\frac{1}{R_c} \right) \cdot R_c \left(\frac{1}{R_c} \right) \approx \bar{R}_c$$

$$\delta \left(\vec{B}_{az}^2 \right) \approx 2 \bar{B}_{az}^2 \cdot \frac{h}{R_c} \quad (2)$$

固心有

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{2\bar{B}_{ag}}{\mu} \cdot \frac{h}{R_c} - \frac{\bar{B}_e^2}{\mu R_c} = \bar{\rho} g$$

$$\frac{\bar{B}_{ag}^2}{\mu R_c} - \frac{\bar{B}_e^2}{\mu R_c} = \bar{\rho} g \quad (3)$$

因为(3)式左边大于零，应有不等式 $\bar{B}_{ag} > \bar{B}_e$ (4)

该情况不稳定，但 $\bar{B}_{ag} > 1.41 \bar{B}_e$ (Priest. P.269)，倾向于沿
长波方向使磁通密度断裂。为了避免这种不稳定性，又必须有向心力
之积有

$$1.41 \bar{B}_e > \bar{B}_{ag} > \bar{B}_e \quad (5)$$

(5)式相矛盾的条件

(5) 式在材料条件. 因此会遭遇滑移. 稳定性. 我们期望通过已往规则判明长度及方向折断的破碎现象. 带着这样的规则的一些束缚 ("bands"), 才能找出稳定性的情况. 尚不能证实. 这是一种可能的解释.

还有一种不稳定性可能发生, 螺旋(扭折)不稳定, 可以相信这种不稳定性会先于滑移. 不稳定性发生. 例如为

$$\bar{B}_{ay} > \frac{2\pi h}{L} \bar{B}_x \quad (b) \quad \text{第7章 P56} \\ (5.10-29 b)$$

式中 L -弧长, 因此典型的 $\frac{h}{L} \sim 0.1$. 这种不稳定性似乎可以避免, 但是螺旋对稳定性发展的特征时间. 本章是 Alfvén 波传播速度的宽度的穿越时间 n . 因为 n 的典型值为 $0.5 R_\odot$, $V_A \approx 350 \text{ km s}^{-1}$, 则 n 接近似为 173 . ~ 5 日. 螺旋运动与穿越时间相当, 甚或大于螺旋的时间. 换句话说, 理想的稳定性分析所得出的判据公式不能应用于我们所考察的动力学系统. (Mouschovias + Polaner)

为推导可观察量之间的关系. 记 $g = GM_\odot / R^2$

$$\frac{\bar{B}_{ay}}{\mu R_\odot} - \frac{\bar{B}_e}{\mu R_\odot} = \frac{n m G M_\odot}{R^2} \quad (11.61)$$

n 是常数.

(6) 在角度 (-10°) 范围内. 22.33, 磁通不变 $\frac{1}{4}\pi h^2 \cdot R^2 \varphi \cdot n = \text{const.}$

有 $n R^2 \varphi = \text{const.}$

(11.64)

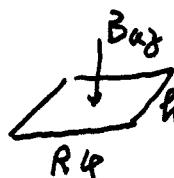
截面 长度 磁通

纵向场 B_e . 磁通守恒

$$B_e h = \text{const.} \quad (11.62)$$

纵向场 B_{ay} 磁通守恒

$$h \cdot R^2 \varphi B_{ay} = \text{const.}$$



$$B_{ay} h R = \text{const.} \quad (\because \varphi = \text{常数}) \quad (11.63)$$

B_{ay} 若是超过 B_e 的 40% (取就(5)式). 取 $\frac{B_{ay}}{B_e} = a = 1.4$

从(11.62), (11.63)式可得. $\frac{B_{ay} h R}{B_e h} = \frac{a R}{R} = \text{const.}$

$$\therefore R \sim r \quad (11.65)$$

从(11.61)式. 等于平均数"-". 有 $B_{\bar{R}}^2 - B_R^2 = C \cdot \frac{n R^2}{R^2}$, C 为常数

$$(a^2 - 1) \beta_R^2 = C \frac{n k c}{R^2} \quad (9)$$

式中 $(a^{\pm} - 1)$ 为修正数。

利用(11.62)式. $B_2 \sim \frac{1}{R^2}$; (11.64)式. $n \sim \frac{1}{R^2 R}$

将 B_2, n 代入(9)式, 有

$$\frac{1}{k^4} \sim \frac{1}{R^2} \frac{R_c}{k^2}, \quad \text{推得} \quad R_c \sim \frac{k^3}{R^2}$$

$$再利用(11.65)式, 可得 \quad R_C \sim R \quad (11.66)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{By (11.65) } \Rightarrow h \sim R \\ (11.62) \Rightarrow B_x \sim \frac{1}{R^2} \end{array} \right\} \Rightarrow B_x \sim R^{-2} \quad (11.67)$$

(11.65), (11.66) 式 可由現行規範。

(11.65), (11.66)式可由现例与2518。
 (11.65)式表示环流的速率与太阳半径 R_{\odot} 、太阳中 α 的值、高R之间的关系，与观测符合甚好。但理论的曲率半径(11.66)太小，可能是因为磁场的弯曲造成的，因为若磁场对球有拖曳作用，则其半径为 R_C 的 $1/\gamma$ 倍(从而使 R_C 变大)。(11.67)式给出 $R=2R_{\odot}$ 时的场强为一级部速率(从而使 R_C 变大)。
 1.0 G. (该处 $n = 3.9 \times 10^{13} m^{-3}$, $R_C = 0.4 R_{\odot}$), $R = 5R_{\odot}$ 时为 0.3 G
 ($n = 4.1 \times 10^{12} m^{-3}$, $R_C = 1.8 R_{\odot}$)。Alfvén速度分别为 360 km s^{-1} , 330 km s^{-1} 。
 从以上可知，随着 R 的增大，速率减小，场强增加。

因为沿半径的衰减为 $\sim \frac{1}{R^3}$.

该简单模型的一个不足是：虽然暗物质是扭曲的，但对形状
偏差中没有扭曲的迹象。而且(11.61)式表示 B_{eff} 大于 B_0 ，说明扭曲
张量大，但磁通量^{上讲过}可能有螺旋扭曲不稳定性机制。(Priest)

Anzer (1978) [1] (3) 电流传导为扩散现象的模型，研究猝灭通过
磁加速度的方式增加以及后期的串连运动。

首先计算作用于圆环上之力，传递电流运动的力(未画).

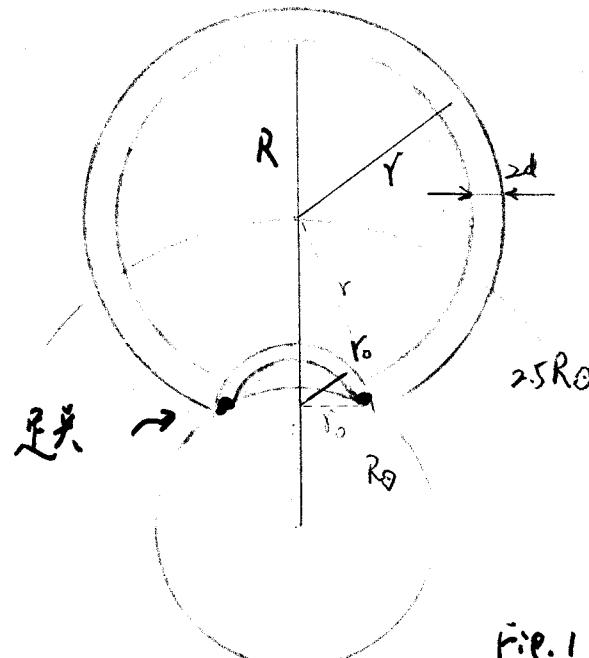


Fig. 1

模型的几何形状，圆环的初始状态为半圆，半径为 R_0 ，以后发展变大，直到半径为 r 的全圆的大部分。几乎所有的圆周都大于 $2.5R_0$ 且 $r > R_0$ ， $0 < \theta < \pi$ 。

电流系统的位置 $L \approx 4\pi r \left[\ln \left(\frac{8r}{d} \right) - \frac{3}{4} \right]$ (1)
 (Batygin & Toptygin, 1964) \rightarrow MKS制: $L \approx \mu r \left[\ln \left(\frac{8r}{d} \right) - \frac{3}{4} \right]$

环中的总电流，可以计算磁场 W ，穿过的磁通量和电动势。

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad (2)$$

$$\Phi = LI \quad (3)$$

$$\text{电动势: } U = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4)$$

计算单位向单位长度所受的力 F_r 。考虑环在径向有微位移 δr ，系统的转动量守恒，因此有

$$2\pi r \bar{F}_r \delta r + \delta W + UI \delta t = 0 \quad (5)$$

式中 δt 是发生 δr 位移的时间。

$$\text{利用 (2)-(4) 式: } \bar{F}_r = - \frac{1}{2\pi r \delta r} [\delta W + UI \delta t]$$

$$= - \frac{1}{2\pi r \delta r} \left[\frac{1}{2} I^2 \delta L - I d\Phi \right] \quad (I = \text{常数})$$

利用 (3), $d\Phi = I dL$ 代入上式

$$\bar{F}_r = \frac{1}{2\pi r \delta r} \cdot \frac{1}{2} I^2 \delta L$$

$$\bar{F}_r = -\frac{\phi}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{L} \right) \quad (6)$$

$$\bar{F}_r = \frac{b^2}{4\pi r^3} \cdot \frac{\ln \frac{R}{r} - \frac{3}{4}}{\mu \left[\ln \frac{R}{r} - \frac{7}{4} \right]^2} \quad (7)$$

已将(7)式代入(6)式。

这就是作用于环上，指向向外的磁力。磁力作为穿过环的匝数的函数。
我们不考虑环的内部结构，因此不计气压压力。化直线为有限。

利用下正向单位：

初始时刻，垂直的半径 r_0 ，半径 R_0 ，向日量 r ，目前大半径 $R = R_0 + r$
(见图1)。假设没有电流流过环流动，每单位长度的厚度为 m_0 ，每单位
 m_0 为常数。在 $t=0$ 时，环静止，再假定每一类的引力作用的磁力方向相反
是先，这个假设仅对于瞬变的 J 才适用。

1. 考虑环的扩张。但在太阳表面上方的环，其半径待定 R 加一部分，即
的，是类化太阳表面，距离保持不变。环 J 的半径 R 和环半径有近
似关系。

$$R = R_0 + r + \sqrt{r^2 - r_0^2}$$

$$\text{且 } r = \frac{R^2 + R_0^2 + r_0^2 - 2R_0 R}{2(R - R_0)} \quad (8)$$

2. 环向外运动时，磁力的简化

开始时刻，半径近似地位于太阳表面上，假设电流(沿环流入或流出)
从向电流构成圆弧。(图1下半圆环未画出)。因此穿过环内以上的
的半圆弧的磁通量为零。没有穿过太阳表面的磁力线。为简单起见，假设
在环(类化过程中，环的磁路是由于环电流产生的)。设通过太阳表面
上方的圆弧部分的磁通量中，净零。因此环中沿全圆周(包括类化 J 部分)
的磁通量为零，当环向外运动时，是零。

$$\therefore \phi = \phi / f_{\phi}(r) \quad (9) \quad (?)$$

$$f_{\phi}(r) \text{ 从 } r=r_0 \text{ 时的 } \sim \frac{1}{2} \text{ 增至 } r \rightarrow \infty \text{ 时 } \sim 1$$

设演化过程中，环的厚度差保持不变而且分布均匀，即 m_0 与 r 以及以半
圆增至全圆)。 $m_0 \pi r_0 = m \cdot 2\pi r$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{渐近极限} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{半圆长} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{圆周长} \end{array}$$

$$m = \frac{m_0 r_0}{2r}$$

定义参数 f_i , 当 $r=r_0$ 时, $f_i=\frac{1}{2}$; 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $f_i=1$

$$m = m_0 \frac{r_0 f_i(r_0)}{r f_i(r)} \quad (10)$$

3. 运动方程

$$m \frac{d^2 R}{dt^2} = F_r - \frac{m M_0 G}{R^2} \quad (11) \quad (11.68)$$

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{C}{f_i(r) R^2} - \frac{M_0 G}{R^2} \quad (12)$$

$$\text{式中 } C = \frac{F_r}{m}$$

$$= \frac{\Phi^2}{4\pi r^3} \cdot \frac{\left(\ln \frac{8r}{\alpha} - \frac{3}{4}\right)}{\mu \left[\ln \frac{8r}{\alpha} - \frac{3}{4}\right]^2} / \frac{m_0 r_0 f_i(r_0)}{8 f_i(r)} \quad (13)$$

利用(9)式 $\dot{\phi}^2 = \dot{\phi}_i^2 / f_{\alpha}(r)$, 定义 $f_{\alpha}(r) = \dot{\phi}_{\alpha}^2(r) / \dot{\phi}_i^2(r)$. 则(13)式 $f_i(r_0) = \frac{1}{2} + \lambda$

$$\text{得} \quad C = \frac{\dot{\phi}_i^2}{2\pi r^2 \mu m_0 r_0} \cdot \frac{\ln(\frac{8r}{\alpha}) - \frac{3}{4}}{\left[\ln(\frac{8r}{\alpha}) - \frac{3}{4}\right]^2} \quad (13)$$

(12)式中 $\omega = \dot{\phi}$ 是卫星的半径角, R 是太阳中心到卫星的距离.

方程(11.68)的解与质量 m/m_0 和 r_0 有关. ① 当 m/m_0 是小量, 即磁驱动力也是小量, 数值计算表明, 32. 先达到一个极大速度, 然后减速. ② 引入参数 $a = 4C/M_0 G$, 是一个无量纲数, 表征磁驱动力与引力之比. 当 a 增加 (或者初始电流增加), 也即 m/m_0 增加, 中间值, 速度增加. 也有减速情况. a 在一个大的范围内 ($2.5R_0$ 到 $5R_0$), 速度几乎为常数.

随速度 v 增加, 角速度 $\dot{\phi}$ 变得均匀.

磁通量和平均磁场强度也可计算, 设物体的环半径为 $r_0 = \frac{1}{2}R_0$, $\frac{\alpha}{r} = 0.2$, 物体环单位长度质量为 $1.5 \times 10^4 \text{ g cm}^{-1}$ (相应的截面积 $A_0 = 10^8 \text{ cm}^2$) 得到 $a = \dot{\phi}^2 \times 2.7 \times 10^{-43}$ (这是单位制), 对描述现时而言, a 的适当的量级对于 $\dot{\phi} = 2 \times 10^{21} \text{ G cm}^2$ 为 1. 获得平均场 $\bar{B} \approx 0.5 \text{ G}$. 问题待讨论.

1 G 垂直的磁场足以驱动日冕喷发.

上述模型：适用于环顶，足部的引力基本上与环平行，环顶向上足部侧向扩展。为此割环下方的半径，要求日冕下方有强的轴向场（即电流密度的不连续的场）。环电流产生的场约 $1G$ ，轴向场抑制了洛斯托可抑制环的足部侧向运动。

Anzer 强调不足，只有电流环将产生环的伸展，任何近似于 $\frac{1}{R}$ 表示的足部动力都可能导致类似的侧向速度场。

11.4.2 无扭折的环模型 (Untwisted loop models)

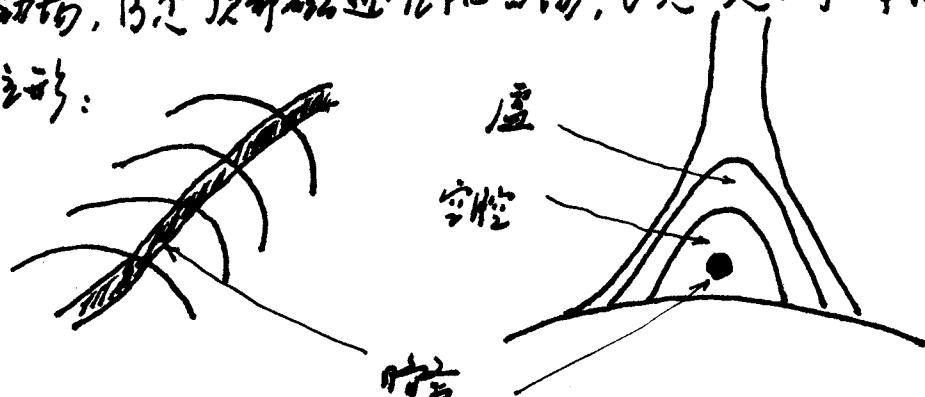
是由于螺旋的弯曲使得暗条爆发还是促进暗条爆发的机制也造成分歧？Pneuman (1980) 持后一种观点，理由是：若螺旋和中性密度观测到日冕中有磁场紊乱的凹槽，这些凹槽同样有大规模的磁通量耗散，爆发过程显示了大尺度磁场的破坏线。

Mouschovias 和 Poland 和 Anger 分别提出了 MHD 模型，认为暗条由内部自身磁场的驱动，二者模型本质上是相同的驱动不随时间变化，i. Mouschovias 等考虑螺旋状的磁力线，转折的磁通管以常速向外运动，主要的驱动力来自螺旋和环流之间的磁感应。

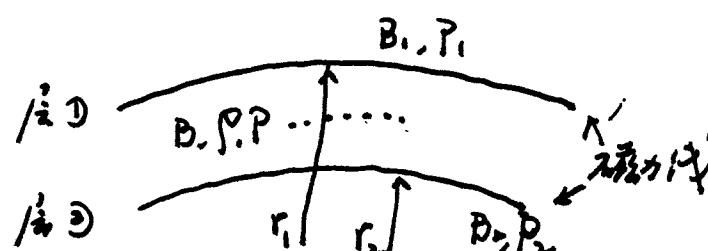
ii. Anger 考虑扭曲的电流系统，轴向电流和环向场作用产生的 Lorentz 力推动环向外运动。

无扭折的磁通管不会有磁压强梯度以平衡磁压力和引力 (如 Mouschovias 举例)，必须增加引子向内力。Pneuman (1980) 模型是把扭曲的螺旋向单侧偏斜于日冕之上且弯曲，暗条的轴与磁力线垂直，暗条上升，增加 β 的压力，驱动螺旋向外运动。(图 11.15(b)) 中虚线表示磁通管在平衡位置的圆心，宽度为 D_0 ，顶部距不随时间和距离为 r_0 ，实线表示以后时刻磁通管的位置，宽度为 D ，距离为 R 。 B_2 是螺旋后方的驱动场， B_3 是顶部磁通管中心的场， P 表示驱动半径。

模型的位形：



空腔 (cavity) 由带电等离子体物质组成，空腔周围是湍流，日冕的上部侧面是沿着开放磁力线的太阳风。简单起见，认为日冕为单一的磁通管或磁环。



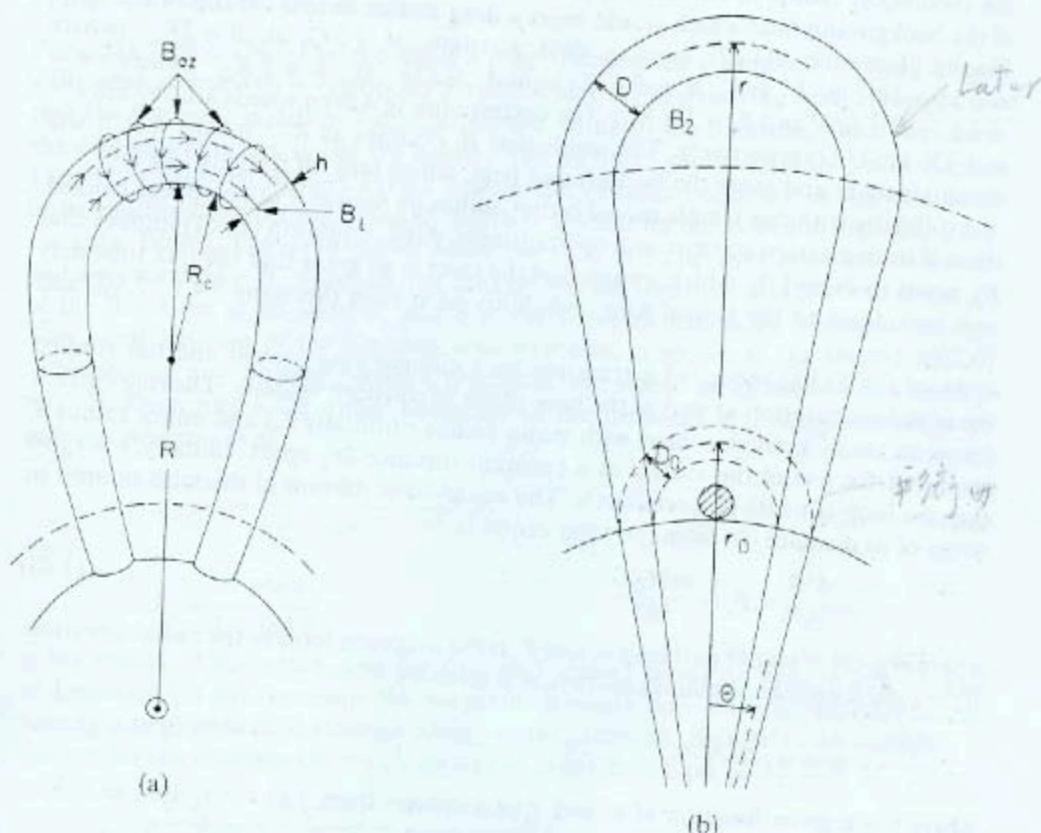


Fig. 11.15. Transient geometry for the models of (a) Mouschovias and Poland (1978) and (b) Pneuman (1980).

where the first term on the left represents the outwards magnetic pressure gradient associated with B_{az} and the second term gives the restoring tension force associated with B_t . Conservation of flux is $\nabla \cdot B = 0$.

r_1 和 r_2 分别为层①和层②磁力线的位移，垂直磁通量。

磁力线的运动方程：垂直于磁力线方向的力为

$$\rho \frac{d^2 r_1}{dt^2} = \frac{B^2}{\mu D} - \frac{B^2}{\mu R_C} - \frac{GM\varphi}{r^2} \rho \quad (11.69)$$

$$\text{磁压力: } -\frac{\partial}{\partial r} \frac{B^2}{2\mu} \approx -\frac{1}{D_L} \frac{B_1^2 + B_2^2}{2\mu}$$

下不等：“表壳上边缘”， D 为层①和层②之间的垂直距离， B 为二层之间中心处的值。假设瞬变区域外的磁场（即 B_1 ）为零，磁压力的表达式即变为 $\frac{B^2}{\mu D}$ 。

磁通量密度 φ 即为圆盘，两个（即正负极板的两个）的磁荷 B_1, B_2 ，由开放的磁力线构成（见 P.57 上的图），带有太陽風。当圆盘向外运动时，将这些磁力线包围起来。对磁力线①（即圆盘）的运动影响很大，所以可忽略 B_2 。

类似地有

$$\rho \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -\frac{B^2 - B_2^2}{\mu D} - \frac{B^2}{\mu R_C} - \frac{GM\varphi}{r^2} \rho \quad (11.70)$$

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad D = r_1 - r_2$$

Pneuman 传递圆的磁通量和质量守恒，因此磁荷和密数可由初值平衡时的值 (B_0, ρ_0) 确定

$$B = B_0 \frac{D_0^2}{D^2}, \quad \rho = \rho_0 \frac{D_0^2 r_0}{D^2 r} \quad (D_0^2 \cdot 2\pi r_0 = \text{初始体积}) \quad (11.71)$$

再假定瞬变二后方 ($1/2\beta$) 不影响时，磁通量守恒

$$B_2 = B_{20} \frac{r_0^2}{r^2}, \quad D_0, B_{20} \rightarrow \text{为常数} \quad (11.72)$$

根据运动学平衡条件，结合 (11.69), (11.70) 左边为零，可求得

$$B_{20} = \sqrt{2} B_0$$

再以 (11.69) 的初值平衡方程： $\frac{D_0^2}{\mu D_0} - \frac{B_0^2}{\mu R_C} = \frac{GM\varphi}{r_0^2} \rho_0$

$$\text{求得 } D_0 = \frac{B_0^2}{\frac{B_0^2}{R_C} + \frac{\mu GM\varphi}{r_0^2} \rho_0}$$

$$\text{曲率半径 } R_C = \frac{r_0 t_0 \theta}{1 + t_0 \theta} \quad (\text{撞击过程中, } R_C \text{ 为常数})$$

上述 B_{20}, D_0 对于起始条件有^{11.68}或^{11.69}或^{11.70}都适用。典型计算
 $B_0 = 5 \text{ G}$, $\rho_0 = 1.7 \times 10^1 \text{ kg m}^{-3}$, $\theta = 20^\circ$, $r_0 = 1.2 R_\odot$ 得到 $B_{20} = 7 \text{ G}$. 由于
 在 $12R_\odot$ 的球对称磁场范围内, $D_0 = 0.24 R_\odot$ 也是合理的。

模拟时^{11.68}, 起始速度下方的磁场 ($12R_\odot$) 增加^{11.70}到 $7G$ 时^{11.71}
 $B_{20} = 8 \text{ G}$. 件方程 (11.69), (11.70). 该假设中: $r = r_0$, $D = D_0$, $\frac{dr}{dt} = \frac{dD}{dt} = 0$,
 $(t=0)$, 结果是:

螺旋的速度, 宽度 D , 密度 ρ 以及场强 B 随半径向距离 ($1.2R_\odot$ 中心
 的距离) 行下述 4 步中. (对于模拟机)
 (i) 螺旋速度: i. 融变条件的速度随距离 ($12R_\odot$ 范围) 内增加很快,
 然后逐渐变慢, 约 75 km s^{-1} ii. 渐近行为 $V \sim (1 - \frac{r}{r})^{\frac{1}{2}}$, K 为常数
 宽度 D 随 r 线性增加 $D \sim r$. 以上结果与观测基本符合

在螺旋现象中, 磁场按 $\sim \frac{1}{r^2}$ 下降, 引力也按 $\frac{1}{r^2}$ 下降. 这意味着向外
 的力与向内的力之比, 与离开太阳的距离无关. 因此, 在轨道下面向外的
 磁场 (因运动而产生的) 会增加而增加 (从 $12R_\odot$ 上升到 $1.2R_\odot$). 则
 净作用力是向外. 引力通过引力, 拉了磁场的将随距离而变慢.

当螺旋现象开始时起始, 守恒定律 (11.71) 式将有改变.

磁通量: 近似为 $r \varphi D \cdot B$

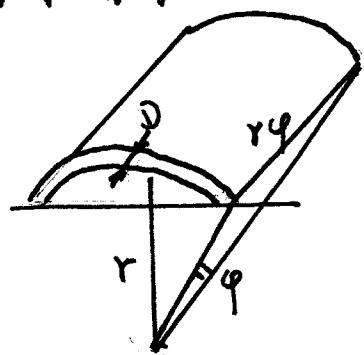
$$Br\varphi D = B_0 r_0 \varphi D_0, \quad \therefore B = B_0 \frac{D_0 r_0}{Dr}$$

$$\text{密度则为 } \rho = \rho_0 \frac{D_0 r_0}{Dr}$$

方程的解与前的很类似, 只是传播速度平移.

约为 400 km s^{-1} .

Pneuman 认为 螺旋此丁次都无意义. 因为引力垂直于运动速度而平行于速度. 上述结果必须得考虑的总载力的驱动力在较低处起作用. Pneuman 说明 1. 从其磁场与运动场不一直作用于螺旋, 在它无穷远, 而是在一个较小的范围内, 作用了一段大的力, 速率也类似的. 即
 螺旋化无穷远处, 并趋于常速.



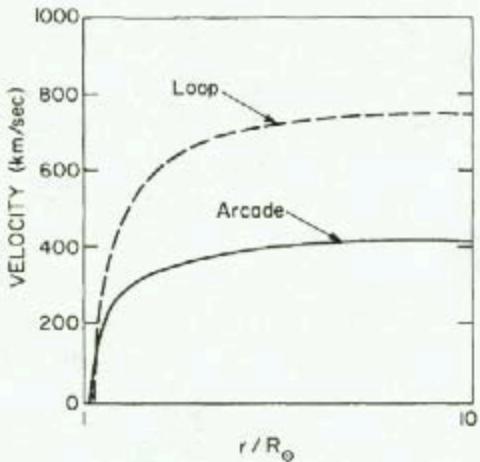


Fig. 4. Predicted velocity vs radial distance ($r = S$) profiles for both the arcade (solid) and loop (dashed). Note that the speed increases sharply with height close to the Sun but quickly approaches a constant value.

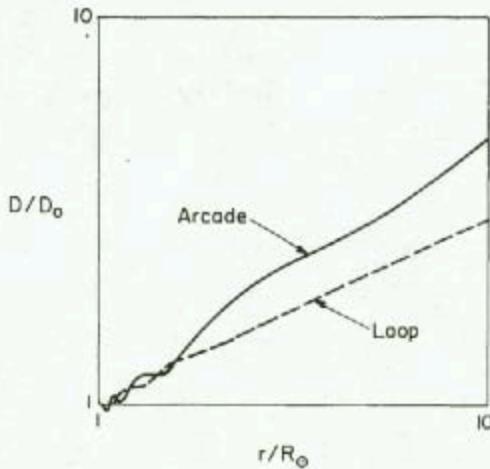


Fig. 5. Normalized width of the transient as a function of radial distance for the arcade (solid) and loop (dashed). The initial oscillations are due to the discontinuous switching on of the driving force. Very soon, however, the width increases more-or-less linearly with height.

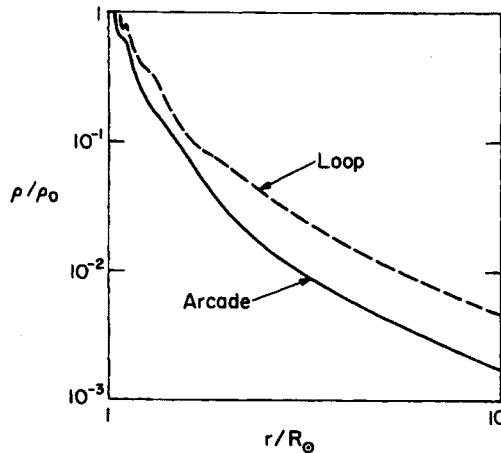


Fig. 6. Radial dependence of the normalized gas density. Here the density is decreasing approximately as $1/r^3$ which is faster than that of the ambient solar wind ($1/r^2$). Hence, at the orbit of earth, transients could even be less dense than the solar wind.

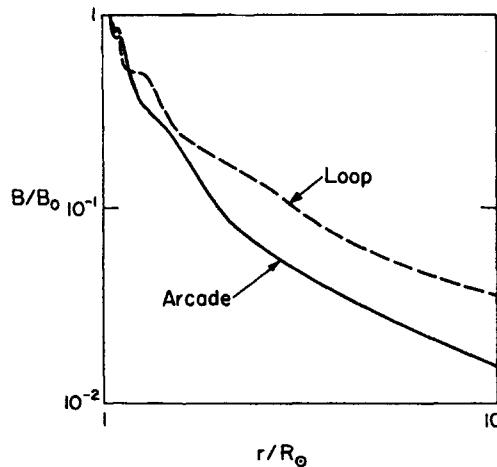


Fig. 7. Variation of the magnetic field strength in the transient with radial distance from the solar center. Just as in the interplanetary medium, the field here decreases outward as $1/r^2$.

Anzer and Pneuman (1982) 進一步推進了模型，支持之為复杂。他们认为马达动力来自由于磁重联而上升的增压，也增加了磁应力。方程类似于(11.69)和(11.70)，再增加耀斑喷流的二个方程，而11.71和11.72（耀斑喷流顶部）， r_4 （喷流底部）有关。 r_1, r_2, r_3 则同以前一样。加上中心类P (Fig 10.20) 的上升速率。

改进的模型允许物质离开喷流，而不再守恒。速度可变得更大；速度增加还可以通过增加喷流底部下方喷流后的磁通量而得到。

存在的问题：喷流之下磁力线闭合的话磁场不坚实。

11.4.3 耀斑模型

Huntsville小组研究了二维、长时间有关的日冕喷流的数据模型。马达动力是热压力，不是磁力。日冕底部向耀斑处而增温，膨胀，磁场起阻碍和分导膨胀的作用。

11.4.4 简述

解析模型和数值模型相互补充

1.

解析模型

磁力驱动

喷流加速，最后近似喷射

辐射驱动喷射运动

不足：忽略压缩子流

加入压缩猝发

较高的等离子体密度为喷射提供

数值模型

热驱动，不计Alfvén波

波前为亮带，而不在喷流
的规则分裂层间

应加入磁重联，结合磁重联和
磁驱动

2. 行为特征

- i. 起始于爆发引起喷流，直至喷流事件促使喷流喷发，而对喷流。
 - ii. 周边磁场的作用半径随喷流而变，通过喷流事件上升过程中的转动，造成磁场系统方向改变，周边场的拖曳作用，因此能被喷流减弱。
 - iii. 密实使得喷流形成初期阶段，包括内部的质流流动。
- 和 Fisher 等 观测到喷流是先于爆发喷射加速之前形成

开始时，电离走梯度场，(空间是向小角度，距离长随其后)加速，进入电离的后方。此后随着加热，电离，H₂像消失，K像扩大。在梯度的电离区域，慢形成电子烟雾带。稍密化后即完全进入簇带。

IV. 与电离带相关的叫宁静带或暗带的簇带发展更快，更亮，运动也快得多。

V. 除簇带不进电场外还发现有其他形式：1. 满瓶 (filled bottles)。
2. 高电流 (streamer separations)，云 (clouds)，注入电流
(injections into streamers)，未归入分类。