

UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Tópicos de Topologia Algébrica

Yuri Ximenes Martins
Licenciatura em Física

Mário Henrique Andrade Cláudio
Orientador

Fábio Dadam
Co-orientador

Sumário

Agradecimentos	5
Introdução	7
Convenções	9
1 Preliminares	10
1.1 Álgebra	11
1.2 Topologia	16
1.3 Análise	19
2 Linguagem	23
2.1 Categorias	23
2.2 Funtores	26
2.3 Utilidade	32
3 Unificação	39
3.1 Extensões	39
3.2 Limites	40
3.3 Reconstrução	50
4 Álgebra Abstrata	54
4.1 Categorificação	54
4.2 Monoides	59
4.3 Ações	63
5 Homotopia Abstrata	66
5.1 Estrutura	66
5.2 Categoria Homotópica	72
5.3 Funtores Derivados	74
6 Modelos	76
6.1 Estrutura	76
6.2 Resoluções	78
6.3 Utilidade	81

7	n-Categorias	87
7.1	Estrutura	87
7.2	Simplexos	90
7.3	Slogan	94
8	Homotopia Clássica	97
8.1	Estrutura	97
8.2	Invariantes	103
8.3	Cálculo	107
	Referências Bibliográficas	114

*A todos os seres mágicos do universo, especialmente aqueles peludos e com patas, cuja
cumplicidade almejo um dia conseguir alcançar.*

Agradecimentos

O presente momento é oportuno a fortuitos agradecimentos. Afinal, não fosse a ajuda de muitas pessoas, esta monografia não teria sido concretizada. Em primeiro lugar, devo agradecer o apoio incondicional de minha família e de minha namorada, com os quais dividi meus momentos de angústia e que, sem julgamento prévio, me acolheram e fizeram o impossível para me ver feliz outra vez.

Um agradecimento especial ao professor Luiz Cleber de Brito, que me orientou durante os primeiros anos de graduação, e cujas palavras não me faltam à memória: “estude Matemática em livros de Matemática.” Elas foram o incentivo perfeito.

Também foi da boca do professor Luiz que, pela primeira vez, ouvi a respeito do Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Não posso deixar de agradecer a enorme boa vontade dos integrantes desta instituição, os quais escreveram livros de altíssima qualidade, todos impressos e disponíveis para a compra num preço quase simbólico.

Sou grato aos professores e aos funcionários do DEX, sempre dispostos à ajudar. Agradeço, em particular, aos professores Antônio Marcelo e Helvécio Fagnoli, bem como à professora Iraziet Charret: ainda que não saibam, os tornei parte integrante de minha família. Com efeito, o Antônio e a Iraziet são bons tios, cujos conselhos se executa sem relutar. O Helvécio, por sua vez, é o irmão mais velho que está sempre disposto à ouvir tudo o que se têm dizer, tendo sempre um ponto de vista importante para apresentar.

A prestatividade e a paciência dos professores Mário Henrique Andrade Cláudio e Fábio Dadam, que aceitaram a tarefa de me orientar na disciplina de Projeto Orientado (cargo que informalmente já ocupavam desde muito antes), foi crucial para o desenvolvimento deste tomo. A eles, meus sinceros agradecimentos. Neste mesmo espírito, sou grato ao cordial trabalho dos professores Rita de Cássia Dornelas Sodré Broche e Lucas Monteiro. Com empenho e boa vontade, eles constituíram a banca examinadora desta monografia.

Também devo agradecimentos ao amigo Romero Solha, que com muita boa vontade leu uma das versões preliminares do texto e fez diversas críticas e sugestões.

Por fim, caso exista, agraço a Deus por ter me dado a possibilidade de amar e de pensar.

*And now the end is near
And so I face the final curtain
My friend, I'll say it clear
I'll state my case of which I'm certain
I've lived a life that's full
I traveled each and every highway
And more, much more than this
I did it my way*

*Regrets, I've had a few
But then again, too few to mention
I did what I had to do
And saw it through without exemption
I've planned each charted course
Each careful step along the byway
And more, much more than this
I did it my way*

*Yes there were times, I'm sure you knew
When I bit off more than I could chew
But through it all when there was doubt
I ate it up and spit it out
I faced it all and I stood tall
And did it my way*

*I've loved, I've laughed and cried
I've had my fill, my share of losing
And now as tears subside
I find it all so amusing
To think I did all that
And may I say, not in a shy way
Oh, no, oh, no, not me
I did it my way*

*For what is a man, what has he got?
If not himself, than he has naught
To say the things he truly feels
And not the words of one who kneels
The record shows, I took the blows
And did it my way*

My Way, Frank Sinatra

Introdução

Existe um certo consenso de que tudo aquilo que pertence à matemática pode ser classificado dentro de três disciplinas: a *álgebra*, a *análise* e a *topologia*.

Na álgebra, introduz-se operações e relações num determinado conjunto, de modo a satisfazerem uma lista de propriedades. Diz-se, então, que em mãos se têm uma estrutura algébrica. Fala-se que duas estruturas algébricas de mesma natureza são equivalentes quando existe uma aplicação bijetiva entre elas, chamada de isomorfismo, cuja ação preserva as operações e as relações envolvidas.

Na análise, são estudadas classes de funções. Por exemplo, a classe das funções (ditas diferenciáveis) que, nas vizinhanças de cada ponto de seu domínio, admitem uma aproximação linear. Ou então das funções chamadas integráveis, que podem ser utilizadas como via de medida às dimensões de alguma região. Ou ainda daquelas que, além de admitirem uma aproximação linear, satisfazem determinada equação.

Na topologia (e aqui estamos considerando a geometria como parte integrante desta disciplina), tem-se os espaços topológicos como entidades fundamentais. É nela que o conceito de continuidade vem a público em seu sentido mais profundo. É a partir dela que se pode diferir aquilo que é localmente válido daquilo que é globalmente verdadeiro. A noção de equivalência ali empregada é a de homeomorfismo: compreende-se que dois espaços topológicos são homeomorfos quando existe uma aplicação contínua e bijetiva entre eles, cuja inversa também é contínua. Preocupa-se, dentre outras coisas, em determinar se dois espaços topológicos dados são ou não equivalentes entre si.

Em que pese a enorme abrangência da topologia, na ausência de imposições adicionais e/ou elaboração de novos métodos de trabalho, não se deve estranhar a predominância de resultados pouco profundos. Por outro lado, tendo conhecimento da organização da álgebra e das poderosas ferramentas da análise, é quase que impensável não utilizar destas como meio de desenvolvimento da topologia. É neste espírito que se veem surgir a *topologia algébrica* e a *topologia diferencial*.

Para afirmar que duas estruturas algébricas são isomorfas, deve-se obter uma correspondência entre elas (digamos f) que seja bijetiva e que preserve operações e relações. A princípio, em contrapartida ao conceito de homeomorfismo (no qual é a exigida a continuidade da inversa), pode-se ter estruturas isomorfas sem nada ser dito acerca de f^{-1} . Isto reforça uma máxima: *a tarefa de decidir a equivalência entre duas estruturas algébricas é geralmente mais simples do que o problema de encontrar um homeomorfismo entre dois espaços topológicos*. Com isto em mente, a topologia algébrica se ocupa de associar a cada espaço topológico uma gama de estruturas algébricas (geralmente grupos e módulos), de modo que dois deles serão homeomorfos somente se as respectivas estruturas associadas forem isomorfas.

A topologia diferencial se caracteriza não só pelas ferramentas que utiliza, mas também pela

classe de espaços topológicos que abrange. Com efeito, ela se restringe às variedades diferenciáveis: entidades localmente semelhantes aos espaços euclidianos, mas que globalmente podem ser diferentes destes. Esta semelhança permite trazer para cá alguns conceitos da análise que sejam de carácter local. Por exemplo, tem sentido falar de aplicações entre variedades que, ponto a ponto, podem ser linearmente aproximadas. A integração de funções também tem seu lugar: é realizada via formas diferenciais. Por fim, generaliza-se o conceito de campo de vetores e, a partir dele, trata-se de equações diferenciais no âmbito das variedades.

No espírito das disciplinas acima descritas, pode-se dizer que o trabalho aqui apresentado se encontra na intersecção entre a topologia algébrica e a topologia diferencial. Assim, em boa parte do texto, nossos objetos básicos são as variedades, ao passo que os métodos utilizados são, em muitos casos, algébricos. Particularmente, pode-se dizer que há um enfoque especial em aspectos abstratos de uma área da topologia algébrica conhecida como *teoria da homotopia*.

Iniciamos o texto desenvolvendo os pré-requisitos básicos em álgebra, topologia e análise que se farão necessários para a leitura do texto. Ali tentamos preparar o leitor para vários conceitos que serão introduzidos em outras situações. Para tanto, apresentamos a álgebra clássica, a topologia e a análise em variedades já no contexto da teoria das categorias.

No segundo capítulo, introduzimos efetivamente os conceitos de categoria, de funtores e de transformações naturais, os quais constituem a linguagem moderna utilizada para associar invariantes a espaços topológicos. Ali também apresentamos algumas situações nas quais os funtores se mostram úteis, como nos problemas de classificação de categorias e de levantamento/extensão de morfismos.

O terceiro capítulo é marcado pelas extensões de Kan e pelos limites e colimites. Ali mostramos, por exemplo, que produtos e equalizadores determinam todos os limites e que limites determinam todas as extensões de Kan. O quarto capítulo (intitulado Álgebra Abstrata) trata das categorias monoidais, as quais são as “categorificações” dos monoides usuais.

Já no quinto e no sexto capítulo, estudamos a homotopia em seu contexto mais abstrato: em categorias com equivalências fracas e em categorias modelo. O sétimo capítulo se inicia com uma extensão do conceito de categoria para as n -categorias estritas: se uma categoria possui objetos e morfismos, uma 2-categoria possui também “morfismos entre morfismos” (chamados de 2-morfismos), os quais haverão de corresponder às homotopias. Em seguida, trabalhamos no contexto dos objetos simpliciais e damos uma estratégia de definição de categorias “não-estritas” em altas dimensões. Isto significa que certas propriedades de n -morfismos só são válidas módulo $(n + 1)$ -morfismos. No fim, mostramos que as categorias próprias para o estudo da homotopia são, precisamente, aquelas que possuem uma noção coerente de homotopia entre seus morfismos.

Por fim, o oitavo capítulo trata da teoria da homotopia clássica. Ali introduzimos um modelo na categoria dos espaços topológicos “bem comportados”, demonstramos o teorema de classificação de fibrados principais, estudamos os grupos de homotopia e apresentamos estratégias que nos permitem calculá-los em algumas situações. Assim, é neste capítulo que construímos os nossos primeiros invariantes topológicos via métodos puramente algébricos.

Devemos ressaltar que, durante a escrita do texto, tentamos torná-lo tão acessível quanto pudéssemos. Isto levou à introdução do primeiro capítulo, bem como à elaboração de diversos exemplos. Estes foram cuidadosamente escolhidos. Com efeito, introduzimo-los ou porque nos seriam úteis em outros momentos, ou por fazerem um *link* entre os conceitos novos ali apresentados e o conhecimento prévio do leitor, ou mesmo por realçarem diferentes aspectos da teoria que não foram expostos no texto.

Convenções

- Denotaremos os conjuntos numéricos utilizando a convenção de Bourbaki: na respectiva ordem, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} e \mathbb{H} representam os números naturais (que supomos conter o zero), os inteiros, os racionais, os reais, os complexos e os quatérnios;
- trabalhamos, desde o começo, com teoria ingênua de conjuntos. Assim, pressupomos que o conceito de conjunto e a relação de pertinência são entes primitivos dentro de nosso arcabouço lógico;
- a intersecção, a reunião, a reunião disjunta e o produto cartesiano entre conjuntos X e Y são respectivamente denotados por $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \sqcup Y$ e $X \times Y$. Escrevemos $X \subset Y$ para indicar que X é subconjunto de Y e utilizamos de $Y - X$ para representar a coleção de todo elemento de Y que não pertence à X ;
- os conjuntos que possuem somente um elemento são confundidos com o próprio elemento. Assim, por exemplo, escreve-se x ao invés de $\{x\}$. Desta forma, uma função definida em $\{x\}$ e assumindo valores em um outro conjunto Y se escreve $f : x \rightarrow Y$;
- sempre que não especificado o domínio de uma função, este é assumido como sendo o maior possível (isto é, as funções serão sempre tomadas em seu domínio natural). Por exemplo, a notação $f(x) = \sqrt{x}$ indica que f tem $\mathbb{R} - 0$ como domínio.
- assumimos sempre o produto interno canônico em \mathbb{R}^n . Com respeito a ele, \mathbb{S}^n e \mathbb{D}^n denotam, respectivamente, a esfera e o disco unitário fechado em dimensão n ;
- o bordo, o fecho e o interior de um espaço X são denotados por ∂X , \overline{X} e $\text{int}X$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo relembramos os conceitos fundamentais da álgebra, da topologia e da análise, os quais serão fortemente utilizados ao longo do texto. Sobre estes assuntos, pouco se exige além daquilo que aqui é apresentado. Entretanto, não acreditamos que os singelos esboços aqui expostos substituam a leitura de textos específicos sobre os assuntos a que se designam. Neste sentido, sugerimos ao leitor que consulte outras referências sempre que sentir necessidade. Por exemplo, textos clássicos sobre álgebra, topologia e análise incluem [43, 50], [41, 63] e [44, 33], respectivamente.

Na primeira secção, somos devotos à álgebra. Ali se têm como objetos básicos as *estruturas algébricas*: tratam-se simplesmente de conjuntos nos quais se sabe operar. Apresentamos diversos exemplos de tais estruturas e estudamos os mapeamentos naturais entre elas (estes nada mais são que funções que preservam todas as operações envolvidas). Também estudamos maneiras universais de se projetar e de se incluir. Ao final, no contexto da teoria dos módulos, apresentamos o *produto tensorial*, o qual é universal com respeito à propriedade de tornar lineares as correspondências bilineares.

A segunda secção é marcada pelo estudo dos *espaços topológicos*: são os objetos mais genéricos nos quais se sabe dizer, de modo qualitativo, se dois pontos estão próximos ou estão distantes. É neste ambiente que se desenvolve a topologia. Os mapeamentos naturais entre dois destes espaços são simplesmente as funções, ditas *contínuas*, que preservam todas as estruturas envolvidas. Isto é, que levam pontos próximos em pontos próximos. Mostramos que, assim como na álgebra, na topologia existem maneiras universais de projetar e de incluir. Para terminar, discutimos a necessidade de (e o interesse em) regras que transfiram problemas da topologia para a álgebra.

Na terceira secção, por sua vez, estudamos as *variedades diferenciáveis*. Estas são as entidades mais gerais nas quais o conceito de diferenciabilidade tem lugar e, portanto, constituem o ambiente ideal para falar de análise. Os mapeamentos entre variedades são, naturalmente, as aplicações diferenciáveis. Finalizamos a secção (e também o capítulo) discutindo que, diferentemente do que acontece nas categorias algébricas e na categoria topológica, na categoria das variedades não se tem formas universais de projetar e de incluir. Isto ressalta a complexidade (e, portanto, o poderio) da análise diante da álgebra e da topologia.

1.1 Álgebra

Grosso modo, a álgebra clássica tem como objetos básicos os conjuntos, chamados de *estruturas algébricas*, nos quais se encontram definidas operações sujeitas à condições de compatibilidade e de coerência. Para nós, uma *operação* em X é simplesmente uma função $*$: $X \times X \rightarrow X$ que goza de associatividade e da existência de elemento neutro. Isto significa que existe um elemento $1 \in X$ tal que, para quaisquer que sejam $x, y, z \in X$, tem-se

$$1 * x = x = x * 1 \quad \text{e} \quad (x * y) * z = x * (y * z).$$

Uma outra maneira de descrever tais relações é através da comutatividade dos diagramas abaixo. Neles, o símbolo \simeq indica uma bijeção natural, ao passo que o mapa constante no elemento neutro 1 é também denotado por 1 .

$$\begin{array}{ccc} X \times (X \times X) & \xrightarrow{\simeq} & (X \times X) \times X \xrightarrow{* \times id} X \times X \\ id \times * \downarrow & & \downarrow * \\ X \times X & \xrightarrow{*} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 \times X & \xrightarrow{1 \times id} & X \times X \xleftarrow{id \times 1} X \times 1 \\ & \searrow \simeq & \downarrow * \swarrow \simeq \\ & & X \end{array}$$

Na construção de estruturas algébricas, costuma-se impor mais algumas condições sobre as operações. As mais usuais são a *comutatividade*, significando que $x * y = y * x$, e a *existência de inversos*, traduzida por uma aplicação $inv : X \rightarrow X$, tal que $x * inv(x) = 1$. Estas condições também podem ser descritas por meio de diagramas, os quais apresentamos abaixo. No primeiro deles, $b(x, x') = (x', x)$, ao passo que, no segundo, Δ é o mapa diagonal $\Delta(x) = (x, x)$. Uma estrutura é *comutativa* (ou *abeliana*) quando todas as suas operações o são.

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{b} & X \times X \\ & \searrow * & \swarrow * \\ & & X \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{1} & 1 & \xrightarrow{1} & X \\ \Delta \downarrow & & & & \uparrow * \\ X \times X & \xrightarrow{id \times inv} & X \times X & & \end{array}$$

Exemplo 1.1.1. O exemplo mais simples de estrutura algébrica é um *monoide*. Este é consistido de um conjunto X dotado de uma única operação $*$: $X \times X \rightarrow X$. Em seguida, tem-se os monoides abelianos. Um monoide abeliano com inversos é chamado de *grupo*. Um grupo abeliano com outra operação, esta compatível com a primeira, recebe o nome de *anel*. Se a nova operação é comutativa e também possui inversos, obtém-se um *corpo*. Assim, pode-se dizer que um monoide é simplesmente um conjunto no qual se sabe somente somar, ao passo que num grupo sabe-se somar e subtrair. Por sua vez, num anel é possível somar, subtrair e multiplicar. Finalmente, além de tudo isto, num corpo também se sabe dividir. Nesta perspectiva, com a adição e com a multiplicação usuais de números, \mathbb{N} é monoide, \mathbb{Z} é anel, enquanto que \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} são corpos.

Na álgebra clássica, além de operar num conjunto, sabe-se fazer uma estrutura algébrica *agir* em outra. Neste processo, a estrutura que age é sempre mais complexa (isto é, tem sempre um número maior ou igual de operações) que aquela na qual a ação é efetivada. De maneira mais precisa, uma *ação* de uma estrutura X numa outra estrutura Y é um mapa $\alpha : X \times Y \rightarrow Y$, com imagem denotada por $\alpha(x, y) = x \cdot y$, o qual é associativo, preserva elemento neutro e também

cada uma das operações envolvidas. Por exemplo, se $*$ e $+$ são operações em X e em Y , então é preciso que

$$(x * x') \cdot y = x \cdot (x' \cdot y), \quad 1 \cdot y = y \quad \text{e} \quad x \cdot (y + y') = (x \cdot y) + (x' \cdot y).$$

Todas estas condições podem ser traduzidas em diagramas comutativos. Por exemplo, as duas primeiras delas se referem, juntas, ao diagrama abaixo apresentado.

$$\begin{array}{ccccc} X \times (X \times Y) & \xrightarrow{\simeq} & (X \times X) \times Y & \xrightarrow{* \times id} & X \times Y & \xleftarrow{1 \times id} & 1 \times Y \\ id \times * \downarrow & & & & \downarrow \alpha & \nearrow \simeq & \\ X \times Y & \xrightarrow{\alpha} & & & Y & & \end{array}$$

Exemplo 1.1.2. Um anel R agindo num grupo abeliano chama-se *módulo sobre R* . Quando R é um corpo \mathbb{K} , fala-se que se tem um *espaço vetorial sobre \mathbb{K}* . Um anel R agindo num outro anel X recebe o nome de *álgebra sobre R* . Observamos que dar uma álgebra sobre um anel R é o mesmo que dar um R -módulo X dotado de uma operação adicional $*$: $X \times X \rightarrow X$, a qual é compatível tanto com a operação de grupo abeliano quanto com a ação.

Mapeamentos

Se uma estrutura algébrica é composta de operações, um mapeamento entre estruturas de mesma natureza há de preservar cada uma das operações envolvidas. Tais mapeamentos são genericamente chamados de *homomorfismos*.

Exemplo 1.1.3. Um monoide é formado de uma única operação. Assim, um mapeamento (ou homomorfismo) entre dois monoides (digamos X e Y , com respectivas operações $+$ e $+$ '), é uma função $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x + x') = f(x) + f(x')$. A mesma definição se aplica para grupos, pois estes têm igual número de operações que os monoides. Por sua vez, se adicionarmos uma operação à tais estruturas, tornando-a anéis, então a correspondente noção de homomorfismo haverá de ser um mapa que satisfaz

$$f(x + x') = f(x) + f(x') \quad \text{e também} \quad f(x * x') = f(x) * f(x').$$

Quando uma estrutura age em outra, há, além das operações, uma nova propriedade: a própria ação. Assim, um mapeamento entre tais entidades deve preservar não só as operações, mas também as ações.

Exemplo 1.1.4. Como vimos, os módulos sobre um anel R são simplesmente os grupos abelianos sujeitos a alguma ação de R . Assim, um homomorfismo entre dois destes módulos há de ser um homomorfismo $f : X \rightarrow Y$ entre os grupos subjacentes, o qual preserva a ação de R . Isto é, que satisfaz a condição $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$, com $a \in R$. Também se diz que f é *R -linear*.

Exemplo 1.1.5. A composição entre homomorfismo é sempre um homomorfismo, independente de qual seja a classe de estruturas algébricas consideradas. Assim, se compomos homomorfismos de grupos, obtemos aplicação com iguais propriedades. Da mesma forma, se compomos mapeamentos entre módulos, temos como resultado um homomorfismo de módulos. Algumas vezes, evidencia-se este fato dizendo que a composição *preserva linearidade*.

Exemplo 1.1.6. Se $Y \in \mathbf{Alg}$, então no conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow Y$ pode-se definir operações naturais que fazem dele um objeto de \mathbf{Alg} . Isto é feito “termo a termo”. De maneira mais precisa, para cada operação e cada ação, basta pôr

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (a \cdot f)(x) = a \cdot f(x).$$

Assim, em particular, o conjunto $\text{Hom}_{\mathbf{Alg}}(X; Y)$ de todos os homomorfismos entre X e Y admite uma estrutura natural que o torna membro de \mathbf{Alg} .

Fala-se que duas estruturas algébricas X e Y , ambas de mesma natureza, são *isomorfas* no momento em que se consegue obter homomorfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$, cujas composições $g \circ f$ e $f \circ g$ coincidem com as respectivas identidades. Se este é o caso, escreve-se $X \simeq Y$ e diz-se que o mapa f é um *isomorfismo* entre X e Y .

Observamos que, se duas entidades são isomorfas, então elas possuem essencialmente as mesmas propriedades algébricas. Assim, em geral não se trabalha com um único objeto X , mas sim, de maneira simultânea, com todos os objetos que são equivalentes a ele. Quando uma propriedade é válida numa entidade isomorfa a X , diz-se que ela vale em X *a menos de isomorfismos* (ou *módulo isomorfismos*).

Uma propriedade importante das equivalências presentes na álgebra clássica é a seguinte: para que um homomorfismo seja um isomorfismo basta que ele seja bijetivo. Com efeito, se este é o caso, então *sua inversa é obrigatoriamente linear*. De um modo geral, esta caracterização não é válida para as equivalências definidas em outros campos da matemática como, por exemplo, na topologia e na análise.

Exemplo 1.1.7. O conjunto dos automorfismos de uma entidade algébrica X (isto é, o conjunto dos isomorfismos de X nela mesma) sempre possui uma estrutura de grupo quando dotado da operação de composição. O elemento neutro é precisamente a identidade $id_X : X \rightarrow X$.

Uma vez fixada uma classe de estruturas algébricas, tem-se uma correspondente noção de homomorfismo, a qual é preservada por composições e satisfeita pelas funções identidade. Por conta disso, diz-se que estruturas de mesma natureza são os *objetos* de uma *categoria*, tendo os homomorfismos como *morfismos* e a composição usual de funções como *lei de composição*. Desta forma, tem-se a categoria dos conjuntos, a categoria grupos, a categoria dos anéis e a categoria dos R -módulos, as quais são usualmente representadas por **Set**, **Grp**, **Rng** e **Mod_R**. No que segue, **Alg** denota uma categoria algébrica genérica.

Operações

Em geral, as categorias algébricas vêm dotadas de duas operações internas, usualmente chamadas de *produto* e de *coproducto*, as quais nos permitem construir novas estruturas a partir de outras dadas. Tais operações são interessantes por serem *universais* em um certo sentido. A motivação para a definição de universalidade pode ser obtida olhando para os conjuntos (afinal, eles são as entidades algébricas mais simples).

Dados conjuntos X e Y , sabe-se realizar o produto cartesiano $X \times Y$ e também a reunião disjunta $X \sqcup Y$. Tem-se maneiras naturais de *projetar* o produto nos conjuntos subjacentes, e também de *incluí-los* na sua reunião. Com efeito, para X (e, de maneira análoga, para Y) basta

considerar as respectivas correspondências

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X \quad \text{e} \quad \iota_1 : X \rightarrow X \sqcup Y, \quad \text{tais que} \quad \pi_1(x, y) = x \quad \text{e} \quad \iota_1(x) = x.$$

Este produto e estas projeções descrevem todas as outras. Afinal, se X' é um conjunto arbitrário dotado de funções $f : X' \rightarrow X$ e $g : X' \rightarrow Y$, as quais representam uma nova maneira de projetar, então existe uma única aplicação $u : X' \rightarrow X \times Y$ cumprindo $f = \pi_1 \circ u$ e $g = \pi_2 \circ u$. Dualmente, dadas f e g , agora representando nova maneira de incluir, obtém-se único um $u : X \sqcup Y \rightarrow X'$ que verifica as relações $f = u \circ \iota_1$ e $g = u \circ \iota_2$. É neste sentido (representado pela comutatividade dos digramas abaixo) que o produto cartesiano e a reunião disjunta de conjuntos são operações *universais*.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow f & \\ X' & \xrightarrow{u} & X \times Y \\ & \searrow g & \\ & & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow f & \\ X' & \xrightarrow{u} & X \oplus Y \\ & \searrow g & \\ & & Y \end{array} \quad (1.1)$$

Agora, uma vez que as propriedades universais do produto cartesiano e da reunião disjunta foram descritas simplesmente em termos de mapeamentos entre conjuntos e comutatividade de diagramas, podemos abstrair tal conceito, levando-o para outras categorias algébricas. Com efeito, diz-se que uma categoria algébrica **Alg** possui *produtos* quando há uma regra \times que toma duas entidades $X, Y \in \mathbf{Alg}$ e associa uma terceira $X \times Y$, a qual vem acompanhada de homomorfismos

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X \quad \text{e} \quad \pi_2 : X \times Y \rightarrow Y,$$

que são *universais* no sentido do primeiro dos diagramas acima. Igualmente, fala-se **Alg** possui *coprodutos* quando existe uma regra \oplus , que a cada par de objetos $X, Y \in \mathbf{Alg}$ devolve um outro $X \oplus Y$, assim como homomorfismos

$$\iota_1 : X \rightarrow X \oplus Y \quad \text{e} \quad \iota_2 : Y \rightarrow X \oplus Y,$$

os quais são universais no contexto do segundo dos diagramas anteriormente apresentados.

Exemplo 1.1.8. Em algumas categorias algébricas, os produtos e coprodutos são facilmente descritos. Em outras, no entanto, eles (sobretudo os coprodutos) podem ter uma expressão não muito simplificada. Por exemplo, na categoria **Grp** dos grupos, o produto entre X e Y é simplesmente o produto cartesiano entre eles, dotado da operação “componente à componente”

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

em que estamos utilizando a mesma notação para representar as operações em todos os conjuntos. As projeções, neste caso, são as projeções usuais. Observamos agora que, se um anel R age em X e Y , então ele também age no grupo $X \times Y$. Com efeito, basta tomá-la “componente à componente” mais uma vez. Isto significa que estruturas de módulos em X e Y induzem correspondente estrutura em $X \times Y$, tal que as projeções usuais são lineares. Desta forma, elas estendem o produto de **Grp** à categoria **Mod_R**.

Exemplo 1.1.9. Em contrapartida ao que vimos ocorrer para produtos no exemplo anterior, na categoria dos módulos, os coprodutos são facilmente descritos, ao passo que possuem uma expressão complicada em **Grp**. A razão é simples: módulos são estruturas abelianas, algo que não acontece com todos os grupos. Neste mesmo espírito, espera-se que coprodutos em **Rng** sejam difíceis de explicitar. E, de fato, assim o é. Em \mathbf{Mod}_R o coproduto entre X e Y é a *soma direta* entre eles: trata-se do módulo *gerado* por tais entidades. Isto é, trata-se do conjunto de todas as “combinações lineares” $a \cdot x + b \cdot y$, com $a, b \in R$, $x \in X$ e $y \in Y$. Para uma expressão dos coprodutos em **Grp** e em **Rng**, veja [43, 50].

Observamos que, como obtido nos exemplos anteriores, os produtos de **Grp** e \mathbf{Mod}_R são simplesmente os produtos em **Set**. Isto significa que a inclusão de tais categorias em **Set** *preserva produtos*. Nem toda inclusão possui esta propriedade.

Produto Tensorial

Se uma categoria algébrica **Alg** possui produtos, os quais são preservados pela inclusão, ali podemos falar de *mapas bilineares*. Com efeito, diz-se que uma função $f : X \times Y \rightarrow Z$ é *bilinear* quando é um homomorfismo em cada uma de suas entradas. Isto significa que, para quaisquer operações nas estruturas X e Y , vale

$$f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y) \quad \text{e} \quad f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y').$$

Particularmente, se existem ações em X e Y , então estas também devem ser preservadas, em cada entrada, por f . Mais precisamente, deve valer

$$f(a \cdot x', y) = a \cdot f(x', y) \quad \text{e} \quad f(x, a \cdot y') = a \cdot f(x, y').$$

Observamos que, em geral, *uma função bilinear não é um homomorfismo*. Em outras palavras, ser bilinear não é o mesmo que ser linear de $X \times Y$ em Z . Isto se traduz no fato de que, de um modo geral, não existem bijeções entre

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(X \times Y; Z) \quad \text{e} \quad \mathrm{Bil}_{\mathbf{Alg}}(X \times Y; Z)$$

O problema está justamente em \times . Uma regra \otimes , substituta para \times , para a qual as bijeções anteriores podem ser encontradas, chama-se *produto tensorial* em **Alg**. Em outras palavras, este se trata de uma regra que toma objetos $X, Y \in \mathbf{Alg}$ e devolve um outro $X \otimes Y$, de tal modo que dar um morfismo $X \otimes Y \rightarrow Z$ é o mesmo que dar uma correspondência bilinear $X \times Y \rightarrow Z$.

Exemplo 1.1.10. Na categoria **Set**, os objetos são conjuntos sem nenhuma estrutura adicional e, portanto, ser bilinear e não o ser é a mesma coisa. Disto segue que, em tal categoria, o produto cartesiano é o próprio produto tensorial.

Exemplo 1.1.11. Diferentemente do que acontece em **Set**, o produto usual não é tensorial na categoria dos módulos. No entanto, ali ainda se sabe construir uma tal regra. A ideia é simples: procura-se pela relação que equivalência em $X \times Y$ tal que, para cada mapa bilinear $f : X \times Y \rightarrow Z$, a função $\hat{f}(\pi(x, y)) = f(x, y)$, com domínio no espaço quociente, esteja bem definida e seja linear. Uma vez obtida esta relação, pode-se tomar $X \otimes Y$ como sendo o próprio espaço quociente.

Uma observação importante é a seguinte: se introduzimos a estrutura algébrica natural no conjuntos dos homomorfismos, obtêm-se bijeções

$$\text{Bil}_{\mathbf{Alg}}(X \times Y; Z) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Alg}}(X; \text{Hom}_{\mathbf{Alg}}(Y; Z)),$$

de modo que \otimes é produto tensorial em \mathbf{Alg} quando, e somente quando, computa-se

$$\text{Hom}_{\mathbf{Alg}}(X \otimes Y; Z) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Alg}}(X; \text{Hom}_{\mathbf{Alg}}(Y; Z)).$$

Assim, em tese, pode-se utilizar a caracterização anterior para *definir o que vem a ser um produto tensorial numa categoria algébrica \mathbf{Alg} , mesmo que ela não possua produtos*.

1.2 Topologia

A topologia tem como objetos básicos os *espaços topológicos*. Estes são conjuntos X nos quais cada elemento é dotado de uma família de *vizinhanças fundamentais*: tratam-se, pois, de subconjuntos de X contendo o respectivo elemento, sendo escolhidos de modo a satisfazerem condições de compatibilidade.

Mais precisamente, um espaço topológico é um conjunto X dotado de uma aplicação τ , que a cada *ponto* $x \in X$ faz corresponder uma coleção $\tau(x)$ de subconjuntos de X , todos contendo x , os quais cumprem a seguinte condição:

- se um ponto $z \in X$ está na intersecção $B_x \cap B_y$ entre vizinhanças básicas de x e de y , então este possui uma vizinhança $B_z \in \tau(z)$ ali inteiramente contida. Isto significa, em particular, que qualquer ponto $x \in X$ admite vizinhanças *arbitrariamente pequenas*: para quaisquer $B_x, B'_x \in \tau(x)$ existe uma vizinhança menor $B''_x \in \tau(x)$ contida em $B_x \cap B'_x$.

A classe mais importante de subconjuntos de um espaço topológico (X, τ) são aqueles que podem ser escritos como a reunião de vizinhanças básicas. Estes são os chamados *abertos* de X segundo τ . Diz-se que a coleção de todos eles determinam uma *topologia* ou uma *estrutura topológica* em X . Como logo se convence, diferentes aplicações τ e τ' (isto é, diferentes noções de vizinhança básica) podem produzir a mesma topologia. *Isto reforça o fato de que o conceito fundamental é o de aberto e não o de vizinhança básica.*

Intuitivamente, um espaço topológico é um conjunto no qual se sabe dizer *qualitativamente* se dois pontos estão ou não próximos. Com efeito, x e y o estarão se existirem vizinhanças B_x e B_y , com $y \in B_x$ e $x \in B_y$. Observamos, no entanto, que tal noção de proximidade não é *quantitativa*, não é *mensurável*. Espaços topológicos nos quais é possível medir a distância entre dois pontos são chamados de *espaços métricos*. De forma mais precisa, um espaço métrico é um espaço topológico X cujas vizinhanças básicas provém de uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, chamada *métrica*, tal que $d(x, y)$ mensura a distância entre x e y . Isto significa que:

1. $d(x, y)$ nunca é negativo, sendo nulo se, e somente se, $x = y$;
2. a distância entre x e y é igual a distância entre y e x ;
3. a hipotenusa nunca excede a soma dos catetos: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, seja qual for o z .

Mapeamentos

Em topologia, os mapeamentos entre espaços topológicos (X, τ) e (X', τ') são as correspondências $f : X \rightarrow X'$, ditas *contínuas*, que levam pontos próximos em pontos próximos. Isto é, tais que, para quaisquer $x, y \in X$, é sempre possível fazer $f(y)$ arbitrariamente próximo de $f(x)$, bastando tomar x e y suficientemente próximos. Mais precisamente, para que $f(y)$ esteja numa dada vizinhança $B_{f(x)}$ de $f(x)$, basta que y esteja numa vizinhança $B_x \in \tau(x)$.

A identidade de qualquer espaço é sempre uma função contínua. Assim como vimos ocorrer para a linearidade, continuidade também é preservada por composições. Por conta destes fatos, diz-se que os espaços topológicos e as funções contínuas, juntamente com a composição usual de funções, definem uma categoria **Top**.

A noção de equivalência empregada na topologia (isto é, válida na categoria **Top**) é a de *homeomorfismo*. Compreende-se que dois espaços X e X' são *homeomorfos* quando existem funções contínuas $f : X \rightarrow X'$ e $g : X' \rightarrow X$ cujas composições são identidades de X e X' .

Intuitivamente, dois espaços serão homeomorfos quando um puder ser continuamente deformado no outro sem que, para isto, se tenha que “rasgar”, “furar” ou “colapsar dimensões”. Assim, por exemplo, espera-se que a esfera \mathbb{S}^2 seja homeomorfa ao cubo (basta amassar os cantos), mas não o seja ao toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, pois este possui um furo no meio. Da mesma forma, o cilindro infinito $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ há de ser homeomorfo a qualquer cilindro de altura finita (retirado o seu bordo), por menor que esta seja. No entanto, espera-se que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e \mathbb{S}^1 não sejam equivalentes: para chegar no círculo, precisa-se colapsar uma dimensão do cilindro, algo que não é satisfeito pelos homeomorfismos.

Observamos haver uma diferença a topologia a geometria clássica. Nesta última, para que dois objetos sejam equivalentes, é preciso que eles tenham os mesmos ângulos, o mesmo “formato”, a mesma “curvatura”. Lá não se deve esperar, por exemplo, que o cubo seja equivalente à esfera, nem mesmo que um plano seja equivalente a uma versão “em formato de bacia”.

Também há uma diferença importante entre a topologia e a álgebra: como vimos anteriormente, para que um mapeamento entre estruturas algébricas seja um isomorfismo, é necessário e suficiente que ele seja bijetivo. Tal caracterização, no entanto, não é válida para homeomorfismos.

Operações

Existem duas operações essenciais dentro de **Top**. A primeira delas é o *produto topológico* entre espaços X e Y . Este é consistido simplesmente do produto cartesiano $X \times Y$, dotado da aplicação τ , tal que $\tau(x, y) = \tau_X(x) \times \tau_Y(y)$. Em outras palavras, as vizinhanças básicas de $(x, y) \in X \times Y$ são simplesmente produtos entre vizinhanças básicas de x e de y . As projeções na primeira e na segunda entrada são ambas contínuas e caracterizadas pela seguinte propriedade universal: dado X' e dadas funções contínuas $f : X \times Y \rightarrow X$ e $g : X \times Y \rightarrow Y$, há uma única aplicação $u : X' \rightarrow X \times Y$ tal que o primeiro dos diagramas abaixo fica comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow f & \\
 X' & \xrightarrow{u} & X \times Y \\
 & \searrow g & \\
 & & Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow f & \\
 X' & \xrightarrow{u} & X \oplus Y \\
 & \searrow g & \\
 & & Y
 \end{array}
 \quad (1.2)$$

A outra operação em **Top** é a *soma topológica*: dados espaços X e Y , a *soma* entre eles é a reunião disjunta $X \sqcup Y$, dotada da topologia com maior número de abertos em que as inclusões de X e de Y são ambas contínuas. Assim, a soma entre X e Y é precisamente o espaço $X \oplus Y$ tal que, para qualquer espaço X' e quaisquer funções contínuas $f : X \rightarrow X'$ e $g : Y \rightarrow X'$, existe uma única correspondência contínua $u : X \oplus Y \rightarrow X'$ que deixa comutativo o segundo dos diagramas acima.

Conclusão. Por conta da existência de tais operações, diz-se que, assim como as categorias algébricas, a categoria topológica **Top** possui *produtos e coprodutos*.

Invariantes

Dado um espaço topológico, quer-se identificá-lo módulo equivalências. Em outras palavras, quer-se saber quais outros espaços são homeomorfos a ele. Tendo conseguido fazer isto, pode-se substituí-lo por qualquer objeto em sua classe de homeomorfismo. Por exemplo, um espaço difícil de visualizar pode, em princípio, ser equivalente a outro cuja visualização é mais simples. Neste caso, não há motivos para manter o complicado, deixando o mais simples de lado.

Deve-se dizer que o problema de obtenção de classificações é de extrema dificuldade. Dentro deste contexto, o conceito de *invariante topológico*, análogo ao de invariante algébrico, assume valor. Tratam-se, pois, de propriedades invariantes por homeomorfismos, de modo que, se dois espaços são equivalentes, então eles devem ter todos os invariantes em comum.

Algumas classes de invariantes podem ser construídos impondo condições somente sobre a topologia dos espaços em estudo. Por exemplo, pode-se exigir que quaisquer dois pontos do espaço tenham vizinhanças disjuntas, ou então que qualquer cobertura desse espaço por abertos possua uma subcobertura finita. Os entes que cumprem tais condições dizem-se, respectivamente, *Hausdorff* e *compactos*. Em ambos os casos, a propriedade envolvida é a quantidade de abertos que o espaço possui, a qual constitui um invariante topológico. Outro exemplo é o *número de componentes conexas* (isto é, o número de “pedaços”) que formam o espaço.

Observamos que os invariantes assim produzidos não são muito poderosos. Com efeito, a partir deles não se consegue decidir nem mesmo se a esfera é ou não homeomorfa ao toro, algo que já discutimos ser extremamente intuitivo. Assim, quer-se construir novos invariantes, os quais sejam suficientemente poderosos a ponto de nos permitirem mostrar que, realmente, \mathbb{S}^2 não é homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

A estratégia é buscar por regras $F : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Alg}$, em que **Alg** é alguma categoria algébrica, que associem a cada espaço topológico X uma estrutura algébrica $F(X)$, e que cada função contínua $f : X \rightarrow X'$ façam corresponder um homomorfismo $F(f)$ entre $F(X)$ e $F(X')$, de tal modo que composições e identidades são preservadas. Como consequência, homeomorfismos são mapeados em isomorfismos, mostrando-nos que associado a F tem-se um invariante topológico. Tais regras são exemplos de *functores*.

Portanto, para mostrar que dois espaços não são homeomorfos, basta obter um functor que associa estruturas não isomorfas a eles. Por exemplo, constrói-se um functor π_1 , denominado *grupo fundamental*, que associa um grupo $\pi_1(X)$ a cada espaço X , o qual mensura exatamente o número de buracos (chamado de *gênis*) que X possui. Desta forma, tem-se $\pi_1(\mathbb{S}^2) \neq \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$, garantindo a inexistência de um homeomorfismo entre a esfera e o toro.

A busca por funtores $F : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Alg}$ é precisamente o objetivo de uma disciplina da

matemática chamada *Topologia Algébrica*.

Exemplo 1.2.1. Nem todos os funtores definidos em **Top** fornecem bons invariantes. Por exemplo, tem-se um functor natural $\text{Aut} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grp}$, que a cada espaço topológico faz corresponder o grupo $\text{Homeo}(X)$ formado dos homeomorfismos de X , com a operação de composição. O fato de Aut ser um functor nos diz que, se $X \simeq Y$, então $\text{Homeo}(X) \simeq \text{Homeo}(Y)$. Assim, para mostrar que dois espaços são homeomorfos, bastaria provar que seus grupos de homeomorfismos não são isomorfos. O problema está aí: dado um espaço topológico X , em geral não se conhece a estrutura de $\text{Homeo}(X)$, pois este é demasiadamente grande. Portanto, como determinar de dois grupos são ou não isomorfos se nem mesmo os conhecemos? Isto ressalta um ponto importante: não basta obter invariantes, tem-se que saber *calculá-los*.

1.3 Análise

As *variedades* são os espaços topológicos que podem ser globalmente complicados, mas que possuem uma estrutura local extremamente simples. De maneira mais precisa, uma *variedade de dimensão n* é um espaço topológico X tal que cada $x \in X$ admite uma vizinhança homeomorfa a um aberto do semi-espaço $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, formado de todas as listas de $n + 1$ números reais, cuja primeira entrada nunca é negativa.

Os homeomorfismos definidos nas vizinhanças de x chamam-se *sistemas de coordenadas* ou *cartas locais* em x e, sempre que não há risco de confusão, são denotados pela mesma letra “ x ”. Desta forma, dizer que $x : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ é uma carta local, significa dizer que U é vizinhança de $x \in X$, que $x(U)$ é aberto e que a regra $x : U \rightarrow x(U)$ é um homeomorfismo.

Numa variedade, os sistemas de coordenadas assumem o mesmo papel que as bases dos espaços vetoriais possuem no contexto da Álgebra Linear: para demonstrar um teorema, escolhe-se o sistema de coordenadas que lhe parece mais conveniente, resolve-se o problema fazendo uso explícito dele e, ao final, verifica-se que o resultado obtido é independente de tal escolha. Por sua vez, quando se consegue demonstrar um teorema (ou mesmo definir um conceito) sem fazer uso de cartas locais, diz-se que ele é *intrínseco*.

Toda variedade X é a reunião de dois conjuntos disjuntos: seu *bordo* e seu *interior*. O primeiro é formado de todos os pontos $x \in X$ para os quais existe uma carta $x : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ tal que algum ponto de $x(U)$ tem primeira coordenada nula. Isto é, tal que $x(U)$ intersecta $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Por sua vez, o interior de X é formado pelos pontos que não estão no bordo. Uma variedade que coincide com seu interior é dita *não possuir bordo*. Evidentemente, o bordo e o interior de qualquer variedade n -dimensional são variedades sem bordo, de respectivas dimensões $n - 1$ e n .

Exemplo 1.3.1. O disco $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, formado de todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\|x\| \leq 1$, é uma variedade de dimensão n . Com efeito, se um ponto x tem norma unitária (isto é, se está na esfera \mathbb{S}^{n-1}), consideramos como sistema de coordenadas as projeções estereográficas. Por sua vez, se o ponto tem norma menor que um, tomamos como carta a identidade de \mathbb{R}^{n+1} restrita a uma vizinhança qualquer de x .

Diferenciabilidade

Diz-se que uma variedade X é *diferenciável* quando, para quaisquer cartas locais x e x' definidas nas vizinhanças de um mesmo ponto, os homeomorfismos $x' \circ x$ e $x' \circ x$ entre abertos

do \mathbb{H}^n são ambos diferenciáveis. Isto significa que cada um deles é estendível a abertos de \mathbb{R}^{n+1} , onde podem ser linearmente aproximadas.

Observamos que nem toda variedade pode ser dotada de uma estrutura diferenciável. Este fato foi inicialmente demonstrado por M. Kervaire em [42]. Outros contraexemplos, referentes às esferas exóticas (espaços continuamente equivalentes à esfera, mas não diferenciavelmente equivalentes a elas) foram posteriormente obtidos por J. Milnor em [61]. Em dimensões superiores, tem-se o trabalho [80], de I. Tamura.

Em contrapartida, não se deve preocupar com a *classe de diferenciabilidade* de uma dada variedade. Com efeito, por um resultado devido à Whitney, se uma variedade admite uma estrutura de classe C^1 , então também admite uma estrutura C^∞ que, em certo sentido, é equivalente à inicial (veja, por exemplo, o segundo capítulo de [33]). Por conta disso, ao longo do texto trabalhamos sempre com entidades infinitamente diferenciáveis (também ditas *suaves*).

Os mapeamentos entre variedades diferenciáveis X e Y são as *funções diferenciáveis*. Estas nada mais são que aplicações $f : X \rightarrow Y$ tais que para cada $x \in X$ é possível obter cartas x em X e y em Y , respectivamente definidos em vizinhanças dos pontos x e $f(x)$, tais que $y \circ f \circ x^{-1}$ é estendível a um aberto de \mathbb{R}^{n+1} , onde pode ser linearmente aproximada.

Composição preserva diferenciabilidade e, além disso, para toda variedade X , a correspondente função identidade id_X é diferenciável. Assim, da mesma forma que as entidades algébricas e os espaços topológicos originam categorias **Alg** e **Top**, diz-se haver uma categoria **Diff**, na qual se desenvolvem a análise e a topologia diferencial, cujos objetos são as variedades e cujos morfismos são as aplicações diferenciáveis.

As equivalências no contexto das variedades diferenciáveis são os *difeomorfismos*. Assim, diz-se que duas variedades X e Y são *difeomorfas* quando existem funções diferenciáveis entre elas, cujas composições produzem identidades. Em suma, $f : X \rightarrow Y$ é difeomorfismo quando, para quaisquer cartas x e y , a composição $y \circ f \circ x^{-1}$ é diferenciável, bijetiva e com inversa também diferenciável.

Existe uma maneira intrínseca de se fazer corresponder um espaço vetorial a cada ponto de uma variedade diferenciável. Apresentemo-la, pois. Iniciamos observando que o conjunto $\mathcal{D}(X)$ de todas as funções diferenciáveis de X em \mathbb{R} é um anel com respeito às operações de soma e produto de aplicações com valores reais. Particularmente, há uma ação natural de \mathbb{R} em tal anel, dada por $(a \cdot f)(x) = af(x)$, tornando-o uma álgebra real associativa. Tendo isto em mente, definamos: o *espaço tangente a M em x* é o espaço vetorial TX_x , formado de todas as derivações de $\mathcal{D}(X)$ no ponto x . Isto é, trata-se do conjunto dos funcionais lineares $v : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a regra de Leibniz em x :

$$v(f \cdot g) = f(x) \cdot v(f) + v(f) \cdot g(x).$$

Grosso modo, uma função é diferenciável num ponto quando em suas vizinhanças admite uma aproximação linear dada pela derivada. No âmbito das variedades, a noção de diferenciabilidade é definida fazendo uso explícito de sistemas de coordenadas. Tendo o conceito de espaço tangente em mãos, pode-se torná-la *intrínseca*. Com efeito, a *derivada* de $f : X \rightarrow Y$ em um ponto x é definida como sendo a transformação linear

$$Df_x : TX_x \rightarrow TY_{f(x)}, \quad \text{tal que} \quad Df_x(v)(g) = v(g \circ f).$$

Exemplo 1.3.2. A identidade é uma correspondência diferenciável, com $D(id_X)_x = id_{TX_x}$ seja qual for o ponto $x \in X$ escolhido. Como logo se convence, composição preserva diferenciabilidade.

Além disso, diretamente da definição de derivada retira-se a *regra da cadeia*:

$$D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x.$$

Uma aplicação diferenciável f cuja derivada é injetiva (resp. sobrejetiva) em todo x recebe o nome de *imersão* (resp. *submersão*). Uma imersão que é também um homeomorfismo sobre sua imagem chama-se *mergulho*. Esta última condição é válida se, e somente se, $f : X \rightarrow Y$ é injetiva e o conjunto $f(X) \subset Y$ está dotado da topologia induzida de Y (isto é, da topologia com maior número de abertos que torna a inclusão contínua).

A vantagem desta exigência é a seguinte: se f é um mergulho, então podemos “adaptar” as cartas de Y de modo a introduzir uma estrutura diferenciável em $f(X)$. Tendo isto em mente, fica fácil entender as condições requeridas: para que as cartas locais da variedade Y continuem contínuas ao serem restritas à $f(X)$, algo que se utiliza no processo de “adaptação”, basta que a topologia de $f(X)$ seja àquela induzida de Y . Por sua vez, se f não fosse injetiva, então sua imagem poderia se auto-intersectar em algum ponto, impedindo que ali se introduza sistemas de coordenadas. Finalmente, a injetividade da derivada em cada x nos permite identificar o espaço tangente à $f(X)$ em $y = f(x)$ como um subespaço de TY_y .

Quando f é mergulho, diz-se que a estrutura diferenciável introduzida em $f(X) \subset Y$ pelo processo de adaptação faz de tal subespaço uma *subvariedade regular* de Y . Quando f é somente uma imersão injetiva (isto é, quando se retira a exigência de que seja um homeomorfismo), mas a topologia fixada em $f(X)$ ainda nos permite ali introduzir uma estrutura diferenciável, diz-se que tal conjunto é uma *subvariedade imersa* de Y . Enfocamos a diferença entre tais conceitos: se trocamos a topologia de uma subvariedade imersa e consideramos àquela provinda de Y , então o conjunto $f(X)$ pode nem mesmo admitir uma estrutura diferenciável.

A tarefa de determinar a existência (ou não) de mergulhos e imersões de uma variedade é um problema bastante interessante e difícil dentro da topologia diferencial. Mais uma vez, a ideia é procurar por invariantes de X , os quais forneçam condições necessárias à existência de tais classes de aplicações. Neste sentido, exemplos interessantes de invariantes são fornecidos pela teoria das *Classes Características*. Veja, por exemplo, a parte final de [35] (sobretudo o capítulo 18), e também o livro [60] (especialmente o quarto capítulo).

Exemplo 1.3.3. As superfícies $S \subset \mathbb{R}^3$ que são estudadas na geometria diferencial clássica são exemplos importantes de subvariedades regulares. Com efeito, a topologia delas é sempre suposta àquela advinda do \mathbb{R}^3 , ao passo que suas estruturas diferenciáveis são obtidas mediante a exigência de que a inclusão seja uma imersão injetiva (e, portanto, um mergulho). Por um resultado devido à Whitney, qualquer variedade pode ser imersa ou mergulhada num espaço euclidiano de dimensão suficientemente grande. Em outras palavras, não há prejuízo de generalidade em se assumir que uma variedade é, na verdade, superfície regular de algum \mathbb{R}^k . De fato, quando a dimensão da variedade é n , esta pode ser imersa em \mathbb{R}^{2n-1} e mergulhada em \mathbb{R}^{2n} . Utilizando de classes características, mostra-se que esse é a melhor cota inferior que pode ser obtida. Isto é, existem variedades n -dimensionais que não podem ser imersas em \mathbb{R}^{2n-2} .

Operações

Em categorias algébricas, tem-se o produto cartesiano e a soma direta. Na categoria dos espaços topológicos, tem-se o produto e a soma topológica. Por sua vez, em **Diff** tem-se o *produto de variedades* e também a *reunião disjunta* destas.

Com efeito, dadas variedades X e Y , de respectivas dimensões n e m , define-se o *produto* entre elas como sendo o produto cartesiano $X \times Y$, dotado da topologia produto, e, para cada par (x, y) , dos sistemas de coordenadas $x \times y : U \times U' \rightarrow \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^m$, em que $x : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ é carta nas vizinhanças de x e $y : U' \rightarrow \mathbb{H}^m$ é carta nas vizinhanças de y . Há, no entanto, um problema: em geral, $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^m$ não é um semi-espaco de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Em particular, os bordos de \mathbb{H}^n e \mathbb{H}^m podem se intersectar quando tomado o produto cartesiano $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^m$, formando um “bico”. Daí, se alguma das cartas $x \times y$ tiver imagem que contempla tal ponto de intersecção, então a entidade $X \times Y$ também possuirá um “bico” e não será diferenciável. Isto acontece, por exemplo, com o quadrado $I \times I$. Os “bicos”, neste caso, são os cantos do quadrado.

Observamos, em contrapartida, que se nos restringimos às variedades sem bordo, então as correspondências $x \times y$ assumem valores em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, não havendo problemas. Assim, sob esta restrição, o produto $X \times Y$ está bem definido e é uma variedade, também sem bordo, de dimensão $n + m$. Tal entidade é precisamente aquela que, em conjunto com as projeções na primeira e na segunda entrada, satisfaz a propriedade universal ilustrada no primeiro dos diagramas abaixo, onde cada função é diferenciável:

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow f & \\
 X' & \xrightarrow{u} X \times Y & \searrow \pi_1 \\
 & \searrow g & \\
 & & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow f & \\
 X' & \xrightarrow{u} X \oplus Y & \searrow \iota_1 \\
 & \searrow g & \\
 & & Y
 \end{array}
 \tag{1.3}$$

Ainda com as variedades X e Y em mãos, pode-se considerar a soma topológica $X \oplus Y$ entre os espaços topológico subjacentes, o que fornece uma questão natural: admitirá tal soma uma estrutura diferenciável com respeito à qual as inclusões são diferenciáveis e satisfazem a propriedade universal ilustrada no segundo dos diagramas acima? A tentativa mais natural de introduzir esta estrutura é a seguinte: dado um ponto em $z \in X \oplus Y$, quando $z \in X$ considera-se os próprios sistemas de coordenadas de X , ao passo que, se $z \in Y$, toma-se as próprias cartas de Y . Isto realmente faz de $X \oplus Y$ localmente trivial. Existe, no entanto, um novo problema: as cartas de X assumem valores em \mathbb{H}^n , enquanto que as de Y tomam valores em \mathbb{H}^m . Assim, se for $m \neq n$, então existirão pontos de $X \oplus Y$ com diferentes dimensões.

Se quisermos considerar esta estrutura diferenciável em $X \oplus Y$, das duas uma: ou nos retemos às variedades com uma dada dimensão fixa, ou redefinimos o que entendemos por variedades diferenciáveis, permitindo que cada carta assuma valores num semi-espaco diferente. Com efeito, pode-se mostrar que, nesta última situação, a noção de dimensão fica bem definida em cada componente conexa da variedade (isto é, se dois pontos estão na mesma componente, então quaisquer cartas definidas em suas vizinhanças assumem valores no mesmo semi-espaco). O problema em $X \oplus Y$ está justamente no fato de ser uma espaco desconexo.

Conclusão. Como definida inicialmente, a categoria **Diff** é um pouco problemática: diferente-mente do que acontece com as categorias algébricas e com **Top**, nela não existem produtos e nem coprodutos. Para obter produtos, precisamos nos restringir às variedades sem bordo. Por sua vez, se queremos coprodutos, ou nos retemos às variedades de dimensão fixa ou redefinimos o que entendemos por variedades.

Capítulo 2

Linguagem

Grosso modo, fornecer uma *categoria* é o mesmo que fornecer uma classe de objetos, entre os quais se tem uma noção de mapeamento e uma lei de composição. Desta forma, pode-se falar, por exemplo, da categoria cujos objetos permeiam alguma classe de estruturas algébricas, cujos mapeamentos são os respectivos homomorfismos e cuja lei de composição é a usual. Introduzir a concepção formal de categoria e ilustrá-la por meio de exemplos constitui o principal objetivo da secção inicial deste capítulo.

A segunda secção, por sua vez, é voltada à introdução dos conceitos de *functor* e de *transformação natural*. Os primeiros nada mais são que mapeamentos entre categorias, os quais preservam a lei de composição e levam identidades em identidades. Por sua vez, as transformações naturais constituem os mapeamentos entre funtores.

Estes conceitos inserem-se na topologia sob o seguinte aspecto: há uma categoria **Top**, formada por espaços topológicos e tendo aplicações contínuas como mapeamentos. A cada functor ali definido, faz-se corresponder um invariante topológico. Uma transformação natural entre dois de tais funtores pode, então, ser pensada como um vínculo entre os respectivos invariantes que a eles correspondem.

Aquém de sua aplicabilidade imediata em topologia, funtores são úteis na resolução de diversos problemas. Por exemplo, quer-se classificar os objetos de certa categoria a menos de uma noção de equivalência. Questiona-se, também, acerca da possibilidade de estender ou levantar mapeamentos. Em ambos as situações, os funtores dão condições necessárias para que tais problemas admitam solução. Esta íntima relação é assunto da secção final do capítulo.

Ressaltamos a influência das clássicas referências [51, 62]. Um texto mais moderno e que também foi utilizado é [46].

2.1 Categorias

Sob um ponto de vista ingênuo (e, portanto, não-axiomático), uma *categoria* **C** é uma entidade consistida de:

1. uma classe de objetos de mesma natureza;
2. para cada par de objetos X e Y , um conjunto $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$, cujos elementos são chamados de *morfismos* de X em Y , sendo usualmente denotados por $f : X \rightarrow Y$;

3. uma lei de composição, que toma morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, e devolve um outro morfismo $g \circ f : X \rightarrow Z$, de tal forma que:

- a) vale associatividade: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;
- b) para cada objeto X , existe um morfismo $id_X : X \rightarrow X$, chamado *identidade* de X , com a seguinte propriedade: para todo objeto Y e para quaisquer morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$, tem-se $id_X \circ g = g$ e $f \circ id_X = f$.

Numa categoria \mathbf{C} , diz-se que dois objetos X e Y são *equivalentes* (e escreve-se $X \simeq Y$) quando existem morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$, tais que $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$. Fala-se que f é uma *equivalência* ou um *isomorfismo* e que g é a sua *inversa*. A relação \simeq é de equivalência na classe dos objetos de \mathbf{C} . Seu espaço quociente será denotado por $\text{Iso}(\mathbf{C})$.

Advertência. A ingenuidade com a qual encararemos a definição acima é a seguinte: ao longo do texto, *classes* e *conjuntos* serão tomados sinônimos. Isto, no entanto, não é bem verdade. Com efeito, numa formulação axiomática da teoria dos conjuntos (devida a Von Neumann, Gödel e Bernays), o conceito de classe é introduzido como sendo mais amplo do que o conjunto, no intuito de contornar paradoxos “do tipo Russel”. Nela, por exemplo, é possível falar da classe de todos os conjuntos, ao passo que o conjunto de todos os conjuntos não se vê bem definido (veja [5] e também o apêndice de [41]). Dito isto, advertimos: no desenvolvimento que se sucederá, a teoria ingênua de conjuntos será praticada. Assim os referidos paradoxos ali estarão presentes.

No restante desta secção, veremos diversos exemplos e construções de categorias que aparecerão naturalmente ao longo de todo o texto.

Exemplo 2.1.1. Típicas categorias são aquelas formadas por objetos algébricos de mesma natureza (grupos, anéis, espaços vetoriais, módulos, etc.), com morfismos dados pela respectiva noção de homomorfismo inerente à cada classe de tais objetos. Assim como fizemos no primeiro capítulo, guardaremos as notações \mathbf{Grp} e \mathbf{Mod}_R para denotar as categorias dos grupos e dos módulos sobre R . Quando R for um corpo \mathbb{K} , escreveremos $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$.

Exemplo 2.1.2. Com morfismos iguais às aplicações contínuas, a coleção dos espaços topológicos define uma categoria \mathbf{Top} . Nela, dois objetos são equivalentes quando, e só quando, são homeomorfos.

Exemplo 2.1.3. Todo conjunto X , parcialmente ordenado por uma certa relação \leq , define uma categoria $\text{Pos}(X)$: seus objetos são os próprios elementos de X , ao passo que há um (único) morfismo $f : x \rightarrow y$ se, e somente se, $x \leq y$.

Exemplo 2.1.4. Uma categoria \mathbf{D} diz-se uma *subcategoria* de \mathbf{C} (e escreve-se $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$) quando todo objeto de \mathbf{D} é também objeto de \mathbf{C} e, além disso, quando

$$\text{Mor}_{\mathbf{D}}(X; Y) \subseteq \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y) \quad \text{para todo } X, Y \text{ em } \mathbf{D}.$$

Se vale a igualdade, a subcategoria \mathbf{D} é denominada *cheia* (tradução para *full*). Espaços métricos, com morfismos dados pelas aplicações contínuas, dão origem a uma subcategoria cheia \mathbf{Met} de \mathbf{Top} . Igualmente, variedades formam subcategoria cheia \mathbf{Mfd} de \mathbf{Top} . Em contrapartida,

variedades diferenciáveis com aplicações diferenciáveis originam uma subcategoria $\mathbf{Diff} \subset \mathbf{Top}$ que não é cheia. Afinal, existem funções contínuas que não são diferenciáveis. Ao longo de todo o texto, $\mathbf{AbGrp} \subset \mathbf{Grp}$ denotará a subcategoria cheia dos grupos abelianos.

Exemplo 2.1.5. Todos os exemplos apresentados até agora são subcategorias de \mathbf{Set} . Isto é, são formadas de conjuntos dotados de estruturas e de funções cumprindo condições adicionais. Aqui apresentamos um exemplo de que este nem sempre é o caso. Mais precisamente, elencamos uma categoria cujos morfismos não são funções. Com efeito, para cada inteiro n , tem-se uma categoria $n\mathbf{Cob}$, cujos objetos são as variedades de dimensão $n - 1$, compactas e sem bordo. Os morfismos $\Sigma : X \rightarrow Y$, chamados de *cobordismos* entre X e Y , são as classes de difeomorfismo de variedades compactas, de dimensão n , tendo bordo igual à reunião disjunta de X com Y . Isto é, tais que $\partial\Sigma = X \sqcup Y$. A composição é obtida por colagem ao longo do bordo em comum. A unidade de X é a classe de difeomorfismo do produto $X \times I$.

Exemplo 2.1.6. Associada a toda categoria \mathbf{C} existe uma outra, denotada por \mathbf{C}^{op} e chamada de *oposta* de \mathbf{C} , a qual se vê caracterizada pelas seguintes propriedades:

1. seus objetos são os próprios objetos de \mathbf{C} ;
2. para quaisquer X e Y , tem-se $\text{Mor}_{\mathbf{C}^{op}}(X; Y) = \text{Mor}_{\mathbf{C}}(Y; X)$. Dado um morfismo f de \mathbf{C} , utilizaremos de f^{op} para representar seu correspondente em \mathbf{C}^{op} ;
3. por definição, $g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}$.

Exemplo 2.1.7. Partindo de duas subcategorias \mathbf{C} e \mathbf{D} de \mathbf{Set} , constrói-se uma terceira: o *produto* entre elas, denotado por $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$. Seus objetos são os pares (X, Y) , com $X \in \mathbf{C}$ e $Y \in \mathbf{D}$. Seus morfismos são também pares (f, g) , em que f é morfismo de \mathbf{C} e g é morfismo de \mathbf{D} .

Exemplo 2.1.8. Uma vez fixado um objeto $A \in \mathbf{C}$, constrói-se uma categoria $\mathbf{C} \rightarrow A$, cujos objetos são aqueles $X \in \mathbf{C}$ para os quais há ao menos um $f : X \rightarrow A$, e cujos morfismos são os $h : X \rightarrow Y$ tais que, dado f e existe ao menos um $g : Y \rightarrow A$ cumprindo $f = h \circ g$. De maneira análoga define-se $A \rightarrow \mathbf{C}$.

Exemplo 2.1.9. Seja \mathbf{C} uma categoria e suponha a existência de uma relação de equivalência \sim em cada conjunto $\text{Mor}(X; Y)$, a qual é compatível com a composição: se $f \sim g$ e $f' \sim g'$, então $f \circ f' \sim g \circ g'$. Sob estas condições, tem-se uma categoria $\mathcal{H}\mathbf{C}$, cujos objetos são os mesmos que os de \mathbf{C} , cujos morfismos são as classes de equivalência $[f]$ de morfismos de \mathbf{C} , e cuja composição é dada pela relação $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

Fala-se que um objeto X' é *quociente* de X quando existe um morfismo $\pi : X \rightarrow X'$, denominado *projeção*, segundo o qual para qualquer que seja $f : X \rightarrow Y$ há um único morfismo $g : X' \rightarrow Y$ cumprindo $g \circ \pi = f$. Neste caso, como pode ser conferido no primeiro dos diagramas abaixo, quando Y' também é objeto quociente (digamos de Y), então $f : X \rightarrow Y$ induz um respectivo $f' : X' \rightarrow Y'$, dito ser obtido de f por meio de *passagem ao quociente*.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \downarrow \pi \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \uparrow i & \nearrow & \uparrow i' \\ A & \xrightarrow{g} & A' \end{array}$$

Exemplo 2.1.10. Toda categoria \mathbf{C} possui uma subcategoria $\mathcal{Q}\mathbf{C}$, cujos objetos são quocientes de objetos de \mathbf{C} e cujos morfismos são aqueles obtidos por meio de passagem ao quociente. Quando a categoria em questão é **Set** ou **Top**, toda regra que associa uma relação de equivalência \sim a cada objeto $X \in \mathbf{C}$ define uma subcategoria \mathbf{C}/\sim de $\mathcal{Q}\mathbf{C}$. Seus objetos são, precisamente, os espaços quociente X/\sim , ao passo que o conjunto dos morfismos entre X/\sim e Y/\sim está em bijeção com o conjunto das $f : X \rightarrow Y$ tais que, se $x \sim x'$, então $f(x) \sim f(x')$.

Numa categoria \mathbf{C} , diz-se que X' é *subobjeto* de X quando existe um morfismo $\iota : X' \rightarrow X$, denominado *inclusão*, o qual satisfaz a seguinte propriedade: se $f, g : Y \rightarrow X'$ são tais que $\iota \circ f = \iota \circ g$, então $f = g$. Neste caso, escreve-se $X' \subset X$. Dado um morfismo $f : X \rightarrow Y$, a composição $f \circ \iota$ é denotada por $f|_{X'}$ e chamada de *restrição* de f a X' .

Exemplo 2.1.11. Um *par* de \mathbf{C} é simplesmente uma dupla (X, A) , em que $X \in \mathbf{C}$ e $A \subset X$ é subobjeto. Um *morfismo* entre dois pares (X, A) e (X', A') é um morfismo $f : X \rightarrow X'$ para o qual existe $g : A \rightarrow A'$ satisfazendo¹ $f \circ \iota = \iota' \circ g$ (veja o segundo dos diagramas acima). Junto desta noção, a coleção dos pares de \mathbf{C} se torna uma categoria, denotada por \mathbf{C}_2 .

Exemplo 2.1.12. Dada uma categoria \mathbf{C} , suponhamos existir $*$ tal que para cada $X \in \mathbf{C}$ há um único morfismo $X \rightarrow *$ (tais objetos são ditos *terminais*). Neste caso, a respectiva categoria $* \rightarrow \mathbf{C}$, aqui denotada por \mathbf{C}_* e denominada *pontuação* de \mathbf{C} , se identifica com aquela formada por todos os *objetos pontuados* (X, x_o) , em que o *ponto base* x_o é um morfismo $* \rightarrow X$. Os morfismos entre (X, x_o) e (Y, y_o) são precisamente aqueles $f : X \rightarrow Y$ que preservam o ponto base: isto é, tais que $f \circ x_o = y_o$. Quando \mathbf{C} é **Set** ou **Top**, todo conjunto formado de um só ponto é objeto terminal. Consequentemente, há uma identificação entre os pares (X, x_o) e $(X, \{x_o\})$, com $x_o \in X$. Por sua vez, os morfismos cumprindo $f \circ x_o = y_o$ identificam-se com as aplicações tais que $f(x_o) = y_o$. Neste contexto, considera-se \mathbf{C}_* como subcategoria de \mathbf{C}_2 . O mesmo se aplica quando \mathbf{C} é **Diff**.

2.2 Functores

Um *functor* entre duas categorias \mathbf{C} e \mathbf{D} consiste-se de um mapeamento $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ que preserva todas as estruturas envolvidas. Isto é, que cada objeto X de \mathbf{C} faz corresponder um objeto $F(X)$ de \mathbf{D} , e que a cada $f \in \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ associa um morfismo $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$, de tal forma que:

1. composições são preservadas. Isto é, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
2. identidades são levadas em identidades: $F(id_X) = id_{F(X)}$.

Os funtores de \mathbf{C}^{op} em \mathbf{D} são denominados *funtores contravariantes* de \mathbf{C} em \mathbf{D} ou mesmo *pré-feixes* de \mathbf{C} com valores em \mathbf{D} . Um functor de duas entradas (também chamado de *bifunctor*) é simplesmente um functor entre uma categoria produto $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$ e outra categoria \mathbf{D} . Indutivamente, define-se o que vem a ser um functor de n entradas (denominado *n-functor*). Como logo se convence, funtores levam equivalências de uma categoria em equivalências de outra categoria.

¹Quando $\mathbf{C} \subset \mathbf{Set}$, esta condição nada mais significa que $f(A) \subset A'$.

Exemplo 2.2.1. Fixado um objeto X de uma categoria \mathbf{C} , tem-se um functor $h^X : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, que a cada $Y \in \mathbf{C}$ associa o conjunto dos morfismos de Y em X , e que a cada morfismo $f : Y \rightarrow Z$ devolve a correspondência

$$h^X(f) : \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Z), \quad \text{tal que} \quad h^X(f)(g) = f \circ g.$$

Conta-se também com um functor contravariante $h_X : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, caracterizado por

$$h_X(X) = \text{Mor}_{\mathbf{C}}(Y; X) \quad \text{e} \quad \text{por} \quad h_X(f)(g) = g \circ f.$$

Observação 2.2.1. Quando se quer evidenciar a categoria (em particular, a classe morfismos) com os quais se está trabalhando, costuma-se escrever $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(-; X)$ ao invés de h_X , e $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; -)$ no lugar de h^X . Ao longo do texto, esta prática será adotada.

Exemplo 2.2.2. Se \mathbf{D} é subcategoria de \mathbf{C} , então existe um functor de inclusão $\iota : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, definido de maneira natural: $\iota(X) = X$ e $\iota(f) = f$ para quaisquer que sejam o objeto X e o morfismo f de \mathbf{D} . Em $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$, pode-se falar do functor pr_1 de *projeção* na primeira entrada. Ele é definido através de $\text{pr}_1(X, Y) = X$ e de $\text{pr}_1(f, g) = f$. De forma semelhante, define-se a projeção noutra entrada.

Exemplo 2.2.3. A *composição* entre dois funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ e $F' : \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{D}$ consiste-se de um novo functor $F \circ F'$, de \mathbf{C} em \mathbf{D} , definido por

$$(F \circ F')(X) = F(F'(X)) \quad \text{e} \quad \text{por} \quad (F \circ F')(f) = F(F'(f)).$$

Quando \mathbf{C} é pequena, tal operação introduz uma estrutura de monóide no conjunto $\text{Func}(\mathbf{C})$, formado de todos os funtores de \mathbf{C} em si mesma, cujo elemento neutro é o functor identidade $\text{id}_{\mathbf{C}}$, definido de maneira óbvia.

Exemplo 2.2.4. Há um functor natural $T : \mathbf{Diff}_* \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, que a cada par (X, x) associa o espaço tangente a X em x , e que a cada função diferenciável $f : X \rightarrow Y$, com $f(x) = y$, associa a transformação linear $Df_x : TX_x \rightarrow TY_y$.

Exemplo 2.2.5. Para qualquer que seja a categoria \mathbf{C} , tem-se funtores $\Pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{Q}\mathbf{C}$, que a cada objeto X associam um de seus quocientes, e que passam morfismos $f : X \rightarrow Y$ ao quociente. Particularmente, no caso em que \mathbf{C} é \mathbf{Set} ou \mathbf{Top} , toda regra que faz corresponder uma relação de equivalência a cada objeto define um functor $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\sim$.

Exemplo 2.2.6. Assim como morfismos, funtores também podem ser passados ao quociente. De maneira mais precisa, seja $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ um functor e suponhamos que nos conjuntos $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ e $\text{Mor}_{\mathbf{D}}(X'; Y')$ estejam respectivamente definidas relações de equivalência \sim e \approx , cujas classes serão ambas denotadas por $[f]$. Se $F(f) \approx F(g)$ sempre que $f \sim g$, então a regra que a cada X associa o próprio X , e que a cada $[f]$ faz corresponder $[F(f)]$, está bem definida e estabelece um functor de $\mathcal{H}\mathbf{C}$ em $\mathcal{H}\mathbf{D}$.

No que segue, apresentamos alguns exemplos de funtores que aparecem naturalmente no contexto da álgebra. Eles expressam um “fenômeno” conhecido como *adjunção*. Com efeito, diz-se que dois funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ e $F' : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ são *adjuntos* quando suas imagens produzem os mesmos morfismos. Mais precisamente, quando existem bijeções

$$\text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(X); Y) \simeq \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; F'(Y)) \quad \text{para todos} \quad X \in \mathbf{C} \quad \text{e} \quad Y \in \mathbf{D}.$$

Exemplo 2.2.7. Todo morfismo $\iota : S \rightarrow R$ entre anéis induz um functor $R_S^\iota : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_S$, denominado *restrição por escalar*, e definido como segue: dado um R -módulo X , olha-se para ele enquanto grupo abeliano e ali se introduz a ação $S \times X \rightarrow X$, tal que $s \cdot x = \iota(s)x$, resultando em $R_S^\iota(X)$. Por sua vez, ι induz functor $E_R^\iota : \mathbf{Mod}_S \rightarrow \mathbf{Mod}_R$, usualmente chamado de *extensão por escalar*. De fato, fornecido S -módulo Y , toma-o enquanto grupo abeliano e considera-se

$$R \times (R \otimes_S Y) \rightarrow R \otimes_S Y, \quad \text{tal que} \quad a \cdot (b \otimes_R x) = (a \cdot b) \otimes_R x,$$

onde, na primeira igualdade, estamos vendo R como S -módulo. O resultado é $E_R^\iota(Y)$. A ação de E_R^ι em morfismos é $E_R^\iota(f)(a \otimes_L x) = a \otimes_L f(x)$. Os funtores R_S^ι e E_R^ι são adjuntos. Observamos que, para qualquer anel R há um único morfismo $\text{char} : \mathbb{Z} \rightarrow R$, de tal modo que é sempre possível restringir ou estender escalar a partir dos inteiros. O núcleo de char é da forma $n\mathbb{Z}$ para algum natural n . Este marca o número máximo de vezes que se pode somar $1 \in R$ sem resultar em $0 \in R$, ao qual se dá o nome de *característica* de R . Veja [50, 43].

Exemplo 2.2.8. Diz-se que uma categoria \mathbf{C} gera *objetos livres* de uma subcategoria $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ quando existe um functor $j : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ que é adjunto à inclusão $\iota : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$. Por exemplo, a categoria \mathbf{Mod}_R possui objetos livres e gerados por conjuntos. Afinal, há $j : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ tal que, para cada conjunto S e cada grupo G , existem bijeções

$$\text{Mor}_{\mathbf{Set}}(S; \iota(G)) \simeq \text{Mor}_{\mathbf{Mod}_R}(j(S); G).$$

Costuma-se dizer que S é uma *base* para $j(S)$. A motivação é evidente: as bijeções anteriores nos dizem que toda função $f : S \rightarrow G$ se estende, de maneira única, a um homomorfismo $\bar{f} : j(S) \rightarrow G$. Esta é precisamente a condição satisfeita pela base de um espaço vetorial. Por conta disso, costuma-se identificar $j(S)$ com o conjunto das combinações formais $\sum a_i \cdot s_i$, com $a_i \in R$ e $s_i \in S$. Assim, a extensão de $f : S \rightarrow G$ torna-se “linear”. Isto é, fica definida por

$$\bar{f}(\sum a_i \cdot s_i) = \sum a_i \cdot f(s_i).$$

Observamos que inclusões entre categorias mais complexas, como é o caso de $\iota : \mathbf{Alg}_R \rightarrow \mathbf{Grp}$, em que \mathbf{Alg}_R é a categoria das álgebras sobre R , também possuem adjuntos. Nesta particular situação, cai-se no estudo dos *anéis de grupos*. Veja [66]. Outro exemplo de inclusão que possui adjunto à esquerda é $\iota : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$: seu adjunto nada mais é que o functor que introduz a topologia discreta em cada conjunto.

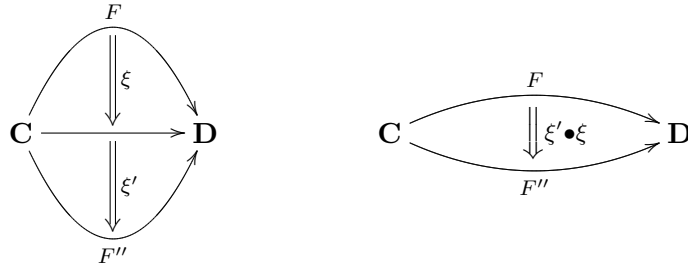
Transformações Naturais

Uma *transformação natural* entre dois funtores $F, F' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é uma aplicação ξ , que a cada objeto $X \in \mathbf{C}$ associa um morfismo $\xi(X)$ de \mathbf{D} , de tal forma que os diagramas abaixo são sempre comutativos (se cada $\xi(X)$ é isomorfismo, fala-se que ξ é *isomorfismo natural*):

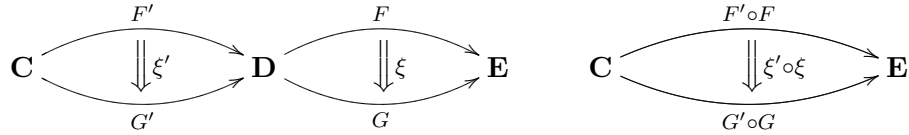
$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \xi(X) \downarrow & & \downarrow \xi(Y) \\ F'(X) & \xrightarrow{F'(f)} & F'(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & F & \\ & \Downarrow \xi & \\ \mathbf{C} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathbf{D} \\ & F' & \end{array}$$

Assim, de um ponto de vista intuitivo, uma transformação natural é uma correspondência entre dois funtores, responsável por conectar morfismos entre objetos distintos. Por este motivo, às vezes se escreve $\xi : F \rightarrow F'$, representando-a diagramaticamente de maneira mais simples, assim como exposta no segundo dos diagramas acima.

Sabe-se compor transformações naturais de duas maneiras distintas. A primeira delas é válida quando fixamos as categorias que servem de domínio e contradomínio aos funtores entre os quais as transformações atuam. Mais precisamente, dadas transformações $\xi : F \rightarrow F'$ e $\xi' : F' \rightarrow F''$, em que todos os funtores saem de uma mesma categoria \mathbf{C} e chegam numa mesma categoria \mathbf{D} , define-se a *composição vertical* entre elas como sendo a transformação $\xi' \bullet \xi$, de F em F'' , tal que $\xi' \bullet \xi(X) = \xi'(X) \circ \xi(X)$. Abaixo a representamos diagramaticamente:



A segunda forma de compor transformações naturais é obtida sobre uma nova exigência: ao invés de se fixar as categorias nos quais os funtores estão definidos, fixa-se os próprios funtores. Com efeito, dadas transformações $\xi : F \rightarrow G$ e $\xi' : F' \rightarrow G'$, em que agora F' e G' saem das categorias em que F e G chegam, a *composição horizontal* entre elas é a regra $\xi' \circ \xi : F' \circ F \rightarrow G' \circ G$, definida por $\xi' \circ \xi(X) = \xi'(G(X)) \circ F'(\xi(X))$. Sua representação diagramática é a seguinte:



Tais composições são compatíveis, no sentido de que elas se distribuem uma com relação à outra. Isto pode ser descrito nos seguintes termos: fixadas categorias \mathbf{C} e \mathbf{D} tem-se uma nova categoria $\text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D})$, cujos objetos são os funtores que saem de \mathbf{C} e chegam em \mathbf{D} , cujos morfismos são transformações naturais e cuja lei de composição é a *composição vertical*. Por sua vez, a *composição horizontal* define bifuntores

$$\circ : \text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{C}') \times \text{Func}(\mathbf{C}'; \mathbf{C}'') \rightarrow \text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{C}''),$$

os quais tomam pares (F, F') de funtores e (ξ, ξ') de transformações, e devolvem as correspondentes $F' \circ F$ e $\xi' \circ \xi$.

Exemplo 2.2.9. Qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$ induz transformações naturais $\xi^f : h^Y \rightarrow h^X$ e $\xi_f : h_X \rightarrow h_Y$, respectivamente definidas por $\xi^f(Z)(g) = g \circ f$ e por $\xi_f(Z)(g) = f \circ g$. Particularmente, tem-se funtores

$$h^- : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{Set}) \quad \text{e} \quad h_- : \mathbf{C} \rightarrow \text{Func}(\mathbf{C}^{op}; \mathbf{Set}),$$

tais que $h^-(X) = h^X$ e $h^-(f) = \xi^f$, com h_- sendo definido de maneira análoga. Desta forma, se $X \simeq Y$, então os funtores h_X e h_Y , assim como h^X e h^Y , são naturalmente isomorfos.

Exemplo 2.2.10. Há uma categoria **Cat**, cujos objetos são todas as categorias e cujos morfismos são todos os funtores. Para quaisquer objetos **C** e **D**, a respectiva classe de morfismos $\text{Mor}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{C}; \mathbf{D}) = \text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D})$ não é um mero conjunto, mas também possui uma estrutura de categoria. Além disso, entre elas existem bifuntores que atuam como uma outra operação de composição. Desta forma, **Cat** é composta não só de objetos e de morfismos, mas também de “morfismos entre morfismos” (papel ocupado pelas transformações naturais), os quais podem ser compostos de duas maneiras distintas, mas compatíveis entre si. Por conta disto, **Cat** é o que se chama de *2-categoria*. Tais entidades serão discutidas no sexto capítulo. Observamos haverem subcategorias cheias importantes de **Cat**. Exemplos são **Pos** e **Gpd**. A primeira delas tem como objetos as categorias definidas por ordenamentos parciais. A segunda, por sua vez, é formada pelos *grupoides*: categorias cujos morfismos são todos isomorfismos.

Exemplo 2.2.11. Se dois funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ e $F' : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ são adjuntos, então existem transformações naturais ξ , de $F' \circ F$ em $\text{id}_{\mathbf{C}}$, e η , de $\text{id}_{\mathbf{D}}$ em $F \circ F'$, as quais são respectivamente chamadas de *unidade* e *counidade* da adjunção. Com efeito, da condição

$$\text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(X); Y) \simeq \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; F'(Y)),$$

tomando $Y = F(X)$ e variando o X obtém-se ξ . Por sua vez, tomando $X = F'(Y)$ e variando Y , encontra-se η .

Equivalência

Procuramos por uma boa noção de equivalência entre categorias. A opção imediata seriam os isomorfismos de **Cat**. Neste caso, duas categorias seriam equivalentes quando existissem funtores entre elas cujas respectivas composições coincidissem com identidades. Esta, no entanto, é uma noção demasiadamente rígida para nossos propósitos: *em geral não se tem a igualdade de funtores, mas apenas a existência de transformações naturais entre eles*.

Por sua vez, observamos que a relação que identifica funtores $F, F' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ entre os quais há uma transformação natural $\xi : F \rightarrow F'$ é de equivalência em $\text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D})$ e compatível com a composição vertical (denota-se escrevendo $F \simeq F'$). Assim, está definida uma nova categoria $\mathcal{H}\mathbf{Cat}$, cujos objetos são as próprias categorias e cujos morfismos são as classes de funtores ligados por transformações naturais. Com isto em mente, a próxima opção seria considerar como equivalências entre categorias os isomorfismos de $\mathcal{H}\mathbf{Cat}$. Isto é, **C** e **D** seriam equivalentes quando existissem funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, tais que $G \circ F \simeq \text{id}_{\mathbf{C}}$ e $F \circ G \simeq \text{id}_{\mathbf{D}}$.

Espera-se que uma equivalência entre categorias mapeie objetos isomorfos em objetos isomorfos. Observamos que isto pode não ser satisfeito pelos isomorfismos de $\mathcal{H}\mathbf{Cat}$, de modo que a opção por eles proporcionada é muito pouco restritiva para o que procuramos. A ideia é então considerar uma noção intermediária. Com isto em mente, a noção de equivalência entre categorias que empregaremos ao longo do texto é a seguinte: fala-se que duas categorias **C** e **D** são *fracamente isomorfas* (ou simplesmente que são *equivalentes*) quando existe um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ admitindo uma inversa “fraca” $F' : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$. Isto significa que, ao invés de se exigir igualdades $F' \circ F = \text{id}_{\mathbf{C}}$ e $F \circ F' = \text{id}_{\mathbf{D}}$, exige-se a existência de *isomorfismos naturais* entre eles.

Desta forma, um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ admite uma inversa fraca se, e somente se, a respectiva aplicação $X \mapsto F(X)$ é fracamente bijetiva (isto é, $F(X) \simeq F(X')$ implica $X \simeq X'$, ao mesmo

tempo que todo objeto $Y \in \mathbf{D}$ é isomorfo a $F(X)$ para algum objeto $X \in \mathbf{C}$ e existem bijeções

$$\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y) \simeq \text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(X); F(Y)).$$

Em termos ainda mais sucintos, \mathbf{C} e \mathbf{D} são equivalentes se, e só se, existe $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ que é fracamente bijetivo em objetos e bijetivo em morfismos. Um functor que é fracamente injetivo em objetos e injetivo em morfismos chama-se *mergulho*. Assim, um isomorfismo fraco é simplesmente um mergulho "sobrejetivo". Se $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é mergulho não-sobrejetivo, então a equivalência se dá entre \mathbf{C} e $F(\mathbf{C}) \subset \mathbf{D}$. Particularmente, a subcategoria $F(\mathbf{C})$ é cheia se, e somente se, o mergulho F é sobrejetivo em morfismos.

Observação 2.2.2. Utilizando da definição acima, o exemplo 2.2.11 nos leva a conclusão de que a existência de funtores adjuntos entre duas categorias também traduz uma noção de equivalência, a qual é bem mais modesta que aquela que adotaremos. Observamos, por sua vez, que em outros contextos geralmente não se consegue (e nem mesmo é útil) mostrar que duas categorias são equivalentes no sentido apresentado. Neles, a existência de "adjunções coerentes" é então empregada como a noção de equivalência padrão. Este é o caso das *categorias modelo*, estudadas no sexto capítulo, nas quais o conceito de equivalência como isomorfismos fracos dá lugar às *adjunções de Quillen*.

Representação

Como vimos anteriormente, para todo objeto $X \in \mathbf{C}$ existe um functor $h_X : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, bem como um functor contravariante $h^X : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$. Os funtores covariantes (resp. contravariantes) $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ naturalmente isomorfos a h_X (resp. h^X) chamam-se *representáveis* por X . Um questionamento natural diz respeito à representabilidade de um dado functor. Neste espírito, de grande valia é o *lema de Yoneda* (secção 3.2 de [51]) que estabelece a existência de um isomorfismo natural entre

$$N, E : \text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{Set}) \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set},$$

definidos da seguinte maneira: E é o functor de avaliação, que toma (F, X) e devolve $F(X)$. De outro lado, N é o functor que a cada par (F, X) associa o respectivo conjunto das transformações naturais entre h^X e F . Assim, por exemplo, para que F seja representável por X , é necessário que o conjunto $F(X)$ possua ao menos um elemento.

A demonstração do lema de Yoneda é bem simples. A ideia é a seguinte: para qualquer que seja a transformação natural $\xi : h^X \rightarrow F$, o diagrama abaixo deve ser comutativo. Particularmente, quando $Y = X$, deve-se ter

$$[F(g) \circ \xi(X)](id_X) = [\xi(Y') \circ h^X(g)](id_X).$$

No entanto, $h^X(g)(id_X) = g$, mostrando-nos que ξ fica inteiramente determinada por $\xi(X)(id_X)$. Assim, a transformação $\alpha : N \rightarrow E$, definida por $\alpha(F, X)(\xi) = \xi(X)(id_X)$, fornece o isomorfismo natural procurado.

$$\begin{array}{ccc} & h^X & \\ & \Downarrow \xi & \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\quad F' \quad} & \mathbf{Set} \end{array}$$

Observamos que o lema de Yoneda possui uma versão dual, demonstrada de maneira totalmente análoga. Com efeito, se o functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ é contravariante, então também existe um isomorfismo natural entre

$$N, E : \text{Func}(\mathbf{C}^{op}; \mathbf{Set}) \times \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set},$$

agora definidos por

$$E(F, X) = F(X) \quad \text{e} \quad N(F, X) = \text{Mor}(h_X; F).$$

Exemplo 2.2.12. Vejamos um uso do resultado anterior. Dados $X, Y \in \mathbf{C}$, pondo $F = h_Y$ no lema de Yoneda, obtém-se bijeções entre $\text{Mor}(h_X; h_Y)$ e $\text{Mor}(X; Y)$, mostrando-nos que o functor $h_- : \mathbf{C} \rightarrow \text{Func}(\mathbf{C}^{op}; \mathbf{Set})$ é mergulho de \mathbf{C} numa categoria de functores. Assim, *toda categoria é equivalente a uma categoria de pré-feixes.*

2.3 Utilidade

Um dos problemas básicos dentro de uma categoria \mathbf{C} é o de classificar os seus objetos a menos de sua natural noção de equivalência. Em outras palavras, procura-se determinar a estrutura da classe $\text{Iso}(\mathbf{C})$. Em geral, isto é feito através de bijeções $f : \text{Iso}(\mathbf{C}) \rightarrow B$, em que B é alguma outra classe (diz-se que f é uma *classificação* da categoria \mathbf{C} em termos de B).

Vejamos como functores podem ajudar no problema acima descrito: uma vez que eles levam equivalências em equivalências, para cada $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ a aplicação $\text{Iso}(F) : \text{Iso}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{D})$, tal que $\text{Iso}(F)([X]) = [F(X)]$, está bem definida. Desta forma, se $F(X) \simeq F(Y)$ implica em $X \simeq Y$, então f torna-se injetiva e, enquanto vista sobre sua imagem, nos dá uma classificação de \mathbf{C} em termos das classes de equivalência de \mathbf{D} .

De maneira mais sucinta, tal estratégia de classificação se baseia em buscar functores cuja imagem por $\text{Iso} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$ seja uma função injetiva.

Exemplo 2.3.1. Para toda categoria \mathbf{C} há functor $\text{Aut} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$, que a cada X faz corresponder o grupo $\text{Aut}(X)$ de seus automorfismos (isto é, dos isomorfismos de X nele mesmo). Não se espera que tal functor sirva para classificar qualquer categoria. Afinal, existem categorias arbitrariamente grandes. Um exemplo de categoria muito grande, a qual não pode ser classificada por Aut é \mathbf{Top} . Para ela, tem-se $\text{Aut}(X) = \text{Homeo}(X)$: o grupo dos homeomorfismos de X . Observamos, no entanto, que se nos restringirmos à subcategoria cheia das variedades topológicas compactas, então Aut fornecerá a classificação procurada. Por sua vez, se nos restringirmos ainda mais e consideramos apenas as variedades diferenciáveis (caso em que $\text{Aut}(X)$ se torna o grupo dos difeomorfismos de X), tal classificação poderá ser obtida sem a exigência de compacidade. Veja os trabalhos originais de Whittaker e Filipkiewicz [88, 20].

Exemplo 2.3.2. Um exemplo mais simples: tem-se um functor $\dim : \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{N}_{\infty}$, onde \mathbb{N}_{∞} é a categoria dos naturais estendidos ao infinito, que a cada espaço vetorial associa a sua dimensão. Ele não serve para classificar a categoria $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$, pois existem espaços de dimensão infinita que não são isomorfos. No entanto, ele classifica a subcategoria cheia dos espaços de dimensão finita.

Exemplo 2.3.3. Se $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ é subcategoria livremente gerada por obtidos de \mathbf{C} , então a inclusão possui um adjunto à esquerda $j : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$. No contexto da teoria dos anéis de grupos, a escolha

de um anel R determinada um adjunto $J_R : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Rng}$. Relembramos que, para cada grupo G , o correspondente $J_R(G)$ é o anel das combinações lineares formais de elementos de G com coeficientes em R . Tem-se uma conjectura famosa, denominada *conjectura do isomorfismos para anéis de grupos*, que consiste, exatamente, na afirmação de que J_R é fracamente injetivo.

Outra maneira de tentar classificar uma categoria é por meio do functor $[-] : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, que faz corresponder a cada $X \in \mathbf{C}$ a sua classe de isomorfismos. Com efeito, se este for representável, então existirá um objeto $B \in \mathbf{C}$, denominado *espaço classificatório* de \mathbf{C} , de tal modo que $\text{Mor}(X; B) \simeq [X]$. Assim, para classificar \mathbf{C} , bastará conhecer os morfismos que chegam em B .

Exemplo 2.3.4. Como discutiremos ao longo do texto, esta segunda estratégia fornece a classificação dos fibrados principais.

A classificação completa de uma categoria é, em geral, um problema difícil. O conceito de propriedade *invariante* assume, portanto, o seu valor. Diz-se que uma propriedade \mathcal{P} é um *invariante* de uma categoria \mathbf{C} quando sua validade num objeto $X \in \mathbf{C}$ implica na sua validade em todo objeto equivalente a X . Assim, se \mathcal{P} vale em X e encontrarmos um outro objeto Y no qual \mathcal{P} não é válida, então estes não pertencerão a mesma classe de equivalência, o que nos dará alguma informação sobre $\text{Iso}(\mathbf{C})$. Observamos que os invariantes de \mathbf{Top} são, precisamente, os invariantes topológicos (por exemplo, número de componentes conexas e compacidade).

Novamente, funtores vêm à nossa ajuda. Afinal, para cada $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ tem-se um invariante de \mathbf{C} . Este é consistido da propriedade “*ter, a menos da noção natural de equivalência, uma específica imagem por F em \mathbf{D}* ”. De fato, como funtores preservam equivalências, se $X \in \mathbf{C}$ possui uma determinada imagem $F(X) = \alpha$, então cada Y equivalente a X terá respectiva imagem $F(Y)$ equivalente a α .

Com isto em mente, quando um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ classifica \mathbf{C} por meio da primeira das estratégias anteriormente apresentadas (isto é, quando ele é fracamente injetivo), diz-se que tal classificação é obtida *através do invariante definido por F* .

Os exemplos 2.3.1 e 2.3.2 ressaltam que, em geral, funtores não são fracamente injetivos. No entanto, pode-se procurar por subcategorias restritas as quais eles o sejam. Na nova linguagem, isto se traduz no seguinte: *um invariante em geral não classifica a categoria inteira, mas é possível que classifique alguma subcategoria*. Por exemplo, como discutimos, a dimensão é um invariante que não classifica $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$, mas classifica a subcategoria $\mathbf{FVec}_{\mathbb{K}}$, formada dos espaços de dimensão finita.

Conclusão. Se queremos obter informação classificatória sobre uma categoria \mathbf{C} , um procedimento canônico é buscar primeiramente por funtores nela definidos e então verificar se os invariantes por eles assignados classificam alguma subcategoria de \mathbf{C} . Assim, por exemplo, se existem funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ e $F' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}'$ que classificam respectivas subcategorias cheias $\mathbf{B}, \mathbf{B}' \subset \mathbf{C}$, então tais invariantes classificam, juntos, a subcategoria maior $\mathbf{B} \cup \mathbf{B}'$.

No que segue, descreveremos uma situação que acreditamos exemplificar bem a ideia exposta no parágrafo anterior. Em alguns momentos seremos um tanto quanto imprecisos. Ressaltamos, no entanto, que os conceitos aqui discutimos serão mais formalmente apresentados em outros momentos do texto.

Iniciamos dizendo que na próxima subsecção associaremos a toda categoria \mathbf{C} uma nova categoria $\mathcal{B}(\mathbf{C})$, cujos objetos (aqui chamados de *fibrados*) são os morfismos de \mathbf{C} . Particularmente,

veremos que a regra $\mathcal{B} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$ é functorial, de modo que a cada functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ faz-se corresponder um novo functor $\mathcal{B}F$ entre $\mathcal{B}(\mathbf{C})$ e $\mathcal{B}(\mathbf{D})$. Portanto, todo invariante em \mathbf{C} induz outro em $\mathcal{B}(\mathbf{C})$.

Pois bem: gostaríamos de classificar $\mathcal{B}(\mathbf{Diff}_*)$, aqui denotada por \mathcal{B}_* . Como a dimensão é invariante em \mathbf{Diff} , também é invariante da categoria \mathcal{B}_* . Isto significa que, para que f e g sejam isomorfos em \mathcal{B}_* , situação em que se diz que eles são *conjugados*, é preciso que seus domínios e que seus contradomínios tenham a mesma dimensão.

Observamos, por outro lado, que tal invariante classifica $\mathbf{FVec}_{\mathbb{R}}$ inteiramente, de modo que produz bons invariantes em sua categoria de fibrados, que denotaremos por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Na verdade, tal invariante também classifica $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$: duas transformações lineares serão isomorfas se, e somente se, possuírem o mesmo posto (isto é, se, e somente se, possuírem imagem com igual dimensão²). Assim, boa informação classificatória de \mathcal{B}_* (no sentido de ser facilmente calculada) é fornecida por funtores de tal categoria em $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Ora, há um functor natural $T : \mathbf{Diff}_* \rightarrow \mathbf{FVec}_{\mathbb{R}}$, que a cada (X, x) associa o espaço TX_x , e que a cada f faz corresponder a derivada Df_x . A ideia é, então, buscar por subcategorias de \mathcal{B}_* , restritas às quais $\mathcal{B}T$ seja fracamente injetivo. Se existirem, tais subcategorias também serão classificadas pela dimensão. Pois estas existem: pode-se mostrar que, se as derivadas Df_x e Dg_y são conjugadas, então existem abertos (U, x) e (V, y) restritos aos quais as aplicações f e g também o são (e, em particular, têm posto constante em tais vizinhanças). Assim, a *dimensão classifica a subcategoria* $\text{Reg} \subset \mathcal{B}_*$ *formada dos pares* (f, x) , *em que* f *tem posto constante nas vizinhanças de* x .

Questionemo-nos: *quão boa é a classificação obtida?* Neste sentido, cabe dizer que, para qualquer f , o conjunto dos pontos $x \in X$ nas vizinhanças dos quais f tem posto constante é aberto e denso em X . Portanto, o resultado obtido serve para classificar *quase todos* os pares (f, x) . Em outras palavras, quase todos objetos de Reg estão em \mathcal{B}_* . Por outro lado, se x é ponto crítico isolado de f (isto é, se ele o único ponto num aberto tal que $Df_x = 0$), então (f, x) não está em Reg e, portanto, não é classificado pelo invariante “dimensão”.

Questionemo-nos: *será possível melhorar a classificação obtida?* Para tanto, precisamos obter novos invariantes que classificam outras subcategorias de \mathcal{B}_* . A obtenção de tais invariantes em subcategorias formadas de pares (f, x) , com x sendo ponto crítico isolado, é objetivo da *Teoria das Singulares* (veja [26]), a qual faz uso de métodos de diversos outros campos da matemática como, por exemplo, Topologia Diferencial e Sistemas Dinâmicos.

Ilustramos: a toda função real $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , e todo ponto crítico $x \in X$ de f , faz-se corresponder um número inteiro. Trata-se, pois, do número de autovalores negativos da matriz Hessiana de f em x , formada pelas derivadas de segunda ordem de f em algum sistema de coordenadas nas vizinhanças de x . Esta regra é functorial e, portanto, define um functor $\text{Ind} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{N}$ numa subcategoria $\mathbf{C} \subset \mathcal{B}_*$. O correspondente invariante é chamado de *índice*. Por um resultado conhecido como *lema de Morse* (veja [4, 54, 59]), o functor Ind se torna fracamente injetivo ao ser restrito à subcategoria $\text{Morse} \subset \mathbf{C} \subset \mathcal{B}_*$, formada dos pares (f, x) nos quais o ponto crítico x é não-degenerado (isto é, tal que o determinante da Hessiana de f em x é não-nulo). Assim, o invariante “índice” classifica funções reais nas vizinhanças de pontos críticos não-degenerados e, portanto, em conjunto com o invariante “dimensão”, fornece uma melhor informação classificatória sobre \mathcal{B}_* .

²Veja o exemplo 2.3.6

Vejam os que é possível melhorar ainda mais a classificação anterior. Para tanto, observamos existir uma estrutura diferenciável na reunião de todos os espaços tangentes de uma variedade X . A entidade resultante é denotada por TX . Tem-se uma aplicação natural $\pi : TX \rightarrow X$, que toma um vetor em TX_x e devolve x , a qual é diferenciável. Assim, $\pi \in \mathcal{B}_*$. Os elementos $v \in \mathcal{B}_*$ tais que $\pi \circ v = id_X$ chamam-se *campos de vetores* em X .

Toda função real $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ induz um campo de vetores ∇f : uma vez escolhido um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ em cada espaço tangente TX_x de X , o qual varia diferenciavelmente com o ponto x , define-se ∇f como sendo aquele que satisfaz $df_x(v) = \langle \nabla f(x), v \rangle_x$. Assim, um ponto crítico de f é precisamente uma *singularidade* de ∇f (isto é, um elemento $x \in X$ tal que $\nabla f(x) = 0$). Em particular, a matriz Hessiana de f em x é a matriz Jacobiana de ∇f , de modo que o índice de f em x é precisamente o número de autovalores negativos da matriz Jacobiana de ∇f . Isto nos leva a estender a regra Ind para a subcategoria $\mathfrak{X}_* \subset \mathcal{B}_*$, formada de todo os pares (v, x) em que v é campo de vetores, com $v(x) = 0$: define-se $\text{Ind}(v, x)$ como sendo o número de autovalores negativos de Dv_x . Assim, o índice é invariante numa subcategoria que, em certo sentido, é mais geral que \mathbf{C} .

O próximo passo é procurar por uma subcategoria $\text{Hip} \subset \mathfrak{X}_* \subset \mathcal{B}_*$, restrita a qual Ind é fracamente injetivo. Ora, sabemos que tal functor classifica Morse. Assim, há de se esperar que, se $f \in \text{Morse}$, então $\nabla f \in \text{Hip}$. Neste sentido, observemos que um ponto crítico x de f é não-degenerado se, e só se a matriz Jacobiana de ∇f ali tem determinante não-nulo (neste caso, diz-se que x é *singularidade hiperbólica*). Assim, há de se esperar que a hiperbolicidade de x implique em $(v, x) \in \text{Hip}$. Em outras palavras, espera-se que hiperbolicidade seja condição necessária para classificação pelo índice. De fato, como consequência de um resultado conhecido como *Teorema de Hartman-Grobman* (veja segundo capítulo de [65] ou mesmo o quinto capítulo de [38]) tal condição não só necessária como também *suficiente*.

Conclusão. Temos dois invariantes (a dimensão e o índice), os quais nos permitem classificar a maior parte de \mathcal{B}_* . A dimensão classifica funções diferenciáveis em regiões de posto constante. Por sua vez, o índice classifica funções reais nas vizinhanças de pontos críticos não-generados e, mais geralmente, campos de vetores nas vizinhanças de singularidades hiperbólicas.

Finalizamos com três observações:

1. ressaltamos, mais uma vez, que a Topologia Algébrica (assunto dos próximos capítulos) se ocupa, essencialmente, do estudo de funtores F definidos em **Top**. Desta forma, lá se obtém uma grande quantidade de invariantes topológicos. Estes são mais poderosos na medida em que as estruturas algébricas $F(X)$ por eles assinadas são mais complexas (e, portanto, mais difíceis de serem calculadas);
2. qual o papel das transformações naturais em toda essa análise? como funtores associam invariantes a objetos, as transformações naturais, sendo mapeamentos entre funtores, possuem o papel de relacionar diferentes invariantes de um mesmo objeto. Assim, *se existe uma transformação natural entre dois funtores, então os correspondentes invariantes por eles assignados não são independentes entre si, mas estão vinculados por naturalidade*;
3. como talvez tenha ficado mais ou menos evidente ao longo da subsecção, muitos resultados, problemas, conjecturas e questões, todos provenientes das mais diversas áreas da

matemática, se resumem, ao final do dia, no problema de classificar uma certa categoria. Isto se evidenciará ainda mais ao longo do texto.

Levantamentos e Extensões

Além de classificar uma categoria, procura-se determinar condições necessárias/suficientes para que seus morfismos possam ser estendidos e/ou levantados. Mais uma vez, no que tange tal problema, funtores se mostram úteis ferramentas. É isto o que veremos nesta subsecção.

Um *fibrado* numa categoria \mathbf{C} é uma terna (X, π, Y) , em que $X, Y \in \mathbf{C}$ e $\pi : X \rightarrow Y$. Diz-se que Y é a *base* do fibrado, ao passo que X é chamado de *espaço total*. Um *morfismo* entre dois fibrados (X, π, Y) e (X', π', Y') é um par (f, g) , formado de morfismos $f : X \rightarrow X'$ e $g : Y \rightarrow Y'$ que tornam comutativo o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ Y & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

Tem-se uma categoria $\mathcal{B}(\mathbf{C})$, cujos objetos são fibrados e cujos morfismos são aqueles acima definidos³. Nela, a composição entre (f, g) e (f', g') é definida como sendo o par $(f' \circ f, g' \circ g)$. Quando existe um isomorfismo entre dois fibrados, fala-se que eles são *conjugados*.

Diz-se que um fibrado (X, π, Y) possui a propriedade de *levantamento de morfismos* quando, para toda terna (X', f, Y) existe (X', g, X) tal que $f = g \circ \pi$. Dualmente, fala-se que (A, ι, X) tem a propriedade de *extensão de morfismos* quando, para qualquer que seja (A, f, Y) , é possível obter (X, g, Y) cumprindo $f = g \circ \iota$.

Para mostrar que (X, π, Y) possui a propriedade de levantamento, é necessário e suficiente exibir $s : Y \rightarrow X$, chamado de *secção* do fibrado (X, π, Y) , tal que $\pi \circ s = id_Y$. A suficiência é evidente. Para concluir a necessidade, note que uma secção de (X, π, Y) é simplesmente um levantamento da identidade de Y .

De maneira semelhante, a terna (A, ι, X) possui a propriedade de extensão se, e somente se, existe um morfismo $r : X \rightarrow A$, chamado de *retração*, satisfazendo $r \circ \iota = id_A$. Os diagramas abaixo ilustram as respectivas situações.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ g \nearrow & \downarrow \pi & \searrow s \\ X' & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ f \nearrow & \downarrow \iota & \searrow g \\ A & \xrightarrow{\iota} & X \\ & \nwarrow r & \end{array}$$

Todo functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ induz naturalmente um outro functor $\mathcal{B}F : \mathcal{B}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{D})$, o qual se vê caracterizado por

$$\mathcal{B}F(X, \pi, Y) = (F(X), F(\pi), F(Y)) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}F(f, g) = (F(f), F(g)).$$

Como consequência, se (X, π, Y) possui a propriedade de levantamento (resp. de extensão), então $\mathcal{B}F(X, \pi, Y)$ também possui. Em particular, se s é secção e r é retração, então $F(s)$ e

³Na literatura, tal categoria é algumas vezes chamada de *arrow category of \mathbf{C}* e denotada por $\text{Arr}(\mathbf{C})$.

$F(r)$ também o são. Desta forma, *functores definidos em \mathbf{C} fornecem condições necessárias para que os fibrados de $\mathcal{B}(\mathbf{C})$ possuam as propriedades de extensão e levantamento, bem como para que admitam secções e retrações.*

Exemplo 2.3.5. No oitavo capítulo, obteremos uma sequência de funtores $\pi_i : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grp}$, denominados *grupos de homotopia*, os quais funcionam como invariantes topológicos. Por exemplo, o grupo $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros, enquanto que $\pi_i(\mathbb{D}^n)$ é trivial seja qual for o $i > 0$. Estes fatos nos permitem mostrar facilmente que não há função contínua $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^n$ que se estende ao disco \mathbb{D}^n . Com efeito, se existisse uma tal função, então haveria uma retração $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, que nada mais seria que uma extensão da identidade de \mathbb{S}^{n-1} . Consequentemente, $\pi_{n-1}(r)$ seria retração para $\pi_{n-1}(f)$, o que não vem ao caso (veja diagrama abaixo). O resultado assim demonstrado é conhecido como *teorema da retração de Brouwer*. Trata-se de um clássico da Topologia Algébrica e tem como consequência imediata um outro resultado (também devido à Brouwer) segundo o qual todo morfismo $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ em \mathbf{Top} possui um ponto fixo.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{D}^n & \\ f \nearrow & \uparrow r & \\ \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{id} \mathbb{S}^{n-1} & \end{array} \xRightarrow{\pi_{n-1}} \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \nearrow & \uparrow & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{id} \mathbb{Z} & \end{array}$$

Fixando um objeto $Y \in \mathbf{C}$, obtém-se uma subcategoria $\mathcal{B}_Y(\mathbf{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbf{C})$. Seus objetos são os fibrados de \mathbf{C} que possuem base em Y . Por sua vez, os morfismos entre (X, π, Y) e (X', π', Y) são morfismos $f : X \rightarrow X'$ tais que $\pi' \circ f = \pi$. Ou seja, (f, id_Y) é morfismo de fibrados no sentido usual. Dualmente, fixado $X \in \mathbf{C}$ também se tem uma subcategoria $\mathcal{B}^X(\mathbf{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbf{C})$, cujos objetos são os fibrados que possuem X como espaço total. Tais subcategorias são úteis em diversos sentidos. Vejamos alguns:

1. há um functor específico $\Gamma : \mathcal{B}_Y(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Set}$, que a cada fibrado com base em Y associa o conjunto $\Gamma(X, \pi, Y) \subset \text{Mor}(Y; X)$ de suas secções, ao mesmo tempo que toma um morfismo $f : X \rightarrow X'$ e faz corresponder a aplicação $\Gamma(f)$, tal que $[\Gamma(f)](s) = f \circ s$. Semelhantemente, existe um functor $\Omega : \mathcal{B}^X(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Set}$, responsável por associar a um fibrado com espaço total X o seu conjunto de retrações, sendo tal que $[\Omega(g)](r) = r \circ g$;

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & Y & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X & \\ r \nearrow & & \nwarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

2. a classificação de $\mathcal{B}_Y(\mathbf{C})$ determina a classe de isomorfismo de Y . Com efeito, um morfismo $f : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo em \mathbf{C} se, e somente se, é isomorfo em $\mathcal{B}_Y(\mathbf{C})$ à id_Y . Desta forma, *classificar $\mathcal{B}(\mathbf{C})$ implica classificar \mathbf{C}* . Por outro lado, para que dois fibrados sejam isomorfos, é preciso que as bases e os espaços totais também o sejam. Portanto, *invariantes de \mathbf{C} determinam invariantes de $\mathcal{B}(\mathbf{C})$* .

Abaixo apresentamos um exemplo atípico no qual a classificação de uma categoria é suficiente para garantir a classificação de seus fibrados. Ele foi um dos passos utilizados na descrição apresentada no início da secção, quando estudados aspectos classificatórios de \mathcal{B}_* .

Exemplo 2.3.6. Vimos que espaços vetoriais de dimensão finita são classificados por sua dimensão. Mostremos, agora, que tal invariante também classifica $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$. Com efeito, dado uma transformação linear qualquer $f : X \rightarrow Y$, pelo teorema do núcleo e da imagem, tem-se $X \simeq \ker(f) \times \text{img}(f)$. Por outro lado, como a categoria $\mathbf{FVec}_{\mathbb{K}}$ é classificada pela dimensão, segue-se que, se os espaços X , Y e $\text{img}(f)$ tem respectivas dimensões n, m e k , então f é conjugado ao mapa $g : \mathbb{K}^{n-k} \times \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^m$, definido por

$$g(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k) = (0, \dots, 0, y_1, \dots, y_k).$$

Particularmente, na medida em que f é injetivo, sobrejetivo ou bijetivo, então é conjugado à inclusão, à projeção ou à identidade.

Capítulo 3

Unificação

Neste capítulo, damos continuidade ao estudo iniciado no anterior. Na primeira secção, estudamos o problema da extensão de morfismos na categoria **Cat** e vemos dali surgir o conceito de *extensões de Kan*. No genuíno espírito da teoria das categoriais, estas generalizam uma grande quantidade de conceitos presentes em diversos campos da matemática e, até mesmo, da própria teoria das categorias.

Na segunda secção, estudamos casos particulares de extensões de Kan, denominados *limites* e *colimites*, os quais são suficientemente genéricos a ponto de englobar, por exemplo, as concepções de adjunção de funtores, de produto cartesiano e de soma direta de estruturas algébricas, de colagem de espaços topológicos, bem como um procedimento que permite trocar a base de um fibrado sem alterar suas fibras.

Ali também discutimos como a noção de limite indutivo nos permite falar de “conjugações locais” entre fibrados. Em seguida, estudamos os fibrados que são localmente conjugados a um fibrado “trivial”. O espírito, aqui, é semelhante ao empregado no estudo das variedades: conhece-se previamente a estrutural local (a qual é suposta simples ou trivial) e tenta-se utilizar de tal conhecimento para obter informações globais.

Entre o final da segunda secção e o término do capítulo, mostramos que todos os limites são determinados por produtos e equalizadores, ao passo que os limites determinam todas as extensões de Kan. Como consequência, conclui-se que para falar de muitas coisas dentro da matemática, precisa-se apenas dos conceitos prévios de produto e equalizador.

Para o estudo e para a escrita, fizemos uso especial das referências [68, 46, 51].

3.1 Extensões

Consideremos o problema de extensão na categoria **Cat**, formada por todas as categorias e todos os funtores. Isto significa que, fixado um functor $\iota : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ e dado qualquer $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}$, procuramos por um $F' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ tal que $F' \circ \iota = F$. Para que isto ocorra, é necessário e suficiente que existam retrações.

Tanto a formulação deste problema quanto a sua solução (em termos de retrações) são expressas em termos de igualdades entre funtores, algo que já discutimos ser uma exigência muito forte. Em contextos passados, isto foi resolvido substituindo a exigência de igualdade de funtores pela hipótese de existência de transformações naturais entre eles satisfazendo certas condições.

Em outras palavras, passou-se de **Cat** para **HCat**. No presente contexto, sigamos a mesma estratégia.

Assim, dados funtores $\iota : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ e $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}$, busquemos por “extensões fracas” de F tais que a composição $F' \circ \iota$ está na mesma classe que F . Isto é, tais que existe uma transformação $\xi : F' \circ \iota \rightarrow F$. Tem-se particular interesse nas extensões fracas universais, as quais são chamadas de extensões de Kan. De maneira mais precisa, diz-se que F possui *extensão de Kan à esquerda ao longo de ι* quando existem um functor F' e uma transformação $\xi : F' \circ \iota \rightarrow F$ tal que, se (F'', ζ) é qualquer outro par satisfazendo esta mesma condição, então há uma única transformação natural $\varphi : F'' \rightarrow F'$ cumprindo $\varphi \circ \zeta = \xi$. Se este é o caso, escreve-se $\mathcal{L}F$ ao invés de F' .

De maneira análoga define-se o que vem a ser uma extensão de Kan à direita. Se F as possui, utiliza-se de $\mathcal{R}F$ para denotá-las. Como facilmente se verifica, por conta da universalidade que estão sujeitas, tais extensões são sempre únicas a menos um único isomorfismo natural.

Abstração

No capítulo X de [51], assim como na secção 43 de [12] e no primeiro capítulo de [68] encontram-se a expressão “*all concepts are Kan extensions*”. No intuito de ilustrá-la, vejamos, por exemplo, que adjunções podem ser descritas em termos de tais extensões. Por definição, $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ possui um adjunto $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ à esquerda se existem bijeções

$$\text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(X); Y) \simeq \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; G(Y)) \quad \text{para todos } X, Y.$$

Particularmente, pondo $Y = F(X)$ e variando o X , obtém-se uma transformação natural entre $F \circ G$ e a identidade de \mathbf{C} . Por sua vez, colocando $X = G(Y)$ e variando o Y , encontra-se $F \circ G \simeq id_{\mathbf{D}}$ (relembramos se tratarem da unidade e da counidade da adjunção). Isto nos leva a crer que, se G possui um adjunto F à esquerda, então este é a extensão de Kan à direita de $id_{\mathbf{C}}$ relativamente a G , ao passo que G é extensão de Kan à esquerda de $id_{\mathbf{D}}$ com respeito a F . Tais fatos procedem, como facilmente se verifica.

A recíproca se torna verdadeira sob a exigência de *absolutesz*. Sejam mais precisos: diz-se que uma extensão de Kan $\mathcal{R}F$ é *absoluta* quando ela é *preservada* por qualquer G . Isto é, quando existem isomorfismos naturais entre $G \circ \mathcal{R}F$ e $\mathcal{R}(G \circ F)$. Tem-se, então, o seguinte enunciado, o qual dá a caracterização que havíamos prometido: *para que $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ possua adjunto $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ à esquerda, é necessário e suficiente que $id_{\mathbf{D}}$ admita extensão de Kan absoluta à direita. Neste caso, tem-se $F \simeq \mathcal{R}id_{\mathbf{D}}$* (teorema 2 na página 248 de [51]). Definições e enunciados análogos valem no caso de adjunções à direita.

Diversos outros conceitos podem ser descritos através de extensões de Kan: produtos, equalizadores, *pullbacks*, objetos terminais, assim como suas versões duais, estão aí inclusos. Todos eles são exemplos de *limites*, os quais discutimos na próxima secção.

3.2 Limites

Seja **1** a categoria que possui um só objeto e cujo único morfismo é a identidade. Evidentemente, para toda categoria **C** há somente um functor $\iota : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{1}$. A extensão de Kan à esquerda de $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ relativamente a ι chama-se *limite*. Como há um único objeto em $1 \in \mathbf{1}$, quando existe, $\mathcal{L}F$ é constante e se identifica com sua imagem por 1. Daí, $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ possui limite

se, e somente se, há um *cone* (X, φ) , onde $X \in \mathbf{D}$ e φ é transformação natural entre o functor constante em X e F , no qual qualquer outro cone é fatorado. Isto significa que, para qualquer (X', φ') é possível obter um único mapa $\mu : X' \rightarrow X$, chamado de *fatoração*, tal que os primeiros diagramas abaixo são sempre comutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 & & F(Y') \\
 & \nearrow \varphi' & \nearrow \varphi \\
 X' & \xrightarrow{-u-} X & \uparrow F(f) \\
 & \searrow \varphi' & \searrow \varphi \\
 & & F(Y)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & F(Y') \\
 & \nearrow \varphi' & \nearrow \varphi \\
 X' & \xleftarrow{-u-} X & \uparrow F(f) \\
 & \searrow \varphi' & \searrow \varphi \\
 & & F(Y)
 \end{array}
 \tag{3.1}$$

Dualmente, a extensão de Kan à direita de $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ com respeito a ι é denominada *colimite*. Esta se identifica com um *cocone* universal. Isto é, com um par (X, φ) , em que $X \in \mathbf{D}$ e φ é transformação natural entre F e o functor constante em $\mathcal{R}F(1)$, o qual fatora em todos os outros (X', φ') , como representado no segundo dos diagramas acima.

Toda transformação ξ entre F e F' induz morfismos $\lim \xi$ e $\text{colim} \xi$ entre os correspondentes limites colimites, os quais são isomorfismos se, e só se, ξ é um isomorfismo natural.

As distintas classes de limites de funtores F ficam caracterizadas pela categoria na qual F está definido. Por exemplo, como detalharemos em seguida, produtos nada mais são que limites de funtores com domínio em categorias discretas. De outro lado, se F está definido numa categoria dirigida, então seus colimites são, precisamente, limites indutivos.

Exemplo 3.2.1. Como vimos, um functor $\iota : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ possui adjunto à esquerda $j : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ se, e somente se, a identidade $\text{id}_{\mathbf{D}}$ admite extensão de Kan absoluta à direita, a qual coincide com o próprio j . Assim, em particular, podemos usar de j para calcular os colimites de \mathbf{D} a partir dos colimites de \mathbf{C} . Por outro lado, se ι admite j como adjunto à esquerda, então j possui ι como adjunto à direita e, portanto, podemos usar de ι para expressar limites de \mathbf{D} em termos de limites de \mathbf{C} . Relembramos que um caso particular onde tais adjunções existem é quando \mathbf{D} é uma subcategoria livremente gerada por objetos de \mathbf{D} . Por exemplo, no contexto dos módulos, a existência de uma adjunção $j : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ para $\iota : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Set}$ nos permite concluir que ι deve levar limites de \mathbf{Mod}_R em limites de \mathbf{Set} , ao passo que j deve levar colimites de \mathbf{Set} em colimites de \mathbf{Mod}_R . Isto ficará mais claro ao longo da secção.

Produtos

Uma categoria \mathbf{J} é dita *discreta* quando seus únicos morfismos são as identidades. Os objetos de \mathbf{J} chamam-se *índices*. Os funtores $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ se identificam com regras que a cada índice $j \in \mathbf{J}$ associam um objeto $X_j \in \mathbf{C}$. Fala-se que a categoria \mathbf{C} possui *produtos* quando, independente de qual seja a categoria discreta \mathbf{J} , todo $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ possui limite.

Desta forma, \mathbf{C} possuirá produtos quando, dados quaisquer objetos X_j (indexados da maneira como se queira), existam $X \in \mathbf{C}$ e morfismos $\pi_j : X \rightarrow X_j$, de tal forma que, se $\pi'_j : X' \rightarrow X_j$ é outra família de morfismos, então $\pi'_j = \pi_j \circ f$ para um único $f : X' \rightarrow X$. Diz-se que X é o *produto* dos X_j . Os π_j são chamados de *projeções*. Assim, em outras palavras, uma categoria possui produtos quando admite uma maneira universal de projetar.

Dualmente, fala-se que uma categoria \mathbf{C} possui *coprodutos* quando cada functor $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ possui colimites. Isto significa que, dados X_j em \mathbf{C} , existem X e $\iota_j : X_j \rightarrow X$ tais que, para quaisquer $\iota'_j : X_j \rightarrow X'$ há um único morfismo $f : X \rightarrow X'$ através do qual $\iota_j = \iota'_j \circ f$. O objeto X é chamado de *coproduto* dos X_j , ao passo que os ι_j denominam-se *inclusões*. Desta forma, uma categoria haverá de ter coprodutos quando possuir uma maneira universal de incluir.

Exemplo 3.2.2. Em concordância com o que vimos no primeiro capítulo, tanto **Set** quanto cada categoria algébrica (grupos, anéis, módulos e espaços vetoriais), possuem produtos e coprodutos. Particularmente, quando $\mathbf{Alg} \subset \mathbf{Set}$ é categoria livremente gerada por conjuntos (isto é, quando a inclusão $\iota : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Set}$ possui adjunto j à esquerda), então o último exemplo da subsecção anterior nos diz que produtos em **Alg** são levados por ι em produtos de **Set**, ao passo que coprodutos de **Set** são levados nos respectivos coprodutos de **Alg** por j . Assim, em tal caso, dada uma família X_j de objetos em **Alg**, o produto entre eles é simplesmente o produto cartesiano usual dotado (se for o caso) de operações definidas componente a componente. Por sua vez, $\pi_j : X \rightarrow X_j$ nada mais é que a projeção na j -ésima entrada. Por sua vez, o coproduto em **Alg** deve ser tal que, quando mandado por j em **Set**, caia na reunião disjunta.

Exemplo 3.2.3. O mesmo argumento nos permite inferir produtos e coprodutos em categorias livremente geradas por grupos (ao invés de conjuntos, como discutido no último exemplo). Isto se aplica, por exemplo, à teoria dos anéis de grupos.

Exemplo 3.2.4. Se \mathbf{C} tem produtos, então o mesmo ocorre com $\mathcal{B}(\mathbf{C})$. Realmente, o produto de uma família (X_j, f_j, X'_j) de fibrados é (X, f, X') , em que X e X' são produtos de X_j e X'_j , ao passo que o morfismo $f : X \rightarrow X'$ é obtido da seguinte maneira: se $\pi'_j : X' \rightarrow X'_j$ e $\pi_j : X \rightarrow X_j$ são projeções, então cada $f_j \circ \pi_j$ é morfismo de X em X'_j , donde, por universalidade, obtém-se o morfismo $f : X \rightarrow X'$ procurado. Condição análoga é válida para coprodutos.

Uma categoria \mathbf{C} com *produtos* (resp. *coprodutos*) *finitos* é aquela na qual o limite (resp. colimite) de cada $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, com \mathbf{J} formada apenas de um número finito de índices, sempre existe. Ressaltamos que aqui se está incluindo a situação em que \mathbf{J} é a categoria que não possui objetos nem morfismos. O limite (resp. colimite) em tal caso é chamado de *objeto terminal* (resp. *inicial*) de \mathbf{C} . A nomenclatura se deve ao seguinte: como imediatamente se constata, X é objeto terminal (rep. inicial) de \mathbf{C} se, e somente se, para qualquer outro $X' \in \mathbf{C}$ existe um único morfismo $f : X' \rightarrow X$ (resp. $f : X \rightarrow X'$). Um objeto que é simultaneamente inicial e final chama-se *nulo* ou *trivial*.

Exemplo 3.2.5. Se uma categoria \mathbf{C} tem $*$ como objeto terminal, então este é um objeto nulo para sua pontuação \mathbf{C}_* . Por exemplo, em **Set** qualquer conjunto formado de um só elemento é objeto terminal, de modo que este serve de objeto nulo para \mathbf{Set}_* . Quando a inclusão $\iota : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva limites (isto é, quando a categoria algébrica é livremente gerada por conjuntos), então os objetos terminais de **Alg** são levados nos objetos terminais de **Set**. Assim, todo ente com um único elemento é terminal em **Alg** e, portanto, objeto nulo para \mathbf{Alg}_* . Ocorre que, se escolhermos o elemento neutro como ponto base, então todo morfismo o preserva, de modo que $\mathbf{Alg}_* \simeq \mathbf{Alg}$. Portanto, estruturas triviais (com um só elemento) são objetos nulos de **Alg**.

Exemplo 3.2.6. Em contrapartida ao exemplo anterior, observamos que nem sempre um objeto terminal é nulo. Com efeito, **Set** (ou mesmo **Top**) possuem como terminais qualquer objeto

formado de um só elemento (digamos $*$). Estes, no entanto, não são objetos iniciais para tais categorias. De fato, inexistem morfismos $* \rightarrow \emptyset$. Consequentemente, o único objeto inicial em **Set**, **Top** ou em qualquer categoria que admita o conjunto vazio como objeto, é o próprio \emptyset .

Façamos algumas observações:

1. por argumentos indutivos, vê-se que uma categoria possui produtos finitos se, e somente se, possui produtos binários (isto é, limites de funtores $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, com \mathbf{J} formada de só dois índices) e um objeto terminal. Dualmente, para que uma categoria tenha coprodutos finitos é necessário e suficiente que ela admita coprodutos binários e um objeto inicial;
2. uma categoria com produtos e coprodutos finitos isomorfos é dita ter *biprodutos*. Assim, \mathbf{C} têm biprodutos se, e só se, admite produtos e coprodutos binários isomorfos e um objeto nulo. Aqui se enquadram **AbGrp**, **Mod_R**;
3. numa categoria com produtos binários $X \times Y$, para todo espaço X tem-se um morfismo $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$, chamado de *mapa diagonal* de X , tal que $\pi_i \circ \Delta_X = id_X$. Ele é obtido diretamente da universalidade das projeções. Da mesma forma, se uma categoria têm coprodutos $X \oplus Y$, então, por universalidade, existem morfismos $\nabla_X : X \oplus X \rightarrow X$ satisfazendo $\nabla_X \circ \iota_i = id_X$.

Notação. No que segue, produtos serão genericamente denotados por \prod ou \times , ao passo que coprodutos arbitrários serão representados por \bigoplus .

Limites Indutivos

Diz-se que uma categoria não-vazia \mathbf{I} é *dirigida* (ou que está *direcionada*) quando:

1. é pequena e em seu conjunto de objetos (aqui também chamados de índices) está definida uma relação de ordem parcial \leq ;
2. existe um morfismo $f : i \rightarrow j$ se, e somente se, $i \leq j$.

Um functor covariante (resp. contravariante) $F : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$ chama-se *sistema dirigido* (resp. *codirigido*) de objetos de \mathbf{C} com coeficientes em \mathbf{I} . Costuma-se escrever X_i (resp. X^i) ao invés de $F(i)$, e f_{ij} (resp. f^{ji}) ao invés de $F(f)$, com $f : i \rightarrow j$. Ao longo do texto, esta prática será adotada. Quando existe, o colimite (resp. limite) de um sistema dirigido (resp. codirigido) é chamado *limite indutivo* (resp. de *colimite indutivo*). Apesar de confusa, tal nomenclatura é canônica.

Exemplo 3.2.7. Para todo conjunto parcialmente ordenado I , a categoria $\text{Pos}(I)$, definida no exemplo 2.1.3, é claramente dirigida. Em particular, a categoria definida pelo ordenamento natural de \mathbb{N} é direcionada. Um sistema dirigido em \mathbf{C} com coeficientes naturais é simplesmente uma sequência (no caso co-dirigido, as setas são invertidas)

$$X_0 \longrightarrow X_1 \rightrightarrows X_2 \rightrightarrows X_3 \longrightarrow \cdots$$

Exemplo 3.2.8. Numa categoria \mathbf{C} , fixemos $\mathbf{J} \subset \mathbf{C}$ e $X \in \mathbf{C}$. Seja \mathbf{J}_X a categoria formada pelos objetos de \mathbf{J} que tem X como subobjeto, e com morfismos dados por inclusões. Esta se torna dirigida quando dotada do ordenamento parcial proporcionado pela relação usual de continência (observamos, em particular, que se $X = \emptyset$ é objeto inicial de \mathbf{J} , então $\mathbf{J}_\emptyset \simeq \mathbf{J}$). Aqui se enquadram importantes situações, nas quais em geral se considera $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$. Por exemplo, se \mathbf{J} é a subcategoria dos espaços compactos, \mathbf{J}_X é utilizado na definição de *cohomologias com suporte compacto* de X (veja, por exemplo, os dois últimos capítulos de [28]).

Exemplo 3.2.9. Uma *cobertura* de um objeto $X \in \mathbf{C}$ é uma decomposição de X em termos de um limite indutivo de subobjetos X_i de X . Outro caso enquadrado no exemplo anterior é obtido tomando \mathbf{J} igual à $\text{Cov}(X) \subset \mathbf{C}$, formada de todas os subobjetos que fazem parte de coberturas convenientes de X . Por exemplo, quando $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$, pode-se considerar $\text{Cov}(X)$ como sendo a categoria dos abertos de X . Os funtores contravariantes $\mathcal{F} : \text{Cov}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{D}$ chamam-se *pré-feixes de X com valores em \mathbf{D}* . Se por um lado funtores são responsáveis por associar invariantes a espaços, por outro, os pré-feixes estão relacionados com a construção de *invariantes locais*. Quando $\mathbf{D} = \mathbf{Set}$, os elementos $s \in \mathcal{F}(X_i)$ são chamados de *secções* de \mathcal{F} em X_i . A razão é a seguinte: como comentaremos adiante, o estudo de alguns pré-feixes “globalizáveis” se resume ao estudo dos funtores Γ de secções de certos fibrados.

Exemplo 3.2.10. Pode ser que o invariante local $\mathcal{F} : \text{Op}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, com $\mathbf{C} \subset \mathbf{Set}$, seja ambíguo nas vizinhanças de um determinado ponto de X . Mais precisamente, pode ser que, fixado $x \in X$, diferentes elementos $\mathcal{F}(X_i)$ e $\mathcal{F}(X_j)$ coincidam numa vizinhança de x contida em $X_i \cap X_j$. Em muitas ocasiões, esta ambiguidade é dispensável. Isto nos leva a substituir o pré-feixe \mathcal{F} por um outro $\overline{\mathcal{F}}$, de tal maneira que secções que coincidem nas vizinhanças de um mesmo ponto sejam identificadas. Descrevamos esta troca com um pouco mais de detalhes. Para cada $x \in X$, denotemos por $X(x)$ a categoria dirigida formada de todo subobjeto conveniente de X que contém x . Isto é, seja $X(x) = \mathbf{J}_x$ quando $\mathbf{J} = \text{Cov}(X)$. Seja, também, $\mathcal{F}(x)$ a reunião dos $\mathcal{F}(X_i)$, com $X_i \in X(x)$. Define-se o *germe* em x de uma secção $s \in \mathcal{F}(x)$ como sendo a sua classe de equivalência s_x pela relação que identifica a s qualquer outra secção $s' \in \mathcal{F}(x)$ tal que $s'|_V = s|_V$ em alguma vizinhança suficientemente pequena de x . O espaço quociente segundo tal relação chama-se *stalk* de \mathcal{F} em x , sendo denotado por \mathcal{F}_x . Assim, \mathcal{F}_x é o limite co-indutivo da restrição $\mathcal{F}|_{X(x)}$. O novo pré-feixe $\overline{\mathcal{F}} : \text{Cov}(X) \rightarrow \mathbf{Set}$ é aquele que a cada $X_i \subset X$ associa a reunião (disjunta) dos *stalks* em pontos de X_i , ao passo que, para toda inclusão $\iota : X_i \rightarrow X_j$ e todo germe s_x , com $x \in X_j$, ele satisfaz $[\overline{\mathcal{F}}(\iota)](s_x) = (s|_{X_i})_x$. Moral da história: *quando somente o comportamento nas vizinhanças de pontos é importante, para evitar ambiguidade, deve-se trocar secções por germes e conjuntos destas por stalks*.

Exemplo 3.2.11. Dois casos particulares do que foi discutido no exemplo anterior: para toda variedade X e todo ponto $x \in X$ há um pré-feixe $\mathcal{T} : \text{Op}(x) \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$, que a cada U contendo x associa TU_x , que é o conjunto das derivações em x de $\mathcal{D}(U)$. No entanto, quaisquer duas funções que coincidam numa vizinhança de x ali possuem a mesma derivação. Portanto, ao invés do espaço tangente TX_x , seria mais sensato considerar o *stalk* de \mathcal{T} em x . Para naturais m, k há também pré-feixes $\mathcal{J} : \text{Op}(X) \rightarrow \mathbf{Set}$, responsável por associar a cada aberto de $U \subset X$ o conjunto dos polinômios de Taylor das funções $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^k . O germe de f em x é precisamente a coleção das aplicações que têm contato de grau k com f . Por sua vez, a

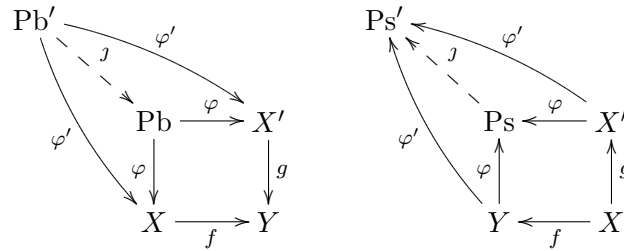
Sobre o exemplo anterior, duas observações:

1. a subcategoria cheia $\mathbf{Shv}(X) \subset \mathbf{Func}(\mathbf{Op}(X)^{op}; \mathbf{Set})$, formada dos feixes de conjuntos de um espaço X , possui uma descrição bastante simples. Com efeito, ela é equivalente à subcategoria cheia $\mathbf{\acute{E}tl} \subset \mathcal{B}_X$ dos homeomorfismos locais $f : Y \rightarrow X$, chamados de *espaços \acute{E}tale*. Uma maneira de obter tal equivalência é através do functor $\Gamma : \mathbf{\acute{E}tl} \rightarrow \mathbf{Shv}(X)$, que a cada fibrado associa o feixe de suas secções. A inversa fraca é a regra que a cada pré-feixe \mathcal{F} em X associa o espaço $\acute{E}tale \pi : \acute{E}(\mathcal{F}) \rightarrow X$, em que $\acute{E}(\mathcal{F})$ é a reunião disjunta de todos os *stalks* de \mathcal{F} e $\pi(s_x) = x$;
2. maiores detalhes sobre a Teoria de Feixes podem ser encontrados em [81, 79], e também no clássico [24].

Pullbacks e Pushouts

Seja $(\rightarrow \cdot \leftarrow)$ a categoria que possui somente três objetos (aqui denotados por 1, 2 e $*$), e além das identidades, dois únicos morfismos $\delta : 1 \rightarrow *$ e $\delta' : 2 \rightarrow *$. Para qualquer outra categoria \mathbf{C} , o conjunto dos funtores de $(\rightarrow \cdot \leftarrow)$ em \mathbf{C} está em bijeção com a coleção dos pares de morfismos de \mathbf{C} que têm igual co-domínio.

Fala-se que dois morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y$ possuem *pullback* quando existe o limite do functor associado a (f, g) pela referida identificação. Isto significa que, dados $f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y$, existem um objeto $\text{Pb} \in \mathbf{C}$ e morfismos $\varphi : \text{Pb} \rightarrow X$ e $\varphi' : \text{Pb} \rightarrow X'$, os quais satisfazem a igualdade $g \circ \varphi' = \varphi \circ f$. Além disso, para quaisquer outros morfismos $\varphi' : \text{Pb}' \rightarrow X'$ e $\varphi : \text{Pb}' \rightarrow X$ cumprindo a condição $g \circ \varphi' = \varphi \circ f$, existe um único $j : \text{Pb}' \rightarrow \text{Pb}$ que torna comutativo o primeiro dos diagramas abaixo:



Quando cada par (f, g) de morfismos de \mathbf{C} admite *pullback*, fala-se que a própria categoria tem *pullbacks*. A versão dual do *pullback*, totalmente caracterizada pelo segundo dos diagramas acima, chama-se *pushout*.

Exemplo 3.2.15. Se uma categoria \mathbf{C} possui produtos binários e equalizadores, então ela também possui *pullbacks*: o *pullback* de $f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y$ é o equalizador de $f \circ \pi_1 : X \times X' \rightarrow Y$ e $g \circ \pi_2 : X \times X' \rightarrow Y$, em que π_i são as projeções do produto $X \times X'$. Nestas circunstâncias, é usual escrever $X \times_Y X'$ ao invés de Pb . Assim, dentro de \mathbf{Set} , bem como em \mathbf{Top} , o *pullback* de aplicações f, g é o conjunto $X \times_Y X'$ de todo (x, x') tal que $f(x) = g(x')$.

Exemplo 3.2.16. Quando \mathbf{C} tem *pullbacks*, então $\mathcal{B}_Y(\mathbf{C})$ também os tem. Em geral, estes aparecem no seguinte contexto: se (X, π, Y') é fibrado com base Y' , então todo morfismo $f : Y \rightarrow Y'$ induz um fibrado (f^*X, pr_1, Y') com base em Y , definido pelo *pullback* de (f, π) . Por

exemplo, quando \mathbf{C} é **Set** ou **Top**, o objeto f^*X nada mais é que o conjunto de todo par $(y, x) \in Y \times X$ tal que $f(y) = \pi(x)$. Identificando X com a reunião das fibras $X_{y'} = \pi^{-1}(y')$, vê-se que a fibra em y de f^*X é o conjunto $\text{pr}_1^{-1}(y) = y \times X_{f(y)}$, naturalmente isomorfo a $X_{f(y)}$. Portanto, tem-se um procedimento que troca a base de um fibrado (X, π, Y') , deixando suas fibras invariantes.

Exemplo 3.2.17. Dualmente, numa categoria com coprodutos binários e coequalizadores, sempre existem *pushouts*: o *pushout* de $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y'$ é o coequalizador dos morfismos $\iota_1 \circ f : X \rightarrow Y \oplus Y'$ e $\iota_2 \circ g : X \rightarrow Y \oplus Y'$, onde ι_i são inclusões de $Y \oplus Y'$. Desta forma, em **Set** e **Top**, o *pushout* de f, g é a reunião disjunta $Y \sqcup Y'$ de seus codomínios, quocientada pela relação que identifica os elementos $f(x)$ e $g(x)$, para todo $x \in X$. Por exemplo, se $\iota : X \rightarrow Y'$ é inclusão, então o *pushout* de $f : X \rightarrow Y$ com ι é chamado de *colagem* (através de f) de Y em Y' ao longo de X . Esta particular situação é utilizada, por exemplo, na definição de CW-complexos.

Uma propriedade fundamental dos *pullbacks* é que, quando colados, seja de forma horizontal ou vertical, eles produzem novo *pullback*. De maneira mais precisa, como facilmente se verifica, se os dois primeiros diagramas são *pullbacks*, então o terceiro e o quarto também o são. Resultado análogo é válido para *pushouts*.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \text{Pb} & \dashrightarrow & X' \\
 & & & & & \vdots & & \vdots \\
 \text{Pb} & \dashrightarrow & X' & & \text{Pb} & \dashrightarrow & Y & & \text{Pb} & \dashrightarrow & Y & & \text{Pb} & \dashrightarrow & Y & & \text{Pb} & \dashrightarrow & X' \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 X & \longrightarrow & Y & & Y & \longrightarrow & Z & & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & & Y & \longrightarrow & Z & & Y & \longrightarrow & Z
 \end{array}$$

Exemplo 3.2.18. Na álgebra, o *kernel* de $f : X \rightarrow Y$ é o subconjunto $\ker(f) \subset X$ formado de todo $x \in X$ tal que $f(x) = 0$. Seja $\ker f$ a inclusão $\ker(f) \rightarrow X$. Como logo se convence, dados um grupo abeliano A e um morfismo $g : A \rightarrow X$, para que $A = \ker(f)$ e $g = \ker f$, é necessário e suficiente que estes constituam o *pullback* do par $(0, f)$, em que 0 é morfismo do grupo trivial em Y . Por outro lado, o *cokernel* de f é o espaço quociente $Y/\text{im}f$. Seja $\text{coker}f$ a aplicação quociente $Y \rightarrow \text{coker}(f)$. Fornecidos $A \in \mathbf{AbGrp}$ e $g : Y \rightarrow A$, estes constituirão o *cokernel* de f se, e somente se, forem o *pushout* de $(0, f)$. Tem-se, também, as identificações $\text{im}(f) = \ker(\text{coker}(f))$ e $\text{coim}(f) = \text{coker}(\ker(f))$.

Motivados pelo exemplo anterior, em qualquer categoria com objeto inicial \emptyset (resp. final $*$), o *pullback* (resp. *pushout*) do par (\emptyset, f) (resp. $(*, f)$) é chamado de *kernel* (resp. *cokernel*) de f . Por sua vez, a *imagem* e a *coimagem* de f serão definidas como sendo $\ker(\text{coker}(f))$ e $\text{coker}(\ker(f))$. Em tais categorias, também faz sentido falar de *seqüências exatas* de morfismos: uma seqüência f_n diz-se *exata* quando, para qualquer que seja o n , o *kernel* de f_n coincide, a menos de isomorfismos, com a imagem de f_{n-1} . Uma seqüência exata é dita *curta* quando possui somente dois termos não-nulos, sendo estes consecutivos.

A aplicabilidade das seqüências exatas se deve ao seguinte: uma vez construídos invariantes (isto é, uma vez obtidos funtores que associam a cada espaço uma estrutura), precisa-se *calculá-los*. Neste sentido, as seqüências exatas constituem poderosas ferramentas. De maneira mais precisa, procura-se, por exemplo, por funtores que associem a cada seqüência exata curta de

espaços uma sequência exata longa na categoria dos correspondentes invariantes. Se tal categoria for adequada, então é possível retirar informação dos invariantes de um espaço da sequência a partir dos invariantes dos outros. O estudo das sequências exatas é concernente à *Álgebra Homológica* (veja, por exemplo, [32, 69, 86], assim como os clássicos [7, 52].

Exemplo 3.2.19. Em **Set** ou em **Top**, o *cokernel* de uma inclusão $\iota : A \rightarrow X$ é simplesmente o espaço X/A obtido identificando todos os elementos de A num único ponto. A sequência cujos termos não-triviais são a inclusão precedida da projeção $\pi : X \rightarrow X/A$ é exata curta. Situação análoga acontece em categorias algébricas, em que X/A agora deve ser interpretado como o quociente da estrutura X por uma subestrutura para a qual tal quociente está bem definido. Por exemplo, em **Grp** o objeto X é grupo, enquanto que $A \subset X$ é subgrupo normal. Em **Rng**, por sua vez, X é anel e $A \subset X$ deve ser um ideal.

Completude

Diz-se que uma categoria é *completa* (resp. *cocompleta*) quando todos os funtores que nela assumem valores possuem limites (resp. colimites). Na subsecção anterior, vimos que algumas classes de limites podem ser criados se supomos a existência de outros. Por exemplo, mostramos que se uma categoria admite produtos binários e equalizadores, então ela possui *pullbacks*.

A proposição abaixo nos indica que, se reforçamos a hipótese adicionando a existência de todos os produtos (não só dos binários), ganhamos a existência não só dos *pullbacks*, mas de qualquer limite. Ressaltamos que a prova aqui apresentada foi inteiramente baseada em [51].

Proposição 3.2.1. *Para que uma categoria \mathbf{D} seja completa, é necessário e suficiente que ela possua todos os produtos e todos os equalizadores.*

Demonstração. A necessidade é evidente. Para a suficiência, fornecido $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, mostraremos que as hipóteses asseguram a existência de um cone (X, φ) para F tal que, se (X', φ') é qualquer outro cone de F , então há uma única fatoração $u : X' \rightarrow X$. Escolhido um morfismo $f : Y \rightarrow Y'$ em \mathbf{C} , escrevamos $Y = \text{dom} f$ e $Y' = \text{cod} f$. Uma vez que \mathbf{D} possui todos os produtos, seja $\prod_f F(\text{cod} f)$ o produto dos objetos de \mathbf{D} indexados pelo contradomínio de morfismos de \mathbf{C} . Da mesma forma, seja $\prod_Y F(Y)$ o produto dos objetos de \mathbf{D} indexados por objetos de \mathbf{C} . Como todo objeto de \mathbf{C} é domínio e contradomínio de ao menos um morfismo (por exemplo de sua respectiva identidade), segue-se que $F(\alpha) \circ \pi_{\text{dom} f}$ e $\text{id} \circ \pi_{\text{cod} f}$ definem outras projeções para $\prod_f F(\text{cod} f)$, de tal modo que, por universalidade, existem as setas paralelas representadas no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(\text{dom} f) & \xrightarrow{F(f)} & F(\text{cod} f) \\
 & \nearrow \varphi' & \uparrow \varphi & & \uparrow \pi_f \\
 X' & \xrightarrow{\mu} & E & \xrightarrow{eq} & \prod_Y F(Y) \rightrightarrows \prod_f F(\text{cod} f) \\
 & \searrow \varphi' & \downarrow \varphi & & \downarrow \pi_f \\
 & & F(\text{cod} f) & \xrightarrow{id} & F(\text{cod} f)
 \end{array}$$

$\pi_{\text{dom} f}$ (seta vertical de E para $F(\text{dom} f)$)
 $\pi_{\text{cod} f}$ (seta vertical de E para $F(\text{cod} f)$)

O par (X, φ) , em que X é o equalizador das setas paralelas e $\varphi(Y) = \pi_Y \circ eq$, formam um cone para F . Afirmamos que ele é o limite procurado. Com efeito, se (X', φ') é outro cone, a

universalidade dos produtos nos garante a existência de um único morfismo $eq' : X' \rightarrow \prod_Y F(Y)$ que preserva as setas paralelas. Desta forma, a universalidade do equalizador fornece um único $u : X' \rightarrow E$, garantindo o afirmado e concluindo a demonstração. \square

Sobre o resultado anterior, duas observações:

1. ele é uma típica situação na qual a diferença entre os conceitos de classe e de conjunto deve ser levada em consideração: durante toda a demonstração, a classe dos objetos de \mathbf{C} foi tratada como sendo um conjunto, algo que, numa abordagem axiomática, pode não ser verdade para uma categoria arbitrária. Mais uma vez, isto ressalta a ingenuidade com a qual temos trabalhado;
2. tem-se uma versão dual, demonstrada de maneira estritamente análoga: *para que uma categoria seja cocompleta, é necessário e suficiente que ela tenha coprodutos e co-equalizadores.*

Exemplo 3.2.20. Se uma categoria \mathbf{D} for completa, então $\text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D})$ também o será, independente de quem for \mathbf{C} . De fato, consideremos o bifunctor de avaliação

$$ev : \text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D}) \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D} \quad \text{tal que} \quad ev(F, X) = F(X).$$

Ele induz uma família de funtores $ev_X : \text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{D}$, definidos por $ev_X(F) = F(X)$. Dado qualquer $\alpha : \mathbf{C}' \rightarrow \text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D})$, o respectivo $ev_X \circ \alpha$ têm limite. Consequentemente, α também possui limite, garantido o que havíamos afirmado.

Exemplo 3.2.21. As categorias \mathbf{Mfd} e \mathbf{Diff} possuem produtos e coprodutos, mas não são completas nem cocompletas: em geral elas não possuem *pullbacks* nem *pushouts*. Para *pushouts*, tome, por exemplo, duas retas coladas ao longo de um único ponto. Observamos, no entanto, que *pullbacks* de mapas *transversais* existem em \mathbf{Diff} . Mais precisamente, se $f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y$ são diferenciáveis e transversais (isto é, se a imagem das derivadas Df_x e $Dg_{x'}$ geram o espaço TY_y em cada (x, x') tal que $f(x) = y = g(x')$), então o *pullback* do par (f, g) é uma variedade diferenciável.

Espaços Pontuados

Nesta subsecção, estudamos os limites e colimites em categorias pontuadas \mathbf{C}_* . A ideia é tentar determiná-los a partir dos limites de \mathbf{C} . De maneira direta, verifica-se que o despareamento $\mathcal{D} : \mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{C}$ preserva limites, de modo que, para todo functor $F : \mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{D}$, se seu limite existe, então $\mathcal{D}(\lim F) \simeq \lim(\mathcal{D} \circ F)$. Assim, por exemplo, produtos e *pullbacks* em \mathbf{C}_* podem ser diretamente calculados a partir de suas versões em \mathbf{C} , bastando pontuá-los de maneira canônica. O exemplo abaixo nos mostra que a mesma estratégia, no entanto, não se aplica para colimites.

Exemplo 3.2.22. O coproduto de pares (X_i, x_i) em \mathbf{Set}_* é o *produto wedge* $\bigvee_i X_i$, definido da seguinte maneira: toma-se a reunião de todos os produtos $X_i \times x_i$ e passa-se ao quociente pela relação que identifica todos os pontos x_i num único, o qual há de ser o ponto base de $\bigvee_i X_i$.

Observamos que o coproduto de \mathbf{Set}_* foi obtido a partir de colimites em \mathbf{Set} : primeiro tomamos a reunião disjunta (que é o coproduto) e depois passamos ao quociente (que é um *co-kernel*). Argumentação análoga funciona para obter coprodutos em qualquer \mathbf{C}_* , desde que \mathbf{C} seja cocompleta.

3.3 Reconstrução

Nesta secção, veremos que os limites são as extensões de Kan fundamentais. Mais precisamente, mostraremos que sua categoria \mathbf{D} possui quantidade suficiente de coprodutos e co-equalizadores, então todo $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}$ admite extensão de Kan à esquerda relativamente a qualquer $\iota : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$. Em suma, mostraremos ser possível escrever

$$\mathcal{L}F(X) = \int^Y \text{Mor}_{\mathbf{C}}(\iota(Y); X) \cdot F(Y),$$

onde, para todo conjunto S e todo objeto E , a *co-potência* $S \cdot E$ nada mais é que é o coproduto de cópias de E indexadas em S . Por sua vez, o símbolo de integração, usualmente denominado *coend*, é uma espécie de soma universal sobre todos os objetos de \mathbf{A} e, como discutiremos em seguida, se vê descrita por um co-equalizador.

Dualmente, mostraremos que se a categoria \mathbf{D} admite produtos e equalizadores suficientes, então as extensões de Kan à direita sempre existem, com

$$\mathcal{R}F(X) = \int_Y F(Y)^{\text{Mor}_{\mathbf{C}}(\iota(Y); X)},$$

em que a *potência* E^S do objeto E pelo conjunto S é simplesmente o produto de cópias de E indexadas em S . Semelhantemente, a integral representa o *end*: um objeto dual ao coend e descrito em termos de um equalizador.

Tais expressões possuem duas consequências imediatas, as quais mencionamos desde já:

1. todo functor que assume valores numa categoria completa (resp. cocompleta) possui extensões de Kan à direita (resp. à esquerda);
2. um tal functor preservará todas as extensões de Kan se, e somente se, for *contínuo* (isto é, se, e somente se, preservar todos os limites). Dualmente, ele preservará todas as extensões de Kan à direita se, e só se, for *cocontínuo*.

Ends

Na álgebra linear (isto é, na categoria $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$), uma função do tipo $f : V \times V' \rightarrow W$ tanto pode ser uma transformação linear do espaço produto $V \times V'$ em W , quanto uma aplicação bilinear. Semelhantemente, correspondendo às transformações lineares, tem-se as transformações naturais entre funtores $F, F' : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$. O análogo das aplicações bilineares são as *transformações binaturais*. Estas nada mais são que regras ξ , responsáveis por associar a cada objeto $X \in \mathbf{C}$ um morfismo $\xi(X) : F(X, X) \rightarrow F'(X, X)$ que deixa comutativo o diagrama abaixo para um $f : X \rightarrow X'$ qualquer. Observamos que, se F é constante (digamos igual a C), então tal diagrama colapsa no quadrado representado ao seu lado.

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X', X) & \xrightarrow{F(f, id)} & F(X, X) & \xrightarrow{\xi(X)} & F'(X, X) & \xrightarrow{F'(id, f)} & F'(X, X') \\
 \downarrow F(id, f) & & & & \downarrow F'(f, id) & & \\
 F(X', X') & \xrightarrow{\xi(X')} & & & F'(X', X') & & \\
 & & & & & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & \\
 & \uparrow & \uparrow \\
 C & \xrightarrow{\xi(X')} & F'(X', X')
 \end{array}$$

Vimos que o limite de um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ se resume a um par (X, φ) , em que $X \in \mathbf{D}$ e φ é transformação natural universal entre o functor constante em X e F . Isto é, tal que qualquer outro par (X', φ') fatora em (X, φ) . Seguindo a mesma linha do parágrafo anterior, se F está definido numa categoria produto do tipo $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C}$, pode-se falar não só de transformações universais, mas também de transformações binaturais universais. Realizando esta troca na caracterização do limite, chega-se ao conceito de *end* de F . Assim, o *end* de $F : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é simplesmente um *cubo* (X, φ) , onde $X \in \mathbf{D}$ e φ é uma transformação dinatural entre o functor constante em X e F , obtido de tal maneira que todo cubo (X', φ') pode ser unicamente fatorado em (X, φ) . Isto é, deve haver um único $\mu : X' \rightarrow X$ que deixa comutativo o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(Y', Y') & & \\
 & \nearrow \varphi & & \searrow F(f, id) & \\
 X' & \overset{u}{\dashrightarrow} & X & & F(Y, Y') \\
 & \searrow \varphi & & \nearrow F(id, f) & \\
 & & F(Y, Y) & &
 \end{array} \tag{3.2}$$

Exemplo 3.3.1. Como consequência do lema de Yoneda, o conjunto $\text{Nat}(H; H')$ das transformações naturais entre dois funtores $H, H' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ pode ser obtido em termos do *end* do correspondente $F : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, que a cada par (X, Y) associa $\text{Mor}_{\mathbf{D}}(H(X); H'(Y))$.

De maneira dual ao *end*, define-se o que vem a ser o *coend* de $F : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$. Quando existem, estes são respectivamente denotados por $\int_{\mathbf{C}} F$ e $\int^{\mathbf{C}} F$. Uma motivação para tais notações é obtida fazendo alusão ao cálculo tensorial: lá, partindo-se de qualquer objeto f_j^i que é contravariante em um índice e covariante em outro, para tomar seu traço (isto é, ao se contrair i com j), deve-se somar sobre os possíveis valores de i , resultando em $\text{tr}(f_j^i) = \sum_i f_i^i$. A entidade $F : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é contravariante em uma entrada e covariante em outra. Tomar seu traço é “somar” sobre todos os possíveis valores de $F(X, X)$, com $X \in \mathbf{C}$. Como o “índice” X pode não ser discreto, tal “soma” é substituída por uma “integral” $\int_{\mathbf{C}} F$. Esta pode ou não convergir, traduzindo a existência ou inexistência do *end* de F .

Levemos a analogia entre cálculo tensorial e “análise categórica” adiante. Consideremos um objeto com três índices (digamos f_{kj}^i) sendo dois deles covariantes e um contravariante. Ao contrair i com j , ganha-se uma soma sobre i e o resultado é um novo objeto e_k com um único índice covariante livre e tal que, para cada valor de k , sua respectiva componente é dada por $\sum_i f_{ki}^i$. De maneira análoga, se o objeto inicial possuir dois índices contravariantes, então o objeto final será contravariante. Assim, se consideramos um functor do tipo $F : \mathbf{P} \times \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, em que o *end* de cada $F_p : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, com $F_p(X, X') = F(P, X, X')$ existe, então há um $E : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{D}$ tal que $E(P) = \int_{\mathbf{C}} F_p$. Analogamente, se o functor inicial for contravariante na primeira entrada, então o respectivo E também o será, e $E(P) = \int^{\mathbf{C}} F_p$. Nestas condições, diz-se que F possui *end* (resp. *coend*) com parâmetros. Veja as páginas 228-230 de [51]. Em cada caso, costuma-se escrever

$$E(P) = \int_X F(P, X, X) \quad \text{e} \quad E(P) = \int^X F(P, X, X).$$

Se agora consideramos um objeto com quatro índices t_{lj}^{ki} , seu traço será independente da ordem que o tomamos em i e em k . No contexto da análise categórica isto significa que, dado um functor do tipo $F : \mathbf{P}^{op} \times \mathbf{P} \times \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ tal que o *end* dos respectivos $F_x : \mathbf{P}^{op} \times \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{D}$ e $F_p : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ existe, então a ordem em que o calculamos é indiferente. Mais precisamente, se E_x e E_p são os respectivos funtores que a cada x e cada p associam o *end* de F_x e de F_p , então vale $\int_{\mathbf{C}} E_x \simeq \int_{\mathbf{P}} E_p$. Sucintamente,

$$\int_P \int_X F(P, P, X, X) \simeq \int_X \int_P F(P, P, X, X).$$

Tal equivalência é usualmente chamada de *teorema de Fubini* por ser análogo a um resultado homônimo que aparece no cálculo e, mais geralmente, em teoria da medida. Para uma prova formal, veja o corolário na página 231 de [51].

Ends vs Limites

Na subsecção anterior, obtivemos o conceito de *end* de um functor $F : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ trocando, na definição de limite, transformações naturais por transformações binaturais. Nesta, exploraremos mais de perto a relação entre *ends* e limites.

Iniciamos observando que, em geral, o *end* de F pode existir sem que seu limite exista. Ainda assim, mesmo que ambos existam, eles podem ser distintos. No entanto, se F é constante na primeira entrada, tais conceitos se equivalem. Intuitivamente, a razão é a seguinte: no processo de categorificação, transformações naturais entre funtores então em correspondência com as transformações lineares entre espaços, ao passo que transformações binaturais são os análogos de transformações bilineares. Pode-se ter uma transformação bilinear $f : V \times V' \rightarrow W$ sem que esta o seja linear. No entanto, se a primeira entrada é trivial (isto é, se vale $V \simeq 0$), então toda $f : 0 \times V' \rightarrow W$ que seja bilinear também será linear. Daí, aplicando a analogia, se F é constante na primeira entrada, então o cubo (X, φ) por ela definido se resume a um cone e, consequentemente, o *end* coincide com o limite.

Sob um ponto de vista mais formal, tem-se a seguinte justificativa para as afirmações anteriores: como vimos, limites e colimites podem ser descritos em termos de produtos, equalizadores e suas versões duais. Seguindo a mesma estratégia, vê-se que *ends* e *coends* também são descritos por produtos e equalizadores. De maneira mais precisa, se limites de funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ eram obtidos de equalizadores da forma

$$\lim F \dashv\dashv \prod_X F(X) \Longrightarrow \prod_f F(\text{cod}(f)), \quad (3.3)$$

ends de $F' : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ passam a ser determinados por

$$\int_{\mathbf{C}} F' \dashv\dashv \prod_X F'(X, X) \Longrightarrow \prod_f F'(\text{dom}(f), \text{cod}(f)). \quad (3.4)$$

Daí, construindo o primeiro diagrama para F' , vê-se que seu limite é dado por

$$\lim F' \dashv\dashv \prod_{(X,Y)} F'(X, Y) \Longrightarrow \prod_{(f,g)} F'(\text{cod}(f), \text{cod}(g)),$$

o qual é evidentemente distinto de (3.3), mas coincidente com (3.4) quando F' é constante na primeira entrada. Conclusões análogas são válidas para colimites e *coends*.

Fórmula

Vejamos, finalmente, que se a categoria \mathbf{D} possui coprodutos e co-equalizadores suficientes, então a extensão de Kan à esquerda de todo $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}$ ao longo de qualquer $\iota : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ existe e pode ser representada em termos de um *coend*. O fato fundamental é que, se $\mathcal{L}F$ é a extensão procurada, então, para cada $F'' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ há bijeções naturais

$$\text{Nat}(\mathcal{L}F; F'') \simeq \text{Nat}(F; F'' \circ \iota), \quad (3.5)$$

as quais determinam $\mathcal{L}F$: qualquer outro functor que as induz é naturalmente isomorfo à $\mathcal{L}F$ e, portanto, uma extensão de Kan para F .

Consideremos o functor $H : \mathbf{C} \times \mathbf{A}^{op} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}$, definido em objetos por

$$H(X, Y, Z) = \bigoplus_{f \in \text{Mor}_{\mathbf{C}}(\iota(Z); X)} F(Y) = \text{Mor}_{\mathbf{C}}(\iota(Z); X) \cdot F(Y),$$

e suponhamos que \mathbf{D} admite coprodutos e co-equalizadores suficientes para que o *coend* de cada H_x exista. Neste caso, H tem *coend* com parâmetros, de modo que há um $E : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ tal que

$$E(X) = \int^{\mathbf{C}} H_x = \int^Y \text{Mor}_{\mathbf{C}}(\iota(Y); X) \cdot F(Y).$$

Seguindo [51], vamos mostrar que tal functor satisfaz (3.5) e, portanto, é extensão de Kan à esquerda de F . Para tanto, dado um $F'' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ qualquer, observemos que

$$\begin{aligned} \text{Nat}(E; F'') &\simeq \int_X \text{Mor}_{\mathbf{D}}(E(X); F''(X)) \\ &\simeq \int_Y \int_X \text{Mor}_{\mathbf{Set}}(\text{Mor}_{\mathbf{C}}(\iota(Y); X); \text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(Y); F''(X))) \\ &\simeq \int_Y \text{Nat}(h^{\iota(Y)}; \text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(Y); F''(-))) \\ &\simeq \text{Nat}(F; F'' \circ \iota), \end{aligned}$$

onde: na primeira passagem utilizamos do exemplo (3.3.1); na segunda aplicamos as definições de E e dos coprodutos, ao mesmo tempo que utilizamos da continuidade do functor h^X , do teorema de Fubini e também da identidade $\prod_S h^X(Y) \simeq h^S(h^X(Y))$; na terceira fizemos uso do lema de Yoneda e, finalmente, aplicamos duas vezes consecutivas o exemplo (3.3.1).

Capítulo 4

Álgebra Abstrata

Neste capítulo, estudamos as *categorias monoidais*. Elas são obtidas dos monoides da Álgebra Clássica por um processo de “categorificação”, no qual conjuntos são substituídos por categoriais, elementos dão lugar à objetos, mapeamentos entre conjuntos são trocados por funtores, e relações entre mapeamentos tornam-se transformações naturais entre os correspondentes funtores. Assim, uma categoria monoidal \mathbf{C} seria aquela na qual se tem definido um bifunctor $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ que é associativo e possui unidade a menos de isomorfismos naturais (o exemplo mais simples é **Set** com \otimes sendo o produto cartesiano).

Apresentar o processo de categorificação acima descrito, bem como dar uma definição precisa do que vem a ser uma estrutura monoidal, ilustrando-a por meio de diversos exemplos, é o principal objetivo da primeira secção.

Na segunda secção, explicitamos o interesse nas categoriais monoidais: é nelas que se pode falar de *estruturas algébricas* de forma mais genérica e abrangente. Com efeito, se na Álgebra Clássica uma estrutura algébrica é composta de um conjunto X no qual estão definidas operações $*$: $X \times X \rightarrow X$ satisfazendo certas regras, em categoriais monoidais tais estruturas são objetos X , dotados de morfismos $*$: $X \otimes X \rightarrow X$, os quais tornam comutativos alguns diagramas. Assim, por exemplo, pode-se falar de “monoides em grupos abelianos”, ou mesmo de “grupos em variedades diferenciáveis”. Exemplos, estes, que não são meras abstrações: os monoides em grupos nada mais são que os anéis, ao passo que os grupos em variedades nada mais são que os grupos de Lie.

Observamos, no entanto, que existem estruturas na Álgebra Clássica que são obtidas fazendo uma estrutura *agir* em outra. Por exemplo, módulos sobre um anel R são simplesmente ações de R em grupos abelianos. A terceira secção do capítulo é marcada por uma generalização do conceito de *ação* de monóides em objetos no contexto das categoriais monoidais. Com ele em mãos, finalizamos com o estudo de fibrados cujas fibras estão sujeitas à ação de um grupo.

Maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em [2, 51], que constituíram as principais referências durante o estudo e a escrita deste capítulo.

4.1 Categorificação

A matemática clássica é construída sob a linguagem da Teoria dos Conjuntos. A Teoria das Categorias, por sua vez, tem a Teoria dos Conjuntos como um caso particular. Espera-se, portanto, que a Teoria das Categorias forneça procedimentos que nos permita abstrair qualquer

que seja o conceito usual. Um de tais procedimentos é a *categorificação*, o qual passamos a descrever.

Relembramos que o problema de classificar uma dada categoria \mathbf{C} consiste em obter uma bijeção entre o conjunto das classes de isomorfismo $\text{Iso}(\mathbf{C})$ e algum outro conjunto S . Dualmente, fornecido um conjunto S , o problema de *categorificá-lo* consiste em obter uma categoria \mathbf{C} cuja classe de isomorfismos esteja em bijeção com S . Em outras palavras, categorificar um conjunto S é buscar por uma categoria \mathbf{C} que pode ser classificada em termos de S . Por este motivo, algumas vezes se fala que classificar é o mesmo que *descategorificar*.

Exemplo 4.1.1. Sabe-se a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita é classificada pelo invariante dimensão (isto é, pelo functor $\dim : \mathbf{FVec}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{N}$). Desta forma, pode-se pensar na categoria $\mathbf{FVec}_{\mathbb{K}}$ como sendo uma categorificação dos naturais.

Observamos que categorias são entidades mais complicadas que conjuntos: em uma categoria tem-se duas classes (a dos objetos e a dos morfismos), ao passo que num conjunto tem-se apenas uma. Posto isso, o problema de categorificação tende a ser mais difícil que o de classificação: para classificar, procura-se um conjunto (entidade simples) que represente uma categoria (entidade complexa) previamente conhecida. Para categorificar, precisa-se determinar uma categoria (entidade complicada) que seja representada por um dado conjunto (entidade simples).

Grosso modo, classificar é estudar o functor $\text{Iso} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$, ao passo que categorificar é encontrar funtores $\text{Ctgz} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Cat}$ que são “inversas pontuais” de Iso . Assim, ao se classificar, perde-se “informação categórica”: com o objetivo de entender a categoria, ela é substituída por um ente mais simples. Por sua vez, ao se categorificar, ganha-se tal informação. É exatamente este o espírito da categorificação: partir de uma entidade conhecida e substituí-la por outra mais complexa, ganhando novas ferramentas. Por exemplo, pode-se partir de um invariante simples e, ao final do processo, obter outro mais poderoso. Sobre o assunto, remetemos o leitor a um artigo bastante interessante de John Baez e James Dolan: [3].

Categorias Monoidais

Para categorificar uma estrutura algébrica S , deve-se obter uma categoria \mathbf{C} cujo conjunto das classes de isomorfismo admite uma estrutura isomorfa à S . Assim, por exemplo, se S for um monóide, \mathbf{C} poderá categorificá-lo somente se $\text{Iso}(\mathbf{C})$ também for um monóide. Portanto, se quisermos saber quais categorias classificam um determinada estrutura algébrica, deveremos restringir nossa busca às categorias cujo conjunto das classes de isomorfismo possuem correspondente estrutura. Em outras palavras, dada uma subcategoria $\mathbf{Alg} \subset \mathbf{Set}$, devemos procurar por subcategorias $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Alg}} \subset \mathbf{Cat}$ restritas as quais o functor Iso assume valores em \mathbf{Alg} .

Um *insight* para determinar $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Alg}}$ é o seguinte: estruturas algébricas são conjuntos dotados de elementos distinguidos (elementos neutros) e de operações binárias (que são funções entre conjuntos), as quais satisfazem certas equações. As entidades primárias são os elementos, os quais originam os conjuntos e as funções, as quais se relacionam por meio das equações. Por sua vez, em \mathbf{Cat} as entidades primárias são os objetos e os morfismos, os quais originam as categorias e os funtores, os quais se relacionam por meio das transformações naturais.

Assim, partindo de \mathbf{Alg} , para obter $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Alg}}$, a ideia é “elevar em um grau a informação categórica”: elementos distinguidos tornam-se objetos distinguidos, conjuntos tornam-se catego-

rias, operações binárias tornam-se bifuntores e equações são reformuladas por meio de isomorfismos naturais, chamados de *condições de coerência*.

Exemplo 4.1.2. Na álgebra clássica, um monóide é conjunto X dotado de uma única operação binária $*$: $X \times X \rightarrow X$, e de um elemento distinguido $1 \in X$, tais que as seguintes equações são satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in X$:

$$1 * x = x = x * 1 \quad \text{e} \quad (x * y) * z = x * (y * z). \quad (4.1)$$

Seguindo o *insight* anterior, uma categoria em $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Mon}}$ seria aquela \mathbf{C} na qual se encontram definidos um bifunctor $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ e um objeto distinguido $1 \in \mathbf{C}$, para os quais se tem os seguintes isomorfismos naturais:

$$1 \otimes X \simeq X \simeq X \otimes 1 \quad \text{e} \quad (X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z). \quad (4.2)$$

Se \mathbf{C} cumpre tais relações, então $\text{Iso}(\mathbf{C})$ é realmente um monóide, mostrando-nos que o *insight* cumpriu com o seu papel. Com efeito, basta pôr $[X] * [Y] = [X \otimes Y]$. O elemento neutro haverá de ser $[1]$. Observamos, no entanto, que as relações (4.1) nos permitem retirar os parênteses de qualquer expressão envolvendo um número arbitrário de elementos. Por exemplo,

$$(x * y) * (x' * y') = x * ((y * x) * y') = x * (y * (x' * y')).$$

Em contrapartida, as relações (4.2) não são suficientes para garantir algo análogo para a categoria obtida através do *insight*. São necessárias, pois, mais algumas condições de coerência (veja a segunda secção do capítulo VII de [51]). Uma categoria que cumpre com o *insight* e também com estas condições de coerência adicionais chama-se *monoidal*. Assim, pode-se dizer que *as categorias monoidais são categorificações convenientes do conceito clássico de monóide*.

Exemplo 4.1.3. Se uma categoria \mathbf{C} possui produtos binários $X \times Y$ e um objeto terminal $*$, então o bifunctor $(X, Y) \mapsto X \times Y$ está bem definido e ali introduz uma estrutura monoidal, cujo objeto neutro nada mais é que o próprio $*$. Dualmente, se \mathbf{C} tem coprodutos binários $X \oplus Y$ e um objeto inicial \emptyset , então $(X, Y) \mapsto X \oplus Y$ a faz monoidal, cujo objeto neutro é \emptyset . Em particular, se \mathbf{C} possui biprodutos, então as estruturas monoidais induzidas por seus produtos e coprodutos são equivalentes. Isto ocorre, por exemplo, em \mathbf{Mod}_R .

Nem sempre a estrutura monoidal provém de produtos e coprodutos. Abaixo ilustramos este fato por meio de três exemplos. Nas próximas subsecções, veremos que, ainda que a estrutura monoidal de \mathbf{C} provenha de produtos, sua pontuação \mathbf{C}_* pode admitir uma estrutura que não provém de produtos lá definidos.

Exemplo 4.1.4. Na categoria \mathbf{Mod}_R , com R comutativo, consideremos a regra \otimes_R que a cada par de módulos (X, Y) associa o produto tensorial $X \otimes_R Y$ entre eles, e que a cada par (f, g) de homomorfismos faz corresponder $f \otimes_R g$. Ela é associativa e possui unidade dada pelo próprio anel R , visto enquanto módulo sobre si mesmo. Assim, \otimes_R torna \mathbf{Mod}_R uma categoria monoidal sem provir de produtos ou coprodutos.

Exemplo 4.1.5. Tem-se um bifunctor $\otimes : \partial\mathbf{Diff} \times \partial\mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Diff}$, que toma variedades X e Y com bordo de devolve uma nova variedade $X \otimes Y$, esta sem bordo, obtida colando X e Y ao

longo de seus bordos. Observamos que a subcategoria cheia $\mathbf{C}^n \subset \mathbf{Diff}$, formada das variedades de dimensão n que são compactas e orientáveis, torna-se monoidal quando dotada do bifunctor $\# : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$, chamado de *soma conexa*, e definido como segue: toma-se duas variedades de mesma dimensão, retira-se um pequeno subespaço homeomorfo ao disco de cada uma delas, e então aplica-se \otimes (isto é, cola-se os espaços resultantes ao longo de seus bordos). O objeto neutro de tal estrutura é a esfera \mathbb{S}^n .

Exemplo 4.1.6. Relembramos que, para cada inteiro n , a categoria $n\mathbf{Cob}$ tem como objeto as variedades de dimensão $n - 1$, compactas e sem bordo, e como morfismos os cobordismos. Como estamos trabalhando com dimensão fixa, o coproduto em \mathbf{Diff} está bem definido e é a reunião disjunta. O bifunctor \sqcup induz uma estrutura monoidal em $n\mathbf{Cob}$.

De maneira estritamente análoga ao que foi feito no exemplo 4.4, poder-se-ia aplicar o *insight* de modo a obter categorificações de outras estruturas algébricas mais complicadas. Por exemplo, a categorificação dos monóides abelianos são as categorias monoidais \mathbf{C} , com produto $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, para as quais existem isomorfismos naturais $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$, denominados *braidings*, satisfazendo certas condições de coerência. Tais categorias são ditas *simétricas*.

Exemplo 4.1.7. Estruturas monoidais provenientes de produtos e coprodutos binários são sempre simétricas. Particularmente, a soma direta em \mathbf{Mod}_R possui inversa $X \oplus (-X) \simeq 0$, em que $-X$ é o conjunto de todo $-x$, com $x \in X$. Desta forma, \mathbf{Mod}_R é categorização de grupo abeliano com \oplus . Por sua vez, sabe-se que o produto tensorial é comutativo a menos de isomorfismos, de modo que a estrutura definida por \otimes_R em \mathbf{Mod}_R também é simétrica. Particularmente, \oplus e \otimes_R são distributivos módulo isomorfismos naturais. Portanto, com tais bifuntores, \mathbf{Mod}_R é categorização de um anel comutativo com unidade.

Ao longo do texto, nos restringimos, ao estudo das categorias monoidais e de suas versões simétricas. Isto porque estaremos interessados no estudo da Álgebra Abstrata: para falar de estruturas algébricas usuais, precisa-se falar somente de operações e objetos distinguidos. As, operações são correspondências $X \times X \rightarrow X$, de modo que também se faz necessária uma noção prévia de produto entre conjuntos (trata-se do produto cartesiano).

As categorias monoidais cumprem todas essas requisições e, portanto, são as categorias de menor complexidade nas quais a Álgebra pode ser desenvolvida. Mais precisamente, se \mathbf{C} é monoidal (digamos com respeito a \otimes), então faz sentido falar de operações em $X \in \mathbf{C}$: tratam-se, pois, de morfismos $X \otimes X \rightarrow X$. Assim, pode-se dizer que a Álgebra clássica é a Álgebra desenvolvida na categoria \mathbf{Set} , com estrutura monoidal proveniente de produtos binários.

Smash

Seja \mathbf{C} uma categoria completa e cocompleta, com objeto terminal $*$, dotada da estrutura monoidal $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$. Esta induz um bifunctor natural \wedge em sua pontuação \mathbf{C}_* , denominado *produto smash* e definido como segue: em objetos, ele toma pares (X, x_o) e (Y, y_o) e devolve o *pushout* abaixo, pontuado pelo único $x_o \wedge y_o : * \rightarrow X \wedge Y$. Por sua vez, a cada par de morfismos

$f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y'$ ele associa o correspondente $f \wedge g$, obtido por universalidade.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X' \wedge Y' & \longleftarrow & X' \otimes Y' \\
 & & \uparrow & \swarrow f \wedge g & \nwarrow f \otimes g \\
 X \wedge Y & \longleftarrow & X \otimes Y & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 * & \longleftarrow & X \oplus Y & & * \longleftarrow X \oplus Y
 \end{array}$$

Exemplo 4.1.8. Elementos de \mathbf{Set}_* se identificam com pares (X, x_o) , em que $x_o \in X$, de modo que $X \times * \sqcup Y \times * \simeq X \vee Y$. Por sua vez, o mapa $X \sqcup Y \rightarrow X \times Y$ é visto como inclusão e o produto *smash* $X \wedge Y$ é o quociente de $X \times Y$ pela relação que identifica $X \vee Y$. O mesmo se passa em \mathbf{Top}_* .

Observamos que, em qualquer situação, o produto \wedge possui uma unidade natural: trata-se do coproduto $* \oplus *$, denotado por S^0 . Por exemplo, em \mathbf{Set} ou \mathbf{Top} , tem-se $S^0 = \mathbb{S}^0$. Desta forma, se \wedge for associativo a menos de isomorfismos naturais, então definirá uma estrutura monoidal na pontuação \mathbf{C}_* .

Uma vez que o produto *smash* é *pushout* em \mathbf{C} , pelas condições de coerência, para que valha tal associatividade, basta que colimites finitos sejam preservados por cada $- \otimes Y$. Isto ocorre em, particular, se \mathbf{C} é *fechada*. Ou seja, se cada um dos $- \otimes Y$ possui adjuntos à direita. Afinal, neste caso, além de preservarem os colimites que são finitos, preservarão qualquer outro. Uma categoria fechada com respeito à estrutura monoidal proveniente de produtos binários costuma ser chamada de *cartesianamente fechada*.

Exemplo 4.1.9. Em \mathbf{Set} , tem-se h^Y como adjuntos de $- \times Y$. Assim, tal categoria é cartesianamente fechada e, conseqüentemente, o produto *smash* \wedge apresentado no exemplo anterior faz de \mathbf{Set}_* uma categoria monoidal. A mesma estratégia não pode ser empregada em \mathbf{Top} : quando restrita a tal subcategoria, o bifunctor \wedge perde sua associatividade. Um contra-exemplo é apresentado na secção 1.7 de [58]. Este é um fato fundamental no estudo da topologia e será mais detalhadamente discutido no capítulo oito.

Exemplo 4.1.10. Evidentemente, com respeito à estrutura monoidal induzida pelo produto tensorial, a categoria dos módulos é fechada. Por conta disso, uma categoria fechada é algumas vezes chamada de *tensorial*.

Como pode ser conferido em [68], quando \mathbf{C} é fechada, os adjuntos de $- \otimes Y$, digamos dados por $(-)^Y$, determinam adjuntos $(-)_*^Y$ em \mathbf{C}_* para os correspondentes $- \wedge Y$. Para cada $X \in \mathbf{C}_*$, estes são constituídos dos *pullbacks* abaixo apresentados.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Mor}_*(X; Y) & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{Mor}(X; Y) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(*; Y).
 \end{array}$$

4.2 Monoides

Um *monoide* numa categoria monoidal \mathbf{C} , com produto $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, é a generalização do conceito usual de monoide presente na álgebra clássica. Trata-se, pois, de um objeto $X \in \mathbf{C}$ para o qual existem morfismos $* : X \otimes X \rightarrow X$ e $e : 1 \rightarrow X$, obtidos de tal maneira que os diagramas abaixo se tornam comutativos. O primeiro deles traduz a “associatividade” de $*$, enquanto que o segundo expressa a existência de um “elemento neutro” em X (compare com os diagramas apresentados no início do primeiro capítulo).

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes (X \otimes X) & \longrightarrow & (X \otimes X) \otimes X \xrightarrow{* \otimes id} X \otimes X \\
 \downarrow id \otimes * & & \downarrow * \\
 X \otimes X & \xrightarrow{*} & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 1 \otimes X & \xrightarrow{e \otimes id} & X \otimes X & \xleftarrow{id \otimes e} & X \otimes 1 \\
 & \searrow & \downarrow * & \swarrow & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

Tem-se uma categoria $\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes)$ formada dos monoides de \mathbf{C} segundo \otimes (quando não há risco de confusão quanto ao bifunctor fixado, ele é omitido da notação). Em tal categoria, um morfismo entre $(X, *, e)$ e $(X', *, e')$ é simplesmente um morfismo $f : X \rightarrow X'$ que preserva $*$ e e . Isto é, que satisfaz as igualdades $f \circ e = e'$ e $f \circ * = *' \circ (f \otimes f)$. Um *comonoide* em \mathbf{C} é simplesmente um monoide em \mathbf{C}^{op} . Mais precisamente, estes se tratam dos objetos da categoria $\text{Mon}(\mathbf{C}^{op}, \otimes)^{op}$, denotada por $\text{Comon}(\mathbf{C}; \otimes)$.

Numa categoria monoidal simétrica, diz-se que um monoide é *comutativo* ou *abeliano* quando sua multiplicação comuta com o *braiding* $X \otimes X \simeq X \otimes X$. Invertendo setas obtém-se a correspondente noção de comonoides cocomutativos. Tais entidades definem categorias ${}_c\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes)$ e ${}_c\text{Comon}(\mathbf{C}; \otimes)$.

Exemplo 4.2.1. Toda categoria monoidal \mathbf{C} , com produto \otimes e objeto neutro 1 admite um monoide trivial: trata-se do próprio 1 , dotado da multiplicação dada pelo isomorfismo $1 \otimes 1 \simeq 1$, com $e : 1 \rightarrow 1$ sendo a identidade. Consequentemente, 1 é também um comonoide em \mathbf{C} : a multiplicação é a inversa $1 \simeq 1 \otimes 1$. Observamos que, quando \mathbf{C} é simétrica, tal monoide/comonoide é evidentemente abeliano. Por sua vez, se \otimes provém de produtos (resp. coprodutos) binários, então 1 há de ser objeto inicial (resp. final) em $\text{Mon}(\mathbf{C}, \times)$ (resp. $\text{Comon}(\mathbf{C}; \otimes)$).

Exemplo 4.2.2. Na categoria $\times : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, os monoides coincidem com os monoides usuais da álgebra clássica. Por sua vez, para qualquer que seja o anel comutativo R , os monoides de \mathbf{Mod}_R são, relativamente ao produto \otimes_R , as álgebras sobre R . Afinal, dar um morfismo $X \otimes_R X \rightarrow X$ é o mesmo que dar uma aplicação bilinear $X \times X \rightarrow X$. Assim, em particular, os monoides de $\mathbf{AbGrp} \simeq \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$ são os anéis.

Exemplo 4.2.3. Vimos que a soma conexa introduz uma estrutura monoidal na categoria das superfícies compactas e orientáveis. Assim, $\text{Iso}(\mathbf{C}^n)$ é monoide, tendo $[\mathbb{S}^n]$ como elemento neutro. Para cada $g \in \mathbb{N}$, seja $\mathbb{S}_g^1 = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ com $\mathbb{S}_0^1 = \mathbb{S}^1$. A correspondência $g \mapsto \mathbb{S}_g^1$ passa ao quociente e define um morfismo entre o monóide aditivo dos números naturais e $\text{Iso}(\mathbf{C}^2)$. Tal morfismo é, em verdade, um isomorfismo. Isto significa que toda superfície compacta e orientável de \mathbb{R}^3 é classificada, módulo homeomorfismos, pelo seu número de buracos. Tem-se um resultado análogo no caso não-orientável, no qual o espaço projetivo \mathbb{P}^1 (obtido identificando pares antípodos no círculo) substitui \mathbb{S}^1 . Veja o capítulo final de [33].

Exemplo 4.2.4. Numa categoria monoidal $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ definida por produtos binários, todo objeto X admite uma estrutura única de comonoide, com comultiplicação dada pelo mapa diagonal $\Delta_X : X \rightarrow X \otimes X$. Por sua vez, já que o objeto neutro $1 \in \mathbf{C}$ é terminal, para cada X existe um único morfismo $! : X \rightarrow 1$, o qual haverá de ser a counidade de X . Dualmente, se \otimes provém de coprodutos binários, então todo X possui única estrutura de monoide. Sua multiplicação é o mapa $\nabla_X : X \otimes X \rightarrow X$, ao passo que sua unidade é o morfismo $! : 1 \rightarrow X$, obtido do fato de 1 ser inicial.

Exemplo 4.2.5. Em contrapartida ao exemplo anterior, ainda que $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ seja definido por coprodutos, pode ser que ali só existam comonoides triviais. Por exemplo, o único objeto inicial de **Set** é o conjunto vazio, de modo que existe um morfismo $1 \rightarrow X$ se, e somente se, $X = \emptyset$. Assim, relativamente à estrutura monoidal proveniente de coprodutos (diga-se reuniões disjuntas), o único co-monoide em **Set** é \emptyset . Situação análoga se passa com **Top**.

Um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ entre categorias monoidais pode não levar monoides em monoides e nem mesmo comonoides em comonoides. Quando ele preserva monoides (resp. comonoides), diz-se que ele é *monoidal* (resp. *comonoidal*). Se este é o caso, então ficam respectivamente induzidos funtores

$$F_* : \text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes) \rightarrow \text{Mon}(\mathbf{C}', \otimes') \quad \text{e} \quad F^* : \text{CoMon}(\mathbf{C}, \otimes) \rightarrow \text{CoMon}(\mathbf{C}', \otimes').$$

Observamos que, para F ser monoidal, basta que mapeie produtos em produtos e também objeto neutro em objeto neutro. Isto é, basta existirem um morfismo $f : 1' \rightarrow F(1)$ e transformações $\phi_{xy} : F(X) \otimes' F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y)$ satisfazendo certas condições de coerência, as quais são descritas em termos da comutatividade de diagramas semelhantes àqueles satisfeitos por $*$ e e . Um functor monoidal para o qual f e cada ϕ_{xy} são isomorfismos chama-se *fortemente monoidal*.

Da mesma forma, para F ser comonoidal, é suficiente que existam $g : 1' \rightarrow F(1)$ e também transformações $\varphi_{xy} : F(X \otimes Y) \rightarrow F(X) \otimes' F(Y)$ satisfazendo condições compatibilidade. Quando g e φ_{xy} são isomorfismos, fala-se que F é *fortemente comonoidal*.

Tem-se subcategorias **Mnd**, **CoMnd**, **SMnd** e **SCoMnd** de **Cat**, cujos objetos são categorias monoidais, e cujos morfismos são, respectivamente, funtores monoidais, comonoidais, fortemente monoidais e fortemente comonoidais.

Exemplo 4.2.6. Seja $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ uma subcategoria tal que a inclusão $\iota : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ preserva produtos e objeto terminal. Isto ocorre, por exemplo, quando \mathbf{D} é livremente gerada por objetos de \mathbf{C} (isto é, quando tal que a inclusão possui um adjunto à esquerda). Se este é o caso, então, relativamente às estruturas monoidais definidas por produtos binários em \mathbf{C} e em \mathbf{D} , a inclusão é fortemente monoidal. Em particular, ela também é fortemente comonoidal, pois os únicos comonoides existentes em ambas categorias são aqueles definidos pelo mapa diagonal. Dualmente, se ι preserva coprodutos e objeto inicial (por exemplo, quando admite adjunto à direita), então, relativamente à estrutura monoidal definida por coprodutos binários, é fortemente comonoidal e fortemente monoidal.

Exemplo 4.2.7. Diz-se que um functor fortemente monoidal simétrico $F : n\mathbf{Cob} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ define uma *teoria quântica de campos topológica*. Assim, uma tal teoria é uma regra simétrica, que a cada variedade compacta sem bordo X associa um espaço vetorial $F(X)$, e que a cada cobordismo $\Sigma : X \rightarrow Y$ faz corresponder uma transformação linear $F(\Sigma)$ entre os espaços $F(X)$ e $F(Y)$, de

tal maneira que $F(\emptyset) \simeq \mathbb{C}$, com $X \sqcup Y$ sendo mandada em $F(X) \otimes F(Y)$. Estes funtores são de grande interesse em Física e também em Matemática.

Bimonóides

Toda categoria monoidal simétrica \mathbf{C} induz uma estrutura monoidal em $\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes)$. Esta é definida pelo bifunctor

$$\otimes_M : \text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes) \times \text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes) \rightarrow \text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes),$$

que toma dois monoides $(X, *, e)$ e $(X', *, e')$ e devolve o respectivo monoide $X \otimes X'$, tendo $e \otimes e'$ como unidade e cuja multiplicação $\#$ é obtida compondo as setas do diagrama abaixo, em que a primeira delas provém de associatividade de \otimes e de *braiding*s.

$$(X \otimes X') \otimes (X \otimes X') \xrightarrow{\simeq} (X \otimes X) \otimes (X' \otimes X') \xrightarrow{* \otimes *'} X \otimes X'$$

O objeto neutro de $\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes)$ é o monoide formado pelo objeto neutro de \mathbf{C} , tendo unidade dada por id_1 e multiplicação fornecida pelo isomorfismo $1 \otimes 1 \simeq 1$. Por dualidade, a estrutura monoidal de \otimes fixa outra em $\text{Mon}(\mathbf{C}^{op}, \otimes)^{op}$. Tem-se equivalências

$$\text{Mon}(\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes), \otimes_M) \simeq {}_c\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes) \quad \text{e} \quad \text{Comon}(\text{Comon}(\mathbf{C}, \otimes), \otimes_M) \simeq {}_c\text{Comon}(\mathbf{C}, \otimes),$$

as quais são usualmente chamadas de *princípio de Eckmann-Hilton* (veja o artigo original [17] ou a secção 1.2.7 de [2]). Por sua vez, dar um comonoide na categoria dos monoides é o mesmo que fornecer um monoide na categoria dos comonoides. Isto reflete a existência de isomorfismos

$$\text{Comon}(\text{Mon}(\mathbf{C}, \otimes), \otimes_M) \simeq \text{Mon}(\text{Comon}(\mathbf{C}, \otimes), \otimes_M).$$

Os objetos de ambas as categorias (aqui indistinguívelmente denotadas por $\text{Bimon}(\mathbf{C}; \otimes)$), são chamados de *bimonoides* de \mathbf{C} . Assim, um bimonioide numa categoria monoidal \mathbf{C} é um objeto que possui simultaneamente estruturas de monoide e de comonoide, tais que sua multiplicação e sua unidade são morfismos de comonoides, ao mesmo tempo que sua comultiplicação e counidade são morfismos de monoides.

Exemplo 4.2.8. Se \mathbf{C} é definida por produtos binários, então todo objeto possui uma estrutura natural de comonoide. Assim, os bimonoides de \mathbf{C} são seus próprios monoides. Dualmente, se a estrutura monoidal de \mathbf{C} provém de coprodutos binários, então seus objetos são sempre monoides. Portanto, seus bimonoides nada mais são que seus comonoides. Particularmente, se \mathbf{C} têm biprodutos, então, na estrutura monoidal por eles definida, qualquer objeto admite uma única estrutura de bimonioide.

Grupos

Um *monoide de Hopf* em $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ é um bimonioide X , o qual admite “inversos”. Isto se traduz na existência de um morfismo $inv : X \rightarrow X$, chamado de *antípoda* ou *inversão*, tal que o diagrama abaixo é comutativo. Nele, $*$ e $*'$ denotam a multiplicação e a comultiplicação de X ,

ao passo que e e e' representam a sua unidade e a sua counidade (compare, mais uma vez, com os diagramas da secção inicial do primeiro capítulo).

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{e'} & 1 & \xrightarrow{e} & X \\ \downarrow *' & & & & \uparrow * \\ X \otimes X & \xrightarrow{id \otimes inv} & X \otimes X & & \end{array}$$

Evidentemente, tem-se uma subcategoria cheia $\text{Hopf}(\mathbf{C}; \otimes) \subset \text{Bimon}(\mathbf{C}; \otimes)$.

Exemplo 4.2.9. Os monóides de Hopf da categoria \mathbf{Mod}_R , com estrutura monoidal fixada pelo produto tensorial, são usualmente chamados de *álgebras de Hopf* sobre R . Exemplos são os grupos de homologia singular de um H -espaço e a álgebra de Steenrod. Veja, por exemplo, [87, 70].

Observamos que, se a estrutura monoidal de \mathbf{C} provém de produtos binários, então dar um monoide de Hopf em \mathbf{C} é o mesmo que dar um monoide X dotado de uma inversão (afinal, sob tal hipótese, todo monoide é bimonioide). Em outras palavras, em tal situação, um monoide de Hopf é simplesmente um objeto no qual se têm uma multiplicação associativa e possuidora de unidade, ao mesmo tempo que se sabe inverter. Por este motivo, costuma-se dizer que X é *grupo* em \mathbf{C} .

Dualmente, quando $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ é definido através de coprodutos, então os monoides de Hopf em \mathbf{C} nada mais são que os comonoides adicionados de um mapa antípoda. Isto nos leva a chamá-los de *cogrupos* em \mathbf{C} .

Exemplo 4.2.10. Os grupos de \mathbf{Set} , com \times , são os grupos usuais da álgebra clássica. Por sua vez, o único cogrupo de tal categoria é o conjunto vazio. Afinal, este é seu único comonoide.

Exemplo 4.2.11. Um grupo em \mathbf{Top} é um espaço topológico no qual está definida uma aplicação contínua $*$: $X \times X \rightarrow X$ que o torna um grupo, de tal modo que a inversão $inv(x) = x^{-1}$ também é uma função contínua. Tais entidades são conhecidas como *grupos topológicos*. Este é o caso das esferas \mathbb{S}^1 e \mathbb{S}^3 : basta considerá-las enquanto subconjuntos de \mathbb{C} e de \mathbb{H} , dotando-as das respectivas multiplicações de números complexos e de números quaterniônicos.

Exemplo 4.2.12. Se X é grupo topológico com multiplicação $*$: $X \times X \rightarrow X$ e unidade 1, então, relativamente ao produto cartesiano pontuado, a mesma multiplicação faz de $(X, 1)$ um grupo em \mathbf{Top}_* . Por sua vez, se (X, x_o) é um grupo em \mathbf{Top}_* com produto $*$, então este se torna um cogrupo em \mathbf{Top}_* quando dotado da regra $f : (X, x_o) \rightarrow X \vee X$, tal que $f(x) = [x * x]$.

Exemplo 4.2.13. Os grupos de \mathbf{Diff} (onde estamos nos resumindo às entidades sem bordo, para que o produto entre eles esteja bem definido) são simplesmente variedades X , usualmente chamadas de *grupos de Lie*, as quais se encontram dotadas de uma estrutura adicional de grupo, tal que a multiplicação e a correspondente inversão são ambas diferenciáveis. Escreve-se \mathbf{GLie} ao invés de $\text{Hopf}(\mathbf{Diff}; \times)$ para denotar a categoria dos grupos de Lie. Observamos que um morfismo em tal categoria há de ser um mapa que preserva tanto a estrutura de grupo quando a estrutura de variedades subjacente. Assim, estes são os *homomorfismos diferenciáveis*.

Os grupos de uma categoria monoidal admitem a seguinte caracterização (os cogrupos possuem caracterização estritamente dual):

Proposição 4.2.1. *Um objeto X é grupo em \mathbf{C} se, e só se, h_X é grupo em $\text{Func}(\mathbf{C}^{op}; \mathbf{Set})$.*

Demonstração. Sendo \mathbf{Set} completa, $\text{Func}(\mathbf{C}^{op}; \mathbf{Set})$ também o é e, portanto, possui produtos finitos. Por outro lado, como h_X preserva limites, vale $h_X \times h_X \simeq h_{X \times X}$. Desta forma, todo produto $*$: $X \otimes X \rightarrow X$ fixa multiplicação em h_X . Trata-se, pois, da composição entre a identificação $h_X \times h_X \simeq h_{X \times X}$ e a respectiva transformação $h_-(*) : h_{X \times X} \rightarrow h_X$. Ela faz de h_X um grupo. Reciprocamente, pelo lema de Yoneda, para cada transformação natural $*' : h_{X \times X} \rightarrow h_X$ existe um único morfismo $* : X \times X \rightarrow X$. Mostra-se que, se $*'$ torna h_X um grupo, então $*$ faz o mesmo com X . \square

Um *functor de Hopf* é aquele que preserva monoides de Hopf. Cada um deles induz um novo functor entre $\text{Hopf}(\mathbf{C}; \otimes)$ e $\text{Hopf}(\mathbf{C}'; \otimes')$. Existe uma subcategoria não-cheia $\mathbf{Hopf} \subset \mathbf{Cat}$ tendo categorias monoidais simétricas como objetos e funtores de Hopf como morfismos.

Mesmo que um functor seja monoidal e comonoidal, ele pode não ser de Hopf. No entanto, os funtores que são ao mesmo tempo (e de maneira compatível) fortemente monoidais e fortemente comonoidais cumprem com tal condição. Veja a proposição 3.60 de [2].

Exemplo 4.2.14. Relativamente às estruturas definidas por produtos binários, a inclusão é um functor Hopf, desde que preserve produtos. Resultado dual é válido para coprodutos.

4.3 Ações

Na álgebra clássica, além de operar num dado conjunto (ato ao qual corresponde o conceito geral de monoide anteriormente introduzido), sabe-se fazer uma estrutura algébrica agir noutra, definindo uma terceira. Por exemplo, módulos nada mais são que anéis agindo em grupos abelianos. Ora, anéis são monoides na categoria monoidal dos grupos abelianos. Assim, um módulo é obtido fazendo um monoide de \mathbf{AbGrp} agir sob um objeto desta mesma categoria.

Esta noção se estende, de maneira natural, às demais categorias monoidais. Com efeito, numa categoria monoidal com produto \otimes , diz-se que um monoide $X \in \mathbf{C}$ (com multiplicação $*$: $X \otimes X \rightarrow X$ e elemento neutro $e : 1 \rightarrow X$) *age* em $Y \in \mathbf{C}$ quando existe $\alpha : X \otimes Y \rightarrow Y$ que deixa comutativo o diagrama abaixo. Isto significa que α é associativo e que preserva o elemento neutro (mantenha a comparação entre os diagramas deste capítulo e aqueles apresentados na secção inicial do capítulo um).

$$\begin{array}{ccccc}
 X \otimes (X \otimes Y) & \longrightarrow & (X \otimes X) \otimes Y & \xrightarrow{* \otimes id} & X \otimes Y & \xleftarrow{e \otimes id} & 1 \otimes Y \\
 \downarrow id \otimes * & & & & \downarrow \alpha & \nearrow & \\
 X \otimes Y & \xrightarrow{\alpha} & Y & & & &
 \end{array}$$

Um objeto Y no qual age um monoide X chama-se *módulo em \mathbf{C} sobre X* . Tem-se uma categoria $\text{Mod}_X(\mathbf{C}; \otimes)$ formada de todos os módulos sobre X , cujos morfismos são os morfismos de \mathbf{C} que preservam ações. No que segue, o conjunto de todas as ações de um monoide X num objeto Y será denotado por $\text{Act}_{\mathbf{C}}(X; Y)$.

Exemplo 4.3.1. Em \mathbf{AbGrp} , com produto \otimes , os monoides são os anéis. Por sua vez, fixado um anel R , os módulos sobre ele coincidem com os R -módulos da álgebra clássica, de tal modo que as categorias \mathbf{Mod}_R e $\text{Mod}_R(\mathbf{AbGrp}; \otimes)$ são isomorfas.

Quando a estrutura monoidal de \mathbf{C} advém de produtos binários, faz sentido falar de morfismos com parâmetros. Assim, pode-se pensar numa ação $\alpha : X \times Y \rightarrow Y$ como sendo morfismos $\alpha_x : Y \rightarrow Y$, parametrizados em X , os quais tornam comutativos os diagramas abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times Y & \xrightarrow{\alpha_{X \times Y}} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\
 \uparrow \pi_2 & & \downarrow id & & \downarrow \alpha_X \\
 X \times (X \times Y) & \xrightarrow{\simeq} (X \times X) \times Y \xrightarrow{* \times id} & X \times Y & & \\
 \downarrow id \times \alpha & & \downarrow \alpha & & \\
 X \times Y & \xrightarrow{\alpha} & Y & & \\
 \downarrow \pi_2 & & \downarrow id & & \\
 Y & \xrightarrow{\alpha_X} & Y & \xrightarrow{id} & Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 1 \times Y & \xrightarrow{e \times id} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\
 & \searrow & \downarrow \alpha & \swarrow \alpha_X & \\
 & & Y & &
 \end{array}$$

Particularmente, se X é um grupo, então os diagramas anteriores podem ser combinados com aqueles que caracterizam os monoides de Hopf para obter o seguinte, em que β é a composição de $\pi_2 \circ \alpha_{X \times Y} \circ \pi_2$ com a inversa do isomorfismo $X \times (X \times Y) \simeq (X \times X) \times Y$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 \times X & \xrightarrow{\quad} & Y & \xrightarrow{id} & Y & & \\
 \uparrow e' \times id & & \uparrow \alpha & & \uparrow \alpha_X & & \\
 X \times Y & \xrightarrow{e' \times id} & 1 \times Y & \xrightarrow{\quad} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\
 \downarrow \Delta \times id & & \uparrow * \times id & & \uparrow id & & \\
 (X \times X) \times Y & \xrightarrow{id \times inv \times id} & (X \times X) \times Y & \xrightarrow{\beta} & Y & &
 \end{array}$$

Exemplo 4.3.2. Em **Set**, dotado da estrutura advinda de produtos binários, seus monóides são usuais e, portanto, a ação de um destes, digamos X com multiplicação $*$ e unidade e , se traduz em $\alpha : X \times Y \rightarrow Y$ tal que $\alpha(x * x', y) = \alpha(x, \alpha(x' \cdot y))$ e $\alpha(e, y) = y$. Se consideramos ações como morfismos parametrizados, cada α induz uma família de funções $\alpha_x : Y \rightarrow Y$, definidas por $\alpha_x(y) = \alpha(x, y)$. Os diagramas anteriores significam $\alpha_{x * x'} = \alpha_x \circ \alpha_{x'}$ e $\alpha_e = id$. Particularmente, se X é um grupo, com inversão $inv(x) = x^{-1}$, então o último diagrama faz de cada α_x inversível, com inversa $\alpha_{x^{-1}}$. Portanto, as ações de um grupo X de (\mathbf{Set}, \times) num certo objeto $Y \in \mathbf{Set}$ induzem homomorfismos de X em $\text{Aut}(Y)$ e, conseqüentemente, há uma aplicação injetiva $f : \text{Act}_{\mathbf{Set}}(X; Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{Grp}}(X; \text{Aut}(Y))$.

Exemplo 4.3.3. Se $\mathbf{C} \subset \mathbf{Set}$ é qualquer categoria tal que a inclusão preserva produtos (o que ocorre, por exemplo, com **Top**, **Mfd**, **Diff** e com as categorias algébricas usuais), então, para qualquer grupo X em \mathbf{C} e qualquer objeto $Y \in \mathbf{C}$, tem-se $\text{Act}_{\mathbf{C}}(X; Y) \subset \text{Act}_{\mathbf{Set}}(X; Y)$, onde identificamos a imagem pela inclusão com os próprios objetos. Assim, bastando restringir a injeção f , a partir de qualquer ação de X em Y obtém-se um homomorfismo $X \rightarrow \text{Aut}(Y)$. Em especial, se a inclusão $\iota : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ possui adjunto j à direita, então tal restrição de f cai em $\text{Mor}_{\text{Hpf}(\mathbf{C})}(X; j(\text{Aut}(Y)))$. Neste caso, homomorfismo induzido pela ação é entre grupos em \mathbf{C} (e não somente entre grupos usuais).

Exemplo 4.3.4. Seja v um campo de vetores diferenciável numa variedade compacta. Os resultados de existência, unicidade, dependência diferenciável nas condições iniciais e extensão de soluções, usualmente válidos em equações diferenciais ordinárias, são todos locais e, portanto, se estendem ao contexto das variedades. Neste caso, por existência e extensão de soluções, está definida uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, correspondendo ao *fluxo de v* , tal que, para cada x , o caminho $t \mapsto \varphi(t, x)$ é o único que passa em tal ponto no instante zero, e cujo vetor velocidade $\partial\varphi(t, x)/\partial t$ é exatamente $v(\varphi(t, x))$. A diferenciabilidade com respeito às condições iniciais faz de φ diferenciável. Particularmente, a unicidade de soluções garante que $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ e que $\varphi(0, x) = x$. Portanto, se vemos \mathbb{R} como grupo de Lie com a soma, então φ é ação de tal grupo em X e, pelo exemplo anterior, a aplicação $t \mapsto \varphi_t$ é homomorfismo $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(X)$.

Órbitas

Quando a estrutura monoidal de \mathbf{C} provém de produtos e a categoria em questão admite *pushouts*, então faz sentido falar da *órbita* de uma ação. Com efeito, se um monoide $X \in \mathbf{C}$ age num certo $Y \in \mathbf{C}$, em algumas situações quer-se estudar Y a menos das alterações produzidas pela ação (isto acontece, por exemplo, quando X descreve as simetrias de Y). A órbita da ação $\alpha : X \times Y \rightarrow Y$ é e um novo espaço Y/X que contempla Y módulo alterações produzidas por α . De maneira mais precisa, é o *pushout* abaixo apresentado.

$$\begin{array}{ccc} Y/X & \xleftarrow{\quad} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \alpha \\ Y & \xleftarrow{\pi_2} & X \times Y \end{array}$$

Exemplo 4.3.5. Em categorias cocompletas, *pushouts* podem ser calculados em termos de co-produtos e coequalizadores. Por exemplo, em **Set**, **Top** e nas categorias algébricas usuais, a órbita Y/X coincide com o quociente de Y pela relação cuja classe de um dado y é o conjunto $\alpha(X, y)$, formados de todo $\alpha(x, y)$, com $x \in X$.

Exemplo 4.3.6. Como **Mfd** e **Diff** não possuem *pushouts*, ações de monoides e grupos em tais categoriais podem não admitir órbitas. Por outro lado, se utilizamos de $\text{Act}_{\mathbf{Diff}}(X; Y) \subset \text{Act}_{\mathbf{Set}}(X; Y)$ e consideramos tais ações em **Set**, então ali faz sentido falar de suas órbitas. Particularmente, para cada campo de vetores v , podemos tomar a órbita de seu fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$. Ela é chamada de *retrato de fase* de v . A classe de $x \in X$ é a sua *trajetória*. Esta se diz *singular* quando se resume ao próprio ponto x , caso em que ele é dito ser uma *singularidade* de v . Evidentemente, x é singularidade se, e só se, $v(x) = 0$. Se isto não acontece, então, por continuidade do fluxo, $v(\varphi(x, t)) \neq 0$ para todo t e, portanto, o caminho $t \mapsto \varphi(t, x)$ é uma imersão. Daí, pelo teorema de classificação das variedades unidimensionais, a trajetória de x é homeomorfa à reta ou ao círculo. Isto explicita a vantagem de se considerar o retrato de fase de um campo: ele dá uma decomposição da variedade X em subvariedades unidimensionais (trajetórias de pontos regulares) e conjuntos discretos (singularidades).

Capítulo 5

Homotopia Abstrata

Os invariantes presentes na topologia algébrica podem ser divididos essencialmente em duas classes: as teorias de homotopia e as teorias de homologia. No presente capítulo, estudamos aspectos abstratos e formais concernentes às teorias de homotopia. Grosso modo, a ideia é substituir categorias cuja classificação por isomorfismos é demasiadamente complicada por outras categorias (ditas *homotópicas* ou *derivadas*) cuja classificação é mais relaxada e que, em certo sentido, descrevam aproximadamente a categoria original.

Iniciamos o capítulo definindo o que vem a ser uma categoria própria para o estudo da homotopia. Estas nada mais são que categorias completas e cocompletas nas quais se fixou uma subcategoria conveniente. Exemplos de tais categorias englobam aquelas nas quais se tem uma noção estrita de “morfismos entre morfismos”, ou mesmo àquelas nas quais se tem um conceito natural de cilindro ou de espaço de caminhos.

Na segunda secção, discutimos o procedimento de passagem de uma categoria própria para o estudo da homotopia para a sua correspondente categoria homotópica. A ideia é inverter formalmente os morfismos (denominados *equivalências fracas*) da subcategoria fixada. Tal passagem possui um preço: ao fazê-la, pode-se perder completude e cocompletude. Isto nos leva à terceira secção, onde definimos uma nova classe de limites, chamados de *limites homotópicos*, os quais são naturais no presente contexto de trabalho e que se caracterizam por serem as primeiras aproximações dos limites ordinários.

Durante a escrita, fomos fortemente influenciados pelas referências [68, 34, 51, 12].

5.1 Estrutura

Numa categoria \mathbf{C} , diz-se que os morfismos de uma subcategoria $\text{Weak} \subset \mathbf{C}$ são *equivalências fracas* quando as seguintes condições são satisfeitas:

1. todo isomorfismo de \mathbf{C} é um morfismo de Weak ;
2. dado um morfismo f , se a composição entre ele e alguma equivalência fraca está em Weak , então o próprio f é uma equivalência fraca. Esta propriedade é chamada de *2-de-3*.

Quando se quer evidenciar que um morfismo de \mathbf{C} está em Weak (ou seja, que é equivalência fraca), utiliza-se de “ \rightsquigarrow ” ao invés de “ \rightarrow ” para denotá-lo. Se existe uma equivalência fraca

$X \rightsquigarrow Y$, fala-se que X é uma *resolução* de Y . Por sua vez, $h : X \rightarrow Y'$ é dito ser uma *resolução* do morfismo $f : Y \rightarrow Y'$ quando é a composição de f por uma resolução de X . Isto é, quando existe uma equivalência fraca $g : X \rightsquigarrow Y$ tal que $h = g \circ f$.

Tem-se particular interesse nas categorias com equivalências fracas que sejam completas e cocompletas. Elas são designadas *próprias para o estudo da homotopia*.

Exemplo 5.1.1. Toda categoria completa e cocompleta pode ser feita própria para homotopia de maneira trivial: basta considerar como equivalências fracas os isomorfismos de \mathbf{C} . Evidentemente, tem-se especial interesse em categorias que se tornam próprias para homotopia de maneira não-trivial.

Exemplo 5.1.2. A escolha de uma noção de equivalência fraca numa categoria \mathbf{C} determina outra em sua pontuação \mathbf{C}_* : é só tomar as equivalências fracas de \mathbf{C} que preservam o ponto base dos espaços pontuados nos quais estão definidas.

Exemplo 5.1.3. Para qualquer categoria pequena \mathbf{D} , se \mathbf{C} é própria para o estudo da homotopia, então a respectiva $\text{Func}(\mathbf{D}; \mathbf{C})$ também o é. Suas equivalências fracas são simplesmente as transformações naturais ξ tais que, para todo $X \in \mathbf{D}$, o morfismo $\xi(X)$ é uma equivalência fraca em \mathbf{C} .

Diz-se que um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é *homotópico* quando ele mapeia equivalências fracas em equivalências fracas. Tem-se uma subcategoria $\mathbf{WCat} \subset \mathbf{Cat}$ formada por todas as categorias próprias para o estudo da homotopia e tendo funtores homotópicos como morfismos.

2-Categorias

Seja \mathbf{Cat} a categoria tendo categorias como objetos e funtores como morfismos. No que segue, diremos que dois funtores são *equivalentes* quando existir ao menos uma transformação natural entre eles. Relembramos que, para quaisquer objetos $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbf{Cat}$, isto dota o respectivo $\text{Mor}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{C}; \mathbf{D}) = \text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D})$ de uma relação de equivalência. A reflexividade é evidente. Por sua vez, sendo o conjunto dos morfismos $\text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D})$ uma categoria (o que se deve ao fato de sabermos compor verticalmente transformações naturais), para toda transformação $\xi : F \rightarrow F'$, a respectiva ξ^{op} é morfismo de $\text{Func}(\mathbf{C}; \mathbf{D})^{op}$ e, portanto, transformação de F' em F , garantindo-nos a simetria. A transitividade é obtida tomando a composição horizontal de transformações naturais.

Desta forma, está bem definida uma categoria $\mathcal{H}\mathbf{Cat}$ (já apresentada na segunda secção do primeiro capítulo), tendo categorias como objetos e as classes de funtores ligados por transformações naturais como morfismos. Com isto em mente, vê-se que \mathbf{Cat} serve ao estudo da homotopia: basta considerar como equivalência fraca qualquer functor cuja classe em $\mathcal{H}\mathbf{Cat}$ é um isomorfismo.

Observamos que, na construção anterior, para definir $\mathcal{H}\mathbf{Cat}$ e, conseqüentemente, a noção de equivalência fraca, utilizou-se apenas do conceito de “morfismos entre morfismos” proporcionados pelas transformações naturais, os quais podem ser compostos de duas maneiras compatíveis, formando, para cada uma delas, uma devida categoria.

Quando numa categoria se conta com “morfismos entre morfismos” (chamados de *2-morfismos* ou de *homotopias*) satisfazendo tais condições, diz que ela é uma *2-categoria estrita*. De maneira mais precisa, uma 2-categoria estrita é uma categoria \mathbf{C} tal que cada $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ também é uma

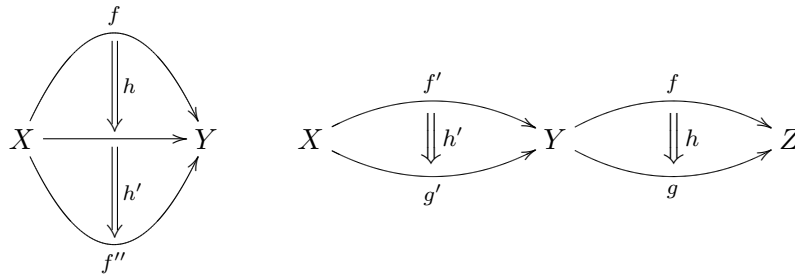
categoria (com respectivas composições correspondendo às composições verticais), e para a qual existem bifuntores

$$\circ : \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y) \times \text{Mor}_{\mathbf{C}}(Y; Z) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Z),$$

representando as composições horizontais, que cumprem com associatividade e que preservam identidades.

Posto isto, *qualquer 2-categoria estrita \mathbf{C} (particularmente \mathbf{Cat}) que seja completa e cocompleta é própria para estudar homotopia*: inicia-se identificando os morfismos que estão ligados por 2-morfismos, depois constrói-se $\mathcal{H}\mathbf{C}$ e, finalmente, toma-se como equivalências fracas os morfismos cujas classes em $\mathcal{H}\mathbf{C}$ são isomorfismos.

Um 2-morfismo h é usualmente chamado de *homotopia*. Quando há homotopia h entre f e g , escreve-se $h : f \Rightarrow g$ ou $f \simeq g$ (quando não há relevância em h), e fala-se que tais morfismos são *homotópicos*. Sua representação diagramática, assim como as de suas composições, imitam aquelas utilizada para as transformações naturais, como pode ser visto abaixo. Assim, pode-se dizer que o passo fundamental na construção de $\mathcal{H}\mathbf{C}$ (e, portanto, no fato de que 2-categorias servem ao estudo da homotopia) é precisamente o conceito de *homotopia entre morfismos*.



Um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ entre 2-categorias é dito ser um *2-functor* quando preserva não só os objetos e os morfismos, mas também os 2-morfismos. Particularmente, como estes preservam homotopias, eles passam ao quociente e definem um novo functor entre $\mathcal{H}\mathbf{C}$ e $\mathcal{H}\mathbf{D}$. Em suma, a regra $\mathcal{H} : \mathbf{SCat}_2 \rightarrow \mathbf{WCat}$, onde \mathbf{SCat}_2 é formada de 2-categorias e 2-funtores, tem a característica functorial e, na verdade, define um mergulho.

Não se deve esperar que o functor \mathcal{H} possua uma inversa fraca. Isto é, não se deve esperar que qualquer categoria com equivalências fracas seja uma 2-categoria. Com efeito, para construir \mathcal{H} viu-se necessário um classe de informação de “nível categórico” superior àquela presente nos elementos de \mathbf{WCat} : tratam-se dos 2-morfismos, das homotopias. Em contrapartida, no próximo capítulo mostraremos haver uma subcategoria intermediária

$$\mathbf{SCat}_2 \subset \mathbf{Cat}_{\infty}^1 \subset \mathbf{WCat},$$

formada das chamadas $(\infty, 1)$ -categorias, as quais também possuem a noção de homotopia e que modelam as categorias com equivalências fracas. Isto nos dará o slogan: *as categorias próprias para o estudo da homotopia são, precisamente, aquelas nas quais se têm uma noção coerente de homotopia entre seus morfismos*.

Finalizamos esta subsecção apresentando alguns exemplos de 2-categorias.

Exemplo 5.1.4. Toda subcategoria \mathbf{D} de uma 2-categoria \mathbf{C} também é uma 2-categoria, cujos 2-morfismos são os próprios de \mathbf{C} . Mais precisamente, um 2-morfismos $h : f \Rightarrow g$ é simplesmente

um 2-morfismo h de \mathbf{C} entre $\iota(f)$ e $\iota(g)$. Assim, outros exemplos de 2-categorias incluem as subcategorias de \mathbf{Cat} , com 2-morfismos dados pelas transformações naturais. Aqui se enquadram, por exemplo, \mathbf{Mnd} , \mathbf{CoMnd} e seus derivados \mathbf{SMnd} , \mathbf{SCoMnd} e \mathbf{Hopf} , bem como \mathbf{WCat} .

Exemplo 5.1.5. Mesclando qualquer categoria \mathbf{C} com $\mathcal{B}(\mathbf{C})$, encontra-se uma 2-categoria: seus objetos e seus 1-morfismos são os próprios objetos e morfismos de \mathbf{C} , ao passo que os 2-morfismos são os morfismos de $\mathcal{B}(\mathbf{C})$. Em outras palavras, um 2-morfismo entre $f, g : X \rightarrow Y$ é formado por um par $\mathfrak{h} = (h, h')$ de morfismos em \mathbf{C} , tal que $h' \circ f = g \circ h$. Cada conjunto $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ pode ser feito uma categoria se consideramos a composição horizontal de 2-morfismos definida “componente a componente” $(h, h') \bullet (k, k') = (h \circ k, h' \circ k')$. Por sua vez, relativamente a tais estruturas de categoria, tem-se bifuntores

$$\circ : \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y) \times \text{Mor}_{\mathbf{C}}(Y; Z) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Z),$$

definidos por $(h, h') \circ (k, k') = (h, k')$, os quais representam a composição vertical de 2-morfismos. Estes são claramente associativos e preservam identidades.

Exemplo 5.1.6. A categoria $n\mathbf{Cob}$ tem variedades de dimensão $n - 1$ como objetos e variedades n -dimensionais como morfismos. Por sua vez, $(n + 1)\mathbf{Cob}$ é formada de n -variedades ligadas por entidades de dimensão $n + 1$. Isto nos leva a considerar, para cada n fixo, uma possível 2-categoria $n\mathbf{Cob}_2$, mantendo $n\mathbf{Cob}$ e considerando como 2-morfismos os morfismos de $(n + 1)\mathbf{Cob}$. Assim, seus objetos seriam variedades sem bordo, seus morfismos seriam cobordismos, enquanto que os 2-morfismos seriam cobordismos em dimensão superior. No entanto, além de problemas envolvendo a diferenciabilidade do bordo, haveriam problemas relacionados à associatividade da colagem. Este último fato poderia ser sanado enfraquecendo as condições exigidas sobre a composição vertical de uma 2-categoria. Ao fazer isto, chegaríamos ao conceito de 2-categoria *fraca*, o qual será apresentado no sexto capítulo. Assim, em certo sentido, para todo n , a correspondente $n\mathbf{Cob}_2$ é uma espécie 2-categoria fraca.

Cilindros Naturais

Na subsecção anterior, analisamos uma classe particular de categorias próprias para o estudo homotopia: as 2-categorias estritas. Nesta, estudaremos outra classe que é fonte de exemplos de categorias com equivalências fracas. Trata-se, pois, das categorias nas quais se tem uma noção natural de “cilindro”.

Um *cilindro natural* numa categoria \mathbf{C} é um functor $C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, em conjunto com transformações naturais $\iota_0, \iota_1 : id_{\mathbf{C}} \rightarrow C$, as quais possuem uma inversa à esquerda $\pi : C \rightarrow id_{\mathbf{C}}$ em comum, ao mesmo tempo que estão vinculadas por outra transformação $\tau : C \rightarrow C$. Isto significa que, para qualquer que seja o X , os diagramas abaixo são comutativos.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \pi(X) \nearrow & \uparrow id & \nwarrow \pi(X) \\ CX & \xleftarrow{\iota_0(X)} X & \xrightarrow{\iota_1(X)} CX \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & X & \xrightarrow{\iota_0(X)} CX \\ \iota_1(X) \downarrow & & \nearrow \tau(X) \\ & CX & \end{array}$$

Vejam, agora, que todo cilindro natural induz uma noção de equivalência fraca. Com efeito, dados $f, g : X \rightarrow Y$, diz-se que eles são *C-homotópicos* quando existe um morfismo

$$H : CX \rightarrow Y, \quad \text{tal que} \quad H \circ \iota_0(X) = f \quad \text{e} \quad H \circ \iota_1(X) = g,$$

ao qual se dá o nome de *C-homotopia* entre f e g . Observamos que a relação que identifica morfismos *C-homotópicos* é de equivalência: para a reflexividade, basta tomar $H = f \circ \pi(X)$. A transitividade é evidente. Por fim, para a simetria, se H é *C-homotopia* entre f e g , então $\tau \circ H$ é *C-homotopia* entre g e f . Além disso, ela é compatível com composições. Consequentemente, fica definida uma nova categoria $\mathcal{H}_C(\mathbf{C})$, obtida de \mathbf{C} trocando morfismos por suas correspondentes classes de *C-homotopia*. Posto isto, podemos tomar como equivalências fracas em \mathbf{C} todos os morfismos cujas classes são isomorfismos em $\mathcal{H}_C(\mathbf{C})$.

Exemplo 5.1.7. O protótipo de cilindro natural é o functor $- \times I$ em **Set**, dotado das transformações ι_0 e ι_1 , tais que $\iota_0(X)(x, t) = (x, 0)$ e $\iota_1(X)(x, t) = (x, 1)$, as quais possuem inversa à esquerda dada pela projeção na primeira entrada. Isto é, coloca-se $\pi(X) = \text{pr}_1$ para todo X . Além disso, estas transformações estão relacionadas por meio das correspondências

$$\tau(X) : X \times I \rightarrow X \times I, \quad \text{tais que} \quad \tau(X)(x, t) = (x, t - 1).$$

Neste caso, uma *C-homotopia* entre $f, g : X \rightarrow Y$ é simplesmente uma função $H : X \times I \rightarrow Y$ satisfazendo $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo x . Resta dizer que a análise continua inteiramente válida se trocamos **Set** por **Top**.

Exemplo 5.1.8. Toda categoria monoidal $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, com objeto neutro 1, admite um cilindro natural trivial, dado por $- \otimes 1$. As transformações ι_0 e ι_1 são aquelas que para cada $X \in \mathbf{C}$ associam os isomorfismos naturais $X \simeq X \otimes 1$, enquanto que $\pi(X)$ nada mais é que o isomorfismo inverso $X \otimes 1 \simeq X$. Com estas escolhas, dois morfismos são *C* homotópicos se, e somente se, são iguais. Assim, a categoria $\mathcal{H}_C(\mathbf{C})$ coincide com \mathbf{C} , de modo que as equivalências fracas são todos os isomorfismos de \mathbf{C} . Em outras palavras, a estrutura de categoria própria para homotopia fornecida à \mathbf{C} por \otimes é a trivial.

Observamos haver uma semelhança evidente entre a estratégia utilizada para definir as categorias $\mathcal{H}_C(\mathbf{C})$ e $\mathcal{H}(\mathbf{C})$, nos respectivos casos em que se tem cilindros naturais ou uma estrutura de 2-categoria. Com efeito, em ambos os casos utilizou-se de uma noção prévia de “homotopia”, a qual nos permitiu definir uma relação de equivalência em cada conjunto de morfismos de \mathbf{C} . As correspondentes categorias $\mathcal{H}_C(\mathbf{C})$ e $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ foram então obtidas por passagem ao quociente com respeito a tais relações.

Existe, no entanto, uma diferença entre os dois procedimentos: se por um lado sempre se sabe compôr 2-morfismos de duas diferentes maneiras, as quais são estritamente associativas, não se tem maneiras canônicas de compôr *C-homotopias*. Além disso, ainda que se as tenha, pode ser que as composições não sejam associativas. Assim, olhando desta forma, 2-categorias parecem possuir mais informação.

Em contrapartida, diferentemente dos 2-morfismos, as *C-homotopias* são morfismos da categoria subjacente. Faz sentido, portanto, considerar *C-homotopias* entre *C-homotopias*, iterando o processo *ad infinitum*. Assim, os cilindros naturais induzem não só uma noção de homotopia, mas também noções de “homotopias de grau superior”.

Em alguns casos (como no oitavo capítulo veremos acontecer em **Top**), todas as homotopias induzidas pelos cilindros naturais são, em certo sentido, inversíveis. Assim, em tais situações tem-se entidades compostas de objetos, morfismos, homotopias, homotopias entre homotopias, etc., cuja informação categórica de grau superior a um (das homotopias para adiante) são sempre inversíveis. Tais entidades correspondem às $(\infty, 1)$ -categorias que, como comentamos na subsecção anterior e provaremos no próximo capítulo, modelam todas as categorias com equivalências fracas.

Caminhos Naturais

A versão dual dos cilindros naturais são os *espaços de caminhos naturais*. Assim, estes são funtores $P : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, dotados de transformações naturais $\pi_0, \pi_1 : P \rightarrow id_{\mathbf{C}}$, as quais possuem uma inversa à direita em comum $\iota : id_{\mathbf{C}} \rightarrow P$ e estão vinculadas por uma certa $\tau : P \rightarrow P$. Mais precisamente, os diagramas abaixo são comutativos para todo X .

$$\begin{array}{ccc}
 PX & \xrightarrow{\pi_0(X)} & X \\
 \swarrow \iota(X) & \uparrow id & \searrow \iota(X) \\
 & X &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & X & \xleftarrow{\pi_0(X)} PX \\
 \pi_1(X) \uparrow & & \searrow \tau(X) \\
 & PX &
 \end{array}$$

A presença de espaços de caminhos naturais também induz equivalências fracas. Com efeito, diz-se que dois mapas $f, g : X \rightarrow Y$ são *P-homotópicos* quando existe uma *P-homotopia* entre eles. Isto é, quando existe um morfismo

$$H : X \rightarrow PY \quad \text{tal que} \quad \pi_0(Y) \circ H = f \quad \text{e} \quad \pi_1(Y) \circ H = g.$$

De maneira análoga ao que vimos valer para cilindros naturais, a relação de *P-homotopia* é de equivalência e compatível com composições. Assim, para cada P fica definida uma categoria $\mathcal{H}^P(\mathbf{C})$, cujos objetos são os próprios objetos de \mathbf{C} e cujos morfismos são as classes de *P-homotopia*. Consequentemente, os morfismos de \mathbf{C} que são isomorfismos em $\mathcal{H}^P(\mathbf{C})$ podem ser tomados como equivalências fracas.

Exemplo 5.1.9. Assim como **Set** admite o protótipo de cilindros naturais, também admite o exemplo que motiva a definição (e a nomenclatura) de espaços de caminhos. Com efeito, ali se tem o functor $P : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, que a cada X associa o conjunto $\text{Mor}_{\mathbf{Set}}(I; X)$ dos caminhos em X (isto é, das aplicações $\gamma : I \rightarrow X$). Também se tem as transformações $\pi_0(X)$ e $\pi_1(X)$, que a cada caminho γ associam, respectivamente, seu ponto inicial e seu ponto final. Elas estão ligadas pela transformação $\tau(X)$ que toma γ e devolve outro caminho $\tau(X)(\gamma)$, que em cada instante vale $\gamma(1 - t)$. Argumentos análogos se aplicam em **Top**.

Pode ocorrer que numa categoria admita tanto cilindros naturais C quanto espaços de caminhos naturais P . Neste caso, nela haverão duas noções (a princípio distintas) de equivalências fracas. Gostar-se-ia que tais noções fossem coincidentes. Ora, as equivalências fracas são obtidas por meio das *C-homotopias* e das *P-homotopias*. Desta forma, se estas forem coincidentes, então as respectivas noções de equivalências fracas também o serão. Como logo se verifica, *uma condição necessária e suficiente para que se tenha correspondência biunívoca entre C-homotopias e P-homotopias é a existência de uma adjunção entre C e P.*

Exemplo 5.1.10. Como vimos no últimos capítulo, **Set** é cartesianamente fechada. Com efeito, para todo conjunto Y , o adjunto de $- \times Y$ é precisamente o functor $\text{Mor}_{\mathbf{Set}}(Y; -)$. Por sua vez, nos exemplos anteriores vimos que o functor $- \times I$ define cilindro natural, ao passo que $\text{Mor}_{\mathbf{Set}}(I; -)$ define espaço de caminhos. Consequentemente, as respectivas noções de homotopia e de equivalências fracas por eles proporcionadas são idênticas.

Exemplo 5.1.11. Por outro lado, nos últimos exemplos também vimos que $- \times I$ e $\text{Mor}_{\mathbf{Top}}(I; -)$ servem de cilindros e de espaços de caminhos naturais em **Top**. Ressaltamos, no entanto, que, *diferentemente do que se passa em Set, as noções de homotopia por eles produzidas não coincidem*. Afinal, **Top** não é cartesianamente fechada. Assim, mesmo que uma função $H : X \times I \rightarrow Y$ seja contínua, a correspondente $H' : X \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{Top}}(I; Y)$, obtida pela adjunção em **Set** e caracterizada por $H'(x)(t) = H(x, t)$, pode não o ser.

5.2 Categoria Homotópica

Como dito na introdução do capítulo, o contexto no qual a teoria da homotopia se apresenta é o seguinte: quer-se substituir uma categoria **C** por uma primeira aproximação, em que o problema de classificação é ligeiramente mais brando que o de **C**. Nesta subsecção, mostraremos que, se **C** é própria para o estudo da homotopia, então a subcategoria distinguida **Weak** nos permite construir a aproximação desejada.

Observamos que, nos capítulos anteriores, sempre substituímos a relação de igualdade entre funtores surgia, esta era substituída por aquela que identifica funtores entre os quais há uma transformação natural. Foi desta maneira que definimos os conceitos de *equivalência entre categorias* e de *extensões de Kan*. No presente contexto, esta atitude ressalta o fato de que **Cat** (ou, mais geralmente, qualquer 2-categoria **C**) é aproximada por $\mathcal{H}\mathbf{C}$.

Assim, temos um protótipo para o processo de aproximação que procuramos. Para abstraí-lo, precisamos descrever $\mathcal{H}\mathbf{C}$ em termos de conceitos presentes numa categoria arbitrária. Neste sentido, observamos que $\mathcal{H}\mathbf{C}$ é universal com respeito ao functor quociente $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{H}\mathbf{C}$. Mais precisamente, toda categoria **D** para a qual existe um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ mandando equivalências fracas em isomorfismos é fracamente isomorfa a $\mathcal{H}\mathbf{C}$. Realmente, a hipótese assegura que $f \simeq g$ implica $F(f) = F(g)$, de modo que (passando ao quociente) há um único functor $F_* : \mathcal{H}\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ cumprindo $F_* \circ \pi = F$. Como logo se convence, ele define a equivalência buscada.

Uma *localização* de uma categoria **C** numa classe de morfismos \mathcal{C} é uma outra categoria $\mathbf{C}[\mathcal{C}]$ dotada de um functor $p : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{C}]$ que manda morfismos de \mathcal{C} em isomorfismos de $\mathbf{C}[\mathcal{C}]$, sendo universal com respeito a tal propriedade. Assim, para uma 2-categoria, $\mathcal{H}\mathbf{C}$ é simplesmente a sua localização na classe das equivalências fracas.

Evidentemente, $\mathbf{C}[\mathcal{C}]$ é única a menos de um único isomorfismo. No que diz respeito a sua existência, observamos que ela pode ser descrita como sendo a categoria que possui os mesmos objetos que **C** e cujos morfismos são os *zig-zags* de morfismos de **C** por morfismos de \mathcal{C} . Isto é, as sequências

$$X \longleftarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longleftarrow A_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y$$

que não possuem identidades e nem morfismos consecutivos na mesma direção, sendo tais que toda seta voltada para à esquerda está em \mathcal{C} . Em suma, $\mathbf{C}[\mathcal{C}]$ é obtida de **C** acrescentando uma inversa formal a cada um de seus morfismos. Veja [23].

Voltando ao questionamento inicial, dada uma categoria \mathbf{C} qualquer, o análogo de $\mathcal{H}\mathbf{C}$ há de ser a localização de \mathbf{C} nas equivalências fracas. Ela é chamada de *categoria homotópica* ou mesmo de *categoria derivada* de \mathbf{C} , sendo usualmente denotada por $\mathrm{Ho}(\mathbf{C})$. Evidentemente, quando \mathbf{C} é 2-categoria, tem-se a equivalência $\mathrm{Ho}(\mathbf{C}) \simeq \mathcal{H}\mathbf{C}$.

Se dois objetos X e Y são isomorfos na categoria homotópica, escreve-se $X \simeq Y$ e diz-se que eles possuem o mesmo *tipo de homotopia*. No contexto das 2-categorias, dois objetos tem o mesmo tipo de homotopia se, e somente se, existe um morfismo $f : X \rightarrow Y$ (chamado de *equivalência homotópica*) que admite inversa a menos de 2-morfismos. Isto é, tal que há um outro $g : Y \rightarrow X$, bem como 2-morfismos $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$.

Exemplo 5.2.1. Na 2-categoria **Cat**, duas categorias tem o mesmo tipo de homotopia precisamente quando são equivalentes. Isto justifica uma máxima: *numa 2-categoria, em geral não se exige a igualdade entre dois morfismos. Exige-se, apenas, que eles coincidam a menos de um 2-morfismo*. Grosso modo, isto significa que, se no contexto de trabalho tem-se em mãos a noção de homotopia, costuma-se enfraquecer a exigência de comutatividade dos diagramas, passando a exigir apenas comutatividade módulo homotopias. Em **Cat**, por exemplo, tal máxima recai em outra que já temos utilizado desde o início do texto: *não se exige a igualdade de funtores, mas apenas que sejam idênticos a menos de isomorfismos naturais*.

Completude

Por definição, uma categoria própria para o estudo da homotopia deve ser completa e cocompleta. Tenhamos em mente uma nova questão: se existir, será $\mathrm{Ho}(\mathbf{C})$ também completa e cocompleta? No intuito de analisá-la, observamos que $p : \mathbf{C} \rightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{C})$ induz, para cada categoria \mathbf{J} , um respectivo functor

$$p_{\mathbf{J}} : \mathrm{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Func}(\mathbf{J}; \mathrm{Ho}(\mathbf{C})), \quad \text{tal que} \quad p_{\mathbf{J}}(F) = p \circ F \quad \text{e} \quad p_{\mathbf{J}}(\xi) = \xi.$$

Disto segue que, se $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ possui limite e/ou colimite, então o correspondente $p_{\mathbf{J}}(F)$ também o possui. Portanto, uma vez que a categoria \mathbf{C} é ao mesmo tempo completa e cocompleta, se $p_{\mathbf{J}}$ for um isomorfismo, então todo functor entre \mathbf{J} e \mathbf{C} se escreverá sob a forma $p_{\mathbf{J}}(F)$ para algum $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ e $\mathrm{Ho}(\mathbf{C})$ possuirá todos os limites e colimites em \mathbf{J} .

Observamos que tal estratégia funciona quando \mathbf{J} é discreta, de modo que, quando existe, a categoria homotópica possui todos os produtos e coprodutos. No caso particular em que \mathbf{C} é 2-categoria, $\mathrm{Ho}(\mathbf{C})$ coincide com $\mathcal{H}\mathbf{C}$, de tal modo que seus produtos e coprodutos são dados pelos próprios produtos e coprodutos de \mathbf{C} , tendo como projeções e inclusões as suas respectivas classes de homotopia.

Assim, pelo teorema de existência de limites e colimites, para garantir completude e cocompletude de $\mathrm{Ho}(\mathbf{C})$, bastaríamos mostrar que a estratégia anterior também se aplica quando \mathbf{J} é constituída das categorias $\rightarrow \cdot \leftarrow$ ou $\leftarrow \cdot \rightarrow$. Este, no entanto, não é o caso. Em geral, a categoria homotópica não possui *pullbacks* e nem *pushouts*. Daremos exemplos deste fato no oitavo capítulo, quando estudarmos teoria da homotopia em **Top**.

5.3 Funtores Derivados

Em princípio, a categoria homotópica atende como uma *primeira aproximação* da categoria da qual ela descende. Diante disso, dado um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$, torna-se interessante qualquer processo que nos permita substituí-lo por algum functor entre $\mathrm{Ho}(\mathbf{C})$ e $\mathrm{Ho}(\mathbf{C}')$, dito ser *derivado* de F e que haverá de traduzir uma primeira aproximação deste.

A maneira imediata de realizar esta troca é por “passagem ao quociente”. Com efeito, para que haja um único $F' : \mathrm{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{C}')$ tal que $F' \circ p = p' \circ F$, é necessário e suficiente que F seja *homotópico*. Assim, ao tomá-la, cair-se-ia numa igualdade de funtores, que é uma condição demasiadamente restrita. Como sempre, a ideia é substituir a igualdade pela relação \simeq . Para fazer isto, observamos que a passagem ao quociente acima nada mais é que uma extensão do functor $p' \circ F$ em \mathbf{Cat} . Ora, mas problemas de extensão já sabemos enfraquecer: ao invés de se tentar estender estritamente, procura-se pelas extensões de Kan.

Motivados por estes fatos, definamos: o *functor derivado à esquerda* (resp. *à direita*) de F nada mais é que a extensão à esquerda (resp. direita) de $p' \circ F$ relativamente a p .

No capítulo anterior, vimos que se um functor assume valores numa categoria completa e cocompleta, então suas extensões de Kan sempre existem e podem ser computadas por meio de *ends* e *coends*. Observamos que isto não pode ser utilizado para garantir a existência de funtores derivados, uma vez que, em geral, categorias homotópicas não são completas.

Uma estratégia mais palpável para a obtenção de tais funtores será dada na última secção do capítulo seguinte, onde consideramos categorias que estão dotadas, além das equivalências fracas, de outras classes de “morfismos auxiliares”.

Limites Especiais

Prosseguindo com o espírito da subsecção anterior, buscamos pelas primeiras aproximações de limites de funtores que assumem valores em categoria próprias para o estudo da homotopia. Seja \mathbf{C} uma categoria com equivalências fracas. Sendo ela completa, fixada uma outra categoria \mathbf{J} qualquer, todo functor $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ possui limite. Consequentemente, está bem definido um functor $\lim : \mathrm{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$, que cada F associa o seu respectivo limite. O mesmo se passa com os colimites, uma vez que a categoria \mathbf{C} é também cocompleta. Desta forma, limites e colimites se traduzem em funtores, ao passo que, pelo exemplo 5.1.3, a classe distinguida de \mathbf{C} estabelece uma outra em $\mathrm{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C})$.

Pelo o que discutimos anteriormente, a maneira natural de transferir funtores à categoria homotópica é tomando suas versões derivadas. Assim, define-se o *limite homotópico* de F , denotado por $h\lim F$, como sendo a sua imagem pelo functor derivado à esquerda de \lim . Dualmente, o *colimite homotópico* de F , ao qual guardamos a notação $h\mathrm{colim} F$, é a sua imagem através do functor derivado à direita de colim . Em suma,

$$h\lim F = L\lim(F) \quad \text{e} \quad h\mathrm{colim} F = R\mathrm{colim}(F).$$

Observamos que, como \mathbf{C} é completa e cocompleta, todo functor que nela assume valores sempre possui extensões de Kan, de tal modo que, diferentemente dos limites e colimites usuais, limites e colimites homotópicos sempre existem na categoria homotópica.

Outra observação relevante é a seguinte: limites homotópicos podem não ser passagens ao quociente de limites na categoria ordinária. Mais precisamente, os funtores \lim e colim em

geral não preservam equivalências fracas (não são homotópicos). Daremos exemplos deste fato no oitavo capítulo, quando estudarmos teoria da homotopia em **Top**.

Ainda não temos uma maneira prática de computar limites homotópicos. No entanto, como mencionado na subsecção anterior, já no próximo capítulo, quando contarmos com classes auxiliares de morfismos, aprenderemos a calcular extensões de Kan e, particularmente, limites homotópicos.

Suspensões e Loops

No intuito de ilustrar a diferença entre limites e limites homotópicos, aqui apresentamos uma classe particular de limites, os quais só não são triviais no âmbito homotópico. Tratam-se das *suspensões* e de sua versão dual, os *loops*.

Como abstraímos no terceiro capítulo, em qualquer categoria com objetos nulos o *kernel* (resp. *co-kernel*) de um morfismo $f : X \rightarrow Y$ é simplesmente o *pullback* (resp. *pushout*) abaixo apresentado.

$$\begin{array}{ccc} \ker(f) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ * & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \operatorname{coker}(f) & \longleftarrow & Y \\ \uparrow & & \uparrow f \\ * & \longleftarrow & X \end{array}$$

Pela lei de colagem de *pullbacks* e *pushouts*, a composição sucessiva de *kernels* ou de *co-kernels* pode ser computada pelos limites dos quadrados externos abaixo expostos, os quais são evidentemente triviais.

$$\begin{array}{ccccc} \ker(\ker(f)) & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \operatorname{coker}(\operatorname{coker}(f)) & \longleftarrow & \operatorname{coker}(f) & \longleftarrow & * \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ * & \longleftarrow & Y & \xleftarrow{f} & X \end{array}$$

Em particular, se estamos em uma categoria com equivalências fracas **C**, então sua pontuação possui objetos nulos, de modo que os limites anteriores fazem sentido e são triviais. No entanto, também podemos olhar tais diagramas enquanto limites homotópicos. Neste caso, eles são devidamente chamados de *mapping cocone* e *mapping cone* de f , sendo denotados por $\operatorname{ccone}(f)$ e $\operatorname{cone}(f)$. Diferentemente do caso usual, quando iterados, estes produzem espaços que podem não ser triviais.

Uma vez que *pullbacks* e *pushouts* homotópicos também satisfazem leis de colagem, segue-se que os espaços $\operatorname{ccone}(\operatorname{ccone}(f))$ e $\operatorname{cone}(\operatorname{cone}(f))$, respectivamente denominados *loop* e *suspensão* de X (denotados por ΩX e ΣX), podem ser computados, a menos de isomorfismos, pelos limites homotópicos abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Sigma X & \longleftarrow & * \\ \uparrow & & \uparrow \\ * & \longleftarrow & X \end{array}$$

Capítulo 6

Modelos

Algumas categorias próprias para o estudo da homotopia contam com duas classes auxiliares de morfismos, denominados *fibrações* e *cofibrações*. Diz-se que tais classes determinam um *modelo* na categoria original. As categorias nas quais um modelo foi fixado são os objetos de estudo do presente capítulo. Enfatizamos: ainda que nelas se conte com classes auxiliares de morfismos, estes não são mencionadas na construção da categoria derivada. Isto significa que, *para estudar homotopia, o conceito fundamental é realmente o de equivalência fraca*.

A escolha de um modelo numa categoria é comparada à escolha de uma base num espaço vetorial ou à escolha de um sistema de coordenadas numa variedade. Tratam-se, pois, de ferramentas que facilitam a demonstração de resultados: uma vez que se sabe que a estrutura de espaço vetorial (resp. a categoria homotópica) independe da escolha de uma base (resp. das fibrações e cofibrações fixadas), para provar um certo resultado, pode-se escolher a base (resp. o modelo) que melhor lhe convém.

Iniciamos o capítulo apresentando a definição de categoria modelo e apresentando algumas propriedades que dali surgem de maneira quase que imediata. Na segunda secção, discutimos que toda categoria modelo admite diversos cilindros e espaços de caminhos, os quais podem ser utilizados para construir resoluções de objetos e de morfismos. Em seguida, verificamos que tais entidades determinam todo o modelo. Mais precisamente, mostramos que se uma categoria admite cilindros e espaços de caminhos naturais adjuntos, então também admite um modelo.

Na terceira secção, discutimos diversas facilidades proporcionadas pela introdução de modelos em categorias com equivalências fracas. Ali mostramos, por exemplo, que as categorias homotópicas, assim como os funtores derivados e, conseqüentemente, os limites homotópicos, podem ser determinados de maneira versátil. Por fim, apresentamos uma classe de funtores entre categorias modelo, os quais induzem isomorfismos em homotopia sem a necessidade de preservarem equivalências fracas.

As referências mais utilizadas para o estudo e para a escrita foram [16, 34, 31, 12].

6.1 Estrutura

Um *modelo* numa categoria \mathbf{C} , previamente dotada de equivalências fracas, é consistido de outras duas classes de morfismos, respectivamente chamadas de *fibrações* e *cofibrações*, escolhidas de tal modo que as seguintes propriedades são satisfeitas (quando uma fibração ou cofibração é

ao mesmo tempo uma equivalência fraca, diz-se que ela é *acíclica* ou *trivial*):

1. cada uma das classes é preservada por retrações. Isto significa que, para quaisquer morfismos $f : X \rightarrow X'$ e $g : Y \rightarrow Y'$, se g pertence a uma classe e existem outros morfismos entre os respectivos objetos que tornam comutativo o diagrama abaixo, então f faz parte desta mesma classe;

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & Y & \xrightarrow{\quad} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{\quad} & Y' & \xrightarrow{\quad} & X' \\
 & \xleftarrow{\quad id \quad} & & &
 \end{array}$$

2. cofibrações têm a propriedade de levantamento relativamente a fibrações acíclicas. Dualmente, fibrações possuem a propriedade de levantamento com respeito a cofibrações acíclicas. Isto é, fornecidas uma fibração $j : X \rightarrow X'$ e uma cofibração $\iota : Y \rightarrow Y'$, se alguma delas é também uma equivalência fraca, então, para quaisquer morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y'$ tais que $\iota \circ f = g \circ j$, existe h que torna comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & X' \\
 \iota \downarrow & \nearrow h & \downarrow j \\
 Y & \xrightarrow{g} & Y'
 \end{array}$$

3. todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ de \mathbf{C} pode ser functorialmente decomposto sob a forma $f = j \circ \iota$ para uma cofibração ι e uma fibração j , em que alguma das duas é acíclica.

Uma *categoria modelo* é simplesmente uma categoria com equivalências fracas na qual um modelo foi fixado. Quando se quer evidenciar que uma seta é uma cofibração (resp. fibração) num certo modelo, escreve-se “ \twoheadrightarrow ” (resp. “ \rightarrow ”) para representá-la.

Exemplo 6.1.1. Se \mathbf{C} é uma categoria modelo, então \mathbf{C}^{op} admite um modelo natural, cujas equivalências fracas são os morfismos $f^{op} : Y \rightarrow X$ tais que $f : X \rightarrow Y$ é equivalência fraca em \mathbf{C} , tendo fibrações dadas pelas cofibrações de \mathbf{C} , e vice-versa. Por conta disso, tem-se um princípio de dualização: *todo resultado demonstrado numa categoria modelo continua verdadeiro se em seu enunciado trocamos fibrações por cofibrações e invertemos as setas.*

Exemplo 6.1.2. Cada modelo \mathbf{C} se estende a um modelo na pontuação \mathbf{C}_* : é só considerar como fibrações e cofibrações as correspondentes fibrações e cofibrações da categoria \mathbf{C} que preservam ponto base.

Propriedades

Diretamente da definição de modelo decorrem algumas propriedades concernentes às classes distinguidas de morfismos. Por exemplo, vê-se que a classe das equivalências fracas em conjunto com a classe das fibrações determinam univocamente as cofibrações como sendo os morfismos que possuem a propriedade de levantamento de morfismos relativamente à cofibrações acíclicas (veja

o lema 1.1.10 de [31] ou terceira secção de [16]). Por dualização, conclui-se que equivalências fracas e cofibrações determinam as fibrações.

Como facilmente se convence, estes fatos garantem que, em qualquer categoria modelo, as identidades tanto são fibrações quanto cofibrações. Deles também se conclui que tais classes distinguidas de morfismos são fechadas com respeito a composição e, consequentemente, definem subcategorias Fib e CFib .

Outra propriedade obtida diretamente dos axiomas é a invariância das fibrações por *pullbacks* e, por dualização, das cofibrações por *pushouts*. Com efeito, sejam $f : X \rightarrow Y$ uma fibração, $g : X' \rightarrow Y$ um mapa qualquer e suponhamos haver o *pullback* do par (f, g) . Mostraremos que o morfismo $j : \text{Pb} \rightarrow X$, apresentado no primeiro diagrama abaixo, também é uma fibração. Pelo parágrafo anterior, basta verificar que j possui a propriedade de levantamento com respeito a cofibrações acíclicas. Seja $\iota : A \rightarrow B$ uma cofibração acíclica, como exposto no diagrama do meio. Afirmamos haver a seta h indicada. Juntando ambos os dois diagramas, obtém-se h' . Daí, como se vê no último diagrama, da universalidade do *pullback* segue a existência de h .

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{ccc} \text{Pb} & \longrightarrow & X \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & Y \end{array} &
 \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \text{Pb} \\ \iota \downarrow & \nearrow h & \downarrow j \\ B & \longrightarrow & X' \end{array} &
 \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \iota \downarrow & \nearrow h' & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array} &
 \begin{array}{ccc} B & & \\ \searrow h & \nearrow h' & \\ & \text{Pb} \longrightarrow X & \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}
 \end{array}$$

Exemplo 6.1.3. Em virtude da invariância das fibrações por *pullbacks*, segue-se que, para quaisquer objetos X_1 e X_2 , as projeções $\pi_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ são fibrações. Da mesma forma, a invariância das cofibrações por *pushouts* garante que as inclusões $\iota_j : X_j \rightarrow X_1 \oplus X_2$ são cofibrações.

6.2 Resoluções

Diz-se que um objeto X numa categoria modelo \mathbf{C} é *fibrante* ou *cofibrante*¹ na medida que o morfismo $X \rightarrow *$ é fibração ou $\emptyset \rightarrow X$ é cofibração. Evidentemente, todo objeto admite ao menos uma resolução fibrante e outra cofibrante. Com efeito, pelo axioma da decomposição, os referidos morfismos podem sempre ser functorialmente decompostos na forma

$$\emptyset \rightarrow \mathcal{C}X \rightsquigarrow X \quad \text{e} \quad X \rightsquigarrow \mathcal{F}X \rightarrow * \quad \text{para certos } \mathcal{C}X \text{ e } \mathcal{F}X. \quad (6.1)$$

Vejam os que qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$ também admite resoluções fibrantes e cofibrantes. Mais precisamente, mostremos a existência de resoluções $X' \rightsquigarrow X$ e $X \rightsquigarrow X''$ que, quando compostas com f , produzem fibrações e cofibrações. Observamos que, diretamente da invariância das fibrações e cofibrações por *pullbacks*, *pushouts* e composições, segue-se que cada fibração

¹Na literatura inglesa, tais expressões correspondem, respectivamente, a *fibrant* e *cofibrant*.

$\text{path}(Y) \rightarrow Y$ e cada cofibração $X \rightarrow \text{cyl}(X)$ determinam as resoluções X' e X'' procuradas.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\sim} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{path}(Y) & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X'' & \xleftarrow{\sim} & Y \\ \uparrow & & \uparrow f \\ \text{cyl}(X) & \longleftarrow & X \end{array}$$

Diante disso, nos resumimos a garantir a existência de fibrações $\text{path}(Y)$ que assumem valores em Y , assim como de cofibrações $\text{cyl}(X)$ partindo de X . Particularmente, como projeções são fibrações, ao passo que inclusões são cofibrações, basta que encontremos mapas $X \oplus X \rightarrow \text{cyl}(X)$ e $\text{path}(Y) \rightarrow Y \times Y$. Estes existem, pois $\nabla : X \oplus X \rightarrow X$ (resp. $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$) pode sempre ser decomposto na forma $j \circ \iota$, em que ι é cofibração (resp. cofibração acíclica) e j é fibração acíclica (resp. fibração). Em cada um dos casos, $\text{cyl}(X)$ e $\text{path}(Y)$ são os objetos intermediários da decomposição, sendo chamados de *cilindro* de X e de *espaço de caminhos* de Y .

Cilindros Naturais

Na subsecção anterior, vimos que uma categoria modelo possui diversos cilindros e espaços de caminhos. Veremos, agora, uma recíproca de tal condição. Mais precisamente, mostraremos que se uma categoria admite cilindros e espaços de caminhos naturais (os quais supomos adjuntos), então estes ali determinam um modelo.

A ideia é essencialmente a seguinte: cilindros naturais fornecem cofibrações e equivalências fracas, ao passo que espaços de caminhos naturais fornecem fibrações e equivalências fracas. Se estes são adjuntos, então as correspondentes noções de equivalência fraca coincidem e então podemos juntar as informações por eles fornecidas de modo a produzir um modelo. Vejamos isto com um pouco mais de cuidado.

Pois bem, se $C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ é cilindro natural numa categoria \mathbf{C} , então ele ali induz uma correspondente noção de homotopia, a qual nos serve como uma classe distinguida. Por sua vez, em uma categoria modelo, as cofibrações são os morfismos que possuem a propriedade de extensão com respeito a uma outra classe de morfismos.

A ideia, então, é definir C -cofibrações como sendo os morfismos que têm a propriedade de extensão relativamente às C -homotopias. De maneira mais precisa, diz-se que $\iota : X \rightarrow Y$ é uma C -cofibração quando, para todo morfismo $f : Y \rightarrow Z$ e toda C -homotopia h partindo de ι (isto é, satisfazendo $h \circ \iota_0 = \iota$), é possível obter uma outra C -homotopia $H : CY \rightarrow Z$, esta partindo de f , a qual pode ser escolhida que modo que ao se restringir a CX coincida com h . Em outras palavras, vale a comutatividade do primeiro dos diagramas abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_0(X)} & CX \\ \downarrow \iota & \nearrow h & \downarrow C(\iota) \\ Y & \xrightarrow{\iota_0(Y)} & CY \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\pi_0(X)} & PX \\ \downarrow j & \nwarrow f & \downarrow P(j) \\ Y & \xleftarrow{\pi_0(Y)} & PY \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} & \nearrow h & \\ & \nwarrow H & \\ & \nearrow h & \end{array}$

De outro lado, se P é espaço de caminhos natural em \mathbf{C} , então ele também induz uma noção de homotopia, a qual utilizamos como classe distinguida. Posto isto, definimos as P -fibrações como

sendo mapas que têm a propriedade de levantamento com respeito às P -homotopias (segundo dos diagramas acima).

Cabem, aqui, duas observações:

1. para qualquer X , o correspondente $\iota_0(X)$ é tanto C -cofibrção quanto equivalência homotópica (isto é, um isomorfismo na categoria homotópica $\mathcal{H}_C(\mathbf{C})$). Assim, eles funcionam como as “cofibrções acíclicas”. Em particular, disto segue que todo $X \in \mathbf{C}$ serve como um “objeto cofibrante”;
2. dualmente, os $\pi_0(Y)$ são ao mesmo tempo P -fibrções e isomorfismos em $\mathcal{H}^P(\mathbf{C})$. Consequentemente, eles servem de análogos às “fibrções acíclicas” e todo objeto admite comportamento semelhante aos “cofibrantes”.

Suponhamos, agora, a existência de uma adjunção entre os funtores P e C . Neste caso, as respectivas noções coincidem e as C -cofibrções e as P -fibrções admitem uma nova caracterização. Com efeito, $\iota : X \rightarrow Y$ será uma C -cofibrções se, e só se, para todo $f : X \rightarrow Y$ e toda P -homotopia h partindo de f existe uma outra P -homotopia H , agora partindo de ι , que ao ser restrita a PX coincide com h (veja o primeiro dos diagramas abaixo). Em outras palavras, um mapa é uma cofibrção se, e só se, possui a propriedade de extensão com respeito à $\pi_0(Y)$ e, portanto, pela observação anterior, com respeito a uma “fibrção acíclica”.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & PZ \\ \iota \downarrow & \nearrow H & \downarrow \pi_0(Z) \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ \iota_0(Z) \downarrow & \nearrow H & \downarrow j \\ CZ & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

De maneira análoga, a adjunção entre P e C nos permite caracterizar as P -fibrções como sendo os morfismos que têm a propriedade de levantamento com respeito à $\iota_0(X)$ e, portanto, com respeito a uma “cofibrção acíclica”.

Diante disso, para mostrar que C -cofibrções, P -fibrções e as correspondentes equivalências fracas (que coincidem sob a hipótese de adjunção) definem um verdadeiro modelo em \mathbf{C} , resta verificar que cada uma destas classes de morfismos é invariante por retração, ao passo que todo morfismo em \mathbf{C} admite uma decomposição em termos de C -cofibrções seguidas de P -fibrções, sendo alguma delas também uma equivalência fraca.

No que tange à invariância por retrações, observamos que a caracterização que obtivemos para as F -cofibrções e para as P -fibrções nos permite utilizar da mesma estratégia empregada na primeira secção para demonstrar que cofibrções e fibrções são respectivamente invariantes por *pullbacks* e por *pushouts*. No entanto, como logo se convence, se uma classe de morfismos é invariante por *pullbacks* ou por *pushouts*, então também é invariante por retrações.

Finalmente, no que diz respeito à existência de decomposições, elas seguem do lema abaixo, usualmente chamado de *lema de fatoração*. Enunciamo-lo para fibrções. Existe, no entanto, uma versão dual para cofibrções. A demonstração é análoga.

Lema 6.2.1. *Seja \mathbf{C} uma categoria dotada das noções de fibrção, equivalência fraca e de espaços de caminhos. Se as fibrções são invariantes por pullbacks e todo objeto Y é fracamente equivalente ao seu espaço de caminhos $\text{Path}(Y)$, então qualquer morfismo f se decompõe sob a forma $j \circ \iota$, em que ι é equivalência fraca e j é fibrção.*

Demonstração. Iniciamos relembando algo que já foi visto na subsecção anterior: se $\text{Path}(Y)$ é espaço de caminhos de Y , então toda fibração $\kappa : \text{Path}(Y) \rightarrow Y$ determina uma resolução fibrante de qualquer $f : X \rightarrow Y$ (é só utilizar a invariância das fibrações por *pullbacks*). Agora, se $\omega : Y \rightarrow \text{Path}(Y)$ é equivalência fraca, então, por universalidade, existe o mapa $\iota : X \rightarrow \text{Path}(Y)$ apresentado abaixo. Em particular, a propriedade 2-de-3 faz dele uma equivalência fraca. Portanto, tomando j igual à composição de κ com o morfismo vertical do *pullback*, vê-se que $f = j \circ \iota$, fornecendo a decomposição procurada. \square

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & & & \\
 \searrow \iota & \nearrow id & & & \\
 & X' & \rightsquigarrow & X & \\
 \searrow \omega \circ f & \downarrow & & \downarrow f & \\
 & \text{Path}(Y) & \xrightarrow{\kappa} & Y &
 \end{array}$$

6.3 Utilidade

Ao final da secção anterior, mostramos que os cilindros e os espaços de caminhos naturais determinam, em certo sentido, toda a estrutura de um modelo. Assim, espera-se que muito do que se utiliza no estudo das categorias próprias para o estudo da homotopia possa ser determinado somente pela hipótese de existência de objetos fibrantes e cofibrantes, assim como de cilindros e espaços de caminhos.

Em contrapartida, se já supomos a presença de um modelo, então tais classes de objetos existem aos montes. Como consequência, espera-se que a escolha prévia de um modelo numa categoria com equivalências fracas facilite diversos cálculos. Particularmente, espera-se que estes sejam *versáteis*. Afinal, eles dependem apenas da *existência* de objetos fibrantes, cilindros, etc, e não da maneira com estes foram *escolhidos* para realizar o referido cálculo.

Nesta secção, iniciamos confirmando a suspeita para as categorias homotópicas. Em seguida, confirmamo-la também para funtores derivados. Por fim, tratamos de uma classe particular de adjunções, denominadas *adjunções de Quillen*, as quais induzem isomorfismos em homotopia mesmo ser preservar equivalências fracas.

Categoria Homotópica

Diz-se que $f, g : X \rightarrow Y$, são *formalmente homotópicos à esquerda* quando existe $\text{cyl}(X)$ no qual está definido um morfismo $H : \text{cyl}(X) \rightarrow Y$ que torna comutativa a primeira parte do diagrama da próxima página. Nele, n_0 e n_1 denotam, respectivamente, a composição da cofibração $X \oplus X \rightarrow \text{cyl}(X)$ com as inclusões na primeira e segunda entrada de $X \oplus X$. Assim, f e g são formalmente homotópicos à esquerda se $\nabla \circ f \oplus g$, denotado por $f + g$, estende-se a algum cilindro.

De maneira semelhante, fala-se que f e g são *formalmente homotópicos à direita* quando é possível obter um espaço de caminhos de Y e um morfismo $h : X \rightarrow \text{path}(Y)$ tal que a segunda parte do diagrama acima é comutativa. Ali, pr_0 e pr_1 representam a composição da fibração $\text{path}(X) \rightarrow X \times X$ com a projecção de $X \times X$ na primeira e segunda entrada. Assim, os

morfismos f e g são formalmente homotópicos à direita se $f \times g \circ \Delta$, representado por $f \cdot g$, pode ser levantado a algum espaço de caminhos.

$$\begin{array}{ccccc}
 X \oplus X & \xrightarrow{f \oplus g} & Y \oplus Y & & Y \times Y \xrightarrow{f \times g} X \times X \\
 \downarrow n_0 \oplus n_1 & & \searrow \nabla & \nearrow \Delta & \uparrow pr_0 \times pr_1 \\
 & & Y & & \\
 \text{cyl}(X) \oplus \text{cyl}(X) & \xrightarrow{\nabla} & \text{cyl}(X) & & \text{path}(X) \xrightarrow{\Delta} \text{path}(X) \times \text{path}(X) \\
 & \nearrow H & \searrow h & &
 \end{array}$$

Se X é cofibrante, então a relação que identifica morfismos formalmente homotópicos à esquerda é de equivalência no conjunto $\text{Mor}(X; Y)$. Dualmente, se Y é fibrante, então a relação responsável por identificar morfismos formalmente homotópicos à direita é de equivalência neste mesmo conjunto. Além disso, se as duas condições são simultaneamente satisfeitas, então ambas as equivalências coincidem. Isto é, se X é cofibrante e Y é fibrante, então $f, g : X \rightarrow Y$ são formalmente homotópicos à esquerda se, e só se, o são à direita. Em tal caso, diz-se simplesmente que eles são *formalmente homotópicos* e escreve-se $f \cong g$ (não confundir com a notação $f \simeq g$, utilizada para denotar 1-morfismos homotópicos em 2-categorias). Para detalhes, sugerimos a quarta secção de [16] ou as secções 7.3-7.5 de [34].

Em virtude do exposto, para quaisquer objetos X e Y numa categoria modelo \mathbf{C} , o respectivo conjunto $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}CX; \mathcal{F}CY)$ está dotado de uma relação de equivalência, a qual passa ao quociente e define uma nova categoria \mathcal{HC} , denominada *categoria homotópica formal*. Se dois objetos $X, Y \in \mathbf{C}$ são ali isomorfos, escreve-se $X \cong Y$ e diz-se que possuem o mesmo *tipo de homotopia formal*. Isto significa que é possível obter morfismos $f : \mathcal{F}CX \rightarrow \mathcal{F}CY$ e $g : \mathcal{F}CY \rightarrow \mathcal{F}CX$, denominados *equivalência homotópica formal* e *inversa homotópica formal*, cujas composições satisfazem $g \circ f \cong id_X$ e $f \circ g \cong id_Y$.

Tem-se um functor sobrejetivo $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{HC}$, que é identidade em objetos e que a cada morfismo f entre X e Y faz corresponder a sua *classe de homotopia formal* $[f]$ (isto é, o conjunto dos morfismos homotópicos a $\mathcal{F}Cf$). A coleção de todas estas classes é denotada por $[X; Y]_{\mathbf{C}}$. Em outras palavras, costuma-se escrever $[X; Y]_{\mathbf{C}}$ ao invés de $\text{Mor}_{\mathcal{HC}}(X; Y)$.

Equivalência

Mostraremos que, para qualquer categoria modelo, sua categoria homotópica e sua categoria homotópica formal são equivalentes. Para tanto, necessitaremos do seguinte resultado, aqui denominado *teorema de Whitehead* por se tratar da generalização de um importante resultado no estudo da homotopia clássica que leva este mesmo nome:

Proposição 6.3.1. *Um morfismo entre objetos que são simultaneamente fibrantes e cofibrantes é equivalência fraca se, e somente se, é equivalência homotópica formal.*

Demonstração. Mostraremos que as fibrações acíclicas assumindo valores em objetos cofibrantes são equivalências homotópicas. Por dualização, o mesmo poderá ser concluído sobre as cofibrações acíclicas definidas em objetos fibrantes. Uma vez que qualquer equivalência fraca $f : X \rightarrow Y$ se decompõe em termos de uma cofibração acíclica $\iota : X \rightarrow X'$ seguida de uma

fibração $j : X' \rightarrow Y$, a propriedade 2-de-3 garantirá que j também é acíclica. Em particular, se f estiver definida entre objetos que são ao mesmo tempo fibrantes e cofibrantes, então X' também será fibrante e cofibrante, de modo que ι e j (e, conseqüentemente, $f = j \circ \iota$) serão equivalências homotópicas. Seja, então, $f : X \rightarrow Y$ uma fibração acíclica, com Y cofibrante. Evidentemente, ela possui a propriedade de levantamento com respeito a $\emptyset \rightarrow Y$. Daí, existe um mapa $g : Y \rightarrow X$ que deixa comutativo o primeiro dos diagramas abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & \nearrow g & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{id} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X \oplus X & \xrightarrow{g \circ f + id} & X \\ \downarrow \iota & \nearrow H & \downarrow f \\ cyl(X) & \xrightarrow{f \circ j} & Y \end{array}$$

De imediato, isto nos dá $f \circ g = id_Y$. Afirmamos que $g \circ f \simeq id_{X'}$, o que nos mostrará que f é equivalência homotópica, tendo g como inversa. Dado um cilindro $cyl(X)$ qualquer, digamos obtido decompondo ∇ sob a forma $j \circ \iota$, observamos que $f : X \rightarrow Y$ admite propriedade de levantamento relativamente a $\iota : X \oplus X \rightarrow cyl(X)$. Diante disso, há homotopia $H : cyl(X) \rightarrow X$ que torna comutativo o segundo dos diagramas abaixo, garantindo o que havíamos afirmado. A recíproca segue a mesma linha, mas utiliza de mais passos. Para uma prova detalhada, veja o lema 4.24 à página 23 de [16]. \square

De posse do teorema de Whitehead, vamos mostrar que $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{HC}$ é localização de \mathbf{C} com respeito a classe das equivalências fracas. Por unicidade, isso implicará em $\mathcal{HC} \simeq \text{Ho}(\mathbf{C})$, que é a equivalência que procuramos. Como consequência, isto nos mostrará que *dois objetos numa categoria modelo tem o mesmo tipo de homotopia se, e somente se, possuem o mesmo tipo de homotopia formal*. Particularmente, se \mathbf{C} é 2-categoria dotada de um modelo, então *dois de seus morfismos serão homotópicos quando, e só quando, o forem formalmente*.

Iniciamos observando que, se $f : X \rightarrow Y$ é equivalência fraca, então $\mathcal{F}Cf$ é equivalência homotópica e, portanto, $\pi(f)$ é isomorfismo. Seja $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ outro functor satisfazendo esta mesma propriedade. Afirmamos haver $F_* : \mathcal{HC} \rightarrow \mathbf{D}$ cumprindo $F_* \circ \pi = F$. Em objetos, F_* é a identidade. Para defini-lo em morfismos, observemos o segundo dos diagramas abaixo, o qual foi obtido aplicando F ao primeiro deles. Devidamente motivados, colocando

$$F_*([f]) = F(j_y) \circ F(\iota_y)^{-1} \circ F(f) \circ F(\iota_x) \circ F(j_x)^{-1}$$

vê-se que $F_* \circ \pi = F$ é trivialmente satisfeita. Por sua vez, a comutatividade do segundo diagrama nos diz que todo mapa $F(f)$ na imagem do functor F deve ter precisamente a forma lá apresentada, o que garante a unicidade de F_* .

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\iota_x} CX & \xrightarrow{j_x} \mathcal{F}CX \\ f \downarrow & & \downarrow [f] \\ Y & \xleftarrow{\iota_y} CY & \xrightarrow{j_y} \mathcal{F}CY \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(X) & \xleftarrow{F(\iota_x)} F(CX) & \xrightarrow{F(j_x)} F(\mathcal{F}CX) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow F([f]) \\ F(Y) & \xleftarrow{F(\iota_y)} F(CY) & \xrightarrow{F(j_y)} F(\mathcal{F}CY) \end{array}$$

Observação 6.3.1. Numa categoria com equivalências fracas, nem todo isomorfismo de $\text{Ho}(\mathbf{C})$ provém de equivalências fracas. Quando este é o caso, diz-se que \mathbf{C} é *saturada* com respeito a

Weak. Por exemplo, toda 2-categoria é saturada com respeito às equivalências homotópicas. O resultado aqui demonstrado nos garante que qualquer categoria modelo é saturada relativamente às equivalências homotópicas formais.

Funtores Derivados

Uma vez que categorias homotópicas independem de fibrações e cofibrações, espera-se que a escolha de um determinado modelo não produza condições *necessárias* à existência de funtores derivados. Vejamos, no entanto, que cada modelo determina condições *suficientes* à existência de tais funtores.

Proposição 6.3.2. *Seja $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ um functor entre categorias com equivalências fracas. Para que LF exista, basta haver um modelo em \mathbf{C} com respeito ao qual F mapeia cofibração acíclicas entre objetos cofibrantes em equivalências fracas. Neste caso, $LF(X) \rightsquigarrow F(CX)$ seja qual for a resolução cofibrante \mathcal{C} .*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}F$ o functor que a cada X associa a imagem $F(CX)$ de F por uma resolução cofibrante, e que a cada morfismo f devolve $F(\mathcal{C}f)$. Se f é uma equivalência fraca, então $\mathcal{C}f$ é cofibração acíclica entre objetos cofibrantes, de modo que, pela hipótese, $\mathcal{C}F(f)$ também é equivalência fraca. Daí, $p' \circ \mathcal{C}F$ mapeia equivalências fracas em isomorfismos, de modo que, por universalidade da categoria homotópica de \mathbf{C} , existe um único functor $LF : \text{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathbf{C}')$, tal que $p \circ LF = p' \circ \mathcal{C}F$. Tem-se uma transformação natural $\xi : \mathcal{C}F \rightarrow F$, que a cada X faz corresponder a imagem de F por $CX \rightsquigarrow X$. Portanto, há também uma transformação natural entre $p' \circ \mathcal{C}F$ (que nada mais é que $p \circ LF$) e $p' \circ F$. Com ela, LF é universal e, portanto, functor derivado à esquerda de F . \square

Via dualização, obtém-se um resultado estritamente análogo ao anterior para funtores derivados à direita. Com efeito, para garantir a existência RF , é suficiente exibir um modelo em \mathbf{C} no qual F leva fibrações acíclicas entre objetos fibrantes em equivalências fracas. Nele, tem-se $RF(X) \rightsquigarrow F(\mathcal{F}X)$ independentemente da escolha da resolução fibrante \mathcal{F} .

Limites Homotópicos

Os limites homotópicos são os funtores derivados à esquerda de $\lim : \text{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$. Até o momento, apesar de sabermos que eles sempre existem, não temos uma maneira prática de calculá-los. Com isto em mente, observemos o seguinte: suponhamos que para uma certa categoria \mathbf{J} haja um modelo em $\text{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C})$. Neste caso, pela unicidade das extensões de Kan e pela última proposição, tem-se

$$\text{hlim}(F) \rightsquigarrow \lim(\mathcal{C}F) \quad \text{e} \quad \text{hcolim}(F) \rightsquigarrow \text{colim}(\mathcal{F}F)$$

sejam quais forem o functor $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, a resolução cofibrante \mathcal{C} e a resolução fibrante \mathcal{F} . Assim, sob tal hipótese, a menos de equivalências fracas, o limite e o colimite homotópico de F podem ser obtidos em termos de limites e colimites usuais.

Posto isto, procuremos por modelos em $\text{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C})$. Vimos que, se \mathbf{C} é própria para homotopia, então $\text{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C})$ também o é, qualquer que seja a categoria \mathbf{J} : suas equivalências fracas são as transformações naturais ξ tais que $\xi(X)$ é equivalência fraca de \mathbf{C} para todo X . Assim, a

ideia imediata é propor como fibrações ou cofibrações de $\text{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C})$ as transformações ξ em que $\xi(X)$ é fibração ou cofibração de \mathbf{C} .

Quando a categoria \mathbf{C} satisfaz condições favoráveis (veja a secção A.3.3 de [49]), tais suspeitas se concretizam. Mais precisamente, existem dois modelos em $\text{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C})$, chamados de *modelo injetivo* e de *modelo projetivo*, sendo tais que: no primeiro (resp. segundo) deles as fibrações (resp. cofibrações) são precisamente as transformações ξ , em que $\xi(X)$ é fibração (resp. cofibração) de \mathbf{C} para cada X .

Sequências Longas

A menos de equivalências fracas, algumas classes de limites homotópicos podem ser calculados sem a necessidade de haver um modelo em $\text{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C})$. Este é o caso, por exemplo, dos *pullbacks* e dos *pushouts* homotópicos. Com efeito, para calcular o *pullback* homotópico entre $f : X \rightarrow Y$ e $g : X' \rightarrow Y$, basta substituir cada um dos objetos e um dos mapas (f ou g) por uma resolução fibrante, e então computar o limite do diagrama obtido. Numa categoria cujos objetos são todos fibrantes, basta realizar a troca de um dos mapas. Condições duais são válidas para os *pushouts* homotópicos. Remetemos o leitor à secção A.2.4 de [49] e à secção 13.3 de [34].

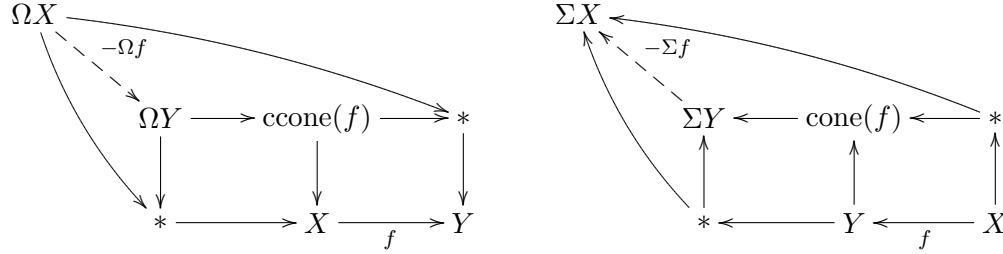
$$\begin{array}{ccccc}
 & X' & & CX' & & CX' \\
 & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \quad \mathcal{C} \longrightarrow & CY & \quad \text{path}(CY) \longrightarrow & CY \\
 & & & & & \downarrow & \\
 & & & & & CX & \longrightarrow & CY
 \end{array}$$

Acima ilustramos os passos concernentes à substituição dos objetos e de um dos morfismos por suas versões fibrantes (não há diferença em substituir f ou g , como logo se convence). É possível realizar o cálculo do diagrama final de duas maneiras, apresentadas abaixo. Na primeira delas, efetua-se dois *pullbacks*. Na segunda, efetua-se três. O objeto $\text{ccyl}(f)$ ali apresentado chama-se *mapping path space* de f . O objeto dual, que surge durante o cálculo de *pushouts* homotópicos, é chamado de *mapping cylinder* e denotado por $\text{cyl}(f)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{HPb} \cdots \cdots \cdots > \text{ccyl}(f) \cdots \cdots > CX' & & \text{HPb} \cdots \cdots \cdots > \text{ccyl}(f) \cdots \cdots > CX' \\
 \vdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & \text{path}(CY) \longrightarrow CY & & \text{ccyl}(g) \cdots \cdots > \text{path}(CY) \longrightarrow CY & & \\
 \vdots & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 CX \longrightarrow CY & & & CX \longrightarrow CY & &
 \end{array}$$

Como consequência, *mapping cones*, *mapping cocones*, suspensões e *loops* podem todos ser comutados através de *pullbacks* e *pushouts* usuais. Por universalidade, existem, então, os mapas

$-\Omega f$ e $-\Sigma f$ abaixo apresentados.



Iterando o primeiro diagrama, conclui-se que qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$, definido na pontuação \mathbf{C}_* de uma categoria modelo \mathbf{C} , a qual supomos ser formada somente por objetos fibrantes, origina a seguinte sequência:

$$\cdots \longrightarrow \Omega ccone(f) \longrightarrow \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \longrightarrow ccone(f) \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

A ela se dá o nome de *sequência de fibrações* f . De maneira análoga, agora supondo que a categoria em questão é formada de objetos cofibrantes, ao se iterar o *pushout* representado no segundo dos diagramas acima, encontra-se a *sequência de cofibrações* de f :

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow cone(f) \longrightarrow \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \longrightarrow \Sigma cone(f) \longrightarrow \cdots$$

Observamos que, para qualquer que seja o objeto $Z \in \mathbf{C}_*$, aplicando $[Z; -]_{\mathbf{C}_*}$ na sequência de fibrações de um morfismo $f : X \rightarrow Y$, obtém-se uma sequência exata em **Set**. Dualmente, se aplicamos $[-; Z]_{\mathbf{C}_*}$ na sequência de cofibrações, também obtemos uma sequência exata de conjuntos. Para detalhes, veja a secção 6.5 de [31].

Adjunções de Quillen

Procura-se por uma noção de isomorfismo entre categorias modelo. Uma vez que a estrutura fundamental subjacente é a categoria homotópica, a correspondente noção de isomorfismo deverá implicar numa equivalência a nível das categorias homotópicas. Por sua vez, não se deve esperar a validade recíproca, pois a categoria homotópica descreve apenas aproximadamente a categoria ordinária.

O *insight* imediato é considerar os funtores homotópicos. Esta, no entanto, como já discutido anteriormente, é uma exigência muito restritiva. A próxima ideia é então considerar funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ tais que LF existe e é equivalência entre as categorias homotópicas. A inversa de F deveria ser sua versão dual: um functor $G : \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{C}$ tal que RG existe e é precisamente a inversa fraca de LF . Espera-se que G seja univocamente determinado por F . Isto se obtém exigindo que ele seja adjunto de F .

Depois destas considerações, definamos: duas categorias modelo \mathbf{C} e \mathbf{C}' são ditas *Quillen adjuntas* quando existem funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ e $G : \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{C}$, os quais são adjuntos e preservam, respectivamente, cofibrações acíclicas e fibrações acíclicas. Pela proposição 6.3.2, esta última condição garante a existência de LF e RG . Por sua vez, diz-se que \mathbf{C} e \mathbf{C}' são *Quillen equivalentes* quando LF e RG são equivalências, sendo um a inversa fraca do outro.

Observação 6.3.2. Será toda equivalência entre categorias homotópicas uma verdadeira equivalência de Quillen? A resposta é negativa. Um contraexemplo é dado em [11].

Capítulo 7

n -Categorias

Na primeira secção deste capítulo, generalizamos o conceito de categoria e consideramos entidades formadas não só de objetos e morfismos entre eles, mas também de “morfismos entre morfismos” (chamados de *homotopias*), de morfismos entre homotopias, e assim sucessivamente. Isto nos dá a ideia intuitiva de ω -categoria fraca. A secção termina com uma discussão acerca da dificuldade de formalização de tal conceito e com a apresentação de uma família particular de ω -categorias fracas: as $(\infty, 1)$ -categorias, cujos morfismos de grau superior são sempre isomorfismos. Nelas se tem uma maneira natural de definir sua correspondente categoria homotópica.

A segunda secção é marcada pela introdução de categorias cujos objetos são “combinatórios”, a partir da qual estabelecemos uma estratégia para formalizar o conceito de ω -categoria fraca, ao mesmo tempo que apresentamos um modelo para as $(\infty, 1)$ -categorias.

Finalmente, na terceira secção efetivamos uma construção que nos permite associar a cada categoria com equivalências fracas uma $(\infty, 1)$ -categorias, produzindo o seguinte slogan: *as categorias próprias para o estudo da homotopia são, precisamente, aquelas nas quais se tem a noção coerente de homotopia entre morfismos*.

Diferentemente dos capítulos anteriores, este não foi escrito seguindo de perto uma ou outra referência: utilizou-se de um apanhado delas. Ainda assim, pode-se dizer que os tópicos aqui abordados são cobertos pelos textos [9, 49, 25].

7.1 Estrutura

Vimos que uma 2-categoria estrita \mathbf{C} é aquela na qual há a noção “morfismos entre morfismos”, chamados de homotopias, que podem ser compostos de duas maneiras distintas e sendo tais que, junto de cada uma delas, tem-se uma nova categoria.

Assim, pode-se pensar numa 2-categoria como sendo aquela em que cada $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ possui a estrutura de categoria, aqui denotada por $\text{Enr}_{\mathbf{C}}(X; Y)$. Seus morfismos são precisamente as homotopias, ao passo que suas leis de composição correspondem à composição horizontal. Finalmente, referindo à composição vertical, é preciso que se tenha uma regra que toma homotopias e devolve uma outra. Em outras palavras, dados $X, Y, Z \in \mathbf{C}$, é preciso obter funtores

$$\circ : \text{Enr}_{\mathbf{C}}(X; Y) \times \text{Enr}_{\mathbf{C}}(X; Y) \rightarrow \text{Enr}_{\mathbf{C}}(X; Y). \quad (7.1)$$

que cumpram com associatividade e que preservam identidades. Assim, em suma, uma 2-categoria

estrita é aquela que pode ser obtida mediante o seguinte procedimento:

1. parte-se de uma categoria \mathbf{C} e mantém-se seus objetos;
2. substitui-se cada conjunto $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ por um objeto $\text{Enr}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ de \mathbf{Cat} ;
3. para cada terna de objetos de \mathbf{C} associa-se um morfismo \circ de \mathbf{Cat} , como apresentado em 7.1, o qual é associativo e preserva identidades.

Observamos que o procedimento acima possui sentido se substituirmos (\mathbf{Cat}, \times) por qualquer outra categoria monoidal (\mathbf{V}, \otimes) . As entidades assim obtidas chamam-se *categorias enriquecidas sobre \mathbf{V}* .

Exemplo 7.1.1. As categorias usuais são aquelas enriquecidas sobre \mathbf{Set} , ao passo que as 2-categorias estritas são aquelas enriquecidas sobre \mathbf{Cat} .

Exemplo 7.1.2. Toda categoria \mathbf{C} pode ser trivialmente enriquecida sobre qualquer \mathbf{V} : basta substituir cada $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ pelo objeto neutro $1 \in \mathbf{V}$ e considerar os morfismos \circ todos dados pelo isomorfismo $1 \otimes 1 \simeq 1$. Para \mathbf{Cat} , isto traduz o fato de que toda categoria é uma 2-categoria estrita trivial, tendo como 2-morfismos somente as identidades.

Observamos que um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ entre duas categorias quaisquer pode ser pensado como sendo composto de uma regra que mapeia objetos em objetos, e, para quaisquer X, Y , de uma outra função

$$F_{xy} : \text{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{D}}(F(X); F(Y)),$$

que preserva composição e identidades. Por sua vez, quando as categorias \mathbf{C} e \mathbf{D} estão enriquecidas sobre uma mesma estrutura monoidal \mathbf{V} , seus “conjuntos” de morfismos são, na verdade, *objetos* de \mathbf{V} . Portanto, em tal situação, é natural supor que as regras F_{xy} sejam *morfismos* em \mathbf{V} , e não funções como no caso usual. Isto nos leva ao conceito de functor enriquecido.

Com efeito, um *functor enriquecido* entre categorias \mathbf{C} e \mathbf{D} , ambas enriquecidas sobre uma mesma estrutura monoidal \mathbf{V} , é consistido de uma regra F , que manda objetos em objetos, e, para cada par $X, Y \in \mathbf{C}$, de um correspondente morfismo

$$F_{xy} : \text{Enr}_{\mathbf{C}}(X; Y) \rightarrow \text{Enr}_{\mathbf{D}}(F(X); F(Y)),$$

em \mathbf{V} , o qual preserva composições e unidades. Obtém-se uma categoria $\text{Enr}(\mathbf{V})$, formada de categorias e funtores enriquecidos. Por exemplo, quando $\mathbf{V} = \mathbf{Set}$, recaímos em \mathbf{Cat} .

Tal categoria pode ser feita monoidal de maneira natural. Desta forma, é possível falar de categorias enriquecidas sobre $\text{Enr}(\mathbf{V})$. Em outras palavras, é possível iterar o processo de enriquecimento sobre uma categoria monoidal fixa, de modo a obter uma sequência

$$\cdots \longrightarrow n\text{-Enr}(\mathbf{V}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow 2\text{-Enr}(\mathbf{V}) \longrightarrow 1\text{-Enr}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbf{V}.$$

Para $\mathbf{V} = \mathbf{Set}$, o n -ésimo termo da sequência é denotado por \mathbf{SCat}_n . Seus objetos são chamados de *n -categorias estritas*. Assim, uma 0-categoria estrita é simplesmente um conjunto, ao mesmo tempo que as 1-categorias estritas coincidem com as categoriais usuais, e as 2-categorias estritas são aquelas já apresentadas no último capítulo. Tem-se então definido um sistema co-dirigido em \mathbf{Cat} , cujo limite é a categoria \mathbf{SCat}_{ω} das *ω -categorias estritas*.

Se uma 2-categoria estrita é aquela na qual se tem objetos, morfismos e 2-morfismos, os quais podem ser compostos de duas maneiras distintas, uma 3-categoria estrita é aquela em que, além de toda essa informação categórica, tem-se também 3-morfismos, os quais admitem três distintas formas de composição. Indutivamente, uma ω -categoria estrita é aquela formada de objetos, morfismos, 2-morfismos, 3-morfismos e assim sucessivamente. Um n -morfismo pode ser composto de n diferentes formas.

Relembramos que um 2-functor é aquele que preserva não só objetos e morfismos, mas também 2-morfismos e suas correspondentes composições. Analogamente, um mapeamento de \mathbf{SCat}_n é um n -functor. Isto é, uma regra entre n -categorias que preserva todas as estruturas envolvidas: objetos, cada uma das classes de morfismos e cada uma das composições.

Exemplo 7.1.3. No sexto capítulo, vimos que qualquer categoria \mathbf{C} pode ser estendida de modo a se tornar uma 2-categoria. Com efeito, bastava-nos considerar como 2-morfismos os quadrados comutativos de \mathbf{C} (isto é, os morfismos de $\mathcal{B}(\mathbf{C})$). Vejamos agora que esta extensão pode ser continuada de modo a transformar qualquer categoria numa ω -categoria. Se 2-morfismos são quadrados comutativos, a ideia é considerar 3-morfismos como “cubos comutativos”, e assim sucessivamente. De maneira mais precisa, para cada n , a inclusão $\mathbf{SCat}_n \rightarrow \mathbf{Cat}$ possui um adjunto à esquerda. Em outras palavras, *seja qual for o n , a teoria das n -categorias estritas é livremente gerada pela teoria das categorias usual.*

Iniciamos o quarto capítulo tratando do procedimento de *categorificação*. Recordamos que ele possui um viés oposto ao problema de *classificação*. Com efeito, se por um lado classificar uma categoria significa encontrar um conjunto que a traduz, por outro, categorificar um conjunto significa determinar uma categoria que o engloba. Assim, classificar implica em *perder* informação categórica, ao passo que categorificar faz com que a *ganhemos*. Nesse sentido, pode-se pensar numa 2-categoria estrita como sendo simplesmente uma categorificação das categorias usuais, e assim por diante. Em suma: *enriquecer sobre \mathbf{Set} é categorificar.*

Enfraquecimento

Na definição de 2-categoria estrita (e, conseqüentemente, na definição de n -categoria estrita), exigiu-se que os funtores o cumprissem com associatividade e que preservassem identidades. Isto se traduziu em igualdades entre funtores, algo que já discutimos ser uma restrição muito forte. Ao invés disso, se exigíssemos apenas associatividade e preservação de identidades módulo isomorfismos naturais, chegaríamos ao conceito de *2-categoria fraca*.

A ideia seria então proceder de maneira indutiva, definindo n -categorias fracas e, depois de uma tomada de limite, ∞ -categorias fracas. Uma tal entidade consistir-se-ia de objetos, morfismos entre objetos, 2-morfismos entre morfismos, e assim sucessivamente. Entretanto, diferentemente do que acontece numa ω -categoria estrita, morfismos seriam associativos e preservariam identidades apenas módulo 2-isomorfismos, ao passo que 2-morfismos o fariam a menos de 3-isomorfismos, *ad infinitum*.

Sob este ponto de vista, seguindo o raciocínio construído no caso estrito, a passagem indutiva de uma $(n - 1)$ -categoria fraca para uma n -categoria fraca deveria ser dada num processo de “enriquecimento fraco”. Sua construção é delicada, sendo introduzida em [82] e recentemente generalizada (ano 2012) em [8].

Em contrapartida, com o objetivo de definir ω -categorias fracas, ao invés de se tentar enfraquecer o conceito de n -categoria estrita e depois tomar o limite $n \rightarrow \infty$, poder-se-ia pensar em tomar tal limite estrito e enfraquecer o resultado final. Seguindo tal estratégia, diversas propostas de definições para ω -categorias fracas foram apresentadas. Um comparativo entre dez delas (publicado no ano 2002) pode ser encontrado em [45]. Veja também os livros [47, 9]. Ao que parece, até o momento não se tem um consenso sobre qual definição utilizar. Na próxima subsecção, discutiremos uma estratégia padrão para obtê-las.

A ideia é essencialmente a seguinte: vimos que as categorias usuais geram todas as ω -categorias estritas. Procura-se, então, por categorias \mathbf{C} que gerem \mathbf{Cat} (e, portanto, \mathbf{SCat}_ω) e que tenham uma caracterização “fácil de enfraquecer”. Define-se, então, uma ω -categoria fraca como sendo aquela que é gerada por entes que satisfazem propriedades enfraquecidas de objetos de \mathbf{C} . Por exemplo (que é justamente o que obteremos na próxima secção), pode ser que os objetos da categoria \mathbf{C} obtida sejam caracterizados por um problema de extensão *única*. Com isso em mãos, considera-se como ω -categorias fracas aquelas geradas pelos objetos que satisfazem o mesmo problema de levantamento, só que abonados da exigência de unicidade.

Uma vez com o conceito de ω -categoria fraca em mãos, pode-se falar de (∞, n) -categorias. Estas são simplesmente classes particulares de ω -categorias fracas tais que todo m -morfismo, com $m > n$, é um m -isomorfismo. Por exemplo, as $(\infty, 0)$ -categorias, chamadas de ∞ -grupóides, são aquelas em que qualquer n -morfismo é uma equivalência. Intuitivamente, o processo de enriquecimento fraco sobre as (∞, n) -categorias deve produzir uma $(\infty, n+1)$ -categoria.

Em uma $(\infty, 1)$ -categoria, a relação que identifica 1-morfismos que podem ser ligados por 2-morfismos é de equivalência. Isto nos permite generalizar aquilo que foi feito para as 2-categorias: a cada $(\infty, 1)$ -categoria \mathbf{C} faz-se corresponder uma nova categoria $\mathcal{H}\mathbf{C}$, cujos objetos são os mesmos que os de \mathbf{C} e cujos morfismos são as classes de 1-morfismos.

Como consequência, toda $(\infty, 1)$ -categoria torna-se própria para o estudo da homotopia de maneira natural: basta considerar como equivalências fracas os 1-morfismos cujas classes são isomorfismos em $\mathcal{H}\mathbf{C}$. Diante disso, tem-se uma cadeia de categorias

$$\mathbf{SCat}_2 \subset \mathbf{Cat}_\infty^1 \subset \mathbf{WCat}.$$

No final do capítulo, associaremos a cada categoria com equivalências fracas \mathbf{C} uma $(\infty, 1)$ -categoria $\mathrm{Ext}^\infty L\mathbf{C}$, de tal modo que $\mathcal{H}(\mathrm{Ext}^\infty L\mathbf{C}) \simeq \mathrm{Ho}(\mathbf{C})$. Isto nos dará o seguinte slogan: *as categorias próprias para o estudo da homotopia são, precisamente, aquelas nas quais se tem uma noção coerente de homotopia entre morfismos.*

7.2 Simplexos

Como já comentado, se a categoria \mathbf{C} é completa e cocompleta, então todo $F : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{C}$ admite extensão de Kan $|\cdot| : \mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{C}$ relativamente a qualquer $p : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$ e, em particular, com respeito ao mergulho de Yoneda $h_- : \mathbf{S} \rightarrow \mathrm{Func}(\mathbf{S}^{op}; \mathbf{Set})$. Esta última é chamada de *realização geométrica* induzida por F . Como pode ser conferido em [67], tal realização possui um adjunto, ao qual denominaremos *nervo de F* , sendo dado pelo functor $N : \mathbf{C} \rightarrow \mathrm{Func}(\mathbf{S}^{op}; \mathbf{Set})$, que em objetos é caracterizado pelas composições $N(X) = h_X \circ F^{op}$.

Observamos que a realização $|\cdot|$ é extensão de Kan ao longo de h_- e, portanto, pode ser

descrita em termos de *coends*. Com efeito, para qualquer functor $\alpha : \mathbf{S}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, tem-se

$$|\alpha| \simeq \int^S \text{Nat}(h_S; \alpha) \cdot F(S). \quad (7.2)$$

Diz-se que uma subcategoria $\mathbf{S} \subset \mathbf{C}$ é *densa* quando o nervo da inclusão $\iota : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{C}$ é um mergulho e, consequentemente, uma equivalência sobre sua imagem. Isto significa que cada objeto de \mathbf{C} pode ser visto como um functor de \mathbf{S}^{op} em \mathbf{Set} cumprindo determinadas condições. Em outras palavras, observando que ι é mergulho se, e somente se, $N(|\alpha|) \simeq \alpha$ para cada α , a subcategoria $\mathbf{S} \subset \mathbf{C}$ é densa precisamente quando todo objeto de \mathbf{C} pode ser *construído*, por meio de (7.2), através de objetos de \mathbf{S} .

Exemplo 7.2.1. Dado um corpo \mathbb{K} , a subcategoria $\mathbf{FVec}_{\mathbb{K}} \subset \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ dos \mathbb{K} -espaços de dimensão finita é densa, o que expressa a possibilidade de se escrever qualquer espaço vetorial como o limite de seus subespaços de dimensão finita.

Exemplo 7.2.2. A subcategoria das variedades difeomorfas a algum \mathbb{R}^n é densa em **Diff**. Afinal, toda variedade é obtida colando regiões difeomorfas a abertos de espaços euclidianos.

Como comentamos na subsecção anterior, existem diversas maneiras de definir o que vem a ser uma ω -categoria fraca. Há uma estratégia comum que permeia várias destas definições. A ideia é buscar por subcategorias densas $\mathbf{S} \subset \mathbf{SCat}_{\omega}$, permitindo-nos identificar ω -categorias estritas com funtores $\mathbf{S}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ cumprindo certas propriedades. Assim, pode-se definir uma ω -categoria fraca como sendo um functor $\mathbf{S}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ que satisfaz propriedades “enfraquecidas” se comparadas com aquelas que caracterizam as ω -categorias estritas.

De um modo geral, escolhe-se categorias \mathbf{S} cujos objetos são combinatórios. Adotaremos esta postura e trabalharemos com a categoria $s\mathbf{Set}$ dos *conjuntos simpliciais*, introduzida na próxima subsecção. Do ponto de vista histórico, ela foi a primeira a ser adotada. Em contrapartida, ela é natural em diversos outros aspectos, como ficará claro ao longo do texto.

Objetos Simpliciais

Seja Δ a categoria gerada pelos conjuntos de números naturais $[n] = \{0, \dots, n\}$, parcialmente ordenados por inclusão. Seus morfismos são as aplicações $f : [n] \rightarrow [m]$ tais que $f(i) \leq f(j)$ sempre que $i \leq j$. Existem duas subcategorias evidentes Δ_+ e Δ_- , respectivamente compostas dos morfismos injetivos e sobrejetivos de Δ . Estes satisfazem certas relações de compatibilidade, as quais não utilizaremos aqui (veja a quinta secção do capítulo VII de [51], o primeiro capítulo [57], a secção 8.1 de [86] ou qualquer livro mais moderno de homotopia simplicial, como [25]).

Todo morfismo de Δ pode ser decomposto em termos de um morfismo de Δ_+ seguido de outro de Δ_- . Consequentemente, dar um functor $X : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{C}$ é o mesmo que dar uma sequência de objetos $X_n \in \mathbf{C}$ e morfismos $\partial_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ e $\sigma_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$, os quais satisfazem relações de compatibilidade. Tais funtores são chamados de *objetos simpliciais* de \mathbf{C} . O termo X_n recebe o nome de *n-símplice*, ao passo que os morfismos ∂_i e σ_i chamam-se, respectivamente, *operadores de face* e *operadores de degenerescência*. Há uma categoria $s\mathbf{C}$, formada de objetos simpliciais e de transformações naturais. Isto é, $s\mathbf{C} = \text{Func}(\Delta^{op}; \mathbf{C})$.

Há especial interesse nos objetos simpliciais de **Set**, aos quais se dá o nome de *conjuntos simpliciais*. Se X é um deles, fala-se que X_n é seu conjunto de *n-células*. A nomenclatura se

deve ao seguinte: pensa-se num conjunto simplicial como sendo uma sequência de objetos de diversas dimensões (vértices, arestas, faces, etc.) que podem ser “realizados geometricamente” e depois “colados”, formando um espaço específico. Assim, a estrutura do espaço como um todo fica determinada pela estrutura de suas partes, transformando um problema global numa questão combinatória. Em topologia, os espaços que podem ser obtidos por tal procedimento chamam-se *complexos celulares*. Exemplos são, evidentemente, os poliedros.

Num conjunto simplicial X , se pensamos em X_0 como coleção de vértices, em X_1 como família de arestas ligando vértices, em X_2 como lista faces completando arestas, e assim sucessivamente, conclui-se que os operadores ∂_i e s_i possuem um papel geométrico bastante claro. Com efeito, $\partial_i x$ nada mais é que a célula obtida retirando de x o i -ésimo vértice, ao passo que $s_i x$ é obtido repetindo o i -ésimo vértice. Por exemplo, se x é 2-célula (isto é, face), então $\partial_i x$ é aresta oposta ao i -ésimo vértice. Tendo isto em mente, diz-se que $x \in X$ é *face* ou *degenerescência* de uma outra célula $x' \in X$ quando $x = s_i x'$ ou $x = \partial_i x'$. Se inexistir x' tal que $x = s_i x'$, fala-se que a célula x é *não-degenerada*.

Quando \mathbf{C} é completa ou cocompleta, então o mesmo se passa com qualquer categoria de funtores que nela assume valores e, em particular, com $s\mathbf{C} = \text{Func}(\Delta^{op}; \mathbf{C})$. Além disso, tal hipótese faz de $s\mathbf{C}$ cartesianamente fechada. Com efeito, pelo discutido anteriormente, pela completude e co-completude de \mathbf{C} , o functor $F : \Delta \rightarrow s\mathbf{C}$, tal que $F([n]) = h_{[n]} \times Y$, induz adjuntos $|\cdot|$ e N em $s\mathbf{C}$. Como a realização geométrica $|\cdot|$ é extensão de Kan de F , tem-se $h_{[n]} \times Y = |h_{[n]}|$, donde $|\cdot| = - \times Y$, garantindo o afirmado. Por sua vez, se \mathbf{C} possui uma estrutura monoidal definida por um bifunctor \otimes , então esta induz uma estrutura monoidal em $s\mathbf{C}$, tal que n -ésima símplice de $X \otimes X'$ nada mais é que $X_n \otimes X'_n$.

Estes fatos ressaltam a importância de $s\mathbf{Set}$: ela é completa, cocompleta, cartesianamente fechada e naturalmente monoidal.

Conjuntos Compliciais

Tem-se um mergulho natural $\iota : \Delta \rightarrow \mathbf{Cat}$, o qual vê cada $[n]$ como uma categoria formada de um só objeto. A correspondente subcategoria $\Delta \subset \mathbf{Cat}$ é densa. Daí, qualquer categoria pode ser construída em termos dos $N_s([n]) = h_{[n]}$, respectivamente denotados por Δ^n e denominados *simplexos padrões* ($N_s : \mathbf{Cat} \rightarrow s\mathbf{Set}$ é chamado de *nervo simplicial*).

É possível “orientar” cada Δ^n de tal maneira que, para todo n , as possíveis orientações do simplexo Δ^n gerem uma ω -categoria estrita. Assim, há também um mergulho $\iota : \Delta \rightarrow \mathbf{SCat}_\omega$, apresentado pela primeira vez em [75], o qual induz adjunções N_ω e $|\cdot|_\omega$. No entanto, a respectiva subcategoria $\Delta \subset \mathbf{SCat}_\omega$ não é densa. Isto significa que o ω -nervo $N_\omega : \omega\text{-}\mathbf{SCat} \rightarrow s\mathbf{Set}$ pode não ser um mergulho e, conseqüentemente, pode não ser equivalência sobre sua imagem.

Tal fato impede que utilizemos da estratégia previamente mencionada para definir ω -categorias fracas em termos de conjuntos simpliciais satisfazendo alguma condição enfraquecida. Para contornar o problema, ainda em [75] as definições de ω -nervo e da respectiva realização geométrica foram ligeiramente estendidas de modo a assumirem valores na categoria dos *conjuntos simpliciais estratificados* $ss\mathbf{Set}$. Estes nada mais são que conjuntos simpliciais X nos quais se fixou um conjunto tX contendo todas as células degeneradas de X e nenhuma 0-célula.

Em [76], por sua vez, demonstrou-se que todo elemento na imagem de $N_\omega : \omega\text{-}\mathbf{SCat} \rightarrow ss\mathbf{Set}$ é equivalente a um *conjunto complicial*. Isto é, um conjunto simplicial que satisfaz certas propriedades *únicas* de extensão. Diante disso, conjecturou-se que o ω -nervo induz uma equivalência

entre $\omega\text{-SCat}$ e a categoria dos conjuntos compliciais. Observamos que, uma vez verificada esta conjectura, poder-se-ia definir ω -categorias fracas como aquelas cujo ω -nervo é um *conjunto complicial fraco*. Isto é, um conjunto simplicial que possui a referida propriedade de extensão, abonada da exigência de unicidade.

A conjectura em questão foi comprovada recentemente em [83] e os conjuntos compliciais fracos foram estudados em [84, 85]. Uma prova alternativa pode ser encontrada [73, 74].

Como havíamos dito na secção anterior, com a definição de ω -categoria fraca em mãos, pode-se falar (∞, n) -categorias. Isto significa que, dentro da nossa perspectiva, estas haverão de ser casos particulares de conjuntos compliciais fracos. Temos especial interesse nas $(\infty, 1)$ -categorias e nos ∞ -grupóides. Os conjuntos compliciais fracos que a eles correspondem são, respectivamente, as *quasi-categorias* e os *complexos de Kan*, os quais definimos na próxima subsecção. As referências padrões para o estudo de tais entidades são [49, 39]. Uma boa introdução é [29].

Observamos ainda que, sob a perspectiva apresentada, o ω -nervo permite identificar em qual classe uma dada categoria \mathbf{C} pertence: esta será uma ω -categoria fraca precisamente quando $N_\omega \mathbf{C}$ for um conjunto simplicial fraco. Por sua vez, ela será um $(\infty, 1)$ -categoria ou um ∞ -grupóide quando $N_\omega \mathbf{C}$ for uma quasi-categoria ou um complexo de Kan. Assim, se suspeitamos que \mathbf{C} possui estrutura em dimensão mais alta, para confirmá-la ou refutá-la, basta aplicar o ω -nervo e verificar em qual classe de conjuntos simpliciais ele se enquadra. Na medida em que a estrutura de \mathbf{C} for mais complicada, o correspondente $N_\omega \mathbf{C}$ também o será.

Ressaltamos a diferença entre o nervo simplicial e o ω -nervo: enquanto que o ω -nervo nos permite classificar toda a informação categórica de uma categoria, o nervo simplicial traduz apenas informações de “primeira ordem” (isto é, acerca dos objetos e dos 1-morfismos). Assim, se quisermos estudar apenas $(\infty, 1)$ -categorias e ∞ -grupóides, o nervo simplicial é suficiente. Em contrapartida, se quisermos analisar informação de maior calibre categórico, precisamos utilizar de N_ω . Por exemplo, mesmo que \mathbf{C} seja ω -categoria fraca (e não uma $(\infty, 1)$ -categoria), o nervo simplicial $N_s \mathbf{C}$ será uma quasi-categoria.

Complexos de Kan

Iniciamos observando que o functor $\iota : s\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, que a cada conjunto simplicial X associa a reunião disjunta de suas simplices, possui um adjunto $j : \mathbf{Set} \rightarrow s\mathbf{Set}$. Isto significa que faz sentido falar conjuntos simpliciais livremente gerados. Define-se o *i -ésimo bordo* de Δ^n como sendo o conjunto simplicial gerado pela i -ésima função injetiva de Δ_{n-1}^n . Seja Λ_n^k a reunião de todos (menos o k -ésimo) bordo de Δ^n . Isto é, seja Λ_n^k o conjunto simplicial gerado por todas (a não ser a k -ésima) aplicação injetiva de Δ_{n-1}^n .

Um *complexo de Kan* nada mais é que um conjunto simplicial X no qual, para cada $0 \leq k \leq n$, a respectiva inclusão $\iota : \Lambda_n^k \rightarrow \Delta^n$ possui a propriedade de extensão de morfismos de X . Vejamos que tais entidades são, como mencionado, modelos para a definição de ∞ -grupóides.

Proposição 7.2.1. *Complexos de Kan modelam ∞ -grupóides.*

Demonstração. A ideia é considerar n -células como n -morfismos. Mais precisamente, os objetos são as 0-células e os 1-morfismos entre $x, y \in X_0$ são as 1-células $f \in X_1$ tais que $\partial_0(f) = x$ e $\partial_1(f) = y$. Por sua vez, toma-se como 2-morfismos entre $f, g : x \rightarrow y$ as 2-células $H \in X_2$ satisfazendo as respectivas condições

$$\partial_0(H) = id_x, \quad \partial_1(H) = g \quad \text{e} \quad \partial_2(H) = f,$$

em que $s_0(id_x) = x$. Indutivamente, dados $(n-1)$ -morfismos α e α' , define-se um n -morfismo entre eles como sendo uma n -célula φ tal que

$$\partial_0(\varphi) = id, \quad \partial_1(\varphi) = id, \quad \text{até} \quad \partial_{n-1}(\varphi) = \alpha' \quad \text{e} \quad \partial_n(\varphi) = \alpha.$$

Para mostrar os Kan complexos são realmente ∞ -grupóides, devemos verificar que todo n -morfismo assim definido possui inversa. De fato, a propriedade de extensão dos $\iota : \Lambda_n^k \rightarrow \Delta^n$, com $k = 0, n$ implica na invertibilidade dos 1-morfismos. Por sua vez, a propriedade de extensão das outras inclusões, com $0 < k < n$, garantem a invertibilidade dos morfismos superiores. \square

Na proposição anterior, a propriedade de extensão das inclusões $\iota : \Lambda_n^k \rightarrow \Delta^n$, com $k = 0, n$ e $0 < k < n$, garantiu a existência de inversas fracas para 1-morfismos e morfismos de ordem superior. Diante disso, espera-se que os conjuntos simpliciais tais que as inclusões $\iota : \Lambda_n^k \rightarrow \Delta^n$, somente com $0 < k < n$, possuam a propriedade de extensão definam $(\infty, 1)$ -categorias. De fato, estes (usualmente chamados de *quasi-categorias*) são precisamente os modelos de $(\infty, 1)$ -categorias que advém na noção prévia de ω -categorias fracas enquanto conjuntos compliciais fracos.

7.3 Slogan

Nesta subsecção, construímos um functor $\text{Ext}^\infty : s\mathbf{Set} \rightarrow s\mathbf{Set}$ que nos permite substituir qualquer conjunto simplicial por um complexo de Kan e, portanto, por um ∞ -grupoide. Seguimos de perto a quarta secção do terceiro capítulo de [25]. A construção original é de [40].

Seja Pos_k^n a coleção de todas k -símplices não-degeneradas de Δ^n . Isto é, seja Pos_k^n a família das funções injetivas $[k] \rightarrow [n]$. Por exemplo, quando $k = n-1$, tal coleção coincide com o bordo de Δ^n . Na medida em que se aumenta o k , o número de funções injetivas diminuem, de modo que, para cada n , a respectiva coleção Pos_k^n dos Pos_k^n se torna parcialmente ordenada por inclusão. De maneira mais precisa, observando haver uma função injetiva $[k] \rightarrow [n]$ para cada subconjunto de cardinalidade $k+1$ de $[k]$, conclui-se que Pos^n se identifica ao conjunto das partes de $[n]$, ordenado por inclusão.

Tem-se functor $\Delta \rightarrow \mathbf{Pos}$, que a cada $[n]$ associa Pos^n . Compondo com o nervo simplicial, define-se um novo functor $\text{nd} : \Delta \rightarrow s\mathbf{Set}$. Este induz adjuntos $N : s\mathbf{Set} \rightarrow s\mathbf{Set}$ e $|\cdot| : s\mathbf{Set} \rightarrow s\mathbf{Set}$, que aqui serão respectivamente denotados por Ext e sd . Diz-se que $\text{sd}(X)$ é a *subdivisão baricêntrica* de X .

Existe um morfismo natural $X \rightarrow \text{Ext}(X)$, obtido como segue. Como $\Delta \subset \mathbf{Cat}$ é densa, toda categoria é descrita em termos dos simplexos padrões Δ^n . Consequentemente, tem-se $X \simeq \text{colim} \Delta^n$ para todo $X \in s\mathbf{Set}$. Sendo sd adjunto à esquerda, ele preserva todas as extensões de Kan à direita e, particularmente, os colimites. Daí, $\text{sd}(X) \simeq \text{colim} \text{sd}(\Delta^n)$. Há um mapa natural $f : \text{sd}(\Delta^n) \rightarrow \Delta^n$: considera-se $v : \text{Pos}^n \rightarrow [n]$, que a cada subconjunto de $[n]$ associa seu maior elemento. Põe-se, então, $f = N_s(v)$. Tomando o colimite, encontra-se um morfismo entre $\text{sd}(X)$ e X . Seu adjunto precisamente o morfismo $X \rightarrow \text{Ext}(X)$ procurado.

Utilizando de $\text{Ext}^k(X)$ para denotar o conjunto simplicial obtido por aplicações sucessivas do functor Ext , cada X determina um sistema dirigido

$$X \longrightarrow \text{Ext}(X) \longrightarrow \text{Ext}^2(X) \longrightarrow \text{Ext}^3(X) \longrightarrow \cdots$$

em $s\mathbf{Set}$, cujo colimite será denotado por $\mathrm{Ext}^\infty(X)$. Observamos que, como as construções envolvidas são functoriais, está bem definido um functor $\mathrm{Ext}^\infty : s\mathbf{Set} \rightarrow s\mathbf{Set}$.

Mostremos, por fim, o principal resultado da subsecção.

Proposição 7.3.1. *Para todo $X \in s\mathbf{Set}$, o conjunto simplicial $\mathrm{Ext}^\infty X$ é um complexo de Kan.*

Demonstração. Deve-se mostrar que as inclusões $\iota : \Lambda_n^k \rightarrow \Delta^n$ possuem a propriedade de levantamento de morfismos em $\mathrm{Ext}^\infty X$. Mais precisamente, para cada $\Lambda_n^k \rightarrow \mathrm{Ext}^\infty X$ deve-se obter um $\Delta^n \rightarrow \mathrm{Ext}^\infty X$ que deixa comutativo o segundo dos diagramas abaixo. A ideia da prova consiste-se na observação de que tal diagrama é obtido tomando o colimite daquele representado ao lado.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^i X & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{i+1} X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda_n^k & \longrightarrow & \Delta^n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^\infty X & \xrightarrow{id} & \mathrm{Ext}^\infty X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda_n^k & \longrightarrow & \Delta^n \end{array}$$

Mais precisamente, a ideia é mostrar que todo morfismo $\Lambda_n^k \rightarrow \mathrm{Ext}^i X$ se estende a um mapa $\Delta^n \rightarrow \mathrm{Ext}^{i+1} X$. Daí, ao se passar o limite $i \rightarrow \infty$, obtém-se o resultado procurado. Como Ext^i é a composição sucessiva de Ext , basta mostrar a condição de extensão para $i = 1$. Detalhes podem ser encontrados nas páginas 187-188 de [25]. \square

Prova do Slogan

Nesta subsecção, finalmente construiremos o slogan “as categorias próprias para o estudo da homotopia são, precisamente, aquelas nas quais se tem uma noção coerente de homotopia entre morfismos”, comentado na secção anterior.

Iniciamos observando que o functor Ext^∞ nos permite associar a cada categoria \mathbf{C} enriquecida sobre $s\mathbf{Set}$ uma categoria $\mathrm{Ext}^\infty \mathbf{C}$ enriquecida sobre os complexos de Kan, obtida substituindo os conjuntos simpliciais $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ pelos correspondentes $\mathrm{Ext}^\infty \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$. Como os complexos de Kan modelam ∞ -grupoides, está definida uma regra

$$\mathrm{Ext}^\infty : \mathrm{Enr}(s\mathbf{Set}) \rightarrow (\infty, 1)\text{-}\mathbf{Cat}.$$

A estratégia para o slogan gira entorno da construção de um functor $L : \mathbf{WCat} \rightarrow \mathrm{Enr}(s\mathbf{Set})$, que a cada categoria com equivalências fracas \mathbf{C} faz corresponder uma categoria $L\mathbf{C}$ enriquecida sobre $s\mathbf{Set}$, de tal maneira que $\mathcal{H}(\mathrm{Ext}^\infty L\mathbf{C}) \simeq \mathrm{Ho}(\mathbf{C})$. Como veremos em seguida, este functor existe, sendo usualmente chamado de *localização simplicial*. Remetemos o leitor aos trabalhos [13, 14, 15], onde ele foi introduzido e estudado.

Sabe-se associar um conjunto simplicial a cada categoria: basta aplicar o nervo N_s . Diante disso, para definir $L\mathbf{C}$, primeiro construímos uma regra que substitui os conjuntos de morfismos de \mathbf{C} por categorias e depois aplicaremos N_s em cada uma delas. A categoria associada ao conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$ é $\mathrm{Ham}_{\mathbf{C}}(X; Y)$: seus objetos são os *zig-zags*

$$X \leftarrow \rightsquigarrow A_1 \longrightarrow A_2 \leftarrow \rightsquigarrow A_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y,$$

ao passo que seus morfismos são os seguintes diagramas comutativos (ditos serem *hammocks*):

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \leftarrow \rightsquigarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \leftarrow \rightsquigarrow & A_3 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id \\
 X & \leftarrow \rightsquigarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \leftarrow \rightsquigarrow & B_3 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

Terminamos o capítulo com a

Proposição 7.3.2. *Para toda categoria \mathbf{C} própria para o estudo da homotopia, há uma equivalência entre sua categoria homotópica $\mathrm{Ho}(\mathbf{C})$ e a categoria homotópica $\mathcal{H}(\mathrm{Ext}^\infty \mathbf{LC})$ da $(\infty, 1)$ -categoria que lhe corresponde.*

Demonstração. Num conjunto simplicial X qualquer, a relação que identifica 0-células entre as quais há uma 1-célula é reflexiva e transitiva, mas pode não ser simétrica. No entanto, se X é complexo de Kan, então todo 1-morfismo (isto é, toda 1-célula ligando 0-células) possui inverso, donde a validade da simetria. Denotamos com $\pi_0(X)$ o espaço quociente da 0-símplice X_0 por tal relação. Esta construção se estende a um functor $\pi_0 : \mathbf{Kan} \rightarrow \mathbf{Set}$, definido na subcategoria cheia $\mathbf{Kan} \subset \mathbf{sSet}$ dos complexos de Kan. Enriquecendo ambos os lados vê-se, por sua vez, que tal functor se estende a um outro $\pi_0 : (\infty, 1)\text{-}\mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$. A cada categoria \mathbf{C} enriquecida sobre complexos de Kan ele faz corresponder a categoria com os mesmos objetos, sendo tal que $\mathrm{Mor}_{\pi_0 \mathbf{C}}(X; Y) = \pi_0 \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X; Y)$. Afirmamos que, $\pi_0(\mathrm{Ext}^\infty \mathbf{LC}) \simeq \mathcal{H}(\mathrm{Ext}^\infty \mathbf{LC})$. Como ambas possuem objetos iguais aos de \mathbf{C} , basta mostrarmos que elas também têm os mesmos morfismos. Por um lado, os morfismos em $\mathcal{H}(\mathrm{Ext}^\infty \mathbf{LC})$ são classes de 1-morfismos de $\mathrm{Ext}^\infty \mathbf{LC}$ ligados por 2-morfismos. Por outro, os n -morfismos de $\mathrm{Ext}^\infty \mathbf{LC}$ são precisamente as $(n - 1)$ -células da estrutura simplicial subjacente. Daí, as classes de 1-morfismos ligados por 2-morfismos coincidem com as classes de 0-células ligadas por 1-células, donde o afirmado. Posto isto, a demonstração termina ao notarmos que $\pi_0(\mathrm{Ext}^\infty \mathbf{LC})$ é localização de \mathbf{C} com respeito às equivalências fracas, donde $\pi_0(\mathrm{Ext}^\infty \mathbf{LC}) \simeq \mathrm{Ho}(\mathbf{C})$. \square

Capítulo 8

Homotopia Clássica

No presente capítulo, desenvolvemos a *teoria da homotopia clássica*. Em outras palavras, estudamos as propriedades homotópicas de subcategorias convenientes \mathcal{C} de **Top**. Tais subcategorias se caracterizam por serem completas e cocompletas (propriedades herdadas de **Top**) e por terem pontuação fechada e simétrica com respeito a estrutura monoidal definida pelo correspondente produto *smash*. Esta última propriedade é extremamente importante dentro da teoria e impede que tomemos $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$.

Na primeira secção, mostramos que as categorias convenientes admitem cilindros e espaços de caminhos naturais e adjuntos, permitindo-nos ali introduzir um modelo. Verificamos, ainda, que para tais categorias o *slogan* “categorias com cilindros naturais são protótipos de $(\infty, 1)$ -categorias” se aplica fielmente. Finalmente, damos um olhar intuitivo às homotopias deste modelo, o qual nos permite analisar melhor a diferença entre limites e limites homotópicos.

Como temos afirmado desde o início, a Topologia Algébrica tem o objetivo de construir invariantes topológicos poderosos por métodos puramente algébricos. É na segunda secção que nos deparamos com os primeiros exemplos de tais invariantes. Tratam-se, pois, dos *grupos de homotopia*. Eles estão associados à funtores $\pi_i : \mathcal{H}\mathcal{C}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ e são poderosos o suficiente para que finalmente consigamos discernir o toro da esfera.

Pelo justo fato dos grupos de homotopia serem bastante poderosos, eles também são tremendamente difíceis de serem calculados. Tecnicamente isto se deve ao fato dos funtores π_i preservarem poucos limites/colimites homotópicos. Na terceira e última secção, discutimos esta inconveniência prática e apresentamos algumas ferramentas das existentes que nos ajudam a efetivar alguns cálculos.

Para o estudo e escrita deste capítulo, fizemos uso sistemático das referências [77, 55, 56], as quais tratam o assunto mais ou menos do ponto de vista que adotamos. Outras referências clássicas sobre teoria da homotopia, as quais assumem uma postura ligeiramente distinta daquela aqui empregada, incluem [27, 36, 70, 87].

8.1 Estrutura

Uma categoria \mathcal{C} é *conveniente* para se estudar topologia algébrica quando:

1. é completa e cocompleta;

2. a sua pontuação \mathcal{C}_* é fechada e simétrica com respeito ao produto *smash* definido através de produtos binários.

A primeira condição é satisfeita por **Top**. No entanto, como vimos anteriormente, seu o produto *smash* em geral não é associativo, de modo que **Top**_{*} não cumpre com a segunda das requisições. A ideia é, então, buscar por subcategorias $\mathcal{C} \subset \mathbf{Top}$ que satisfaçam ambas. Um exemplo foi introduzido por Steenrod em [72]. Ele é construído a partir da subcategoria cheia $\mathcal{CG} \subset \mathbf{Top}$ dos espaços que são *compactamente gerados*. Isto significa que $U \subset X$ é aberto se, e somente se, $U \cap K$ é aberto de $K \subset X$, sempre que este é compacto. Aqui se enquadram, por exemplo, os espaços métricos e as variedades.

Claramente, todo conjunto pode ser dotado de uma topologia τ que o torna compactamente gerado. Portanto, a inclusão $\iota : \mathcal{CG} \rightarrow \mathbf{Top}$ possui um adjunto à esquerda $\kappa : \mathbf{Top} \rightarrow \mathcal{CG}$, responsável por substituir a topologia de cada espaço X por τ . Sua imagem pela subcategoria dos espaços Hausdorff constitui uma categoria \mathcal{C} satisfazendo as condições requisitadas, como justificamos em seguida.

Já que κ possui adjunto à esquerda, \mathcal{C} é completa e seus limites são as imagens por κ dos limites em **Top**. Por sua vez, como ι tem adjunto à direita, \mathcal{C} também é cocompleta e seus colimites são os próprios colimites de **Top**. Assim, \mathcal{C} cumpre com a primeira das requisições.

Fixados $X, Y \in \mathcal{C}$, consideremos o espaço $\text{Map}(X; Y) \in \mathcal{C}$ obtido introduzindo a topologia compacto-aberta no conjunto das funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e depois fazendo agir κ . Para qualquer $Z \in \mathcal{C}$, tem-se bijeções

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X \times Y; Z) \simeq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X; \text{Map}(Y; Z)),$$

mostrando-nos que \mathcal{C} é cartesianamente fechada e, em particular, enriquecida sobre si mesma. Como consequência, o produto *smash* introduz uma estrutura monoidal fechada e simétrica em \mathcal{C}_* , de modo que \mathcal{C} cumpre com a segunda das requisições e, de fato, é conveniente ao estudo da topologia algébrica.

Sendo \mathcal{C} cartesianamente fechada, $Y \wedge X$ possui adjunto dado pelo o *pullback* abaixo. Uma vez que limites em \mathcal{C}_* são computados como limites de \mathcal{C} , e estes, por sua vez, são as imagens dos limites de **Top** por κ , segue-se que, identificando elementos de **Top**_{*} com pares (X, x_o) , tem-se a identificação entre $\text{Map}_*(X; Y)$ e $(\text{Map}_{\mathcal{C}_*}(X; Y), f_o)$. Aqui, $\text{Map}_{\mathcal{C}_*}(X; Y)$ é o subespaço de $\text{Map}(X; Y)$, formado de toda $f : X \rightarrow Y$ contínua e cumprindo $f(x_o) = y_o$, ao passo que f_o é a função constante e igual a y_o .

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_*(X; Y) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Map}(X; Y) & \longrightarrow & \text{Map}(*; Y). \end{array}$$

Maiores detalhes a respeito de κ podem também ser encontrados no capítulo oito de [27] e entre as páginas 21-27 de [87]. Veja também [78].

Advertência. No que segue, a menos de explícita menção em contrário, trabalharemos sempre na categoria conveniente \mathcal{C} dos espaços Hausdorff e compactamente gerados.

Modelo

A categoria \mathcal{C} possui cilindros naturais, os quais são dados pelo functor $C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, que a cada X faz corresponder o espaço produto $X \times I$, e pelas transformações naturais n_0 e n_1 entre $id_{\mathcal{C}}$ e C , definidas por $n_0(X)(x) = (x, 0)$ e $n_1(X)(x) = (x, 1)$. Como logo se convence, todos os objetos de \mathcal{C} são C -cofibrantes. Daí, pelo lema de fatoração, qualquer $f : X \rightarrow Y$ pode ser escrito na forma $f = \iota \circ j$, em que ι é uma C -cofibrção.

Em \mathcal{C} também existem espaços de caminhos naturais, obtidos do functor $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, que a cada X associa $\text{Map}(I; X)$, e das transformações p_0 e p_1 , de P em $id_{\mathcal{C}}$, caracterizadas por $p_0(X)(f) = f(0)$ e $p_1(X)(f) = f(1)$, em que $f : I \rightarrow X$. Os objetos de \mathcal{C} são todos P -fibrantes, de modo que qualquer morfismo é decomposto na forma $\iota \circ j$, onde j é P -fibrção.

Observamos que, sendo \mathcal{C} cartesianamente fechada, C e P são adjuntos. Pelo discutido ao final do capítulo seis, há, portanto, um modelo em \mathcal{C} cujas equivalências fracas são as equivalências homotópicas, cujas cofibrações são as C -cofibrações, e cujas fibrações são as P -fibrações. Ele é denominado *modelo de Ström*. Nele, em particular, todos os objetos são tanto fibrantes quanto cofibrantes.

Advertência. Quando não houver risco de confusão, C -cofibrações e P -fibrações no modelo de Ström serão chamadas simplesmente de *cofibrações* e de *fibrações*.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 8.1.1. Um fibrado $f : X \rightarrow Y$ em **Top** se diz *localmente trivial* quando é localmente conjugada ao fibrado trivial. Isto é, quando cada ponto $x \in Y$ admite uma vizinhança aberta U , tal que $f^{-1}(U) \rightarrow U$ é conjugado à projeção $\pi_1 : U \times F_x \rightarrow U$, para algum espaço F_x . Quando F_x é o mesmo para cada x , diz-se que ele é a *fibra típica* de f . Observamos que a projeção de qualquer fibrado localmente trivial é uma fibração no modelo de Ström. Este resultado pode ser encontrado em diversos livros sobre a teoria de fibrados. Uma referência clássica é o livro [71] de Steenrod, que contempla o referido resultado entre as páginas 50 e 53.

Exemplo 8.1.2. Em modelos gerados por cilindros naturais C , verifica-se facilmente que um morfismo $\iota : A \rightarrow X$ é uma C -cofibrção se, e somente se, o mapa natural $j : \text{cyl}(\iota) \rightarrow CX$, que aparece na definição de *mapping cylinder* $\text{cyl}(\iota)$ e que nada mais é que o mapa vertical do *pushout* entre ι e $n_0(A)$, admite uma retração. No modelo de Ström, tem-se $\text{cyl}(\iota) \simeq X \times 0 \cup A \times I$ sempre que ι é inclusão. Assim, suas cofibrações se caracterizam por serem aquelas em que $X \times 0 \cup A \times I$ é retrato de $X \times I$. Por exemplo, $\iota : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^n$ é cofibrção: basta tomar como retração a correspondência

$$r : \mathbb{D}^n \times I \rightarrow \mathbb{D}^n \times 0 \cup \mathbb{S}^{n-1} \times I, \quad \text{tal que} \quad r(x, t) = (t \cdot \frac{x}{\|x\|} - t \cdot x + x, t).$$

Alta Dimensão

Anteriormente comentamos que, em geral, as categorias com cilindros naturais são protótipos de $(\infty, 1)$ -categorias. Vejamos que isto se passa com \mathcal{C} . Como sempre, 0 -morfismos são os objetos (isto é, os espaços topológicos) e 1 -morfismos são os morfismos (isto é, as funções contínuas). Os 2 -morfismos são as homotopias. No modelo de Ström, estas são aplicações $H : X \times I \rightarrow Y$, de modo que é possível falar de “*homotopias formais entre 2-morfismos*”, as quais corresponderão

aos 3-morfismos. Estas, por sua vez, haverão de ser funções $X \times I \times I \rightarrow Y$, permitindo-nos falar de “*homotopias formais entre 3-morfismos*”, correspondendo aos 3-morfismos. Indutivamente define-se os n -morfismos para todo n .

Para concluirmos que a estrutura assim obtida é $(\infty, 1)$ -categoria, devemos mostrar que, para qualquer $n > 1$, os n -morfismos são todos inversíveis e podem ser compostos de n maneiras distintas, cada uma das quais é associativa e preserva unidade a menos de morfismos de ordem superior. Nos resumimos apresentar duas distintas maneiras de compor homotopias formais e a mostrar que 2-morfismos são inversíveis a menos de 3-morfismos.

Dadas homotopias formais H e H' , ambas entre $f, g : X \rightarrow Y$, sua *composição vertical*, é a aplicação $H \bullet H'$, também do produto $X \times I$ em Y , definida por concatenação:

$$(H \bullet H')(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ H'(x, 2t - 1), & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Por sua vez, se H e H' são respectivas homotopias formais entre $f, g : X \rightarrow Y$ e $f', g' : Y \rightarrow Z$, então a *composição horizontal* entre elas é a correspondência

$$H' \circ H : X \times I \rightarrow Z, \quad \text{tal que} \quad (H' \circ H)(x, t) = H'(H(x, t), t).$$

Vejamos agora que, se existe uma homotopia formal $H : f \rightarrow g$, então também existem homotopias formais $H' : g \rightarrow f$, assim como 3-morfismos α entre $H' \bullet H$ e id_f , e α' entre $H' \bullet H$ e id_g . Aqui, $id_f(x, t) = f(x)$ para todo t . A existência de H' provém da simetria da relação que identifica morfismos ligados por homotopias formais. Por sua vez, a existência dos α e α' segue como caso particular do seguinte fato mais geral: entre quaisquer homotopias formais H e H' entre $f, g : X \rightarrow Y$ há ao menos um 3-morfismo $\alpha : X \times I \times I \rightarrow Y$, definido por

$$\alpha(x, t, s) = \begin{cases} H(x, t - 2ts) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ H'(x, 2ts - t), & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Intuição

Intuitivamente, o papel das homotopias $H : f \Rightarrow g$ é deformar f continuamente, até que se torne g . Assim, um espaço X terá o mesmo tipo de homotopia que outro espaço Y quando nele pode ser continuamente deformado.

Exemplo 8.1.3. Os espaços que podem ser continuamente deformados (via homotopia) a pontos são ditos *contráteis*. Este é o caso, por exemplo, de qualquer subespaço convexo do \mathbb{R}^n . No estudo da homotopia tem-se particular interesse em invariantes homotópicos. Neste sentido, espaços contráteis possuem invariantes homotópicos triviais. Por exemplo, como comentamos anteriormente, existem certos funtores $\pi_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$, chamados de *grupos de homotopia*. Estes são homotópicos e, portanto, passam à categoria homotópica \mathcal{HC} . Se um espaço X é contrátil, então cada invariante $\pi_i(X)$, com $i > 0$, é trivial. A recíproca, no entanto, não é verdadeira: no modelo de Ström, existem espaços com grupos de homotopia triviais que não são contráteis. Isso significa que os funtores π_i não são suficientes para classificar \mathcal{HC} como um todo. Realçamos que este fato *depende do modelo fixado em \mathcal{C}* . Com efeito, pode-se introduzir um novo modelo numa subcategoria de \mathcal{C} , chamado de *modelo de Quillen*, segundo o qual os funtores π_i também são homotópicos, mas desta vez classificam a correspondente categoria homotópica (veja, por exemplo, a secção 17.2 de [56]).

Exemplo 8.1.4. Sob quais condições um subespaço $A \subset X$ possui o mesmo tipo de homotopia que o espaço inteiro? É suficiente que A seja retrato por deformação de X . Em outras palavras, é suficiente que a inclusão admita inversa fraca r . Por sua vez, para que isto aconteça, basta existir um *fluxo* entre A e X . Este se trata de uma família a um parâmetro de funções $\varphi_t : X \rightarrow X$, tal que $\varphi_0 = id_X$, com $t \mapsto \varphi_t$ é contínua, e para o qual há uma outra $\tau : X \rightarrow \mathbb{R}$, a qual se anula em A e cumpre $\varphi_{\tau(x)}(x) \in A$ para todo $x \in X$. Com efeito, dado um tal fluxo, a regra $r(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)$ evidentemente define uma retração de X em A , sendo tal que $\iota_A \circ r \simeq id_X$, com homotopia dada por $H(x, t) = \varphi_{t\tau(x)}(x)$.

Observamos haver uma diferença entre a deformação efetivada por um homeomorfismo e aquela proporcionada por uma equivalência homotópica: enquanto a primeira “preserva dimensões”, a segunda não se submete a tal restrição. Em outras palavras, equivalências homotópicas têm a permissão para “colapsar dimensões”. Ilustremos este fato através de alguns exemplos:

Exemplo 8.1.5. Quando $n \neq m$, os espaços \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m nunca são homeomorfos. Este é um resultado conhecido como *teorema da invariância da dimensão*, cuja demonstração (assim como o teorema da retração de Brouwer) segue dos cálculos $\pi_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$ e $\pi_i(\mathbb{S}^n) = 0$, com $1 < i < n$, os quais obteremos um pouco mais adiante. Com efeito, deles se retira $\pi_{n-1}(\mathbb{S}^n) \neq \pi_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, de modo que esferas de dimensões distintas não podem nem mesmo serem homotópicas (daremos uma prova deste fato na próxima subsecção sem fazer uso de cálculos envolvendo os grupos de homotopia). Observando que compactificações preservam homeomorfismos, segue-se que $\mathbb{R}^n = \mathbb{S}^n \cup \infty$ e $\mathbb{R}^m = \mathbb{S}^m \cup \infty$ nunca são homeomorfos. Em contrapartida, quaisquer espaços euclidianos são sempre homotópicos. Afinal, ambos são contráteis.

Exemplo 8.1.6. Os subespaços $\mathbb{R}^n - 0$ e \mathbb{S}^{n-1} do \mathbb{R}^n não são homeomorfos: a esfera é compacta, algo não satisfeito se do \mathbb{R}^n retiramos um ponto. Em contrapartida, a aplicação $x \mapsto x/\|x\|$, de $\mathbb{R}^n - 0$ em \mathbb{S}^{n-1} , é equivalência homotópica. Particularmente, ainda que o cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ não seja homeomorfo ao círculo \mathbb{S}^1 , eles possuem a mesma homotopia.

No modelo de Ström, homotopias admitem uma outra interpretação. Com efeito, lembrando que a categoria \mathcal{C} é simétrica e cartesianamente completa, temos

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X \times I; Y) \simeq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(I \times X; Y) \simeq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(I; \text{Map}(X; Y)),$$

de modo que uma homotopia entre $f, g; X \rightarrow Y$ se identifica como um caminho em $\text{Map}(X; Y)$ que parte de f e chega em g . Assim, duas aplicações são homotópicas se, e somente se, estão na mesma componente conexa por caminhos do espaço $\text{Map}(X; Y)$.

Limites Homotópicos

No capítulo cinco comentamos que, para quaisquer categorias \mathbf{J} e \mathbf{C} , com \mathbf{C} dotada de equivalências fracas, o functor $\lim : \text{Func}(\mathbf{J}; \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$ geralmente não é homotópico. No presente contexto, isto significa que limites podem não preservar tipo de homotopia. Vejamos dois exemplos:

Exemplo 8.1.7. Se tomamos o disco \mathbb{D}^n e identificamos seu bordo num único ponto, obtemos a esfera \mathbb{S}^n , a qual não é contrátil, pois tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{R}^n - 0$ (primeiro dos

diagramas abaixo). Por sua vez, sabemos que \mathbb{D}^n é contrátil e, portanto, homotópico a um ponto. No entanto, o segundo dos *pushouts* abaixo resulta no próprio \mathbb{D}^n . Assim, ainda que troquemos objetos de um diagrama por outros com o mesmo tipo de homotopia, os correspondentes limites podem não possuir a mesma homotopia.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ps} & \longleftarrow & \mathbb{D}^n \\ \uparrow & & \uparrow i \\ * & \longleftarrow & \mathbb{S}^{n-1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Ps}' & \longleftarrow & * \\ \uparrow & & \uparrow i \\ * & \longleftarrow & \mathbb{S}^{n-1} \end{array}$$

Exemplo 8.1.8. E se ao invés de considerarmos diagramas com objetos homotópicos passarmos a olhar para diagramas com morfismos homotópicos? Ainda assim, os correspondentes limites podem não ter a mesma homotopia. Com efeito, o primeiro dos *pullbacks* abaixo resulta no produto $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}$. Como \mathbb{D}^n é contrátil, sua identidade é homotópica a uma (e, portanto, qualquer) aplicação constante. Seja c tal aplicação. Colocando-a no lugar da identidade, vê-se que o *pullback* resultante ou é formado de um só ponto (se $c(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$), ou então é vazio.

$$\begin{array}{ccc} \text{Pb} & \longrightarrow & \mathbb{D}^n \\ \downarrow & & \downarrow id \\ \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{i} & \mathbb{D}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Pb}' & \longrightarrow & \mathbb{D}^n \\ \downarrow & & \downarrow c \\ \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{i} & \mathbb{D}^n \end{array}$$

Alguns tipos de limites, no entanto, fogem à regra e preservam certas propriedades homotópicas. É isto o que veremos no próximo exemplo. Adiantamos que ele é o caminho para se classificar qualquer fibrado em \mathcal{C} que seja localmente trivial e cujas fibras estejam dotadas da ação de um grupo topológico, algo que veremos na próxima subsecção.

Exemplo 8.1.9. Vejamos que, se $\pi : X \rightarrow X'$ é um fibrado localmente trivial e $f, g : Y \rightarrow X'$ são funções homotópicas, então os *pullbacks* f^*X entre (f, π) , e g^*X entre (g, π) , não só tem o mesmo tipo de homotopia, como também são fibrados isomorfos. Para tanto, seja H homotopia entre f e g , e consideremos a aplicação $h : f^*X \times I \rightarrow X'$ obtida compondo $pr \times id$ com H . Como π é fibração, existe o mapa h' apresentado no segundo diagrama. Daí, por universalidade obtém-se u , que é um isomorfismo. Fazendo o mesmo para g e utilizando de transitividade, chega-se em $f^*X \times I \simeq g^*X \times I$, donde o fibrado f^*X ser isomorfo a g^*X .

$$\begin{array}{ccc} f^*X & \longrightarrow & X \\ pr \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y' & \xrightarrow{f} & X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f^*X & \longrightarrow & X \\ \downarrow i_0 & \nearrow h' & \downarrow \pi \\ f^*X \times I & \xrightarrow{h} & X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f^*X \times I & \xrightarrow{h'} & X \\ \downarrow pr \times id & \searrow u & \downarrow \pi \\ H^*X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y' \times I & \xrightarrow{H} & X' \end{array}$$

Classificação dos Fibrados

O último exemplo é particularmente interessante: ele nos dá uma ideia clara de como classificar fibrados localmente triviais (com base fixa) através da segunda estratégia apresentada no capítulo

dois. Com efeito, fixado $\pi : X \rightarrow X'$, seja $[-] : \mathcal{LB} \rightarrow \mathbf{Set}$ o functor que a cada fibrado localmente trivial associa a sua classe de isomorfismos. Pelo referido exemplo, $\pi : X \rightarrow X'$ induz uma transformação $\xi : [-, X']_{\mathcal{C}} \rightarrow [-]$, definida por $\xi(Y)([f]) = [f^*X]$. Busca-se, então, por fibrados $\pi : X \rightarrow X'$ tais que ξ seja um isomorfismo natural. Diz-se que eles são *universais*.

Pode-se pensar no problema da seguinte maneira: o que o exemplo anterior nos diz é que a parte “ $f : Y \rightarrow X$ ” do *pullback* abaixo apresentado é homotópica. O fibrado $\pi : X \rightarrow X'$ será universal precisamente quando a parte que lhe corresponde (e, portanto, o *pullback* como um todo) for homotópico. Neste caso, o fibrado classificado por f pode ser computado através do *mapping cocylinder* de π :

$$\begin{array}{ccccc}
 & X & & \text{HPb} & \xrightarrow{\quad} & \text{ccyl}(\pi) & \dashrightarrow & X \\
 & \downarrow \pi & & \vdots & & \downarrow & & \downarrow \pi \\
 Y & \xrightarrow{f} & X' & & & \text{path}(X') & \longrightarrow & X' \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & Y & \xrightarrow{f} & X' & &
 \end{array}$$

No contexto dos fibrados com grupo estrutural, a tarefa é mais simples: todo $\pi : X \rightarrow X'$ com espaço total contrátil é trivial (veja, por exemplo, [71]). Como apresentaremos em seguida, há uma construção canônica que permite associar a cada grupo topológico G um fibrado principal $EG \rightarrow BG$ sobre G , tal que EG é contrátil. Assim, G -fibrados principais (e, portanto, quaisquer fibrados tendo G como grupo estrutural) são classificados pelo correspondente BG . Particularmente, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ classifica precisamente o seu *mapping cocone*.

Iniciamos observando que, como os fibrados associados classificam os fibrados com grupos estrutural, basta nos resumirmos aos fibrados principais. Existem dois funtores $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Cat}$, os quais nos permitem ver cada grupo G como categorias \mathbf{EG} e \mathbf{BG} , definidas como segue. Os objetos de \mathbf{G} são precisamente os elementos de G , ao passo que entre $g, h \in \mathbf{EG}$ há um único morfismo $g \rightarrow h$, constituído do único elemento $g' \in G$ tal que $g \circ s = h$. Por sua vez, \mathbf{BG} possui um único objeto $*$. Os morfismos $* \rightarrow *$ correspondem aos elementos de G .

Sejam $N_s \mathbf{G}$ e $N_s \mathbf{G}'$ os nervos simpliciais de \mathbf{EG} e \mathbf{BG} . Suas n -simplices se identificam, respectivamente, com produtos G^{n+1} e G^n de $n+1$ e de n cópias de G . Assim, há uma ação de G em G^{n+1} cujo espaço de órbitas é isomorfo a G^n . Tal ação comuta operadores de bordo, de modo que fica bem definido $p : N_s \mathbf{G} \rightarrow N_s \mathbf{G}'$ que em G^n é $G^n \rightarrow G^n/G$.

Tem-se também um functor $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$, que a cada $[n]$ faz corresponder o subespaço $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ formado de todas as listas de $n+1$ números reais não-negativos, cuja soma é exatamente igual a um. Uma vez que \mathcal{C} é completa e cocompleta, segue-se a existência de adjuntos $\text{Sing} : \mathcal{C} \rightarrow s\mathbf{Set}$ e $|\cdot| : s\mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{C}$. Para cada grupo topológico G , o espaço $|N_s \mathbf{G}|$ é contrátil, de modo que o fibrado obtido aplicando $|\cdot|$ em $p : N_s \mathbf{G} \rightarrow N_s \mathbf{G}'$ é universal na categoria dos G -fibrados.

8.2 Invariantes

Iniciamos esta secção mostrando que \mathcal{C}_* pertence a uma classe de categorias com equivalências fracas na qual suspensões e *loops* podem ser computados através do produto *smash*. Por um lado, sendo um colimite homotópico, a suspensão de qualquer espaço pontuado $X \in \mathcal{C}_*$ pode ser obtida

das duas formas abaixo apresentadas:

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma X & \xleftarrow{\cdots} & CX \xleftarrow{\cdots} * \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 & & X \times I \xleftarrow{\cdots} X \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 * & \xleftarrow{\cdots} & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \Sigma X & \xrightarrow{\cdots} & CX \xrightarrow{\cdots} * \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 CX & \xleftarrow{\cdots} & X \times I \xleftarrow{\cdots} X \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 * & \xleftarrow{\cdots} & X
 \end{array}$$

A primeira nos diz que a suspensão de X é a colagem de dois cones idênticos CX que têm X como base (estes se tratam, pois, do *mapping cylinder* de $* \rightarrow X$). O segundo diagrama mostra que ΣX é homotópico ao quociente CX/X .

Como I é contrátil, $X \vee I$ tem o mesmo tipo de homotopia que X . Além disso, $X = X \wedge \mathbb{S}^0$, pois a esfera \mathbb{S}^0 é o objeto neutro da estrutura monoidal definida em \mathcal{C}_* por \wedge . Substituindo tais colocações na primeira das maneiras de calcular a suspensão, vemos que ΣX tem o mesmo tipo de homotopia que o quociente de $X \wedge I$ por $X \wedge \mathbb{S}^0$. Por fim, sendo \mathcal{C} cartesianamente fechada e simétrica, $X \wedge -$ possui adjunto à direita e, portanto, preserva *pushouts*. Isto significa que

$$X \wedge I / X \wedge \mathbb{S}^0 \simeq X \wedge (I/\mathbb{S}^0), \quad \text{donde} \quad \Sigma X \simeq X \wedge \mathbb{S}^1.$$

De maneira dual, verifica-se que o *loop* ΩX é equivalente a $\text{Map}_*(\mathbb{S}^1; X)$. Particularmente, estes fatos nos mostram que, além de adjuntos, os funtores $-\wedge \mathbb{S}^1$ e Map_* são homotópicos, tendo passagens ao quociente coincidentes com Σ e Ω . Em virtude destas coincidências, não faremos distinção entre um e outro.

Exemplo 8.2.1. Tem-se homeomorfismos $\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \simeq \mathbb{S}^{n+m}$, donde $\Sigma \mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}$. Uma forma de visualizar o resultado é a seguinte: por meio das projeções estereográficas, a esfera admite a decomposição $\mathbb{S}^n \simeq e^0 \cup e^n$, em que $e^i \simeq \text{int} \mathbb{D}^i$ é chamado de *célula de dimensão* i . Da mesma forma,

$$\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \simeq e^0 \cup e^n \cup e^m \cup e^{n+m} \quad \text{e} \quad \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m \simeq e^0 \cup e^n \cup e^m,$$

Passando ao quociente, obtém-se o resultado procurado:

$$\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m / \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m \simeq e^0 \cup e^{n+m} \simeq \mathbb{S}^{n+m}.$$

Uma construção explícita do homeomorfismo $\Sigma \mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}$ pode ser encontrada na sexta secção do primeiro capítulo de [70].

H-Espaços

Além da estrutura proveniente do produto *smash*, $\mathcal{H}\mathcal{C}_*$ também admite estruturas monoidais definidas por seus produtos e coprodutos binários (lembre-se de que, apesar da categoria homotópica $\mathcal{H}\mathcal{C}_*$ não ser completa e cocompleta, ela possui produtos e coprodutos). Os grupos e co-grupos inerentes a cada uma delas são respectivamente chamados de *H-espacos* e de *H-co-espacos*, tendo categorias denotadas por $\text{HSp}(\mathcal{C}_*)$ e $\text{H}^{\text{op}}\text{Sp}(\mathcal{C}_*)$.

Exemplo 8.2.2. Evidentemente, todo grupo em \mathcal{C}_* é um H -espaço. Portanto, todo grupo topológico Hausdorff e compactamente gerado, estando pontuado pelo seu elemento neutro, é um H -espaço. Este é o caso de $(\mathbb{S}^1, 1)$. Da mesma forma, todo co-grupo em \mathcal{C}_* é um H -co-espaço, de modo que o círculo também admite uma estrutura natural de H -co-espaço.

Exemplo 8.2.3. Provaremos agora que, se X é H -co-espaço, então o produto *smash* $X \wedge Y$ também o é, seja qual for o $Y \in \mathcal{C}_*$. Com efeito, basta mostrar que $[X \wedge Y; -]_{\mathcal{C}_*}$ é grupo para todo Y . Como $[X \wedge Y; Z]_{\mathcal{C}_*} \simeq [X; \text{Map}_*(Y; Z)]_{\mathcal{C}_*}$, se X é H -co-espaço, então $[X; -]$ é grupo e, portanto, cada um dos conjuntos da direita também são grupos. Há uma única estrutura de grupo em $[X \wedge Y; Z]_{\mathcal{C}_*}$ que faz das referidas bijeções isomorfismos. Assim, $[X \wedge Y; -]_{\mathcal{C}_*}$ é grupo, garantindo o que havíamos afirmado.

Como consequência imediata dos exemplos anteriores, segue-se que cada Σ^n assume valores na categoria $\text{H}^{\text{op}}\text{Sp}(\mathcal{C}_*)$. Isto significa que cada $X \in \mathcal{C}_*$ define uma sequência de funtores $\pi_n^X : \mathcal{HC}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$, que tomam $Y \in \mathcal{C}_*$ e associam o grupo $\pi_n^X(Y, y_o) = [\Sigma^n X; Y]$. Em suma, estes são os *primeiros exemplos de invariantes topológicos construídos por métodos algébricos com os quais nos deparamos*. Observamos, em particular, que estes são invariantes *homotópicos*. Isto significa que, se $Y \simeq Y'$, então os correspondentes grupos a eles associados são obrigatoriamente isomorfos.

De maneira dual, poderíamos considerar os funtores π_X^n , que a cada espaço pontuado Y fazem corresponder $[X; \Omega^n Y]_{\mathcal{C}_*}$. As adjunções $[\Sigma^n X; Y]_{\mathcal{C}_*} \simeq [X; \Omega^n Y]_{\mathcal{C}_*}$, no entanto, garantiriam que os respectivos invariantes associados por π_X^n e π_n^X são sempre isomorfos. Pelo argumento argumento de Eckmann-Hilton, isto é, pelos isomorfismos

$$\text{Mon}(\text{Mon}(\mathbf{Set}; \times), \times_M) \simeq {}_c\text{Mon}(\mathbf{Set}; \times) = \mathbf{AbGrp},$$

para quaisquer que sejam $n, m > 0$ e $X, Y \in \mathcal{C}_*$, os respectivos grupos $[\Sigma^n X; \Omega^m Y]_{\mathcal{C}_*}$ são abelianos. Daí, para $n > 1$, os funtores π_n^X e π_X^n chegam em \mathbf{AbGrp} . Em outras palavras, na sequência de invariantes definidos por X , somente o primeiro não é abeliano.

Grupos de Homotopia

Procuramos por invariantes que, em certo sentido, não carregam arbitrariedades. Isto nos leva a questionar os papéis do espaço X e do ponto base y_o em $\pi_n^X(Y, y_o)$.

No que toca o primeiro questionamento, observemos que, como os funtores $- \wedge \mathbb{S}^1$ são homotópicos, espaços X e X' que tenham o mesmo tipo de homotopia produzem funtores π_n^X e $\pi_n^{X'}$ naturalmente isomorfos. Daí, os invariantes $\pi_n^X(Y, y_o)$ não são sensíveis à troca de espaços que estejam na mesma classe de X . Em particular, isto retira nosso interesse dos invariantes definidos por espaços contráteis. Pois, se $X \simeq *$, então o grupo $\pi_n^X(Y, y_o)$ é sempre trivial.

O tipo homotópico mais simples depois de um ponto é um “ponto pontuado”. Em outras palavras, tratam-se dos espaços que estão na classe de \mathbb{S}^0 . Vejamos que, em grande parte dos casos, estes produzem invariantes $\pi_n^{\mathbb{S}^0}(X, x_o)$, denotados simplesmente por $\pi_n(X, x_o)$ e chamados de *grupos de homotopia* de X , que não dependem do ponto base x_o escolhido e, portanto, não possuem arbitrariedades. Isto os torna particularmente interessantes.

Iniciamos observando haver uma ω -categoria $\Pi(X)$, cujos objetos são os elementos de X , cujos 1-morfismos $x_o \rightarrow x'_o$ são os caminhos ligando tais pontos, cujos 2-morfismos são as homotopias

livres (isto é, que preservam os pontos inicial e final) entre caminhos, e assim sucessivamente. Tal categoria é, em verdade, um ∞ -grupoide. Consequentemente, também podemos vê-la enquanto grupoide: basta manter os objetos e considerar como morfismos as classes de homotopia de caminhos $x_o \rightarrow x'_o$. Daí, todo functor $F^n : \Pi(X) \rightarrow \mathbf{Grp}$ cumprindo $F^n(x_o) = \pi_n(X, x_o)$ manda classes $[\gamma] : x_o \rightarrow x'_o$ em isomorfismos. Como consequência, $\pi_n(X, x_o)$ depende apenas da componente conexa por caminhos de X a qual x_o pertence.

Um exemplo destes funtores é aquele que toma $[\gamma]$ e associa $F_\gamma^n : \pi_n(X, x_o) \rightarrow \pi_n(X, x'_o)$, que a cada classe $[f] \in [\mathbb{S}^n; X, x_o]_{\mathcal{C}_*}$ devolve a correspondente classe das aplicações contínuas $g : \mathbb{S}^n \rightarrow (X, x'_o)$ que podem ser livremente deformadas em f através de γ . Isto é, tais que existe homotopia livre $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$ entre g e f , com $H(*, t) = \gamma(t)$, em que $*$ base de \mathbb{S}^n .

Grupo Fundamental

O primeiro dos grupos de homotopia é chamado de *grupo fundamental*. Ele possui uma interpretação bastante clara, como passamos a discutir.

Seja \mathcal{C}_2 a categoria dos pares de \mathcal{C} . Diz-se que dois mapas em \mathcal{C}_2 são homotópicos quando existe uma homotopia usual entre eles, a qual preserva os subespaços distinguidos. Isto define relações de equivalência em cada conjunto de morfismos de \mathcal{C}_2 , a qual é compatível com composições. Daí, fica definida a categoria \mathcal{HC}_2 , cujos morfismos são as classes de mapas entre pares. Como pode ser conferido em [72, 27], quando $A \subset X$ é fechado e $Y \in \mathcal{C}_*$, tem-se bijeções

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{HC}_2}(X, A; Y, y_o) \simeq [X/A; Y]_{\mathcal{C}_*}. \quad (8.1)$$

Assim, $\pi_1(X, x_o)$ nada mais é que o conjunto das classes de homotopia de caminhos $\gamma : I \rightarrow X$ cumprindo $\gamma(0) = x_o$ e $\gamma(1) = x_o$. Desta forma o grupo fundamental de (X, x_o) será trivial se, e somente se, toda *loop* em x_o puder ser continuamente deformado até tornar o caminho constante em x_o . Isto é, se, e só se, X não possuir buracos no entorno de x_o . Assim, o invariante π_1 mensura, exatamente, a existência de buracos.

Exemplo 8.2.4. Como discutimos no primeiro capítulo, os invariante proporcionados pela topologia geral não são muito fortes. Por exemplo, através deles não se consegue provar que a esfera \mathbb{S}^2 não é homeomorfa ao toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. A topologia algébrica, como também discutimos, vêm para construir invariantes mais poderosos. De fato, acabamos de obter um invariante π_1 que mensura a existência de buracos. Ora, a diferença entre a esfera e o toro está justamente neste ponto: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tem buracos, enquanto que \mathbb{S}^2 não os possui. Daí, deve-se ter $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \neq \pi_1(\mathbb{S}^2)$, de modo que tais espaços não são homeomorfos. Em particular, como π_1 é invariante homotópico, isto mostra que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ e \mathbb{S}^2 não possuem nem mesmo igual tipo de homotopia.

Exemplo 8.2.5. No quarto capítulo, introduzimos uma estrutura monoidal na categoria \mathbf{C}^n das subvariedades compactas e orientáveis de \mathbb{R}^{n+1} , cujo objeto neutro é \mathbb{S}^n . Quando $n = 2$, comentamos que $\mathrm{Eqv}(\mathbf{C}^2)$ é isomorfo aos naturais \mathbb{N} , pelo morfismo que a cada g associa a classe de \mathbb{S}_g^1 . O número g é chamado de *genus* da superfície e mede o número de buracos que ela possui. Assim, pode-se dizer que a classificação de \mathbf{C}^2 se dá exatamente por π_1 .

Para terminar, mostremos que a independência do ponto base dos grupos de homotopia se traduz numa ação de $\pi_1(X, x_o)$ em cada $\pi_n(X, x_o)$, cujo quociente é precisamente o conjunto $[\mathbb{S}^n; X]_{\mathcal{C}}$ das classes de homotopia livre. Com efeito, pela identificação (8.1), segue-se que

$\mathbf{B}\pi_1(X, x_o)$ é a subcategoria de $\Pi(X)$ que possui somente x_o como objeto e $x_o \rightarrow x_o$ como morfismos. Enquanto restrito a ela, o functor $F^n : \Pi(X) \rightarrow \mathbf{Grp}$ se traduz numa ação

$$* : \pi_1(X, x_o) \times \pi_n(X, x_o) \rightarrow \pi_n(X, x_o), \quad \text{definida por} \quad [\gamma] * [f] = F_\gamma^n([f]),$$

cujas órbita está em bijeção com $[\mathbb{S}^n; X]_{\mathcal{C}}$. Consequentemente, *se um espaço conexo por caminhos possui $\pi_1(X, x_o)$ trivial para algum x_o , situação em que é dito ser simplesmente conexo, então tratar de mapas pontuados é o mesmo que tratar de mapas sem pontuação.*

Exemplo 8.2.6. Pode-se ter bijeções $\pi_n(X, x_o) \simeq [\mathbb{S}^n; X]_{\mathcal{C}}$ mesmo que X não seja simplesmente conexo. Com efeito, basta que a ação de π_1 em cada π_n seja trivial. Isto é, basta que $[\gamma] * [f] = [f]$ para cada γ e cada f . Isto ocorre, por exemplo, quando X é um H -espaço: dados γ e f , a aplicação $H(t, x) = \gamma(t) \cdot f(x)$ é homotopia livre de f em f ao longo de γ . Veja o teorema 4.18 do terceiro capítulo da referência [87].

8.3 Cálculo

Uma vez obtidos invariantes $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, de uma determinada categoria \mathbf{C} preocupa-se em calculá-los. Isto é, procura-se determinar $F(X)$ módulo isomorfismos. Neste sentido, as ferramentas mais importantes são as sequências exatas envolvendo F . No contexto da homotopia clássica, estas serão estudadas nas duas próximas subseções.

Observamos, por outro lado, que a tarefa de calcular um invariante se torna mais simples na medida em que este preserva maior número de limites e colimites. Com efeito, se um objeto X for obtido por limites/colimites preservados por F , então poderemos calcular $F(X)$ através dos invariantes associados aos objetos cujo limite/colimite originam X . Assim, particularmente, se estamos interessados em homotopia, haveremos de buscar por funtores que preservem o maior número de limites/colimites homotópicos.

Na subseção anterior, obtivemos os funtores $\pi_i : \mathcal{H}\mathcal{C}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$, cujos invariantes são os grupos de homotopia. Tais invariantes são tremendamente difíceis de serem calculados, especialmente quando $n > 1$. Por exemplo, ainda não se sabe calcular exatamente os grupos $\pi_i(\mathbb{S}^n)$, com $i > n$. Uma das razões disso reside justamente no fato de que os π_i preservam poucos limites/colimites homotópicos. Com efeito, na próxima subseção mostraremos que, em geral, os π_i não preservam coprodutos. Por sua vez, logo mais veremos que tais funtores costumeiramente falham na preservação de *pushouts* homotópicos.

Uma exceção à regra são os limites de $\mathcal{H}\mathcal{C}_*$ (que existem em pequena quantidade, como já discutimos). Isto se deve precisamente ao fato dos π_i serem todos representáveis. Como exemplo, segue-se que eles preservam produtos. Em outras palavras, tem-se os seguintes isomorfismos:

$$\pi_i(X \times Y, x_o \times y_o) \simeq \pi_i(X, x_o) \times \pi_i(Y, y_o).$$

Também é fácil mostrar que os grupos de homotopia preservam certos limites indutivos. Mais precisamente, se X é limite indutivo de um sistema dirigido de inclusões $X_j \rightarrow X_{j+1}$, então existem os isomorfismos abaixo (a ideia da prova reside na observação de que qualquer mapa $K \rightarrow X$, com K compacto, assume valores em algum X_i):

$$\pi_i(X) \simeq \operatorname{colim} \pi_i(X_j).$$

Seifert-Van Kampen

Uma exceção especial à falta de preservação de colimites homotópicos por partes dos grupos de homotopia π_i acontece para $i = 1$. Nela, conta-se com um resultado conhecido como *Teorema de Seifert-Van Kampen*, o qual afirma que π_1 preserva certos *pushouts* homotópicos. Mais precisamente, ele garante que, se um quadrado é comutativo em \mathcal{C}_* e um *pushout* homotópico em \mathcal{C} , com P conexo por caminhos, então sua imagem por π_i é um *pushout* em **Grp**.

$$\begin{array}{ccc}
 P \leftarrow - X & & \pi_1(P) \leftarrow - \pi_1(X) \\
 \uparrow & \xRightarrow{\pi_1} & \uparrow \\
 X' \leftarrow Y & & \pi_1(X') \leftarrow \pi_1(Y)
 \end{array}$$

Ressaltamos que este fato não é válido num caso geral: o problema está na exigência de que o *pushout* homotópico parta de um diagrama comutativo em \mathcal{C}_* .

Exemplo 8.3.1. Se X é espaço no qual age um grupo topológico G , o *pushout* homotópico associado à órbita da ação em geral não se estende a um diagrama comutativo em \mathcal{C}_* . Isto porque nem sempre a ação de G preserva um ponto base previamente fixado em X .

Assim, o problema está justamente no fato de trabalharmos com espaços pontuados. Desta forma, a ideia é substituir o grupo fundamental pelo grupoide fundamental. Isto pode realmente ser feito e, neste caso, mostra-se que Π preserva qualquer colimite homotópico (veja [19]).

Devido ao poderio do teorema de Seifer-Van Kampen, uma questão natural diz respeito a possibilidade de se obter um análogo para os outros grupos de homotopia. Tendo-se isto em mente, observamos que tal teorema foi bastante melhorado quando considerado sob a perspectiva do grupoide fundamental. Assim a ideia seria buscar outros grupoides, os quais estejam relacionados com os grupos de homotopia de grau superior. Ocorre que homotopias de grau superior indicam maior informação categórica. Desta forma forma, ao grupo π_n espera-se ter associado não só um grupoide, mas um n -grupoide Π_n . Com o intuito de analisar esta relação, respondamos algumas questões:

- *Quais propriedades Π_n deve possuir?* No caso $n = 1$, tem-se $\Pi(X) \simeq \mathbf{B}\pi_1(X, x)$. De maneira análoga, espera-se poder olhar $\pi_n(X, x)$ como uma n -categoria com um único objeto e obter $\Pi_n \simeq \pi_n(X, x)$. No entanto, há um problema: o grupo fundamental é o único dos grupos de homotopia que não é necessariamente abeliano. Assim, ao tentar mimetizar o que é feito para π_1 , ao invés de trabalhar com os grupos de homotopia de grau superior, deve-se trabalhar com funtores que a eles estejam relacionados, mas que ao mesmo tempo assumam valores em certas n -categorias \mathbf{C}_n “não-abelianas”. Diz-se, neste caso, que se está em busca de uma *topologia algébrica não-abeliana*.
- *Quem são as \mathbf{C}_n ?* Por um lado, sabemos que π_1 assume valores em **Grp**, que é uma categoria usual. Por outro, queremos funtores que chegam em n -categorias e que estejam relacionados com os grupos de homotopia. Assim, queremos sair de π_1 e aumentar o nível de informação categórica. A maneira natural de se fazer isso é através de *categorificação*. Portanto, de maneira indutiva, espera-se que \mathbf{C}_2 seja a categoria $\mathbf{Cat}(\mathbf{Grp})$ das categorificações de **Grp**, e que \mathbf{C}_n seja formada das categorificações de \mathbf{C}_{n-1} . Ora, uma maneira

de categorificar é enriquecer sobre **Cat**. Desta forma, $\text{Cat}(\mathbf{Grp})$ há de ser identificado com enriquecimentos da categoria **Grp** na categoria dos grupoides, e assim sucessivamente.

- *Em que sentido as categorias \mathbf{C}_n assim definidas são não-abelianas?* Os funtores $\pi_{i \geq 2}$ assumem valores em $\mathbf{AbGrp} \simeq \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$. Por sua vez, R -módulos são ações de R em grupos abelianos. Assim, os $\pi_{i \geq 2}$ assumem valores na categoria das ações de grupos abelianos em grupos abelianos. Olhando por este lado, poder-se-ia pensar em definir \mathbf{C}_n como sendo alguma categoria de ações de grupos em grupos (não necessariamente abelianos). Ocorre que $\text{Cat}(\mathbf{Grp})$ se identifica com a categoria dos *módulos cruzados*, que são ações deste tipo.

Depois desta digressão, conclui-se que para obter uma generalização do teorema de Seifert-Van Kampen deve-se olhar para n -grupoides correspondentes à funtores assumindo valores nas categorias \mathbf{C}_n . Tais funtores podem realmente ser construídos, fornecendo generalização procurada. Explicitar esta construção e apresentar importantes consequências do teorema do Seifert-Van Kampen generalizado constituem os principais objetivos da referência [6].

Um último comentário: no desenvolvimento anterior, partimos do fato de que, diferentemente do grupo fundamental, os outros grupos de homotopia são sempre abelianos. Posto isto, buscamos por funtores que substituíssem os $\pi_{i \geq 2}$ e assumissem valores em categorias “não-abelianas”. Assim, os passos fundamentais nesta estratégia de generalização consistiram em *manter o foco nos grupos de homotopia e realizar a passagem do abeliano para o não-abeliano*.

Ao invés disso, poderíamos ter-nos desapegado dos grupos de homotopia e procurado por novos invariantes abelianos que cumpram condição semelhante ao teorema de Seifert-Van Kampen. Neste caso, cairíamos nas chamadas *teorias de homologia/cohomologia*, as quais fazem parte de uma outra área da Topologia Algébrica Clássica. Boas referências sobre o assunto incluem [10, 37, 28], assim como o clássico [18].

A vantagem desta abordagem é que ela conta com as ferramentas da Álgebra Homológica, que lida essencialmente com a construção e manipulação de sequências exatas. A respeito disso, referenciamos o leitor aos textos [32, 7, 52], que tratam do assunto na categoria dos módulos, e também às obras [30, 69, 86], que desenvolvem a teoria no contexto mais abstrato das categorias abelianas.

Homotopia Relativa

Em geral, na tentativa de comparar os invariantes de um subespaço $A \subset X$ com os invariantes que do espaço todo, introduz-se invariantes “relativos” associados ao par (X, A) . Nesta subsecção buscaremos uma boa definição para os *grupos de homotopia relativa*, usualmente denotados por $\pi_i(X, A, x_o)$, que contemple esta ideia. Em boas situações, eles serão responsáveis por mensurar efetivamente a diferença entre $\pi_i(A, x_o)$ e $\pi_i(X, x_o)$.

Como já comentamos, as ferramentas básicas para o cálculo de invariantes são as sequências exatas. No âmbito das categorias modelo, vimos que todo morfismo gera sequências exatas longas de fibrações e de cofibrações. No presente contexto, o morfismo fundamental é a inclusão $\iota : A \rightarrow X$, que produz a sequência de fibrações

$$\cdots \longrightarrow \Omega \text{ccone}(\iota) \longrightarrow \Omega A \xrightarrow{-\Omega \iota} \Omega X \longrightarrow \text{ccone}(\iota) \longrightarrow A \xrightarrow{f} Y$$

Buscamos por uma sequência exata que relacione os grupos $\pi_i(A)$ e $\pi_i(X)$. Ora, cada π_i é representável e isomorfo a $[\mathbb{S}^n; -]_{\mathcal{C}_*}$. Mas funtores representáveis preservam sequências de

fibrações. Assim, ao aplicar π_i na sequência anterior, como $\pi_i(\Omega X) \simeq \pi_{i+1}(X)$, obteremos aquela que procuramos (veja o diagrama abaixo). Ressaltamos que, da maneira como foi obtida, tal sequência é exata em **Set**. No entanto, pode-se mostrar que, se $i \geq 1$ ela é exata em **Grp**, ao passo que, se $i \geq 2$, então ela é exata em **AbGrp** (confira a página 62 de [55]).

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(A) \longrightarrow \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_i(\text{ccone}(\iota)) \longrightarrow \pi_i(A) \longrightarrow \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

Agora observamos que o termo que faz a conexão entre os grupos de A e os grupos de X é precisamente o *mapping cocone* $\text{ccone}(\iota)$ da inclusão $\iota : A \rightarrow X$. Por definição, este se trata do *pullback* homotópico abaixo, o qual pode ser calculado substituindo ι por uma resolução fibrante, como apresentado ao seu lado.

$$\begin{array}{ccc} \text{ccone}(\iota) & \dashrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \iota \\ * & \longrightarrow & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \text{ccone}(\iota) & \cdots \longrightarrow & \text{ccyl}(\iota) & \dashrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \iota \\ & & \text{Path}(X) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ * & \longrightarrow & X & & \end{array}$$

Se tomamos a resolução fibrante canônica, então $\text{Path}(X) \simeq \text{Map}(I; X)$ e o *mapping path space* $\text{ccyl}(\iota)$ se identifica com o espaço de todos os caminhos em X que chegam em A . Portanto, vemos que o *mapping cocone* é simplesmente o espaço dos caminhos em X que partem do ponto base $x_o \in A \subset X$ e chegam em A , o qual depende da terna par (X, A, x_o) .

Concluimos, assim, que o grupo $\pi_i(\text{ccone}(\iota))$ depende não só de X , mas também de A e do ponto base x_o . Além disso, é responsável por conectar invariantes de X e de A . Estes fatos servem de motivação para defini-lo como sendo o *i-ésimo grupo de homotopia relativa*.

Há, no entanto, uma requisição bastante natural a ser feita: *espera-se que um invariante relativo do par (X, A) recaia no invariante absoluto de X quando $A = X$* . Observamos que isto não é satisfeito se definimos $\pi_i(X, A)$ como sendo $\pi_i(\text{ccone}(\iota))$. De fato, se $A = X$, então $\iota = \text{id}_X$, cujo *mapping cocone* é ΩX . Portanto, tomando a definição anterior, teríamos

$$\pi_i(X, X) = \pi_i(\text{ccone}(\text{id}_X)) \simeq \pi_i(\Omega X) \simeq \pi_{i+1}(X),$$

contrariando o desejado. O problema pode ser facilmente contornado definindo $\pi_i(X, A)$ como sendo $\pi_{i-1}(\text{ccone}(\iota))$. É esta a definição costumeiramente adotada na literatura, da qual compartilharemos neste tomo. Com ela, as sequência exata de fibração de $\iota : A \rightarrow X$, agora chamada de *sequência exata em homotopia do par (X, A)* , se escreve

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(A) \longrightarrow \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(X, A) \longrightarrow \pi_i(A) \longrightarrow \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

Vejamos um exemplo de situação na qual a homotopia relativa mostra sua utilidade:

Exemplo 8.3.2. Mostraremos que, se $\iota : A \rightarrow X$ admite uma secção s , então para $i \geq 2$ a homotopia relativa mede, efetivamente, quão a homotopia de A difere da de X . De fato, se s é secção para ι , então $\pi_i(s)$ é secção para cada $\pi_i(\iota)$, seja qual for o i . Isto faz com que a sequência longa de fibração de ι possa ser obtida juntando sequências exatas curtas, referentes a cada i .

Mais precisamente, o fato de existirem secções na sequência longa faz com que $\pi_i(\iota)$ sejam sempre sobrejetivas e, conseqüentemente, que as ∂ sejam injetivas, de modo que as sequências curtas

$$0 \longrightarrow \pi_{i+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_i(A) \longrightarrow \pi_i(X) \longrightarrow 0$$

são todas exatas. No âmbito abeliano, uma sequência exata curta admite uma secção na segunda aplicação se, e somente se, o objeto do meio se decompõe como o coproduto dos termos exteriores. Este é o conteúdo do *splitting lemma* (veja [32, 52, 69, 86]), o qual pode ser entendido como uma generalização do teorema do núcleo e da imagem utilizado na álgebra linear. Observamos que, se $i \geq 2$, então os grupos de homotopia são todos abelianos e então estamos no domínio de validade do *splitting lemma*. Portanto, em tal situação, tem-se

$$\pi_i(A) \simeq \pi_i(X) \oplus \pi_{i+1}(X, A).$$

Situação estritamente análoga vale quando $\iota : A \rightarrow X$ possui uma retração ao invés de uma secção. Neste caso, no entanto, as $\pi_i(\iota)$ ficam injetivas (e não mais sobrejetivas), de modo que são as sequências curtas

$$0 \longrightarrow \pi_i(A) \longrightarrow \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(X, A) \longrightarrow 0$$

que se mostram exatas. Por uma versão do *splitting lemma* segue-se que, para $i \geq 2$,

$$\pi_i(X) \simeq \pi_i(A) \oplus \pi_i(X, A).$$

Exemplo 8.3.3. O exemplo anterior nos permite mostrar que, em geral, os grupos de homotopia não preservam coprodutos. Com efeito, dados espaços pontuados $X, Y \in \mathcal{H}\mathcal{C}_*$, a inclusão natural $X \vee Y \rightarrow X \times Y$ admite uma secção, de modo que, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \pi_i(X \vee Y) &\simeq \pi_i(X \times Y) \oplus \pi_{i+1}(X \times Y, X \vee Y) \\ &\simeq \pi_i(X) \times \pi_i(Y) \times \pi_{i+1}(X \times Y, X \vee Y). \end{aligned}$$

Sequências de Fibrações

Existem diversos livros na literatura que fazem uma introdução à Topologia Algébrica via grupo fundamental e espaços de recobrimento (exemplos são [22, 53, 48] e a segunda parte de [63]). A razão é a seguinte: como provaremos em seguida, toda fibração (como aquelas oriundas dos fibrados localmente triviais) define uma sequência exata, a qual nos permite relacionar o grupo de homotopia das fibras, com os grupos de homotopia da base e do espaço total.

Ora, quando se quer introduzir um assunto, procura-se motivar seu interesse mostrando que a teoria desenvolvida contempla alguns teoremas. Para demonstrá-los, necessita-se de poderosas ferramentas, das quais sequências exatas constituem exímio exemplo. Por outro lado, o grupo fundamental é o mais simples dos grupos de homotopia, ao passo que os espaços de recobrimento são os mais simples fibrados localmente triviais. Assim, ao se juntar os dois, tem-se uma teoria simples, mas dotada de boas ferramentas.

Vamos à construção da sequência comentada. Iniciamos observando que, uma vez fixado um ponto base $x_o \in X$, todo mapa $f : (X, x_o) \rightarrow (Y, y_o)$, com $y_o = f(x_o)$, induz uma inclusão natural ι da fibra $X_o = f^{-1}(y_o)$ em X . Tem-se as sequências exatas longas de fibrações associadas a f e

à ι . A primeira é responsável por relacionar os grupos da base Y com os grupos do espaço total X , ao passo que a segunda tem o papel ι relacionar os grupos da fibra X_o com os de X . Portanto, ao se ligar tais sequências obtém-se um vínculo entre todos estes grupos.

Tal ligação é obtida no caso especial em que f é uma fibração. Com efeito, esta hipótese faz com que o *pushout* homotópico associado ao *mapping cocone* de f produza espaços com mesmo tipo de homotopia se calculado com (ou sem) o uso de uma resolução fibrante para f . Se não a usamos (isto é, se calculamos tal *pushout* de maneira estrita), obtemos $\text{ccone}(f) \simeq X_o$, de modo que as sequências exatas de f e de ι se conectam:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Omega \text{ccone}(f) & \longrightarrow & \Omega X & \longrightarrow & \Omega Y & \longrightarrow & \text{ccone}(f) & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr^{id} & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr^{id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega X_o & \longrightarrow & \Omega X & \longrightarrow & \text{ccone}(\iota) & \longrightarrow & X_o & \xrightarrow{\iota} & X & & \end{array}$$

Agora, tomando π_i no diagrama anterior, obtemos o diagrama abaixo, o qual é formado de cinco setas, sendo as das extremidades isomorfismos. Consequentemente, por um resultado conhecido como *lema dos cinco* (confira [32, 52, 69, 86]), a seta do meio também é um isomorfismo.

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{i+1}(\text{ccone}(f)) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(X) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(Y) & \longrightarrow & \pi_i(\text{ccone}(f)) & \longrightarrow & \pi_i(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{i+1}(X_o) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(X) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(X, X_o) & \longrightarrow & \pi_i(X_o) & \longrightarrow & \pi_i(X) \end{array}$$

Utilizando de tal identificação na sequência exata longa de ι , chegamos, finalmente, naquela que cumpre o papel que procurávamos:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(X_o) \longrightarrow \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(Y) \longrightarrow \pi_i(X_o) \longrightarrow \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

Ilustremos a aplicabilidade de tal sequência por meio de dois exemplos. No segundo deles, esclarecemos a relação entre espaços de recobrimento e grupo fundamental que a pouco realçamos.

Exemplo 8.3.4. Dos exemplos da última subsecção segue-se que, para todo fibrado localmente trivial $f : X \rightarrow Y$ que possui uma secção $s : Y \rightarrow X$, a correspondente sequência curta

$$0 \longrightarrow \pi_i(X_o) \longrightarrow \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(Y) \longrightarrow 0$$

é exata, seja qual for o i . Se $i \geq 2$, então os grupos de homotopia são abelianos, de modo que podemos utilizar do *splitting lemma* para concluirmos $\pi_i(X) \simeq \pi_i(X_o) \oplus \pi_i(Y)$. Particularmente, se as fibras são contráteis, então $\pi_i(X) \simeq \pi_i(Y)$. Este é o caso dos fibrados vetoriais (que englobam os fibrados tangentes das variedades), cujas fibras são espaços lineares.

Exemplo 8.3.5. De maneira dual, se $f : X \rightarrow Y$ possui uma retração, então a sequência curta abaixo apresentada é exata e, em particular, quando $i \geq 2$ podemos aplicar o *splitting lemma*.

$$0 \longrightarrow \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(Y) \longrightarrow \pi_{i-1}(X_o) \longrightarrow 0$$

Suponhamos que f é um *espaço de recobrimento*. Em outras palavras, suponhamos ser f um fibrado localmente trivial com fibras discretas. Isto não garante nem mesmo que ele possui uma

retração, mas faz com que cada $\pi_i(f)$ a tenha, o que é suficiente para que as sequências curtas acima continuem exata. Em particular, para $i \geq 2$, faz com que $\pi_{i-1}(X_o) = 0$, de modo que $\pi_i(X) \simeq \pi_i(Y)$. Num âmbito geral não se tem muita informação quando $i = 1$. Ocorre que, sob condições bastante razoáveis, se um espaço Y admite um recobrimento X , então também admite um recobrimento simplesmente conexo X' . Daí, a exatidão da sequência anterior para fornece uma $\pi_1(Y) \simeq \pi_0(X'_o)$. Em suma, para boa parte dos espaços que admitem um recobrimentos, calcular grupo fundamental é contar o número de elementos de alguma fibra. Por exemplo, a aplicação $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, definida por $\exp(t) = (\cos t, \sin t)$ é recobrimento para o círculo. Como a reta é simplesmente conexa, $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ está em bijeção com $\exp^{-1}(0, 1) \simeq \mathbb{Z}$. De outro lado, como $\pi_i(\mathbb{R}) \simeq \pi_i(\mathbb{S}^1)$, vê-se que todos os grupos de homotopia de ordem superior do círculo são triviais.

Referências Bibliográficas

- [1] Adachi, M. “Embeddings and Immersions”, Translations of Mathematical Monographs, vol. 124, 1993.
- [2] Aguiar, M., Mahajan, S., *Monoidal Functors, Species and Hopf Algebras*
- [3] Baez, J. C., Dolan, J., *Categorification*, arXiv:math/9802029
- [4] Banyaga, A., Hurtubise, D., *Lectures on Morse Homology*, Kluwer Academic Publishers, 2004
- [5] Bernays, P. *Axiomatic Set Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.
- [6] Brown, R., Higgins, P. J., Sivera, R. *Nonabelian Algebraic Topology*, European Mathematical Society, 2011.
- [7] Cartan, H., Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [8] Cheng, E., Leinster, T., “Weak ω -categories via terminal coalgebras”, arXiv:1212.5853.
- [9] Cheng, E., Lauda, A. *Higher Dimensional Categories: an illustred guide book*. University of Cambridge.
- [10] Dold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1980.
- [11] Dugger, D., Shipley, B., “A curious example of triangulated-equivalent model categories that is which are not Quillen equivalent”, **Algebraic & Geometric Topology**, n.9, 2009, p. 135-166.
- [12] Dwyer, W. G., Hirshhorn, P. S., Kan, D. M., *Model Categories and More Abstract Homotopy Theory: A Work in What We Like to Think of as Progress*.
- [13] Dwyer, W. G., Kan, D. M., “Simplicial Localization of Categories”, **Journal of Pure and Applied Algebra**, 17, 1980, p. 267-284.
- [14] Dwyer, W. G., Kan, D. M., “Calculating Simplicial Localization”, **Journal of Pure and Applied Algebra**, 18, 1980, p. 17-35.

- [15] Dwyer, W. G., Kan, D. M., "Function Complexes in Homotopical Algebra", **Topology**, 19, 1980, p. 427-440.
- [16] Dwyer, W. G, Spalinski, J., *Homotopy Theories and Model Category*.
- [17] Eckmann, B., Hilton, P. J., "Group-Like Structures in General Categories I: Multiplications and Comultiplications", **Math. Annalen**, 142, p. 227-255, 1962.
- [18] Eilenberg, S., Steenrod, N., *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1952.
- [19] Farjoun, E. D., "Fundamental Group of Homotopy Colimits", **Advances in Mathematics**, 182, 2004, p. 1-27
- [20] Filipkiewicz, R. P., "Isomorphism between diffeomorphism groups", **Ergodic Theory Dynamical System**, vol. 2, 1982, 159-171.
- [21] Freyd, P., *Abelian Categories: An introduction to the Theory of Functors*, Reprints in Theory and Applications of Categories, n.3, 2003, p. 23-164.
- [22] Fulton, W., *Algebraic Topology: A First Course*, Springer, 1997.
- [23] Gabriel, P., Zisman, M., *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1967.
- [24] Godement, R., *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Hermann, 1958.
- [25] Goerss, P. G., Jardine, J. F., *Simplicial Homotopy Theory*, Birkhäuser Verlag, 1999.
- [26] Golubitsky, M., Guillemin, V., *Stable Maps and Their Singularities*, GTM 14 Springer-Verlag.
- [27] Gray, B. *Homotopy Theory: An introduction to Algebraic Topology*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1975.
- [28] Greenberg, M. J. *Lectures on Algebraic Topology*.
- [29] Groth, M., *A short course on ∞ -categories*, arXiv:1007.2925.
- [30] HELLER, A., "Homological Algebra in Abelian Categories", **Ann. of Math.** 68 (1958), pp. 484-525
- [31] Hovey, M. *Model Categories*, 1991.
- [32] Hilton, J. B., Stammbach, U. *A course in Homological Algebra*, GTM 4, Springer-Verlag, 1970.
- [33] Hirsch, M. W. "Differential Topology", Springer-Verlag, 1976.
- [34] Hirschhorn, P. S., *Model Categories and Their Localizations*, AMS, 2003.
- [35] Husemoller, D. "Fibre Bundles", GTM 20, Springer-Verlag, 1993.

- [36] Hu, S. *Homotopy Theory*, Academic Press, 1959.
- [37] Hu, S. *Homology Theory*, Holden-Day, 1966.
- [38] Irwin, M., C., *Smooth Dynamical Systems*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, vol. 17, World Scientific, 2001.
- [39] Joyal, A., *Notes on Quasi-Categories*.
- [40] Kan, D. M., “On c.s.s Complexes”, **American Journal of Mathematics**, Vol. 79, No. 3 (Jul., 1957), pp. 449-476
- [41] Kelley, J. L. *General Topology*, GTM 27, Springer-Verlag, 1991.
- [42] Kervaire, M. A. “A Manifold with does not admit any Differentiable Structure”, **Commentarii Mathematici Helvetici**, 34, 1960, pp. 304-312.
- [43] Lang, S., *Algebra*, GTM 211, Springer-Verlag, 2000.
- [44] Lang, S., *Introduction to Differentiable Manifolds*, Springer, 2000.
- [45] Leinster, T. “A Survey of Definitions of n -Category”, **Theory and Applications of Categories** 10 (2002), 1-70.
- [46] Leinster, T. *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 2014.
- [47] Leinster, T. *Higher Operads, Higher Categories*, Cambridge University Press.
- [48] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA.
- [49] Lurie, J., *Higher Topos Theory*, Princeton University Press, 2009.
- [50] Mac Lane, S., Birkhoff, G. *Algebra*, AMS Chelsea Publishing, 1999.
- [51] Mac Lane, S. *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1991.
- [52] Mac Lane, S. *Homology*, Springer, 1991.
- [53] Massey, S. M., *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer, 1974.
- [54] Matsumoto, Y., *An Introduction to Morse Theory*, AMS, 1997.
- [55] May, J. P. *A Concise Course on Algebraic Topology*, Chicago University Press, 1999.
- [56] May, J. P., Ponto, K., *More Concise Algebraic Topology*, Chicago University Press, 2012.
- [57] May, J. P. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Chicago University Press, 1967.
- [58] May, J. P., Sigurdsson, J. *Parametrized Homotopy Theory*, AMS., vol 10, 2006.

- [59] Milnor, J. W., *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1966.
- [60] Milnor, J. W., Stasheff, J. D., *Characteristic Classes*, Princeton University Press, 1974.
- [61] Milnor, J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. **Annals of Mathematics**, vol. 64, n.2, 1956, pp. 399-405.
- [62] Mitchell, B. *Theory of Categories*, Academic Press, 1965.
- [63] Munkres, J., *Topology*, Pearson, 2000.
- [64] Nicolaescu, L., *An Invitation to Morse Theory*, Springer, 2000.
- [65] Palis, J., Melo, W., *Geometric Theory of Dynamical System: An Introduction*, Springer-Verlag, 1982.
- [66] Polcino, C. M., Sehgal, S., K., *An Introduction to Group Rings*, Springer Science & Business Media, 2002
- [67] Riehl, E. *A Leisurely Introduction to Simplicial Sets*, 2011.
- [68] Riehl, E. *Categorical Homotopy Theory*, Cambridge University Press, 2014.
- [69] Rotman, J. J., *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, 2000.
- [70] Spanier, E. H. "Algebraic Topology", McGraw Hill, 1966;
- [71] Steenrod, N. "The topology of Fibre Bundle", Princeton University Press, 1951.
- [72] Steenrod, N. "A convenient category of topological spaces", **Michigan Math. Journal**, 14, 1967.
- [73] Steiner, R., *The algebra of the nerves of omega-categories*, arXiv:1307.4236.
- [74] Steiner, R., *Complicial structures in the nerves of omega-categories*, arXiv:1308.1532
- [75] Street, R., *The algebra of oriented complexes*, **Journal of Pure And Applied Algebra**, 49, 1987, p. 283-335.
- [76] Street, R. *Fillers for Nerves*, **Lecture Notes in Mathematics**, 1348, p. 337-341, 1988.
- [77] Strom, J., *Modern Homotopy Theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 127, AMS, 2011.
- [78] Strickland, N. P., *The Category of CGWH Spaces*.
- [79] Swan, R. S., *The Theory of Sheaves*, Chicago University Press, 1964.

- [80] Tamura, I. "8-manifolds admitting no differentiable structure", **J. Math. Soc. Japan**, vol. 13, n. 4, 1961, pp. 377-382.
- [81] Tennison, B. R., *Sheaf Theory*, Cambridge University Press, 1975.
- [82] Trimble, T., "What are 'fundamental grupoids'?", 1999, seminar at DPMMS, Cambridge, 24 August 1999.
- [83] Verity, D. "Complicial Sets: Characterising the simplicial nerves of strict ω -categories", **Mem. Amer. Math. Soc.**, 193, n.905, 2008.
- [84] Verity, D., *Weak Complicial Sets, Part I: Basic Homotopy Theory*, arXiv:math/0604414.
- [85] Verity, D., *Weak Complicial Sets, Part II: Nerves of Complicial Gray-Categories*, arXiv:math/0604416.
- [86] Weibel, C. A., *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.
- [87] Whitehead, G. W. *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1978.
- [88] Whittaker, J. V. "On isomorphic groups and homeomorphic spaces", **Ann. of Math.**, vol. 2, n. 78, 1963, 74-91.