Teorema de Hawking: um início para o Universo

Yuri Ximenes Martins

Departamento de Ciências Exatas
UFLA

Abril de 2015

Sumário

Variedades

Definição

Uma variedade de dimensão n é um espaço topológico M (geralmente suposto Hausdorff e segundo-contável), localmente homeomorfo ao $\mathbb{R}^n$.

Variedades

Definição

Uma variedade de dimensão n é um espaço topológico M (geralmente suposto Hausdorff e segundo-contável), localmente homeomorfo ao $\mathbb{R}^n$.

- Todo $p \in M$ admite vizinhança U homeomorfa a um aberto U_o do $\mathbb{R}^n$.

Variedades

Definição

Uma variedade de dimensão n é um espaço topológico M (geralmente suposto Hausdorff e segundo-contável), localmente homeomorfo ao $\mathbb{R}^n$.

- Todo $p \in M$ admite vizinhança U homeomorfa a um aberto U_o do $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Qualquer variedade de dimensão n é homeomorfa a um subespaço do $\mathbb{R}^{2n}$.

Variedades

Axioma

O universo é uma variedade de dimensão quatro (três para o espaço + uma para o tempo).

Variedades

Axioma

O universo é uma variedade de dimensão quatro (três para o espaço + uma para o tempo).

- Se $M = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, espaço e tempo estão globalmente definidos (são absolutos);

Variedades

Axioma

O universo é uma variedade de dimensão quatro (três para o espaço + uma para o tempo).

- Se $M = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, espaço e tempo estão globalmente definidos (são absolutos);
- Em geral, espaço e tempo estão localmente definidos.

Variedades

Advertência

A partir de agora, assumiremos $M \subset \mathbb{R}^m$ para algum m.

Variedades

Advertência

A partir de agora, assumiremos $M \subset \mathbb{R}^m$ para algum m.

Definição

Um caminho em $M \subset \mathbb{R}^m$ é aplicação diferenciável $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$, tal que $\gamma(t) \in M$ para todo t.

Variedades

Advertência

A partir de agora, assumiremos $M \subset \mathbb{R}^m$ para algum m.

Definição

Um caminho em $M \subset \mathbb{R}^m$ é aplicação diferenciável $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$, tal que $\gamma(t) \in M$ para todo t.

Definição

Diz-se que $v \in \mathbb{R}^m$ tange M em p quando existe caminho γ satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Geometria

Definição

Uma métrica semi-riemanniana em M é aplicação g, que a cada $p \in M$ faz corresponder uma forma bilinear $g_p : TM_p \times TM_p \to \mathbb{R}$, tal que:

- $g_p(v, w) = g_p(w, v)$;
- se $g_p(v, w) = 0$ para todo $w \in TM_p$, então $v = 0$.

Geometria

Definição

Uma métrica semi-riemanniana em M é aplicação g, que a cada $p \in M$ faz corresponder uma forma bilinear $g_p : TM_p \times TM_p \to \mathbb{R}$, tal que:

- $g_p(v, w) = g_p(w, v)$;
- se $g_p(v, w) = 0$ para todo $w \in TM_p$, então $v = 0$.

Axioma

No universo está definida uma métrica semi-riemanniana g, de assignatura igual a um.

Geometria

Definição

Diz-se que um caminho γ em M é:

- tipo-tempo, se $g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) < 0$ para todo t;
- tipo-luz, quando $g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$ em qualquer t;
- causal, se é tipo-tempo ou tipo-luz.

Geometria

Definição

Diz-se que um caminho γ em M é:

- tipo-tempo, se $g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) < 0$ para todo t;
- tipo-luz, quando $g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$ em qualquer t;
- causal, se é tipo-tempo ou tipo-luz.

Axioma

Caminhos tipo-tempo (resp. tipo-luz) descrevem trajetórias de partículas massivas (resp. sem massa).

Geometria

- Geodésicas são soluções de certa EDO definida em M, a qual depende da métrica g. Soluções maximais de tal equação dizem-se geodésicas inextendíveis.

Geometria

- Geodésicas são soluções de certa EDO definida em M, a qual depende da métrica g. Soluções maximais de tal equação dizem-se geodésicas inextendíveis.
- Curvatura é invariante geométrico que quantifica o comportamento local das geodésicas.

Geometria

- Geodésicas são soluções de certa EDO definida em M, a qual depende da métrica g. Soluções maximais de tal equação dizem-se geodésicas inextendíveis.
- Curvatura é invariante geométrico que quantifica o comportamento local das geodésicas.

Axioma

Geodésicas tipo-tempo (resp. tipo-luz) inextendiíveis são trajetórias de partículas massivas (resp. sem massa) livres.

Geometria

- Geodésicas são soluções de certa EDO definida em M, a qual depende da métrica g. Soluções maximais de tal equação dizem-se geodésicas inextendíveis.
- Curvatura é invariante geométrico que quantifica o comportamento local das geodésicas.

Axioma

Geodésicas tipo-tempo (resp. tipo-luz) inextendiíveis são trajetórias de partículas massivas (resp. sem massa) livres.

Definição

Uma variedade semi-riemanniana é dita singular quando admite alguma geodésica causal inextendível que não está definida em toda a reta.

Hipóteses

- Viagens que terminam em pontos próximos do ponto de partida não podem ser muito longas: para todo aberto $U \subset M$ existe $U' \subset U$ tal que todo caminho causal ligando dois pontos de U' está inteiramente contido em U;

Hipóteses

- Viagens que terminam em pontos próximos do ponto de partida não podem ser muito longas: para todo aberto $U \subset M$ existe $U' \subset U$ tal que todo caminho causal ligando dois pontos de U' está inteiramente contido em U;
- Dados pontos $p, q \in M$, existem poucos caminhos causais que os ligam: em uma certa topologia, o conjunto $\Gamma(p, q)$, formado dos caminhos causais ligando p a q, é compacto;

Hipóteses

- Viagens que terminam em pontos próximos do ponto de partida não podem ser muito longas: para todo aberto $U \subset M$ existe $U' \subset U$ tal que todo caminho causal ligando dois pontos de U' está inteiramente contido em U;
- Dados pontos $p, q \in M$, existem poucos caminhos causais que os ligam: em uma certa topologia, o conjunto $\Gamma(p, q)$, formado dos caminhos causais ligando p a q, é compacto;
- Curvatura não-negativa;

Hipóteses

- Viagens que terminam em pontos próximos do ponto de partida não podem ser muito longas: para todo aberto $U \subset M$ existe $U' \subset U$ tal que todo caminho causal ligando dois pontos de U' está inteiramente contido em U;
- Dados pontos $p, q \in M$, existem poucos caminhos causais que os ligam: em uma certa topologia, o conjunto $\Gamma(p, q)$, formado dos caminhos causais ligando p a q, é compacto;
- Curvatura não-negativa;
- Taxa de convergência das geodésicas tipo-tempo é positiva (esta exigência é interpretada como a hipótese de expansão do Universo).

Teorema

Qualquer variedade Lorentziana que satisfaz as condições abaixo admite geodésicas tipo-tempo inextendíveis definidas num intervalo finito da reta:

- hiperbolicidade global;
- curvatura de Ricci não-negativa para todo vetor tipo-tempo;
- existência de uma hiperfície de Cauchy tipo-espaço com futuro-convergência positiva.

Teorema

Qualquer variedade Lorentziana que satisfaz as condições abaixo admite geodésicas tipo-tempo inextendíveis definidas num intervalo finito da reta:

- hiperbolicidade global;
- curvatura de Ricci não-negativa para todo vetor tipo-tempo;
- existência de uma hiperfície de Cauchy tipo-espaço com futuro-convergência positiva.

Demonstração.

- geodésicas estão necessariamente parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco.

Teorema

Qualquer variedade Lorentziana que satisfaz as condições abaixo admite geodésicas tipo-tempo inextendíveis definidas num intervalo finito da reta:

- hiperbolicidade global;
- curvatura de Ricci não-negativa para todo vetor tipo-tempo;
- existência de uma hiperfície de Cauchy tipo-espaço com futuro-convergência positiva.

Demonstração.

- geodésicas estão necessariamente parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco.
- geodésicas maximam localmente o comprimento de arco;

Teorema

Qualquer variedade Lorentziana que satisfaz as condições abaixo admite geodésicas tipo-tempo inextendíveis definidas num intervalo finito da reta:

- hiperbolicidade global;
- curvatura de Ricci não-negativa para todo vetor tipo-tempo;
- existência de uma hiperfície de Cauchy tipo-espaço com futuro-convergência positiva.

Demonstração.

- geodésicas estão necessariamente parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco.
- geodésicas maximam localmente o comprimento de arco;
- as hipóteses do teorema garantem que geodésicas arbitrariamente próximas se cruzam depois de um tempo suficientemente longo. Além disso, após cruzarem, tais geodésicas deixam de maximizar o comprimento.

□

Considerações

- Relatividade Geral (RG) falha em situações de extrema temperatura e densidade;

Considerações

- Relatividade Geral (RG) falha em situações de extrema temperatura e densidade;
- Acredita-se que, em seu início, o universo era muito quente e denso (para estudá-lo, mecânica quântica (MQ) seria necessária);

Considerações

- Relatividade Geral (RG) falha em situações de extrema temperatura e densidade;
- Acredita-se que, em seu início, o universo era muito quente e denso (para estudá-lo, mecânica quântica (MQ) seria necessária);
- Espera-se que RG não descreva corretamente o início do universo;

Considerações

- Relatividade Geral (RG) falha em situações de extrema temperatura e densidade;
- Acredita-se que, em seu início, o universo era muito quente e denso (para estudá-lo, mecânica quântica (MQ) seria necessária);
- Espera-se que RG não descreva corretamente o início do universo;
- A descrição correta seria dada por RG + MQ;

Considerações

- Relatividade Geral (RG) falha em situações de extrema temperatura e densidade;
- Acredita-se que, em seu início, o universo era muito quente e denso (para estudá-lo, mecânica quântica (MQ) seria necessária);
- Espera-se que RG não descreva corretamente o início do universo;
- A descrição correta seria dada por RG + MQ;
- Reunir RG e MQ de maneira consistente é um dos grandes problemas atuais da física teórica.

Bibliografia

- Hawking, S. W., **Proc. Roy. Soc. London**, A294, 511, 1967;
- Hawking, S. W. *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1975;
- Penrose, R. *Techniques of Differential Topology in Relativity*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1987;
- Beem, J. K et al, *Global Lorentzian Geometry*, Chapman Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, 1996;
- do Carmo, M. P., *Geometria Rimanniana*, IMPA, 2008.