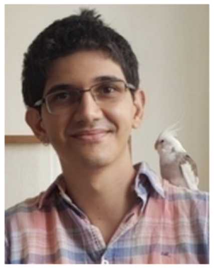
Introdução à Mecânica Racional

De todas as áreas da física, a Mecânica Newtoniana é, muito provavelmente, a que está mais diretamente ligada ao nosso cotidiano. Isso faz dela objeto de interesse e de estudo de uma grande gama de profissionais, estando presente no currículo básico de Físicos e Engenheiros. No entanto, em suas abordagens atuais, fica em segundo plano a beleza matemática subjacente: espaços vetoriais e afins, transformações lineares, campos vetoriais e equações diferenciais se juntam para formalizar a Cinemática e descrever fenômenos da Dinâmica. A ausência do emprego de um formalismo matemático adequado faz com que a Mecânica, tão importante para se ganhar habilidades de formalização matemática, passe desapercebida por grande parte dos estudantes da Matemática. Na tentativa de cobrir essa falha, até pouco tempo atrás, os currículos de Matemática eram acrescidos de um curso de Mecânica Racional, o qual apresentava a Mecânica de um ponto de vista formal. Com este texto, prestamos nossa homenagem a esse curso tão importante, mas que ao longo dos anos perdeu seu lugar.



Yuri Ximenes Martins é licenciado em Física pela UFLA, mestre em Matemática pela UFMG e doutorando em Matemática pela mesma instituição. Idealizador e Co-fundador do grupo de pesquisa Math-Phys-Cat, tem desenvolvido trabalhos, orientado estudantes e apresentado cursos e seminários nas áreas de Física-Matemática e Matemática Pura.

9 786202 808330

Yuri Ximenes Martins

Introdução à Mecânica Racional

Dos números reais à dinâmica nas vizinhanças da Terra

Novas Edições Acadêmicas

Yuri Ximenes Martins

Introdução à Mecânica Racional

Yuri Ximenes Martins

Introdução à Mecânica Racional

Dos números reais à dinâmica nas vizinhanças da Terra

Novas Edições Acadêmicas

Imprint
Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:
Novas Edições Acadêmicas
is a trademark of
International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group
17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius
Printed at: see last page
ISBN: 978-620-2-80833-0

Introdução à Mecânica Racional: Dos Números Reais à Dinâmica nas Vizinhanças da Terra

Yuri Ximenes Martins

Sumário

Apresentação

Este texto foi concebido através de notas de aula de um minicurso elementar sobre os fundamentos da Mecânica Racional, apresentado na Universidade Federal de Lavras no ano de 2015. As notas estão dividas em oito lições, uma para cada aula, contendo, ao final, uma pequena lista de exercícios propostos.

As quatro primeiras lições tratam de introduzir, desde os números reais até o conceito de derivada de caminhos no espaço, todo o ferramental matemático necessário para o desenvolvimento da cinemática e da dinâmica. Na quinta lição, a noção de referencial é apresentada e suas principais propriedades são abordadas, enquanto que na sexta a cinemática de uma partícula é finalmente introduzida. A sétima lição, sobre dinâmica, cobre os principais tópicos concernentes ao movimento de uma partícula são considerados. Por exemplo, fala-se das leis do movimento e de suas consequências (como o princípio da relatividade do movimento), bem como dos problemas de existência e unicidade para a equação do movimento, e das forças centrais. Por último, na oitava lição, estuda-se as aproximações para a dinâmica nas proximidades da Terra.

Com este pequeno texto espera-se diminuir, ao menos de forma infinitesimal, a corrente incompatibilidade entre os cursos de graduação de Física e de Matemática, a qual leva, de forma inevitável, ao distanciamento dos estudantes de um curso com respeito ao outro. De fato, o minicurso compreendido por estas notas surgiu justamente com este espírito: enquanto estudante de graduação em Física, ví meus colegas da Física se rebelarem contra a Matemática, e meus colegas da Matemática desconsiderarem completamente a Física.

Vale ressaltar a tentativa de se fazer um texto que fosse acessível a estudantes de ensino-médio. Isso garantiria a compreensão tanto dos mais diversos estudantes de graduação de Física (que por ventura poderiam ter uma relação com a matemática no nível do ensino básico), quanto dos da Matemática (que poderiam ter ignorado por completo a Física depois que entraram no ensino superior).

Muitos tópicos foram, obviamente, deixados de lado em virtude da natureza do texto: um convite, um incentivo, um primeiro direcionamento, uma mão estendida rumo ao contato entre estudantes de uma área e os maravilhosos conceitos, ferramentas, resultados e ideias da área conseguinte. Para um estudo completo da mecânica clássica sob um olhar mais formal, sugerimos o grande clássico *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, de Vladmir Arnold (livro que fez crescer meu interesse na Matemática) e o livro *Introdução* *à Mecânica Clássica*, do professor Artur Lopes. Além disso, ao final de cada lição são fornecidas algumas referências complementares que acreditamos terem sido escritas com pré-requisitos próximos aos deste texto.

Yuri Ximenes Martins,
Belo Horizonte, 2021.

Capítulo 1

Os Números Reais

Relembremos que no conjunto de todos os números reais[1] (denotado por $\mathbb{R}$) estão definidas duas operações, chamadas de soma e de multiplicação, as quais satisfazem as seguintes propriedades:

1. a soma é associativa. Isto é, se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2. a soma é comutativa: $a + b = b + a$;
3. qualquer número real somado ao zero dá ele mesmo;
4. para todo $a \in \mathbb{R}$ existe um outro (diga-se $-a$) tal que a soma deste com o primeiro resulta precisamente em zero;
5. a multiplicação é associativa: $(ab)c = a(bc)$;
6. a multiplicação é comutativa: $ab = ba$;
7. qualquer número real multiplicado por um dá ele mesmo;
8. para todo $a \in \mathbb{R}$ dado, consegue-se obter um outro (diga-se $1/a$) segundo o qual sua multiplicação com a tem o número um como resultado;
9. a soma é distributiva: $a(b + c) = ab + ac$.

Reúne-se todas estas propriedades dizendo que, enquanto dotado das referidas operações, o conjunto $\mathbb{R}$ constitui um *corpo*. Utiliza-se de $\mathbb{R}_+$ para representar a coleção de todos os números reais (chamados de *positivos*) tais que

1. se a e b estão em $\mathbb{R}_+$, então a soma $a + b$ também está;
2. independente de qual seja o $a \in \mathbb{R}$, acontece alguma das três possibilidades:

[1] Também chamado de reta real (ou simplesmente de reta).

(a) $a \in \mathbb{R}_+$;
(b) $a = 0$;
(c) $-a \in \mathbb{R}_+$.

Um número diferente de zero que não é positivo é dito *negativo*. Se $a \neq 0$ é positivo, então é claro que $-a$ é negativo.

Definição. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, fala-se que a é maior ou igual à b quando $a - b$ não é negativo. No caso de ser $a - b$ positivo, diz-se que a é maior do que b. Nas respectivas situações, escreve-se $a \geq b$ e $a > b$.*

No que diz respeito à relação $\geq$, conta-se com as seguintes condições:

1. reflexidade: qualquer $a \geq a$;
2. anti-simetria: se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $b = a$;
3. transitividade: $a \geq b$ e $b \geq c$ implicam em $a \geq c$;
4. monoticidade da soma: se $a \geq b$, então $a + c \geq b + c$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$;
5. monoticidade da multiplicação: se $a \geq b$, então $ac \geq bc$ para todo c positivo.

Mais uma vez, ao invés de enunciar todas as condições anteriores, fala-se simplesmente que, enquanto disposto da relação $\geq$, o corpo dos números reais é *ordenado*.

Observação. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, compreende-se que b é menor ou igual à a (resp. menor do que a) quando o número a é maior ou igual à b (resp. maior do que b). Em tal situação, escreve-se $b \leq a$ (resp. $b < a$). Verifica-se, de prontidão, que a relação $\leq$ também faz de $\mathbb{R}$ um corpo ordenado.

Mais algumas definições:

Definição. *Chama-se o intervalo aberto entre os números a e b ao conjunto de todo $c \in \mathbb{R}$ que é simultaneamente maior do que a e menor do que b.*

De maneira mais sucinta, diz-se que c pertence ao intervalo entre a e b (ou que está entre estes dois números) quando $a < c$ e $c < b$. Escreve-se $c \in (a, b)$. Algumas vezes coloca-se $(-\infty, \infty)$ para representar a reta $\mathbb{R}$. O conjunto dos reais positivos é então denotado por $(0, \infty)$. O mesmo é feito para $(-\infty, 0)$ e os reais negativos.

Observação. Por definição, um intervalo aberto (a, b) não pode conter seus extremos (diga-se a e b). As próximas definições vêm no sentido de permitir que isto seja feito.

Definição. *O intervalo fechado em $a \in \mathbb{R}$ e aberto em $b \in \mathbb{R}$ é a reunião de (a, b) com o número b.*

Equivalentemente, é o conjunto $[a, b)$, formado por todo número c tal que $a \leq c$ ao mesmo tempo que $c < b$. De forma análoga define-se intervalo aberto em $a \in \mathbb{R}$ e fechado em $b \in \mathbb{R}$, escrevendo $(a, b]$ para identificá-lo.

Definição. *O intervalo fechado entre* $a \in \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *é a reunião de* $[a, b)$ *com o número* $(a, b]$.

Em outras palavras, diz-se que c pertence ao intervalo fechado entre a e b quando $a \leq c$ conjuntamente com $c \leq b$. Escreve-se $[a, b]$ para denotar a coleção de todos estes. De imediato verifica-se que $[a, b]$ nada mais é do o intervalo aberto (a, b), no qual foram adicionados os seus extremos.

Exercícios

1. Convença-se de que $\mathbb{R}$ é um corpo;
2. Verifique que $\mathbb{R}$ é ordenado.
3. Responda: o conjunto vazio é um intervalo? Caso afirmativo, diga se ele é aberto, fechado, etc.;
4. Prove que a união de dois intervalos abertos com um ponto em comum ainda é um intervalo aberto;
5. Faça o mesmo para a intersecção.

Problema

1. Define-se o valor absoluto de $a \in \mathbb{R}$ por ser o número $|a|$ tal que

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{contrariamente.} \end{cases}$$

Demonstre que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $|a + b| \leq |a| + |b|$ e $|ab| = |a||b|$.

Bibliografia

Para maiores informações, sugerimos ao leitor os dois primeiros capítulos da seguinte obra:

1. Lima, E. L. Um curso de Análise, vol. 1. Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro.

Capítulo 2

O Espaço Geométrico $\mathbb{R}^3$

Dá-se o nome de *espaço* $\mathbb{R}^3$ à coleção de todas as ternas (x_1, x_2, x_3) de números reais. Em tal conjunto, conta-se com duas operações básicas, chamadas de soma e de multiplicação por um número real, definidas, em respectiva ordem, da seguinte maneira:

- se $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ são elementos de $\mathbb{R}^3$, então

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

- fornecidos $x \in \mathbb{R}^3$ e um número $a \in \mathbb{R}$, põe-se

$$ax = a(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, ax_2, ax_3).$$

Estas operações satisfazem algumas propriedades elementares, as quais apresentaremos em seguida. Acreditamos que o leitor não encontrará muitas dificuldades em demonstrá-las. Por este motivo, incumbiremos a ele tal tarefa.

Observação. Abaixo, x,y e z são elementos de $\mathbb{R}^3$, enquanto que $a \in \mathbb{R}$.

1. A soma é associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$;
2. a soma é comutativa: $x + y = y + x$;
3. existe um $0 \in \mathbb{R}^3$, chamado de origem, tal que $0 + x = x$ independente de qual for o $x \in \mathbb{R}^3$;
4. para todo $x \in \mathbb{R}^3$ existe um outro elemento deste mesmo conjunto, denotado por $-x$ e dito ser "*o oposto de* x", tal que $-x + x = 0$;
5. a soma é distributiva: $a(x + y) = ax + ay$;
6. vale $1x = x$.

Muitas das vezes, condensa-se todas estas propriedades dizendo simplesmente que, enquanto dotado das referidas operações, $\mathbb{R}^3$ é um *espaço vetorial sobre o corpo dos números reais*. Os elementos de tal espaço são chamado de vetores (ou mesmo de pontos).

Definição. *Dados vetores* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $y = (y_1, y_2, y_3)$*, define-se o produto escaler entre eles por ser o número*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{2.1}$$

As seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ e quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$:

1. linearidade: $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$;
2. simetria: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
3. positividade: $\langle x, x\rangle$ nunca é menor do que zero.

No momento em que se considera o produto escalar em $\mathbb{R}^3$, passa-se a contar com uma gama de conceitos geométricos e bastante intuitivos. Por exemplos, pode-se definir ângulos entre vetores, distância entre pontos e a norma (ou o "tamanho") de um dado $x \in \mathbb{R}^3$. é isto o que faremos agora.

Definição. *Chama-se a norma do vetor* $x \in \mathbb{R}^3$ *ao número* $\|x\|$*, obtido tomando-se a raiz quadrado do produto escalar de* x *por ele mesmo.*

Assim, se $x = (x_1, x_2, x_3)$, então sua norma nada mais é do que a quantidade

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{2.2}$$

Observação. Em virtude da terceira propriedade do produto escalar, $\|x\| \geq 0$. Além disso, da própria definição de norma, segue-se que o único vetor de "tamanho" nulo é a origem.

Definição. *Dados* $x, y \in \mathbb{R}^3$*, definimos a distância entre eles por ser a norma do vetor*[1] $x - y$.

Desta forma, a distância entre $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ é consistida do número

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Observação. O leitor deve notar que, assim como a norma de um vetor, a distância entre dois pontos nunca é negativa. Em particular $d(x, y) = 0$ se, e somente se, x for igual à y.

Definição. *Define-se o ângulo entre dois vetores* x *e* y *como sendo àquele, entre zero e* π*, cujo cosseno vale* $\langle x, y\rangle/\|x\|\|y\|$.

[1] *Por comodidade, escreve-se* $x - y$ *ao invés de* $x + (-y)$.

Fala-se que x e y são *ortogonais* quando o produto interno entre eles é igual a zero. Diretamente da definição anterior, segue-se que isto acontece se, e só se, algum deles é a origem, ou no caso de estarem separados por um ângulo reto (ou seja, de $\pi/2$).

Verifica-se, também, que a origem é o único vetor que é ortogonal a todos os outros (ou, de maneira equivalente, que ele é ortogonal a si mesmo).

Proposição. *Dados* $x, y \in \mathbb{R}^3$*, consegue-se obter um* $v \in \mathbb{R}^3$*, o qual é diferente da origem e simultaneamente ortogonal à* x *e à* y*.*

Demonstração. Se $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, pomos

$$v = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_2y_1 - x_1y_2). \tag{2.3}$$

Afirmamos que v é ortogonal à x. Com efeito,

$$\begin{aligned}\langle x, v\rangle &= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_2y_1 - x_1y_2)\\ &= x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_2x_1y_3 + x_3x_2y_1 - x_3x_1y_2,\end{aligned}$$

que é igual a zero pela comutatividade da soma do produto entre números reais. A prova de que $\langle y, v\rangle = 0$ é estritamente análoga. Vamos deixá-la, por este motivo, como tarefa ao leitor. □

O vetor $v \in \mathbb{R}^3$ assim obtido é comumente chamado de "*o produto vetorial entre* x *e* y". Denota-o por $v = x \times y$. Diretamente de (3), vetifica-se que $x \times y = -y \times x$. Fala-se, então, que o produto vetorial é antissimétrico.

Exercícios

1. Prove que $\mathbb{R}^3$ é espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.
2. Demonstre as três propriedades do produto escalar que aqui foram apresentadas;
3. Conclua que dois vetores distintos da origem são ortogonais se, e só se, o ângulos que os separa é de $\pi/2$;
4. Dado um número $a \in \mathbb{R}$ e um vetor $x \in \mathbb{R}^3$, verifique que $\|ax\| = |a|\|x\|$;
5. Um vetor cuja norma é igual a um chama-se unitário. Dado qualquer $x \in \mathbb{R}^3$, mostre que $\hat{x} = x/\|x\|$ é unitário;
6. Verifique a antissimetria do produto vetorial. Prove também que $y \times y = 0$.

Problemas

1. Chama-se a bola aberta com centro em $x \in \mathbb{R}^3$ e raio $\varepsilon > 0$ ao conjunto $B_x(\varepsilon)$, formado de todo ponto que dista de x um número menor do que ε. Mais precisamente,

$$B_x(\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^3 | \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Diz-se que um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ é aberto quando pode ser escrito como a reunião de bolas abertas. Prove que

   (a) a reunião de quaisquer abertos ainda é um aberto;
   (b) a intersecção finita de abertos é aberto;
   (c) o conjunto vazio e o próprio espaço $\mathbb{R}^3$ são abertos.

2. Demonstre que os vetores

$$\hat{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \hat{e}_2 = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \hat{e}_3 = (0, 0, 1)$$

são unitários e dois a dois ortogonais. Demonstre também que, dado $v \in \mathbb{R}^3$, existem unicamente três números $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, tais que

$$v = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3.$$

3. Demonstre a desigualdade triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

4. Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, seja θ o ângulo entre eles. Prove que $\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \sin\theta$.

Sugestão. Faça uso de (3) para mostrar que

$$\|x \times y\| = \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2}.$$

Depois utilize da definição de θ e do teorema de pitágoras para encontrar

$$\sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2} = \|x\|\|y\| \sin\theta.$$

Bibliografia

Para maiores informações, sugerimos que consulte

1. Lima, E. L. Geometria Analítica e álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro;

2. Lima, E. L. Análise Real, vol. 2. Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro.

Capítulo 3

Transformações no Espaço

Uma *matriz quadrada* no espaço $\mathbb{R}^3$ é uma lista A, composta de nove números reais. Muitas das vezes, organiza-se os elementos de A, de três em três, contados da esquerda para direita, em termos de linhas e colunas. De maneira mais expressiva, com isto queremos dizer que, ao invés de se escrever

$$A = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9),$$

utiliza-se da notação

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}.$$

Fala-se, a partir daí, que as ternas (x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5, x_6) e (x_7, x_8, x_9) constituem, em respectiva ordem, a primeira, a segunda e a terceira *linha* da matriz A. De forma similar, passa-se a chamar as ternas (x_1, x_4, x_7), (x_2, x_5, x_8) e (x_3, x_6, x_9) de primeira, segunda e terceira *colunas* de A.

O leitor é convidado a observar que um mesmo elemento aparece em uma única linha e em uma única coluna. Isto significa que a sua localização dentro da matriz fica inteiramente determinada ao se conhecer a linha e a coluna às quais ele pertence. Por exemplo, ao mesmo tempo que x_4 é o quarto constituinte de A (enquanto lista), ele é o único elemento que está na intersecção entre a segunda linha com a primeira coluna.

Assim, para representar um elemento genérico de uma matriz quadrada A em $\mathbb{R}^3$, das duas uma:

1. ou se escreve x_i, permitindo que o índice i assuma valores entre um e nove;

2. ou coloca-se x_{ij}, com i e j correspondendo, respectivamente, à linha e à coluna nas quais ele se encontra. Nesta última situação, tanto i quanto j assumem valores entre um e três.

Advertência. Para além destas palavras, sempre que formos identificar os constituintes de uma matriz A, utilizaremos de *linhas e de colunas*. Particularmente, eles serão representados por A_{ij}.

Observação. Numa matriz A, fala-se que os elementos A_{ii} (com j igual a i) fazem parte de sua *diagonal principal*. Diz-se que uma matriz é *diagonal* quando todos os elementos que estão fora de sua diagonal principal são iguais a zero. A matriz I, que além de ser diagonal satisfaz $I_{ii} = 1$ para cada i, é chamada de *identidade*.

Observação. à matriz $A^\dagger$, cujos elementos são obtidos dos de A ao se trocar linhas por suas respectivas colunas, dá-se o nome de *transposta* de A. Desta forma, se A_{ij} são os elementos de A, então ${A^\dagger}_{ij} = A_{ji}$.

Operações Com Matrizes

No conjunto das matrizes quadradas em $\mathbb{R}^3$, denotado por $M(3;\mathbb{R})$, estão estabelecidas três operações fundamentais. Tratam-se da soma, do produto e da multiplicação por um número real, cada uma das quais definidas da seguinte maneira:

- chama-se a soma entre duas matrizes A e B de $M(3;\mathbb{R})$ à matriz $A + B$, também pertencente a este conjunto, cujos elementos são obtidos somando-se àqueles de A com os de B. Mais precisamente, é a matriz tal que $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$;

- define-se a multiplicação de uma matriz A por um número $a \in \mathbb{R}$ como sendo a matriz aA, cujos elementos diferem dos de A por um fator multiplicativo e igual a a. Em outras palavras, exige-se que $(aA)_{ij} = aA_{ij}$;

- finalmente, fornecidas matrizes A e B, diz-se que o produto entre elas é a matriz AB, com elementos calculados segundo a expressão $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik}B_{kj}$.

Verifica-se que, com as operações de soma e de multiplicação por escalar acima definidas, o conjunto $M(3;\mathbb{R})$ dá origem a um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Com isto queremos dizer que:

1. A soma é associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$;

2. a soma é comutativa: $A + B = B + A$;

3. existe um $0 \in M(3;\mathbb{R})$, chamada de matriz nula, tal que $0 + A = A$ para todo $A \in M(3;\mathbb{R})$;

4. para qualquer $A \in \mathbb{R}^3$ existe um outro elemento deste mesmo conjunto, denotado por $-A$ e dito ser "*a oposta de A*", tal que $-A + A = 0$;

5. a soma é distributiva: $a(A + B) = aA + aB$;

6. vale $1A = A$ para todo $A \in M(3;\mathbb{R})$.

No que toca a relação entre o produto de matrizes e as demais operações presentes em $M(3;\mathbb{R})$, conta-se, além das seis propriedades anteriormente listadas, com mais quatro:

1. O produto é associativo: $(AB)C = A(BC)$;
2. O produto é distributivo (pela esquerda) com relação à soma: $A(B+C) = AB+BC$;
3. O produto é distributivo (pela direta) com relação à soma: $(B+C)A = BA+CA$;
4. vale $IA = A$ para toda matriz $A \in M(3;\mathbb{R})$.

Condensa-se todas estas dez propriedades dizendo que, enquanto munido das operações de soma, de produto e de multiplicação por escalar, o conjunto $M(3;\mathbb{R})$ dá origem a uma *álgebra associativa com unidade*. Alternativamente, pode-se dizer que tal estrutura de álgebra é introduzida no espaço vetorial $M(3;\mathbb{R})$ por intermédio do produto usual de matrizes.

Transformações Lineares

Fixada uma matriz quadrada A em $\mathbb{R}^3$, definimos sua ação sobre um elemento $x \in \mathbb{R}^3$ por ser o vetor Ax, cuja i-ésima componente é

$$(Ax)_i = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + A_{i3}x_3 = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}x_j.$$

Assim, para cada matriz $A \in M(3;\mathbb{R})$ existe uma correspondência $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, do espaço geométrico nele mesmo, que tem como função associar a todo $x \in \mathbb{R}^3$ a ação de A sobre ele. Utilizando das propriedades básicas da soma e do produto entre números reais, mostra-se que esta correspondência é *linear*. Com isto queremos dizer que, se $x, y \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathbb{R}$, então:

1. $T_A(x+y) = T_A(x) + T_A(y)$;
2. $T_A(ax) = aT_A(x)$.

Observação. Por satisfazer as duas propriedades anteriores, fala-se que $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma *transformação linear* do espaço geométrico sobre ele mesmo.

Matrizes Ortogonais

Compreende-se que uma matriz $A \in M(3;\mathbb{R})$ é *ortogonal* quando sua ação preserva a norma de vetores. Isto é, quando, para qualquer que seja o $x \in \mathbb{R}^3$ escolhido, pode-se escrever $\|Ax\| = \|x\|$.

Lema 1. *Sejam $A \in M(3;\mathbb{R})$ uma matriz e $x, y \in \mathbb{R}^3$ vetores. Vale $\langle y, Ax\rangle = \langle A^\dagger y, x\rangle$.*

Demonstração. Ponhamos $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. Por definição, a i-ésima componente do vetor Ax é $\sum_{j=1}^3 A_{ij}x_j$. Neste caso,

$$\begin{aligned}
\langle y, Ax\rangle &= \sum_{i=1}^3 y_i(Ax)_i \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_i A_{ij} x_j \\
&= \sum_{j=1}^3 \Big(\sum_{i=1}^3 A_{ij} y_i\Big) x_j \\
&= \sum_{j=1}^3 \Big(\sum_{i=1}^3 A^\dagger_{ji} y_i\Big) x_j \\
&= \sum_{j=1}^3 (A^\dagger y)_j x_j = \langle A^\dagger y, x\rangle,
\end{aligned}$$

que é justamente o que nos propusemos a obter. □

Proposição 1. *Se $A \in M(3;\mathbb{R})$ é uma matriz ortogonal, então $A^\dagger A = I$.*

Demonstração. Pela ortogonalidade de A, podemos escrever $\|Ax'\| = \|x'\|$ para todo $x' \in \mathbb{R}^3$. Em particular, isto há de valer para $x' = x - y$. Como $A(x - y) = Ax - Ay$, segue-se que

$$\|A(x - y)\| = \|Ax - Ay\| = \|x - y\|.$$

Utilizando da definição de norma ($\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$), a expressão anterior fica assim:

$$\langle Ax - Ay, Ax - Ay\rangle = \langle x - y, x - y\rangle. \tag{3.1}$$

Como o produto escalar é bilinear e simétrico, temos

$$\langle Ax - Ay, Ax - Ay\rangle = \langle Ax, Ax\rangle - 2\langle Ax, Ay\rangle + \langle Ax, Ay\rangle = \|Ax\|^2 - 2\langle Ax, Ay\rangle + \|Ay\|^2;$$

$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle x,y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2.$$

Substituindo estas expressões em (1), ficamos com

$$\|Ax\|^2 - 2\langle Ax, Ay\rangle + \|Ay\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2.$$

A ortogonalidade de A faz com que $\|Ax\|^2 = \|x\|^2$, donde a última igualdade implicar em

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Diretamente do lema anterior,

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^\dagger Ax, y\rangle.$$

Portanto, independente de quais sejam $x, y \in \mathbb{R}^3$, deve-se ter

$$\langle A^\dagger Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Isto significa que a matriz $A^\dagger A$ é precisamente a identidade, finalizando a demonstração. □

Observação. A recíproca da proposição anterior é também verdadeira. Mais precisamente, se A é matriz tal que $A^\dagger A = I$, então ela é ortogonal.

Observação. O conjunto de todas as matrizes ortogonais em $\mathbb{R}^3$ é usualmente denotado por $O(3)$. Ao longo do restante do curso, seguiremos esta mesma prática.

Exercícios

1. Verifique que, com a soma e com a multiplicação por escalar, $M(3;\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais;

2. Prove que o produto de matrizes faz do espaço $M(3;\mathbb{R})$ uma álgebra associativa com unidade;

3. Mostre que, para qualquer que seja a matriz A, a aplicação $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é linear.

4. Demonstre a recíproca da proposição 1.

Problemas

1. Chama-se o determinante de uma matriz $A \in M(3;\mathbb{R})$, de elementos A_{ij}, ao número real

$$\det A = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23}) + A_{12}(A_{23}A_{31} - A_{33}A_{21}) + A_{13}(A_{32}A_{21} - A_{22}A_{31}).$$

(a) Demonstre que o determinante do produto de duas matriz é igual ao produto de seus determinantes; isto é, prove que $\det(AB) = \det A \det B$;

(b) Verifique que o determinante da transposta de uma matriz é igual ao determinante da própria matriz; isto é, mostre que $\det A^{\dagger} = \det A$;

(c) Prove que o determinante de uma matriz diagonal é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal. Conclua, daí, que a identidade tem determinante igual a um;

(d) Utilizando dos três resultados anterior e da proposição 1, demonstre que se $A \in M(3;\mathbb{R})$ é ortogonal, então seu determinante ou é igual a um, ou é igual a menos um.

2. Prove que, assim como $M(3;\mathbb{R})$, o conjunto $O(3)$ das matriz ortogonais constitui, com a soma e com a multiplicação por escalar, um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

Bibliografia

Como leitura suplementar, sugerimos o primeiro capítulo de

1. Lima, E. L. Cálculo Tensorial, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2012;

2. Lima, E. L. Análise Real, vol. 2. Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro.

Capítulo 4

Caminhos em $\mathbb{R}^3$

Um *caminho* em $\mathbb{R}^3$ nada mais é do que uma aplicação $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, definida num intervalo I da reta (podendo ser aberto, fechado ou nenhuma das duas coisas) e assumindo valores no $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, no caso de I ser o intervalo fechado no zero e aberto no infinito, γ faz corresponder a cada número real positivo t um ponto $\gamma(t)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo. Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, a aplicação $t \mapsto x + ty$, definida num intervalo contendo o zero, é um caminho. Sua imagem consiste-se da reta que passa pelo ponto x em $t = 0$.

Exemplo. As aplicações $\gamma, \xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, caracterizadas por cumprirem $\gamma(t) = tx + \frac{1}{2}t^2 y$ e $\xi(t) = |t|x$ também são caminhos.

Exemplo. A correspondência $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$ é mais um exemplo de caminho no espaço $\mathbb{R}^3$.

Fornecidos caminhos γ e λ, ambos definidos num mesmo intervalo I, define-se a soma entre eles por ser a função $\gamma + \lambda$, que em cada $t \in I$ vale

$$(\gamma + \lambda)(t) = \gamma(t) + \lambda(t).$$

Analogamente, se $a \in \mathbb{R}$ é um número real, chama-se de produto de γ por a ao caminho $a\gamma$, tal que

$$(a\gamma)(t) = a\gamma(t).$$

Exemplo. O resultado da soma entre os caminhos dos últimos exemplos é aquele que toma $t \in \mathbb{R}$ e devolve o ponto $(1 + t + |t|)x + (t + \frac{1}{2}t^2)y$.

Escolhido $t \in I$, fala-se que um caminho $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ tem *vetor tangente* no ponto[1] $\gamma(t)$ quando qualquer outro $\gamma(t + h)$, com h suficientemente próximo de t, pode ser linearmente

[1]às vezes, por mera questão de comodidade, diz-se que γ possui vetor tangente em $t \in I$.

aproximado por $\gamma(t)$. Mais precisamente, quando, independente de qual seja o $h \in \mathbb{R}$ satisfazendo $t+h \in I$, consegue-se encontrar vetores $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^3$ e $r(h) \in \mathbb{R}^3$, tais que

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + h\gamma'(t) + r(h). \tag{4.1}$$

Exige-se também que, dado um número $\varepsilon > 0$ exista ao menos um $\delta > 0$ segundo o qual $\|r(h)\|/|h| < \varepsilon$ sempre que $|h| < \delta$.

Observação. A expressão (1) explicita que, para que a aproximação a ser feita seja linear, basta garantir a irrelevância de $r(h)$. As exigências restantes (que envolvem os "epsilons" e os "deltas") dão esta garantia.

Ao vetor $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^3$, no caso de sua existência, dá-se o nome de *vetor tangente* à γ no ponto $\gamma(t)$.

Proposição 2. *Quando existem, vetores tangentes são únicos.*

Demonstração. Permitamos que $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ possua mais de um vetor tangente em $t \in I$ (digamos v e w) e demonstremos que eles coincidem. Sob tal hipótese, tem-se

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + hv + r_v(h) \quad \text{e} \quad \gamma(t+h) = \gamma(t) + hw + r_w(h),$$

com $r_v(h)$ e $r_w(h)$ indo a zero mais rápido que h. Subtraindo as duas expressões, encontramos

$$0 = hv + r_v(h) - hw + r_w(h),$$

donde, dividindo por h, tomando a norma e utilizando da desigualdade de Schwarz, resulta que

$$\|v - w\| = \frac{\|r_v(h) - r_w(h)\|}{|h|} \leq \frac{\|r_v(h)\|}{|h|} + \frac{\|r_w(h)\|}{|h|}.$$

O lado esquerdo tende a zero quando h se torna pequeno. Como a desigualdade deve valer para qualquer h (inclusive para h pequeno), conclui-se que $\|v - w\| = 0$. Ora, o único vetor de norma nula é a origem. Portanto, $v - w = 0$, implicando no afirmado. □

O próximo resultado fornece uma interpretação geométrica à existência do vetor tangente.

Proposição 3. *Para que um caminho* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *possua vetor tangente em* $t \in I$, *é necessário e suficiente que se consiga obter um* $v \in \mathbb{R}^3$ *satisfazendo a seguinte condição: dados* $\varepsilon > 0$ *e* $h \in \mathbb{R}$, *com* $t + h \in I$, *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} - v \right\| < \varepsilon \tag{4.2}$$

sempre que $|h| < \delta$. *Neste caso, tem-se* $\gamma'(t) = v$.

Demonstração. Admitamos que γ possui vetor tangente em $t \in I$ e provemos que ele satisfaz (2). Com efeito, sob estas circunstâncias vale

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + h\gamma'(t) + r(h).$$

Subtraindo $\gamma(t) + h\gamma'(t)$ em ambos os lados, dividindo por h e tomando a norma, resulta

$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} - \gamma'(t) \right\| = \frac{\|r(h)\|}{|h|}.$$

Como o lado direito vai a zero quando h se aproxima deste valor, a igualdade faz com que o lado esquerdo tenha este mesmo comportamento, garantindo o afirmado. Admitamos, reciprocamente, existir um v cumprindo (2) e provemos que ele satisfaz (1). Seja $r(h) \in \mathbb{R}^3$ o vetor

$$r(h) = \gamma(t+h) - \gamma(t) - hv. \tag{4.3}$$

Então

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + hv + r(h) \quad \text{e} \quad \frac{\|r(h)\|}{|h|} = \left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} - v \right\|.$$

Já que o lado direto da última igualdade tende a zero a medida que h fica pequeno, o mesmo se passa com o lado esquerdo. Assim, se v cumpre com o enunciado, então é vetor tangente de γ. A proposição 1 faz com que $v = \gamma'(t)$, finalizando a demonstração. □

Observação. Fala-se que o vetor $\gamma(t+h) - \gamma(t)$ é *secante* ao caminho γ entre os pontos $\gamma(t)$ e $\gamma(t+h)$. Com esta nomenclatura, a proposição anterior nos diz que o vetor tangente à γ em $t \in I$ consiste-se daquele que se aproxima do vetor secante entre $\gamma(t)$ e $\gamma(t+h)$ a medida que estes próprios pontos tornam-se arbitrariamente próximos (veja figura abaixo).

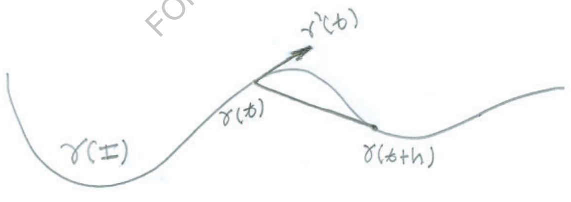


Figura 4.1: Vetores tangente e secante de $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$.

Proposição 4. *Sejam γ e λ caminhos definidos num mesmo intervalo I, ambos possuindo vetores tangentes em $t \in I$. Então a soma $\gamma + \lambda$ também possui vetor tangente em $t \in I$, e*

$$(\gamma + \lambda)'(t) = \gamma'(t) + \lambda'(t).$$

Demonstração. Por hipótese, podemos escrever

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + h\gamma'(t) + r_1(h) \quad \text{e} \quad \lambda(t+k) = \lambda(t) + h\lambda'(t) + r_2(k),$$

onde, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\frac{\|r_1(h)\|}{|h|} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \frac{\|r_2(h)\|}{|h|} < \varepsilon$$

sempre que $|h| < \delta_1$ e $|h| < \delta_2$. Devemos obter $(\gamma+\lambda)'(t)$ e $r(h)$ de modo a satisfazerem

$$(\gamma+\lambda)(t+h) = (\gamma+\lambda)(t) + h(\gamma+\lambda)'(t) + r(h), \tag{4.4}$$

com $\|r(h)\|$ indo a zero mais rápido do que $|h|$. Pela desigualdade triangular (deixada como exercício no arquivo anterior), tem-se

$$\frac{\|r_1(h)+r_2(h)\|}{|h|} \leq \frac{\|r_1(h)\| + \|r_2(h)\|}{|h|} = \frac{\|r_1(h)\|}{|h|} + \frac{\|r_2(h)\|}{|h|},$$

donde concluirmos que, fornecido $\kappa > 0$, existe ao menos um $\delta > 0$ segundo o qual

$$\frac{\|r_1(h)+r_2(h)\|}{|h|} < \kappa$$

para todo $|h| < \delta$. A saber, trata-se de $\delta = |\delta_1 - \delta_2|$. Isto significa que $r(h) = r_1(h) + r_2(h)$ cumpre com a requisição de ir a zero mais rápido do que h. Para obtermos $(\gamma+\lambda)'(t)$, utilizamos da definição de soma de caminhos. Segundo ela,

$$(\gamma+\lambda)(t) = \gamma(t) + \lambda(t),$$

permitindo-nos escrever

$$(\gamma+\lambda)(t+h) - (\gamma+\lambda)(t) = \gamma(t+h) - \gamma(t) + \lambda(t+h) - \lambda(t). \tag{4.5}$$

Substituindo (5) e $r(h) = r_1(h) + r_2(h)$ em (4), ficamos com

$$\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} - \frac{r_1(h)}{h} + \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h} - \frac{r_2(h)}{h} = (\gamma+\lambda)'(t).$$

Ora, mas

$$\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} - \frac{r_1(h)}{h} = \gamma'(t) \quad \text{enquanto que} \quad \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h} - \frac{r_1(h)}{h} = \lambda'(t),$$

donde o fim da demonstração. □

Definição. *Um caminho que possui vetor tangente em cada ponto de sua imagem é dito diferenciável.*

Assim, no caso de $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ ser diferenciável, está estabelecida a existência de $\gamma' : I \to \mathbb{R}^3$, chamado de "*o caminho tangente de* γ", caracterizado por tomar um $t \in I$ e devolver o respectivo vetor tangente à γ.

Exemplo. O caminho constante $\gamma(t) = x$, que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa o mesmo ponto $x \in \mathbb{R}^3$, é diferenciável. Isto porque, independente de qual seja o h, tem-se $\gamma(t+h) = \gamma(t)$. Segue-se, daí, que seus vetores tangentes existem e são coincidentes com a origem. A recíproca é também verdadeira: se um caminho é diferenciável e tem vetor tangente nulo em cada ponto, então ele é necessariamente constante.

Exemplo. O caminho afim $\gamma(t) = x + ty$ é diferenciável, com $\gamma'(t) = y$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Começamos observando que ele é a soma do caminho constante $t \mapsto x$ com $t \mapsto ty$. Pela proposição apresentada, nos resumimos à demonstrar que o último deles é diferenciável e tem y como vetor tangente para cada t. Seja $\lambda(t) = ty$. Então

$$\lambda(t+h) = (t+h)y = ty + hy = \lambda(t) + hy,$$

vê-se que $\xi'(t)$ existe e é igual a y ($r(h)$ é a origem). Isto finaliza o que foi proposto.

Exemplo. O caminho $\gamma(t) = tx + \frac{1}{2}t^2y$ é diferenciável, tendo $\gamma'(t) = x + ty$ como vetor tangente em $t \in \mathbb{R}$. Como $\gamma(t) = (\lambda + \xi)(t)$, com $\lambda(t) = tx$ e $\xi(t) = \frac{1}{2}t^2y$, basta provar que ξ é diferenciável e que $\xi'(t) = ty$. De fato,

$$\xi(t+h) = \frac{1}{2}(t+h)^2y = \frac{1}{2}t^2y + 2thy + h^2y = \xi(t) + 2thy + h^2y. \tag{4.6}$$

Seja $r(h) = h^2y$. Fornecido $\varepsilon > 0$, afirmamos existir um $\delta > 0$ tal que $\|r(h)\|/|h| < \varepsilon$ sempre que $|h| < \delta$. Com efeito, tem-se

$$\frac{\|r(h)\|}{|h|} = |h|\|y\|,$$

donde, tomando $|h| < \frac{\|y\|}{\varepsilon}$ (isto é, fazendo $\delta = \frac{\|y\|}{\varepsilon}$), ganha-se $\|r(h)\|/|h| < \varepsilon$. Comparando (4) com (1) e utilizando de $r(h) = h^2y$, em conjunto com o que acabamos de demonstrar a seu respeito, conclui-se que $\xi'(t)$ realmente existe, valendo ty.

Um último exemplo:

Exemplo. Nem todo caminho é diferenciável. Com efeito, o caminho $\gamma(t) = |t|x$ tem vetor tangente em qualquer $t \in \mathbb{R}$ diferente de zero, mas não o tem em $t = 0$ (veja problema 1 abaixo).

Exercícios

1. Prove que, se $a \in \mathbb{R}$ e γ é caminho com vetor tangente em t, então $a\gamma$ também tem vetor tangente em t. Além disso, vale

$$(a\gamma)'(t) = a\gamma'(t).$$

   Conclua daí que, se γ é diferenciável, então $a\gamma$ também o é.

2. Defina o produto vetorial entre dois caminhos γ e λ, ambos definimos num mesmo intervalo I, por ser a aplicação $\gamma \times \lambda : I \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$(\gamma \times \lambda)(t) = \gamma(t) \times \lambda(t).$$

   Prove que, se γ e λ são diferenciáveis, então $\gamma \times \lambda$ também o é. Em particular,

$$(\gamma \times \lambda)'(t) = \gamma(t)' \times \lambda(t) + \gamma(t) \times \lambda'(t).$$

3. Fazendo uso da proposição 2:

   (a) demonstre a proposição 3;

   (b) reestude os três exemplos apresentados abaixo da definição de caminho regular.

4. Demonstre que $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ é diferenciável em toda a reta e que seus vetores tangentes são

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

   Qual é a imagem de γ? Verifique que $\|\gamma'(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

5. Seja $\xi : I \to \mathbb{R}^3$ um caminho tal que $\xi(t) = \xi(s)$ para determindados $t, s \in I$. Caso existam, o que dizer dos vetores tangentes de ξ nestes pontos?

Problema

1. Demonstre que o caminho $\gamma(t) = |t|x$ tem vetor tangente em cada $t \neq 0$, mas não o possui em $t = 0$.

Sugestão. Afirme, via definição, que um caminho $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ admite vetor tangente à esquerda (digamos num dado $t \in I$) quando consegue-se encontrar vetores $\gamma'_-(t)$ e $r_-(h)$ tais que

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + h\gamma'_-(t) + r_-(h),$$

com h negativo e $\|r_-(h)\|$ indo a zero mais rápido do que h. Analogamente, diga que γ admite vetor tangente à direita (por exemplo em $t \in I$) quando existem $\gamma'_+(t)$ e $r_+(h)$ satisfazendo

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + h\gamma'_+(t) + r_+(h),$$

com h positivo e $\|r_+(h)\|$ indo a zero mais rápido do que h. Prove, então, que γ possui vetor tangente num dado $t \in I$ se, e só se, o admite simultaneamente à esquerda e à direta, com $\gamma'_+(t) = \gamma'_-(t)$. Por fim, verifique que, apesar de $\gamma(t) = |t|x$ possuir vetores tangentes à esquerda e à direta em $t = 0$, estes não coincidem.

2. Sejam $\gamma : [t_o, t_1) \to \mathbb{R}^3$ e $\xi : [t_1, t_2) \to \mathbb{R}^3$ caminhos no $\mathbb{R}^3$. Defina $\lambda : [t_o, t_2] \to \mathbb{R}^3$ pondo

$$\lambda(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t_o \leq t < t_1 \\ \xi(t), & t_1 \leq t < t_2. \end{cases}$$

Sob quais condições λ é diferenciável?

Bibliografia

Sugerimos a leitura do começo do capítulo 2 de

1. Lima, E. L. Análise Real, vol. 2. Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro

Capítulo 5

Referenciais

Dá-se o nome de *referencial* a toda aquela terna $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$, composta de vetores unitários do $\mathbb{R}^3$, dois a dois ortogonais.

Exemplo. Quando em lista, os vetores

$$\hat{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \hat{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \text{e} \quad \hat{e}_3 = (0, 1, 0) \tag{5.1}$$

constituem um referencial (veja problema 2 da secção sobre o espaço geométrico). Diz-se que ele é o referencial canônico (ou absoluto) de $\mathbb{R}^3$. Guardaremos a notação $\mathcal{A} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ para representá-lo.

Chama-se de *referencial móvel* a uma aplicação $\mathcal{R}$, com domínio na reta, que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa um referencial $\mathcal{R}(t)$. Compreende-se que $\mathcal{R}$ é *diferenciável* quando os referenciais $\mathcal{R}(t)$ variam diferenciavelmente com t. Mais precisamente, quando as correspondências $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definidas por

$$\mathcal{R}(t) = (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t), \hat{u}_3(t)),$$

são todas diferenciáveis.

Exemplo. Dado $x \in \mathbb{R}^3$, a aplicação $\mathcal{R}_x$ que a todo $t \in \mathbb{R}$ devolve a mesma terna $(\hat{e}_1 - x, \hat{e}_2 - x, \hat{e}_3 - x)$ constitui um referencial móvel em $\mathbb{R}^3$. Apesar disto, $\mathcal{R}_x$ não se "move" (sua imagem é formada de uma só terna). Por esta circunstância, fala-se que ele está fixo no ponto x.

Observação. Se $\mathcal{R}$ está definido apenas num intervalo I, diz-se que ele se move em I. Assim, dar um referencial móvel e diferenciável em I é o mesmo que dar uma terna de caminhos diferenciáveis neste mesmo intervalo, os quais são ortogonais entre si e associam, sempre, vetores unitários.

Definição. *Fala-se que um caminho $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é regular quando as seguintes condições são por elas satisfeitas:*

1. *é diferenciável;*

2. *o caminho tangente* $t \mapsto \gamma'(t)$ *é diferenciável;*

3. *os vetores* $\gamma'(t)$ *e* $\gamma''(t)$ *nunca coincide com a origem.*

Apresenta-se, abaixo, um resultado que é fonte de exemplos de referenciais móveis.

Proposição 5. *Para todo caminho regular* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *existe um referencial que se move em* I.

Demonstração. Definamos $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3 : I \to \mathbb{R}^3$ como segue:

$$\hat{u}_1(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad \hat{u}_2(t) = \frac{u_2(t)}{\|u_2(t)\|} \quad \text{e} \quad \hat{u}_3(t) = \hat{u}_1(t) \times \hat{u}_2(t),$$

em que

$$u_2(t) = \gamma''(t) - \mathrm{proj}_{\gamma'(t)}\gamma''(t), \quad \text{com} \quad \mathrm{proj}_{\gamma'(t)}\gamma''(t) = \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle}{\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}\gamma'(t).$$

Que $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ e $\hat{u}_3$ são unitários em cada $t \in I$, não há dúvidas. Por ser o produto vetorial entre $\hat{u}_1$ e $\hat{u}_2$, o caminho $\hat{u}_3$ é ortogonal à ambos. A verificação de que $\langle \hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$ fica a cargo do leitor. Assim, a aplicação $t \mapsto (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t), \hat{u}_3(t))$ constitui o referencial procurado, concluindo a demonstração. $\square$

Ainda que $\gamma \in I \to \mathbb{R}^3$ seja um caminho tal que $\gamma''(t) = 0$ para algum $t \in I$, pode-se definir um referencial móvel a ele associado. De fato é só seguir o mesmo procedimento da proposição anterior mas considerar

$$\overline{u}_2(t) = \gamma(t) - \mathrm{proj}_{\gamma'(t)}\gamma(t)$$

ao invés do caminho u_2 lá introduzido.

Exemplo. A reta $\gamma(t) = x + ty$ tem $\gamma''(t) = 0$ em cada $t \in I$ (donde não ser regular). Apesar disto, via o que acabamos de apresentar, faz sentido falar de um referencial móvel que dela provém.

Advertência. Para além deste insólito momento, quando dissermos "*seja* $\mathcal{R}$ *o referencial oriundo do caminho* γ", estaremos por nos referir à

1. $(\hat{e}_1 - x, \hat{e}_2 - x, \hat{e}_3 - x)$, se γ for constante em $x \in \mathbb{R}^3$;

2. $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$, quando γ for regular;

3. $(\hat{u}_1, \overline{u}_2/\|\overline{u}\|, \hat{u}_3)$, no caso de γ deixar de ser regular por ter $\gamma''(t) = 0$ para algum t.

Troca de Referenciais

Chama-se uma *troca entre os referenciais móveis* $\mathcal{R} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ e $\mathcal{R}' = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$, ambos definidos num mesmo intervalo I, às funções $A : I \to M(3; \mathbb{R})$, que tomam em mãos um $t \in I$ e a ele fazem corresponder uma matriz $A(t)$, tal que

$$\hat{u}_i(t) = \sum_{j=1}^{3} (A(t))_{ij} \hat{v}_j(t).$$

Mostraremos a seguir que estas transformações sempre existem e que são únicas dentro de seus propósitos. Necessitaremos de um lema, o qual é interessante por ele mesmo.

Lema 2. *Se $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$ são vetores unitários de $\mathbb{R}^3$ dois a dois ortogonais, então, dado $v \in \mathbb{R}^3$, existem unicamente três números $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, segundo os quais*

$$v = a_1\hat{u}_1 + a_2\hat{u}_2 + a_3\hat{u}_3.$$

Demonstração. Pelo segundo problema do arquivo sobre o espaço geométrico, podemos escrever

$$\hat{u}_i = \sum_{j=1}^{3} \langle \hat{u}_i, \hat{e}_j \rangle \hat{e}_j, \quad \text{com} \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.2}$$

Afirmamos que a matriz A, de elementos $A_{ij} = \langle \hat{u}_i, \hat{e}_j \rangle$, é ortogonal. Com efeito,

$$\begin{aligned}
(AA^\dagger)_{ij} &= \sum_{k=1}^{3} \langle \hat{u}_i, \hat{e}_k \rangle \langle \hat{e}_k, \hat{u}_j \rangle \\
&= \langle \hat{u}_i, \sum \langle \hat{e}_k, \hat{u}_j \rangle \hat{e}_k \rangle \\
&= \langle \hat{u}_i, \sum \langle \hat{u}_j, \hat{e}_k \rangle \hat{e}_k \rangle \\
&= \langle \hat{u}_i, \hat{u}_j \rangle = \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Na primeira passagem, utilizamos da linearidade do produto escalar. Na segunda, de sua simetria. Na terceira, da expressão (2). Na quarta (e última), da ortogonalidade dos $\hat{u}_i$ e do fato de eles serem unitários. Assim, tomando $A^\dagger$ em ambos os lados de (2), temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \langle \hat{e}_k, \hat{u}_i \rangle \hat{u}_i &= \sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} \langle \hat{e}_k, \hat{u}_i \rangle \langle \hat{u}_i, \hat{e}_j \rangle \Big) \hat{e}_j \\
&= \sum_{j=1}^{3} (A^\dagger A)_{kj} \hat{e}_j
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \delta_{kj}\hat{e}_j = \hat{e}_k,$$

onde na terceira passagem fizemos uso da ortogonalidade de A. A conclusão é que podemos expressar cada $\hat{e}_i$ de maneira única em termos dos $\hat{u}_i$. Ora, dado $v \in \mathbb{R}^3$, para finalizar a demonstração é só escrever

$$v = \sum_{j=1}^{3} a_j\hat{e}_j = \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_j\langle \hat{e}_j, \hat{u}_i\rangle\Big)\hat{u}_i,$$

donde serem $b_i = \sum a_j\langle \hat{e}_j, \hat{u}_i\rangle$ os números procurados. $\square$

Proposição 6. *Entre quaisquer dois referenciais que se movem num intervalo I existe uma troca.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{R} = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$ e $\mathcal{R}' = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ referenciais movendo-se em I. Para cada $t \in I$, seja $A(t)$ a matriz ortogonal (obtida segundo o lema anterior) tal que

$$\hat{u}_i(t) = \sum_{j=1}^{3} (A(t))_{ij}\hat{v}_j(t). \tag{5.3}$$

Por sua vez, a aplicação $t \mapsto A(t)$ conclui o que foi afirmado. $\square$

Observação. Fornecido um caminho $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, do lema apresentado segue-se, para cada referencial móvel $\mathcal{R} = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$, a existência de funções $a_1, a_2, a_3 : I \to \mathbb{R}$ tais que

$$\gamma(t) = a_1(t)\hat{u}_1(t) + a_2(t)\hat{u}_2(t) + a_3(t)\hat{u}_3(t).$$

Estas serão chamadas de coordenadas de γ em $\mathcal{R}$. Depreende-se da proposição 2 que, se $\mathcal{R}' = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ é outro referencial em I, então as coordenadas $b_1, b_2, b_3 : I \to \mathbb{R}$ de γ relativas a ele podem ser diretamente obtidas através das expressões

$$b_i(t) = \sum_{j=1}^{3} a_j(t)\langle \hat{u}_j(t), \hat{v}_i(t)\rangle.$$

Movimento Relativo

Aqui vamos introduzir o conceito de movimento relativo entre dois referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$. Também aprenderemos como descrever um determinado caminho em termos de diferentes pontos de vista. Ao final, obteremos um resultado que conecta estas duas frentes.

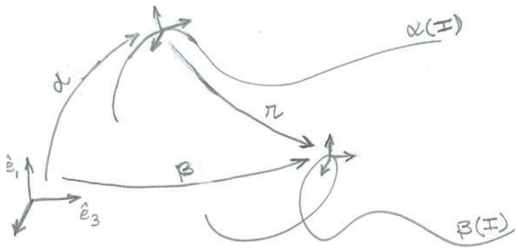


Figura 5.1: Movimento relativo entre referenciais.

Definição. *Chama-se o movimento relativo entre dois referenciais móveis* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{R}'$*, respectivamente provenientes de caminhos* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *e* $\beta : I \to \mathbb{R}^3$*, à aplicação* r *que toma cada* $t \in I$ *e devolve*

$$r(t) = \beta(t) - \alpha(t). \tag{5.4}$$

A figura acima talvez ajude na visualização.

Definição. *Dá-se o nome de descrição de um caminho* γ *segundo um referencial móvel* $\mathcal{R}$ *(digamos proveniente de* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$*) à função* $d_{\mathcal{R}} : I \to \mathbb{R}^3$*, definida por*

$$d_{\mathcal{R}}(t) = \gamma(t) - \alpha(t). \tag{5.5}$$

Por fim, dado um caminho $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ e dois referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, definiremos a *descrição relativa* de γ entre eles por ser a diferença $d_{\mathcal{R}'} - d_{\mathcal{R}}$. Veja figura abaixo.

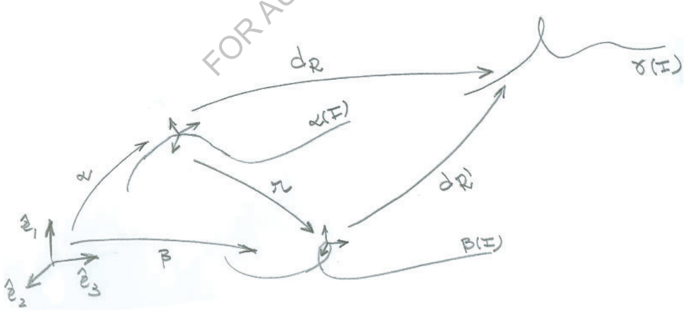


Figura 5.2: Descrição de um mesmo caminho segundo dois referenciais distintos

Lema 3 (da relativização do movimento)**.** *A descrição de* γ *segundo* $\mathcal{R}$ *é a soma da descrição de* γ *segundo* $\mathcal{R}'$ *com o movimento relativo entre estes referenciais.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são, em respectiva ordem, provenientes de caminhos regulares α e β. Por definição,

$$d_{\mathcal{R}} = \gamma - \alpha = (\beta - \alpha) + (\gamma - \beta).$$

Ora, mas $r = \beta - \alpha$ nada mais é do que o movimento relativo entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, enquanto que $\gamma - \beta = d_{\mathcal{R}'}$. Segue, daí, o proposto. A situação que algum dos (ou ambos os) referenciais estão fixos procede de maneira análoga. $\square$

Exercícios

1. Para cada um dos caminhos abaixo, verifique se ele é regular. Depois, obtenha o referencial móvel a ele associado (digamos ser $\mathcal{R}$). Por fim, encontre a matriz responsável pela troca entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{A}$:

   (a) $t \mapsto x + ty + \frac{1}{2}t^2 z$;

   (b) $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$.

2. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ os referenciais móveis provenientes dos respectivos caminhos $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ e $\lambda(t) = (0, 0, t)$. Obtenha a descrição de γ segundo $\mathcal{R}'$ e interprete o resultado.

Bibliografia

Para maiores detalhes sobre o assunto, sugerimos uma leitura do segundo capítulo da monografia de Roberto Simoni. Ela pode ser obtida aqui.

Capítulo 6

Cinemática

Uma *partícula* no espaço $\mathbb{R}^3$ consiste-se de um par $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$, formado de um número real positivo m, dito ser a *massa* de $\mathfrak{p}$, e de um caminho $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Fala-se que $\gamma(t)$ é a *localização* (ou a *posição*) de $\mathfrak{p}$ no instante de tempo t, relativamente ao referencial absoluto $\mathcal{A} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$. A imagem de γ por um intervalo I é chamada de *trajetória* de $\mathfrak{p}$ ao longo de I.

Na descrição da trajetória de $\mathfrak{p}$, o ponto $\gamma(0)$ diz respeito a sua posição de partida; é o ponto de referência. Conhecer $\gamma(t)$, com $t < 0$, significa saber o que se deu com a partícula antes de ela chegar à $\gamma(0)$. Do mesmo modo, ao se descobrir quem é $\gamma(t)$, com $t > 0$, está-se a descrever o que acontece com $\mathfrak{p}$ após ela atingir $\gamma(0)$.

Observação. Em algumas situações, confunde-se (propositalmente) o caminho γ com o ponto $\gamma(t)$. No restante do curso, isto será feito sem nenhuma objeção. Diremos "*a posição γ da partícula $\mathfrak{p}$ segundo o referencial absoluto*", entando implícito que γ se trata, na verdade, da aplicação que a cada t associa a posição de $\mathfrak{p}$ relativamente à $\mathcal{A}$.

Compreende-se que uma partícula $\mathfrak{p}$ tem *velocidade* definida em um dado $t \in \mathbb{R}$ quando sua posição tem vetor tangente neste mesmo instante. Escreve-se, então, $\gamma'(t) = v(t)$. Do mesmo modo, fala-se que $\mathfrak{p}$ tem *aceleração* em t quando o caminho $t \mapsto v(t)$ ali tem vetor tangente. Denota-se $v'(t)$ por $a(t)$. Os números $\|v(t)\|$ e $\|a(t)\|$ são respectivamente chamados de a *velocidade escalar* e a *aceleração escalar* de $\mathfrak{p}$ no instante t.

No caso de γ ser uma curva regular, sua aceleração pode ser decomposta, em cada instante de tempo, numa soma entre duas partes:

$$a_{\parallel}(t) = \frac{\langle v(t), a(t)\rangle}{\langle v(t), v(t)\rangle} v(t) \quad \text{e} \quad a_{\perp}(t) = a(t) - \frac{\langle v(t), a(t)\rangle}{\langle v(t), v(t)\rangle} v(t). \tag{6.1}$$

A primeira delas, chamada de *aceleração tangencial,* é um vetor paralelo à velocidade. A outra, em seu lugar, é sempre perpendicular à velocidade. Para ela, guarda-se o nome de *aceleração centrípeta.*

Notação. De agora em diante, o movimento relativo de um referencial $\mathcal{R}$ com relação ao referencial absoluto será denotado simplesmente por $r_{\mathcal{R}}$.

Referenciais Inerciais

No estudo da cinemática (e, por conseguinte, da mecânica) de suma importância são os referenciais inerciais. A respeito deles, faremos uma breve exposição.

Definição. *Diz-se que um referencial $\mathcal{R}$ é inercial quando seu movimento relativo ao referencial absoluto é afim ou é constante.*

Mais precisamente, compreende-se que um dado referencial $\mathcal{R}$ é inercial quando consegue-se obter vetores $x, y \in \mathbb{R}^3$ tais que $r_{\mathcal{R}}(t) = x + ty$ (aqui estamos incluindo a possibilidade de se ter $x = 0$ e/ou $y = 0$).

Proposição 7. *Se $\mathcal{R}$ é inercial e oriundo de um caminho $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, então este é afim.*

Demonstração. Como o referencial absoluto é fixo na origem, tem-se, pela própria definição de movimento relativo, que $\alpha(t) = -r_{\mathcal{R}}(t)$. A prova está concluída. □

Imediatamente da proposição anterior segue o

Corolário 1. *Se $\mathcal{R}$ está fixo em $x \in \mathbb{R}^3$, então $r_{\mathcal{R}}(t) = x$ para todo $t \in I$.*

O próximo resultado (que talvez seja o mais importante deste arquivo) caracteriza por completo a descrição de caminhos segundo referenciais inerciais.

Teorema 1. *As coordenadas da descrição do movimento de uma partícula $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$ segundo um referencial inercial $\mathcal{R}$ diferem daquela relativa ao referencial absoluto $\mathcal{A}$ no máximo por uma rotação seguida de um movimento rígido.*

Demonstração. Estando $\mathcal{A}$ fixo junto à origem, segue-se que a descrição de γ através do referencial absoluto coincide com o próprio γ. Isto é, $d_{\mathcal{A}}(t) = \gamma(t)$ para todo t. Pelo lema da relativização do movimento, tem-se $d_{\mathcal{R}} = d_{\mathcal{A}} + r_{\mathcal{R}}$. Por hipótese, $\mathcal{R}$ é inercial. Assim, existem $x, y \in \mathbb{R}^3$ tais que $r_{\mathcal{R}} = x + ty$. Podemos escrever, então:

$$d_{\mathcal{R}}(t) = \gamma(t) + x + ty. \tag{6.2}$$

Ponhamos $\mathcal{R} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$. Sejam, em respectiva ordem, $a_i(t)$ e $b_i(t)$ as coordenadas de $d_{\mathcal{R}}$ e de γ em seus respectivos referenciais (diga-se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{A}$). Pelo lema 1 do arquivo anterior, conseguimos encontrar números $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ segundo os quais

$$x = x_1\hat{u}_1 + x_2\hat{u}_2 + x_3\hat{u}_3 \quad \text{e} \quad y = y_1\hat{u}_1 + y_2\hat{u}_2 + y_3\hat{u}_3.$$

Juntando todos estes fatos, podemos reescrever (2) da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i(t)\hat{u}_i(t) = \sum_{j=1}^{3} b_j(t)\hat{e}_j + \sum_{i=1}^{3}(x_i + ty_i)\hat{u}_i. \tag{6.3}$$

Por outro lado, via proposição 2 (também do arquivo anterior), pode-se obter uma troca entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$. Mais precisamente, existem matrizes ortogonais $A(t) \in O(3)$ tais que

$$\hat{e}_j = \sum_{i=1}^{3} (A(t))_{ji} \hat{u}_i(t) \tag{6.4}$$

Substituindo esta expressão em (3), resulta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} a_i(t)\hat{u}_i(t) &= \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{j=1}^{3} b_j(t)(A(t))_{ji} \Big) \hat{u}_i(t) + \sum_{i=1}^{3} (x_i + ty_i)\hat{u}_i. \\ &= \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{j=1}^{3} b_j(t)(A(t))_{ji} + x_i + ty_i \Big) \hat{u}_i, \end{aligned}$$

donde sermos obrigados a escrever

$$a_i(t) = \sum_{j=1}^{3} b_j(t)(A(t))_{ji} + x_i + ty_i.$$

Por fim, observamos que, dada a ortogonalidade de $A(t)$, tem-se $(A(t))_{ji} = (A(t)^{-1})_{ij}$. Assim,

$$a_i(t) = \sum_{j=1}^{3} (A(t)^{-1})_{ij} b_j(t) + x_i + ty_i.$$

A soma $\sum (A(t)^{-1})_{ij} b_j(t)$ é precisamente uma rotação, enquanto que $x_i + ty_i$ é um deslocamento rígido. Isto conclui a demonstração. $\square$

Posta a validade do último teorema, passam a ter especial interesse as aplicações $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que correspondem às rotações e/ou aos deslocamentos rígidos. Elas são chamadas de *transformações de Galileu* e têm o papel de conectar a descrição do movimento de uma partícula entre dois referenciais inerciais.

Tipos de Movimento

Existem algumas particulares situações que, por serem de fácil visualização e de fácil entendimento, merecem algum destaque. Tratam-se, pois, de certos tipos de movimento (bastante simétricos) que uma partícula pode assumir. O mais simples de todos eles chama-se *repouso*.

Definição. *Diz-se que uma partícula $\mathfrak{p} = (p, \gamma)$ está em repouso com relação a um referencial $\mathcal{R}$ quando a descrição de sua posição segundo $\mathcal{R}$ é constante.*

Pode-se mostrar (veja problema 1) que, independente de qual seja o caminho γ, sempre existe um referencial $\mathcal{R}$ segundo o qual $\mathfrak{p}$ está em repouso. A ele dá-se o nome de *referencial de repouso* da partícula $\mathfrak{p}$.

Observação. Uma partícula pode estar em repouso segundo um referencial mas não o estar com relação a outro. Por exemplo, considere $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$ com $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Segundo o referencial proveniente de γ (obtido no segundo exercício do arquivo anterior), $\mathfrak{p}$ está em repouso. Entretanto, se tomarmos o referencial absoluto, a descrição de $\mathfrak{p}$ coincidirá com o próprio γ (que não é constante).

Passamos, agora, a um segundo tipo de movimento:

Definição. *Fala-se que uma partícula $\mathfrak{p} = (p, \gamma)$ está em movimento retilíneo uniforme com relação a um referencial $\mathcal{R}$ no caso de sua posição ser por ele descrita como um caminho afim.*

Também pode ser mostrado (veja problema 2) que para qualquer $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ consegue-se obter ao menos um referencial $\mathcal{R}$, em conjunto de vetores $x, y \in \mathbb{R}^3$ para os quais $d_{\mathcal{R}}(t) = x + ty$.

Observação. Vale, aqui, uma observação análoga àquela feita para o repouso: ao se dizer que uma partícula está em movimento retilíneo uniforme (em geral abrevia-se por mru), deve-se deixar bem claro com respeito a qual referencial a descrição de sua posição está sendo realizada. Novamente, tomemos $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Seja $\mathcal{R}$ um referencial cujo movimento relativo ao referencial de repouso de γ é afim. Com respeito a ele, $\mathfrak{p}$ está em mru. Entretanto, se tomarmos a descrição de sua posição segundo qualquer referencial inercial, ela deixará de ser afim.

Apesar da observação anterior, podemos contar com a

Proposição 8. *Se uma partícula está em mru segundo um referencial inercial $\mathcal{R}$, então ela também o está com relação a qualquer outro.*

Demonstração. Por hipótese, sendo $\mathcal{R}$ inercial, existem vetores $x, y \in \mathbb{R}^3$ tais que $r_{\mathcal{R}}(t) = x + ty$. Estando a partícula em movimento retilíneo uniforme segundo $\mathcal{R}$, também existem vetores $z, w \in \mathbb{R}^3$ através dos quais $d_{\mathcal{R}}(t) = z + tw$. Seja $\mathcal{R}'$ um outro referencial inercial. Podem ser obtidos $k, m \in \mathbb{R}^3$ cumprindo $r_{\mathcal{R}'} = k + tm$. O movimento relativo entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ é então dado por (veja proposição 1)

$$r(t) = r_{\mathcal{R}}(t) - r_{\mathcal{R}'}(t) = (x - k) + t(y - m).$$

Pelo lema da relativização, segue-se que

$$d_{\mathcal{R}'}(t) = r(t) - d_{\mathcal{R}}(t) = (x - k - z) + t(y - m - w),$$

donde o que foi proposto e o fim da demonstração. $\square$

Um terceiro tipo de movimento para o qual gostaríamos de chamar a atenção se vê presente na

Definição. *Compreende-se que uma dada partícula está em movimento circular uniforme com relação a um referencial* $\mathcal{R}$ *quando a descrição de sua posição segundo ele é dada por* $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$.

No intuito de tornar as coisas mais precisas, se $\mathcal{R} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$, diz-se que uma partícula $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$, satisfazendo a definição anterior, está em movimento circular uniforme (abrevia-se mcu) entorno do eixo $\hat{u}_3 : I \to \mathbb{R}^3$. Isto porque, independente de qual seja o $t \in I$, a coordenada da descrição de $\gamma(t)$ que acompanha $\hat{u}_3(t)$ é sempre igual a zero.

De maneira análoga pode-se definir movimento circular uniforme entorno de $\hat{u}_1$ e de $\hat{u}_2$. Com efeito, nas respectivas situações basta colocar

$$d_{\mathcal{R}}(t) = (0, \cos t, \sin t) \quad \text{e} \quad d_{\mathcal{R}}(t) = (\cos t, 0, \sin t).$$

Os fatos fundamentais do mcu estão contidos na proprosição abaixo.

Proposição 9. *Seja* $\mathfrak{p}$ *uma partícula movendo-se (com relação a um referencial* $\mathcal{R}$*) em mcu entorno de um determinado eixo. Então:*

1. *a velocidade escalar de* $\mathfrak{p}$ *(segundo* $\mathcal{R}$*) é a mesma em cada instante de tempo;*
2. *a aceleração de* $\mathfrak{p}$ *(segundo* $\mathcal{R}$*) só possui componente centrípeta.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\mathfrak{p}$ esteja em $\hat{u}_3$-mru (para as outras possibilidades, procede-se de maneira idêntica). Então $d_{\mathcal{R}}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, donde

$$v_{\mathcal{R}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \quad \text{e} \quad a_{\mathcal{R}}(t) = -(\cos t, \sin t, 0).$$

Assim, $\|v_{\mathcal{R}}(t)\| = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ para todo $t \in I$, o que garante a primeira condição. Para a segunda, computamos

$$\langle v_{\mathcal{R}}(t), a_{\mathcal{R}}(t) \rangle = (-\sin t)(-\cos t) + \cos t(-\sin t) = 0.$$

Levando tal resultado em (1), vê-se que $(a_{\mathcal{R}})_{\|}(t) = 0$ e, portanto, que $(a_{\mathcal{R}})_{\perp}(t) = a_{\mathcal{R}}(t)$. $\square$

Advertência. O movimento retilíneo uniforme é caracterizado por manter a velocidade constante durante todo o perdurar. Por outro lado, enquanto uma partícula estiver em movimento circular uniforme, sua *velocidade escalar* se manterá constante. Deve-se tomar o cuidado para não confundir as duas coisas.

Problemas

1. Seja $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$ uma partícula. Mostre que, independente de qual seja o caminho $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$
   (a) existe um referencial $\mathcal{R}_o$ segundo o qual $\mathfrak{p}$ se encontra em repouso;
   (b) existe um referencial $\mathcal{R}$ segundo o qual $\mathfrak{p}$ se encontra em mru.

Bibliografia

Para maiores informações, sugerimos uma leitura do primeiro capítulo de

1. Symon, K. R., Mecânica, Editora Campus Ltda, Rio de Janeiro, 1996;
2. Arnold, V. I. Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica, Editora Mir Moscovo, Lisboa, 1987.

Capítulo 7

Dinâmica

Uma *força* nada mais é do que uma aplicação $F : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, do produto cartesiano entre um aberto $U \times \mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ pela reta real, a qual associa a cada terna (x, y, t) um vetor $F(x, y, t)$. Diz-se que F *atua* numa partícula $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$ por um intervalo de tempo I quando são satisfeitas as seguintes condições:

1. γ é diferenciável em I (isto é, $\mathfrak{p}$ tem velocidade definida em cada instante $t \in I$);
2. $\gamma(I) \subset U$ (ou seja, a trajetória da partícula ao longo de I está inteiramente contida em U).

Neste caso, define-se a *atuação* de F em $\mathfrak{p}$ por ser o conjunto dos vetores $\frac{1}{m}F(\gamma(t), v(t), t)$, com t pertencente ao intervalo I.

Observação. Observamos que a atuação de uma força está primordialmente definida com relação ao referencial absoluto.

Exemplo. Algumas forças podem atuar em qualquer partícula. Tratam-se daquelas para as quais o aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ coincide com todo o espaço. Este é o caso, por exemplo, de $F(x, y, t) = kx + w$, com k pertencente ao reais e $w \in \mathbb{R}^3$. De outro lado, existem forças impedidas de atuar sobre certas partículas. De fato, considere

$$G : (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \text{tal que} \quad G(x, y, t) = k\frac{x}{\|x\|}.$$

As partículas que tem $\gamma(t) = (t, 0, 0)$ como posição não podem sofrer a ação de G em intervalos que contemplem o instante zero.

Exemplo. A força $F(x, y, t) = -g\hat{e}_3$, com $g \in \mathbb{R}$ da ordem de 9.8 metros por segundo ao quadrado, atua sobre todas as partículas. Ela é chamada de *peso*. Sua ação em $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$ é dada através de $F(\gamma(t), v(t), t) = -mg\hat{e}_3$.

Exemplo. A aplicação $F(x,y,t) = -\|y\|^2 x$, cujo nome é *força centrípeta*, também pode atuar sobre qualquer partícula. De especial interesse é a situação em que $\mathfrak{p} = (m,\gamma)$ se encontra no mcu (relativamente ao referencial absoluto) ao redor do eixo $\hat{e}_3$. Enquanto assim for, $\mathfrak{p}$ manterá velocidade escalar constante; a força centrípeta atuará segundo a expressão $F(\gamma(t), v(t), t) = -m\gamma(t)$.

Compreende-se que uma força $F : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ independe de velocidades ao se obter uma aplicação $\overline{F} : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, com respeito a qual vale $F(x,y,t) = \overline{F}(x,t)$ para toda terna (x,y,t). De maneira análoga, fala-se que a força F é independente do tempo quando existe $\underline{F} : U \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ segundo a qual $F(x,y,t) = \underline{F}(x,y)$.

Observação. Uma força que independe de velocidades também é chamada de *não-dissipativa.* Em situação contrária (isto é, quando ela apresenta uma dependência explícita nas velocidades), diz-se que ela é *dissipativa.*

Proposição 10. *Se $F : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é força não-dissipativa e independente do tempo, então existe uma correspondência $\widetilde{F} : U \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(x,y,t) = \widetilde{F}(x)$.*

Demonstração. Por um lado, sendo F independente do tempo, existe uma $\underline{F} : U \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ para a qual $F(x,y,t) = \underline{F}(x,y)$. Por outro, como ela é não-dissipativa, consegue-se obter uma $\overline{F} : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ satisfazendo a condição $F(x,y,t) = \overline{F}(x,t)$. Neste caso, deve valer

$$F(x,y,t) = \underline{F}(x,y) = \overline{F}(x,t),$$

donde a garantia de existência da função procurada. □

Advertência. De agora em diante, quando acreditarmos não haver disco de confusão, confundiremos as forças não-dissipativas (e/ou independentes do tempos) com as respectivas funções que a elas correspondem. Assim, por exemplo, será dito "*a força não dissipativa $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$*", onde estará subentendido que F se trata, na verdade, da aplicação $\overline{F}$ a pouco definida.

Exemplo. Todas as forças apresentadas nos exemplos anteriores são não-dissipativas e independentes do tempo. Quando um objeto despenca de uma altura considerável, o efeito de resistência do ar torna-se mais relevante a medida que a velocidade de queda cresce. A força incumbida de descrever este efeito é, portanto, dissipativa.

Sistemas Mecânicos

Chama-se um *sistema mecânico simples* a um par $(\mathfrak{p}, \mathbb{F})$, onde $\mathfrak{p}$ é uma partícula e $\mathbb{F}$ é uma coleção de forças, ditas relevantes, que atuam sobre ela.

Observação. Dentre todas as forças que são capazes de atuar em $\mathfrak{p}$, a escolha daquelas que constituirão $\mathbb{F}$ é realizada, como o próprio nome sugere, diante de sua relevância dentro do problema que se quer analisar.

Observação. Seja $(\mathfrak{p}, \mathbb{F})$ um sistema mecânico simples. Ainda que uma força F não pertença à $\mathbb{F}$, consideremos a possibilidade de ali introduzí-la. Uma das estratégias que podem ser empregadas para decidir esta inclusão é comparar (experimentalmente) a magnitude de F com a magnitude de cada um dos contituintes de $\mathbb{F}$: se estas forem de ordens de grandezas não muito distantes, então a inclusão é acertada; caso contrário, continua-se a considerar F como irrelevante.

Exemplo. Nas proximidades da Terra, a força peso é sempre relevante[1].

Exemplo. Se uma partícula não se move com grande velocidade, então a resistência proporcionada pelo ar é irrelevante perante as outras forças envolvidas.

Exemplo. Ao se considerar determinado fenômeno aqui na Terra, a presença da Lua, face a sua distância até nós, é irrelevante. Entretanto, quando as massas envolvidas no fenômenos são consideráveis (como é o caso da massa conjunta de todos os mares e oceanos), a presença da Lua não pode ser desconsidera ao descrevê-lo. é assim que se explica, por exemplo, a existência das marés.

Seja $(\mathfrak{p}, \mathbb{F})$ um sistema mecânico simples. Escolhido um intervalo I (contido no domínio da posição da partícula), define-se a *força resultante* sobre $\mathfrak{p}$ em I por ser a soma entre as forças de $\mathbb{F}$ que atuam em $\mathfrak{p}$ durante tal intervalo. Quando esta é identicamente nula, diz-se que $\mathfrak{p}$ se encontra em *equilíbrio.*

Observação. O leitor deve estar atento: a condição "estar em equilíbrio" depende, primordialmente, das forças envolvidas; isto é, da escolha daquelas que irão compor o sistema mecânico.

Leis do Movimento

Introduziremos, aqui, um conjunto de postulados. Por terem motivação oriunda de experimentos, é comum chamá-los de *leis naturais.* Grosso modo, eles estabelecerão que o comportamento de uma partícula num intervalo de tempo qualquer fica inteiramente determinado a partir do conhecimento das forças (consideradas relevantes) que ali atuam sobre ela.

Axioma 1. (Lei da regularidade). Todas as partículas existentes na natureza tem posição descrita por caminhos que, em cada instante de seu domínio, possuem aceleração bem estabelecida.

Axioma 2. (Lei da inércia). Enquanto em equilíbrio, toda partícula se encontra em movimento retilíneo uniforme com relação ao referencial absoluto.

[1]Para maiores detalhes a respeito deste e dos dois próximos exemplos, veja Capítulo 8.

Axioma 3. (Lei da dinâmica). Durante os instantes em que uma partícula $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$ estiver sujeita a ação de uma força resultante não nula (digamos $F : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$), seu movimento segundo o referencial absoluto estará fadado a satisfazer a *equação de Newton*:

$$F(\gamma(t), v(t), t) = ma(t). \tag{7.1}$$

Observação. Quando uma partícula está sujeita a todos estes três axiomas, diz-se que ela é *fisicamente aceitável* (abrevia-se pondo f.a). De agora em diante, todas os sistemas mecânicos considerados serão definidos a partir de uma partícula f.a.

Um outro postulado, este caráter interpretativo e não-experimental, é necessário para que possamos determinar, do ponto de vista Físico, quais são os referenciais inerciais. Tal postulado refere-se, pois, à localização do referencial absoluto:

Axioma. (da localização). O referencial absoluto se encontra no centro do universo.

Assim, um referencial será inercial quando, e somente quando, estiver em movimento retilíneo e uniforme com relação ao centro do universo.

Consequências

Apresentamos, a seguir, algumas consequências que podem ser imediatamente retiradas das três leis acima expostas.

Proposição 11. *Enquanto em equilíbrio, uma partícula fisicamenta aceitável se encontra em mru com relação a qualquer referencial inercial.*

Demonstração. Pela lei da inércia, o resultado é verdadeiro no caso do referencial considerado ser o absoluto. Por outro lado, a segunda proposição do arquivo anterior (em que tratamos da cinemática) afirma que se uma partícula está em mru com relação a um determinado referencial inercial (digamos o absoluto), então ela o está segundo qualquer outro. Isto é suficiente ao que nos propusemos a fazer. □

Proposição 12 (Princípio da relatividade)**.** *A equação de Newton é igualmente satisfeita em todos os referenciais inerciais.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{R}$ um referencial inercial e $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$ uma partícula fisicamente aceitável. Pela proposição 2 do último arquivo, existem vetores x e y de $\mathbb{R}^3$, os quais satisfazem $d_{\mathcal{R}}(t) = \gamma(t) + x + ty$. Por conseguinte, $a_{\mathcal{R}}(t) = a(t)$. Agora, se F é força que atua em $\mathfrak{p}$ durante um intervalo I, então

$$F(\gamma(t), v(t), t) = ma(t) = ma_{\mathcal{R}}(t) \quad \text{para cada } \; t \in I,$$

finalizando a demonstração. □

Corolário 2. *Se uma partícula está em equilíbrio com relação a um referencial inercial, então o está com relação a qualquer outro.*

Demonstração. é uma consequência direta do último resultado: basta considerar o caso particular em que a força resultante é nula. □

Observação. A utilidade do princípio da equivalência cosiste-se do seguinte: uma vez que a força resultante é mesma em todo referencial inercial, pode-se escolher aquele que melhor se adeque ao problema em estudo e nele resolver tudo o que tiver de ser feito.

Existência e Unicidade

No início do capÃtulo foram apresentados alguns exemplos de forças que podem atuar nas mais diversas partículas. Em seguida, conferimos que tal condição não se verifica para todas as aplicações, mas apenas para àquelas que estão definidas em todo o conjunto $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Continuam em aberto dois questionamentos de central relevância na estrutura da teoria que estamos desenvolvendo:

1. Fornecida uma força $F : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, existirá uma partícula fisicamente aceitável na qual ela atua?

2. Caso exista, sob quais condições ela é única?

A respeito destas questões cabe dizer, sem maiores comentários, que uma categoria bastante ampla de forças (ditas de classe C^1) satisfaz o seguinte resultado:

- para qualquer que seja o ponto (x_o, y_o, t_o) de $U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, a força F age, durante um pequeno intervalo de tempo $(t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon)$, em uma única partícula fisicamente aceitável $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$, a qual é caracterizada por cumpir $\gamma(t_o) = x_o$, além de $v(t_o) = y_o$ e
$$a(t) = \frac{F(\gamma(t), v(t), t)}{m} \quad \text{para todo} \quad t_o - \varepsilon < t < t_o + \varepsilon.$$

Em outras palavras, o resultado anterior nos diz que o conhecimento da força resultante e das chamadas *condições iniciais* (diga-se $\gamma(t_o) = x_o$ e $v(t_o) = y_o$) é suficiente para determinar a dinâmica da partícula na qual tal força atua.

Observação. O leitor interessado poderá encontrar a demonstração do resultado anterior no primeiro capítulo do livro *Introdução à Mecânica Clássica*, do professor Artur Lopes, publicado pela Edusp.

Forças Centrais

Diz-se que uma força $F : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é *centrada em* $y \in \mathbb{R}^3$ (ou simplesmente que é *central*) quando ela satisfaz as seguintes condições:

1. é não-dissipativa e independente do tempo;

2. sua ação em $x \in \mathbb{R}^3$ é proporcional à x.

Assim, uma força F será centrada em $y \in \mathbb{R}^3$ quando for possível encontrar uma função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, independente do $x \in \mathbb{R}^3$ escolhido,

$$F(x) = \phi(\|x - y\|)(x - y).$$

Exemplo. Se $F : U \to \mathbb{R}^3$ é força central com ϕ constante e igual a um número $k < 0$, então ela é chamada de *elástica*. Esta é a força que atua, por exemplo, sobre uma partícula que está presa a uma mola. Nesta interpretação, y refere-se ao ponto onde uma das extremidades da mola está fixa; o número k assume o papel de caracterizar quão rígida ela é.

Exemplo. Com $p = (m, \gamma)$, sejam $(\mathfrak{p}, \mathbb{F})$ um sistema mecânico simples e $\mathfrak{q}$ uma partícula avulsa, fixa no ponto $y \in \mathbb{R}^3$ e tendo M como massa. Chama-se de *interação gravitacional* entre $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ à força central

$$F(x) = -\frac{GmM}{\|x - y\|}(x - y).$$

Ela se torna relevante (devendo ser incluída em $\mathbb{F}$) quando as massas envolvidas são grandes, ao mesmo tempo que a distância entre as partículas é pequena.

No que segue, cuidaremos de expor a vantagem que é alcançada quando, num sistema mecânico simples, a força resultante é central. Para tanto, introduziremos o importante conceito de momento cinético.

Definição. *Seja $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$ uma partícula f.a. Dá-se o nome de momento cinético de $\mathfrak{p}$, relativamente ao ponto $y \in \mathbb{R}^3$, ao caminho $L_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definido por*

$$L_y(t) = m(\gamma(t) - y) \times v(t).$$

Observação. O momento cinético é também chamado de momento angular.

Proposição 13. *Se o momento angular de uma partícula (relativamente a um ponto $y \in \mathbb{R}^3$) é constante, então sua trajetória está toda contida num plano.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$ a partícula em questão. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\langle L_y(t), \gamma(t) - y\rangle = m\langle(\gamma(t) - y) \times v(t), \gamma(t) - y\rangle = 0,$$

uma vez que $(\gamma(t)-y)\times v(t)$ tanto é perpendicular à $\gamma(t)-y$ quanto o é à $v(t)$. Isto significa que em todo instante a posição de $\mathfrak{p}$ está no plano que é ortogonal ao vetor $L_y(t)$. Ora, como o momento angular é constante, este plano é o mesmo ao longo tempo, finalizando a demonstração. □

Proposição 14. *Seja* $(\mathfrak{p}, \mathbb{F})$ *um sistema mecânico simples. Se a força resultante que atua sobre* $\mathfrak{p}$ *é central, então o momento angular de tal partícula (relativamente a qualquer* $y \in \mathbb{R}^3$*) é constante no tempo.*

Demonstração. Já que a partícula $\mathfrak{p}$ é fisicamente aceitável, ela tem aceleração em cada instante. Isto significa que o caminho $t \mapsto v(t)$ é diferenciável. Pelos dois primeiros exercícios do arquivo "Caminhos no $\mathbb{R}^3$", segue-se que, independente de qual seja o $y \in \mathbb{R}^3$, L_y também é diferenciável. Além disso,

$$
\begin{aligned}
L_y'(t) &= m[(\gamma(t)-y)' \times v(t) + (\gamma(t)-y)\times a(t)] \\
&= mv(t)\times v(t) + (\gamma(t)-y)\times(ma(t)) \\
&= (\gamma(t)-y)\times(ma(t)).
\end{aligned}
$$

Como a força resultante que atua sobre $\mathfrak{p}$ é central, a equação de Newton se escreve

$$ma(t) = \phi(\|\gamma(t)-y\|)(\gamma(t)-y)$$

para alguma função $\phi : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$. Neste caso, pela linearidade e pela antissimetria do produto vetorial, temos

$$L_y'(t) = \phi(\|\gamma(t)-y\|)(\gamma(t)-y)\times(\gamma(t)-y) = 0.$$

Relembrando que um caminho tem vetor tangente nulo em cada instante se, e só se, é constante, podemos declarar concluída a demonstração. □

Conclusão: *Quando uma partícula está sob a ação de forças centrais, não é necessário utilizar de três parâmetros para descrever o seu movimento; basta-nos conhecer as suas duas coordenadas no plano que é perpendicular ao momento cinético.*

Exemplo. É por este motivo (força gravitacional ser central) que cada um dos planetas, ao orbitar o sol, se encontra sobre um determinado plano. Mas Mercúrio parece fugir à regra: sua trajetória nunca se fecha numa elipse perfeita ao final de cada ciclo. A explicação para esta observação é fornecida por uma teoria mais profunda que contempla tudo (e muito mais!) aquilo que temos estudado: a *teoria da relatividade geral.* Não entraremos em maiores detalhes; a matemática para compreendê-la é um pouco mais difícil. Ao leitor curioso, sugerimos o clássico *General Relativity*, do Robert Wald, publicado pela Chigago Press.

Apêndice

Um plano é um subconjunto $P \subset \mathbb{R}^3$ gozando das seguintes propriedades:

1. com a soma e com a multiplicação por números reais, ele é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;

2. nele existem dois vetores ortogonais $\hat{u}$ e $\hat{v}$ tais que, para qualquer que seja o $x \in P$, consegue-se obter únicos números $a, b \in \mathbb{R}$ segundo os quais $x = a\hat{u} + b\hat{v}$. (Diz-se que $\hat{u}$ e $\hat{v}$ geram P)

Proposição. *Dado $x \in \mathbb{R}^3$, o conjunto P_x, definido por todo $y \in \mathbb{R}^3$ que é ortogonal à x, constitui um plano.*

Demonstração. é o conteúdo do problema 1. □

Problemas

1. Demonstre a proposição apresentada no apêndice.

2. Responda: um referencial que se encontra sob a superfície da Terra é inercial? Exponha seus argumentos.

Observação. A pergunta anterior é o ponto de partida para o que desenvolveremos no próximo arquivo.

Bibliografia

Para uma leitura complementar, sugerimos o primeiro capítulo de

1. Symon, K. R., Mecânica, Editora Campus Ltda, Rio de Janeiro, 1996.

Capítulo 8

Dinâmica nas Vizinhanças da Terra

A mecânica, como disciplina constituinte da Física, tem um encargo filosófico e experimental. No que concerne o seu rigor lógico, podemos deixar que a matemática, enquanto linguagem, fale por nós. Entretanto, em que pese o desejo de utilizá-la para entender os eventos do cotidiano (como o esguichar de água por uma mangueira ou a inquieta trajetória do Sol), se de lá não se conseguir retirar um número que, ao ser comparado com os fatos experimentais, sucinte uma boa aproximação, então de nada terão servido os esforços medidos para torná-la matematicamente correta.

Inquestionável é o fato de que os eventos do cotidiano são observados por entes que povoam a Terra. Acontece que os referenciais que ali estão fixos, pelo movimento de translação da Terra ao redor do Sol, não podem ser inerciais. Em princípio, isto exclui a possibilidade de utilizá-los para descrever, de maneira exata, a dinâmica de todo e qualquer tipo de fenômeno. Afinal, as leis da mecânica estão firmadas, primordialmente, em referenciais que estão em movimento retilíneo e uniforme com relação ao centro do universo.

Qualquer outra alternativa, senão a de insistir em tratar o problema via referenciais presos à Terra, parece inviável. Por exemplo, podería-se enviar um satélite ao espaço, colocá-lo em movimento retilíneo e uniforme com relação ao centro do universo e então utilizar do referencial oferecido por ele para, por meio do lema da relativização, realizar medidas indiretas. Entretanto, ao lado da dificuldade econômica por de trás dessa operação, o acúmulo de erros associados a estas medidas tornariam-las tão imprecisas quanto àquelas que são retiradas por meio de mera observação.

Como solucionar o problema? A ideia é utilizar do fato de que uma medida é sempre incerta (independente de qual seja ela). Posta esta condição, restringe-se a analisar somente uma certa classe de eventos que nos permitam, dentro de uma boa aproximação[1], considerar referenciais presos à Terra como sendo inerciais.

Para obter a classe de eventos passíveis de serem analisados, olha-se para àquilo que impede que os referidos referenciais sejam exatamente inerciais: o caminho que descreve o

[1] A aproximação poderá ser feita tão melhor quanto menos abrangente for a classe de eventos considerada.

movimento de translação da Terra não é afim. É um fato (que afirmamos sem demonstração) que caminhos como este podem ser aproximados por segmentos de reta interligados; aproxima-se a trajetória percorrida pela Terra num instante pequeno de tempo por um destes segmentos (veja Figura 8.1 abaixo).

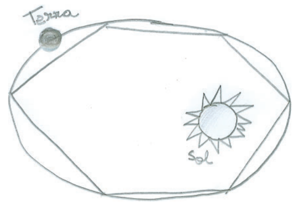


Figura 8.1: Aproximação da trajetória da Terra por segmentos de reta

Quanto mais curto for o intervalo de tempo considerado, maior é o número de segmentos de reta e melhor é a aproximação. Eis que devemos, portanto, nos retringir aos eventos cuja duração é ínfima perante ao tempo gasto pela Terra para dar uma volta entorno do Sol. é nestas particulares situações que observadores que povoam a superfície da Terra podem realizar suas análises com uma boa margem de precisão.

Considerações

Em virtude do que foi exposto no início deste arquivo, aqui consideraremos que a Terra está em movimento retilíneo e uniforme com relação ao centro do universo. Neste caso, podemos utilizar do princípio da relatividade (Proposição 12) para descrever eventos de pequena duração. Com efeito, já que a força é a mesma em todo referencial inercial, nos é permitido imaginar o problema como se a Terra estivesse centrada no referencial absoluto, lá resolvê-lo e, só depois, voltar à descrição inicial.

Observação. Nas próximas secções, trabalharemos, a todo momento, com a Terra fixa no centro do universo. Consideraremos, também, que a sua superfície é o conjunto $\mathbb{S}^2_R$, formado de todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ que distam precisamente R (o raio da Terra) da origem. Observamos, desde já, que isto é meramente uma aproximação. Afinal, em virtude de seus achatamentos nos pólos, a superfície da Terra não pode ser uma esfera perfeita.

Observação. No caso de uma partícula estar realmente próxima da superfície da Terra, uma outra aproximação (talvez mais grosseira que a anterior) assume seu lugar. De fato, nesta específica situação pode-se desconsiderar a "curvatura" da esfera $\mathbb{S}^2_R$ e representar, nas vizinhanças de cada ponto $x \in \mathbb{S}^2_R$, a superfície da Terra como sendo um plano: aquele que engloba todo $y \in \mathbb{R}^3$ que é ortogonal à x. O vetor $x/\|x\|$, "normal" à esfera, é então substituído pelo vetor $\hat{e}_3$, "normal" ao referido plano.

Forças Típicas

Nesta secção, apresentaremos exemplos de forças que aparecem na grande maioria dos eventos que são tratáveis segundo o procedimento anteriormente descrito.

Exemplo. Sejam $(\mathfrak{p}, \mathbb{F})$ um sistema mecânico simples e $\mathfrak{q}$ o centro da Terra. Seguindo o que foi proposto, $\mathfrak{q}$ está fixo no referencial absoluto. Neste caso, a interação gravitacional entre $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ é dada por

$$F(x) = -\frac{GmM}{\|x\|^3}x. \tag{8.1}$$

Ali, m é a massa da partícula, M é a massa da Terra e G é um número, chamado de *constante da gravitação Newtoniana*. Quando $\mathfrak{p} = (m, \gamma)$ está restrita a se mover nas proximidades da Terra, espera-se que a força F se torne relevante (pois $\|\gamma(t)\|$ fica pequeno), de modo a ser incluída em $\mathbb{F}$. Nesta particular situação, também se tem notícia de que a quantidade $GM/\|\gamma(t)\|^2$ é essencialmente a mesma, independente de qual for o instante t. Para observar isto, notamos que a partícula está sempre acima da superfície da Terra. Isto significa que existe uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamada de *altura de* $\mathfrak{p}$, tal que $\|\gamma(t)\| = R + h(t)$, onde R é o raio da Terra. Assim,

$$\frac{GM}{\|\gamma(t)\|^2} = \frac{GM}{R^2 + 2Rh(t) + h(t)^2}.$$

Quando $\mathfrak{p}$ está próxima da Terra, $\|\gamma(t)\|$ se aproxima de R, de modo que o termo dominante da expressão anterior é GM/R^2; precisamente uma constante. Medições com bom grau de incerteza afirmam os seguintes valores:

$$R = 6,3 \times 10^6\,\text{km}, \quad M = 5,6 \times 10^{24}\,\text{kg} \quad \text{e} \quad G = 6,7 \times 10^{-11}\,\text{m}^3/\text{kg} \times \text{s}^2.$$

Com eles, um cálculo direto nos mostra que GM/R^2 é da ordem de $9,5$ metros por segundo ao quadrado. Uma medida mais minuciosa desta quantidade, a qual é usualmente denotada por g e chamada de *aceleração gravitacional*, nos fornece o valor de $9,8\,\text{m/s}^2$. Conclusão: sempre que uma partícula estiver nas proximidades da Terra, a força (1) torna-se relevante. Em particular, ela fica inteiramente descrita pela expressão $F(x) = -mg\hat{x}$, em que $\hat{x} = x/\|x\|$. Quando neste aspecto, é comum chamá-la de *peso da partícula.*

Exemplo. Enquanto uma partícula $\mathfrak{p}$ se encontrar em movimento retilíneo e uniforme sobre a superfície da Terra, deverá existir uma força N atuando sobre ela. Ela há de ser relevante dentro de seus propósitos e incumbida da tarefa de anular o peso de $\mathfrak{p}$. A esta força, proveniente do contato entre a partícula e a superfície da Terra, dá-se o nome de *normal*. Ela fica definida pela condição $N(\gamma(t)) + F(\gamma(t)) = 0$, com t varrendo todo o intervalo em que $\mathfrak{p}$ estiver restrita a ficar sobre $\mathbb{S}^2_R$.

Exemplo. Um outro exemplo típico é a força elástica, já apresentada no arquivo anterior.

Exemplo. Para finalizar gostaríamos de apresentar uma força que, diferentemente das outras, é dissipativa. Trata-se, pois, de $F : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, que a cada terna (x, y, t) faz corresponder o vetor $F(x, y, t) = by$. O número $b > 0$ é chamado de *coeficiente de atrito viscoso*. Intuitivamente, esta força surge quando o sistema mecânico está mergulhado num meio de viscosidade diferente da água (diferença que é quantificada pelo parâmetro b).

Eventos Típicos

Nesta secção são expostos alguns eventos compreendidos pelas forças apresentadas na secção anterior.

Exemplo. Diz-se que um sistema mecânico simples $(\mathfrak{p}, \mathbb{F})$ está em *queda livre* quando a força resultante que atua em $\mathfrak{p}$ é o seu próprio peso. Enquadram-se, nesta situação, os lançamentos de projéteis e os lançamentos horizontais (como no chute que um jogador dá na bola, ou no esguichar de água pela mangueira). O que diferirá um caso do outro são as particulares condições iniciais consideradas. Em qualquer um deles, para descobrir a trajetória, deve-se obter uma solução para a equação de Newton: $a(t) = -g\hat{e}_3$.

Exemplo. Fala-se que um sistema mecânico simples $(\mathfrak{p}, \mathbb{F})$ é do tipo *massa-mola* (ou que é um *oscilador harmônico*) quando a força resultante sobre $\mathfrak{p}$ é elástica. Observamos que, se $\mathfrak{p}$ estiver se movendo sobre a superfície da Terra (como no caso da figura), em $\mathbb{F}$ também estarão presentes o peso e a normal. O que se exige de um sistema para que ele seja do tipo massa-mola é que a força *resultante* seja elástica; outras forças podem estar presentes, desde que devidamente equilibradas. A equação de Newton para um oscilador harmônico é: $a(t) = -k\gamma(t)/m$, com $k > 0$.

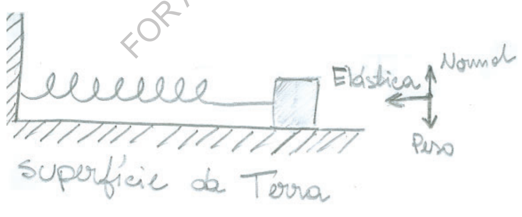


Figura 8.2: Sistema do tipo massa-mola

Exemplo. Diz-se que um sistema mecânico simples $(\mathfrak{p}, \mathbb{F})$ é do tipo *massa-mola com amortecimento* (ou que é um *oscilador harmônico amortecido*) no caso da força resultante sobre $\mathfrak{p}$ ser a soma de uma força elástica com uma outra de atrito viscoso. A equação de Newton para esta situação se resume a: $a(t) = -k\gamma(t)/m + bv(t)$, com $k, b > 0$.

Bibliografia

Para uma leitura complementar, sugerimos os dois primeiros capítulos de

1. Symon, K. R., Mecânica, Editora Campus Ltda, Rio de Janeiro, 1996.