隐马尔可夫模型

> 隐马尔可夫模型（hidden Markov model，HMM）是用于标注问题的统计学习模型，描述由隐藏的马尔可夫链随机生成观测序列的过程，属于生成模型

10.1 隐马尔可夫模型的基本概念

10.1.1 隐马尔可夫模型的定义

- **定义**：隐马尔可夫模型是关于*时序*的概率模型，描述由一个隐藏的马尔科夫链随机生成不可观测的状态随机序列，再由各个状态生成一个观测而产生观测随机序列的过程。隐藏的马尔可夫链随机生成的状态的序列称为**状态序列**（state

sequence）；每个状态生成一个观测，而由此产生的观测的随机序列称为**观测序列**（observation sequence）。序列的每一个位置又可以看作是*一个时刻*;
- 隐马尔可夫模型由*初始概率分布*、*状态转移概率分布*以及*观测概率分布*确定;
- **模型形式**:
  - 设$Q=\{q_1,...,q_N\}$是所有可能的状态的集合，$V=\{v_1,...,v_M\}$]是所有可能的观测的集合;
  - $I=(i_1,i_2,...,i_T)$是长度为T的状态序列，$O=(o_1,i_2,...,i_T)$是对应的观测序列;
  - A是状态转移概率矩阵:

$$A=[a_{ij}]_{N\times N} \tag{1}$$

    其中$a_{ij}=P(i_{t+1}=q_j|i_t=q_i),i=1,2,...,N;j=1,2,...,N$是在时刻$t$处于状态$q_i$的条件下，在时刻$t+1$转移到状态$q_j$的概率;
  - B是观测概率矩阵:

$$B=[b_j(k)]_{N\times M} \tag{2}$$

    其中$b_j(k)=P(o_t=v_k|i_t=q_j),k=1,2,...,M;j=1,2,...,N$是在时刻$t$处于状态$q_i$的条件下，生成观测$v_k$的概率;
  - π是初始状态概率向量:

$$\pi=(\pi_i) \tag{3}$$

    其中$\pi_i=P(i_1=q_i),i=1,2,...,N$是时刻$t=1$处于状态$q_i$的概率;
- 隐马尔可夫模型由初始状态概率向量π、状态转移概率矩阵A以及观测概率矩阵B决定；π和A决定状态序列，B决定观测序列，因此隐马尔可夫模型λ可以用三元符号表示

$$\lambda=(A,B,\pi) \tag{4}$$

- 隐马尔可夫模型做了两个基本假设:
  1. **齐次马尔可夫性假设**，即假设隐藏的马尔可夫链在任意时刻t的状态只依赖于其前一时刻的状态，与其他时刻的状态及观测无关，也与时刻t无关:

$$P(i_t|i_{t-1},o_{t-1},...,i_1,o_1)=P(i_t|i_{t-1}),\quad t=1,2,...,T \tag{5}$$

2. **观测独立性假设**，即假设任意时刻的观测只依赖于该时刻的马尔可夫链的状态，与其他观测及状态无关：

$$P(o_t|i_T,o_T,i_{T-1},o_{T-1},\ldots,i_{t+1},o_{t+1},i_{t-1},o_{t-1},\ldots,i_1,o_1)=P(o_t|i_t) \qquad (6)$$

- 隐马尔可夫模型可以用于标注，这是状态对应着标记（标注问题是给定观测序列去预测其对应的标记序列）；

10.1.2 观测序列的生成过程

- **观测序列生成算法**:
  1. **输入**隐马尔可夫模型$\lambda=(A,B,\pi)$，观测序列长度T;
  2. 按照初始状态分布π产生状态i_1，令$t=1$;
  3. 按照状态i_t的观测概率分布$b_{i_t}(k)$生成o_t;
  4. 按照状态i_t的状态转移概率分布$\{a_{i_t i_{t+1}}\}$产生状态$i_{t+1}\in Q$;
  5. 令$t=t+1$，如果$t<T$，转到步骤（3），否则终止;

10.1.3 隐马尔可夫模型的3个基本问题

1. 概率计算问题：给定模型$\lambda=(A,B,\pi)$和观测序列$O=(o_1,i_2,\ldots,i_T)$，计算在次模型下观测序列出现的概率$P(O|\lambda)$;
2. 学习问题：已知观测序列$O=(o_1,i_2,\ldots,i_T)$，估计模型$\lambda=(A,B,\pi)$参数，使得在该模型下观测序列概率$P(O|\lambda)$最大，即用极大似然估计法估计参数;
3. 预测问题，也叫**解码问题**（decoding）：已知模型$\lambda=(A,B,\pi)$和观测序列$O=(o_1,i_2,\ldots,i_T)$，求对给定观测序列条件概率$P(I|O)$最大的状态序列$I=(i_1,i_2,\ldots,i_T)$，即给定观测序列，求最有可能的对应的状态序列;

10.2 概率计算问题

10.2.1 直接计算法

- 直接计算法是通过列举所有可能的长度为T的状态序列$I=(i_1,i_2,\ldots,i_T)$，求各个状态序列与观测序列的联合概率$P(O,I|\lambda)$，然后对所有可能的状态序列求和得到$P(O|\lambda)$;
- 状态序列$I=(i_1,i_2,\ldots,i_T)$的概率是

$$P(I|\lambda) = \pi_{i_1} a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_3} \cdots a_{i_{T-1} i_T} \tag{7}$$

- 对于给定$I = (i_1, i_2, \ldots, i_T)$，观测序列$O = (o_1, i_2, \ldots, i_T)$的概率是

$$P(O|I, \lambda) = b_{i_1}(o_1) b_{i_2}(o_2) \cdots b_{i_T}(o_T) \tag{8}$$

- I与O的联合概率

$$\begin{aligned} P(O, I|\lambda) &= P(O|I, \lambda) P(I|\lambda) \\ &= \pi_{i_1} b_{i_1}(o_1) a_{i_1 i_2} b_{i_2}(o_2) \cdots a_{i_{T-1} i_T} b_{i_T}(o_T) \end{aligned}$$

- 对所有可能状态序列求和，得到

$$\begin{aligned} P(O|\lambda) &= \sum_I P(O|I, \lambda) P(I|\lambda) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_T} \pi_{i_1} b_{i_1}(o_1) a_{i_1 i_2} b_{i_2}(o_2) \cdots a_{i_{T-1} i_T} b_{i_T}(o_T) \end{aligned}$$

- 此方法计算量大，计算复杂度为$O(TN^T)$；

10.2.2 前向算法

- **前向概率**：给定隐马尔科夫模型λ，定义到时刻t部分观测序列为$o_1, o_2, \ldots, o_t$且状态为q_i的概率为前向概率

$$\alpha_t(i) = P(o_1, o_2, \ldots, o_t, i_t = q_i|\lambda) \tag{9}$$

可以递推地求得前向概率$\alpha_t(i)$及观测序列概率$P(O|\lambda)$；

- **观测序列概率的前向算法**：
  1. **输入**隐马尔可夫模型λ，观测序列O；
  2. 初值：$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(o_1), \quad i = 1, 2, \ldots, N$；
  3. 递推，对于$t = 1, 2, \ldots, T-1$

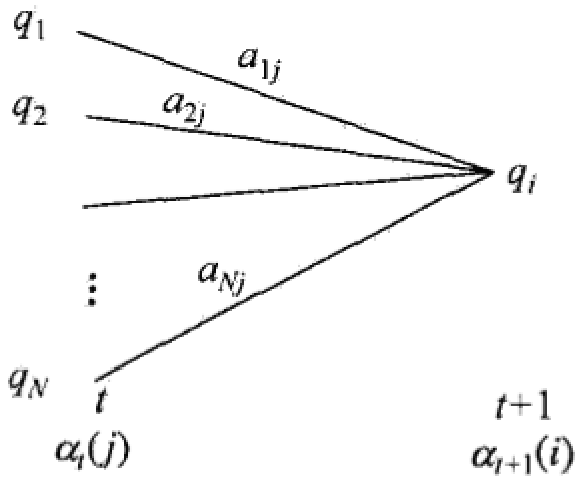
  $$\alpha_{t+1}(i) = \left[\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j) a_{ji}\right] b_i(o_{t+1}) \tag{10}$$

  4. 终止：

  $$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i) \tag{11}$$

- 算法解释：

1. 初始化前向概率，是初始时刻的状态$i_1 = q_i$和观测o_1的*联合概率*;
2. 递推公式中，计算到时刻$t+1$部分观测序列为$o_1, o_2, \ldots, o_t, o_{t+1}$且在时刻$t+1$处于状态$q_i$的*前向概率*;



3. 既然$\alpha_t(j)$是到时刻t观测到$o_1, o_2, \ldots, o_t$，且在时刻t处于状态q_j的*前向概率*，那么乘积$\alpha_t(j)a_{ji}$就是到时刻t观测到$o_1, o_2, \ldots, o_t$，且在时刻t处于状态q_j，而在时刻$t+1$到达状态q_i的*联合概率*;
4. 进一步对这个乘积在时刻t的所有可能的N个状态求和，结果就是时刻t观测到$o_1, o_2, \ldots, o_t$，并在时刻$t+1$处于状态q_i的*联合概率*;
5. 上述求和的值与观测概率$b_i(o_{t+1})$的乘积恰好就是到时刻$t+1$观测到$o_1, o_2, \ldots, o_t, o_{t+1}$并在时刻$t+1$处于状态$q_i$的*前向概率*;
6. 最后一步中，因为$\alpha_T(i) = P(o_1, o_2, \ldots, o_T, i_T = q_i|\lambda)$，所以得出$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$;

- 前向算法实际是基于“状态序列的路径结构”递推计算的算法，关键在于其*局部计算前向概率*，然后利用路径结构将前向概率递推到全局;
- 减少计算量的原因在于每一次计算直接引用前一个时刻的计算结果，避免重复，因此其计算复杂度为$O(N^2T)$;

10.2.3 后向算法

- **后向概率**：给定隐马尔科夫模型λ，定义在时刻t状态为q_i的条件下，观测序列$o_{t+1}, o_{t+2}, \ldots, o_T$的概率为后向概率

$$\beta_t(i) = P(o_{t+1}, o_{t+2}, \ldots, o_T|i_t = q_i, \lambda) \tag{12}$$

可以用递推的方法求得后向概率$\beta_t(i)$及观测序列概率$P(O|\lambda)$；

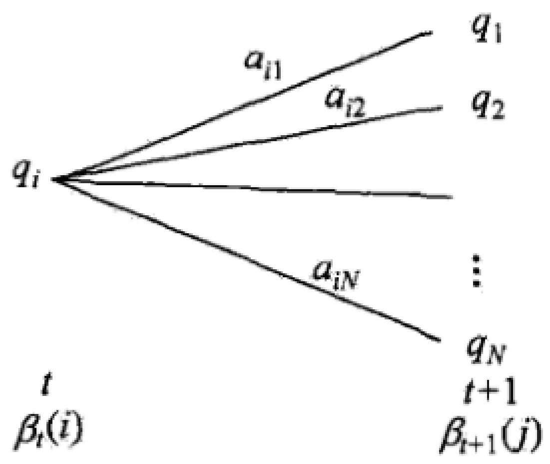
- **观测序列概率的后向算法**：
    1. **输入**隐马尔可夫模型λ，观测序列O；
    2. 初值：$\beta_T(i)=1, \quad i=1,2,\ldots,N$；
    3. 递推，对于$t=T-1,T-2,\ldots,1$

$$\beta_t(i)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j), i=1,2,\ldots,N \tag{13}$$

    4. 终止

$$P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\pi_i b_i(o_1)\beta_1(i) \tag{14}$$

- 算法解释：
    1. 初始化后向概率，对最终时刻的所有状态q_i规定$\beta_T(i)=1$；
    2. 递推公式中，为了计算在时刻t状态为q_i条件下时刻$t+1$之后的观测序列为$o_{t+1},o_{t+2},\ldots,o_T$的后向概率$\beta_t(i)$，只需考虑在时刻$t+1$所有可能的$N$个状态$q_j$的转移概率（即$a_{ij}$），以及在此状态下的观测$o_{t+1}$的观测概率（即$b_j(o_{t+1})$），然后考虑状态$q_j$之后的观测序列的后向概率（即$\beta_{t+1}(j)$）；



    3. 求$P(O|\lambda)$的思路类似，只是把初始概率π_i替代转移概率；

- 利用前向概率与后向概率的定义可以将观测序列概率统一写成

$$P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j), \quad t=1,2,\ldots,T-1 \tag{15}$$

当$t=1$时对于后向概率，当$t=T-1$时对应前向概率；

10.2.4 一些概率与期望值的计算

1. 给定模型模型λ，观测序列O，在时刻t处于状态q_i的概率，记作

$$\gamma_t(i)=P(i_t=q_i|O,\lambda) \tag{16}$$

可以通过前向后向概率计算，即

$$\gamma_t(i)=P(i_t=q_i|O,\lambda)=\frac{P(i_t=q_i,O|\lambda)}{P(O|\lambda)} \tag{17}$$

由前向概率$\alpha_t(i)$和后向概率$\beta_t(i)$定义可知

$$\alpha_t(i)\beta_t(i)=P(i_t=q_i,O|\lambda) \tag{18}$$

因此可以得到

$$\gamma_t(i)=\frac{P(i_t=q_i,O|\lambda)}{P(O|\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^N\alpha_t(j)\beta_t(j)} \tag{19}$$

2. 给定模型模型λ，观测序列O，在时刻t处于状态q_i且在时刻$t+1$处于状态q_j的概率记为

$$\xi_t(i,j)=P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j|O,\lambda) \tag{20}$$

可以通过前向后向概率计算

$$\xi_t(i,j)=\frac{P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O|\lambda)}{P(O|\lambda)}=\frac{P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O|\lambda)}{\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O|\lambda)} \tag{21}$$

而

$$P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O|\lambda)=\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j) \tag{22}$$

因此

$$\xi_t(i,j)=\frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)} \tag{23}$$

3. 将$\gamma_t(i)$和$\xi_t(i,j)$对各个时刻求和，可以得到一些有用的期望值

- 在观测序列O下状态i出现的期望值

$$\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(i) \tag{24}$$

- 在观测序列O下由状态i转移的期望值

$$\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i) \tag{25}$$

- 在观测序列O下由状态i转移到状态j的期望值

$$\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j) \tag{26}$$

10.3 学习算法

> 根据训练数据是包括观测序列和对应的状态序列还是只有观测序列，可以分别由监督学习与非监督学习实现（Baum-Welsh算法，即EM算法）

10.3.1 监督学习方法

- 假设已给训练数据包含S个长度相同的观测序列和对应的状态序列$\{(O_1,I_1),\cdots,(O_S,I_S)\}$，那么可以用极大似然估计法来估计隐马尔可夫模型的参数：
  1. 转移概率a_{ij}估计，设样本中前一个时刻处于状态i到下一个时刻转移到状态j的频数为A_{ij}，那么状态转移概率的估计是

$$\hat{a}_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} A_{ij}} \tag{27}$$

  2. 观测概率$b_j(k)$估计，设样本中状态为j并且观测为k频数为B_{jk}，那么观测概率估计是

$$\hat{b}_j(k) = \frac{B_{jk}}{\sum_{k=1}^{M} B_{jk}} \tag{28}$$

  3. 初始状态概率π_i的估计为S个样本中初始状态为q_i的频率；

10.3.2 Baum-Welsh算法

- 假设给定训练数据包含S个长度为T的观测序列$\{O_1,\cdots,O_S\}$，没有对应的状态序列，目标是学习隐马尔可夫模型$\lambda=(A,B,\pi)$的参数；

- 将观测序列看作是观测数据O，状态序列看作不可观测的隐数据I，那么隐马尔可夫模型实际上是一个含有隐变量的概率模型：

$$P(O|\lambda)=\sum_I P(O|I,\lambda)P(I|\lambda) \tag{29}$$

可以通过EM算法实现；

1. 确实完全数据的对数似然函数，所有观测数据写成$O=(o_1,o_2,...,o_T)$，所有隐数据写成$I=(i_1,i_2,...,i_T)$，则完全数据是$(O,I)=(o_1,o_2,...,o_T,i_1,i_2,...,i_T)$，其对数似然函数是

$$\log P(O,I|\lambda) \tag{30}$$

2. E步，求Q函数$Q(\lambda,\tilde{\lambda})$

$$\begin{aligned}
Q(\lambda,\tilde{\lambda}) &= \sum_I \log P(O,I|\lambda)P(I|O,\lambda) \\
&= \sum_I \log P(O,I|\lambda)\frac{P(I,O|\tilde{\lambda})}{P(O|\tilde{\lambda})} \\
&= \sum_I \log P(O,I|\lambda)P(I,O|\tilde{\lambda})
\end{aligned}$$

省去了常数因子$1/P(O|\tilde{\lambda})$，其中$\tilde{\lambda}$hi是模型参数的当前估计值，目标是得到极大化的参数；

$$P(O,I|\lambda)=\pi_{i_1}b_{i_1}(o_1)a_{i_1i_2}b_{i_2}(o_2)\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_T}(o_T) \tag{31}$$

因此函数$Q(\lambda,\tilde{\lambda})$可以写成

$$\begin{aligned}
Q(\lambda,\tilde{\lambda}) = \sum_I \log \pi_{i_1} P(I,O|\tilde{\lambda}) + \sum_I \left(\sum_{t=1}^{T-1}\log a_{i_t i_{t+1}}\right) P(I,O|\tilde{\lambda}) \\
+ \sum_I \left(\sum_{t=1}^{T}\log b_{i_t}(o_t)\right) P(I,O|\tilde{\lambda})
\end{aligned}$$

式中求和都是对所有训练数据的序列总长度T进行；

3. M步，极大化$Q(\lambda,\tilde{\lambda})$函数求模型参数

   由于要极大化的参数单独地出现在3个项中，所以只需要对各个项极大化即可：

   1. 第一项可以写成

$$\sum_I \log \pi_{i_1} P(I,O|\tilde{\lambda}) = \sum_{i=1}^{N} \log \pi_i P(O, i_1 = i|\tilde{\lambda}) \tag{32}$$

其中π_i满足约束条件$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$，利用拉格朗日乘子法，得到拉格朗日函数

$$\sum_{i=1}^{N} \log \pi_i P(O, i_1 = i|\tilde{\lambda}) + \gamma \left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1 \right) \tag{33}$$

对其求偏导并令为0

$$\frac{\partial}{\partial \pi_i} \left[\sum_{i=1}^{N} \log \pi_i P(O, i_1 = i|\tilde{\lambda}) + \gamma \left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1 \right) \right] = 0 \tag{34}$$

得到

$$P(O, i_1 = i|\tilde{\lambda}) + \gamma \pi_i = 0 \tag{35}$$

对i求和得到

$$\gamma = -P(O|\tilde{\lambda}) \tag{36}$$

因此代入可得

$$\pi_i = \frac{P(O, i_1 = i|\tilde{\lambda})}{P(O|\tilde{\lambda})} \tag{37}$$

2. 第二项可以写成

$$\sum_I \left(\sum_{t=1}^{T-1} \log a_{i_t i_{t+1}} \right) P(I,O|\tilde{\lambda}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=1}^{T-1} \log a_{ij} P(O, i_t = i, i_{t+1} = j|\tilde{\lambda}) \tag{38}$$

类似第一项，通过构造拉格朗日函数，约束条件是$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1$，可以求得

$$a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} P(O, i_t = i, i_{t+1} = j|\tilde{\lambda})}{\sum_{t=1}^{T-1} P(O, i_t = i|\tilde{\lambda})} \tag{39}$$

3. 第三项写成

$$\sum_I \left(\sum_{t=1}^{T} \log b_{i_t}(o_t) \right) P(I,O|\tilde{\lambda}) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \log b_j(o_t) P(O, i_t = j|\tilde{\lambda}) \tag{40}$$

同样用拉格朗日乘子法，约束条件是$\sum_{k=1}^{M} b_j(k) = 1$，注意只有在$o_t = v_k$时$b_j(o_t)$对$b_j(k)$的偏导数才不为0，以$I(o_t = v_k)$表示

$$b_j(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T} P(O, i_t = j|\tilde{\lambda}) I(o_t = v_k)}{\sum_{t=1}^{T} P(O, i_t = j|\tilde{\lambda})} \tag{41}$$

10.3.3 Baum-Welsh模型参数估计公式

- 将上述M步的各个概率用$\gamma_t(i)$和$\xi_t(i,j)$表示，可以写成

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{\sum_{t=1}^{T-1}\xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1}\gamma_t(i)} \\
b_j(k) &= \frac{\sum_{t=1,o_t=v_k}^{T}\gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^{T}\gamma_t(j)} \\
\pi_i &= \gamma_1(i)
\end{aligned}
$$

以上就是Baum-Welsh算法，是EM算法在隐马尔可夫模型学习中的具体实现；

- **Baum-Welsh算法**：
  1. **输入**观测数据$O=(o_1,o_2,\dots,o_T)$；
  2. 初始化：对$n=0$，选取$a_{ij}^{(0)},b_j(k)^{(0)},\pi_i^{(0)}$得到模型$\lambda^{(0)}=(A^{(0)},B^{(0)},\pi^{(0)})$；
  3. 递推，对于$n=1,2,\dots$，使用上述式子更新模型参数；
  4. **输出**最终模型参数$\lambda^{(n+1)}=(A^{(n+1)},B^{(n+1)},\pi^{(n+1)})$；

10.4 预测算法

10.4.1 近似算法

- **思想**：在每个时刻t选择在该时刻最有可能出现的状态i_t^*，从而得到一个状态序列$I^*=(i_1^*,\dots,i_T^*)$将其作为预测的结果；
- 给定隐马尔可夫模型λ和观测序列O，在时刻t处于状态q_i的概率是

$$
\gamma_t(i)=\frac{P(i_t=q_i,O|\lambda)}{P(O|\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)\beta_t(j)} \tag{42}
$$

- 在每一时刻t最有可能的状态是

$$
i_t^*=\arg\max_{1\le i\le N}[\gamma_t(i)],\quad t=1,2,\dots,T \tag{43}
$$

- 算法的优点是计算简单，但是缺点是不能保证预测的状态序列*<u>整体是最有可能的</u>*，因为预测的状态序列可能有实际不发生的部分；
- 上述方法的得到的状态序列中有可能存在*<u>转移概率为0</u>*的相邻状态；

10.4.2 维特比算法

- **维特比算法**（Viterbi algorithm）：利用*动态规划*（dynamic programming）解隐马尔可夫模型预测问题，求概率最大路径（最优路径），这条路径对应一个状态序列；

- 动态规划得到的最优路径的特性：如果最优路径在时刻t通过结点i_t^*，那么这一路径从结点i_t^*到终点i_T^*的部分路径，对于从从i_t^*到i_T^*的所有可能的部分路径来说，也是最优的；
- 因此只需从时刻$t=1$开始，递推地计算在时刻t状态为i的各条部分路径的最大概率，直到得到时刻$t=T$状态为i的各条部分路径的最大概率，即为最优路径的概率P^*，最优路径的终结点i_T^*也同时得到；
- 为了找出最优路径的各个结点，从终结点开始，由后向前逐步求得，得到最优路径；

- 定义在时刻t状态为i的所有单个路径$(i_1,i_2,\ldots,i_t)$中概率最大值为：

$$\delta_t(i)=\max_{i_1,i_2,\ldots,i_{t-1}} P(i_t=i,i_{t-1},\ldots,i_1,o_t,\ldots,o_1|\lambda),\quad i=1,2,\ldots,N \tag{44}$$

- 由此可得变量δ的递推公式为

$$\begin{aligned}\delta_{t+1}(i)&=\max_{i_1,i_2,\ldots,i_t} P(i_{t+1}=i,i_t,\ldots,i_1,o_{t+1},\ldots,o_1|\lambda)\\&=\max_{1\le j\le N}[\delta_t(j)a_{ji}]b_t(o_{t+1})\quad i=1,2,\ldots,N;t=1,2,\ldots,T-1\end{aligned}$$

- 定义在时刻t状态为i的所有单个路径$(i_1,i_2,\ldots,i_t)$中概率最大的路径的第$t-1$个结点为：

$$\psi_t(i)=\arg\max_{1\le j\le N}[\delta_{t-1}(j)a_{ji}],\quad i=1,2,\ldots,N \tag{45}$$

- **维特比算法**：
  1. **输入**模型$\lambda=(A,B,\pi)$和观测数据$O=(o_1,o_2,\ldots,o_T)$；
  2. 初始化：

$$\begin{aligned}\delta_1(i)=\pi_ib_i(o_1),\quad i=1,2,\ldots,N\\ \psi_1(i)=0,\quad i=1,2,\ldots,N\end{aligned}$$

  3. 递推，对于$t=2,3,\ldots,T$

$$\delta_t(i) = \max_{1\le j\le N}[\delta_{t-1}(j)a_{ji}]b_t(o_t) \quad i = 1, 2, \ldots, N$$
$$\psi_t(i) = \arg\max_{1\le j\le N}[\delta_{t-1}(j)a_{ji}], \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

4. 终止

$$P^* = \max_{1\le i\le N}\delta_T(i) \tag{46}$$
$$i_T^* = \arg\max_{1\le i\le N}[\delta_T(i)]$$

5. 最优路径回溯，对于$t = T-1, T-2, \ldots, 1$

$$i_t^* = \psi_{t+1}(i_{t+1}^*) \tag{47}$$

求得最优路径$I^* = (i_1^*, \ldots, i_T^*)$;